Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Silvia Lucia Pinto dos Santos

Análise das provas de Matemática do vestibular da UERJ e do ENEM

São Gonçalo
2020

Silvia Lucia Pinto dos Santos.

Análise das provas de Matemática do vestibular da UERJ e do ENEM

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Souza

São Gonçalo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

S237
TESE

Santos, Silvia Lucia Pinto dos.
Análise das provas de Matemática do vestibular da UERJ e do ENEM / Silvia Lucia Pinto dos Santos. – 2020.
102f.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Souza.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Vestibular – Teses. 2. Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil) – Teses. I. Souza, Fábio. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CRB/7 – 6150 CDU 378.4

Assinatura Data

Silvia Lucia Pinto dos Santos

Análise das provas de Matemática do vestibular da UERJ e do ENEM

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 02 de abril de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio Souza (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores — UERJ

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Profª. Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores — UERJ

Profª. Dra. Rosa Maria Garcia Márquez
Faculdade de Formação de Professores — UERJ

São Gonçalo

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família e em especial a minha filha Marina, que foram fontes de inspiração e força para trilhar essa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me fortalecer durante essa caminhada.

Ao meu pai, pelo incentivo e carinho.

Ao meu esposo e a minha filha, pelo carinho e compreensão, principalmente nas noites e finais de semana que passei estudando para as provas.

A minha mãe e minha tia Dora, que me apoiaram e incentivaram em todos os momentos, e com muito amor e carinho cuidaram da minha filha para que eu pudesse concluir o mestrado.

A minha irmã Elizabeth e minha prima Maura pela amizade e palavras positivas.

As amigas Bruna Silva e Carla Vittorino, que me fortaleceram nessa caminhada.

Aos amigos de trabalho que torceram por mim.

Aos colegas do curso, pelos momentos que passamos juntos.

Aos professores do PROFMAT, que ministraram aulas interessantes que muito contribuíram na minha formação profissional e pessoal.

Ao meu orientador, Professor Dr Fábio Souza, por ter me aceitado como orientanda e auxiliado brilhantemente nessa trajetória.

RESUMO

SANTOS, Silvia Lucia Pinto. *Análise das provas de Matemática do ENEM e do vestibular da UERJ*. 2020. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 com objetivo de avaliar anualmente o aprendizado dos alunos concluintes e egressos do ensino médio. Os dados obtidos através desse exame são utilizados pelo governo para elaborar políticas educacionais de melhoria e qualidade. A partir de 2009 o Exame Nacional de Ensino Médio ganhou grande destaque como processo seletivo para acesso às instituições de educação superior através do Sistema de Seleção Unificada (SISU). Várias universidades passaram a adotar o SISU ao longo desses anos. Porém, a universidade do Estado do Rio de Janeiro é a única universidade pública carioca que não adota o SISU. Diante disso, o presente trabalho tem o escopo de analisar questões do vestibular da UERJ e do ENEM. Nesse contexto fizemos um breve histórico sobre o ENEM e a UERJ, comparamos os conteúdos programáticos dos dois exames, apontamos questões do exame discursivo do vestibular da UERJ que abordavam conteúdos que raramente foram cobrados nos exames do ENEM e, por fim, analisamos questões da segunda fase do vestibular da UERJ com a finalidade de mostrar as mudanças ocorridas no exame discursivo.

Palavras-chave: ENEM. UERJ. Vestibular da UERJ.

ABSTRACT

SOBRENOME, Nome. *Analysis of the Mathematics tests at the UERJ and ENEM entrance exams*. 2020. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

The National High School Examination (ENEM) was created in 1998 with the objective of evaluating the learning of completed students and high school graduates. The data used through this exam is used by the government for elaborate educational policies of improvement and quality. As of 2009 or the National High School Examination gained great prominence as the process of access to higher education institutions through the Unified Selection System (SISU). Several universities Passed to adopt SISU over these years. However, a university in the State of Rio de Janeiro is a single public university in Rio that does not adopt SISU. In view of this, the present work has the scope of analyzing vestibular issues of UERJ and ENEM. In this context, he made a brief history about ENEM and UERJ, compared the syllabus contents of the two exams, pointed out the questions of the UERJ entrance exam and addressed the contents that were charged in ENEM exams and, finally, analyzed the second phase of the entrance exam at UERJ with the possibility of showing how changes occurred in the discursive exam.

Keywords: ENEM. UERJ. UERJ entrance exam.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EAD	Ensino a distância
MEC	Ministério da Educação
RJ	Rio de Janeiro
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional- Lei 9394, de 1996 (LDB) diz que o ensino será ministrado com base em treze princípios, dentre eles: garantia do padrão de qualidade.

Mas como avaliar o padrão de qualidade?

Em busca de traçar políticas públicas para a melhoria do ensino e padrão de qualidade na educação básica, na década de 1990 foram criadas várias avaliações de larga escala com a finalidade de produzir indicadores de qualidade. Em 1998, o ex-ministro de educação Paulo Renato, no governo do ex-presidente Fernando Henrique Cardoso, criou o Exame Nacional do Ensino Médio que tem como objetivo avaliar anualmente o aprendizado dos alunos concluintes e egressos dessa etapa. Na época de sua criação, o exame era constituído de 63 questões, porém ao longo dos anos a sua estrutura mudou e as suas incumbências também mudaram. Hoje, ele é constituído por 180 questões, aplicado em dois domingos consecutivos, onde 45 questões são de matemática.

O ENEM ganhou grande destaque com a criação do Sistema de Seleção Unificado (SISU), pois substituiu o vestibular de várias universidades federais e estaduais. Porém, a Universidade do Estado do Rio de Janeiro foi a única universidade pública carioca que não aderiu ao SISU, e, até hoje, permanece com o seu vestibular próprio.

Diante disso, esta pesquisa tem o objetivo de analisar e comparar os exames de Matemática do ENEM e do vestibular da UERJ. Pesquisa esta que foi estruturado em quatro capítulos. A saber:

O primeiro capítulo foi dividido em três seções. A primeira seção discorre sobre a trajetória do ENEM e seus diversos papéis desenvolvidos ao longo dos anos. A segunda seção tratará sobre a trajetória da UERJ. Enquanto a terceira seção traz uma breve comparação dos conteúdos programáticos dos dois exames.

No capítulo dois o enfoque foi para a análise de questões do ENEM com erros. Algumas questões apresentaram enunciado correto, mas o gabarito não se encontrava nas opções dadas. Outras apresentaram falta de clareza no enunciado e erros em conceito matemático e físico. Após a resolução de cada questão foi apresentado um comentário do erro encontrado.

O capítulo três se dedica a análise das questões do ENEM e da UERJ, do mesmo ano de aplicação, que abordavam os mesmos tópicos matemáticos. As questões foram aplicadas em duas turmas de 3º ano do ensino médio, de uma escola pública localizada no município de São Gonçalo. Essa aplicação teve como finalidade obter uma visão do aluno quanto ao grau de dificuldade que eles encontraram ao resolver essas questões. Além disso, foi analisada também questões da segunda fase do vestibular da UERJ, do período de 2000 a 2019.

No capítulo quatro, com a finalidade de demonstrar as mudanças ocorridas nas provas de matemática dos exames discursivos da UERJ, comparamos algumas questões dos vestibulares de 2000 até 2019.

1 BREVE HISTÓRICO DO ENEM E DA UERJ

Neste capítulo apresentaremos a trajetória do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Além de uma análise dos conteúdos programáticos cobrados nesses exames.

1.1 Um pouco sobre a trajetória do ENEM

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), criou, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio, no governo do ex-presidente Fernando Henrique Cardoso, na gestão do ministro de Educação Paulo Renato Souza.

O principal objetivo do ENEM era avaliar anualmente o aprendizado dos alunos do Ensino Médio e através dos resultados traçarem melhorias para esse ensino. Essa foi a primeira iniciativa de avaliação geral do sistema de ensino do Brasil.

O ENEM tinha outras incumbências, como a de influenciar mudanças nos currículos do ensino médio. Mas para isso, era necessário aumentar a importância desse exame e assim aumentaria o número de candidatos inscritos. Portanto, o ENEM, no seu segundo exame, passou a ser adotado também como modalidade de acesso alternativo ao vestibular de 93 instituições de ensino superior. Com isso, aumentou significativamente o número de candidatos inscritos. Pois em 1998 foram 157.221 inscritos e em 1999 foram 346.819. Já 2018, o número de candidatos inscritos atingiu 5.513.662.

A partir de 2004, a prova passou a servir para o ingresso em cursos superiores para os candidatos que, com a nota do exame, se inscrevessem para conseguir bolsa de estudo integral ou parcial em faculdades particulares pelo ProUni (Programa Universidade para Todos).

Em 2009, durante a gestão do Ministro de Educação Fernando Haddad, no governo do presidente Luiz Inácio Lula da Silva, foi criado o Sistema de Seleção Unificada (SISU).

O SISU é um sistema informatizado do Ministério da Educação que as instituições públicas de ensino superior utilizam para ofertar vagas aos candidatos participantes do ENEM**.**

OENEM sofreu mudanças nesse ano de 2009. O exame passou a ter 180 questões objetivas, 45 para cada área de conhecimento, e a prova de redação. A aplicação passou a ser em dois dias. O Novo ENEM tinha como proposta selecionar os alunos de todo o país para o ingresso em instituições de ensino superior. Nessa edição, o ENEM passou a servir como certificação de conclusão do ensino médio. Assim, houve a necessidade de adequar a matriz de referência do Enem de acordo com a Matriz de Referência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja).

Em 2010, os Programas do Governo Federal, Fundo de Financiamento Estudantil do Ensino Superior (FIES) e o Programa Ciências sem Fronteiras passaram a adotar o ENEM para obtenção de financiamento e concessão de bolsas para os alunos, respectivamente.

Em 2011, em parceria com o Ministério da Justiça e Segurança Pública, por meio do Departamento Penitenciário Nacional do Ministério da Justiça e Cidadania, houve a primeira aplicação do Exame Nacional do Ensino Médio para adultos privados de liberdade e jovens sob medida socioeducativa que inclua a privação de liberdade (ENEM PPL). Esse ENEM também visa a avaliação de desempenho escolar ao final da Educação Básica e acesso à Educação Superior, além de contribuir para elevar a escolaridade da população prisional. As provas desse exame têm o mesmo grau de dificuldade do ENEM regular. A única diferença é a aplicação que ocorre em dias úteis e sempre posterior ao ENEM regular. E essa aplicação ocorre dentro de unidades prisionais, incluindo penitenciárias, cadeias públicas, centro de detenção provisória e instituições de medidas socioeducativas.

Em 2014, através do Programa de Acordos Interinstitucionais entre o INEP e as Instituições de Educação Superior Portuguesas, a Universidade de Coimbra e a Universidade de Algarve passaram a aceitar as notas do ENEM em seus processos seletivos para os estudantes brasileiros que desejam cursar o ensino superior em Portugal.

Em 2017, muitas mudanças aconteceram. O ENEM passou a ser aplicado em dois domingos consecutivos. A redação passou a ser aplicada no primeiro dia, assim o tempo de prova passou de quatro horas e trinta minutos para cinco horas e trinta minutos. Enquanto o segundo dia do exame os passou a ter 45 questões de Ciências da Natureza e suas tecnologias e 45 questões de Matemática e suas tecnologias. O tempo de prova, no segundo domingo, passou de cinco horas e trinta minutos para quatro horas e meia.

Nesse ano, 2017, a certificação do ensino médio voltou a ser competência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja).

Outro fato importante foi a criação do ENEM em Libras, uma iniciativa da Política de Acessibilidade e Inclusão do INEP. Esse ENEM garante edital, videoprovas, cartilhas e campanhas de comunicação em libras, tornando o exame mais acessível.

Em 2018, o segundo domingo de aplicação da prova passou a ter 30 minutos a mais. O ENEM em libras ganhou o selo que identifica todo o conteúdo disponível em Língua Brasileira de Sinais.

1.2 **Um pouco da trajetória da UERJ**

A Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) é uma das maiores e mais prestigiadas universidades do Brasil e da América Latina.

A história da Universidade do Rio de Janeiro teve início em 4 de dezembro de 1950, com a promulgação da lei municipal nº547 que cria a Universidade do Distrito Federal (UDF) durante o mandato do então General de Divisão e Prefeito do Distrito Federal do Rio de Janeiro Marechal Ângelo Mendes de Moraes.

Nesse trajeto, a instituição viu seu nome mudar para acompanhar as transformações políticas que ocorriam. Em 1958, a UDF foi rebatizada como Universidade do Rio de Janeiro (URJ). Em 1961, após a transferência da capital brasileira para o Distrito Federal, a URJ passou a se chamar Universidade do Estado do Guanabara (UEG). Finalmente, em 1975, ganhou o nome definitivo de Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

1.2.1 Sistema de Cota

A UERJ foi a primeira universidade brasileira a criar e adotar o sistema de cotas. Em 2000, a Assembleia Legislativa do Estado do Rio de Janeiro (ALERJ), aprovou a Lei nº 3.524/2000, que modificou os critérios de acesso às universidades estaduais do Rio de Janeiro, reservando 50% das vagas para estudantes egressos de escolas públicas. Em 2001, 40% das vagas passaram ser destinadas aos candidatos autodeclarados negros e pardos, através da aprovação da Lei nº 3.708/2001.

Em 2003, essas leis foram modificadas e substituídas pela Lei nº 4.151/2003. Mas a legislação para a reserva de vagas compreende ainda as leis nº 5.074/2007 e nº 5.346/2008.

Atualmente, a legislação está balizada pela Lei nº 8.121, de 27 de setembro de 2018, que prorroga a reserva, por mais 10 anos, para as universidades públicas estaduais, com a inclusão de quilombolas e estabelece os percentuais em 20% das vagas reservadas a negros, indígenas e alunos oriundos de comunidades quilombolas, 20% das vagas reservadas a alunos oriundos de ensino médio da rede pública, seja municipal, estadual ou federal e 5% das vagas reservadas a estudantes com deficiência, e filhos de policiais civis e militares, bombeiros militares e inspetores de segurança e administração penitenciária, mortos ou incapacitados em razão de serviço.

1.2.2 Forma de ingresso à Universidade do Estado do Rio de Janeiro

A UERJ é a única universidade carioca que não aderiu ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e ao Sistema de Seleção Unificada (SISU) como forma de ingresso no ensino superior. Permanece com o processo seletivo através do vestibular estadual.

O vestibular estadual contempla também o ingresso na Academia de Bombeiro Militar Dom Pedro II do Corpo de Bombeiros Militar do Estado do Rio de Janeiro (ABM. Pedro II/CBMERJ). A Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF) e a Fundação Centro Universitário Estadual da Zona Oeste (UEZO) selecionavam os seus candidatos através do vestibular estadual, atualmente a UEZO e a UENF selecionam os candidatos, apenas, pelo SISU.

O vestibular estadual ocorre anualmente e é dividido em duas fases: os exames de qualificação e o exame discursivo.

Os Exames de Qualificação acontecem duas vezes ao ano, o primeiro no início do ano e o segundo exame, acontece sempre no segundo semestre. Esse exame é uma segunda chance para os candidatos que não conseguiram realizar o primeiro exame de qualificação ou que gostariam de tentar aumentar a sua nota.

O Exame de Qualificação conta com 60 questões objetivas, divididas entre as áreas de conhecimento de Ciência Humanas, Ciências da Natureza, Matemática, Linguagens e Língua Estrangeira.

Conforme o número de acertos, o candidato pode receber o conceito de A, B, C, D ou E. Veja a tabela abaixo.

Tabela 1 – Conceitos da prova de primeira fase da UERJ

SITUAÇÃO DO CANDIDATO	**CONCEITO**	**NÚMERO DE ACERTOS DA PROVA**	**PONTUAÇÃO**
aprovado	A	maior que 70%	20
	B	maior que 60% e igual a ou menor que 70%	15
	C	maior que 50% e igual a ou menor que 60%	10
	D	maior que 40% e igual a ou menor que 50%	5
reprovado	E	Igual a ou menor que 40%	Não há pontuação

Fonte: Extra do edital do vestibular 2019 da UERJ.

A pontuação atingida no exame de qualificação será somada à nota do exame discursivo.

O exame discursivo, que é a segunda fase do vestibular estadual, é restrito aos candidatos aptos em pelo menos um dos exames de qualificação. Esse exame é realizado em um único dia e é composto de três provas discursivas: uma prova de redação, que tem peso 1, para todos os cursos e duas provas de disciplinas específicas, de acordo com o curso escolhido, uma com peso 1 e outra com peso 2, valendo 20 pontos cada prova. E cada prova de disciplina específica contém 10 questões. As disciplinas específicas mencionadas anteriormente são: Física, Química, Matemática, História, Geografia, Língua Portuguesa e Literaturas, Língua Estrangeira e Biologia. Exemplificando o que foi dito, se o candidato escolher o curso de

Matemática ele fará prova de redação e de duas disciplinas específicas que são: Física e Matemática.

A pontuação máxima que o candidato poderá atingir no exame discursivo é 80 pontos.

1.3 Comparação do Conteúdo Programático do ENEM e do vestibular da UERJ

Com o intuito de analisar e comparar os conteúdos programáticos do Exame Nacional do Ensino Médio e do vestibular da Universidade do Estado do Rio de Janeiro apresentamos a composição da matriz de referência do ENEM e como o vestibular da UERJ organiza os conteúdos das duas fases, exames de qualificação e discursivo.

Segundo o Relatório Pedagógico de 2009:

> As Matrizes do Enem estão estruturadas por dois vetores orientadores: os Eixos Cognitivos e as Competências de área. O primeiro, comum a todas as áreas de conhecimento, corresponde a domínios da estrutura mental e funciona de forma orgânica e integrada às Competências de área. O segundo vetor organiza as Habilidades à luz das especificidades curriculares em cada uma das Áreas do Conhecimento. (BRASIL, 2009, p.17)

O conteúdo das provas do Exame Nacional do Ensino Médio é determinado pelas Matrizes de Referências em quatro áreas de conhecimento, mas neste trabalho estamos interessados especificamente na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias.

A matriz de referência de Matemática e suas tecnologias está dividida em sete competências e trinta habilidades. E os objetos de conhecimento são os conteúdos programáticos que estão associados às competências e habilidades. Como pode ser visto no anexo I.

O vestibular da UERJ divulga dois conteúdos programáticos: um para os exames de qualificação e outro para o exame discursivo. Esses conteúdos também podem ser consultados no anexo I.

Para comparar os conteúdos programáticos dos dois exames foi feita uma tabela com os conteúdos abordados em cada exame. Segue abaixo a tabela.

Tabela 2 - Conteúdos programáticos presentes em cada exame

Conteúdo	ENEM	UERJ
Razões e Proporções	X	X
Aritmética	X	X
Funções	X	X
Progressões	X	X
Geometria Plana	X	X
Geometria Espacial	X	X
Geometria Analítica	X	X
Trigonometria	X	X
Combinatória	X	X
Estatística	X	X
Probabilidade	X	X
Exponencial e Logaritmo	X	X
Equações e Sistemas	X	X
Gráficos/Tabelas	X	X
Matrizes	X	X
Determinante de 2ª ordem	X	X
Determinante de 3ª ordem		X
Análise de figuras	X	X
Unidade de Medidas	X	X
Conjuntos	X	X
Matemática Financeira	X	X
Sistema de Numeração	X	X
Números Complexos		X
Função Polinomial com grau maior do que 2		X
Vetores em R2 e em R3		X

Fonte: A autora, 2019.

Analisando a tabela podemos perceber que a quantidade de conteúdo do Exame Nacional do Ensino Médio é menor do que a quantidade de conteúdo do vestibular da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Nas 45 questões de Matemática, no ENEM 2018, mesmo com a extensa descrição das habilidades e competências que se almeja avaliar, notamos a predominância de alguns assuntos na prova, a saber: razão, proporção e geometria plana. Esse predomínio pode ser explicado pela facilidade de contextualizar esses assuntos. Enquanto o exame de qualificação da UERJ 2019 as sete questões de Matemática conseguiram entrelaçar vários assuntos numa mesma questão.

Através do exame discursivo, a UERJ aborda assuntos importantes da Matemática como: polinômios do terceiro grau, números complexos, teoria de conjuntos, matrizes e determinantes. Assuntos esses que apareceram em poucas edições ou nunca foram cobrados no ENEM. Isso será ratificado no capítulo III onde apresentaremos questões do exame discursivo da UERJ com assuntos que raramente apareceram ou nunca foram abordados no ENEM.

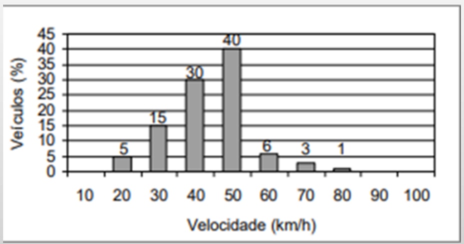
Levando em consideração que uns dos objetivos do ENEM são avaliar o aprendizado dos alunos concluintes e egressos do Ensino Médio e acesso ao ensino superior, esse exame, não poderia deixar de contemplar em seu conteúdo programático, assuntos importantes como: números complexos e polinômios com grau maior do que 3. Uma vez que esses assuntos fazem parte do currículo do ensino médio e são essenciais em algumas disciplinas do ensino superior.

2 ANÁLISE DE ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM

Neste capítulo serão apresentadas 10 questões do ENEM dos anos de 1999, 2007, 2009, 2012, 2014, 2016 e 2017, que apresentam erros: enunciado correto e gabarito que não se encontra nas opções ou enunciado incorreto e o gabarito não se encontra nas opções. Após cada questão foi feita a resolução, de acordo com o gabarito oficial quando possível, e um comentário mencionando o erro encontrado.

1. Exame Nacional do Ensino Médio-1999 (Caderno Amarelo)

61) Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam por média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com a velocidade aproximada.



61. A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de:

A) 35 km/h.

B) 44 km/h.

C) 55 km/h.

D) 76 km/h.

E) 85 km/h.

Solução:

Considerando a seguinte solução:

$$V_m=\frac{5.20+15.30+30.40+40.50+6.60+3.70+1.80}{5+15+30+40+6+3+1} \text{ km/h}$$

$V_m = \frac{100+450+1200+2000+360+210+80}{100}$ km/h

$V_m = \frac{4400}{100}$ = 44km/h.

Portanto a velocidade média é 44km/h. Logo, o gabarito está na letra B.

Comentários

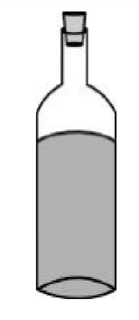
O enunciado pede para calcular a velocidade média dos veículos. Mas o que foi calculado foi a média das velocidades. Portanto, o mais correto seria o enunciado pedir para calcular o valor médio das velocidades, uma vez que velocidade média é um conceito físico bem definido que quer dizer, segundo (HALLIDAY e WALKER, 2016, p.58): "...a velocidade média $v_{méd}$, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorreu:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

A notação indica que a posição é x_1 no instante t_1 e x_2 no instante t_2."

2. Exame Nacional do Ensino Médio-1999 (Caderno Amarelo)

Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo. Conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



20. Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solução da questão 20

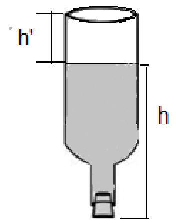
Considerando a seguinte solução:

A fórmula para calcular o volume do cilindro é dada por πR^2h, onde r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Daí, necessitamos de duas medições: uma para encontrar a altura do líquido e outra para encontrar o raio da base.

O gabarito é a letra B.

Solução da questão 21

Virando a garrafa de cabeça para baixo, a sua capacidade total é igual ao volume do líquido mais o volume da parte não ocupada por ele que chamaremos de v'. Denotaremos por h', a altura do volume v'. Assim, além das duas medições anteriores, basta medir a altura h' da parte não ocupada pelo líquido. Logo, o número mínimo de medições é igual a 3.



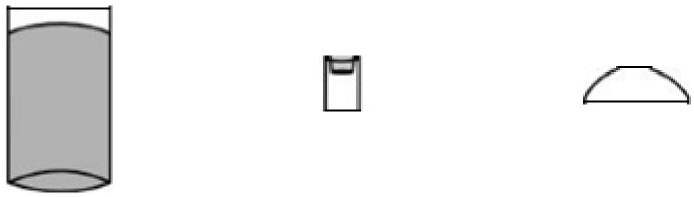
O gabarito oficial é a letra C.

Comentários:

A questão foi abordada como uma questão que apresenta erro, pelo fato do enunciado tratar a garrafa com um formato cilíndrico. Porém, a definição de cilindro é:

"Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano α , e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro circular ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α." (DOLCE e POMPEO, 2013, p.217)

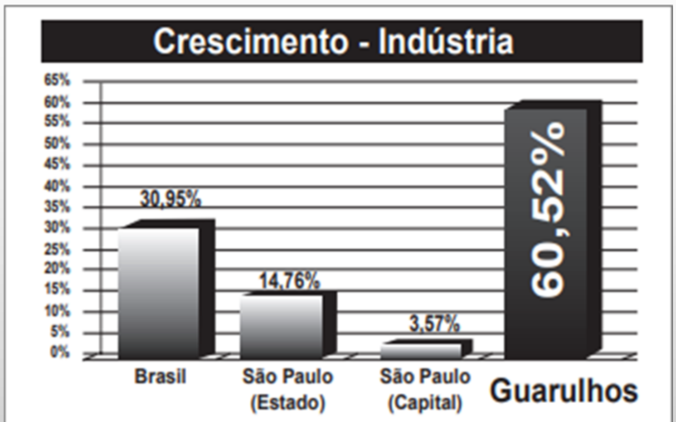
Notamos que a garrafa é composta por partes distintas. São elas:



Embora não afete diretamente na solução, percebemos um abuso de linguagem ao chamar a garrafa de cilíndrica.

3. Exame Nacional do Ensino Médio- 2007 (Caderno Amarelo)

30)A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

A) 75,28.

B) 64,09.

C) 56,95.

D) 45,76.

E) 30,07.

Solução:

Considerando que a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias seja a diferença entre a maior e a menor porcentagem apresentada no gráfico, temos que a maior porcentagem será representada por Guarulhos e a menor porcentagem por São Paulo (Capital). Assim:

60,52% - 3,57%= 56,95%.

Portanto, a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias é 56,95%. Obtendo como resultado a letra C.

Comentário:

O equívoco foi comparar a cidade de Guarulhos com o estado de São Paulo, uma vez que essa cidade está contida no estado de São Paulo. E o mesmo ocorre com o estado de São Paulo com o Brasil. Assim, não faz sentido o cálculo pedido: “a diferença entre o maior e menor centro em crescimento no polo das indústrias?”

4. Exame Nacional do Ensino Médio- 2009 (Prova vazada)

79) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0,1,2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor **não** ganhar qualquer desconto?

A) $\frac{1}{24}$

B) $\frac{3}{24}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

Solução:

A tabela apresenta as 24 possibilidades de se colocarem as cartas.

0125	1025	2015	5012
0152	1052	2051	5021
0215	1205	2105	5102
0251	1250	2150	5120
0512	1502	2501	5201
0521	1520	2510	5210

Apenas estes casos nenhum dos algarismos destes números se encontram na mesma posição dos algarismos do número 12,50: 0125, 2015, 5012, 5021, 2105, 5102, 0512, 2501, 0521. Totalizando 9 casos.

Assim,

P= $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

O gabarito oficial divulgado foi letra D.

Comentários:

Mas, ao realizar a solução da questão podemos perceber que não há opção correta para ser marcada.

Essa questão pode ser facilmente e rapidamente resolvida utilizando a permutação caótica. Porém, esse assunto geralmente não é abordado no ensino médio.

"Uma permutação dos números (1, 2,..., n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas, mas 1342 não é (1 está no seu lugar primitivo)." (MORGADO *et al.,2016, p.64*)

Seja D_n o número de permutações caóticas. É possível mostrar que:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n . \frac{1}{n!}\right)$$

No problema supracitado, temos como objetos os números 0, 1, 2, 5 e, portanto n=4.

Assim,

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$$

D_4= 24 .$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)$

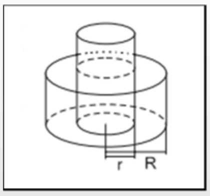
D_4= 24 .$\frac{9}{24}$ = 9.

Portanto, a probabilidade de que o consumidor não ganhe o desconto é dada por

P= $\frac{D_4}{P_4}$= $\frac{9}{24}$ = $\frac{3}{8}$.

5. Exame Nacional do Ensino Médio-2009 (Prova vazada)

84) Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1, e o outro de raio R e a altura h_2. O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.



Se R= r$\sqrt{2}$ e h_2= $\frac{\mathrm{h}_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários

30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários

A) 20 minutos.

B) 30 minutos.

C) 40 minutos.

D) 50 minutos.

E) 60 minutos.

Solução:

De acordo com o gabarito divulgado, a solução segue da seguinte forma:

O cilindro cujo raio é r e a altura é h_1 terá como volume V_1= π. r^2. h_1 e o volume da região cilíndrica formada entre o cilindro de raio maior e o cilindro de raio menor é

$$V_2= \pi \ . \ R^2. \ h_2 - \pi \ . \ r^2 \ . \ h_2= \ \frac{2.\pi.r^2.h_1}{3} - \frac{\pi.r^2.h_1}{3} = \frac{\pi.r^2.h_1}{3}.$$

Assim, com uma regra de três simples, podemos calcular o tempo necessário para encher a outra parte cilíndrica.

Volume	Tempo
$\pi.r^2.\,h_1$	30 minutos
$\frac{\pi.r^2.h_1}{3}$	x minutos

$$\frac{\pi.r^2.h_1}{\frac{\pi.r^2.h_1}{3}} = \frac{30}{x}$$

X = 10 minutos.

Portanto, o tempo necessário para encher a fonte é de 40 minutos.
Encontrando como gabarito a letra C.

Comentários:

O enunciado diz que uma fonte é “formada por dois cilindros”. Depois, fala-se em “encher essa fonte e o segundo cilindro”. Ou seja, em um determinado tempo essa fonte é formada por dois cilindros concêntricos e depois por um só, gerando a falta de clareza no enunciado.

Com isso, o candidato poderia ter uma interpretação diferente do gabarito oficial: considerar o tempo gasto para encher o segundo cilindro mais o tempo gasto para encher a fonte. Encontrando a seguinte solução: 40 minutos o tempo gasto para encher a fonte, como foi encontrado na solução citado anteriormente, acrescido de 10 minutos que representa o tempo gasta encher o segundo cilindro. Totalizando 50 minutos como resposta. Portanto, esse candidato encontraria a letra D como resposta.

6. Exame Nacional do Ensino Médio-2009 (Prova vazada)

66) Segundo a Associação Brasileira de Alumínio, o Brasil foi campeão mundial, pelo sétimo ano consecutivo, na reciclagem de latas de alumínio. Foi reciclado 96,5% do que foi utilizado no mercado interno em 2007, o equivalente a 11,9 bilhões de latinhas. Este número significa, em média, um movimento de 1,8 bilhão de reais em função de reutilização de latas no Brasil, sendo 523 milhões referentes à etapa da coleta, gerando, assim, "emprego" e renda para cerca de 180 mil trabalhadores. Essa renda, em muitos casos, como uma única renda da família.

Revista Conhecimento Prático de Geografia, nº22. (adaptado)

Com base nas informações apresentadas, a renda média mensal dos trabalhadores envolvidos nesse tipo de coleta gira em torno de:

A) R$ 173,00

B) R$ 242,00

C) R$ 343,00

D) R$ 504,00

E) R$ 841,00

Solução:

Considerando R$ 523.000.000,00 o valor que se arrecada anualmente com a coleta. Dividindo esse valor entre 180.000 trabalhadores encontraremos, aproximadamente, R$ 2.905,55 que equivale a renda anual de cada trabalhador. Agora, para encontrarmos o valor equivalente mensal de cada trabalhador, basta dividir a renda anual por 12 meses, obtendo R$ 242,13. Portanto, a resposta correta equivale a letra B.

Comentários:

A frase "Essa renda, em muitos casos, como uma única renda da família.", nos permite interpretar que existem trabalhadores que possuem uma renda e as complementam com venda de latinhas. Logo, não podemos admitir que a renda mensal de todos os trabalhadores é de aproximadamente R$ 242,13.

7. Exame Nacional do Ensino Médio-2012 (Caderno Cinza)

149) Uma maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.

Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

A)37

B) 51

C) 88

D) 89

E) 91

Solução:

O gabarito oficial seguiu a seguinte interpretação:

Admitiu-se que cada viagem tinha a duração de 4 dias e que o maquinista não pode retornar no período de férias, assim:

De 1º de janeiro a 31 de maio = 31 + 28 + 31 + 30 + 31= 151 dias. Logo, como

151= 37 . 4 + 3, segue que o maquinista poderá fazer, no máximo, 37 viagens até o fim de suas férias. Após o período de férias, restarão 365 – (151+10) = 204 dias para viajar. Como 204= 51.4, segue que ele poderá fazer, no máximo, 51 viagens, totalizando, assim,

37 + 51 = 88 viagens no ano.

Encontrando como solução a letra C.

Comentários:

Podemos resolver o problema admitindo outra interpretação:

Considerando que a viagem dure um, dois ou três dias (visto que a questão não especifica a duração da viagem), e não pode fazer mais do que uma viagem a cada quatro dias, teríamos:

De 1º de janeiro a 31 de maio = 31 + 28 + 31 + 30 + 31= 151 dias. Logo, como

151= 37 . 4 + 3, segue que o maquinista no dia 28 de maio completa mais um período de quatro dias sem viajar. Assim, haveria a possibilidade de viajar no dia 29 de maio, com duração de até 3 dias. Totalizando 38 viagens até o início das férias. Após o período de férias, restarão 365 – (151 +10) = 204 dias para viajar. Como 204 = 51.4, segue que ele poderá fazer, no máximo, 51 viagens, totalizando, assim, 38 + 51 = 89 viagens no ano.

Portanto, teríamos como solução a letra D.

Uma questão com duas possíveis soluções. Essa dupla interpretação poderia ser evitada se fosse determinada a duração de cada viagem.

8. Exame Nacional do Ensino Médio-2014 (Caderno Azul)

146) Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número *N* é dado pela expressão $2^x.\ 5^y.7^z$, na qual x, y e z são números inteiros não negativos. Sabe-se que *N* é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de *N*, diferentes de **N**, é

A) x .y . z

B) (x + 1) . (y + 1)

C) x .y . z – 1

D) (x + 1) . (y + 1) . z

E) (x + 1) . (y + 1) . (z + 1) - 1

Solução:

A solução encontrada foi:

Como N= $2^X . 5^y . 7^z$, o número de divisores positivos de N é (x + 1).(y + 1). (z + 1) e, portanto, o número de divisores positivos de N, diferente de N é (x + 1).(y + 1). (z + 1) -1. Como N é múltiplo de 10 e não de 7, podemos concluir que x$\neq$ 0, y$\neq$ 0 e z = 0.

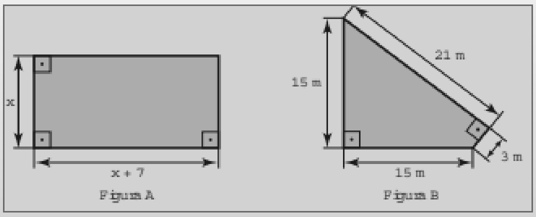
O gabarito oficial é a letra E.

Comentários:

Em rigor do enunciado, podemos constatar que em nenhum momento ele pede os divisores positivos de N. Assim, devemos considerar todos os divisores de N, positivos e negativos. Encontrando como resposta: $2(x + 1).(y + 1). (z + 1) – 1$, com $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z = 0$.

9. Exame Nacional do Ensino Médio-2016(Primeira Aplicação-caderno cinza)

147) Um senhor pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos com áreas de mesma medida, uma para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5.

b) 9,0 e 16,0.

c) 9,3 e 16,3.

d) 10,0 e 17,0.

e) 13,5 e 20,5.

Solução:

Observe a resolução:

Calculando a área do terreno da figura(b) temos:

A= $\frac{15 . 15}{2}$ + $\frac{21 . 3}{2}$ = $\frac{225+63}{2}$= $\frac{288}{2}$ = 144 m².

Como os dois terrenos terão a mesma área, temos que a área da figura (A) será igual a 144m². Assim,

x . (x + 7) = 144

$x^2 + 7x = 144$

$x^2 + 7x - 144 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 . 1 . (-144)$

$\Delta = 49 + 576$

$\Delta = 625$

x = $\frac{-7 \pm 25}{2}$

x= 9

Portanto, a largura será 9 m e o comprimento será 16 m.

Segundo o gabarito oficial a opção correta seria a letra B.

Comentários:

Não há opção com esses resultados na ordem pedida, comprimento e largura. Mesmo assim a questão não foi anulada.

10. Exame Nacional do Ensino Médio-2017 (Caderno Amarelo)

150) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento de água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 ml desse produto para cada 1 000L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender as suas especificações técnicas é

A) 11,25.

B) 27,00.

C) 28,80.

D) 32,25.

E) 49,50.

Solução:

A solução do problema, de acordo com o gabarito, seria da seguinte forma:

O volume de água na piscina é dado por V= 5.3.1,2= 18m³= 18000l.

Logo, a quantidade de produto será $\frac{18000.1,5}{1000}$= 27ml.

O gabarito oficial é a letra B.

Comentários:

Porém, acrescentando o volume de 27 ml de produto o nível da lâmina d'água dessa piscina não será preservado. Embora a quantidade seja muito pequena, não podemos deixar de considerar que houve um acréscimo no volume e na altura da lâmina.

A questão seria facilmente corrigida, se o enunciado viesse pedindo para desprezar o volume de produto acrescentado.

3 ANÁLISE DAS QUESTÕES DO VESTIBULAR DA UERJ E DO ENEM

Este capítulo foi dividido em três seções. A primeira seção trata sobre questões do ENEM e da UERJ que cobram o mesmo conteúdo. A segunda seção apresentará as percepções observadas durante a aplicação das questões em duas turmas de terceiro ano do ensino médio. Enquanto a terceira seção contará com questões da segunda fase do vestibular da UERJ, com assuntos que caíram em pouca ou nenhuma edição do ENEM.

3.1 Análise das questões do vestibular da UERJ e do ENEM que envolvem os mesmos assuntos

Nesta seção será feito um levantamento dos conteúdos abordados nas questões da UERJ e do ENEM que cobravam o mesmo assunto e um relato da visão do aluno, concluinte do Ensino Médio, ao resolver essas questões. Para isso foram selecionadas 20 questões, do mesmo ano de aplicação, onde 10 questões foram cobradas pelo ENEM e as outras 10 questões foram cobradas pela UERJ. Essas questões envolviam os seguintes assuntos: porcentagem, área de figuras planas, trigonometria, algoritmo da divisão, razão, progressão aritmética, logaritmo, equação do 1º grau, volume de sólido e sistema de equações.

A organização dessa seção foi feita da seguinte forma: primeiramente foi apresentada as soluções das questões, depois uma análise que conta com um levantamento de quais outros conteúdos eram necessários para a resolução da questão e por último, um comentário que consta a visão do aluno ao solucionar as questões.

Para obter dados para escrever sobre as impressões dos alunos, as questões selecionadas foram aplicadas em duas turmas de 3º ano do Ensino Médio, numa escola pública localizada na cidade de São Gonçalo. Antes de iniciar a seleção das questões, a autora do trabalho foi até a escola para conversar com a professora regente dessas turmas, a fim de saber o nível de conhecimento dos alunos. Isso influenciou muito na escolha das questões.

A aplicação das atividades aconteceu nos dias 12 e 16 de setembro de 2019 pela a autora do trabalho. Cada turma resolveu 10 questões. Todos os alunos participantes receberam uma lista de exercício. Essa lista com as questões foi organizada da seguinte forma: a primeira questão era da UERJ e a segunda, do ENEM abordando o mesmo assunto. O mesmo aconteceu com as questões posteriores, sempre trabalhando assuntos correlatos. Assim, cada lista continha cinco questões da UERJ e 5 questões do ENEM.

A turma 3002 foi a primeira turma que a atividade foi aplicada, no dia 12 de setembro. Contou com a participação de 18 alunos e teve a duração de duas horas e meia, que corresponde a três tempos de aula.

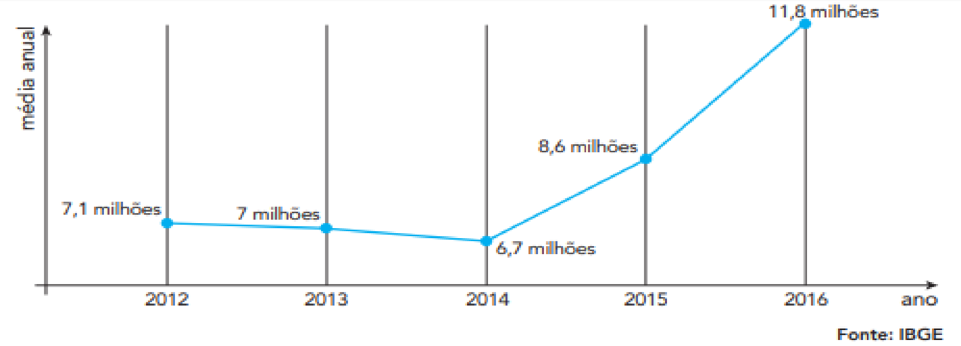
A segunda turma, a 3001, contou com a participação de 23 alunos e teve a duração de três tempos de aula também. Mas devido a um evento sobre Setembro Amarelo que aconteceu na escola no dia 12 de setembro, só foi possível trabalhar dois tempos de aula nesse dia. Havendo a necessidade da autora do trabalho retornar no dia 16 de setembro, e utilizar mais um tempo de aula para terminar a aplicação da atividade.

A seguir apresentaremos as questões, suas respectivas soluções, análises e comentários.

1. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – 2019 (1º Exame de Qualificação)

Questão 29

MÉDIA DE DESEMPREGADOS POR ANO



A partir do gráfico, o aumento da média anual de desempregados de 2014 para 2016 está mais próximo do seguinte percentual:

A) 68%
B) 76%
C) 80%
D) 84%

Solução:

De acordo com o gráfico, em 2014 havia 6,7 milhões de desempregados. Enquanto em 2016, a média anual foi de 11,8 milhões. Assim, temos:

$\frac{6,7}{11,8} = \frac{100}{x}$

6,7x = 1180

x = $\frac{1180}{6,7}$

x= 176,1%

Logo, houve um aumento de 76,1%. Obtendo como resposta a letra D.

2. Exame Nacional do Ensino Médio- 2018 (Caderno Amarelo- Primeira

167) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais da saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em: <http//portalsaude.saude.gov.br>. Acesso em: 16 ago.2012

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

A)12

B) 18

C) 30

D) 40

E) 50

Solução:

De acordo com a tabela o grupo de risco é composto por crianças, profissionais da saúde gestantes, indígenas e idosos, totalizando 30 milhões de pessoas. Porém, apenas 12 milhões já foram vacinadas. Assim,

$\frac{30}{12} = \frac{100}{x}$

30x = 1200

x = $\frac{1200}{30}$

x = 40%

Encontramos como resposta a letra D.

Análise das questões:

As duas questões envolvem problemas de porcentagem. Porém, a questão da UERJ traz também a leitura de gráfico. Enquanto o ENEM trabalha com a organização dos dados através da tabela.

Além da porcentagem, leitura de tabela e gráfico, as questões exigem que os alunos dominem outras habilidades, tais como: operações com números reais, proporção e regra de três simples.

Comentários:

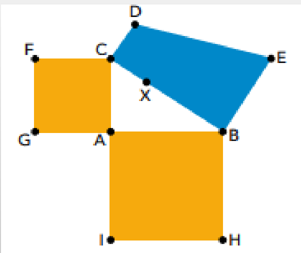
Após resolverem as duas questões, os alunos acharam a questão da UERJ mais fácil, embora todos declararem que tiveram dificuldade nas operações com números decimais. Atribuíram à interpretação de dados da tabela a dificuldade encontrada na resolução da questão do ENEM.

3. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2018 (1º Exame de Qualificação)

Questão 32

Considere na imagem abaixo:

- os quadrados ACFG e ABHI, cujas áreas medem, respectivamente, S_1 e S_2;
- o triângulo retângulo ABC;
- o trapézio retângulo BCDE, construído sobre a hipotenusa BC, que contém o ponto X.



Sabendo que CD = CX e BE = BX, a área do trapézio BCDE é igual a:

A) $\frac{S_1+S_2}{2}$

B) $\frac{S_1+S_2}{3}$

C) $\sqrt{S_1 S_2}$

D) $\sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$

Solução:

I) Denotamos por S_1 a área do quadrado ACFG : $S_1 = a^2$, então $\overline{AC}$ = a.

II) Denotamos por S_2 a área do quadrado ABHI: $S_2 = b^2$, então $\overline{AB}$ = b.

III) Tome $\overline{CD} = \overline{CX}$ = c e $\overline{BE} = \overline{BX}$ = d, então $\overline{BC}$ = c + d

Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo ABC, temos:

$(\overline{BC})^2 = (c+d)^2 = a^2 + b^2$

$(c + d) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{S_1 + S_2}$

Calculando a área do trapézio, encontramos:

Área do trapézio: $\frac{(\overline{CD}+\overline{BE}).\overline{BC}}{2} = \frac{(c+d).(c+d)}{2} = \frac{(\sqrt{S_1+S_2}).(\sqrt{S_1+S_2})}{2} = \frac{(\sqrt{S_1+S_2})^2}{2} = \frac{S_1+S_2}{2}$

Portanto, a resposta correta é a letra A.

4) Exame Nacional do Ensino Médio- 2017 (Caderno Azul 7- Segunda Aplicação)

177) Um fabricante recomenda que, para cada m² do ambiente a ser climatizado, são necessários 800 BTUh, desde que haja até duas pessoas no ambiente. A esse número deve ser acrescentado 600 BTUh para cada pessoa a mais, e também para cada aparelho eletrônico emissor de calor no ambiente. A seguir encontram-se as cinco opções de aparelhos desse fabricante e suas respectivas capacidades técnicas:

Tipo I: 10 500 BTUh

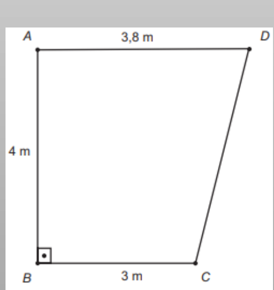
Tipo II: 11 000 BTUh

Tipo III: 11 500 BTUh

Tipo IV: 12 000 BTUh

Tipo V: 12 500 BTUh

O supervisor de um laboratório precisa comprar um aparelho para climatizar o ambiente. Nele ficarão duas pessoas mais uma centrífuga que emite calor. O laboratório tem forma de trapézio retângulo, com as medidas apresentadas na figura.



Para economizar energia, o supervisor deverá escolher o aparelho de menor capacidade térmica que atenda às necessidades do laboratório e às recomendações do fabricante.

A escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

Solução:

Calculando a área ocupada pelo laboratório, que corresponde à área de um trapézio, temos:

A = $\frac{(B+b).h}{2}$

A = $\frac{(3+3,8).4}{2}$ = 6,8 . 2= 13,6 m^2.

Assim,

13,6 . 800 = 10880 BTUh.

Como no ambiente também terá um aparelho que emite calor, temos: 10880 + 600 = 11480.

O tipo III é o aparelho mais adequado. Encontrando a letra C como resposta.

Análise das questões:

As questões 3 e 4 abordam o assunto área das figuras planas. Para a resolução da questão da UERJ, além do cálculo da área do quadrado e do trapézio, é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a altura do trapézio. Além disso, tinham que encontrar os lados dos quadrados a partir da área dada e escrever o lado $\overline{CB}$ em função de $\overline{CX}$ e $\overline{BX}$. Após obter esses dados é possível encontrar a área do trapézio retângulo.

Enquanto a questão do ENEM exige o cálculo da área do trapézio e que os alunos dominassem as operações com decimais. Além da interpretação do enunciado, em que ele deveria identificar quantos BTUh a mais ele deveria utilizar.

Comentários:

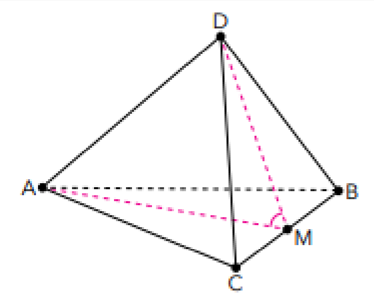
Após a resolução dessas duas questões, dos 18 alunos que participaram da pesquisa, apenas um não teve dificuldade em realizar essas questões. Os dezessete alunos julgaram muito complexa a questão abordada pela UERJ, alegaram ter dificuldade nas operações algébricas. Além disso, não se lembravam da fórmula da área do trapézio, área do quadrado e do Teorema de Pitágoras.

Porém, esses mesmos alunos não acharam a questão do ENEM de fácil resolução, pois não dominavam as operações envolvendo números decimais.

5. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2017 (2º Exame de Qualificação)

Questão 24

Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



O cosseno do ângulo A$\hat{M}$D equivale a:

A)$\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{5}$

Solução:

Antes de resolver a questão vamos apresentar duas definições que serão essenciais na solução da questão.

"As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice e o dobro da outra." (DOLCE; POMPEO,1993, p.122)

"O ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o baricentro do triângulo." (DOLCE; POMPEO,1993, p.123).

Na figura, DM e AM são medianas de duas faces da pirâmide dada, que constituem triângulos equiláteros. Traçando a altura do tetraedro, partindo do ponto D, interceptando o segmento AM e determinando o ponto G. Em que G será o baricentro do triângulo equilátero ABC. Chamando GM = x temos que AG= 2x. Assim AM = 3x é a altura do triângulo ABC. Daí, como a altura do triângulo equilátero é dado por h= $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ onde l = 6 cm. Temos que h=$\frac{6\sqrt{3}}{2}$ = $3\sqrt{3}$ cm. E como AM = 3x, temos:

3x = $3\sqrt{3}$

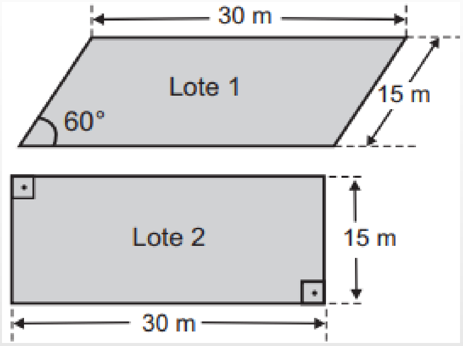
x = $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

x = $\sqrt{3}$ cm.

A altura do triângulo equilátero BCD também será $3\sqrt{3}$ cm. Assim, cos (A$\widehat{M}$D) = $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{3}$. Portanto, a resposta correta é a letra B.

6. Exame Nacional do Ensino Médio- 2016 (Caderno 16- Terceira Aplicação)

147) Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que esta família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R$: 100 000,00 e R$: 150 000,00, respectivamente.



Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1,7 como aproximações, respectivamente, para sen(60º), cos(60º) e $\sqrt{3}$.

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

Pai: Devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe: Se desconsiderarmos os preços poderemos comprar qualquer lote para executar o nosso projeto, pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem a área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2: Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

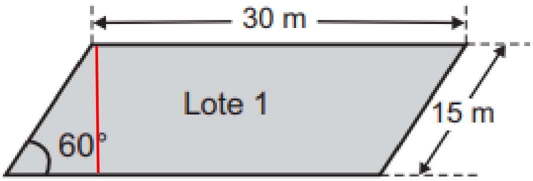
Corretor: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menos custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a)

A) pai B) mãe C) filho 1 D) filho 2 E) corretor

Solução:

Para calcular a área do lote I é necessário descobrir o valor da altura do paralelogramo. Traçando a altura do paralelogramo, formamos um triângulo retângulo em que a hipotenusa é o lado de medida 15 m e o cateto oposto corresponde à altura do paralelogramo que chamaremos de h. Do enunciado temos sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sqrt{3} \cong$ 1,7.



Aplicando a relação trigonométrica, temos:

Seno 60º = $\frac{h}{15}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{15}$

2h = 15$\sqrt{3}$

Considerando $\sqrt{3} \cong$ 1,7, temos:

2h = 15 .1,7

2h = 25,5

h = $\frac{25{,}5}{2}$

h = 12,75 m.

Portanto, a área do lote I é dada por:

A = 30 . 12,75 = 382,5 m^2.

Logo, calculando a área do lote II, temos:

A = 30 . 15 = 450 m^2.

Após o cálculo das áreas de cada lote é possível ver que o lote I não atende a necessidade da família, pois esse lote tem área menor que 400 m^2. Assim, o único que argumentou corretamente foi o filho I.

A questão tem como resposta a letra C.

Análise das questões:

Analisando as duas questões, 5 (UERJ-2014) e 6 (ENEM-2016), podemos ver que ambas abordam as razões trigonométricas.

A UERJ traz para prova uma questão, que além de abordar a razão trigonométrica, alude também a geometria plana, cobrando as propriedades do triângulo equilátero, mediana, operações com números reais, baricentro e propriedade do baricentro.

Enquanto a questão do ENEM cobrou, além da razão trigonométrica, cálculo de área de figura plana e operações com números reais.

Comentários:

A maioria dos alunos, após resolverem as duas questões, julgou mais difícil a questão 5, da UERJ. Pois não lembravam ou nem mesmo ouviram falar sobre mediana e consequentemente que o encontro das três medianas determina um ponto chamado baricentro. Apenas um aluno dominava todos esses conhecimentos, mesmo assim teve dificuldade para solucionar a questão.

A questão 6 eles acharam mais fácil. Mas alguns alunos tiveram dificuldades em analisar os argumentos e fazer cálculos envolvendo números decimais. Nessa questão, três alunos estavam convictos que o argumento da mãe estava correto, pois alegaram que o lado 15m do lote 1 representava a altura do paralelogramo, assim, acharam as áreas iguais dos lotes.

7. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2016 (2º Exame de Qualificação)

Questão 24

Uma campanha de supermercado permite a troca de oito garrafas vazias, de qualquer volume, por uma garrafa de 1 litro cheia de guaraná. Considere uma pessoa que, tendo 96 garrafas vazias, fez todas as trocas possíveis. Após esvaziar todas as garrafas que ganhou, ela também as troca no mesmo supermercado.

Se não são acrescentadas novas garrafas vazias, o total máximo de litros de guaraná recebidos por essa pessoa em todo o processo de troca equivale a:

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15

Solução:

Inicialmente a pessoa possui 96 garrafas vazias. Fazendo a primeira troca ela obterá 12 garrafas cheias, pois 96 : 8 = 12. Após esvaziar as 12 garrafas ela fez outra troca, obtendo mais uma garrafa cheia. Em todo processo, essa pessoa obteve 13 litros de guaraná.

Encontrando a letra B como resposta correta.

8. Exame Nacional do Ensino Médio-2015 (Caderno 13- Cinza- Segunda Aplicação)

170) Na imagem, a personagem Mafalda mede a circunferência do globo que representa o planeta Terra.

Em uma aula de matemática, o professor considera que a medida encontrada por Mafalda, referente à maior circunferência do globo, foi de 80 cm. Além disso, informa que a medida real da maior circunferência da Terra, a linha do Equador, é de aproximadamente 40 000 km.

QUINO, **Toda Mafalda**. São Paulo: Martins Fontes, 2008 (adaptado.)

A circunferência da linha do Equador é quantas vezes maior do que a medida encontrada por Mafalda?

A) 500

B) 5 000

C) 500 000

D) 5 000 000

E) 50 000 000

Solução:

Para solucionar o problema devemos encontrar quantas vezes a medida de 80 cm cabe em 40000 km. Para isso devemos trabalhar com os dois valores, citado no enunciado, na mesma unidade de medida. Então, fazendo a transformação de km para cm temos que: 40000 km = 4000000000 cm. Assim, 4000000000: 80 = 50 000 000.

Encontrando como opção correta a letra E.

Análise das questões:

O conhecimento exigido para a realização da questão 7 proposta pela UERJ-2016 e a questão 8 proposta pelo ENEM-2015 é o algoritmo da divisão euclidiana.

Para resolver a questão da UERJ, os alunos necessitavam dos seguintes conteúdos: divisão, adição e subtração.

Enquanto a questão do ENEM exigia: divisão e transformação de unidade de medida.

Comentários:

Após resolverem as duas questões, os alunos acharam a questão da UERJ mais fácil. Conseguiram interpretar o enunciado, entendendo quais operações eram necessárias para encontrar a solução da questão.

Na questão do ENEM relataram que as dificuldades encontradas foram: compreender a ideia da divisão de "quantas vezes uma medida cabe dentro de outra", realizar o algoritmo da divisão e fazer a transformação de unidade de medida.

Alguns alunos, após o professor explicar a necessidade de colocar os valores do enunciado numa mesma unidade de medida, optaram no primeiro momento transformar 80 cm para km. Mas após a transformação, ao se depararem com um número decimal, resolveram transformar 40000 km para cm. Alegaram que não dominavam as operações com números decimais.

9. Universidade do Estado do Rio de Janeiro - 2015 (1º Exame de Qualificação)

Questão 23

Na imagem da etiqueta, informa-se o valor a ser pago por 0,256 kg de peito de peru.

O valor, em reais, de um quilograma desse produto é igual a:

A) 25,60

B) 32,76

C) 40,00

D) 50,00

Solução:
Podemos encontrar o valor do quilograma do peito de peru resolvendo a seguinte regra de três:

0,256 kg ———————— 12,80

1 kg ———————— x

$\frac{0,256}{1} = \frac{12,80}{x}$

0,256 x = 12,80

$x = \frac{12,80}{0,256} = \frac{12800}{256}$

x = 50.

Logo, o valor do quilograma do peito de peru é R$ 50,00. A letra D é a resposta correta.

10. Exame Nacional do Ensino Médio-2014 (Caderno Amarelo- Primeira Aplicação)

142) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre a pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina o seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

Jogador I – Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.

Jogador II – Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.

Jogador III – Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.

Jogador IV – Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.

Jogador V – Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

A) I

B) II

C) III

D) IV

E) V

Solução:

Calculando a razão entre o total de vezes que o jogador derrubou o pino e o número de jogadas, temos:

Jogador I, derrubou: $\frac{50}{85} \cong 0,59$

Jogador II, derrubou: $\frac{40}{65} \cong 0,62$

Jogador III: $\frac{20}{65} \cong 0,31$

Jogador IV: $\frac{30}{40} = 0{,}75$

Jogador V: $\frac{48}{90} \cong 0{,}53$

Comparando cada número decimal, obtido pela divisão do antecedente pelo consequente, temos que o jogador IV obteve o maior desempenho. Logo a letra D é a resposta correta.

Análise das questões:

O conhecimento exigido para a realização das questões 9 e 10 é a razão entre dois números.

Para resolver a questão da UERJ, os alunos necessitavam dos seguintes conteúdos: regra de três simples, proporção e razão.

Enquanto a questão do ENEM exigia que o aluno soubesse escrever uma razão, a partir dos dados do enunciado, transformar a razão em um número decimal ou inteiro através da divisão do antecedente pelo consequente e comparar números decimais e inteiros.

Assim, podemos perceber que a questão do ENEM cobrava mais conteúdo do que a questão do UERJ.

Comentários:

Os alunos consideraram as duas questões difíceis pelo fato de envolverem números decimais. Porém, tiveram menos dificuldade na resolução da questão do ENEM. Embora o resultado da divisão fosse um número decimal, na questão do ENEM, alegaram ser mais fácil dividir um número inteiro por outro número inteiro do que um número decimal por outro decimal, como aconteceu na questão da UERJ.

11. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – 2014 (2º Exame de Qualificação)

Questão 25

Admita a realização de um campeonato de futebol no qual as advertências recebidas pelos atletas são representadas apenas por cartões amarelos. Esses cartões são convertidos em multas, de acordo com os seguintes critérios:

- os dois primeiros cartões recebidos não geram multas;
- o terceiro cartão gera multa de R$: 500,00;
- os cartões seguintes geram multas cujos valores são sempre acrescidos de R$: 500,00 em relação ao valor da multa anterior.

Na tabela, indicam-se as multas relacionadas aos cinco primeiros cartões aplicados a um atleta.

Cartão amarelo recebido	Valor da multa (R$)
1º	–
2º	–
3º	500
4º	1.000
5º	1.500

Considere um atleta que tenha recebido 13 cartões amarelos durante o campeonato. O valor total, em reais, das multas geradas por todos esses cartões equivale a:

A) 30.000

B) 33.000

C) 36.000

D) 39.000

Solução:

Como os dois primeiros cartões recebidos não são convertidos em multas, encontramos a seguinte sequência a partir do terceiro termo: 500, 1000, 1500, ... onde em cada termo é sempre acrescido 500 reais. Portanto, estamos diante de uma Progressão Aritmética (P.A), onde o primeiro termo a_1 = 500 e a razão r = 500. Mas a questão pede o valor total que o atleta terá que pagar ao receber os 13 cartões. Podemos resolver a questão calculando a soma dos 11 termos, como dito anteriormente, o primeiro e o segundo termo não geram multas.

Conforme afirma Iezzi *et al*. (2007), a soma dos termos de uma Progressão Aritmética e o termo geral de uma Progressão Aritmética são encontrados a partir das seguintes fórmulas, respectivamente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \quad \text{e} \qquad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \qquad (2)$$

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos encontrar o termo a_n. Assim, como n = 11, a_1= 500 e r = 500, temos:

a_{11}= 500 + (11 - 1). 500

a_{11} = 500 + 5000

a_{11}= 5500.

Agora é possível calcular a soma dos 11 termos.

$S_{11} = \frac{(500+5500).11}{2}$

$S_{11} = \frac{6000.11}{2}$

S_{11}= 3000 . 11= 33000.

A letra B é a resposta correta.

12. Exame Nacional do Ensino Médio- 2013 (Caderno Amarelo- Primeira Aplicação)

154) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção de produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

A) 497,25

B) 500,85

C) 502,87

D) 558,75

E) 563,25

Solução:

Como a perspectiva de crescimento da produção anual é constante, a cada ano teremos um acréscimo de 1,25 toneladas. Portanto, 50,25; 51,50; 52,75; 54..., representam termos de uma Progressão Aritmética (P.A).

A questão pede para calcular a quantidade total produzida em 10 anos. Assim, temos que encontrar a soma dos 10 termos dessa P.A. Porém, para fazermos esse cálculo, é necessário encontrarmos o termo a_{10}. Logo, utilizando a fórmula do termo geral da P.A, temos:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1). r}$$

a_{10} = 50,25 + (10 - 1). 1,25

a_{10} = 50,25 + 9 . 1,25

a_{10}= 50,25 + 11,25

a_{10} = 61,50.

Calculando a soma dos dez termos, encontramos:

$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2}$

$S_{10} = \frac{(50,25+61,50).10}{2}$

S_{10}= 111,75 . 5

S_{10} = 558,75.

Portanto, a resposta correta é a letra D.

Análise das questões:

As questões 11 (UERJ-2014) e 12 (ENEM-2013) abordam os assuntos: leitura de tabela, operações com números reais e Progressão Aritmética. Para resolver as questões é necessário que os alunos utilizem as fórmulas do termo geral da P.A e da soma dos termos da P.A.

A questão da UERJ exigia mais cautela e atenção na interpretação do enunciado, pois a P.A é formada a partir do terceiro termo. Para a resolução da questão é necessário encontrar o último termo e calcular a soma dos 11 termos.

A questão do ENEM também trabalha com os dados dispostos em uma tabela, porém os números envolvidos são decimais.

Comentários:

Ao perguntar aos alunos como as questões poderiam ser resolvidas, apenas dois alunos responderam que utilizando o conteúdo de Progressão Aritmética era possível encontrar a solução. Esses se lembraram das fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma P.A.

No entanto, ao compararem as duas questões, eles acharam a questão do ENEM mais fácil, embora admitirem ter dificuldades nas operações com números decimais.

A maioria dos alunos errou a questão da UERJ, pois tiveram dificuldade para entender que embora o atleta tivesse recebido 13 cartões, apenas 11 cartões gerariam multas. Fizeram os cálculos considerando 13 termos, ou seja, n = 13.

Outros alunos necessitaram um pouco mais de tempo para resolver a questão, pois não utilizaram as fórmulas da P.A. Partiram do princípio de que, a partir do segundo termo, cada termo era a soma da constante com o termo anterior. Assim calcularam os 11 termos, na questão 11, e depois somaram os termos encontrados. Da mesma forma, esses alunos, resolveram a questão 12.

13. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – 2013 (2º Exame de Qualificação)

Questão 36

O código de uma inscrição tem 14 algarismos; dois deles e suas respectivas posições estão indicados abaixo.

5				8				x					

Considere que, nesse código, a soma de três algarismos consecutivos seja sempre igual a 20. O algarismo representado por x será divisor do seguinte número:

A) 49

B) 64

C) 81

D) 125

Solução:

Considere a_1, a_2, a_3, ... ,a_{14} cada algarismo do código dessa inscrição, onde a_1= 5, a_5 = 8 e a_9 = x. Como a soma de três algarismos consecutivos é sempre igual a 20, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 20 \quad (1)$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = 20 \quad (2)$$
$$a_3 + a_4 + a_5 = 20 \quad (3)$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 20 \quad (4)$$
$$a_5 + a_6 + a_7 = 20 \quad (5)$$
$$a_6 + a_7 + a_8 = 20 \quad (6)$$
$$a_7 + a_8 + a_9 = 20 \quad (7)$$

Substituindo o valor a_1 = 5 na equação (1), temos:

$5 + a_2 + a_3 = 20$

$\boxed{a_2 + a_3 = 15.}$ (8)

Substituindo a equação (8) na equação (2), temos:

$15 + a_4 = 20$

$a_4 = 5.$

Substituindo os valores de $a_4 = 5$ e $a_5 = 8$ na equação (4), temos:

$a_4 + a_5 + a_6 = 20$

$5 + 8 + a_6 = 20$

$a_6 = 7.$

Substituindo os valores de $a_5 = 8$ e $a_6 = 7$ na equação (5), temos:

$a_5 + a_6 + a_7 = 20$

$8 + 7 + a_7 = 20$

$a_7 = 5.$

Substituindo os valores de $a_6 = 7$ e $a_7 = 5$ na equação (6), temos:

$7 + 5 + a_8 = 20$

$a_8 = 8.$

Substituindo os valores de $a_7 = 5$ e $a_8 = 8$ na equação (7), temos:

$5 + 8 + x = 20$

$x = 7$

Como 49 é divisível por 7, temos que a letra A é a resposta correta.

14. Exame Nacional do Ensino Médio- 2012 (Caderno 5- Amarelo)

155) As curvas de ofertas e demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

Q_o= -20 + 4P

Q_D= 46 – 2P

em que Q_O é a quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_o e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

A) 5

B) 11

C) 13

D) 23

E) 33

Solução:

O valor do preço em equilíbrio acontece quando a quantidade de oferta Q_o é igual a quantidade de demanda Q_d. Isto, igualando Q_o a Q_d, tem-se:

Q_o= Q_d

- 20 + 4P = 46 – 2P

6p = 66

P = $\frac{66}{6}$

P = 11

Encontrando como resposta a letra B.

Análise das questões:

As duas questões trabalham o assunto equação do 1º grau e operação com números reais.

A questão da UERJ também aborda sequência numérica e divisibilidade.

Enquanto a questão do ENEM traz um problema que é possível encontrar a solução através da resolução da equação do 1º grau.

Comentários:

Os alunos consideraram a questão do ENEM mais fácil, eles não tiveram dificuldade em interpretar o problema e resolver a equação. Porém, a maioria julgou a questão da UERJ mais trabalhosa e tiveram dificuldade em expressar algebricamente o problema. Outro empecilho que os alunos encontraram foi descobrir o número que era divisível por x.

15. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2012 (1º Exame de Qualificação)

Questão 27

Um soldado fez n séries de flexões de braço, cada uma delas com 20 repetições. No entanto, como consequência das alterações da contração muscular devidas ao acúmulo de ácido lático, o tempo de duração de cada série, a partir da segunda, foi sempre 28% maior do que o tempo gasto para fazer a série imediatamente anterior. A primeira série foi realizada em 25 segundos e a última em 1 minuto e 40 segundos.

Considerando log2 = 0,3, a soma do número de repetições realizadas nas n séries é igual a:

A) 100

B) 120

C) 140

D) 160

Solução:

Seja t_1 o tempo gasto para fazer a primeira série, onde t_1 = 25 s. Enquanto t_2, o tempo gasto para fazer a segunda série, de acordo com o enunciado, será:

t_2 = t_1 + 28%t_1 = t_1 + 0,28t_1 = 1,28t_1 = 1,28 . 25.

O tempo gasto para fazer a terceira série será:

t_3= 1,28t_2 = $(1{,}28)^2$. 25, e assim acontece até o último termo que é t_n = 100 s. Logo, teremos uma Progressão Geométrica (P.G), onde o primeiro termo a_1 = 25, a razão q = 1,28 e a_n = 100. Conforme afirma Dante (2010) o termo geral da Progressão Geométrica pode ser encontrado a partir da seguinte fórmula.

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Utilizaremos a fórmula acima para encontrarmos o valor de n. Assim,

100 = 25 .$(1{,}28)^{n-1}$
4 = $(1{,}28)^{n-1}$
log 4 = log $(1{,}28)^{n-1}$
log 2^2 = (n - 1) log (1,28)

$$\boxed{2 \log 2 = (n - 1) \log (1{,}28)} \quad (1)$$

Calculando log (1,28) que aparece na equação (1), temos:

log (1,28) = log $\left(\frac{128}{100}\right)$ = log 128 – log 100 = log 2^7 - log 10^2 = 7 log 2 – 2 log 10

Do enunciado temos que log 2 = 0,3. Assim,

$$\boxed{\log (1{,}28) = 7 \,.\, 0{,}3 - 2 \,.\, 1 = 2{,}1 - 2 = 0{,}1} \quad (2)$$

Substituindo o valor encontrado em (2) na equação (1) temos:
2. 0,3 = (n - 1) . 0,1

0,6 = (n - 1). 0,1

$\frac{0,6}{0,1}$ = (n – 1)

6 = n – 1

n = 7

Como foram 20 repetições em cada uma das 7 séries, encontramos como resultado 20 . 7 = 140 flexões.

Logo, a letra C será o gabarito.

16. Exame Nacional do Ensino Médio – 2011(Caderno 5- Amarelo)

139) A escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e HirooKanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_o se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_w = 7,3.

U.S.GEOLOGICAL.SURVEY. Historic Earthquakes.

Disponível em: \\earthquake.usgs.gov.Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).

U.S.GEOLOGICAL SUERVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy.**

Disponível em: http:\\earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico $M_o$do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

A) $10^{-5,10}$ B) $10^{-0,73}$ C) $10^{12,00}$ D) $10^{21,65}$E) $10^{27,00}$

Solução:

Para encontrar o valor de M_o devemos substituir M_w= 7,3 na fórmula dada, tem-se:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$

$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$

Isolando a incógnita M_0, temos:

$7{,}3 + 10{,}7 = \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$

$18 = \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$

$54 = 2 log_{10}(M_0)$

$\frac{54}{2} = log_{10}(M_0)$

$log_{10}(M_0) = 27.$

Aplicando a definição da função inversa do logaritmo, temos que:

$M_0 = 10^{27}$

Encontrando com resultado a letra E.

Análise das questões:

As questões 15 (UERJ-2012) e 16 (ENEM-2011) exigem que os alunos tenham o conhecimento de função logarítmica e suas propriedades, assim como a sua função inversa e operações com números reais.

Portanto, a questão da UERJ aborda outros conteúdos, tais como: propriedades do logaritmo, progressão geométrica, porcentagem e unidade de medida de tempo.

Enquanto a questão do ENEM cobra apenas o que foi mencionado no primeiro parágrafo da análise.

Comentários:

Os alunos consideraram a questão da UERJ muito difícil. A maioria não conseguiu iniciar a resolução da questão, pois tiveram dificuldade em interpretar o problema. Houve a necessidade da intervenção do professor para que eles conseguissem iniciar a questão.

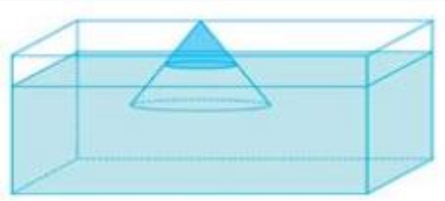
Atribuíram à dificuldade ao fato de uma única questão cobrar vários assuntos.

Os alunos julgaram a questão do ENEM mais fácil. Pois precisavam apenas usar a definição de logaritmo. Apesar de acharem o enunciado muito grande.

17. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2011 (2º Exame de Qualificação)

Questão 35

Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.



Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{6}$

D) $\frac{7}{8}$

Solução:

Seja V’ o volume do cone que está fora do líquido e V o volume total do cone. Considerando que todas as geratrizes desse sólido foram divididas ao meio, se chamarmos de H a altura total do cone, $\frac{H}{2}$ será a altura do cone que está fora do líquido. Sabendo que a razão entre os volumes é igual a razão cúbica de suas alturas, temos:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{\frac{H^3}{8}}{H^3}\right)$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$$

V = 8 V´

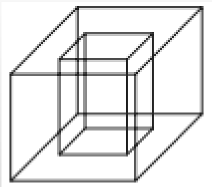
O volume submerso será dado por V – V'= 8V' – V' = 7 V'.

Logo, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será: $\frac{7V'}{8V'} = \frac{7}{8}$.

Encontrando a letra D como resposta.

18. Exame Nacional do Ensino Médio- 2010 (Caderno 5 - Amarelo)

179) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

A) 12 cm³

B) 64 cm³

C) 96 cm³

D) 1 216 cm³

E) 1 728 cm³

Solução:

Conforme afirma Dante (2010), volume do cubo é calculado pela fórmula V = a^3, onde a é aresta do cubo. Para calcular o volume de madeira do porta-lápis devemos calcular o volume do cubo maior, de aresta 12 cm e subtrair, desse valor encontrado, o volume do cubo menor de aresta 8 cm. Assim, temos:

Volume do porta-lápis: $12^3 - 8^3 = 1728 - 512 = 1\,216$ cm³.

Encontrando a letra D como resposta.

Análise das questões:

As duas questões abordam o assunto geometria espacial, além das operações envolvendo números reais.

A questão da UERJ aborda razão, o volume do cone e a relação existente entre a razão entre os volumes e as alturas e operações com números decimais.

Já a questão do ENEM trabalha com o volume do cubo e operações envolvendo números reais.

Comentários:

Os alunos consideraram a questão do ENEM mais fácil. Conseguiram compreender que o volume do porta-lápis era a diferença entre o volume do cubo de aresta 12 cm e o volume do cubo de aresta 8 cm.

Acharam a questão da UERJ mais difícil pelo fato de não ter explícito um número representando as dimensões do cone. Houve a necessidade da intervenção do professor. Quando o professor iniciou a resolução e perguntou sobre a relação existente entre os volumes e as alturas, todos os alunos afirmaram que não conheciam essa relação.

19) Universidade do Estado do Rio de Janeiro- 2010 (1º Exame de Qualificação)

Questão 31

Um conjunto de 100 copos descartáveis, dispostos em um suporte, serão usados em uma festa.

Considere, agora, as seguintes informações:

- sempre se tenta retirar apenas 1 copo de cada vez desse suporte;

- quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 2 saem juntos, 1 dele é desperdiçado;

- quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 3 saem juntos, 2 deles são desperdiçados;

- quando se tenta retirar 1 copo, nunca saem 4 ou mais de 4 juntos;

- foram retirados todos os copos desse suporte, havendo desperdício de 35% deles.

- a razão entre o número de vezes em que foram retirados exatamente 2 copos juntos e o número de vezes em que foram retirados exatamente 3 juntos foi de $\frac{3}{2}$.

O número de vezes em que apenas 1 copo foi retirado do suporte é igual a:

A) 30

B) 35

C) 40

D) 45

Solução:

Seja x, y e z as quantidades de vezes que foram retirados, respectivamente, somente 1 copo, 2 copos juntos e 3 copos juntos. Se 35% de um total de 100 copos foram desperdiçados. Então 35 copos foram desperdiçados e 65 copos foram aproveitados. Do total de y de vezes que saíram 2 copos juntos, foram desperdiçados y . 1 copos e do total de z que saíram juntos, foram desperdiçados z . 2 copos. Organizando as informações, temos:

$$\begin{cases} y + 2z = 35 & (1) \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{3}{2} & (2) \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por 2 e aplicando a propriedade da proporção produto dos meios é igual produto dos extremos, temos:

$$\begin{cases} 2y + 4z = 70 & (3) \\ 2y = 3z & (4) \end{cases}$$

Substituindo a equação (3) em (4), temos:

3z + 4z = 70

7z = 70

z = 10

Agora, substituindo o valor de z na equação (4), temos:

2y = 30

y = $\frac{30}{2}$

y = 15

O total de copos aproveitados pode ser representado por:

x + y + z = 65

x + 15 + 10 = 65

x + 25 = 65

x = 65 – 25

x = 40.

Logo, o número de vezes que foi retirado apenas 1 copo do suporte é igual a 40.

20) Exame Nacional do Ensino Médio-2009 (Caderno7 - Azul)

175) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que TC = $\frac{NV}{NF}$, TA= $\frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptada)

Suponha que o ICadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o ICadÚnico cairá para 0,5. Se NA + NV = 3.600, então NF é igual a

A) 10.000

B) 7.500

C) 5.000

D) 4.500

E) 3.000

Solução:

De acordo com o enunciado, o ICadÚnico é obtido através da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA). Como TC= $\frac{NV}{NF}$ e TA= $\frac{NA}{NV}$ e considerando o IcadÚnico de um determinado município igual a 0,6, temos:

$$\frac{\frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV}}{2} = 0,6$$

$$\boxed{\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} = 1,2} \qquad (1)$$

Dobrando NF o ICadúnico cai para 0,5, assim:

$$\frac{\frac{NV}{2NF}+\frac{NA}{NV}}{2} = 0,5$$

$$\boxed{\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV} = 1} \qquad (2)$$

Do enunciado, temos:

$$\boxed{NA + NV = 3600} \qquad (3)$$

Fazendo (1) – (2), temos:

$$\frac{NV}{NF} - \frac{NV}{2NF} = 0,2$$

$$\frac{2NV - NV}{2NF} = 0,2$$

$$\frac{NV}{NF} = 0,4$$

$$\boxed{NV = 0,4\ NF} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1), temos:

$$\frac{0,4NF}{NF} + \frac{NA}{NV} = 1,2$$

$$\frac{NA}{NV} = 0,8$$

$$\boxed{NA = 0,8\ NV} \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (3), temos:

0,8 NV + NV = 3600

1,8 NV = 3600

$$NV = \frac{3600}{1,8}$$

$$\boxed{NV = 2000} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (4), temos:

2000 = 0,4 NF
NF = 5000.

Encontrando como resposta a letra C.

Análise das questões:

Ambas as questões abordam o assunto sistema de equações de 1º grau, operações com números reais e operações algébricas.

A questão da UERJ traz um problema que pode ser solucionado representando algebricamente o enunciado e resolvendo o sistema de equações do 1º grau.

Enquanto a questão do ENEM necessitava, além dos conhecimentos citados anteriormente, que os alunos soubessem média aritmética.

Comentários:

Os alunos não conseguiram fazer nenhuma das duas questões. Foi necessário que a professora fizesse junto com eles. Julgaram as questões muito difíceis.

3.2 Percepções acerca da aplicação das questões

No decorrer da aplicação nos deparamos com alunos que não dominavam a divisão euclidiana, as quatro operações envolvendo números decimais e as operações algébricas. E vários conteúdos estudados no Ensino Médio eles não lembravam.

Essa defasagem contribui para que os alunos fiquem desmotivados com o estudo. Alegaram que as dificuldades que eles têm em Matemática refletem em outras disciplinas, como: Física, Química e Biologia. Ocasionando baixo rendimento também nessas disciplinas.

Nessas duas turmas que as questões foram aplicadas, apenas dois alunos fizeram a inscrição para o ENEM e para o 2º Exame de Qualificação, visto que nenhum aluno realizou o 1º Exame de Qualificação. E treze alunos farão apenas o ENEM. Muitos alunos alegaram que não capazes de conseguir aprovação nesses exames.

Diante dessa problemática, elencamos possíveis ações para solucionar a defasagem em Matemática dos alunos: aulas de reforço de Matemática em todos os anos de escolaridade, no próprio turno na forma de aulas compartilhada ou no contraturno; investimentos na infraestrutura da escola possibilitando que os professores tenham recursos mínimos e necessários para ministrarem as suas aulas; e por último e mais importante, a parceria entre a família e escola, pois sem o acompanhamento da vida escolar dos alunos pelos responsáveis, nada citado anteriormente será solução.

3.3 **Questões com assuntos que raramente apareceram no ENEM**

Através do estudo feito por Figueiras (2019), podemos constatar que os conteúdos como determinantes, matrizes, números complexos, teoria de conjuntos apareceram raramente ou até mesmo nunca foram cobrados. Veja a tabela abaixo.

Tabela 3 - Quantidade de questões por conteúdo na prova de Matemática do ENEM no período 2009-2018

Conteúdo	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Razões/Prop.	11	10	14	11	11	12	2	9	11	12
Aritmética	5	1	1	3	2	5	8	2	3	5
Funções	2	4	5	5	3	1	2	4	1	2
Progressões	0	2	1	1	2	0	1	1	0	1
Geom. Plana	4	4	3	5	6	4	7	3	4	3
Geom. Espacial	5	10	3	4	3	7	5	5	5	2
Geom. Analítica	0	1	1	0	2	1	2	3	3	4
Trigonometria	2	2	1	0	1	0	1	0	3	3
Combinatória	1	1	1	2	3	1	1	3	3	1
Estatística	4	4	2	3	3	4	2	7	3	4
Probabilidade	4	2	4	3	3	1	3	1	3	3
Exp./Log.	1	0	1	1	1	0	1	2	1	1
Eq. e sistemas	2	2	0	0	1	1	0	0	0	2
Gráficos/Tabelas	1	2	3	3	2	6	6	4	3	0
Matriz/Det.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Análise de figuras	2	0	1	0	1	0	0	0	1	0
U. de medidas	1	0	2	1	1	1	2	0	0	0
Conjuntos	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Mat. Financeira	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
Sist. de Num.	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0
N.Complexos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45

Fonte: FILGUEIRAS, 2019.

Com pouca cobrança desses assuntos nos exames do ENEM, os alunos acabam deixando de lado o estudo desses conteúdos, rotulam como menos importante. Porém, muitos desses conteúdos são considerados pré-requisitos em algumas disciplinas no ensino superior.

A seguir apresentaremos algumas questões da segunda fase da UERJ envolvendo os conteúdos citados anteriormente.

1. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- (Exame Discursivo- 2012- Questão 08)

Considere a equação a seguir, que se reduz a uma equação do terceiro grau:

$$(x+2)^4 = x^4$$

Uma de suas raízes é real e as outras são imaginárias. Determine as três raízes dessa equação.

Solução:

Utilizando Binômio de Newton para calcular $(x+2)^4$, temos:

$(x+2)^4 = \binom{4}{0}x^{4-0} + \binom{4}{1}x^{4-1}\,2 + \binom{4}{2}x^{4-2}2^2 + \binom{4}{3}x^{4-3}2^3 + \binom{4}{4}x^{4-4}2^4$

$$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 \qquad (1)$$

Do enunciado, temos que:

$$\boxed{(x+2)^4 = x^4} \qquad (2)$$

Substituindo a equação (1) na equação (2), temos:

$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = x^4$

$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 0$

Dividindo ambos os membros por 8, encontramos o polinômio abaixo:

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$

Fatorando o polinômio $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, encontramos $(x+1)(x^2 + 2x + 2)$. Assim,

$(x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$x + 1 = 0$ ou $x^2 + 2x + 2 = 0$

Resolvendo as duas equações, temos:

$x + 1 = 0$

$x = -1.$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

a=1, b=2 e c=2

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 2^2 - 4.1.2$

$\Delta = 4 - 8$

$\Delta = -4.$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$

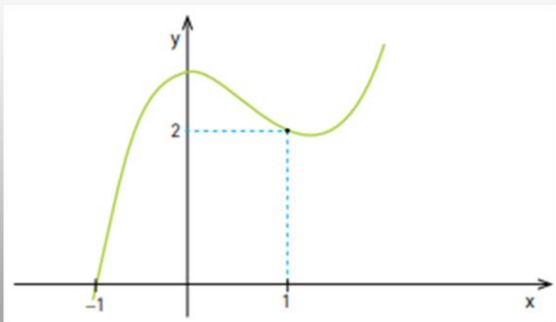
$x_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i.$

$x_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i.$

Portanto, as raízes da equação são: -1, -1 + i e -1 – i.

2. Universidade do Estado do Rio de Janeiro – (Exame discursivo-2013-Questão 07)

O gráfico abaixo representa a função polinomial P do 3º grau que intersecta o eixo das abscissas no ponto (-1,0).



Determine o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 1$.

Solução:

O resto da divisão de P(x) por x^2 - 1 é no máximo um polinômio do 1º grau, ou seja, ax + b. Assim, P(x) = $(x^2 - 1)$. Q(x) + ax + b.

Como os pontos (-1,0) e (1,2) pertencem à função, temos:

P(-1) = 0, então: -a + b= 0

P(1) = 2, então: a + b = 2

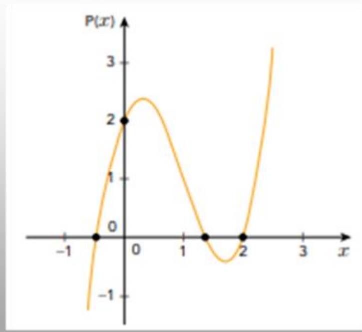
Daí, encontramos:

b = 1 e a = 1

Logo, o resto da divisão será x + 1.

3. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- (Exame discursivo-2014)

Observe o gráfico da função polinomial de ℝ em ℝ definida por P(x)= $2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.



Determine o conjunto solução da inequação P (x) > 0.

Solução:

Através do gráfico podemos inferir que x = 2 é raiz do polinômio $2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$. Logo, o polinômio é divisível por x – 2. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini temos:

2	2	-6	3	2
	2	-2	-1	0

Chamamos de Q(x) o quociente dessa divisão, temos:

$$Q(x) = 2x^2 - 2x - 1.$$

Assim, $2x^3 - 6x^2 + 3x + 2 = (x - 2).(2x^2 - 2x - 1)$.

Encontrando as raízes do polinômio Q(x), temos:

$2x^2 - 2x - 1 = 0$

Denotando por a= 2, b= -2 e c= -1, temos:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-2)^2 - 4 .2 . (-1)$

$\Delta = 4 + 8$

$\Delta = 12$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

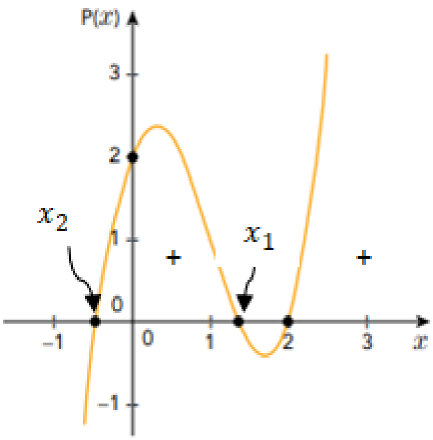
$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2.2}$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Assim,



Como desejamos que P(x) >0, temos:

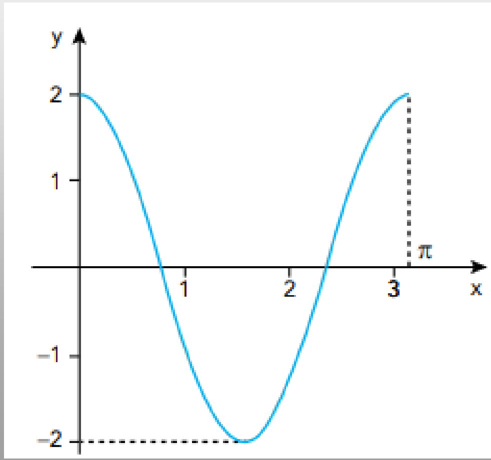
S = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou x} > 2\right\}$

4. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- (Exame discursivo-2015-Questão 8)

Considere a função real f, de variável x, definida pelo seguinte determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2\cos(x) & 2 \\ 1 & 2\cos(x) \end{vmatrix} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

Observe o gráfico da função f.



Determine os valores de x para os quais f(x) = 1.

Solução:

Calculando o determinante e igualando a 1, encontramos:

2 cos(x) . 2 cos(x) – 1 . 2 = 1

4 $[\cos(x)]^2$ = 3

$[\cos(x)]^2 = \frac{3}{4}$

cos(x) = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como 0≤ x ≤ π, temos:

cos(x) = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

x = $\frac{\pi}{6}$ radianos ou x = $\frac{5\pi}{6}$ radianos.

5. Universidade do Estado do Rio de Janeiro- (Exame discursivo-2017- Questão 1)

Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra. Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

Solução:

O total de crianças que participaram da campanha corresponde a 100%. Porém, 5% das crianças não receberam nenhuma vacina. Daí, temos que 95% das crianças receberam pelo menos uma vacina.

Considere:

- x = o conjunto de crianças que se vacinaram contra a paralisia infantil, sendo $n(x) = 80\%$.
- y = o conjunto de crianças que se vacinaram contra o sarampo, sendo $n(y) = 90\%$.
- $n(x \cap y)$ representa o número de crianças que receberam as duas vacinas.
- $n(x \cup y)$ representa o número de crianças que receberam pelo menos uma vacina que é igual a 95%.

Assim,

$n(x \cup y) = n(x) + n(y) - n(x \cap y)$

$95\% = 80\% + 90\% - n(x \cap y)$

$95\% = 170\% - n(x \cap y)$

$n(x \cap y) = 170\% - 95\%$

$n(x \cap y) = 75\%$.

Portanto, 75% das crianças receberam as duas vacinas.

Salientamos que esses assuntos que não são tão comuns nos exames do ENEM ou nem sequer são cobrados, tem uma relação importante em algumas profissões e com o nosso dia a dia.

Os números complexos têm aplicações em diversas áreas. Podemos citar: engenharia de controle, engenharia elétrica e Geometria e Fractal.

O estudo das matrizes tem grande relevância em outras áreas como Economia, Biologia, Engenharia, Computação, Matemática etc., além da sua aplicação no dia a dia. Aplicação práticas e fáceis são os pixels da tela de um computador, organização de dados, como por exemplo, a tabela de um campeonato.

O uso de determinantes tem aplicação direta no estudo das matrizes. Podemos citar: obtenção da matriz inversa utilizando o determinante, cofator, sistema lineares – Regra de Cramer.

A Teoria de Conjuntos tem o seu papel fundamental na resolução de problemas do dia a dia.

Os polinômios do terceiro grau têm diversas aplicações em diversas áreas. Podemos citar: na matemática, nas engenharias, na física, na economia, computação entre outras.

Diante de tantos exemplos que ressaltam a importância desses assuntos, notamos a necessidade do ENEM, que tem como uns dos objetivos avaliar o ensino médio, inserir e cobrar mais esses conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio.

4 QUESTÕES DO EXAME DISCURSIVO DO VESTIBULAR DA UERJ: ONTEM x HOJE

Ao analisar as provas de matemática da segunda fase da UERJ, dos vestibulares 2000 até 2019, percebemos que algumas mudanças aconteceram nessas avaliações.

A quantidade de questões no exame discursivo variou ao longo desses vestibulares. No vestibular 2000, a prova de Matemática era composta por 5 questões e cada questão tinha dois itens, a e b, para serem respondidos. Mas no vestibular 2002 a prova passou a ter 20 questões. No vestibular 2003 diminuiu o número de questões, passando para 10, mas com dois itens, a e b. E esse padrão se manteve até o vestibular 2006. A partir do vestibular 2007, a prova continua com 10 questões, mas sem itens. Esse formato se manteve até o vestibular 2019.

Outra mudança notada foi a forma que a UERJ abordava os conteúdos. Nos vestibulares mais recentes a UERJ não tem cobrado questões de demonstração, o que era comum nos exames dessa instituição. Esse tipo de questão perdeu espaço para questões mais contextualizadas, com enunciados mais próximos do cotidiano dos alunos e resoluções mais simples.

A fim de demonstrar essas mudanças observadas no exame discursivo, na prova de matemática da UERJ, vamos analisar pares de questões, uma mais antiga e a outra mais recente, para ratificar o que foi dito anteriormente.

A seguir serão analisadas duas questões que envolvem o assunto divisibilidade.

1) Universidade do Estado do Rio de Janeiro- (Exame Discursivo-2000 Questão 2)

Observe que, na tabela abaixo, só há números primos maiores que 3 na primeira e quinta colunas.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6n+1	6n+2	6n+3	6n+4	6n+5	6n

A) Se p é primo e maior que 3, demonstre que $p^2 – 1$ é múltiplo de 12.

B) Retirando-se aleatoriamente, da tabela, dois números naturais distintos, menores que 37, determine a probabilidade de ambos serem primos maiores que 3.

Solução da letra A:

Se o número é primo maior que 3, então é do tipo 6n + 1 ou 6n + 5, n$\in \mathbb{N}$.

1º tipo: p = 6n + 1, então $p^2 – 1 = (6n+1)^2 - 1 = 36\ n^2 + 12n + 1 – 1= 36n^2 + 12n =$

$= 12\ (3n^2 + n) \Rightarrow p^2 – 1$ é múltiplo de 12.

2º tipo: p= 6n + 5, então $p^2 – 1 = (6n+5)^2 - 1 = 36\ n^2 + 60n + 25 – 1 = 36n^2 + 60n + 24 =$

$= 12\ (3n^2 + 5n + 2) \Rightarrow p^2 - 1$ é múltiplo de 12.

Solução da letra B:

De acordo com o enunciado, temos:

- o espaço amostral será 36.
- existem 9 números primos maiores que 3 e menores que 37.
-

Assim,

$P = \frac{9}{36}.\frac{8}{35} = \frac{2}{35}.$

2. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2015-Questão 1)

> O cartão pré-pago de um usuário do metrô tem R$ 8,90 de crédito. Para uma viagem, foi debitado desse cartão o valor de R$ 3,25, correspondente a uma passagem. Em seguida, o usuário creditou mais R$ 20,00 nesse mesmo cartão. Admitindo que o preço da passagem continue o mesmo, e que não será realizado mais crédito algum, determine o número máximo de passagens que ainda podem ser debitadas desse cartão.

Solução:

Inicialmente o usuário possuía R$ 8,90 de crédito. Foi debitado R$ 3,25 desse valor, restando R$ 5,65 de crédito. Em seguida o usuário creditou R$ 20,00. O novo crédito passou a ser: $20 + 5{,}65 = 25{,}65$ reais.

Agora vamos encontrar quantas passagens de R$3,25 ele poderá pagar com R$ 25,65, ou seja, quantas vezes 3,25 cabe em 25,65. Logo:

$25{,}65 : 3{,}25 \cong 7{,}8$.

Assim, o usuário poderia realizar 7 viagens.

Comentários:

A questão mais antiga, a questão número 1 item a, cobra o assunto divisibilidade através da demonstração. Para resolvê-la exige que o candidato tenha o domínio sobre as propriedades da divisibilidade e dos números primos. Além disso, que o candidato saiba fazer operações algébricas.

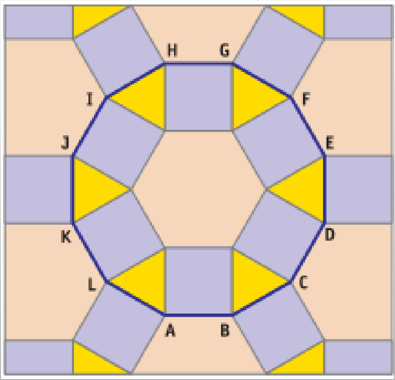
Enquanto a segunda questão envolve operações com números reais, tendo como objetivo principal as operações básicas com números decimais. A questão traz para a prova um enunciado claro que se aplica no cotidiano dos candidatos, uma questão contextualizada.

Embora a UERJ não divulgue o nível de dificuldade das questões discursivas, como faz nos exames de qualificação, podemos considerar a primeira questão mais difícil, pois requer um conhecimento mais técnico e abstrato de divisibilidade que geralmente não são abordados na educação básica. Além disso, vimos de perto nas aplicações das questões do capítulo III nas turmas de 3º ano a dificuldade dos alunos com as operações algébricas. Enquanto a segunda questão cobra operações bem mais simples, exigindo a interpretação do problema e o conhecimento de adição e divisão.

A seguir veremos duas questões envolvendo geometria.

3. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2006-Questão

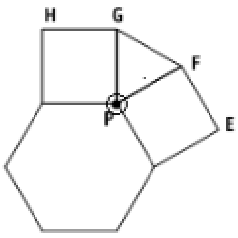
No toldo da barraca de seu Antônio, decorado com polígonos coloridos, destaca-se um dodecágono cujos vértices são obtidos a partir de quadrados construídos em torno de um hexágono regular, conforme mostra o desenho abaixo.



A) Demonstre que o dodecágono ABCDEFGHIJKL é um polígono regular.

B) Tomando o quadrado de lado $\overline{AB}$ como unidade de área, calcule a área desse dodecágono.

Solução da letra A:



O hexágono regular possui seus ângulos internos iguais a 120º e todos os seus lados iguais. Podemos notar que o lado do hexágono é base do quadrado, e que todos os quadrados são congruentes. O quadrado possui ângulos internos iguais a 90º. O triângulo FGP é isósceles, os lados $\overline{PG}$ e $\overline{PF}$ são iguais, são lados do quadrado também. Chamando o ângulo $F\hat{P}G$ de α, temos que o ângulo replementar, de origem em P, é dividido em quatro ângulos, são eles: 90º, 90º, α e 120º. Logo:

α + 90**º** + 90º + 120º = 360º

α= 60º.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º e no triângulo isóscele FGP um dos ângulos é 60º, temos que os ângulos da base terão medida 60º também. Portanto, o triângulo é equilátero, ou seja, os três lados têm a mesma medida do lado do quadrado. Assim, todos os lados do dodecaedro são congruentes.

Todos os ângulos internos do quadrado são iguais a 90º e todos os ângulos internos do triângulo equilátero são iguais a 60º. E cada ângulo interno do dodecaedro será formado por um ângulo do quadrado e um ângulo do triângulo, assim, cada ângulo do dodecaedro terá medida 60º + 90º = 150º.

Portanto, o dodecaedro é regular, pois possui todos os lados iguais e todos os ângulos internos com mesma medida.

Solução da letra B:

O hexágono interno possui lados de mesma medida do lado do triângulo equilátero e do quadrado. Considerando $\overline{AB}$ = l, temos que:

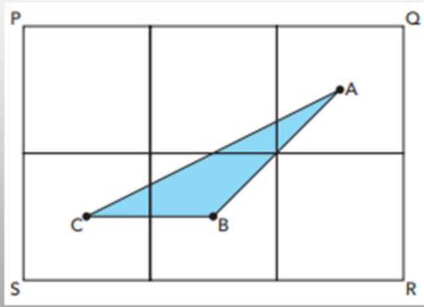
- Área do quadrado: l^2.
- Área do triângulo: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.
- Área do hexágono: $\frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$.

Como o dodecaedro é formado por 6 quadrados, 6 triângulos e 1 hexágono, a área do dodecaedro será igual a:

$6.l^2 + 6.\frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = 6.l^2 + 3\,l^2\sqrt{3} = (6 + 3\sqrt{3})l^2 = (6 + 3\sqrt{3})$ unidades de área.

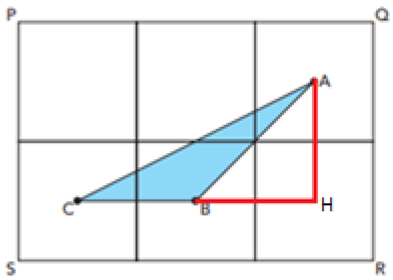
4. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2018-Questão 05)

O retângulo PQRS é formado por seis quadrados cujos lados medem 2cm. O triângulo ABC, em seu interior, possui os vértices definidos pela a interseção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.



Determine a área do triângulo ABC tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2cm

Solução:



Como podemos ver na figura, BC é a base do triângulo ABC, e AH á a altura relativa a essa base. Assim,

BC= 2 cm e AH = 2 cm. Então a área do triângulo $A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2\ cm^2$.

A unidade de área a ser considerada é a área do quadrado, de lado 2cm, que forma o retângulo PQRS. A área do quadrado $A_Q = l^2 = 2^2 = 4\ cm^2$. Assim, a área do triângulo corresponde 0,5 unidade de área.

Comentários:

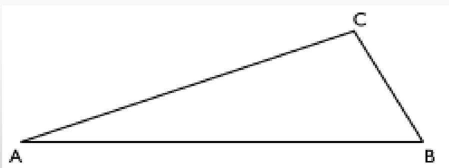
As questões propostas nos vestibulares 3 (UERJ-2006) e 4 (UERJ-2018) cobram o mesmo assunto: cálculo de área de figura plana. A questão 3 além de cobrar que o candidato saiba demonstrar que o dodecágono é um polígono regular, pede para utilizar o quadrado de lado AB como unidade de área. Enquanto a questão 4, pede para calcular a área do triângulo e, através do enunciado e da visualização da figura o candidato consegue encontrar os valores da base e da altura do triângulo. Essa questão também usa o quadrado como unidade de área, mas diferentemente da questão da 3, o valor da medida do lado do quadrado é dado pelo enunciado.

Podemos perceber que a questão da UERJ 2006 exigia mais conhecimento e criatividade do candidato. Além da demonstração, o aluno tinha que decompor o dodecágono em outros polígonos para que pudesse encontrar a área. A medida do lado do quadrado não apareceu de forma explícita. Daí foi utilizada incógnita para representar o lado do quadrado.

Veremos a seguir duas questões que envolvem a Trigonometria. Analisaremos como esse conteúdo foi cobrado no vestibular 2002 e como ele foi abordado no vestibular mais recente, 2018 da UERJ.

5. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2002-Questão 10)

Considere o triângulo ABC abaixo, onde os ângulos A, B e C estão em progressão aritmética crescente.



Determine os valores de cada um desses ângulos, respectivamente, nas seguintes condições:

A) sen A + sen B + sen C = $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$;

B) $\overline{AB}$ = 2$\overline{BC}$.

Solução da letra A:

De acordo com o enunciado, os ângulos estão em progressão aritmética.

Sejam A, B e C os ângulos internos. Logo:

A = x, B = x + r e C = x + 2r, onde r > 0.

Como a soma dos ângulos internos é igual a 180º, temos:

A + B + C = 180º

x + x + r + x + 2r = 180º

3x + 3r = 180º

3 (x + r) = 180º

x + r = $\frac{180}{3}$

x + r = 60º

x = 60º– r

Assim,

A = 60º – r

B = 60º – r + r = 60º

C= 60º – r + 2r = 60º + r

Calculando senA + senB + senC = sen(60º - r) + sen60º + sen(60º + r) =

= sen60ºcosr – senrcos60**º** + sen60º+ sen60ºcosr + senrcos60º= 2sen60º.cosr + sen60º

Como senA + senB + senC = $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, temos:

2sen60º.cosr + sen60º= $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. cosr + $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}$. cos r = $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}$. cos r = $\frac{3}{2}$

cos r= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

r = 30º.

Logo,

A= 30º, B =60° e c= 90º

Solução da letra B:

Segundo o enunciado $\overline{AB}$ = 2$\overline{BC}$. Seja $\overline{BC}$ = a, então $\overline{AB}$ = 2a. Do item A, segue que o ângulo B = 60º. Aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$(\overline{AC})^2$= $(\overline{BC})^2$ + $(\overline{AB})^2$ - 2.$\overline{BC}$. $\overline{AB}$.cosB

$(\overline{AC})^2$= a^2 + 4a^2 – 2.a.2acos60º

$(\overline{AC})^2$= 5a^2 - 4a^2. $\frac{1}{2}$

$(\overline{AC})^2$= 3a^2

$\overline{AC}$= a$\sqrt{3}$

Aplicando novamente a lei dos cossenos, temos:

$(\overline{BC})^2$= $(\overline{AB})^2$ + $(\overline{AC})^2$ - 2.$(\overline{AB})$.$(\overline{AC})$.cosA

a^2= $(2a)^2$ + $\left(a\sqrt{3}\right)^2$ - 2. 2a.a$\sqrt{3}$. cosA

a^2= 4a^2 + 3a^2 - 4$a^2\sqrt{3}$.cosA

4$a^2\sqrt{3}$.cosA = 6a^2

cos A= $\frac{6a^2}{4a^2\sqrt{3}}$

cosA = $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

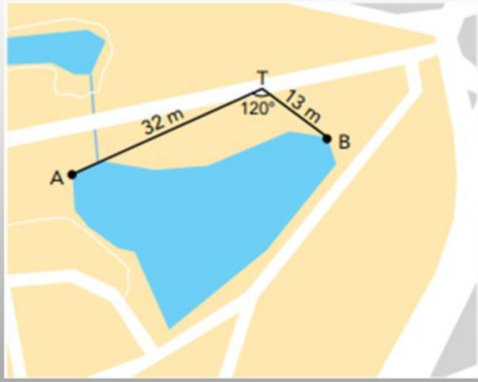
cos A = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, A = 30º.

Como os ângulos internos estão em progressão aritmética crescente, 30º, 60º, C, temos que a razão será 30º, assim C = 90º.

6. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2018-Questão

Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas AT = 32 m; BT = 13 m e ATB = 120º, representadas no esquema abaixo.



Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

Solução:

Em relação ao triângulo ABT, aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$(\overline{AB})^2 = (\overline{AT})^2 + (\overline{BT})^2 - 2.(\overline{AT}).(\overline{BT}).\cos 120º$

$(\overline{AB})^2 = 32^2 + 13^2 - 2.\ 32.13.\left(\frac{-1}{2}\right)$

$(\overline{AB})^2 = 1024 + 169 + 416$

$(\overline{AB})^2 = 1609$

$(\overline{AB}) = \pm\sqrt{1609}$

$(\overline{AB}) \cong 40$ m.

Comentários:

Na questão 5 (UERJ-2002), a UERJ conseguiu entrelaçar vários assuntos numa única questão. Abordou progressão aritmética, lei dos cossenos, fórmulas de adição de arcos: seno da soma e seno da diferença, além das operações algébricas.

A questão 6 traz uma aplicação da trigonometria na topografia, tendo uma abordagem interdisciplinar. O que contribui para que o candidato entenda a importância da matemática em outras áreas. Em termos de resolução, foi exigido que os candidatos soubessem lei dos cossenos, redução de arcos do segundo quadrante para o primeiro e as operações envolvendo números reais.

Diferentemente da questão 5, a questão 6 têm as medidas dos lados do triângulo explícitas. O que facilita para muitos candidatos que têm dificuldade nas operações algébricas.

A seguir veremos duas questões que abordam o assunto matriz.

7. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2006-Questão 06)

Três bancas de frutas, B_1, B_2 e B_3, são propriedades de uma mesma empresa. Suas vendas são controladas por meio de uma matriz, na qual cada elemento b_{ij} representa a soma dos valores arrecadados pelas bancas B_i e B_j, em milhares de reais, ao final de um determinado dia de feira: B = $\begin{bmatrix} x & 1{,}8 & 3{,}0 \\ a & y & 2{,}0 \\ d & c & z \end{bmatrix}$.

Calcule, para esse dia, o valor, em reais:

A) Arrecadado a mais pela barraca B_3 em relação à barraca B_2;

B) Arrecadado em conjunto pelas três barracas.

Solução da letra A:

A partir das informações do problema, temos:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = b_{12} & (I) \\ B_2 + B_3 = b_{23} & (II) \\ B_1 + B_3 = b_{13} & (III) \end{cases}$$

Utilizando a equação (I) e (III) temos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 1{,}8 \quad .(-1) \\ B_1 + B_3 = 3{,}0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} -B_1 - B_2 = -1{,}8 \\ \quad B_1 + B_3 = 3{,}0 \end{cases}$$

$B_3 - B_2$ = 1,2 milhares de reais = 1200 reais.

Assim, a barraca B_3 arrecadou 1200 reais a mais do que a barraca B_2.

Solução da letra B:

Considerando o sistema:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 1{,}8 \\ B_2 + B_3 = 2{,}0 \\ B_1 + B_3 = 3{,}0 \end{cases}$$

Adicionando as três equações temos:

$2B_1 + 2B_2 + 2B_3 = 6{,}8$: (2)

$B_1 + B_2 + B_3 = 3{,}4$ milhares de reais = 3400 reais.

O valor arrecadado pelas três barracas é 3400 reais.

8. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2018-Questão 03)

Em uma matriz quadrada A de ordem três, as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal são sempre iguais. Observe alguns de seus elementos:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & \ldots\ldots & 16 \\ 12 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 4 & \ldots\ldots & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determine o elemento a_{33}.

Solução:

Seja a matriz abaixo, a matriz A com todos os seus elementos.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & a_{12} & 16 \\ 12 & a_{22} & a_{32} \\ 4 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Somando os elementos da primeira coluna, temos: 14 + 12 + 4 = 30. Como as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal são sempre iguais. Podemos inferir que:

4 + a_{22} + 16 = 30

a_{22} + 20 = 30

a_{22} = 30 – 20

a_{22} = 10.

Agora, somando os elementos da diagonal principal, temos:

14 + a_{22} + a_{33} = 30 (1)

Substituindo o valor de a_{22} que é 10, na equação (1), temos:

14 + 10 + a_{33} = 30

24 + a_{33} = 30

a_{33} = 30 – 24

Portanto, a_{33}= 6.

Comentários:

A primeira questão exige que o candidato faça uma leitura minuciosa do enunciado. Pois existem muitos dados para extrair dele. É necessário que o candidato saiba resolver sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e as operações envolvendo números reais. Além disso, saiba construir uma matriz.

Enquanto na questão 8, o candidato necessitava atentar primeiramente que é possível encontrar o valor da soma da primeira coluna. Daí é possível encontrar o valor da soma de cada diagonal e de cada coluna. Outro fato importante que facilitava muito na hora dos cálculos e atentar que utilizando as diagonais, a resolução será mais rápida. Pois assim só será necessário encontrar o valor do termo a_{22} e o valor do termo pedido. Para solucionar o problema, o candidato precisava dominar as operações de adição e subtração envolvendo números reais e construir os elementos de uma matriz.

As duas questões exigem o conhecimento dos mesmos conteúdos para resolvê-las. Porém, a questão 7 (UERJ-2006) considero mais difícil, pois exige uma leitura minuciosa do enunciado, pois existem muitos dados para serem extraídos do enunciado.

Vamos analisar a seguir uma questão envolvendo produto escalar.

9. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Exame Discursivo-2006-Questão 07)

A tabela a seguir apresenta os preços unitários de três tipos de frutas e os números de unidades vendidas de cada uma delas em um dia de feira.

FRUTAS	PREÇO POR UNIDADE (EM REAIS)	NÚMERO DE UNIDADES VENDIDAS
mamão	1	x
abacaxi	2	y
melão	3	z

A arrecadação obtida com a venda desses produtos pode ser calculada pelo produto escalar de $\vec{p}$ = (1, 2, 3) por $\vec{u}$ = (x, y, z).

Determine:

A) o valor arrecadado, em reais, com a venda de dez mamões, quinze abacaxis e vinte melões.

B) o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{p}$ e $\vec{u}$, sabendo que **x, y** e **z** são respectivamente proporcionais a 3, 2 e 1.

Solução da letra A:

Conforme afirma MACHADO (1982), dado dois vetores u = (x_1, y_1, z_1) e v = (x_2, y_2 ,z_2) do $\mathbb{R}^3$, denominamos produto escalar (ou produto interno usual) de u por v ao número real u.v dado por

$$u.v = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

De acordo com o enunciado, temos:

x = 10, y = 15 e z = 20. Logo, $\vec{u}$ = (10, 15, 20). Calculando o produto escalar de p por u, temos:

p.u = 1.10 + 2.15 + 3.20= 10 + 30 + 60 = 100

Logo, o valor a ser pago será R$ 100,00.

Solução da letra B:

Segundo MACHADO (1982), sendo θ o ângulo entre dois vetores u e v, não nulos, temos 0°≤ θ ≤ 180° e

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u|\,|v|}$$

De acordo com o enunciado **x, y** e **z** são respectivamente proporcionais a 3, 2 e 1. Assim, u = (3k, 2k, k), k ∈ $\mathbb{N}^*$ e p = (1, 2, 3).

Utilizando a fórmula do cosseno entre vetores, temos:

$$\cos\theta = \frac{u.p}{|u|\,|p|} = \frac{3k+4k+3k}{\sqrt{14k^2}.\sqrt{1+4+9}} = \frac{10k}{\sqrt{14k^2}\,.\sqrt{14}} = \frac{10k}{14k} = \frac{5}{7}$$

Comentários:

O assunto vetores faz parte da disciplina de álgebra e essa disciplina compõe o currículo de muitos cursos na área de exatas. Porém, no currículo do Ensino Médio esse conteúdo, geralmente, só é cobrado na disciplina de Física. Destacamos como a segunda fase da UERJ exigia do candidato conhecimentos necessários para que pudessem ingressar no ensino superior.

CONCLUSÃO

A escolha de analisar as questões do ENEM e da UERJ se deu pela grande importância que o ENEM assumiu nesses últimos anos e ao fato da UERJ, após a criação do Sistema de Seleção Unificada (SISU), continuar com o vestibular próprio.

A estrutura dos dois exames é bem distinta. O ENEM é composto de 180 questões objetivas e redação. A aplicação acontece em dois dias. O primeiro dia é composto de 45 questões de linguagens, códigos e suas tecnologias, 45 questões de Ciências Humanas e suas tecnologias e redação, com 5h30 de tempo de prova. No segundo dia são aplicadas as provas de Ciências da Natureza e suas tecnologias e Matemática e suas tecnologias, totalizando 90 questões com a duração de 5 horas de prova. Enquanto o vestibular da UERJ é organizado em três momentos: dois Exames de Qualificação e um Exame Discursivo. O exame discursivo é composto por três provas: uma redação para todos os cursos e duas disciplinas específicas, de acordo com o curso escolhido. O exame de qualificação é a parte objetiva do vestibular da UERJ, e é composto por 60 questões envolvendo as seguintes áreas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, e tem o tempo de prova com a duração de 4 horas.

Constatamos que no segundo dia do ENEM, que é o dia da prova de Matemática e suas tecnologias, o candidato tem em média 182 segundos, isto é, 3 minutos e 2 segundos para responder cada questão. E como vimos no capítulo II, muitas vezes se deparam com questão mal elaborada, com pouca clareza e até mesmo sem o gabarito nas alternativas, o que acaba gerando dúvidas e tomando muito tempo do candidato. Enquanto no vestibular da UERJ oferece mais tempo para o candidato desenvolver a questão, em média, 240 segundos (4 minutos) para responder cada uma. Porém as questões da UERJ são bem mais elaboradas, como constatamos no capítulo III.

No capítulo III, durante a aplicação das questões nas turmas de terceiro ano, pudemos ver de perto as dificuldades que os alunos tiveram nas operações básicas envolvendo números reais, operações algébricas e também na interpretação dos enunciados.

Nesse mesmo capítulo vimos algumas questões do Exame Discursivo da UERJ envolvendo números complexos, teoria de conjuntos, matrizes, determinantes e polinômio do terceiro grau. Esses assuntos foram pouco cobrados no Enem no período de 2009-2018, embora façam parte do currículo do ensino médio.

Após a análise das questões apresentadas no capítulo quatro percebemos que mudanças significativas aconteceram. As questões mais antigas exigiam o domínio de vários conhecimentos. Exemplificamos isso, através da questão 5 que cobrava o domínio da trigonometria e da progressão aritmética. O que não acontece com as questões mais recentes.

As questões mais recentes da segunda fase da UERJ trazem enunciados com assuntos do cotidiano, como vimos na questão 2 e, ou aplicação da matemática em outra área, como na questão 6. Essas questões contextualizadas e que são abordadas de forma interdisciplinar contribuem para um melhor entendimento da questão, além de ratificar a importância da matemática no dia-a-dia das pessoas. A maneira como as questões têm se apresentado vai ao encontro com o que diz os PCN's ensino médio, de matemática, fala sobre a contextualização e interdisciplinaridade.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (1999, p.43)

Embora o vestibular da UERJ seja mais oneroso do que o ENEM, pois o candidato tem que pagar duas ou até três taxas caso se escreva para os dois exames de qualificação, a existência de dois exames de qualificação alivia um pouco a pressão psicológica dos candidatos, por saberem que caso não tenham um bom desempenho no primeiro exame de qualificação poderão ter outra oportunidade no segundo exame. E isso não acontece no ENEM, pois o candidato só tem uma chance por ano.

Espera-se que as análises feitas nesse trabalho venham contribuir na vida profissional de outros professores e sirva como fonte de pesquisa para os candidatos ao vestibular da UERJ e ENEM.

REFERÊNCIAS

BERGUER FILHO, Ruy Leite (Org.). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação. 58 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. 1 ed. vol.2, São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar, 10 : **Geometria Espacial**. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar, 9 : **Geometria Plana**. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

FILGUEIRAS, Cicero Wilton Santana. **A importância dos conteúdos de matemática pouco cobrados no ENEM**. 2019. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2019.

HALLIDAY, David, RESNICK, Robert, WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 1**: mecânica. 10 ed.- Rio de Janeiro: LTC, 2016.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 3**: trigonometria. 8 ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David, PÉRIGO, Roberto. **Matemática**: volume único. 4. Ed. São Paulo: Atual, 2007.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem):** relatório pedagógico 2009-2010. Brasília: Ministério da Educação, 2013. 133 p.

MACHADO, Augusto César de Oliveira, CARVALHO, João Bosco Pitombeira de, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de, FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**.10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

VESTIBULAR UERJ. **Edital de convocação para o Exame de Qualificação do Vestibular Estadual 2019**. Disponível em: https://www.vestibular.uerj.br/wp-content/uploads/2018/09/Manual_1fase_2019_Edital.pdf. Acesso em: 27 out. 2019.

ANEXO - Matriz de referência ENEM eixos cognitivos

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM EIXOS COGNITIVOS

(comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências**.**

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Objetos de conhecimento associados à Matrizes de Referência

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

• Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Conteúdo Programático UERJ 2019

MATEMÁTICA ORIENTAÇÃO GERAL

O uso do raciocínio matemático é imprescindível não só para o desenvolvimento da ciência, mas também para a solução de diversas situações que se apresentam no dia a dia. No exame de qualificação, essa área se faz presente articulando três grandes eixos que, inter-relacionados, são adequados para identificar e analisar fenômenos naturais ou sociais em um dado domínio do conhecimento ou da vida cotidiana. Pretende-se com isso dar destaque ao pensamento lógico e à interpretação e representação matemática desses fenômenos. A utilização de estratégias para o enfrentamento de situações-problema e a aplicação de modelos matemáticos convenientes é também privilegiada neste Exame.

EIXOS DA ÁREA

Aritmética

• Sistema decimal: representações; operações

• Números naturais: divisibilidade; MMC; MDC

• Números reais: operações; representações; razões; proporções; regra de três; porcentagem

• Conjuntos: relações de pertinência e inclusão; união; interseção; diferença; complementar

• Representação de dados: média aritmética, geométrica e harmônica; moda; mediana; variância e desvio padrão; tabulações; histogramas e gráficos de setores.

Álgebra

• Expressões algébricas: operações; identidades; equações; inequações;

• Funções: afim; quadrática; exponencial e logarítmica; trigonométricas; representações gráficas; características e operações
• Sucessões: aritméticas; geométricas; por recorrências; juros simples e compostos
• Problemas de contagem: princípios de contagem; análise combinatória simples e com repetição; binômio de Newton
• Matrizes: representações; operações; determinantes até 3ª ordem
• Sistemas de equações: lineares; não lineares.

Geometria

• Figuras no plano: congruências; simetrias e homotetias; polígonos, circunferências e círculos; relações métricas; relações trigonométricas; distâncias, ângulos, áreas, perímetros
• Figuras tridimensionais: congruências; simetrias e homotetias; características dos poliedros; poliedros regulares; áreas e volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas; paralelismo, perpendicularismo e projeções
• Geometria de posição: paralelismo, perpendicularismo e projeções

Estatística

• Representações: tabulações; pictográficos; gráficos de setores; histogramas; gráficos cartesianos
• Análise de dados: média aritmética, geométrica e harmônica; moda; mediana; variância e desvio padrão; cálculo de probabilidades; distribuição binomial de probabilidades.

Conteúdo Programático de Matemática do Exame Discursivo

ORIENTAÇÃO GERAL

O conhecimento da Matemática pode contribuir efetivamente para a inserção do indivíduo na sociedade contemporânea. As operações básicas com números, os cálculos de porcentagem, a leitura de gráficos, o conceito de proporcionalidade, e mesmo os modelos matemáticos mais elaborados são exemplos de aplicações práticas dessa linguagem. Essas aplicações se inserem nas diferentes áreas do conhecimento e poderão ser exigidas do candidato em sua vida profissional e pessoal. Este programa, dividido em cinco unidades, contempla os principais tópicos do ensino fundamental e médio, servindo como suporte para a progressão dos estudos no ensino superior. O exame discursivo desta disciplina será elaborado de modo a articular o caráter formativo ao instrumental da disciplina e enfatizará a resolução de situações-problema que possam ser modeladas matematicamente, avaliando e valorizando a compreensão e o domínio de conceitos, ferramentas e técnicas matemáticas, bem como a argumentação e a justificativa das soluções apresentadas.

PROGRAMA

Aritmética e álgebra

• Noções de conjuntos: operações; representações

• Conjuntos numéricos: naturais; inteiros; racionais; irracionais; reais; operações

• Múltiplos e divisores: critérios de divisibilidade; decomposição em fatores primos; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum

• Sistemas de numeração: decimal; não decimal; representações e operações

• Números reais: representações; operações; razões; proporções e porcentagens

• Números complexos: operações; representações algébricas, geométricas, trigonométricas.

• Sucessões: aritmética; geométrica; por recorrência

• Juros: simples; compostos

• Polinômios e equações polinomiais: identidades; operações; relações entre coeficientes e raízes; raízes racionais; raízes imaginárias Funções e gráficos

• Conceito de função: composição; inversão; paridade; periodicidade; representações gráficas, características e operações

• Função afim: taxa de variação média; estudo do sinal; inequações

• Função quadrática: máximo; mínimo; estudo do sinal; inequações

• Função polinomial com grau maior do que dois: estudo do sinal; inequações

• Função modular: equações; inequações

• Funções logarítmicas e exponenciais: propriedades operatórias; equações; inequações

• Funções trigonométricas: equações; inequações Geometria e trigonometria

• Geometria de posição: projeções ortogonais; distâncias e ângulos

• Semelhança de figuras: congruências; proporcionalidades; comprimentos; áreas; volumes

• Círculo trigonométrico: representações; linhas trigonométricas; identidades; adição, subtração e duplicação de arcos; lei dos senos e dos cossenos

• Figuras no plano: congruência; simetrias e homotetias; polígonos; circunferências e círculos; relações métricas; relações trigonométricas; distâncias; ângulos, área e perímetros

• Figuras tridimensionais: congruências; simetrias e homotetias; característica dos poliedros regulares; área e volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas; paralelismo, perpendicularismos e projeções

Análise combinatória e estatística

• Problemas de contagem: princípios de contagem; análise combinatória simples e com repetição

• Probabilidades e binômio de Newton: probabilidade condicional; união e interseção de eventos; distribuição binomial

• Medidas de tendência central: médias aritméticas, geométrica, harmônica; moda; mediana

• Medidas de dispersão: variância; desvio padrão

• Gráficos e tabelas: análise

Vetores e geometria analítica

• Vetores em R2 e em R3: adição; subtração; multiplicação por um número real; produto escalar, vetorial e misto

• Geometria analítica no R2: reta; circunferência; elipse; hipérbole; parábola

• Matrizes: representações; operações; determinantes de 2ª e de 3ª ordens

• Sistemas de equação: linear; não linear