UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
– PROFMAT

WILLEN RIBEIRO DO PRADO

O ESTUDO INTEGRADO DE FUNÇÕES E CINEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2019

WILLEN RIBEIRO DO PRADO

O ESTUDO INTEGRADO DE FUNÇÕES E CINEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Alireza Mohebi Ashtiani, Dr.

Co-orientador: Cassio Henrique dos Santos Amador, Dr.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P896 Prado, Willen Ribeiro do

O estudo integrado de funções e cinemática / Willen Ribeiro do Prado. – 2020.
79 f. : il. color.; 31 cm.

Orientador: Alireza Mohebi Ashtiani.
Coorientador: Cássio Henrique dos Santos Amador.
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2020.
Bibliografia: p. 79.

1. Funções (Matemática). 2. Cinemática. 3. Estudo do movimento. 4. Matemática – Dissertações. I. Ashtiani, Alireza Mohebi, orient. II. Amador, Cássio Henrique dos Santos, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio
Bibliotecário/Documentalista responsável:
Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676

Título da Dissertação Nº. 012

"O Estudo Integrado de Funções e Cinemática."

por

Willen Ribeiro do Prado

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 14h00min do dia 06 de dezembro de 2019. O trabalho foi _______________ pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Alireza Mohebi Ashtiani, Dr.
(Presidente - UTFPR/LD)

Profª. Glaucia Maria Bressan, Dra.
(UTFPR/CP)

Prof. Saeed Tafazolian, Dr.
(UNICAMP/SP)

Visto da coordenação:

Prof. Anderson Paião dos Santos, Dr.
(Coordenador do PROFMAT-CP)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR-CP"

RESUMO

PRADO, Willen Ribeiro do. O ESTUDO INTEGRADO DE FUNÇÕES E CINEMÁTICA. 79 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

A função é um dos conceitos matemáticos mais complexos que tem um papel fundamental na descrição e estudo de certos fenômenos da natureza, em particular os fenômenos físicos. Por exemplo, os fenômenos ligados à cinemática podem ser modelados através do conceito de função e há uma clara relação entre os mesmos. Neste trabalho o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) são apresentados e estudados. Além disso, propomos uma abordagem interdisciplinar integrada no estudo destes movimentos, entre funções e cinemática nas aulas de física e matemática da 1ª série do ensino médio de tal modo que os fenômenos sejam tratados de forma completa enriquecendo o estudo de ambas as áreas do conhecimento, matemática e física. Os resultados deste trabalho mostram que integração próxima entre funções e estes fenômenos (a interdisciplinaridade entre matemática e física) pode ajudar significamente os alunos da 1ª série do ensino médio a entender o conceito de funções afins e quadráticas e também os movimentos lineares da cinemática.

Palavras-chave: Funções, Cinemática, Movimento Retilíneo Uniforme, Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

ABSTRACT

PRADO, Willen Ribeiro do. THE INTEGRATED STUDY OF FUNCTIONS AND KINEMATICS. 79 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

One of the most complex mathematical concepts is the concept of function which has a key role in the description and the study of certain natural phenomena, in particular the physical phenomena. For example, phenomena related to kinematics can be modeled through the concept of function and there exists a clear link between them both. In this work the Uniform Linear Motion (ULM) and the Uniformly Accelerated Linear Motion (UALM) are presented and studied. Furthermore, an integrated interdisciplinary approach is proposed to study these movements, between functions and kinematics in the physics and math classes in the 9th grade such that the phenomena be treated completely, enriching the study of both mathematical and physical areas. The results of this work show that closer integration between functions and these phenomena (the interdisciplinary between mathematics and physics) could benefit students of the 9th grade significantly to understand the concept of linear and quadratic functions and also the linear motions in kinematics.

Keywords: Functions, Kinematics, Uniform Linear Motion, Uniformly Accelerated Linear Motion

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ampla área do conhecimento que trata de conceitos que podemos perceber sem que seja formalmente elaborado um arcabouço teórico, ou seja, intuitivamente percebemos tais conceitos com facilidade em situações cotidianas. Por outro lado, a matemática é também uma área do conhecimento que transcende os limites do cotidiano ou o aplicável na vida prática; a matemática nos permite refletir sobre o que está além da natureza, fenômenos ou dados, nos colocando na tarefa de penetrar o abstrato e vasculhar objetos intangíveis.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), a matemática é "uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências". Porém, para Zuffi e Pacca (2002) a matemática não existe apenas para explicar fenômenos da natureza, "mas também para resolver toda sorte de problemas, os quais nem sempre são tangíveis, por se originarem na mente humana, e muitos, de uma maneira totalmente abstrata".

Ainda assim, é possível notar que o conhecimento da natureza e a descrição de seus fenômenos é historicamente um solo fértil onde a matemática se desenvolve e se formula na necessidade de resolver um problema, explicar um fenômeno, quantificar e analisar dados. Dessa forma, quando o estudo da matemática se resume à sua aplicabilidade em situações cotidianas, perde-se seu aspecto mais abstrato que não possui aplicação direta a não ser na própria matemática. Em contrapartida, ao se estudar matemática deixando de lado suas aplicações na ciência e no cotidiano, perde-se o elemento palpável e visível da matemática. Em ambos os casos, o estudo é incompleto.

Diante disso, uma abordagem que faça justiça à matemática deve integrar a abstração e a aplicação em um mesmo grau de relevância para que nada se perca no processo do estudo. Todavia, existem conceitos matemáticos cuja aplicação não é de trivial entendimento, o que significa que para que o estudante entenda a aplicação ele deve conhecer como pré-requisito algum outro conceito, por vezes de outra disciplina.

É fato que existem muitos conceitos da matemática que dispensam uma formulação teórica complexa para que o estudante o compreenda. Porém, foi a partir do estudo de muitas pessoas e em muitas épocas que diversos conceitos mais complexos da matemática se desenvolveram (ZUFFI; PACCA, 2002), sendo que os estudantes possuem um repertório de explicações para fenômenos e conceitos que são diferentes daqueles que se ensina na escola (SCHROEDER, 2007). Um desses conceitos mais complexos é o de funções. Segundo Zuffi e Pacca (2002),

> embora se possa ter uma concepção espontânea de variação e de associação entre duas grandezas, a caracterização das propriedades específicas das relações que são também funções matemáticas só foi possível num processo histórico longo e delicado, que culminou com as definições de Dirichlet (1837) e Bourbaki (1939) para funções. Essas possibilitaram um alto nível de abstração desse conceito, ampliando-o para conjuntos de objetos matemáticos antes pouco imagináveis.

O conceito de funções não se limita às aplicações mais simples como variação de preço de um produto em relação à quantidade do mesmo e a distância percorrida em relação ao tempo gasto; tal conceito atinge aplicações que não são, de forma alguma, triviais, como quando tentamos descrever o ponto em uma trajetória retilínea em que um certo corpo acelerado se encontrará decorrido um tempo definido de observação desse movimento. Temos ainda que pode-se simplesmente relacionar dois conjuntos quaisquer por meio de uma função sem que haja nenhuma aplicação bem definida. Assim, para se estudar funções pode-se ter:

- aplicações simples por meio das quais se constrói o conceito de maneira inicial;
- aplicações mais complexas para que avancem as análises e cálculos relacionados ao conceito já construído;
- abstração e formalização dos conceitos estudados.

Dentre o que se estuda na matemática, o conceito de funções apresenta de forma clara a dicotomia entre o prático e o teórico (ZUFFI; PACCA, 2000). As funções desempenham um papel fundamental na descrição e estudo de certos fenômenos da natureza que podem ser observados como interdependência entre grandezas distintas que possuem uma taxa de variação fixa. Não obstante o conceito de funções não é limitado a descrever fenômenos da natureza, mas pode generalizá-los e resolver problemas abstratos que são muito próprios da matemática (ZUFFI; PACCA, 2002). Contudo, o estudo de um conceito como o de funções apresenta dificuldades devido à sua complexidade. Para Brito e Almeida (2005):

> uma dificuldade, comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distancia da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano.

É esse distanciamento entre o conteúdo e a experiência que responde pelo desinteresse que os estudantes apresentam (BRASIL, 2000). Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000) “a integração dos diferentes conhecimentos pode criar as condições necessárias para uma aprendizagem motivadora”.

Além disso a fragmentação ou compartimentalização do saber contribui para que os estudantes tenham ainda mais dificuldade na compreensão de diversas áreas do conhecimento, conduzindo-os a compreender apenas partes de um todo (SOUSA, 2010). É necessário, portanto, que haja uma abordagem interdisciplinar no estudo de um tema como funções, para que se tenha pleno entendimento de um conceito que é ao mesmo tempo prático e teórico. De acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000) “a aprendizagem significativa pressupõe a existência de um referencial que permita aos alunos identificar e se identificar com as questões propostas”. Segundo Sousa (2010):

> a interdisciplinaridade como abordagem para pesquisa e ensino busca a interação entre uma, duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento humano, num processo que abrange desde uma simples comunicação de idéias até a integração de finalidades, objetivos, conceitos e conteúdos.

Vale ressaltar que o trabalho interdisciplinar perde seu sentido quando as disciplinas são tratadas de maneira isolada apenas fornecendo-se alguns exemplos de uma na outra e de igual modo, as disciplinas não podem ser diluídas de forma que suas particularidades não sejam mais percebidas. A interdisciplinaridade deve ir além da justaposição de disciplinas e evitar a diluição delas (BRASIL, 2000).

É trivial que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos (BRASIL, 2000), porém essa relação é mais próxima entre a matemática e a física; a matemática está alojada de forma definitiva no seio da física (PIETROCOLA, 2002). De acordo com Sousa (2010):

> há uma forte relação entre matemática e física, no que e refere à modelização matemática dos fenômenos físicos. Por exemplo, a afinidade do conhecimento sobre Função e sua representação gráfica e algébrica na modelização de vários fenômenos ligados à Cinemática, Dinâmica, Termometria, Calorimetria, Estudo dos Gases, Eletrostática, Eletrodinâmica e Eletromagnetismo.

Segundo Pietrocola (2002), professores não têm dúvidas de que para exercer boa física são necessários conhecimentos Matemáticos. Em particular, Sousa (2010) deixa clara a relação entre as funções e a cinemática. Propomos, portanto, uma abordagem interdisciplinar no estudo das funções afins e quadráticas com a cinemática, em particular no estudo dos Movimentos

Retilíneo Uniforme (MRU) e Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Dessa forma espera-se que o estudante possa atribuir sentido ao conceito de funções e então construir seu significado o que, segundo Brito e Almeida (2005), é de fato aprender.

Na verdade, esta abordagem se destaca no sentido de tratar o assunto de forma completa enriquecendo o estudo de ambas as áreas do conhecimento. Quando se estuda ambos os conceitos de maneira integrada, nota-se que a cinemática se torna a motivação e a aplicação das funções, enquanto as funções são a ferramenta perfeita para se descrever fenômenos naturais relacionados a movimentos, possibilitando então que o estudante formalize o conceito de funções e o trate em um nível mais elevado de abstração. Também é importante, no contexto de escolas estaduais, utilizar equipamentos de baixo custo para a realização de experimento, de modo que possam ser replicados em diferentes escolas, e talvez até criados pelos próprios estudantes. Além disso, os experimentos e procedimentos experimentais precisam proporcionar um ambiente com parâmetros físicos que realmente mostrem um MRU e um MRUV. Com isso, para realização deste trabalho buscamos equipamentos que se adequassem a essa realidade. Vale ressaltar que ao longo deste trabalho usaremos as unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades (SIU).

Além disso, a interdisciplinaridade contribui para que não haja fragmentação do conhecimento de modo que o estudante não construa um conhecimento compartimentado e, portanto, deficiente; isso não significa, por outro lado, que as particularidades das diferentes disciplinas devam ser desprezadas para se tratar apenas os pontos em que elas convergem. O trabalho interdisciplinar deve ir além da construção de uma nova disciplina ”quimérica”, deve integrar as disciplinas envolvidas, sejam duas ou mais, em torno de ferramentas ou objetos de estudo comuns que serão abordados nos moldes específicos de cada uma delas com o objetivo de construir um conhecimento mais completo do conceito estudado.

1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho propõe uma abordagem integrada entre funções e cinemática nas aulas de física e matemática da 1ª série do ensino médio.

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Como objetivo geral propomos uma sequência didática interdisciplinar de funções e cinemática de modo a proporcionar aos professores de matemática e física que atuem na 1ª série do ensino médio um material que lhes sirva de auxílio para o desenvolvimento de uma boa situação de aprendizagem em ambas as disciplinas de tal forma que o estudante construa tais conceitos de maneira não fragmentada e, assim, os compreenda de modo mais eficaz.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Por sua vez, entre os objetivos específicos deste presente trabalho de pesquisa devem ser considerados os seguintes:

- Revisitar a teoria de funções, em especial afim e quadrática, e dos movimentos retilíneos da cinemática;
- Utilizar o método de extrapolação para demonstrar que as funções afim e quadrática descrevem matematicamente os movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variado, respectivamente;
- Produzir uma sequência didática para aplicação nas aulas que tenha foco na interdisciplinaridade entre matemática e física;
- Utilizar equipamento de baixo custo para realizar experimentos de MRU e MRUV, para que os alunos observem a relação entre prática e teoria.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos com os seguintes conteúdos: no Capítulo 1 fêz-se uma introdução geral à dissertação, a importância do problema e os objetivos gerais e específicos foram apresentados. No Capítulo 2 apresentamos uma breve revisão de funções de uma variável (domínio e imagem, exemplos de aplicações, gráficos, principais funções elementares entre outros), um dos principais conceitos de matemática. No capítulo 3, é apresentado o conceito de ajuste de curva. Neste capítulo, através do método dos mínimos quadrados é construido a curva que melhor se ajusta a um conjunto de dados exprimentais. os ajustes linear, polinomial e não linear serão discutidos. No Capítulo 4, estudamos e analisamos os movimentos unidimensionais como forma de introduzir os conceitos mais básicos da cinemática. São, também, apresentados os Movimentos Retilíneo Uniforme (MRU) e Retilíneo Uniformemente Variado(MRUV). No Capítulo 5 são relatados os exprimentos realizados com os alunos da 1ª série do ensino médio de uma escola pública do estado São Paulo. Os exprimentos realizados com duas turmas de alunos sobre os movimentos MRU e MRUV são relatados. Além disso, uma sequência didática é construida para o ensino de alguns conceitos básicos de matemática e física. E, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais desta dissertação.

2 FUNÇÕES

Um dos principais e mais complexos conceitos matemáticos é o conceito da função. O mesmo está presente em quase todas as áreas da matemática e em muitas outras ciências. Por exemplo, na área de equações diferenciais tentamos resolver equações cujas soluções são funções ou em um problema de otimização o objetivo é encontrar os pontos mínimos ou máximos de uma função. Em engenharia de materiais, a temperatura de uma camada de metal em um certo ponto ou em engenharia elétrica, o potencial elétrico em um dado ponto são representados por expressões matemáticas que são consideadas como funções. Além disso, a partir do conceito de função são definidos muitos outros conceitos. Por exemplo, todos os pontos de uma camada de metal que têm a mesma tempratura geram uma curva chamada de isotérmica ou ainda todos os pontos que têm o mesmo potencial elétrico definem uma curva chamada de equipotencia.

Resumindo, o conceito de função é um conceito indispensável quando o objetivo é avaliar quantitativamente muitos fenômenos naturais. No ensino médio, por sua vez, o conceito de função é tratado e alguns tipos de funções elementares são apresentadas e estudadas superficialmente ao longo deste período. Porém, falta uma abordagem diferenciada que integre a abstração e a aplicação deste conceito em um mesmo grau de relevância, pois com isso nada se perde no processo de ensino. Uma grande dificuldade que os professores de matemática enfrentam quando o assunto é função é que este conceito não é um conceito que se limita apenas às aplicações simples e triviais e muitas vezes o aluno precisa conhecer outros conceitos de matemática ou até de outras disciplinas como pré-requisitos, tratando assim, também, a interdisciplinaridade entre matemática e outras áreas como, por exemplo, física e química. Nas disciplinas de física, por exemplo, os alunos estudam a posição e a movimentação de pêndulos. As funções que melhor ajustam aos movimentos periódicos de um pêndulo são as funções trigonométicas. Neste estudo, inicialmente, o aluno deve ter uma noção básica de fisíca e do movimento de pêndulos e ele precisa ter o conhecimento de que os movimentos de pêndulos são periódicos. Após isso, o professor de matemática usa os conceitos matemáticos para definir as funções periódicas e em seguida apresentar as funções trigonométricas. Sem esta interdisciplinaridade, haverá fragmentação e deficiênia do conhecimento de modo que o aluno não será capaz de construir um conhecimento compartimentado e esta interdisciplinaridade faz com que o aluno saiba que não existe ciência isolada, muito menos a matemática que está presente em quase todas as áreas de ciências.

Segundo (BRASIL, 2000):

> o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.

Podemos assim concluir que o conceito de função é fundamental para a matemática e outras ciências e que tem as suas complexidades, pois expressar e modelar fenômenos naturais através de funções matemáticas e criar interdisciplinaridade entre a matemática e outros campos de conhecimento não é uma tarefa fácil, pelo contrário, exige considerável esforço.

2.1 FUNÇÕES: DEFINIÇÕES E NOÇÕES BÁSICAS

Veremos algumas noções básicas sobre funções, inicialmente em um contexto geral, não apenas aquelas funções simples definidas no conjunto dos números reais a valores também reais. Ao contrário do que pode-se pensar, há aplicações razoavelmente simples para a noção de funções definidas apenas em conjuntos.

Dados dois conjuntos não vazios X e Y, chamamos de relação de X em Y o subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, ou seja, R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$, isto é, $R = \{(x,y) \,:\, x \in X \text{ e } y \in Y\}$.

Definição 2.1 *Uma função f de X em Y é uma relação de X em Y determinada por uma regra que associa cada elemento de X a um único elemento de Y. Neste caso denotamos $f : X \to Y$.*

Informalmente, uma **função** f de X em Y é uma *regra* que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$, dados X e Y conjuntos não vazios (MUNIZ NETO, 2015). Quando temos uma função $f : X \to Y$ dizemos que o conjunto X é o **domínio** da função f, o qual denotamos por $Dom(f)$, e o conjunto Y é o **contradomínio** da função f. Além disso, o conjunto dos elementos $y \in Y$ que estão associados ao menos a um elemento $x \in X$ por f é chamado de **imagem** de f e o denotamos $Im(f)$. Os elementos da imagem de f são denotados por $y = f(x)$. A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções do nosso dia–a–dia que podem ser compreendidos facilmente por alunos de ensino médio.

Exemplo 2.2 *Suponha que X seja um conjunto que represente um supermercado onde seus elementos sejam os produtos a venda e suponha que Y seja o conjunto dos números reais positivos onde estarão representados os preços das mercadorias. Como cada produto está associado a um único preço, temos que a regra que associa a mercadoria ao seu preço é uma função $f : X \to Y$.*

Exemplo 2.3 *Suponha que X seja um conjunto que representa o tempo decorrido desde o início do movimento de uma maçã ao cair da macieira até que toque o solo e Y o conjunto que representa a distância percorrida por essa maçã. Como a cada instante fixado a maçã terá percorrido uma única distância, temos que a relação que associa à cada instante da queda uma distância percorrida é uma função $f : X \to Y$.*

Exemplo 2.4 *Suponha que X seja um conjunto que represente um grupo de 7 pessoas anônimas com quem foi feita uma pesquisa de satisfação em relação a certo produto e suponha que Y seja o conjunto que apresenta os graus de satisfação possíveis nessa pesquisa variando de 1 a 5 (todos valores naturais), sendo que quanto mais próximo de 1 menor satisfação e quanto mais próximo de 5 maior satisfação. Como cada pessoa apresenta um único grau de satisfação, temos que a regra que associa uma pessoa ao grau de satisfação com relação ao produto é uma função $f : X \to Y$.*

Exemplo 2.5 *Suponha que X seja o conjunto dos funcionários do setor financeiro de uma microempresa e suponha que Y seja o conjunto dos registros dos funcionários desse setor, enumerados de 1 a 6, e que cada funcionário possui apenas um registro. Neste caso, a regra que associa um funcionário a um número de registro é uma função $f : X \to Y$.*

O diagrama de flechas representado na Figura 1 exemplifica uma função $f : X \to Y$, onde as setas indicam as associações dos elementos de X com os elementos de Y por f.

Observamos que este diagrama representa uma função já que todo elemento no conjunto $X = Dom(f)$ tem uma única imagem no conjunto Y. Além disso, $Im(f) = \{d, k\}$ pois $d = f(a)$ e $k = f(b) = f(c)$. Caso haja associação de um elemento do domínio a mais de um elemento do contradomíno, então a relação entre os conjuntos não pode ser considerada uma função. Do mesmo modo, se algum elemento do domínio não estiver associado a nenhum elemento do contradomínio, então a relação entre os conjuntos também não representa uma função. Vejamos agora mais exemplos de funções.

Exemplo 2.6 *Dados dois conjuntos não vazios X e Y e um elemento $c \in Y$, a função $f : X \to Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$ é denominada* ***função constante*** *(Figura 2).*

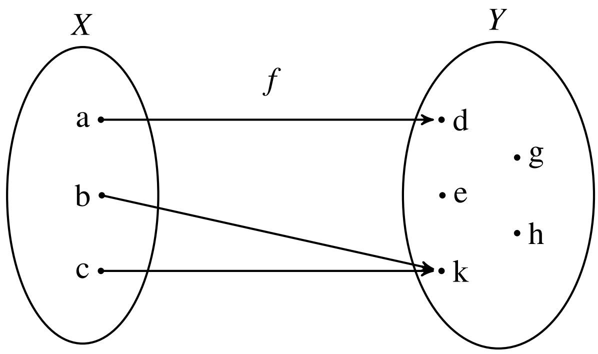

Figura 1: Uma função f de X em Y

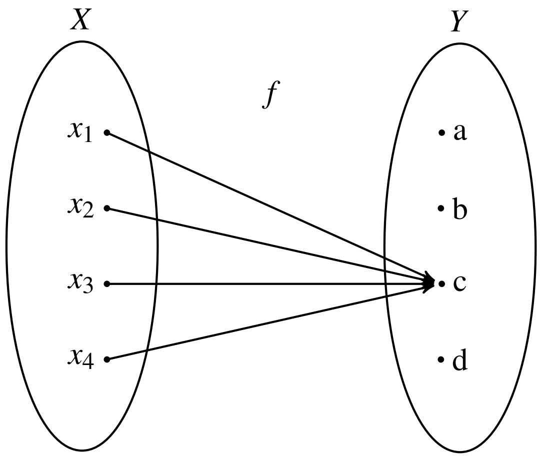

Figura 2: Uma função constante

Neste exemplo, $Dom(f) = X$ e $Im(f) = \{c\}$. Em particular, se $Y = \mathbb{R}$ e $c = 0$, então f é a **função nula**.

Exemplo 2.7 *Dado um conjunto não vazio X, a função $f(x) = x$ para todo $x \in X$ é denominada **função identidade** e é denotada por $Id_x : X \to X$. Neste caso, temos $Dom(f) = Im(f) = X$ (Figura 2).*

É possível notar nos exemplos anteriormente citados que a quantidade de elementos do domínio da função nem sempre coincide com a quantidade de elementos do contradomínio. Além disso a imagem não é necessariamente igual ao contradomínio, é possível que mais de um elemento do domínio esteja associado com um mesmo elemento da imagem. Definiremos agora os conceitos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetora que buscam exatamente caracterizar essas relações entre o domínio, contradomínio e imagem de uma função.

Definição 2.8 *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função $f : X \to Y$ é dita **injetora** se,*

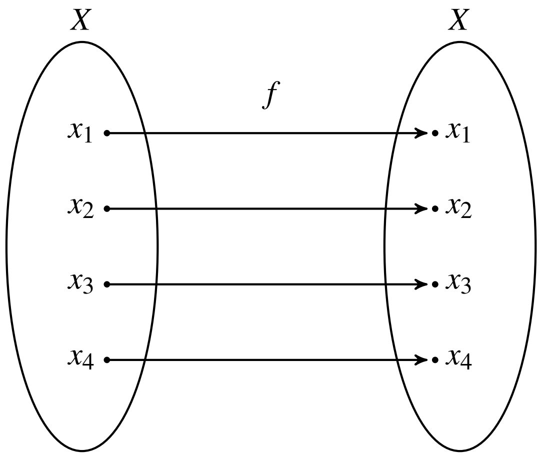

Figura 3: Uma função identidade

para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$, ou seja, se x e y são tais que $x = y$, então $f(x) = f(y)$.

Em outras palavras, uma função $f : X \to Y$ se diz injetora quando elementos diferentes no seu domínio X tenham imagens diferentes no conjunto Y. A Figura 4 representa uma função injetora. Note-se que elementos diferentes no conjunto X têm imagens diferentes no conjunto Y. Por exemplo, $x_1 \neq x_2$, logo $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$.

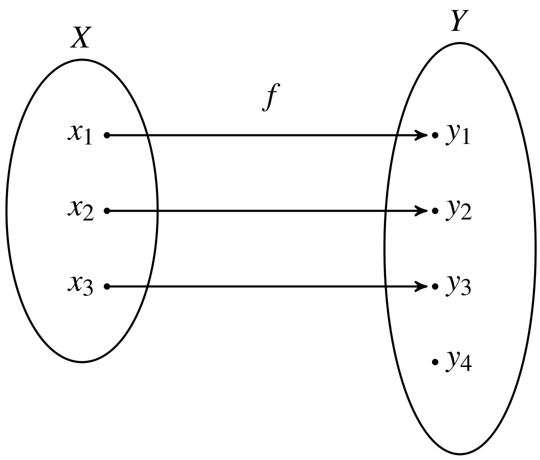

Figura 4: Uma função injetora

Definição 2.9 *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função $f : X \to Y$ é dita* ***sobrejetora*** *se para todo $y \in Y$, existir ao menos um $x \in X$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $Y = Im(f)$.*

Como consequência, se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora, então a equação $f(x) = y$ tem pelo menos uma solução $x \in X$. Equivalentemente, uma função $f : X \to Y$ é sobrejtora

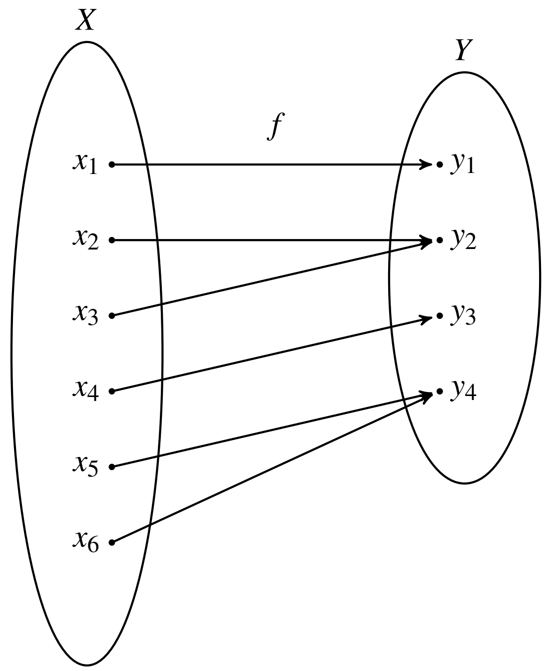

Figura 5: Uma função sobrejetora

quando para todo $y \in Y$ exista algum elemento $x \in X$ tal que $y = f(x)$. A Figura 5 é diagrama de uma função sobrejetora. Neste caso, $Im(f)$ é todo contradomínio da função, ou seja $Im(f) = Y$ pois podemos ver que todo elemento no contradomínio é imagem de algum elemento no domínio da função.

Definição 2.10 *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função $f : X \to Y$ é dita* ***bijetora*** *se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

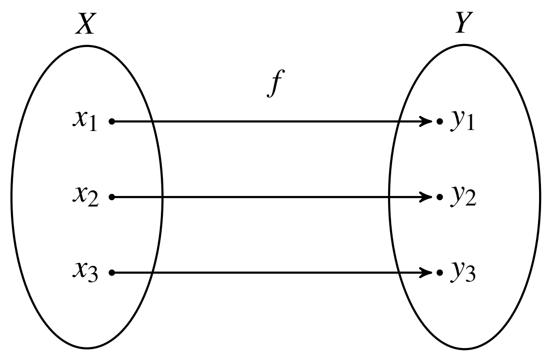

Figura 6: Uma função bijetora

Por exemplo, a função apresentada na Figura 6 é uma função bijetora, pois os elementos diferentes no domínio desta função têm imagens diferentes no conjunto contradomínio e além disso todo elemento no contradomínio desta função é imagem de algum elemento no domínio da função. A função identidade $f : X \to Y$ é também um exemplo de uma função bijetora. De fato, se x_i e x_j são tais que $Id(x_i) = Id(x_j)$, então $x_i = Id(x_i) = Id(x_j) = x_j$, ou seja, $Id(x)$ é injetora. Além disso, sendo x_i (para algum i) um ponto qualquer do contradomínio X da função $Id(x)$, temos que $x_i = Id(x_i)$, isto é, $x_i \in Im(Id(x))$. Logo, $Id(x)$ é também sobrejetora e consequentemente, bijetora.

É também exemplo de função bijetora aquela apresentada no Exemplo 2.3, a maçã caindo da macieira. Nesse exemplo a função apresenta um valor único de distância percorrida para cada instante sendo assim uma função injetora. Além disso, existe um instante para cada valor de distância percorrida pela maçã até o final do movimento, logo a função é sobrejetora e, por consequência, bijetora. Por outro lado, a função do Exemplo 2.2, os produtos de um supermercado, não é uma função bijetora. Como o conjunto Y é o conjunto dos números reais positivos, não se pode garantir que dois, ou mais, produtos não tenham o mesmo preço. Da mesma forma é impossível que haja um produto para cada número real positivo (é bom lembrar que o conjunto de números reais é um conjunto denso). Isso implica em a função não ser nem injetora nem sobrejetora.

Temos uma série de classificações no mundo dos conjuntos. Por exemplo, os conjuntos podem ser finitos ou infinitos. Um conjunto com um número finito de elementos é chamado de conjunto finito e por outro lado um conjunto com um número infinito de elementos é chamado de conjunto infinito. Por exemplo, os conjuntos como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de conjuntos infinitos e conjunto de todos os alunos da 1ª série do ensino médio de uma escola é un conjunto finito. O número de elementos (finito ou infinito) que um conjunto X possui é chamado de **cardinal** e é representado por $n(X)$, $|X|$, $card(X)$ ou frequentemente por $\#X$. Por exemplo, $\#\mathbb{R} = \infty$, ou se $X = \{2, 4, 10, 23\}$ temos então $\#X = 4$. O conjunto vazio é um conjunto que não possui nenhum elemento, logo podemos dizer que $\#\emptyset = 0$.

Dois conjuntos X e Y são chamados de **equipotentes** quando eles têm o mesmo cardinal, isso é $\#X = \#Y$. Neste caso existe uma função bijetora $f : X \to Y$. Por exemplo, o conjunto de números naturais, $\mathbb{N}$, e o conjunto de números naturais pares,$2\mathbb{N}$, são dois conjuntos equipotentes já que a função $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma função bijetora pois se $f(n_1) = f(n_2)$ temos então que $2n_1 = 2n_2$, logo $n_1 = n_2$ (injetora). Por outro lado, se $m \in 2\mathbb{N}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2n$, daí, $f(n) = m$ (sobrejetora). Da mesma forma e apesar de aparecer estranho podemos ver que os conjuntos dos naturais e dos naturais maiores do que 50, $\mathbb{N}_{50}$, tem a mesma cardinalidade pois $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{50}$ dada por $f(n) = n + 50$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma função bijetora.

Existem muitos outros resultados interessantes que envolvem o conceito da cardinalidade. Por exemplo, se X e Y são dois conjuntos finitos onde $X \subset Y$, então $\#X < \#Y$, ou se $\#X \leq \#Y$ e $\#Y \leq \#X$ então $\#X = \#Y$. Como um outro resultado podemos ver que $\#X < \#P(X)$ onde $P(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Simplesmente podemos ver que se $\#X \leq \#Y$, então X deve ser equipotente a um subconjunto de Y enquanto o conjunto Y não é equipotente a nenhum subconjunto de X. Por exemplo, $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$ pois $\mathbb{N}$ é equipotente a próprio $\mathbb{N}$, um subconjunto de $\mathbb{R}$ enquanto $\mathbb{R}$ não é equipotente a nenhum subconjunto de $\mathbb{N}$ já que $\mathbb{R}$ não é enumerável enquanto $\mathbb{N}$ é numerável. Em todos destes casos, a prova é feita através das funções bijetoras caso haja equipotência entre dois conjuntos.

Como toda função associa um elemento do domínio a um elemento do contradomínio temos como resultado um conjunto de pares ordenados que pertencem ao produto cartesiano $X \times Y$, onde $X \times Y = \{(x,y); x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Com isso, definimos o gráfico de uma função.

Definição 2.11 *Dada uma função $f : X \to Y$, o **gráfico** de f é o subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, definido por $Graf(f) = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\}$.*

No caso de $X = Y = \mathbb{R}$ os conjuntos X e Y podem ser compreendidos como duas retas numeradas e $X \times Y$ como um plano. Com esses elementos temos um sistema cartesiano de coordenadas *xOy* onde X e Y são os eixos *Ox*, chamado eixo das *abscissas*, e *Oy*, chamado eixo das *ordenadas*, e cada par ordenado (x,y) é um ponto do plano. A Figura 7 representa o gráfico da função $y = f(x) = 2x^3 + 1$. Observamos que neste caso o gráfico é uma curva contínua no plano cartesiano. Vale lembrar que nem sempre uma curva no plano cartesiano representa uma função.

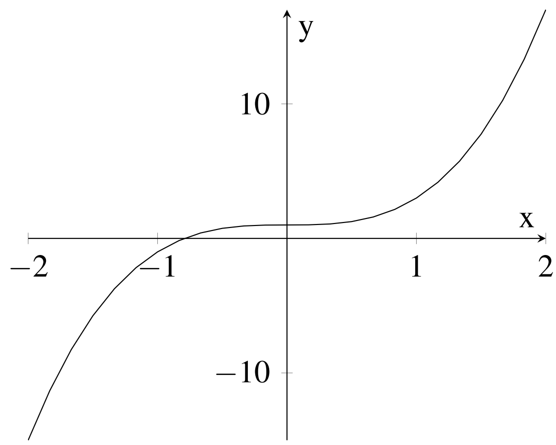

Figura 7: Gráfico de uma função

Se retornarmos ao Exemplo 2.2, temos um gráfico de função que não é uma curva contínua (Figura 8), mas sim vários pontos no plano. Para esse gráfico tomamos uma amostra fictícia de várias marcas diferentes de achocolatados em um supermercado. Nota-se que é possível haver mais de um produto com o mesmo preço, porém não se pode ter o mesmo produto com dois preços.

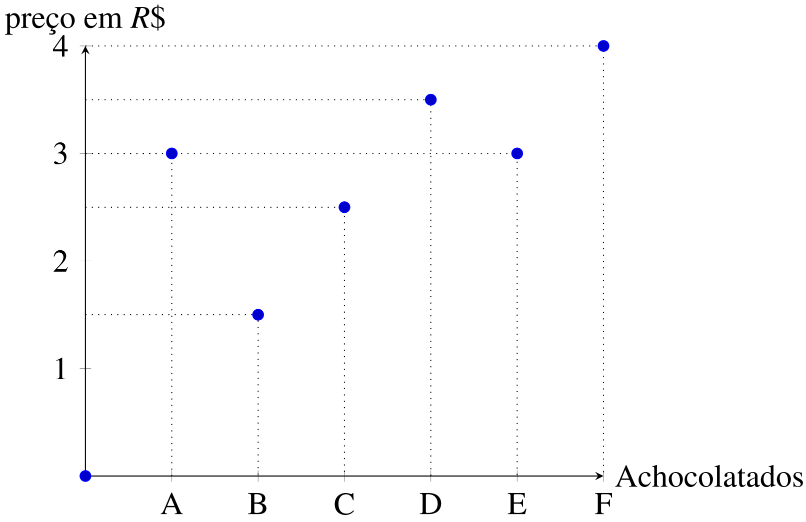

Figura 8: Preço de achocolatados de um supermercado

Por outro lado o gráfico da função descrita no Exemplo 2.3 é uma curva contínua (Figura 9) pois cada instante de tempo possui um valor de distância percorrida, sendo ambos valores reais. Existem ainda inúmeros exemplos possíveis de situações cotidianas que podem ser traduzidas em funções e representadas em gráficos.

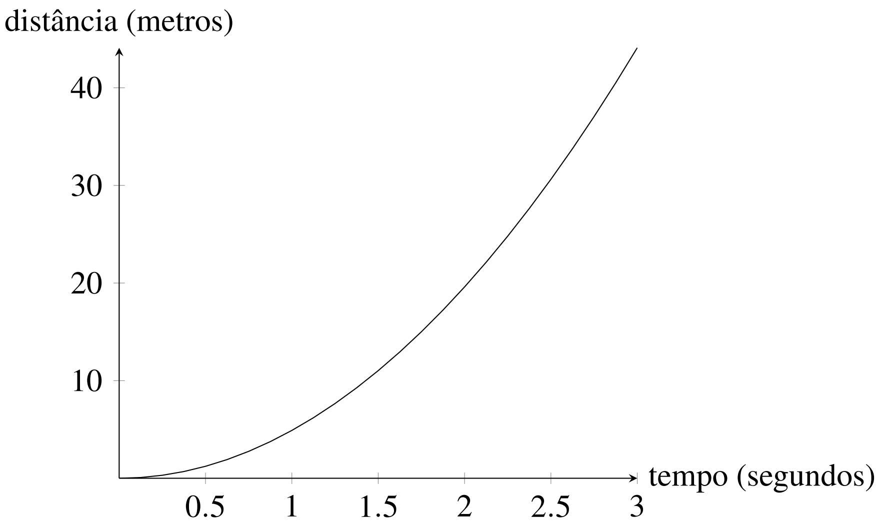

Figura 9: Queda de uma maçã em 3 segundos

Como mencionamos anteriormente, nem todo subconjunto do plano munido de um sistema cartesiano xOy pode ser compreendido como o gráfico de uma função. Tomemos $A =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$, donde cada elemento $x \in \mathbb{R}$ está associado a um elemento $y \in \mathbb{R}$ por meio de uma regra qualquer. Se (x_1,y_1), $(x_1,y_2) \in A$ são pontos no plano xOy e $y_1 \neq y_2$ então A não pode ser o gráfico de uma função pois, pela Definição 2.1, uma função associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio, ou seja uma função não pode atribuir dois valores diferentes para um único elemento. Isso ilustra o seguinte resultado geral, denominado **teste da reta vertical**: uma curva qualquer no plano xOy é o gráfico de alguma função f caso nenhuma reta vertical intersecta essa curva mais de uma vez. Por exemplo, as Figuras 7, 8 e 9 todas são gráficos de funções pois nenhuma reta vertical intercepta estes gráficos em mais que um ponto. Por outro lado, a Figura 10 não representa o gráfico de alguma função já que existe pelo menos uma reta veretical que intercepta o gráfico em mais que um ponto.

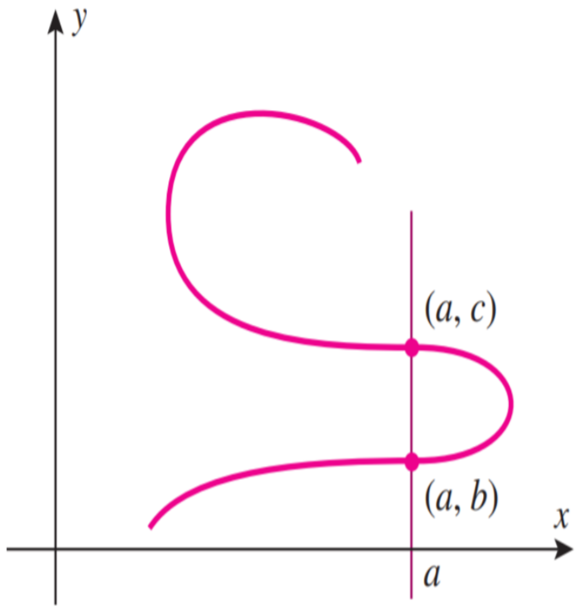

Figura 10: Gráfico de uma relação que não é uma função

Retomaremos, agora, ao Exemplo 2.2 em que vemos que a função $f : X \to Y$ associa as mercadorias de um supermercado (elementos do conjunto X) a seus respectivos preços (elementos do conjunto Y). Seria possível obtermos uma função $g : Y \to X$ que associe valores em reais (elementos do conjunto Y) às mercadorias cujos preços são tais valores (elementos do conjunto X)? Pensando nos diagramas de setas, seria possível *inverter o sentido das setas*? A resposta para esse caso é não, pois o conjunto Y é o conjunto dos números reais positivos, é impossível que exista ao menos uma mercadoria associada a cada valor real positivo pertencente a Y (sabe-se que o conjunto de numeros reais positivos é um conjunto denso) além de não ser possível garantir que duas mercadorias não tenham o mesmo preço, como já foi discutido.

Seja $f : X \to Y$ uma função. Para que a relação $g : Y \to X$ seja no primeiro lugar uma função, f precisa ser sobrejetora pois assim todo elemento no conjunto Y terá pelo menos uma imagem no conjunto X. Além disso, como a imagem no conjunto X tem que ser único, logo podemos concluir que f precisa ser injetora. Sendo assim, para que uma função $f : X \to Y$ tenha inversa $g : Y \to X$, esta função precisa ser bijetora. Em outras palavras, apenas as funções bijetoras têm inversa. Por esta razão, a função do Exemplo 2.2 não tem inversa (ou seja, $g : Y \to X$ não pode ser uma função) pois $f : X \to Y$ não é bijetora. Por outro lado, tomemos o Exemplo 2.3 onde $f : X \to Y$ associa o tempo decorrido desde o início do movimento de uma maçã que cai da macieira até que toque o solo à distância percorrida por essa maçã a cada instante. Neste caso é possível obter uma função $g : Y \to X$ pois para cada valor de distância percorrida pela maçã existe um único valor de tempo decorrido. Ou seja, como $f : X \to Y$ é bijetora então $g : Y \to X$ é uma função. Outro exemplo é a função Id_X que é uma bijeção. Não apenas a função admite a *inversão de sentido das setas* quanto a função *invertida* é exatamente a Id_X. Dessa forma definimos a função inversa.

Definição 2.12 *Seja $f : X \to Y$ uma função bijetora. A* ***função inversa*** *de f é a função $g : Y \to X$ tal que, para $x \in X$, $y \in Y$, temos $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.*

Podemos afirmar, portanto, que uma função é inversível se for bijetora e denotamos a função inversa de uma bijeção $f : X \to Y$ por $f^{-1} : Y \to X$. Como a função inversa, f^{-1}, desfaz o que a função f faz e a função f desfaz o que a função inversa faz, podemos concluir que $Dom(f) = Im(f^{-1})$ e $Im(f) = Dom(f^{-1})$. Uma sequência desta observação é que para encontrar o gráfico da função f^{-1} (caso existir) basta refletir o gráfico da função f em torno da reta $y = x$ (Figura 11) ou para encontrar algebricamente f^{-1}, basta isalor x na expressão algébrica $y = f(x)$ e em seguida trocar x por y (para mais detalhes o leitor pode consultar qualquer livro de Cálculo Diferencial e Integral).

2.2 FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Uma função real de uma variável real é uma função $f : X \to Y$ cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o contradomínio é o próprio conjunto $\mathbb{R}$, de forma que todo $f(x)$ seja um número real. O estudo dessas funções em específico é relevante, dadas as muitas situações em que elas são utilizadas, tanto aquelas mais simples do cotidiano de qualquer pessoa quanto as mais complexas aplicações nas ciências avançadas. Veremos algumas situações cotidianas que podem ser representadas em forma de funções.

Exemplo 2.13 *Vamos supor que uma criança vá a uma sorveteria comprar picolés, sendo que cada picolé custa R\$ $1,20$. Note que o valor total da compra realizada por essa criança*

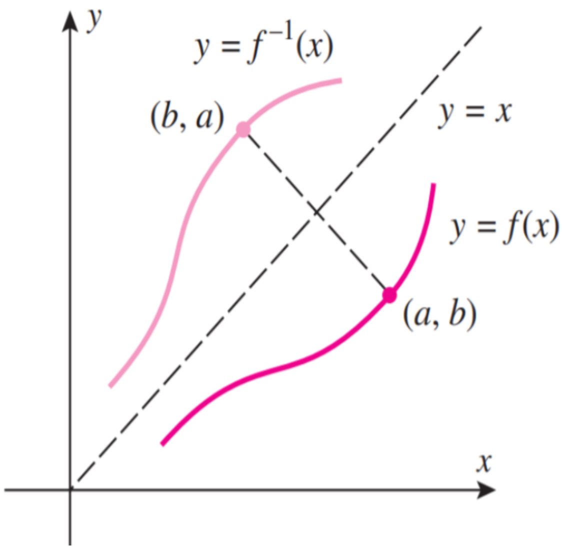

Figura 11: Gráfico da função inversa

depende da quantidade de picolés comprada. Como a quantidade de picolés sempre será um número natural e o valor total da compra um número real, podemos dizer que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 1,2x$ *com* $x \in \mathbb{N}$ *representa a situação descrita no exemplo.*

Exemplo 2.14 *Imagine um ciclista percorrendo uma pista retilínea a uma velocidade constante de 80 km/h. Isso significa que a cada hora esse carro percorre 80 km, porém o tempo decorrido não é sempre um número inteiro pois ele pode permanecer nessa pista por* 15 *minutos, ou seja,* $\frac{1}{4}$ *de uma hora, e percorrerá* 20 *km. Nesse caso* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 80x$ *representa a situação em que obtemos a distância percorrida por um carro a* 80 *km/h em um certo tempo, já que o domínio da função não pode ser o conjunto dos números naturais.*

Em especial, veremos dois tipos de funções reais mais detalhadamente nesta seção, a **função afim** e a **função quadrática**.

2.2.1 FUNÇÃO AFIM

Definição 2.15 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada afim quando existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

O coeficiente b é o *valor inicial* da função f sendo que $b = f(0)$ e o coeficiente a é a *taxa de variação* (inclinação) da função que nos fornece informações sobre o *acréscimo* ou *decréscimo* dos valores de $f(x)$ ao se variar o valor de x. São casos particulares de funções afins a **função identidade**, $f(x) = x$, as **funções constantes**, $f(x) = b$ e as **funções lineares**, $f(x) =$

ax. Uma função linear é também o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta. De acordo com Lima (2013, p.84), "a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x.

Proposição 2.16 *Toda função afim é bijetora.*

Seja a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 = x_2$, temos que $f(x_1) = ax_1 + b = ax_2 + b = f(x_2)$, ou seja, f é injetora. Tomemos ainda $y \in \mathbb{R}$ e $x_0 = \frac{y-b}{a}$, temos que $f(x_0) = a(\frac{y-b}{a}) + b = y - b + b = y$, ou seja, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$, logo f é sobrejetora e, portanto, bijetora.

Proposição 2.17 *O gráfico $Graf(f)$ de uma função afim é uma reta.*

Seja a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Tomemos três pontos quaisquer do gráfico $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$, supondo $x_1 < x_2 < x_3$. Sejam $d(P_1, P_2)$ a distância entre os pontos P_1 e P_2, $d(P_2, P_3)$ a distância entre os pontos P_2 e P_3 e $d(P_1, P_3)$ a distância entre os pontos P_1 e P_3, temos

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2}, \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
&= (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
&= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} + (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
&= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}, \\
&= d(P_2, P_3) + d(P_1, P_2),
\end{aligned}$$

que isso implica que os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares e, portanto o gráfico de uma função afim é uma reta.

É possível observar esse fato no exemplo a seguir.

Exemplo 2.18 *Imagine uma pista reta que não tem fim nem começo, onde foi colocada uma marcação, que chamaremos de marco zero, para servir de ponto de referência. Imagine também um veículo que se move nesta pista com uma velocidade constante de* $3m/s$. *Quando se observou esse veículo pela primeira vez ele estava* 5 *metros à distante do marco zero.*

Se considerarmos o instante da primeira observação como o instante 0 e o marco zero como a posição 0, podemos dizer que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 5$ representa a posição do veículo a cada instante observado, onde x é medido em segundos e $f(x)$ em metros. Tomemos agora $P_1, P_2, P_3 \in Graf(f)$ sendo $P_1 = (1,8), P_2 = (2,11)\, e\, P_3 = (3,14)$. Temos que $d(P_1,P_2) = \sqrt{10}$, $d(P_2,P_3) = \sqrt{10}$ e $d(P_1,P_3) = \sqrt{40}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
d(P_1,P_3) &= \sqrt{40}, \\
&= 2\sqrt{10}, \\
&= \sqrt{10}+\sqrt{10}, \\
&= d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3).
\end{aligned}
$$

Portanto P_1, P_2 e P_3 são colineares e gráfico de f é uma reta. A Figura 12 representa o gráfio desta função.

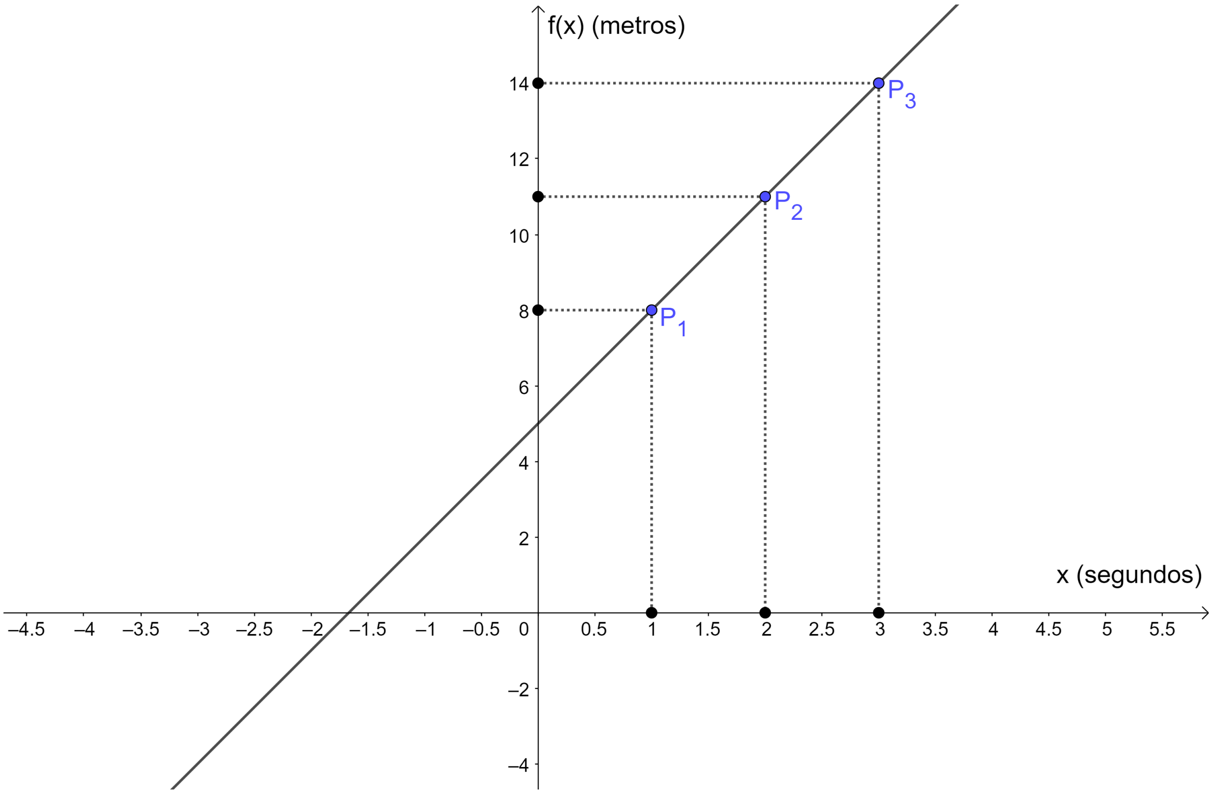

Figura 12: Gráfico de $f(x) = 3x+5$

No gráfico de uma função afim o número b, chamado de coeficiente linear, é a ordenada do ponto de intersecção entre o gráfico de f e o eixo Oy, basta notar que se $x = 0$ então $f(0) = a.0+b \Rightarrow f(0) = b$. O número a, por sua vez, é chamado de coeficiente angular ou inclinação da reta, sendo $a = \tan\theta$ onde θ é o menor ângulo formado por o gráfico de f e o eixo Ox, como mostraremos a seguir (Figura 13).

Sejam a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$ e θ o menor ângulo formado por gráfico de f e o eixo Ox. Tomemos dois pontos distintos $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$

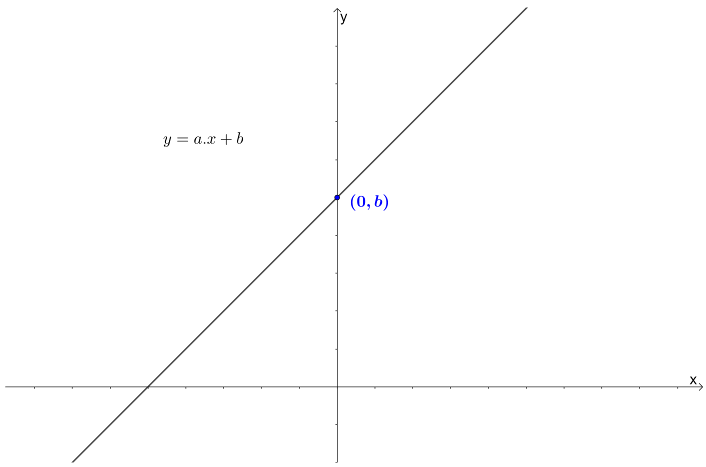

Figura 13: Coeficiente linear de uma função afim

de $Graf(f)$ e o ponto Q, sendo esse o ponto de intersecção entre as retas $x = x_2$ e $f(x) = f(x_2)$. Como $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1 + f(x_2) - ax_2, \\ f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 - ax_1, \\ ax_2 - ax_1 &= f(x_2) - f(x_1), \\ a(x_2 - x_1) &= f(x_2) - f(x_1), \\ a &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $(f(x_2) - f(x_1))$ e $(x_2 - x_1)$ são, respectivamente, cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo θ do triângulo retângulo P_1QP_2. Assim, $\tan\theta = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e, portanto, $a = \tan\theta$ (Figura 14).

Ambos os coeficientes de uma função afim podem ser determinados a partir de dois pontos distintos quaisquer do gráfico de f pois é única a reta que contém dois pontos distintos.

2.2.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 2.19 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada quadrática quando são dados números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O discriminante Δ da função f é o discriminante do trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) três pontos no sistema cartesiano de tal forma que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Podemos ver que existe uma única função quadrática f que passa nestes três

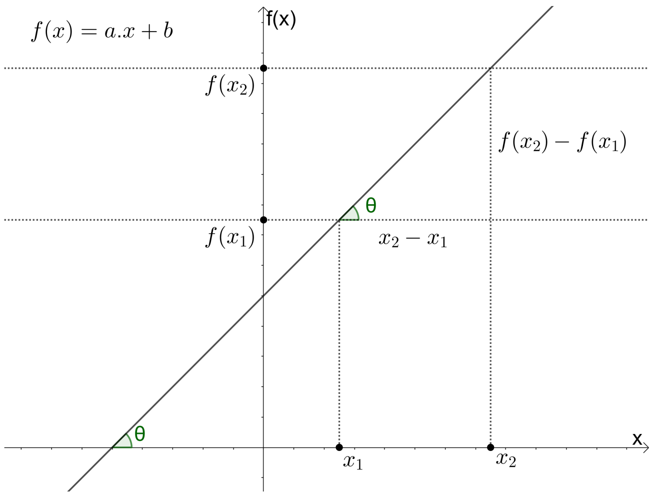

Figura 14: Coeficiente angular de uma função afim

pontos, isto é $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_3)$ e além disso está função quadrática é única. Para provar a unicidade desta função, vamos supor que existe umma outra função quadrática g com estas condições, ou seja existem $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ tais que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ com x_1, x_2 e x_3 distintos entre si. Desta forma temos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= g(x_1), \\ ax_1^2 + bx_1 + c &= a'x_1^2 + b'x_1 + c', \\ (a-a')x_1^2 + (b-b')x_1 + (c-c') &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos $(a-a')x_2^2 + (b-b')x_2 + (c-c') = 0$ e $(a-a')x_3^2 + (b-b')x_3 + (c-c') = 0$. Podemos, então, escrever o sistema de equações

$$\begin{cases} (a-a')x_1^2 + (b-b')x_1 + (c-c') = 0, \\ (a-a')x_2^2 + (b-b')x_2 + (c-c') = 0, \\ (a-a')x_3^2 + (b-b')x_3 + (c-c') = 0, \end{cases}$$

Subtraindo-se da primeira equação a segunda e repetindo o processo com a primeira e terceira equações, temos

$$\begin{cases} (a-a')(x_1^2 - x_2^2) + (b-b')(x_1 - x_2) = 0 \\ (a-a')(x_1^2 - x_3^2) + (b-b')(x_1 - x_3) = 0 \end{cases}$$

Como $x_1 \neq x_2$ e $x_1 \neq x_3$, dividiremos a primeira equação por $(x_1 - x_2)$ e a segunda por

$(x_1 - x_3)$, obtendo

$$\begin{cases} (a-a')(x_1+x_2)+(b-b')=0 \\ (a-a')(x_1+x_3)+(b-b')=0 \end{cases}$$

Subtraindo-se a segunda equação da primeira, obtemos $(a-a')(x_2-x_3)=0$. Como $x_2-x_3 \neq 0$ então $(a-a')=0$. Sendo $(a-a')=0$ temos $(a-a')(x_1+x_2)+(b-b')=0 \Rightarrow (b-b')=0$ e, assim, $(a-a')x_1^2+(b-b')x_1+(c-c')=0 \Rightarrow (c-c')=0$.

Dessa forma, concluímos que $a=a'$, $b=b'$ e $c=c'$. Isso significa que se duas funções quadráticas assumem o mesmo valor em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x (LIMA, 2013). Assim, dizemos que os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume (LIMA, 2013).

Considerando ainda a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c, \\ &= a\Big(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\Big), \\ &= a\Big(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\Big), \\ &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\Big], \\ &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big]. \end{aligned}$$

A equação $f(x)=a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big]$ é chamada *forma canônica* da função quadrática. Essa forma pode ser escrita na forma simplificada $f(x)=a(x-h)^2+k$, sendo $h,k \in \mathbb{R}$ tais que $h=\frac{-b}{2a}$ e $k=\frac{-\Delta}{4a}$. Ainda, o valor $\Delta=b^2-4ac$ é chamado *discriminante*.

Proposição 2.20 *Seja a função quadrática dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, temos que:*

- *Se $a>0$, então $Im(f)=\Big[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\Big)$.*
- *Se $a<0$, então $Im(f)=\Big(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\Big]$.*

Em qualquer dos casos, temos $f(x)=-\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$.

Ao se analisar a forma canônica da função quadrática f é possível notar que a função apresenta valor máximo ou valor mínimo dependendo do sinal do coeficiente a. De fato, se $a > 0$ então $a(x-h)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq k$, se, por outro lado, $a < 0$ então $a(x-h)^2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq k$. A igualdade $f(x) = k$ ocorre somente quando $x = h$, ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$. Em outras palavras, se $a > 0$ a função f tem **valor mínimo** $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ no **ponto mínimo** $x = -\frac{b}{2a}$, se $a < 0$ a função f tem **valor máximo** $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ no **ponto máximo** $x = -\frac{b}{2a}$. Por outro lado, é trivial notar em $f(x) = a(x-h)^2 + k$ que se $a > 0$ não existe valor máximo e se $a < 0$ não existe valor mínimo.

Proposição 2.21 *O gráfico da função quadrática é uma parábola.*

Notemos que, como uma função quadrática possui valor máximo ou mínimo, existe um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$. Tomemos, então, a forma canônica da função quadrática f dada por $y = ax^2 + bx + c$, sendo $y = f(x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos, que

$$
\begin{aligned}
y &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.
\end{aligned}
$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $|a| = \frac{1}{4p}$. Para $a > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4p}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \\
y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} &= \frac{1}{4p}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,
\end{aligned}
$$

e como $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$, então

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= \frac{1}{4p}(x - x_0)^2, \\
4p(y - y_0) &= (x - x_0)^2.
\end{aligned}
$$

De maneira análoga, se $a < 0$ então $a = -\frac{1}{4p}$, daí obtemos a equação $-4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$. Ambas as equações são equações de parábolas cujo eixo focal é paralelo ao eixo $0y$, têm parâmetro $2p$ e vértice (x_0, y_0), sendo que se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e se $a < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo (Figuras 15–16). Concluímos, assim, que o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola.

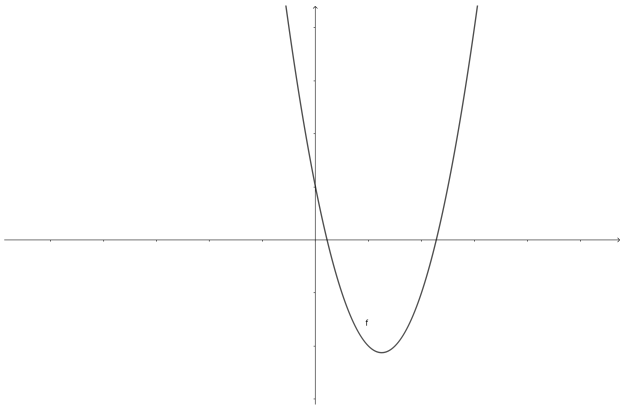

Figura 15: Parábola com concavidade voltada para cima ($a > 0$)

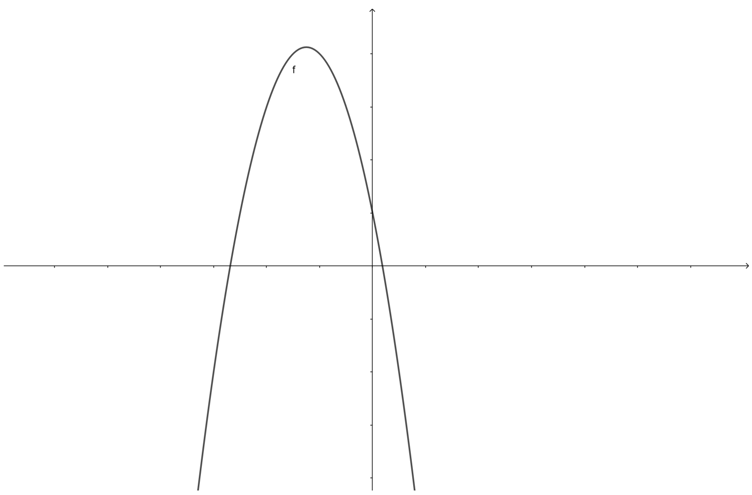

Figura 16: Parábola com concavidade voltada para baixo ($a < 0$)

2.2.3 MONOTONICIDADE

Definição 2.22 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita:*

1. ***Crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.*

2. ***Decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.*

3. ***Não crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

4. ***Crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

*Em qualquer dos casos acima, dizemos que a função f é **monótona** em I.*

Uma função afim é monótona em todo o domínio da função e sua monotonicidade não se altera. A função quadrática, por outro lado, apesar de ser monótona em todo seu domínio essa monotonicidade se altera no ponto de máximo/mínimo da função.

Proposição 2.23 *Uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.*

Tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sendo que $x_1 < x_2$, temos que, se $a > 0$ então $f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$, logo f é crescente. Se, por outro lado, $a < 0$ então $f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$ e, portanto, f é decrescente.

Proposição 2.24 *Seja uma função quadrática f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

(a) Se $a > 0$, então f é decrescente em $\Big(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\Big]$ e crescente em $\Big[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\Big)$.

(b) Se $a < 0$, então f é crescente em $\Big(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\Big]$ e decrescente em $\Big[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\Big)$.

Seja a função quadrática f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tomemos inicialmente $a > 0$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c), \\
&= (ax_2^2 - ax_1^2) + (bx_2 - bx_1), \\
&= a(x_2^2 - ax_1^2) + b(x_2 - x_1), \\
&= a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1), \\
&= a\Big(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\Big)(x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$

Se $-\dfrac{b}{2a} \leq x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$ e $b \geq -2ax_1$. Assim temos

$$
\begin{aligned}
a\Big(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\Big)(x_2 - x_1) &\geq a\Big(x_1 + x_2 + \frac{-2ax_1}{a}\Big), \\
&\geq a(x_1 + x_2 - 2x_1), \\
&\geq a(x_2 - x_1) > 0,
\end{aligned}
$$

e daí, $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, o que mostra que f é crescente para $\Big[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\Big)$.

Se, por outro lado, $x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$, então $x_2 - x_1 > 0$ e $b \leq -2ax_2$. Assim temos

$$\begin{aligned} a\Big(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\Big)(x_2 - x_1) &\leq a\Big(x_1 + x_2 + \frac{-2ax_2}{a}\Big), \\ &\leq a(x_1 + x_2 - 2x_2), \\ &\leq a(x_1 - x_2) < 0, \end{aligned}$$

que podemos concluir que $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, o que mostra que f é decrescente para $\Big(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\Big]$. A prova do item (b) é totalmente análoga à do item (a).

2.2.4 RAIZ DE UMA FUNÇÃO

Chamamos de **raizes** ou **zeros** de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ os valores $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = 0$. As raizes de uma função são também as abscissas dos pontos de intersecção entre $Graf(f)$ e o eixo das abscissas do plano cartesiano.

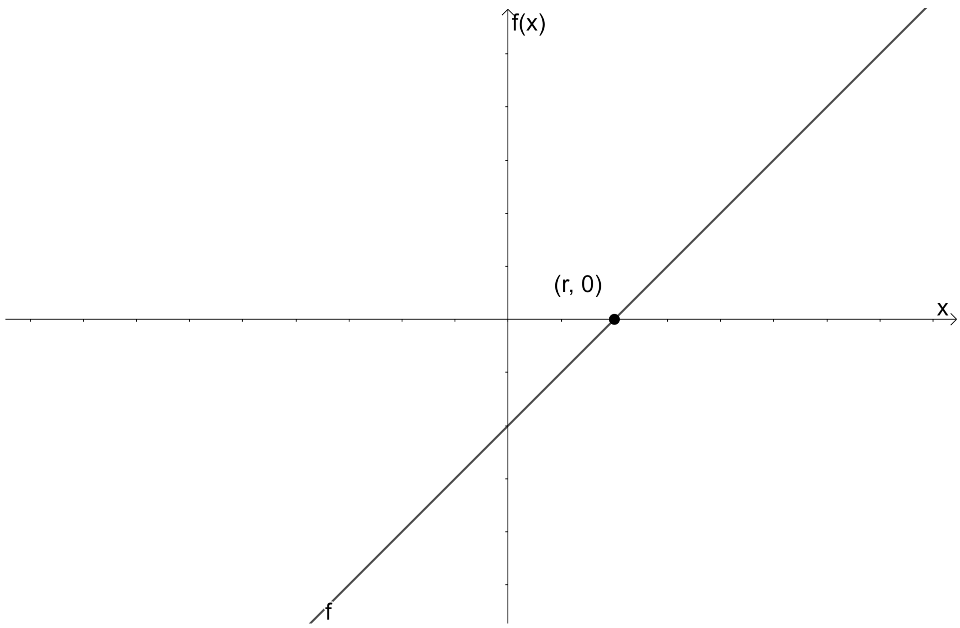

Figura 17: Intersecção entre gráfico de f e o eixo $0x$

Em uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, a raiz da função é o valor r tal que $ar + b = 0$, portanto, $r = -\dfrac{b}{a}$. Vemos, assim, que uma função afim possui uma única raiz real. Tomemos agora uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sendo r a raiz de f então, pela forma canônica, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= a\Big[\Big(r+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big], \\
0 &= \Big(r+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}, \\
\Big(r+\frac{b}{2a}\Big)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}, \\
r+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}, \\
r+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\
r &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\
r &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\
r &= \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},
\end{aligned}
$$

que analisando o discriminante Δ na última expressão, temos que

(a) Se $\Delta > 0$ então $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ são ambos raízes de f, ou seja, f possui duas raízes reais distintas.

(b) Se $\Delta = 0$ então $r = \dfrac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$ é a única raiz real de f, ou seja, f possui apenas uma raiz real.

(c) Se $\Delta < 0$ então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e, por consequência, $r \notin \mathbb{R}$, ou seja, f não possui raízes reais.

Podemos observar o que foi descrito acima nas figuras a seguir.

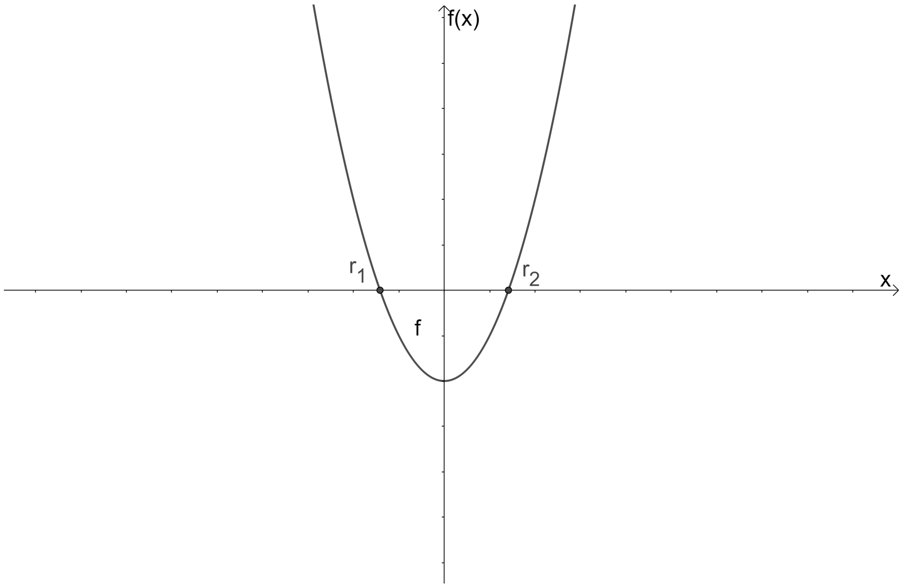

Figura 18: Função f com $\Delta > 0$

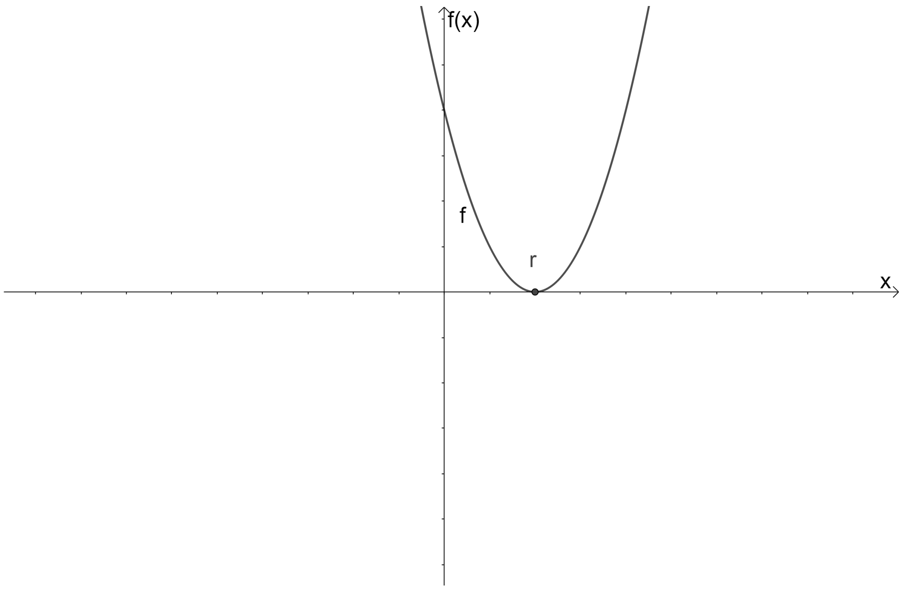

Figura 19: Função f com $\Delta = 0$

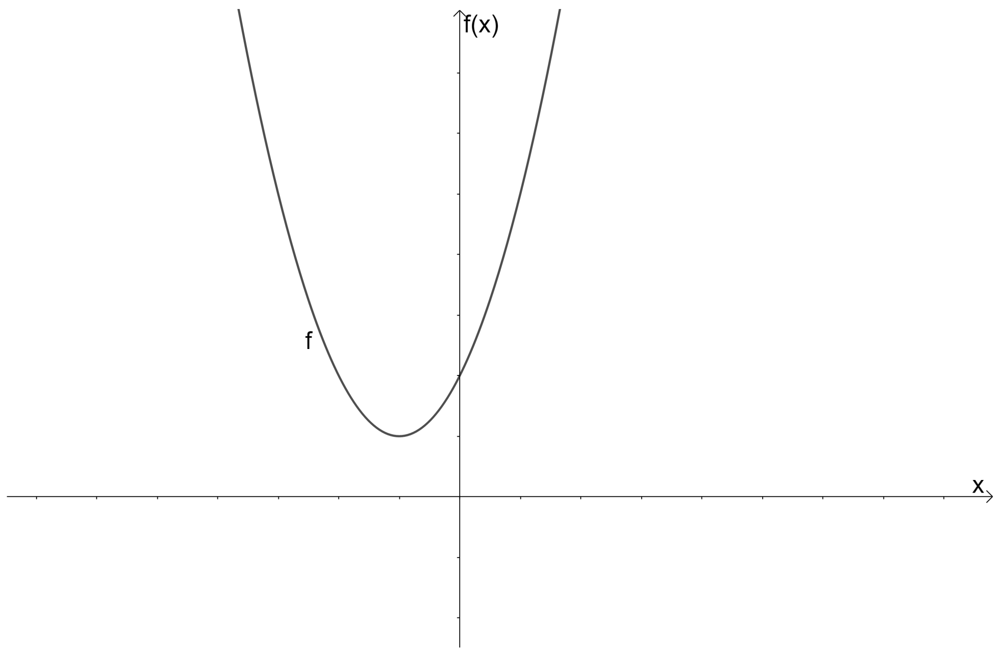

Figura 20: Função f com $\Delta < 0$

3 MODELOS MATEMÁTICOS: AJUSTE DE CURVA

3.1 INTRODUÇÃO

Em muitos problemas práticos são realizados testes laboratoriais ou alguns tipos de experimentos para que os dados reais sejam validados ou encontrar um sistema (modelo) que simule o problema real. Na maioria destes problemas, os dados experimentais são coletados e a partir destes dados os resultados são encontrados.

A evasão escolar, por exemplo, é um problema brasileiro muito grave em todos os níveis de escolaridade, principalmente no ensino médio. Há uma ligação direta entre a evasão, o fracasso escolar, a violência extrema e a entrada de jovens no mundo de crime, ou seja a evasão escolar e a criminalidade andam de mão dadas e o primeiro favorece o segundo. Neste cenário, o poder público se preocupa muito com o crescimento desta evasão e certamente tem bastante interesse em poder fazer uma previsão deste crescimento e que a partir disso poder redefinir as políticas públicas que envolvem diretamente o ensino público brasileiro. Para isso, o poder público pode definir algumas metas como por exemplo toda criança e jovem de 04 a 18 anos estejam na escola. Para tanto, são necessários vários investimentos por parte do poder público. Para que por exemplo esta parte da população esteja na escola, o poder público precisa construir creches e escolas públicas para poder atender essa demanda e aquelas venham no futuro. A construção destes espaços físicos não vem a acontecer da noite pro dia e sim exige um planejamento ao longo do tempo. Para ter uma noção da demanda que o poder público terá daqui a por exemplo uma década, ele precisa fazer possíveis previsões sobre o crescimento da população em geral e a população desta faixa etária em particular. Para realização dessa previsão, o poder público coleta uma série de dados (por exemplo, a população ao longo dos anos anteriores) e, a partir dos dados coletados, realiza a previsão. Certamente, quanto mais dados e fatores forem coletados e considerados melhor será a previsão e em sequência o planejamento será mais eficaz. Isso se chama um planejamento estratégico.

Agora, vamos analisar um outro problema sendo discutido bastante nos últimos meses que é a aposentadoria e a reforma previdenciária. Os beneficios do INSS, são uma esperança almejada por muitos brasileiros, porém até onde podemos colocar como uma esperança válida. Nos anos 70, o teto da aposentadoria era, em média, 20 salários mínimos, porém, esse valor foi decrescendo e os governos vêm adotando medidas de reajuste salarial nos últimos 15 anos que no ponto de vista de redistribuição de renda é fantástico, porém, no ponto de vista de previdência tende a uma diminuição na diferença entre o teto e o piso salarial da previdência, pois enquanto o salário mínimo tem como reajuste a inflação do ano anterior mais o crescimento do PIB de 2 anos anteriores, a previdência tem como reajuste apenas a inflação. Outro fator que contribui para essa diminuição é que a população está vivendo mais, logo mais pessoas estarão recebendo aposentadoria e além disso as pessoas estão tendo menos filhos, logo menos pessoas contribuirão com a previdência. Resumindo, se levarmos em conta o decrescimento de teto salarial que vem sendo obtido com o passar dos anos, essa ideia de segurança na aposentadoria está ficando cada vez mais longe de um ideal e com a crise econômica e a reforma previdenciária vem apenas achatando a diferença entre os tetos salariais. Um problema que surge para um trabalhador é estimular por exemplo o maior número de salários mínimos que receberá pelo Ministério da Previdência Social (INSS) logo no início da sua aposentadoria e tentar recomensar o que faltará para ter uma vida digna com alguns outros investimentos ao longo da sua vida ativa.

Como um terceiro exemplo, considere o problema de mortes no trânsito brasileiro e sua relação com o consumo de álcool. Acidentes de trânsito são muito frequentes no dia–a–dia e o número de mortes causadas por tais acidentes vem crescendo com o passar dos anos. Os dados de pesquisas feitas nos últimos anos apontam não só um aumento nos acidentes de transito mas também um aumento no consumo de bebidas alcoólicas pelos brasileiros o que torna esses dados comparativos, tendo em vista que, uma das maiores causas de acidentes é a combinação entre volante e bebidas alcoólicas. O Brasil encontra-se em uma posição preocupante quando se diz respeito a mortes em acidentes de trânsito, aparecendo em quinto lugar entre os países recordistas, atrás da Índia, China, EUA e Rússia. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), todos os anos aproximadamente 1,3 milhões de pessoas morrem vítimas da imprudência ao volante e nos dados consta também que o trânsito é a nona maior causa de mortes do planeta. Segundo o Ministério da Saúde, no Brasil em 2015, foram registrados 37.306 óbitos e 204 mil pessoas ficaram feridas. Ao longo de todo o ano de 2016, a PRF flagrou, apenas no Paraná, 3.567 motoristas dirigindo sob efeito de bebidas alcoólicas; 22,8 mil manobras irregulares de ultrapassagem; e mais de 235 mil veículos acima da velocidade máxima permitida. Neste contexto, um problema importante a ser abordado é como obter uma projeção dos números de acidentes dos próximos anos e assim relacionar os resultados com os dados sobre mortes causadas por embriaguez ao volante.

Os exemplos anteriores foram apenas alguns dos inúmeros casos em que se faz necessária uma previsão e como uma projeção do futuro pode evitar problemas graves para a sociedade. Essas projeções e outras do tipo são realizadas atráves de uma técnica matemática chamada de **ajuste de curva** ou **regressão**. Na verdade, ajuste de curva ou regressão é um recurso matemático utilizado para se obter uma relação funcional a partir de um conjunto de dados coletados experimentalmente que na maioria dos casos não são exatos. A partir destes dados, portanto podemos verificar uma possível tendência entre os dados ou, simplesmente, trabalhá-los de maneira simplificada. Em outras palavras, temos uma série de dados experimentais e, a partir destes dados, tentamos encontrar uma curva que melhor se ajusta a estes dados. Vale ressaltar que as projeções são apenas previsões, pois podem haver diversos fatores internos e externos que dificultam a análise do problema e torna o resultado encontrado através de ajuste de curva pouco satisfatório.

Como um exemplo numérico, considere um objeto que se move em uma linha reta enquanto uma pessoa registra sua posição nessa linha ao longo de 5 segundos, obtendo os dados da tabela a seguir:

Tabela 1: Movimento em linha reta de um objeto

$x_i \rightarrow$ Tempo (s)	1	2	3	4	5
$y_i \rightarrow$ Posição (m)	0,46	0,95	1,57	2,00	2,42

Para ter uma visão melhor das posições dos pontos e obter o relacionamento entre a variável independente (tempo) e a variável dependente (posição) serão colocados estes 5 pares de pontos no sistema cartesiano e assim obtemos um gráfico chamado de diagrama de dispersão (Figura 22). E, a partir deste diagrama encontramos a curva desejada.

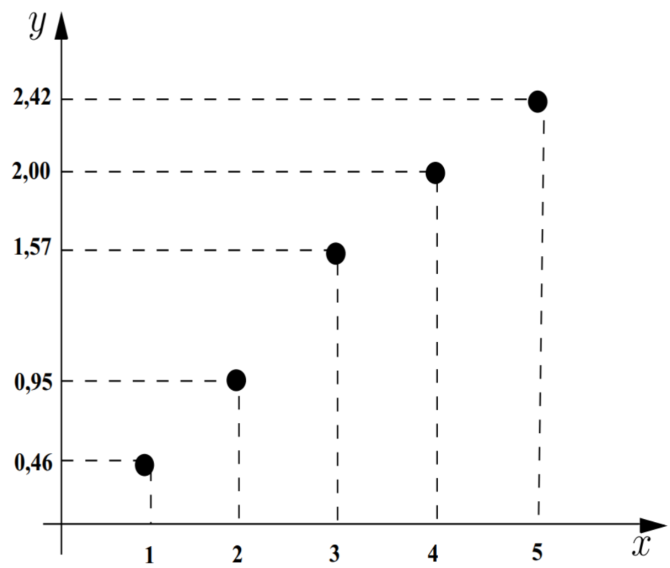

Figura 22: Diagrama de dispersão para o movimento em linha reta

Porém, dado um diagrama de dispersão, em geral não é possível encontrar uma curva que passa exatamente em todos os pontos, ou seja, para dados experimentais não há uma função que represente os dados observados perfeitamente precisa já que dados experimentais possuem erros e as variáveis podem sofrer certas alterações durante a experiência. Nestes casos, podemos ajustar uma curva aos dados para que seja possível verificar a tendência desses dados.

Vele ressaltar que neste tipo de exemplos que o objetivo é verificar a tendência dos dados experimentais não podemos obter por curvas polinomiais que passam por todos os pontos, ou seja um polinômio interpolador, já que o problema envolve erros imprevisíveis e além disso, o polinômio interpolador é utilizado sempre que o objetivo é fazer uma previsão para um dado que se encaixe entre os dados tabelados. A Figura 23 mostra que por exemplo a curva $y = 0,5x$ apesar de não conter todos os pontos da tabela (os pontos que não pertencem à esta linha estão indicados por seta), descreve muito fielmente a tendência do movimento apresentado pelos pontos, de forma que podemos concluir que o movimento observado neste exemplo se aproxima de um movimento retilíneo uniforme (MRU) — um movimento que ocorre com velocidade constante em uma trajetória reta — cuja a função horária é dada por $p = 0,5t$ (nas Figuras 22-23, x e y representam t e p, respectivamente). Neste caso, considerando a curva $p = 0,5t$ tem a vantegem de poder calcular a posição do objeto (variável dependente) para valores de tempo que estão fora do intervalo tabelado, ou seja para os tempos maiores que 5. Por exemplo, podemos dizer que após 7 segundos o objeto estará a uma distância de 3,5 metros do ponto inicial já que $p = (0,5)(7) = 3,5$.

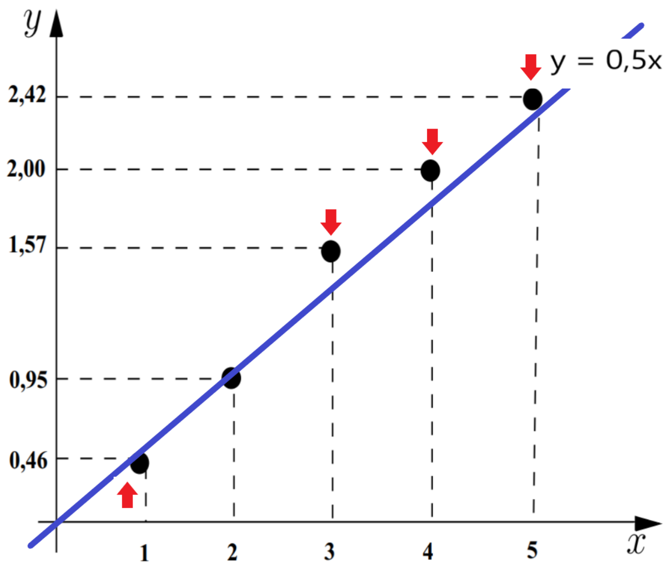

Figura 23: Diagrama de dispersão para o movimento em linha reta

Em movimentos reais, existem muitas variáveis associadas o que dificulta o trabalho de análise dos dados. Porém, é possível, com a técnica de regressão, simplificar o processo de forma a obter uma função (curva) que podemos analisar de forma eficiente. É importante ressaltar que a parte inicial do processo de ajuste de curva para este trabalho é escolher o modelo que iremos utilizar a partir do diagrama de dispersão. Segundo Nussenzveig (2002):

> em termo de modelagem matemática de fenômenos caracterizados por um processo dinâmico, a formulação do modelo pode muitas vezes preceder à análise dos dados exprimentais. Nestes casos, o método de ajuset de curvas é fundamental para a validação dos modelos estabelecidos a priori. A validação de um modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados exprimentais observados não estão muito longe daqueles fornecidos pelo modelo.

Na verdade, a escolha do modelo em um problema de ajuste de curva é extremamente importante do ponto de vista matemático. Um bom modelo precisa projetar bem o comportamento da variável resposta (dependente). Veremos na próxima seção que para determinar se um modelo de ajuste de curva de fato é válido, ou seja, para verificar a qualidade do modelo, é utilizado um coeficiente chamado de coeficiente de determinação, denotado por R^2, que é uma medida da proporção da variação total em torno da média dos dados tabelados.

3.2 AJUSTE DE CURVA

Como foi citado na seção anterior, em muitas aplicações temos um conjunto de n dados (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, onde os valores de y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são encontrados experimentalmente. O problema de ajuste de curva consiste em obter uma curva (expressão analítica) que melhor se ajusta a estes n pontos. Esta curva não precisa conter os pontos, basta que se ajuste a estes pontos. No caso do exemplo anterior (movimento em linha) em que temos 5 dados experimentais, se for utilizar uma das técnicas de interpolação polinomial para encontrar um polinômio de grau no máximo 4 que passa em todos os pontos encontraremos o polinômio $y = 0,0208x^4 - 0,2617x^3 + 1,1142x^2 - 1,3333x + 0,92$ (Figura 24). Porém a Figura 23 mostra que parece a relação verdadeira entre estes 5 dados experimentais é uma relação linear e que esta reta não conter todos os pontos já que os dados contêm erros por serem experimentais. Portanto, nestas situações, procurar por uma função analítica (polinômio interpolador) que é baseada em dados exatos não é matematicamente correto e sim o correto é encontrar uma curva que melhor se ajusta a um conjunto de dados. Mais para frente veremos que a reta que melhor se ajusta a estes 5 pontos é na verdade a reta $y = 0,497x - 0,011$ e não $y = 0,5x$ e que esta última foi encontrada por tentativas e erros.

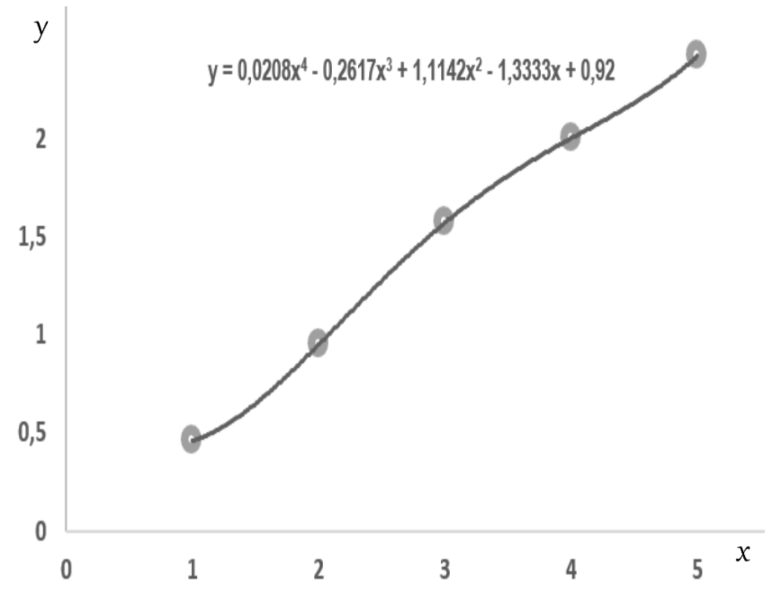

Figura 24: Polinômio interpolador para os dados do exemplo de movimento em linha

3.2.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Como citamos no caso de problema de movimento em linha, a curva (reta) que melhor se ajusta é a reta $y = 0,497x - 0,011$ e não $y = 0,5x$ e a pergunta que surge aqui é como foi encontrada esta reta. Para responder esta pergunta precisamos da seguinte definição.

Definição 3.1 *Sejam $\{(x_i, y_i) \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de n pontos e $P(x)$ uma curva (que pode ser polinomial, exponencial, potência, logartmica entre outras). Se para a curva $P(x)$ o termo*

$$S := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - P(x_i)\Big)^2,$$

assumir o seu menor valor, a curva $P(x)$ é chamada de curva de minímos quadrados.

O **Método dos Mínimos Quadrados** é um método baseado nesta definição. Na verdade, o termo S é a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados e os valores ajustados. Em outras palavras, o termo S apresenta a soma do quadrado dos erros cometidos entre os valores observados e os valores esperados através da curva que acredita-se que melhor se ajusta a estes valores. Isso faz bastante sentido pois se conseguirmos minimizar a soma do quadrado dos erros, a soma das distâncias quadradas entre os pontos e a curva dadas por $d_i := (y_i - P(x_i))^2$ será minimizada, e mesmo que a curva não contenha todos os pontos (que não contém mesmo por serem dados experimentais), será bem próxima deles.

Portanto, a idéia do método dos mínimos quadrados é definir a curva $P(x)$ de tal forma que o desvio $d_i := (y_i - P(x_i))^2$ seja minimizado para todo i e assim será minimizado o termo $S = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Seja então $P(x)$ uma curva no plano cartesiano com os parâmetros (coeficientes) $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ todos números reais porém desconhecidos. Pelo método dos mínimos quadrados para que esta curva $P(x, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i, y_i) \, : \, i = 1, 2, \ldots, n\}$ basta encontrar $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ de tal forma que o termo

$$S(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - P(x_i, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) \Big)^2,$$

que é uma função multivariável em termo de $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ seja o menor possível.

Do Cálculo Diferencial e Integral sabe-se que o gradiente de uma função multivariável é nulo nos pontos mínimos e máximos, ou seja, nos pontos que minimizam ou maximizam esta função. O gradiente de um função multivariável é o vetor composto por todas as primeiras derivadas parciais em termo de todas as variáveis. E, além disso, sabemos que um ponto que zera o vetor gradiente é chamado de ponto crítico. Portanto, podemos concluir que os únicos candidatos a serem pontos mínimo ou máximos de uma função multivariável são os seus pontos críticos. Equivalentemente, se um ponto é ponto mínimo ou máximo de uma função multivariável, então este é um ponto crítico desta função porém nem sempre um ponto crítico é um ponto mínimo ou máximo pois pode ser que seja, por exemplo, um ponto de sela.

Sendo assim, para que a curva $P(x_i, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ seja a curva que melhor se ajusta ao conjunto de n pontos $\{(x_i, y_i) \, : \, i = 1, 2, \ldots, n\}$ basta encontrar os pontos críticos de $S(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, encontrando $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ de tal forma que $\bigtriangledown S(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \bar{0}$, ou seja resolver o seguinte sistema linear em termo de $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_2} = 0, \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_m} = 0, \end{cases}$$

que pode ser resolvido por qualquer método exato ou aproximado apresentado nas disciplinas de Álgebra Linear ou Cálculo Numérico (os alunos de ensino médio em geral aprendem como resolver um sistema linear através dos métodos de escalonamento, eliminação e ou Cramer). Após solucionar este sistema, encontramos os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ da curva $P(x, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ que em seguida temos a curva que melhor se ajusta ao conjunto de pontos.

3.2.2 AJUSTE LINEAR

O caso mais simples e mais compreensível para os alunos de ensino médio é quando através do diagrama de dispersão notamos que a curva de ajuste é uma reta. Neste caso, a curva que melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i, y_i)\ :\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ é a reta $y = \beta_1 + \beta_2 x$. Pela discussão anterior precisamos encontrar os coeficientes β_1 e β_2 de tal forma que o termo $S(\beta_1, \beta_2)$ definido por:

$$S(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (\beta_1 + \beta_2 x_i) \Big)^2,$$

seja minimizado. Neste caso, para encontrar os pontos crítícos, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_2} = 0, \end{cases}$$

que equivalentemente,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} -2 \Big(y_i - (\beta_1 + \beta_2 x_i) \Big) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} -2x_i \Big(y_i - (\beta_1 + \beta_2 x_i) \Big) = 0. \end{cases}$$

Simplificando este último sistema linear em termo de β_1 e β_2 temos as seguintes equações (chamadas de equações normais):

$$\begin{cases} n\beta_1 + \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\beta_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\beta_1 + \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\beta_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

que na forma matricial este último sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} n & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{bmatrix},$$

tendo como soluções para β_1 e β_2 temos então,

$$\beta_1 = \frac{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) - \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\Big)\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2},$$

$$\beta_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Novamente, considere o problema de movimento de um objeto em uma linha reta cujos dados exprimentais são dados por:

$x_i \rightarrow$ Tempo (s)	1	2	3	4	5
$y_i \rightarrow$ Posição (m)	0,46	0,95	1,57	2,00	2,42

De acordo com o diagrama de dispersão (Figura 22), parece que a curva que melhor se ajusta a este conjunto de dados é uma reta dada por $y = \beta_1 + \beta_2 x$. Simplesmente, podemos ver que:

$$n = 5, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 15, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 55, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 7,4, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 27,17,$$

que de acordo com as fórmulas acima temos então,

$$\beta_1 = -0,011, \quad \beta_2 = 0,497,$$

e em seguida a reta que melhor se ajusta a estes 5 pontos é a reta $y = 0,497x - 0,011$ conforme relatado anteriormente (Figura 25). Podemos ver que o quadrado dos erros é dado por $S(\beta_1, \beta_2) = 0,01331$.

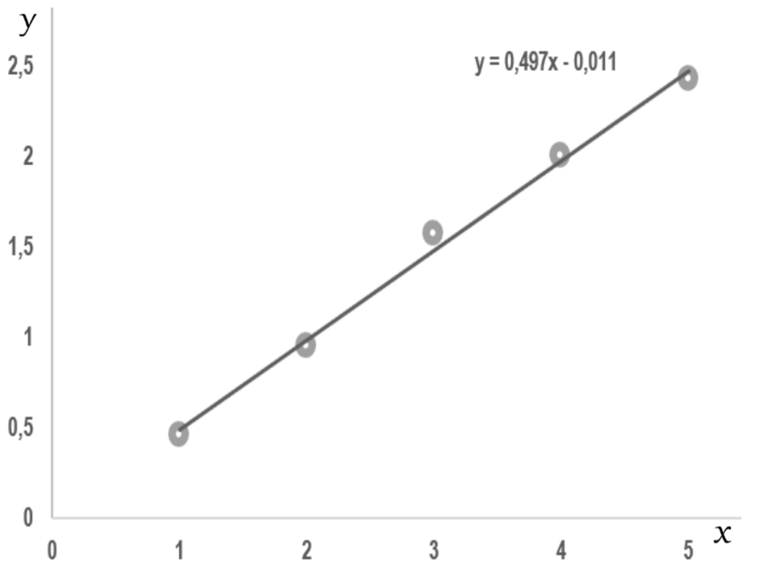

Figura 25: A reta $y = 0,497x - 0,011$ que melhor se ajusta ao movimento em linha reta

3.2.3 AJUSTE POLINOMIAL

O ajuste linear é um caso particular de ajustes polinomiais. Caso o objetivo for encontrar um curva polinomial (não linear) que melhor se ajusta a um conjunto de n pontos $\{(x_i, y_i) \;:\; i = 1, 2, \ldots, n\}$ o procedimento é o mesmo apresentado para ajuste linear. Para que a curva polinomial $P(x, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_m x^m$ de grau m ($m \neq 0$) seja a melhor curva que se ajusta ao nosso conjunto de dados basta determinar os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ desta cruva de tal forma que o termo

$$S(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \sum_{i=1}^{n}, \Big(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_m x_i^m)\Big)^2,$$

seja o menor possível. Do modo análogo podemos ver que se formos encontrar os pontos críticos desta função multivariável $S(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ temos o seguinte sistema linear em termo dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ desta cruva:

$$\begin{bmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m \end{bmatrix},$$

que a partir das soluções deste sistema linear encontramos a curva polinomial de grau m que melhor se ajusta ao conjunto de n pontos.

Exemplo 3.2 *Considere os seguintes dados experimentais e encontre uma parábola que melhor se ajusta a estes dados.*

x_i	-2,00	-1.50	0,00	1,00	2,20	3,10
y_i	-30,50	-20,20	-3,30	8,60	16,80	21,40

Como uma parábola é uma curva polinomial de grau 2, consideramos a curva dada por $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Em seguida, podemos ver que:

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 2,80, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 21,70, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 30,06, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 137,84,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = -6,90, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i x_i = 203,50, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i x_i^2 = 128,42.$$

que os substituindo no sistema linear temos então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2,80 & 21,70 \\ 2,80 & 21,70 & 30,06 \\ 21,70 & 30,06 & 137,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,90 \\ 203,50 \\ 128,42 \end{bmatrix},$$

e daí, $\beta_0 = -2,018$, $\beta_1 = 11,33$ e $\beta_2 = -1,222$. Assim, a parábola que melhor se ajusta ao conjunto destes 6 dados é dada por $y = -1,222x^2 + 11,33x - 2,018$ (a Figura 26 apresenta o diagrama de dispersão e a parábola que melhor se ajusta ao conjunto de dados).

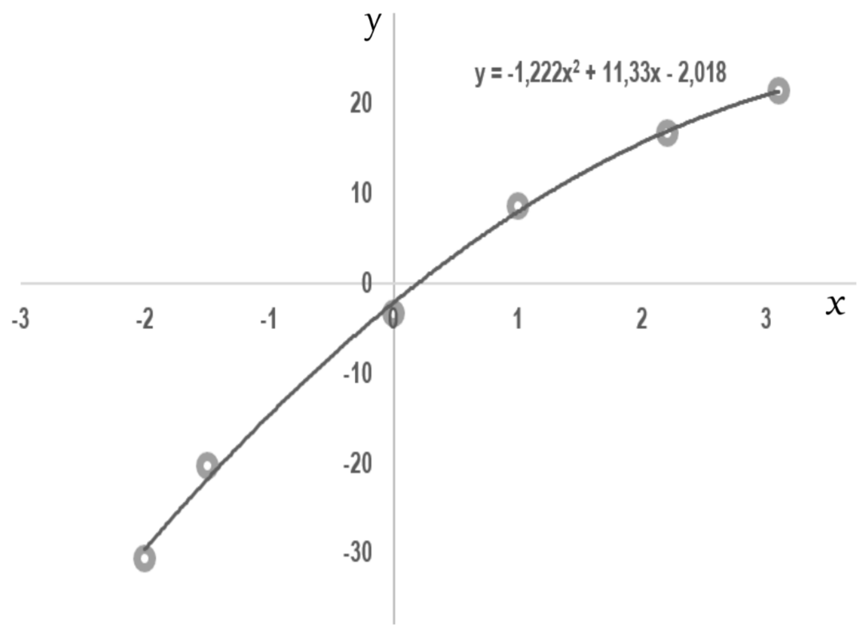

Figura 26: A parábola $y = -1,222x^2 + 11,33x - 2,018$ **que melhor se ajusta aos dados**

3.3 OUTORS AJUSTES: LINEARIZAÇÃO

Como foi mencionado frequentemente, o objetivo do problema de ajuste de curva é encontrar uma curva que melhor se ajusta a um conjunto de dados. Essas curvas nem sempre são polinomiais. Muitas vezes, a curva de ajuste é uma curva exponencial, trigonométrica, pôtencia, logarítmica entre outras. Todos esses casos podem ser tratados da mesma maneira que foram tratadas as curvas polinomiais. Porém, caso esses problemas forem apresentados para alunos de ensino médio, a abordagem menos complexa é a técnica de linearização. Nesta técnica, a curva é inicialmente linearizada e em seguida é utilizado o ajuste de curva linear. Para não prolongar essa discussão, mostramos na prática como se dá a linearização por meio de um exemplo.

Exemplo 3.3 *Considere os seguintes dados experimentais:*

x_i	-1,00	0,00	2,00	3,00
y_i	10,00	50,00	910,00	1200,00

A Figura 27 representa o diagrama de dispersão destes dados. Notamos que, aparentemente, a curva que melhor se ajusta a estes dados é uma curva exponencial da forma $y = \beta_1 e^{\beta_2 x}$. Logo, precisamos encontrar os parâmetros β_1 e β_2 para definir esta curva. Neste caso, aplicando $\ln(.)$ nos dois lados temos então,

$$y = \beta_1 e^{\beta_2 x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(\beta_1) + \beta_2 x,$$

ou seja, temos a curva linear $\tilde{y} = \tilde{\beta_1} + \beta_2 x$ onde $\tilde{y} = \ln(y)$ e $\tilde{\beta_1} = \ln(\beta_1)$.

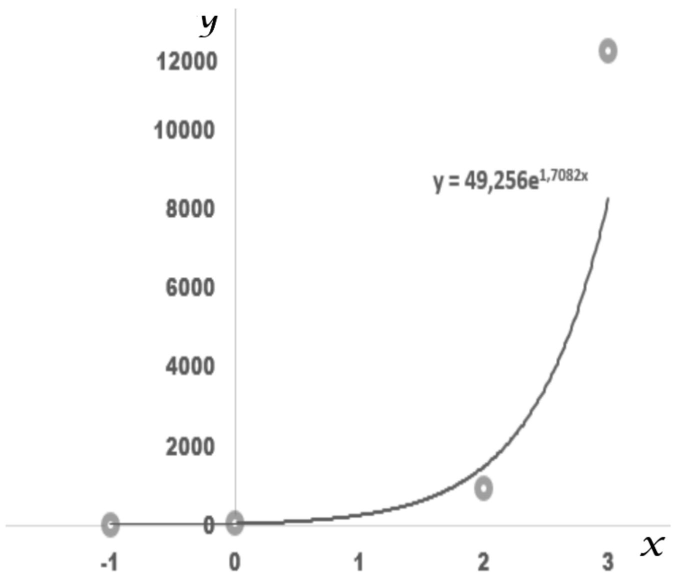

Figura 27: A curva exponencial $y = 49,2544e^{1,7082x}$ que melhor se ajusta aos dados

A partir da tabela anterior geramos a seguinte tabela:

x_i	-1,00	0,00	2,00	3,00
$\tilde{y}_i$	2,3025	3,9120	6,8134	9,3927

Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i x_i \end{bmatrix},$$

com

$$n=4,\quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 4,\quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14,\quad \sum_{i=1}^{4} \tilde{y}_i = 22{,}4207,\quad \sum_{i=1}^{4} \tilde{y}_i x_i = 39{,}5022,$$

temos portanto $\tilde{\beta}_1 = 3{,}8970$ e $\beta_2 = 1{,}7082$. Logo, $\beta_1 = e^{\tilde{\beta}_1} = e^{3{,}8970} = 49{,}2544$. Sendo assim, a curva exponencial que melhor se ajusa à tabela inicial deste exemplo é dada por $y = 49{,}2544e^{1{,}7082x}$. A Figura 27 mostra como realmente esta curva se ajusta bem a este conjunto de dados.

3.3.1 QUALIDADE DE AJUSTES: COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO

Dado um conjunto de dados experimentais. Como citamos anteriormente, a escolha da curva (modelo) em um problema de ajuste de curva entre diversas curvas que temos, como, por exemplo polinomial, exponencial, potência, trigonométrica, hiperbólica e entre outras é extremamente importante do ponto de vista matemático. Um bom modelo precisa simular bem o comportamento da variável resposta (dependente). Para determinar se um modelo de ajuste de curva de fato é válido, ou seja, para verificar a qualidade do modelo é utilizado um coeficiente chamado de coeficiente de determinação, denotado por R^2, que é uma medida da proporção da variação total em torno da média dos dados tabelados.

Entender como é encontrado esse coeficiente demanda um conhecimento aprofundado de matemática e isso tornará esta discussão bastante complexa para alunos de ensino médio, principalmente para os alunos da 1ª série. Por essas razões e para evitar uma possível desmotivação, a discussão é omitida aqui porém na próxima seção mostramos como encontrar R^2 através de um *software*. Apenas ressaltamos que R^2 é um valor real entre zero e um e quanto mais próximo da unidade estiver, melhor será o ajuste.

Considere mais uma vez o Exemplo 3.3 onde encontramos uma curva exponencial $y = 49{,}2544e^{1{,}7082x}$ acreditando ser esta a curva que melhor se ajusta ao nosso conjunto de dados. Agora, neste mesmo exemplo suponha que alguém acredita que a curva que melhor se ajusta ao conjunto de dados é a parábola $y = 1841{,}7x^2 - 1199{,}3x - 2004$. A pergunta que surge é: qual destas duas curvas tem mais qualidade ou é mais válida? Podemos ver que no caso da curva exponencial o coeficiente R^2 é $0{,}9864$, enquanto para outra curva o coeficiente é $0{,}8974$. Portanto, podemos concluir que a curva mais válida é a exponencial $y = 49{,}2544e^{1{,}7082x}$ e não $y = 1841{,}7x^2 - 1199{,}3x - 2004$. Comparando os diagramas das Figuras 27 e 28 notamos que, de fato, $y = 49{,}2544e^{1{,}7082x}$ é a mais válida.

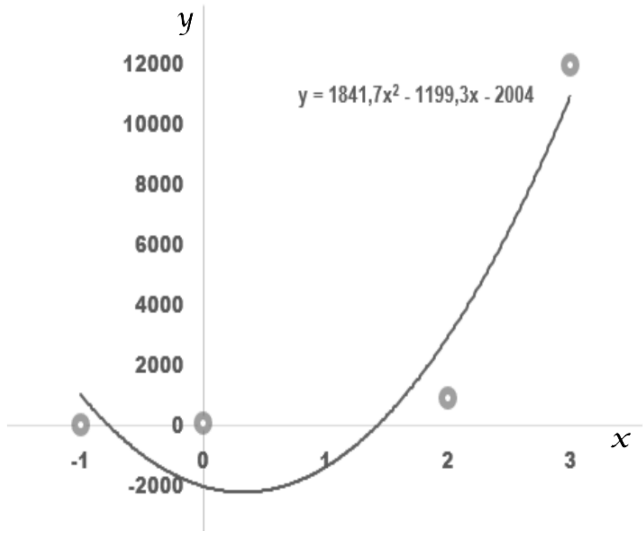

Figura 28: A curva $y = 1841,7x^2 - 1199,3x - 2004$ **para os dados do Exemploexpo**

3.4 MANUAL DE AJUSTE DE CURVA NO EXCEL: ENSINO MÉDIO

Até este momento discutimos a matemática que está atrás do problema de ajuste de curva. Boa parte desta discussão é compreensível para um aluno de ensino médio. Porém, nesta seção mostramos como podemos encontrar a curva de ajuste aproveitando os recursos computacionais disponíveis. O uso dos recursos computacionais nas atividades que envolvem a matemática fornece ao professor e aos alunos uma metodologia diferente para o ensino da disciplina a tornando mais atrativa.

A seguir, apresentamos um manual de ajuste de curva para o *software* O MICROSOFT OFFICE EXCEL. O *software* EXCEL, simplesmente é um editor de planilha que tem inúmeros recursos. Nesta seção estamos apenas interessados no recurso de ajuste de curva. **Passo 1:** Precisamos abrir o EXCEL, simplesmente clicando no ícone correspondente duas vezes abrimos o *software* e já está pronto para o nosso uso. Neste momento temos apenas uma planilha sem dados (Figura 29).

Passo 2: Vamos supor que queremos encontrar uma curva que melhor se ajusta aos dados do Exemplo 3.3. Basta escolher duas colunas quaisquer, melhor consecutivas, e na primeira inserir os valores que temos para x e na segunda os valores de y (Figura 30).

Passo 3: Neste momento, marcamos todos os elementos destas duas colunas. Para isso, clique na janela de x_1, a janela que contém -1, e enquanto está segurando o botão esquerdo do mouse marque todas as janelas que têm valores (Figura 31).

Passo 4: Agora, clique na aba superior, na palavra "inserir"e na parte de "gráficos"apertar no ícone ”dispersão”(Figura 32).

Passo 5: Clicando no ícone de ”dispersão”aparece o diagrama de dispersão referente a este conjunto de dados (Figura 33).

Passo 6: Neste passo, clicamos em um dos pontos neste diagrama de dispersão, logo apertamos o botão direito do mouse. Assim, aparece o comando ”adicionar linha de tendência”(Figura 34).

Passo 7: Clicando neste comando, no extremo direito da tela aparece a lista de todas as curvas disponíveis no EXCEL para o ajuste de curva. Clique em uma das opções disponíveis. Porém, antes disso, marque as opções ”exibir equação no gráfico”e ”exibir valor R-quadrado no gráfico” (Figura 35).

Passo 8: Com este procedimento, teremos o diagrama de dispersão, a curva escolhida, a equação desta curva e além disso o valor do coeficiente R^2 (Figura 36).

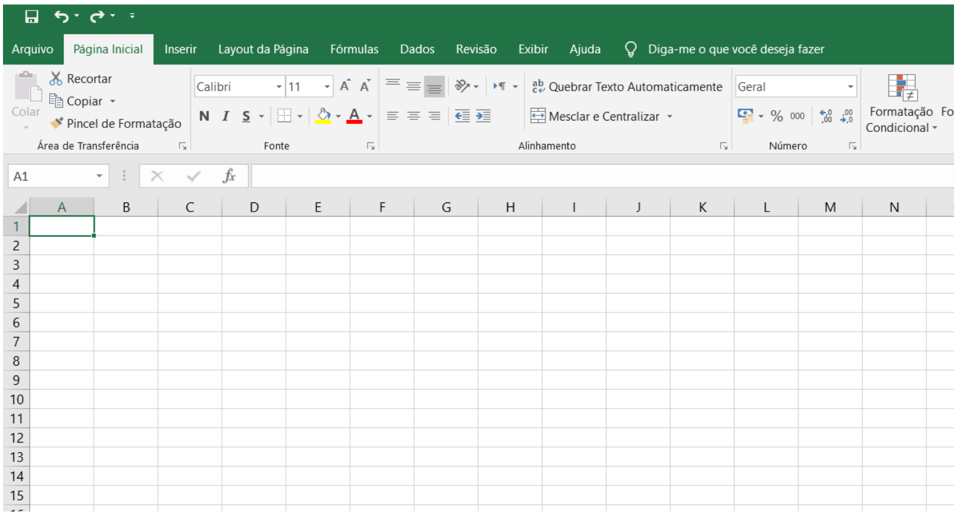

Figura 29: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 1

Para verificar qual curva é melhor, basta fazer trocas entre as curvas disponíveis e notar os valores de R^2. Conforme comentamos anteriormente, a curva com o maior R^2 é a curva mais válida. Podemos ver que para o Exemplo 3.3, a curva que encontramos é $y = 49,2544e^{1,7082x}$ com $R^2 = 0,9864$ o que foi relatado anteriormente. Esta curva tem o maior valor de R^2 entre todas as curvas disponíveis o que confirma a nossa conclusão.

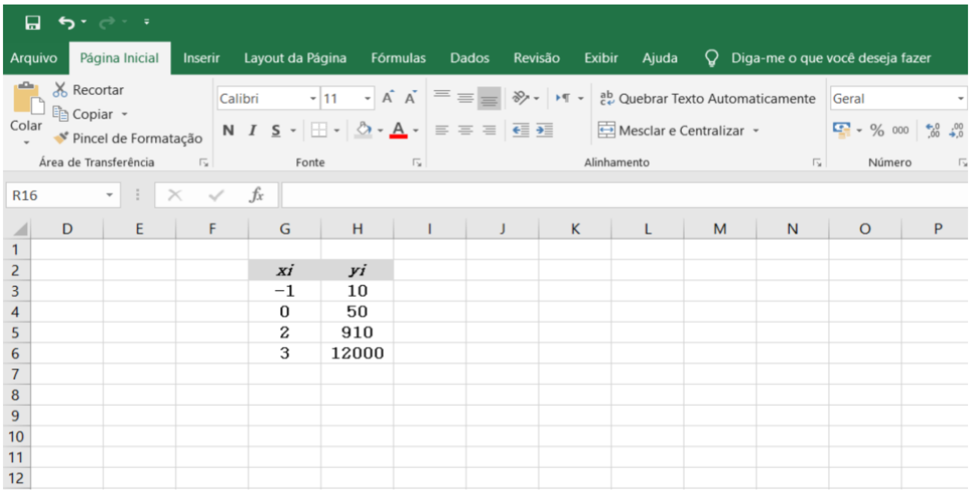

Figura 30: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 2

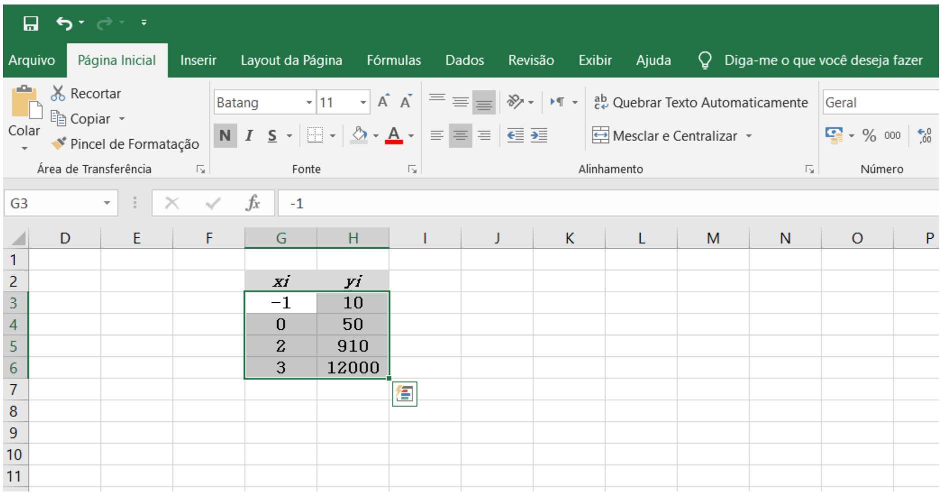

Figura 31: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 3

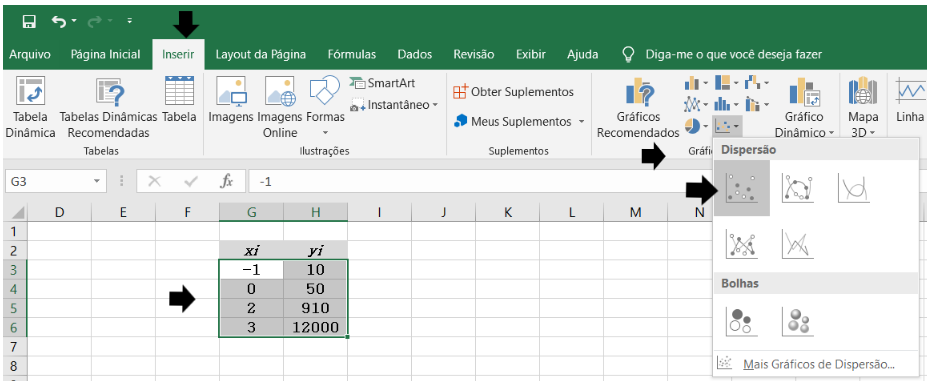

Figura 32: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 4

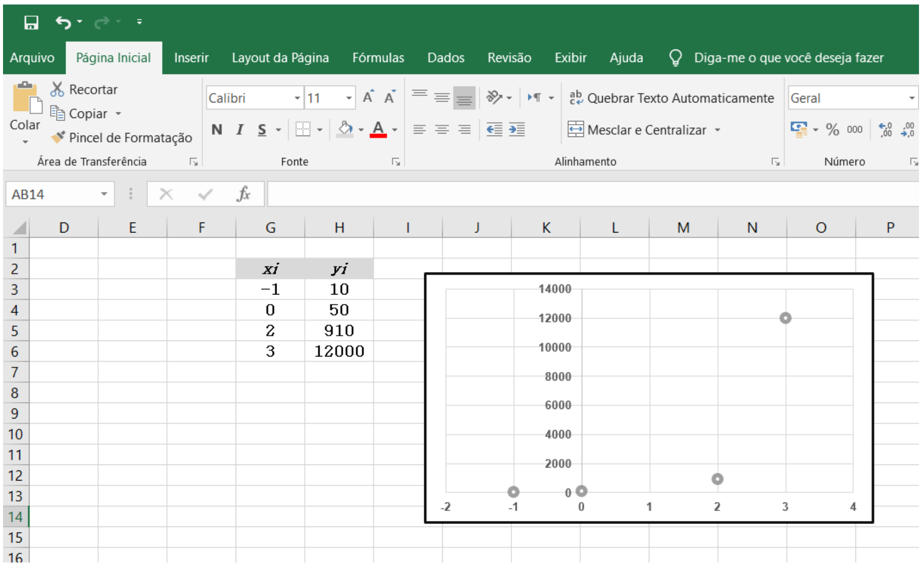

Figura 33: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 5

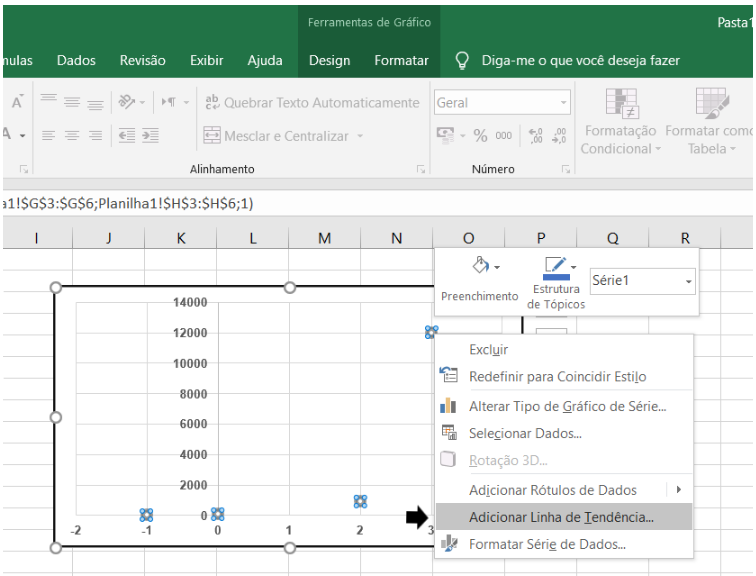

Figura 34: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 6

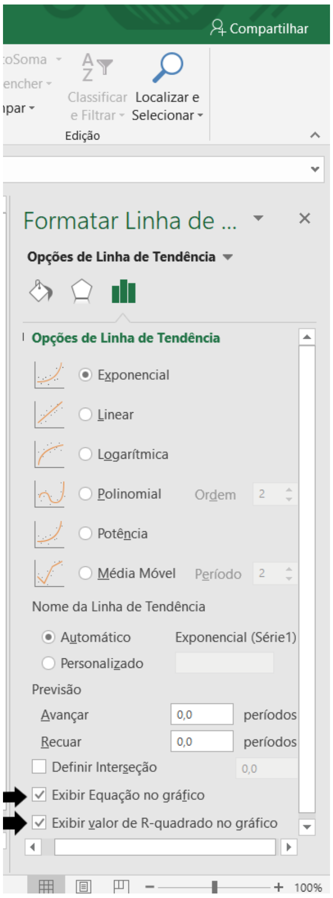

Figura 35: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 7

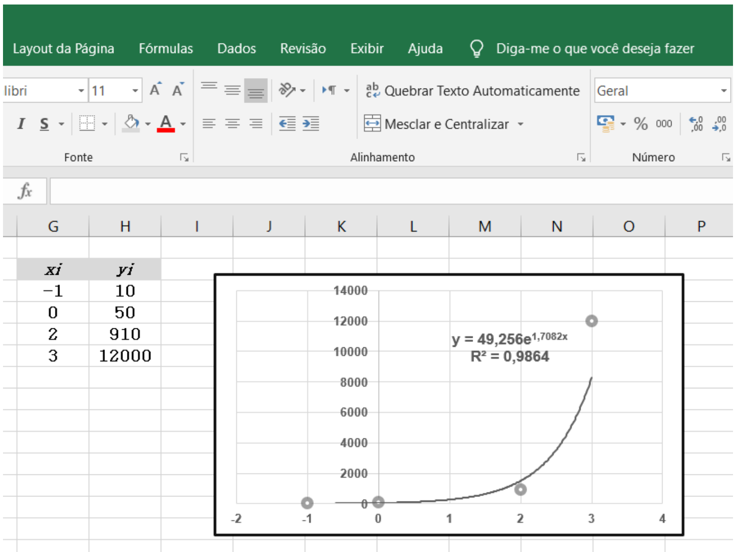

Figura 36: Manual de EXCEL para ajuste de curva — Passo 8

4 MOVIMENTOS RETILÍNEOS

Analisaremos nesse capítulo os movimentos de maneira simplificada, atendo-nos aos movimentos unidimensionais como forma de introduzir os conceitos mais básicos da cinemática. Segundo (NUSSENZVEIG, 2015) "a análise do movimento é um problema fundamental em física, e a forma mais simples de abordá-la é considerar primeiro os conceitos que intervêm na descrição do movimento (cinemática)". Assim, estudaremos os movimentos retilíneos de uma partícula, ou seja, movimentos que se dão ao longo de uma linha reta sem nos preocuparmos com o formato dos objetos ou as forças que atuam sobre eles. Também estudaremos como estes movimentos podem ser obtidos de forma experimental. Comecemos por apresentar três conceitos importantes: deslocamento, velocidade e aceleração.

Consideremos como referencial uma reta orientada de origem 0 de forma que a posição S, em metros, de uma partícula em movimento em um dado instante t, em segundos, é descrita pelo ponto em que a partícula se encontra nessa reta nesse instante, ou seja, a posição S é dada em função de t.

O **deslocamento** ΔS de uma partícula sobre essa reta é a mudança da posição S_1 para a posição S_2 dada por $\Delta S = S_2 - S_1$. Quando $\Delta S > 0$ o deslocamento ocorre no sentido positivo da reta e quando $\Delta S < 0$ o deslocamento ocorre no sentido negativo.

A **velocidade média** V_m, por sua vez, é a razão entre o deslocamento ΔS e o tempo decorrido desde que a partícula parte de S_1 até chegar a S_2 $\Delta t = t_2 - t_1$. Assim, temos que $V_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, onde $S_1 = S(t_1)$ e $S_2 = S(t_2)$. A velocidade média não é o valor da velocidade em cada momento, chamada de **velocidade instantânea** (ou simplesmente **velocidade**), do deslocamento de S_1 até S_2. Nesse deslocamento a velocidade instantânea da partícula pode variar assumindo valores maiores, menores ou igual à velocidade média.

Exemplo 4.1 *Imaginemos um carro em uma pista retilínea que percorre uma distância de* 500 *metros em* 20 *segundos. Dizemos que seu deslocamento foi* $\Delta S = 500m$ *e o tempo decorrido foi* $\Delta t = 20s$*, assim a velocidade média é* $V_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{500m}{20s} = 25m/s$.

Todos temos uma noção intuitiva do conceito de **aceleração** como a rapidez com que a velocidade de um móvel varia com relação ao tempo (NUSSENZVEIG, 2015). A **aceleração média** a_m é a razão entre a variação da velocidade ΔV e o tempo decorrido Δt, ou seja, $a_m = \dfrac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$, onde $V_1 = V(t_1)$ e $V_2 = V(t_2)$. Assim como a velocidade média, a aceleração média não é necessariamente igual à **aceleração instantânea** (ou simplesmente **aceleração**) em cada momento do deslocamento.

Exemplo 4.2 *Imaginemos mais uma vez um carro em uma pista retilínea. Este carro percorre uma distância qualquer em* 20 *segundos, sendo que estava inicialmente parado (*$V_1 = 0$*) e, passados* 20 *segundos, sua velocidade era* $V_2 = 40m/s$. *Dizemos que sua aceleração média é* $a_m = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{40m/s}{20s} = 2m/s^2$.

A velocidade instantânea é a medida da velocidade média em um intervalo de tempo que tende a zero. "Quando Δt diminui, a velocidade média se aproxima cada vez mais de um valor limite, que é a velocidade instantânea"(HALLIDAY, 2016), ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \\ &= \frac{dS}{dt}. \end{aligned}$$

A notação utilizada acima representa a chamada derivada de uma função, que foi desenvolvida por Leibiniz e por Isaac Newton, independentemente. Da mesma forma a aceleração instantânea é a medida da aceleração média em um intervalo de tempo que tende a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}, \\ &= \frac{dV}{dt}, \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right), \\ &= \frac{d^2S}{dt^2}. \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que a velocidade V é a derivada da posição S em relação ao tempo t e a aceleração é a sua derivada segunda. O conceito de derivada é muito útil para se estudar o movimento de um grande tipo de sistemas, mas como foge do escopo matemático de estudantes de ensino médio, não será considerado no restante do trabalho.

Vale ressaltar que as grandezas discutidas até o momento são grandezas vetoriais que estão sendo tratadas de forma unidimensional e, portanto, consideraremos os *sinais* positivo ou negativo como indicadores do sentido.

4.1 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME (MRU)

Este movimento é o mais simples, caracterizando-se por iguais distâncias percorridas para iguais intervalos de tempo (NUSSENZVEIG, 2015). A velocidade é, portanto, constante durante todo o movimento o que significa que é um movimento não-acelerado.

Como a velocidade é constante, é correto afirmar que a velocidade para cada instante é igual à velocidade média, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\Delta S}{\Delta t}, \\ V &= \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}, \\ V(t_2-t_1) &= S(t_2)-S(t_1), \\ S(t_1)+V(t_2-t_1) &= S(t_2). \end{aligned}$$

Se considerarmos t_2 um instante t qualquer, $t_1 = 0$ o instante inicial e $S(t_1)$ a posição inicial S_0 do movimento, então temos a função horária do MRU

$$S(t) = S_0 + Vt.$$

Exemplo 4.3 *Imaginemos uma partícula movendo-se em linha reta com velocidade constante de* $2m/s$*, sendo que iniciamos a observação desse movimento quando a partícula estava na posição* $S_0 = 3m$*. A função que descreve o movimento observado é* $S = 3+2t$ *cujo gráfico está representado na Figura 38.*

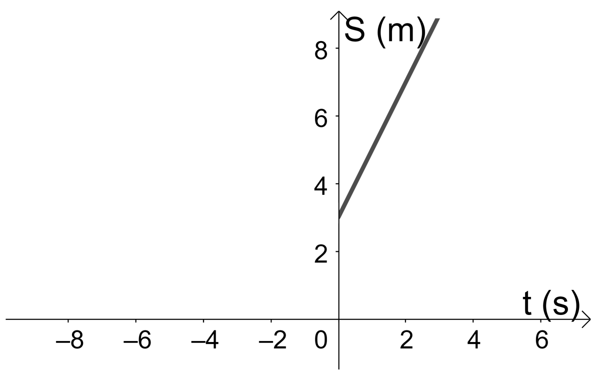

Figura 38: Gráfico da partícula em MRU

É possível observar que a função horária do MRU é do tipo $f(x) = ax+b$ e, assim, usaremos a função afim como modelo matemático para o MRU.

4.2 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

Quando um móvel desloca-se em linha reta com aceleração constante, o movimento observado é um MRUV. Como a aceleração é constante durante todo o movimento, podemos dizer que a aceleração instantânea é igual à aceleração média, ou seja,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta V}{\Delta t}, \\ a &= \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}, \\ a(t_2 - t_1) &= V(t_2) - V(t_1), \\ V(t_1) + a(t_2 - t_1) &= V(t_2). \end{aligned}$$

Consideraremos novamente t_2 um instante t qualquer, $t_1 = 0$ o instante inicial e, agora, $V(t_1)$ a velocidade inicial V_0 do movimento, temos

$$V(t) = V_0 + at.$$

Dados $V_m = \dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ com S_2 sendo uma posição S qualquer e S_1 sendo a posição inicial S_0, e as considerações já feitas anteriormente, podemos concluir que $S = S_0 + V_m t$. Por outro lado, $V_m = \dfrac{1}{2}(V_0 + V)$ para um intervalo de tempo de $t = 0$ até um instante qualquer t. Assim, temos:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{2}(V_0 + V), \\ &= \frac{1}{2}(V_0 + V_0 + at), \\ &= V_0 + \frac{1}{2}at. \end{aligned} \tag{31}$$

Concluímos, então, que

$$\begin{aligned} S &= S_0 + V_m t \\ &= S_0 + (V_0 + \frac{1}{2}at)t, \\ &= S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Esta é a função horária da posição do MRUV que descreve a variação da posição de um móvel em relação ao tempo decorrido do movimento. Segundo Lima (2013) ”A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado”.

Exemplo 4.4 *Imaginemos uma partícula que ao ser observada está em movimento inicialmente com velocidade de* $-10m/s$ *na posição* $S_0 = 1m$ *em uma linha reta. A partícula move-se com aceleração constante de* $5m/s^2$*. Pode ser observado que a partícula começa com velocidade negativa, é freiada, e acelera no sentido positivo. A função que descreve o movimento é* $S(t) = 1 - 10t + 5t^2$*, cujo gráfico pode ser observado na Figura 39.*

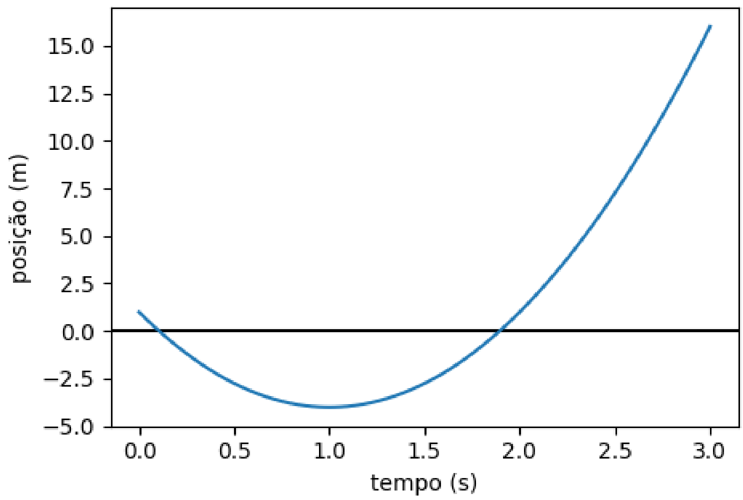

Figura 39: Gráfico da partícula em MRUV

Ainda dentro do MURV, é possível excluir a dependência temporal, ao se isolar o tempo em (31) e substitua em (35), resultando na equação de Torricelli:

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S. \tag{35}$$

4.3 MRU EXPERIMENTAL

Na natureza, encontrar um movimento retílineo uniforme, ou seja, com velocidade constante, não é trivial, e por isso aproximações precisam ser consideradas. O MRU ocorre na ausência de forças, quando a soma de todas as forças envolvidas no sistema é nula:

$$\vec{F}_{total} = \sum_i F_i = 0, \tag{36}$$

que isto inclui todas as forças, sejam elas a gravitacional ou de atrito. As forças de atrito estão presentes em praticamente todos os movimentos, e para retirá-lo são necessários ambientes especiais, como tubos com vácuo, ou utilizar trilhos de ar, que são equipamentos caros e complicados de operar no âmbito de uma escola pública, por exemplo. Uma solução para realizar um experimento de MRU de baixo custo é utilizar as forças envolvidas de forma que fiquem com somatória de forças nula. Para isso, um candidato é a força de atrito do ar, que pode ser a seguinte equação (HALLIDAY, 2016):

$$F_{ar} = -\frac{\rho CAV^2}{2}, \tag{37}$$

onde ρ é a densidade do ar ($1,21 g/m^3$ ao nível do mar), C é um parâmetro que depende do formato do objeto (se é quadrado, circular, triangular) e A é a área de contato com o ar. No caso de um objeto em queda livre, estará sujeito às forças:

$$F_{ar} = mg - \frac{\rho CAV^2}{2}, \tag{38}$$

ou seja, conforme o objeto cai, ele tem sua velocidade aumentada, devido à força da gravidade. Porém, conforme a velocidade aumenta, também aumenta, quadraticamente, a força de atrito do ar, até uma situação que a força de atrito se equivale à força gravitacional. A partir desse ponto, qualquer possível aumento na velocidade é impedido pelo aumento na força de atrito, e na prática atinge-se uma velocidade constante, ou seja, um MRU, que pode ser encontrado pela expressão:

$$\begin{aligned} F_{ar} &= mg - \frac{\rho CAV^2}{2} = 0, \\ V_{term} &= \sqrt{\frac{2mg}{\rho CA}}. \end{aligned} \tag{40}$$

obtendo a chamada *velocidade terminal*, a qual é constante. Esta velocidade que é ocorre na queda de para-quedas e gotas de chuvas, por exemplo, ambos sistemas tendo uma velocidade terminal.

4.4 MRUV EXPERIMENTAL

Para se estudar o MRUV na natureza, podemos partir de (38), e buscar um sistema que a força de atrito é muito menor do que a força gravitacional, sendo possível com um objeto de massa grande, e formato mais aerodinâmico, que seja estudado numa queda de baixa altura, por exemplo, uma bola de gude ou bola pesada caindo. Isto nos deixaria somente com a força gravitacional, o que nos traz outras dificuldades. Numa queda de aproximadamente 2 metros de altura, utilizando (35), temos que a bola atinge o chão em aproximadamente $0,63$ segundos, o que é muito rápido para medir com cronômetros, ou mesmo filmando, pois o objeto aparece como um borrão na câmera.

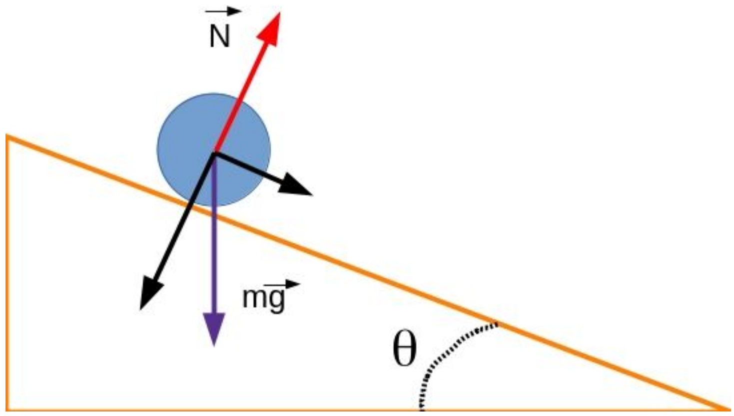

Figura 40: Gráfico da partícula em MRUV

Uma alternativa é utilizar o chamado plano inclinado, para diminuir a aceleração gravitacional, mas ainda mantendo o MRUV. Como pode ser visto na Figura 40, pela decomposição de forças, ao inclinar um plano, temos uma componente normal:

$$F_N = mgcos\theta. \tag{41}$$

E uma componente tangencial, dada por:

$$F_N = mgsen\theta. \tag{42}$$

A componente normal é balanceada pela força normal ($\vec{N}$), que vem da reação do plano ao objeto, e, portanto, a única força que atua no movimento do material é a força tangencial, causando uma aceleração dada por:

$$\begin{aligned} ma &= mgsen\theta, \\ a &= gsen\theta. \end{aligned} \tag{44}$$

Esta fórmula foi utilizada pelo cientista italiano Galileu Galilei, exatamente para estudar o MRUV (NUSSENZVEIG, 2015). Alterando o ângulo θ é possível alterar a aceleração, e com isso o tempo de queda fica menor, sem deixar de ser um MRUV. No próximo capítulo iremos mostrar como o estudo do MRU e do MRUV foi realizado experimentalmente utilizando equipamento de baixo custo para que os alunos observem a relação entre prática e teoria.

5 INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA

5.1 INTRODUÇÃO

O conhecimento da natureza e a descrição de seus fenômenos é historicamente um solo fértil onde a matemática se desenvolve e se formula na necessidade de resolver um problema, explicar um fenômeno, quantificar e analisar dados. Dessa forma, quando o estudo da matemática se resume à sua aplicabilidade em situações cotidianas perde-se seu aspecto mais abstrato que não possui aplicação direta a não ser na própria matemática. Em contrapartida, ao se estudar matemática deixando de lado suas aplicações na ciência e no cotidiano perde-se o elemento palpável e visível da matemática e isso faz com que em ambos os casos o estudo seja incompleto.

Diante deste cenário, uma abordagem que faça justiça à matemática deve integrar a abstração e a aplicação em um mesmo grau de relevância para que nada se perca no processo do estudo. Uma destas abordagens é o uso de experimentos para estimular os alunos, em particular os de ensino médio, quando o assunto é a aprendizagem de conceitos matemáticos. Um destes conceitos fundamentais e ao mesmo tempo complexo é o conceito de função que foi apresentada teoricamente no Capítulo 2. Este conceito, por usa vez, desempenha um papel muito fundamental na descrição e estudo de certos fenômenos da natureza que podem ser observados no nosso dia–a–dia e, além disso, atinge aplicações que não são, de forma alguma, triviais, como quando tentamos descrever o ponto em uma trajetória retilínea em que um certo corpo acelerado se encontrará decorrido um tempo definido de observação desse movimento.

O estudo de funções apresenta dificuldades devido à sua complexidade e, como foi dito anteriormente, ”uma dificuldade, comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distancia da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano (BRITO; ALMEIDA, 2005)”. Por estas razões, entre outras, há necessidade de uma abordagem interdisciplinar que busque uma interação entre uma, duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento, no estudo de conceitos matemáticos para que se tenha pleno entendimento deste conceitos que são ao mesmo tempo práticos e teóricos.

Na maioria das vezes, quando o objetivo é a interdisciplinaridade entre os conceitos matemática e as demais áreas do conhecimento humano, o papel de experimentos em salas de aula para estimular a aprendizagem destes conceitos é algo indispensável. E, consequentemente, uma sala de aula estimulada pode causar um impacto bastante positivo na aprendizagem dos conceitos matemáticos já que uma grande parte dos nossos alunos, em particular de ensino médio, tem grandes dificuldade na compreensão dos conceitos matemáticos.

O objetivo deste capítulo é portanto propor uma sequência didática interdisciplinar de funções e cinemática de modo a proporcionar aos professores de matemática e física que atuem na 1ª série do ensino médio um material que lhes sirva de auxílio para o desenvolvimento de uma boa situação de aprendizagem em ambas as disciplinas de tal forma que o estudante construa tais conceitos de maneira não fragmentada e, assim, os compreenda de modo mais eficaz.

5.2 EXPERIMENTOS DE MRU E MRUV

No capítulo anterior, os movimentos unidimensionais, em particular os movimentos retilíneos de uma partícula, foram estudados. Vimos que os movimentos retilíneos são aqueles que se dão ao longo de uma linha reta sem nos preocuparmos com o formato dos objetos ou as forças que atuam sobre eles. Logo, os conceitos básicos de um movimento foram apresentados e além disso os Movimentos Retilíneo Uniforme (MRU) e Retilíneo Uniformemente Variado(MRUV) foram ambos analisados. Vimos que em um MRU um objeto começa com uma velocidade e continua com a mesmo ao longo de uma linha e além disso não haverá alteração na aceleração do objeto. Por outro lado, em um MRUV a aceleração sempre é constante ao longo de uma linha, porém a velocidade do objeto pode sofrer variações iguais em intervalos iguais de tempo. Além disso, vimos também que por exemplo a função horária de um movimento MRU é uma função afim, ou seja, a função que representa aposição do objeto ao longo da linha é afim. Já no caso de um movimento MRUV, foi observado que a velocidade do objeto ao longo do caminho pode ser representada através de uma função afim enquanto a sua função horária da posição é quadrática.

Nesta seção, e através de experimentos físicos estudamos o conceito de funções afins e quadráticas e demonstramos que as funções afns e quadráticas descrevem matematicamente os movimentos retilíneos uniforme (MRU) e uniformemente variado (MRUV), respectivamente. Assim, propomos uma ferramenta didática para aplicação nas aulas que tenham foco na interdisciplinaridade entre matemática e física, principalmente quanto o assunto da investigação é o conceito de funções afins e quadráticas. Esta ferramenta em particular tem a intenção de que não haja uma fragmentação do conhecimento matemático de funções de modo que o conhecimento não seja deficiente e que o conceito de funções seja tratado de forma completa enriquecendo o estudo de ambas as áreas do conhecimento, matemática e física. Infelizmente, para os professores de física, a história não é nada diferente e as dificuldades que os alunos vêm enfrentando quando o assunto é a aprendizagem de física muitas vezes são mais graves que as de matemática e certamente a interdisciplinaridade realizada atráves de exprimentos físicos–matemáticos será capaz de auxiliar os alunos na compreensão destes contúdos e resolução de problemas que abordam de forma ampla os conceitos matemáticos e físicos.

Os experimentos interdisciplinares de funções e cinemática deste trabalho foram realizados com a participação dos alunos da 1ª série do ensino médio, turmas A e B, da Escola Estadual Carolina Francini Burali (na qual o autor deste trabalho atua como professor de matemática), uma escola de ensino integral do estado de São Paulo localizada em Assis, durante as aulas da disciplina Prática de Ciências, uma disciplina voltada para a investigação e experimentação científicas.

Em ambos os experimentos (MRU e MRUV) foi utilizado um tubo cilíndrico de PVC com aproximadamente 1,7 metros de comprimento e 5 centímetros de diâmetro que teve sua lateral cortada em forma retangular, para que fosse possível visualizar o interior do tubo, e essa abertura foi coberta por um material plástico transparente. Ao longo do tubo foram feitas marcações a cada 10 centímetros de zero a 1,60 metros e uma das suas extremidades foi selada com material plástico transparente que chamamos de **Tubo de Teste** (Figura 42). A confecção de tal tubo é uma tarefa bastante simples, porém é importante ressaltar que os experimentos foram apenas utilizados como uma forma de recuperação de conteúdos de matemática e física da 1ª série do ensino médio e, portanto, a participação dos alunos nao incluiu a confecção do Tubo de Teste por não haver o tempo disponível necessário para o fazer durante as aulas. Mesmo assim, o procedimento para confecção deste tubo foi detalhadamente explicado e esclarecido para os mesmos.

5.2.1 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME — MRU

Como a primeira atividade, foi considerado o movimento retilíneo uniforme (MRU), o movimento mais simples e talvez menos frequente que se possa imaginar na física. Este experimento foi realizado nas turmas A e B da 1ª série do ensino médio e tomou, para ambas as turmas, 3 aulas de 50 minutos para ser realizado. No experimento foi utilizado o Tubo de Teste

Figura 42: Tubo de PVC — Tubo de Teste

e um copo descartável branco de 50ml como o objeto em movimento em linha.

Inicialmente, os alunos deixaram o copo cair pelo tubo e fora do tubo para que se observasse os movimentos descritos pelo copo. A partir disso, de forma oral, eles expressaram conclusões acerca do movimento descrito pelo copo. Várias ideias foram levantadas por ambas as turmas como, por exemplo:

— O copo cai mais lentamente dentro do Tubo de Teste;

— O motivo da velocidade do copo ser menor dentro do Tubo de Teste é a força de atrito entre o copo e o Tubo;

— Quando deixado cair fora do Tubo o copo não cai em linha reta;

— O copo é muito leve e por isso demora a cair;

— Se inclinar o Tubo o copo vai cair mais lentamente ainda.

Todas essas ideias levantadas por alunos são válidas, porém precisam ser investigadas. Após esse levantamento inicial de ideias, os alunos escolheram quatro pontos do Tubo de Teste: 0,25m, 0,50m, 0,75m e 1,00m, sendo que a única restrição é que a distância entre o ponto zero e o primeiro ponto escolhido fosse igual à distância entre o primeiro e o segundo ponto e assim sucessivamente. Em outras palavras, os pontos precisam ser equidistantes. A turma A escolheu os pontos por serem os ”mais simples”, enquanto que a turma B não conseguia se decidir pelos pontos a serem escolhidos de forma que pediram uma sugestão de pontos e, então, foi sugerido que esta turma também utilizassem os mesmos pontos escolhidos pela turma A. Esses pontos foram escolhidos para que se marcasse o tempo, em segundos, em que o copo passaria por cada um deles.

Para realizar essa medição, os alunos de ambas as turmas decidiram por usar o cronômetro do celular. Foram anotados os instantes em que o copo passava pelas marcas escolhidas do tubo em cada vez que o teste foi realizado. O teste foi realizado varias vezes devido à dificuldade encontrada pelos alunos de anotar o momento exato em que o copo passa pelas marcas escolhidas. Dentre os conjuntos de dados obtidos nos vários testes, as turmas escolheram um conjunto de dados cada para que pudessem prosseguir com a atividade. A turma A realizou o teste 9 vezes e o conjunto de dados escolhido continha os pares ordenados conforme a Tabela 4:

Tabela 4: Conjunto de dados da Turma A — MRU

$x_i \to$ Tempo (s)	0,00	0,61	1,25	1,90	2,50
$y_i \to$ Posição (m)	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00

E, a turma B realizou o teste 7 vezes e o conjunto de dados escolhido continha os pares ordenados conforme a Tabela 5:

Tabela 5: Conjunto de dados da Turma B — MRU

$x_i \to$ Tempo (s)	0,00	1,40	2,80	3,80	4,60
$y_i \to$ Posição (m)	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00

Notamos nas Tabelas 4 e 5 que no tempo inicial, ou seja $t = 0,00s$ foi considerada posição zero, já que o copo não foi lançado. Vale ressaltar que foi comentado para ambas as turmas que o Cubo de Teste poderia ser dividido em mais pontos, como, por exemplo, em 10 intervalos iguais em vez de 4 ou até mais e que em vez de escolher um dos conjuntos de dados, o correto seria fazer a média de todas as tentativas e considerar esta média em vez de considerar apenas um conjunto que o resultado certamente teria menos erros cometidos porém como o objetivo principal deste experimento não foi analisar os erros cometidos do método utilizado, esta parte foi desconsiderada para que não haja uma complexidade. Caso for dividir o Tubo de Teste em um número grande de intervalos que seria o mais correto há necessidade de um aplicativo de celular que tenha a opção de câmera lenta para poder medir corretamente os tempos observados em cada intervalo.

Os pares ordenados encontradas através dos experimentos das Turmas A e B foram plotados em um plano cartesiano feito em folha milimetrada em que o eixo das abscissas representa os valores de tempo em segundos e o eixo das ordenadas, os valores de distância percorrida em metros por copo descartável. Ao se ligar os pontos, obtiveram um gráfico que se aproxima de uma reta conforme apresentada nas Figuras 43 e 44.

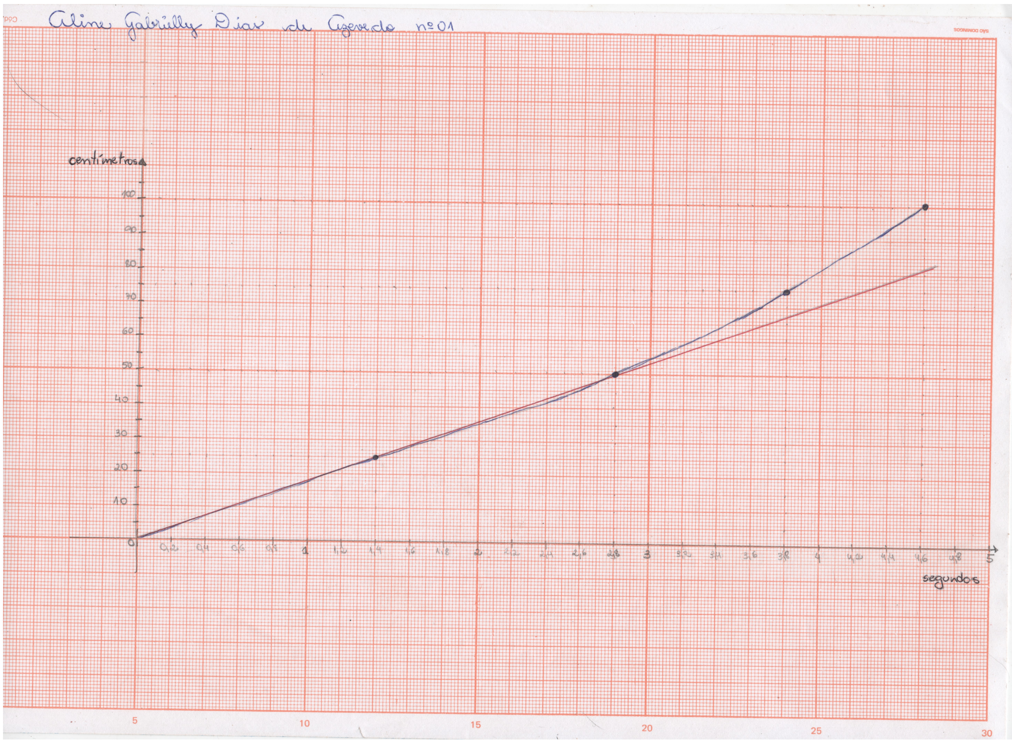

Figura 43: Gráfico plotado por um aluno da Turma A — MRU

Com os gráficos plotados, os alunos discutiram algumas ideias relacionados ao experimento:

- Turma A

  — O copo começou a se acelerar a partir da marcação de 0,50m;

  — Até a metade do movimento analisado o gráfico é uma reta;

  — O copo passou a se acelerar por causa de uma falha na vedação do Tubo;

- Turma B

  — Os intervalos de tempo entre uma marcacção e a outra são quase idênticos;

  — Se traçarmos uma reta que passa pela origem e pelo ponto (tempo ; posição) = (2,50 ; 1,00), os pontos obtidos estão todos muito próximos da reta;

  — Se o Tubo fosse maior o copo continuaria se movendo da mesma maneira ate atingir o final do tubo.

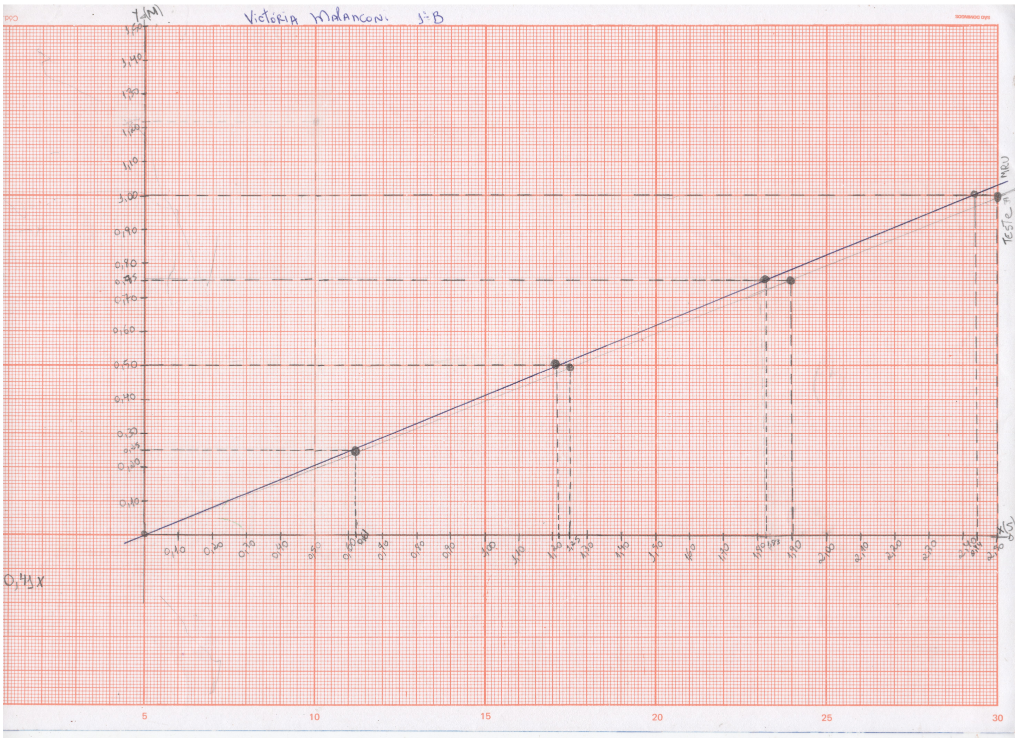

Figura 44: Gráfico plotado por um aluno da Turma B — MRU

Além disso, através do Manual de Ajuste de Curva no EXCEL, apresentado no Capítulo 3, também vimos que as curvas que melhor se ajustam aos dados coletados por ambas as turmas, são realmente retas. No caso do experimento realizado pela Turma A, vimos que a curva que melhor se ajusta aos dados da Tabela 4, da Turma A, é a reta $y = 0,3974x + 0,0025$ com $R^2 = 0,9998 \approx 1,00$ enquanto a curva que melhor se ajusta aos dados da Tabela 5, da Turma B, é a reta $y = 0,2125x - 0,0355$ com $R^2 = 0,9859 \approx 1,00$, conforme apresentadas nas Figuras 45 e 46.

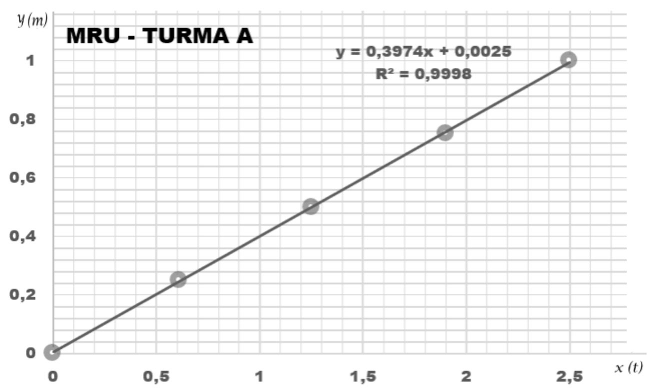

Figura 45: Curva de ajuste de curva da Turma A — MRU

O conjunto de dados foi escolhido pela Turma A justamente por representar uma falha no Tubo e a consequência que isso pode acarretar para o experimento. Com esse conjunto de

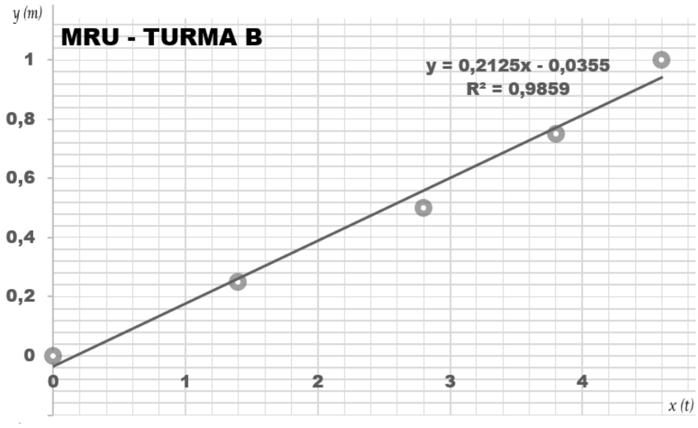

Figura 46: Curva de ajuste de curva da Turma A — MRU

dados começamos a discutir o que seria um movimento retilíneo uniforme. Após essa discussão, os alunos foram conduzidos a pensar no que significa os intervalos de tempo serem praticamente iguais. A conclusão a que os alunos chegaram após algum tempo de troca de ideias é que o copo não fica mais nem mais rápido nem mais devagar durante o percurso. Assim pudemos iniciar a ideia de movimento retilíneo uniforme.

Assim, ambas as turmas notaram que o movimento MRU é um tipo de movimento que, ao se plotar os pontos obtidos em um experimento e traçar o gráfico, pode ser representado em um plano cartesiano por uma reta. Além disso, os próprios alunos notaram que se o gráfico é uma reta, então a função que descreve o movimento é uma função afim. Posteriormente os alunos foram conduzidos a descobrir a função que descreve o movimento por eles observado no experimento. Ambas as turmas discutiram a melhor forma de fazê-lo, sendo auxiliados pelo professor, de forma que decidiram por considerar a taxa de variação do movimento todo como a razão entre a distância e o tempo anotados na primeira marcação.

Para a Turma A, o copo passou na marca de 0,25m aos 0,61s, sendo que a taxa de variação, que representa a velocidade do copo, é de aproximadamente 0,41m/s e, sendo assim, a função que descreve o movimento de forma aproximada é $y = 0,41x$ onde y é a distância em metros e x é o tempo em segundos. Para a Turma B, por sua vez, o copo passou na marca de 0,25m aos 1,40s, dessa forma a velocidade do copo é de aproximadamente 0,18m/s e, sendo assim, a função que descreve o movimento de forma aproximada é $y = 0,18x$, onde y é a distância em metros e x é o tempo em segundos. Estes resultados estão de acordo com os resultados que encontramos através do Manual de Ajuste de Curva no EXCEL (Figuras 45 e 46). Esta pequena diferença entre as curvas (retas) encontradas através do EXCEL e a discussão anterior mostram que, realmente, a movimentação do copo dentro do Tubo de Teste não tem uma velocidade constante, pois têm outros fatores que atuam sobre o copo. Ao finalizar a atividade, os alunos concluíram que o MRU pode ser descrito matematicamente por uma função afim, e que a curva que melhor se ajusta aos nossos conjuntos de dados não é necessariamente aquela que liga os pontos de forma direta, já que os dados obtidos podem conter erros por serem dados de experimentação (assim como foi discutido no Capítulo 3).

Outra situação tratada foi o motivo do copo movimentar-se em MRU dentro do Tubo de Teste, de forma que a conclusão foi que o copo, ao ser colocado em movimento de queda dentro do Tubo de Teste, atinge uma velocidade terminal após um breve momento de aceleração, dado que o copo está sob a ação de uma força constante, a força peso, enquanto se desloca em um fluido, o ar. Ao atingir a velocidade terminal o copo descreve um Movimento Retilíneo Uniforme.

5.2.2 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO — MRUV

Como uma segunda atividade consideramos o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), que por sua vez é mais complexo que o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), já que a velocidade sofre variações iguais em intervalos iguais de tempo mesmo tendo uma aceleração constante. Este experimento, por sua vez, foi realizado apenas com a Turma A. Utilizamos novamente o Tubo de Testes e em vez do copo descartável uma bolinha de tênis de mesa. O Tubo de Teste foi posto sobre a bancada do laboratório de forma que este tivesse uma pequena inclinação (aproximadamente 5 graus) em relação à bancada.

Os alunos deixaram a bolinha cair várias vezes, soltando-a de uma altura de aproximadamente 1,50m em queda livre e, também, a soltaram diversas vezes dentro do Tubo de Testes de forma que, ao observarem ambos os movimentos, surgiram os seguintes pontos para discussão:

— O movimento fora do tubo é muito mais rápido que dentro do tubo;

— A bolinha dentro do tubo não tem uma velocidade constante;

— Ao final do movimento a bolinha está muito mais rápida que no início;

— O movimento descrito pela bolinha não é um MRU;

— A bolinha não atinge velocidade terminal.

Após a discussão inicial, os alunos utilizaram o cronômetro do celular para registrar os momentos em que a bolinha passava pelas marcações de 0,50m , 1,00m e 1,50m. O experimento foi realizado 8 vezes e, então eles escolheram dois conjuntos de dados, chamados de Teste 1 e Teste 2 conforme as Tabelas 6 e 7:

Tabela 6: Conjunto de dados do Teste 1 da Turma A — MRUV

$x_i \rightarrow$ Tempo (s)	0,00	2,60	3,91	5,27
$y_i \rightarrow$ Posição (m)	0,00	0,50	1,00	1,50

Tabela 7: Conjunto de dados do Teste 2 da Turma A — MRUV

$x_i \rightarrow$ Tempo (s)	0,00	1,70	2,50	3,00
$y_i \rightarrow$ Posição (m)	0,00	0,50	1,00	1,50

Esses conjuntos de dados foram escolhidos por terem sido aqueles em que os alunos conseguiram registrar com maior precisão os momentos utilizando o cronômetro e eles queriam comparar os dois, por terem valores bem diferentes. Apos escolher o conjunto de dados, os alunos plotaram os pares ordenados em um plano cartesiano feito em papel milimetrado e traçaram um gráfico que ligasse os pontos obtidos como feito no primeiro experimento. A Figura 47 mostra os gráficos plotados do experimento de MRUV através dos Teste 1 e 2. Com o grafico em mãos, os alunos se reuniram para discutir ideias relacionadas ao experimento e chegaram nas seguintes conclusões:

— O tempo necessário para que a bolinha chegue à próxima marcação diminui ao longo no do movimento;

— Os gráficos não se aproximam de uma reta, então o movimento não pode ser matematicamente descrito por uma função afim;

— A velocidade da bolinha está aumentando conforme o tempo passa;

— A bolinha é mais lenta dentro do tubo por causa da pequena inclinação do tubo em relação à bancada.

A turma discutiu muito sobre uma reta não ser a melhor maneira de descrever esse movimento e sobre a bolinha estar acelerando. Com isso, eles chegaram à conclusão de que o movimento observado nos experimentos não poderia ter velocidade constante, mas sim uma velocidade que variasse de acordo com o tempo. Assim, a nova discussão foi: essa variação segue um padrão ou não? Assim, os alunos tentaram verificar se havia um padrão na diminuição de tempo entre uma marca e outra. A conclusão formulada pelos alunos foi que de fato há um padrão que indica que a velocidade está aumentando seguindo algum padrão, mas eles não

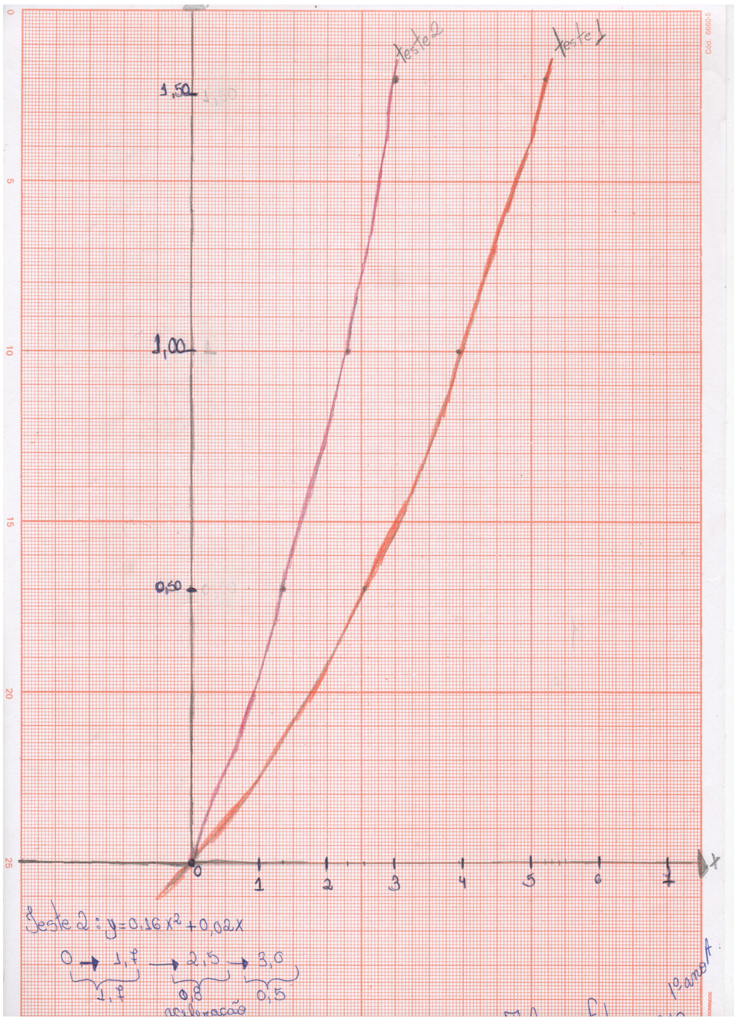

Figura 47: Gráficos plotados dos Teste 1 e 2 da Turma A — MRUV

conseguiram identificar esse padrão. Com essas conclusões, pudemos iniciar a ideia de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) e comparar o gráfico do movimento observado com uma parábola. Assim, foi possível mostrar que uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola, é a função que representa o movimento observado. Os alunos também pensaram sobre a dificuldade de obter dados fidedignos para trabalhar e a necessidade de ajustar os dados, especialmente na parte gráfica, para obter uma representação matemática coerente com o que foi observado. A turma, ainda, com o auxílio do professor, escreveu uma função quadrática, por tentativa e erro, que continha valores aproximados aos que eles obtiveram no Teste 1, e dessa forma puderam visualizar que a função quadrática descreve, de fato, o movimento.

Através do Manual de Ajuste de Curva no EXCEL, apresentado no Capítulo 3, também vimos que as curvas que melhor se ajustam aos dados coletados nos dois testes, são realmente curvas quadráticas. No caso do Teste 1, vimos que a curva que melhor se ajusta aos dados da Tabela 6 é o polinômio de grau 2 dado por $y = 0,0307x^2 + 0,1265x - 0,0053$ com $R^2 =$

$0,9977 \approx 1,00$ enquanto a curva que melhor se ajusta aos dados da Tabela 7 é o polinômio de grau 2 dado por $y = 0,1629x^2 + 0,0047x + 0,0026$ com $R^2 = 0,9986 \approx 1,00$, conforme apresentadas na Figura 48.

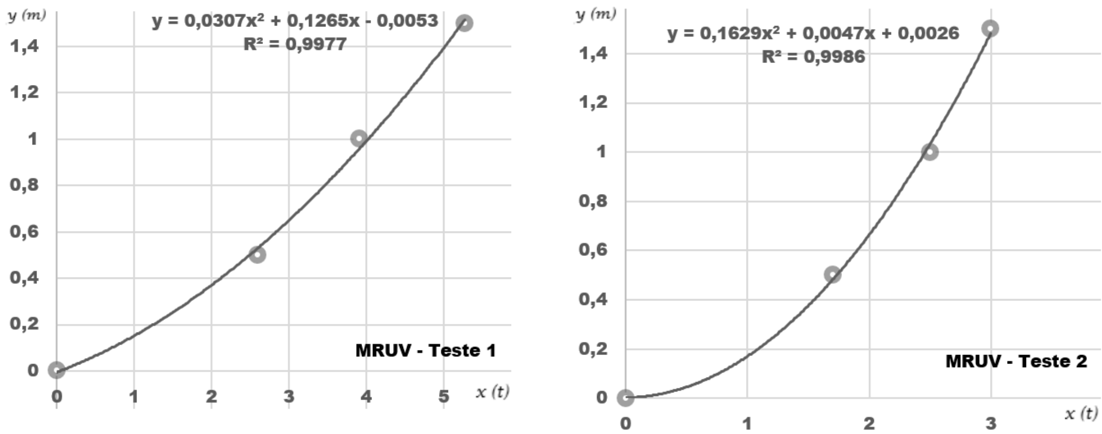

Figura 48: Curvas de ajuste de curva dos Testes 1 e 2 — MRUV

Como podemos observar na parte inferior da Figura 47 (feita por uma aluna), a função quadrática encontrada para o Teste 2 por tentativa e erro é a função $y = 0,16x^2 + 0,02x$ que realmente é uma aproximação muito boa da função quadrática $y = 0,1629x^2 + 0,0047x + 0,0026$ encontrada por ajuste de curva. Também, vimos que, nestes casos, realmente as curvas que melhor se ajustam aos dados dos Testes 1 e 2 não são lineares pois se for escolher retas como as melhores curvas, teremos $R^2 = 0,9687$ e $R^2 = 0,9270$, respectivamente, o que mostra que as qualidades das curvas quadráticas são bem melhores se comparando com as lineares (retas). Concluímos a atividade mostrando a importância do ajuste de curvas tratado no Capítulo 3.

5.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

Traremos nessa seção uma sugestão de sequências didáticas integrando o ensino da Cinemática Escalar e o ensino de Funções.

5.3.1 CONSTRUÇÃO DO TUBO DE TESTE

Para realizar os experimentos é necessário, antes de tudo, construir o tubo, que chamamos de Tubo de Teste. Os materiais utilizados na construção de tal tubo são:

— Um cano de PVC de, aproximadamente, 2 metros de comprimento e 5 centímetros de diâmetro;

— Material plástico maleável e transparente (papel filme PVC, por exemplo);

— Fita adesiva, preferencialmente transparente;

— Ferramenta cortante para cortar o tubo, como uma serra de mão;

— Caneta permanente ou qualquer caneta com a qual se escreve em PVC ou plástico;

— Régua ou fita métrica.

Inicialmente, cortamos na lateral do cano de PVC duas aberturas retangulares de aproximadamente 1,50cm por 79cm separadas por 2cm de distância, como vemos na Figura 49. Após isso, cobrimos as duas aberturas retangulares e uma das bases do cano (que será a parte de baixo do Tubo de Teste) com plástico transparente e vedamos usando a fita adesiva. Para finalizar utilizamos a caneta permanente para marcar as medidas de 10 em 10 centímetros a partir do início da abertura retangular da parte de cima do Tubo de Teste (a parte não vedada), iniciando a partir do zero e chegando a 160cm. Com isso temos nosso Tubo de Teste construído e podemos realizar os experimentos de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Uniformemente Variado (MRUV) nas aulas exprimentais de matemática e física.

5.3.2 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A ideia dessa sequência didática é construir com os alunos, ao mesmo tempo, noções de funções para a matemática e cinemática escalar, especificamente movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variado, para a física, partindo da prática experimental. É importante que os alunos percebam ao final da sequência didática que a cinemática escalar e as funções são intimamente ligadas e que a matemática é útil para descrever e estudar os fenômenos da física. Para tal, o professor deve reforçar este aspecto durante a atividade.

5.3.2.1 FUNÇÃO AFIM E MRU

Podemos utilizar um copo de 50ml (copo descartável de café) para realizar o primeiro experimento, sendo que ele deve ser solto dentro do Tubo de Teste. Os alunos podem usar um cronômetro (mesmo que seja do celular), ou qualquer outra forma de marcar o tempo, para marcar os instantes em que o copo passa pelas marcações escolhidas por eles mesmos. Os alunos podem escolher as marcações do Tubo de Teste para a coleta de dados, ou o professor mesmo pode determiná-las. Recomendamos que sejam 4 marcações. Após escolhidas as marcações, os alunos devem realizar o teste: soltar o copo dentro do Tubo de Teste. O teste pode ser feito quantas vezes forem convenientes, mas recomendamos que sejam ao menos 5.

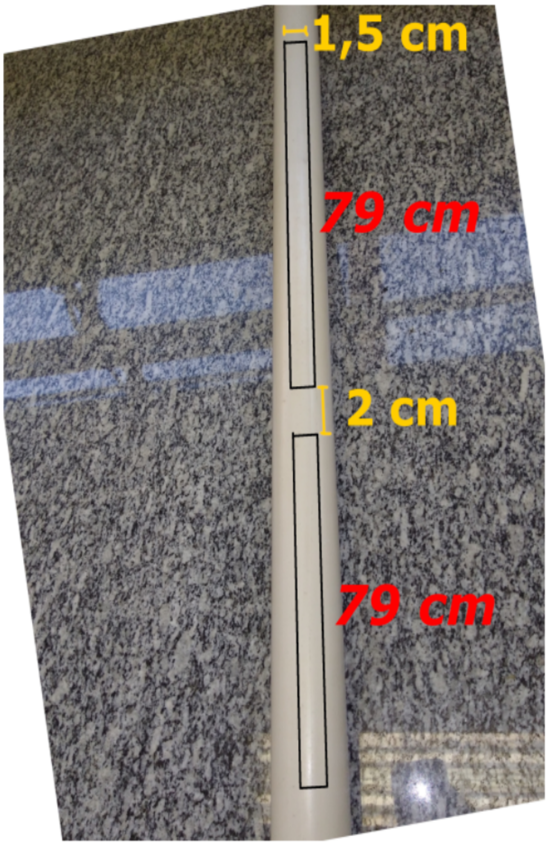

Figura 49: Cortes na construção do Tubo de Teste

Para realizar os testes, iniciem o cronômetro quando o copo passar pela marcação zero e, então, os alunos devem anotar o momento em que o copo passa pelas marcações escolhidas em todos os testes e escolher um conjunto de dados dentre os que foram obtidos nos testes para continuar a atividade. Os pontos devem ser plotados em um plano cartesiano representando a distância ao longo do tempo, que pode ser feito em papel milimetrado ou em algum aplicativo. Assim os alunos devem ligar os pontos plotados, traçando um gráfico e, também traçar uma reta r passando pela origem e o primeiro ponto obtido no teste. Após feito o gráfico, os alunos podem discutir vários aspectos relacionados ao experimento. A discussão pode ser livre em um primeiro momento e então o professor conduz a turma em uma análise dos aspectos a seguir:

— O copo leva aproximadamente o mesmo tempo para percorrer distâncias iguais ao longo do movimento;

— O copo não acelera nem desacelera e, portanto, está em Movimento Retilíneo Uniforme;

— O gráfico gerado pelos pontos é muito semelhante à reta r;

— O gráfico desse movimento pode ser aproximado para uma reta, dados os possíveis erros de medição;

— Se a velocidade não muda, então o valor da distância varia a uma taxa fixa ao longo do tempo;

— Existe uma maneira de representar de forma algébrica, com uma expressão matemática, o movimento descrito pelo grafico, a qual chamamos de função.

Após finalizada a discussão, construímos com os alunos a função que descreve a reta r mostrando que essa reta é uma curva ajustada de forma rudimentar para podermos descrever o movimento observado no experimento. O professor pode também utilizar o procedimento descrito no Capítulo 3 — ajuste de curva — para fazer um ajuste de curvas com o EXCEL e mostrar que o gráfico é melhor ajustado a uma linha de tendência linear. Como avaliação, peça para que os alunos anotem as conclusões das discussões e as expliquem em um pequeno texto. Com a finalização desse experimento, os alunos devem ter adquirido noções suficientes para que se aprofunde o conhecimento sobre funções afim nas aulas de matemática e sobre o movimento MRU nas aulas de física.

5.3.2.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA E MRUV

Podemos utilizar uma bolinha de tênis de mesa para realizar o experimento, colocando o Tubo de Teste em uma superfície horizontal com uma pequena inclinação em relação à superfície, sugerimos algo em torno de 5 graus. Os alunos podem usar um cronômetro (mesmo que seja do celular), ou qualquer outra forma de marcar o tempo, para marcar os instantes em que o copo passa pelas marcações escolhidas por eles mesmos. As marcações do Tubo de Teste podem ser determinadas pelos alunos ou pelo professor dependendo da conveniência, mas recomendamos que sejam pelo menos umas 3 marcações. Após escolhidas as marcações, os alunos devem realizar o teste: soltar a bolinha no Tubo de Teste. O teste pode ser feito quantas vezes forem necessárias, mas recomendamos que sejam ao menos 5 vezes e considerar o valor médio dos tempos. O cronômetro deve ser iniciado quando a bolinha passar pela marca zero e os alunos devem anotar o momento em que o copo passa pelas marcações escolhidas em todos os testes e escolher um conjunto de dados dentre os que foram obtidos nos testes para continuar a atividade.

Os pontos encontrados então devem ser plotados em um plano cartesiano representando a distância percorrida pela bolinha ao longo do tempo, o que pode ser feito em papel milimetrado ou em algum aplicativo. Assim os alunos devem ligar os pontos plotados, traçando um gráfico. O professor deve orientar os alunos a fazer um traçado não reto para se ligar os pontos. Após feito o gráfico, os alunos devem ser conduzidos a uma discussão sobre o experimento de forma livre e, então, o professor conduz a turma em uma análise dos aspectos a seguir:

— A bolinha fica mais rápida ao longo do percurso;

— A bolinha está ganhando velocidade, ou seja, está acelerada, logo temos um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV);

— Uma reta não é uma boa aproximação para o gráfico obtido;

— A variação da velocidade não é aleatória, pelo contrário, segue um padrão;

— Se a velocidade torna-se cada vez maior, então o tempo necessário para se percorrer uma certa distância será cada vez menor;

— A função afim não é a melhor representação algébrica para esse tipo de movimento, mas sim a quadrática, cujo gráfico é uma parábola;

— O gráfico obtido aproxima-se de uma parábola, mais especificamente uma parte de uma parábola.

Após a discussão o professor pode utilizar o procedimento descrito no Capítulo 3 — ajuste de curva — para fazer um ajuste de curvas com o EXCEL e mostrar que o gráfico é melhor ajustado à uma curva polinômial de grau 2. Finalizando a atividade, pedimos para que os alunos anotem as conclusões das discussões e as expliquem em um pequeno texto. Com a finalização desse experimento, os alunos devem ter adquirido noções suficientes para que se aprofunde o conhecimento sobre funções quadráticas nas aulas de matemática e sobre o movimento MRUV nas aulas de física.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos conceitos matemáticos mais complexos que tem um papel fundamental na descrição e estudo de certos fenômenos da natureza é o conceito da função. Em particular, podemos ver que os fenômenos físicos ligados à cinemática podem ser modelados e apresentados através deste conceito matemático e que existe uma clara relação entre estes fenômenos físicos e as funções, em particular afins e quadráticas. Porém, muitas vezes ao estudar o conceito de funções é deixado de lado esta relação e as suas aplicações em outras áreas de conhecimento e no cotidiano e que isso faz com que o estudo seja incompleto além de causar um desinteresse entre os alunos e neste cenário sente-se a falta de uma aprendizagem motivadora e que a interdisciplinaridade seria uma alternativa válida para tal objetivo. A interdisciplinaridade aplicada na forma correta pode contribuir para que não haja fragmentação do conhecimento de modo que o estudante não construa um conhecimento compartimentado e deficiente.

Neste trabalho, propomos uma abordagem integrada entre funções e cinemática nas aulas de física e matemática da 1ª série do ensino médio. Os movimentos unidimensionais mais simples, os movimentos Retilíneo Uniforme (MRU) e Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) foram analisados e estudos na forma de atividades, e além disso, propomos um abordagem interdisciplinar integrada eficiente no estudo destes movimentos, entre funções e cinemática nas aulas de física e matemática da 1ª série do ensino médio de tal forma que os fenômenos sejam tratados de forma completa enriquecendo o estudo de ambas as áreas do conhecimento, matemática e física. Atráves de exprimentos físicos estudamos o conceito de funções afins e quadráticas e demonstramos que as funções afins e quadráticas descrevem matematicamente os MRU e MRUV, respectivamente, evitando que haja uma fragmentação do conhecimento matemático de funções.

Além disso, neste trabalho criamos uma ferramenta didática para aplicação nas aulas que tenham foco na interdisciplinaridade entre matemática e física, principalmente quanto o assunto da investigação é o conceito de funções afins e quadráticas. Os resultados deste trabalho mostram que integrações próximas entre funções e estes fenômenos físicos podem ajudar significamente os alunos da 1ª série a entender o conceito de funções afins e quadráticas e também os movimentos lineares da cinemática. Também, aproveitando o crescimento exponencial da tecnologia que vem influenciando muito o dia–a–dia dos alunos, apresentamos a eles um recurso computacional na forma de um manual no estudo de funções a serem encontradas através de exprimentos fisícos–matemáticos tentando criar desta forma um ambiente de aprendizagem mais atraentes para os mesmos.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Como alguns trabalhos futuros, a utilização de outros exprimentos em salas de aula como uma forma de aprendizagem ativa será estudada pelos autores deste trabalho no estudo de outras funções além das funções afins e quadráticas. Por exemplo, a função exponencial é um das funções mais importantes que aperece muito frequentemente nas aplicações da matemática. Muitos probelmas reais, como os problemas de crescimento/decrescimento populacional ou fenômenos naturais, os probelams financeiros do juro composto, os problemas de resfriamento na física, os problemas de decaimento radioativo na química entre outros, podem ser modelados e simulados atráves de funções exponenciais. Por exemplo, como um projeto educacional bastante interessante podemos explicar para os alunos os conceitos de educação financeira, investimento, e juro composto e a partir disso criar e resolver simples problemas. Como um simples problema, podemos pedir para os alunos calcularem manualmente o tempo que eles precisam aplicar as mesadas mensais recebidos no valor 100,00 R$ à uma taxa de juro de 2% ao mês gerando um montante de 5.000,00 R$. Neste exemplo, eles podem observar que a função que modela este problema é uma função exponencial. O uso do recurso computacional (manual apresentado no Capítulo 3) é fundamental neste exprimento para que os alunos possam verificar e comparar a sua resposta com a resposta oferecida pela ferramenta computacional apresentada. Isso é apenas um dos inúmeros simples exprimentos e que existem muitos outros exprimentos que podem ser realizados no estudo de funções exponenciais em uma aula de matemática focada no conceito de funções.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio) - Bases Legais**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 2 de julho de 2018.

BRITO, D. dos S.; ALMEIDA, L. M. W. de. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetike**, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educacao, Circulo de Estudo, Memoria e Pesquisa em E, v. 13, n. 23, p. 63–86, 2005.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2015.

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno brasileiro de ensino de física**, v. 19, n. 1, p. 93–114, 2002.

SCHROEDER, E. Conceitos espontâneos e conceitos científicos: o processo da construção conceitual em vygotsky. **Atos de pesquisa em educação**, v. 2, n. 2, p. 293–318, 2007.

SOUSA, E. V. d. Objetos de aprendizagem no ensino de matemática e física: uma proposta interdisciplinar. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. d. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio. **Zetetiké, Campinas**, v. 8, n. 13/14, p. 7–28, 2000.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. d. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. **Ciência & Educação (Bauru)**, SciELO Brasil, v. 8, n. 1, p. 1–12, 2002.