



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Italo Francisconi Vieira Júnior

Polígonos cíclicos e o teorema japonês

São Gonçalo

2020

Italo Francisoni Vieira Júnior

Polígonos cíclicos e o teorema japonês



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

São Gonçalo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

V658 TESE	<p>Vieira Júnior, Italo Francisconi. Polígonos cíclicos e o teorema japonês / Italo Francisconi Vieira Júnior. - 2020. 105f.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.</p> <p>1. Polígonos - Teses. 2. Geometria - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Souza, Fábio Silva de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.</p>
CRB/7 - 6150	CDU 517.91

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Italo Francisconi Vieira Júnior

Polígonos cíclicos e o teorema japonês

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 26 de Março de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Hamilton Simões da Silva Filho
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof^a. Dra. Priscila Cardoso Petito
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, por todo apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Às minhas filhas Clara e Maria Helena, pelo amor incondicional.

À minha companheira Júlia, por seu amor e compreensão ao longo deste curso.

À minha família, pelo incentivo.

Aos professores da FFP (UERJ) que colaboram com o PROFMAT.

Ao meu orientador Fábio, pela paciência e incentivo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

VIEIRA JÚNIOR, Italo Francisconi. *Polígonos cíclicos e o teorema japonês*. 2020. 105 f. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma contribuição em língua portuguesa sobre polígonos cíclicos. Serão apresentados diversos resultados dos quais será destacado o atualmente conhecido Teorema Japonês. Tal teorema, caso quadrilátero, teve origem no Japão durante um período conhecido como Período Edo (ou Era Edo). Durante esse período, no qual o Japão ficou completamente isolado do mundo ocidental, os japoneses tinham o costume de pendurar tábuas de madeiras, chamadas sangakus, em templos budistas ou xintoístas. Muitos sangakus continham caráter geométrico e eram expostos com o objetivo de honrar seus autores, desafiar novos visitantes e também agradecer aos deuses pelo feito alcançado. O Teorema Japonês foi inscrito num sangaku no ano de 1800. Neste trabalho, serão apresentadas duas demonstrações do referido teorema para o caso geral e uma para o caso quadrilátero onde, no segundo caso, serão dadas duas aplicações geométricas. Também será apresentado um método para a construção de polígonos cíclicos cujos lados, diagonais e área possuem medidas inteiras. Tais polígonos são conhecidos na literatura como polígonos de Brahmagupta. Embora nem todo polígono seja cíclico, o método aqui apresentado nos permitirá construir tais polígonos de maneira simples, usando basicamente duas famílias de triângulos de Heron, ou seja, triângulos cujos lados e área admitem medidas inteiras.

Palavras-chave: Polígonos cíclicos. Teorema japonês. Polígonos de Brahmagupta.

ABSTRACT

VIEIRA JÚNIOR, Italo Francisconi. *Cyclic polygons and the japanese theorem*. 2020. 105 f. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

The aim of this paper is to provide a contribution in Portuguese on cyclic polygons. Several results will be presented, of which the currently known Japanese Theorem will be highlighted. Such a theorem, if quadrilateral, originated in Japan during a period known as the Edo Period (or Edo Era). During this period, when Japan was completely isolated from the Western world, the Japanese used to hang wooden boards, called sangakus, in Buddhist or Shinto temples. Many sangakus had a geometric character and were exposed with the aim of hono-ring their authors, challenging new visitors and also thanking the gods for their achievement. The Japanese Theorem was inscribed in a sangaku in the year 1800. In this work, two demonstrations of that theorem will be presented for the general case and one for the quadrilateral case where, in the second case, two geometric applications will be given. A method will also be presented for the construction of cyclic polygons whose sides, diagonals and area have entire measures. Such polygons are known in the literature as Brahmagupta polygons. Although not every polygon is cyclic, the method presented here will allow us to construct such polygons in a simple way, using basically two families of Heron triangles, that is, triangles whose sides and area admit whole measures.

Keywords: Cyclic polygons. Japanese theorem. Brahmagupta polygons.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	8
1	NOÇÕES PRELIMINARES	10
1.1	Definições e conceitos importantes	10
2	POLÍGONOS CÍCLICOS	18
2.1	Triângulos	18
2.1.1	<u>Concorrência entre segmentos</u>	18
2.1.2	<u>Área de um triângulo em função dos lados (Fórmula de Heron)</u>	22
2.1.3	<u>Circunraio de um triângulo em função dos lados</u>	24
2.1.4	<u>Inraio de um triângulo em função dos lados</u>	25
2.2	Quadriláteros	26
2.2.1	<u>Condições para um quadrilátero ser cíclico</u>	26
2.2.2	<u>Diagonais de um quadrilátero cíclico convexo em função dos lados</u>	28
2.2.3	<u>Área de um quadrilátero cíclico convexo em função dos lados (Fórmula de Brahmagupta)</u>	32
2.2.4	<u>Circunraio de um quadrilátero convexo em função dos lados</u>	35
2.2.5	<u>Condições para um quadrilátero ser circunscritível</u>	36
2.2.6	<u>Inraio de um quadrilátero convexo em função dos segmentos tangentes</u>	38
2.3	Generalizações	41
2.3.1	<u>Polígonos cíclicos e circunscritíveis</u>	41
2.3.2	<u>Relações importantes para polígonos regulares</u>	42
2.3.3	<u>Sobre áreas de polígonos cíclicos</u>	45
3	CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA	49
3.1	Construindo triângulos de Heron	49
3.2	Construindo quadriláteros de Brahmagupta	59
3.3	Construindo polígonos de Brahmagupta	63
4	O TEOREMA JAPONÊS PARA POLÍGONOS CÍCLICOS CONVEXOS	70
4.1	Um pouco de história	70
4.2	O teorema japonês para quadriláteros cíclicos convexos	72
4.3	Uma primeira aplicação do teorema japonês	75
4.4	Uma segunda aplicação do teorema japonês	78
4.5	O teorema japonês para polígonos cíclicos convexos	90
	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS	104

INTRODUÇÃO

No Japão, o período de 1603 até 1868 ficou conhecido como Era Edo, onde tal país ficou completamente isolado do mundo ocidental. Nem mesmo descobertas como as de Newton e Leibniz chegaram ao conhecimento dos japoneses em tal período. Nessa época, era costume dos japoneses inscrever problemas matemáticos, com figuras bem ilustradas e coloridas, em tábuas de madeira chamadas sangakus. Tais tábuas eram expostas em santuários xintoístas ou budistas em forma de agradecimento aos deuses pelo feito alcançado, honrar os autores ou mesmo desafiar novos visitantes a resolverem tais problemas.

Muitos sangakus tinham caráter geométrico e era bastante comum aparecerem problemas envolvendo círculos e polígonos. Em alguns problemas, também era comum o registro da chamada arte do problema, que consistia em descrever um caminho informal para solucioná-lo.

Neste trabalho, iremos apresentar como resultado principal um sangaku de caráter geométrico conhecido atualmente como Teorema Japonês para polígonos cíclicos convexos. Um polígono cíclico ou inscrito é todo polígono cujos vértices pertencem a um mesmo círculo. Tais polígonos possuem diversas propriedades interessantes. Por exemplo, a sua área depende apenas das medidas de seus lados, fato este que não ocorre para polígonos não-cíclicos, onde esta depende de outras variáveis como, por exemplo, a medida de seus ângulos internos.

O Teorema Japonês, caso quadrilátero, foi inscrito em um sangaku no ano de 1800 pelo japonês Ryōkwan Maruyama e exposto num santuário xintoísta. Apesar de Maruyama ter exposto também a arte do problema, não havia nenhuma prova formal para o mesmo. A prova para o caso quadrilátero é atribuída a Tameyuki Yoshida (1819–1892) e foi encontrada num manuscrito sem data. O caso geral do Teorema Japonês teve origem na China e foi provado em 1905 por Yoshio Mikami (1875-1950). Tal teorema afirma que se triangularizarmos um polígono cíclico convexo a partir de um vértice qualquer e inscrevermos em cada triângulo um círculo, então a soma dos raios de tais círculos não dependerá do vértice escolhido.

No capítulo 1 introduziremos algumas noções preliminares sobre polígonos que serão úteis ao longo deste trabalho. Também aproveitaremos este capítulo para fixarmos parte da notação utilizada no texto.

No capítulo 2 mostraremos as condições para um polígono ser cíclico, assim como as condições para que um polígono seja circunscritível. Também iremos apresentar as fórmulas para diagonais, área, inraio e circunraio de triângulos e quadriláteros cíclicos convexos. Daremos destaque especial para as fórmulas de Heron e Brahmagupta e mostraremos como tais fórmulas motivaram o matemático estadunidense David P. Robbins

(1942-2003) a encontrar as fórmulas para as áreas de pentágonos e hexágonos cíclicos em função apenas das medidas dos lados.

No capítulo 3 apresentaremos um método para a construção de Polígonos de Brahmagupta, ou seja, polígonos cíclicos cujos lados, diagonais e área possuem medidas inteiras.

Finalmente, no capítulo 4 estudaremos o Teorema Japonês. Daremos a prova mais antiga para o caso quadrilátero e duas provas para o caso geral, onde na primeira, utilizaremos o Teorema de Carnot para triângulos e na segunda, o método de indução. Mostraremos também duas aplicações geométricas do Teorema Japonês quando o polígono for um quadrilátero. A primeira irá estabelecer uma relação entre a diagonal utilizada para triangularizar o quadrilátero e os inraios dos círculos obtidos. A segunda estabelecerá um invariante geométrico relacionado aos pontos de Nagel dos triângulos obtidos em uma determinada triangularização.

1 NOÇÕES PRELIMINARES

1.1 Definições e conceitos importantes

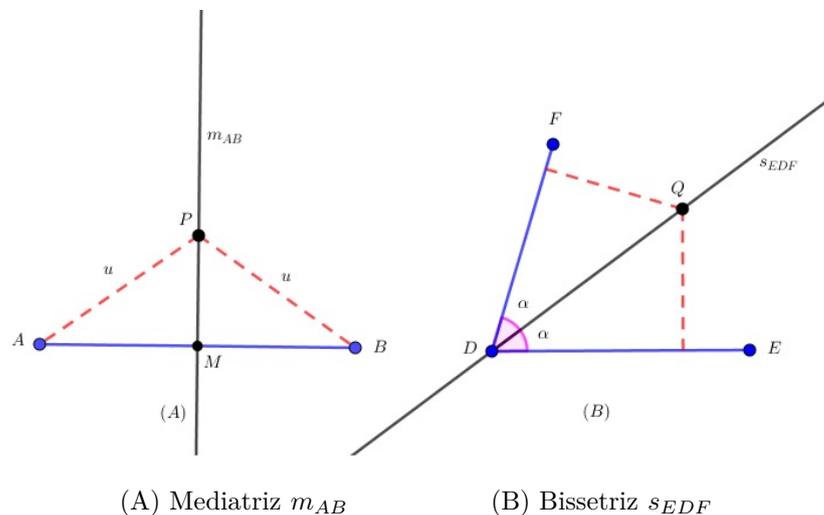
O objetivo deste capítulo é introduzir conceitos básicos de geometria euclidiana plana e alguns resultados que serão importantes para a compreensão deste trabalho. Alguns resultados, por serem muito comuns na educação básica, terão suas respectivas demonstrações omitidas. No entanto, se o leitor não estiver familiarizado com tais conceitos, sugerimos que o mesmo utilize como apoio a referência [DOLCE; POMPEO, 1993]. Começaremos introduzindo a importante definição de *lugar geométrico*.

Definição 1.1.1. Dada uma propriedade \mathcal{P} relativa a pontos do plano, o *lugar geométrico* (LG) dos pontos que possuem a propriedade \mathcal{P} é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz as seguintes condições:

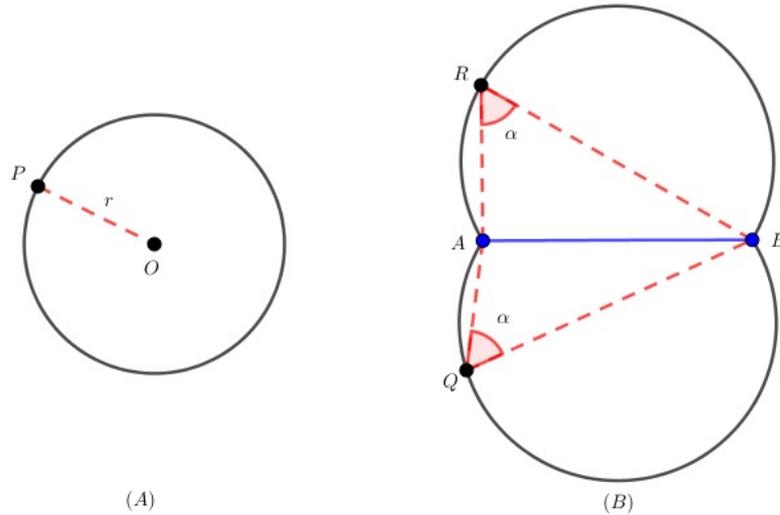
- Todo ponto de \mathcal{L} possui a propriedade \mathcal{P} .
- Todo ponto do plano que possui a propriedade \mathcal{P} pertence a \mathcal{L} .

Utilizando tal definição, vamos definir alguns lugares geométricos que serão importantes no que segue.

- Dados dois pontos A e B no plano, a *mediatriz* do segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e B .
- A *bissetriz* de um ângulo $\angle AOB$, é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .



- Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o *círculo* de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos que estão à distância r do ponto O .
- Dados um segmento AB e um ângulo de medida α , com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\widehat{APB} = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os *arcos capazes* de α em relação a AB .



(A) Círculo de centro O e raio r (B) Arcos capazes sobre AB

Definição 1.1.2. Dado, no plano, um círculo Γ de centro O , um *ângulo central* em Γ é um ângulo de vértice O e tendo dois raios OA e OB por lados.

A medida de um ângulo central, por definição, é igual à medida do arco \widehat{AB} correspondente. Note que a definição acima não diz a quais dos dois ângulos $\angle AOB$ estamos nos referindo. Isso será esclarecido no respectivo contexto.

Definição 1.1.3. Um *ângulo inscrito* num círculo é um ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas do mesmo.

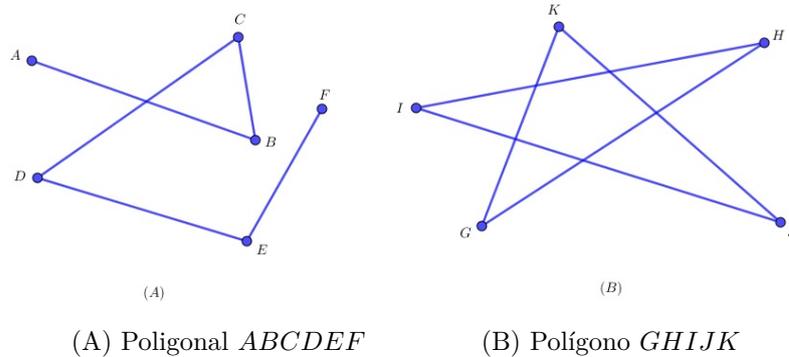
A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente. A prova desta afirmação pode ser encontrada nas páginas 87 e 88 de [NETO, 2013].

Em geometria, uma *poligonal* é formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são os seus *lados*.

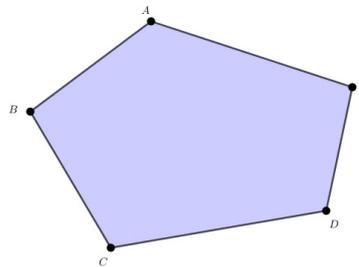
Um *polígono* é uma poligonal $A_1A_2 \cdots A_n$ na qual as seguintes condições são satisfeitas:

- $A_n = A_1$;

- cada vértice é extremidade de dois lados;
- dois lados com a mesma extremidade não pertencem à mesma reta.



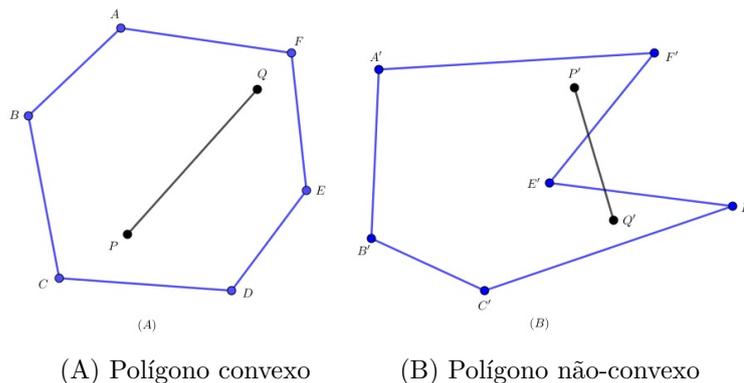
A palavra polígono vem do grego, “*polígonos*”, e significa ter muitos lados ou ângulos. A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é denominada o *perímetro* do mesmo. A *região poligonal* correspondente ao polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ é a região limitada do plano que é delimitada pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Todo ponto pertencente a tal região é chamado *ponto interior* ao polígono. Se um determinado ponto não for um ponto interior, então ele será dito um *ponto exterior* ao polígono.



Região poligonal correspondente ao polígono $ABCDE$

Os polígonos são classificados de duas formas: os convexos e os não-convexos. Para diferenciá-las, utilizaremos a seguinte definição:

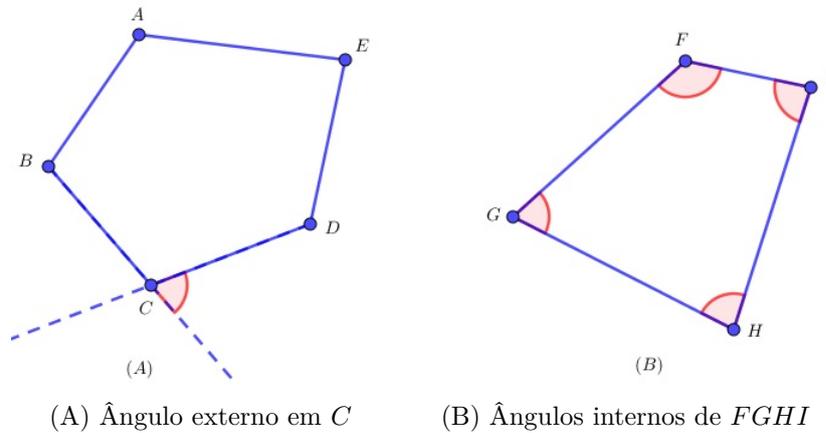
Definição 1.1.4. Um polígono será dito *convexo*, quando para quaisquer dois pontos P e Q interiores ao polígono, o segmento PQ estiver completamente contido no interior do mesmo. Caso contrário, diremos que tal polígono é *não-convexo*.



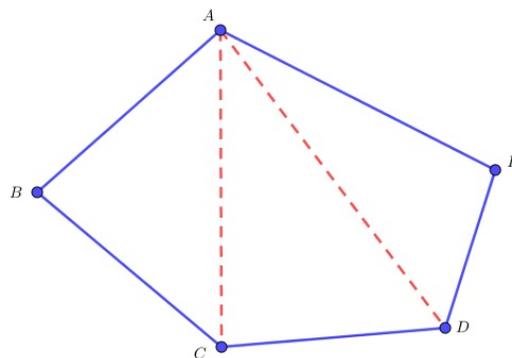
Uma *diagonal* de um polígono convexo é qualquer segmento A_iA_j que não seja um lado do mesmo. Repare que temos um total de $(n - 3)$ diagonais partindo do vértice escolhido pois devemos excluir como outra extremidade o próprio vértice e seus dois vértices adjacentes (com os dois últimos formaríamos lados do polígono). Como o polígono possui um total de n vértices para escolhermos e cada diagonal A_iA_j é a mesma que a diagonal A_jA_i , obtemos que o total de diagonais de um polígono convexo qualquer é dado por

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Os ângulos convexos $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (ou simplesmente $\angle A_i$, com $1 \leq i \leq n$) são os *ângulos internos* do polígono. Portanto, todo polígono com n vértices possui n ângulos internos.



Realizar uma *triangularização* num polígono convexo a partir de um de seus vértices, é traçar todas as diagonais possíveis do polígono que possuem tal vértice como extremidade.



Triangularização feita a partir do vértice A

A triangularização de um polígono convexo a partir de um determinado vértice divide o polígono em $(n - 2)$ triângulos. Como cada triângulo possui a soma das medidas dos ângulos internos igual a 180° , podemos afirmar que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é dada pela expressão

$$s_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Por cada vértice A_i de um polígono convexo temos exatamente dois *ângulos externos*, sendo o primeiro formado pelo segmento $A_i A_{i+1}$ com o prolongamento do lado $A_{i-1} A_i$ no sentido de A_{i-1} para A_i e o segundo, o ângulo oposto pelo vértice ao primeiro. Pelo fato de dois ângulos opostos pelo vértice serem congruentes, daqui por diante iremos considerar apenas um deles quando nos referirmos a um determinado ângulo externo de um polígono.

Sendo α_i e β_i , respectivamente, as medidas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono convexo no vértice A_i , temos que $\alpha_i + \beta_i = 180^\circ$. Usando essa relação para todos os vértices e conhecendo a soma s_n dos ângulos internos deste mesmo polígono, podemos determinar a medida da soma dos ângulos externos, denotada por s_e , de qualquer polígono convexo. Para isso, basta observar que

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) = n \cdot 180^\circ \\ \implies & (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = n \cdot 180^\circ \\ \implies & s_n + s_e = n \cdot 180^\circ \quad \implies \quad (n - 2) \cdot 180^\circ + s_e = n \cdot 180^\circ \\ \implies & n \cdot 180^\circ - 360^\circ + s_e = n \cdot 180^\circ \\ \implies & s_e = 360^\circ. \end{aligned}$$

O resultado acima afirma que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo independe do número de lados do mesmo, fato que não ocorre com a soma dos ângulos internos.

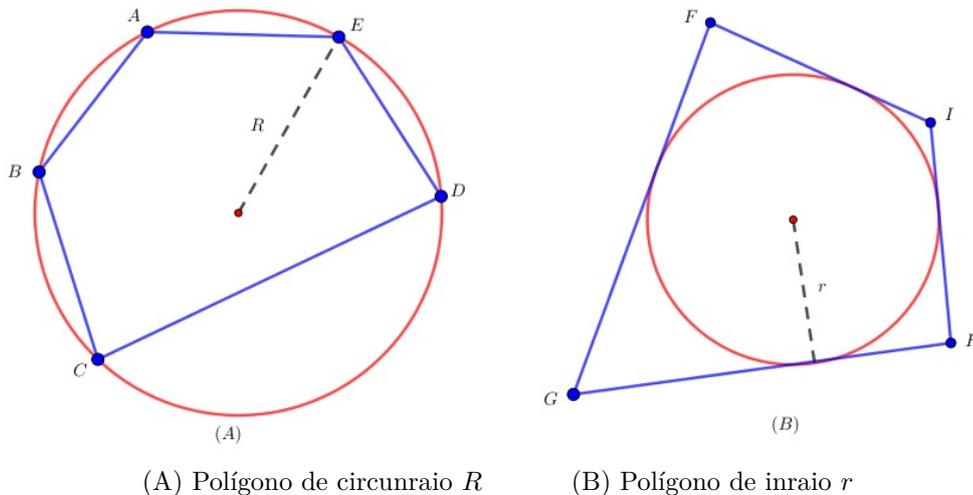
De maneira geral, dizemos que um polígono é um *n-ágono*, em referência a seu número de lados (ou vértices). Recebem destaque, pela frequência em que aparecem, os nomes *pentágono* para $n = 5$, *hexágono* para $n = 6$, *heptágono* para $n = 7$, *octógono* para $n = 8$, *eneágono* para $n = 9$ e *decágono* para $n = 10$. Para $n = 3$ e $n = 4$ usamos os nomes *triângulo* e *quadrilátero*.

Um polígono que possui os lados congruentes é dito *equilátero*. Se possui os ângulos congruentes, será dito *equiângulo*. Um polígono convexo será dito *regular*, sempre que for equilátero e equiângulo.

O *apótema* de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.

Definição 1.1.5. Um polígono será dito *cíclico* ou *inscritível* quando todos os seus vértices pertencerem ao mesmo círculo. Tal círculo será dito circunscrito ao polígono e denominaremos seu centro e raio, respectivamente, como circuncentro e circunraio do mesmo.

Definição 1.1.6. Um polígono será dito *circunscritível*, quando todos os seus lados forem tangentes ao mesmo círculo. Tal círculo será dito inscrito ao polígono e denominaremos seu centro e raio, respectivamente, como incentro e inraio do mesmo.



Neste trabalho, sempre que nos referirmos a um polígono cíclico $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, seus vértices estarão ordenados no sentido anti-horário. Tal polígono também será convexo. Quando o polígono for não-convexo, isso será mencionado.

Alguns resultados sobre triângulos também serão de extrema importância no que segue.

Teorema 1.1.1 (Área do triângulo - Fórmula do Seno). *Se ABC é um triângulo qualquer de área S , tal que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então*

$$S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \widehat{A}.$$

Demonstração. Vamos provar o caso em que ABC é acutângulo. Os demais casos são análogos. Seja h_c a medida da altura relativa ao vértice C do triângulo. A área de ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}c \cdot h_c. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{h_c}{b} \implies h_c = b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}. \quad (2)$$

Com (2) em (1), obtemos

$$S = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{A} \implies S = \frac{1}{2}bc \widehat{\text{sen}} \widehat{A}.$$

Teorema 1.1.2 (Lei dos Senos). *Se ABC é um triângulo cujo circunraio mede R e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então*

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = 2R.$$

Demonstração. Vamos provar o caso em que ABC é acutângulo. Os demais casos são análogos. Sendo h_a e h_b , respectivamente, as medidas das alturas relativas aos vértices A e B , temos que

$$\begin{aligned} h_a = c \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B} = b \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{C} &\implies \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \\ &\text{e} \\ h_b = c \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{A} = a \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{C} &\implies \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}. \quad (3)$$

Se O o circuncentro de ABC e M o ponto médio do lado AC , temos que o ângulo $\angle B$ é ângulo inscrito no arco \widehat{AC} e portanto $\widehat{B} = \frac{\widehat{AOC}}{2} \implies \widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{B}$.

Como o triângulo AOC é isósceles, o triângulo OMC será retângulo em M , de forma que $\widehat{MOC} = \widehat{B}$ e portanto

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \frac{b}{2R} \implies \widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \frac{b}{2R} \implies \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = 2R. \quad (4)$$

Comparando as equações (3) e (4) chegamos ao resultado desejado.

Teorema 1.1.3 (Lei dos Cossenos). *Se ABC é um triângulo qualquer tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

Demonstração. Inicialmente, o pé da altura de um triângulo relativa a um determinado lado é, por definição, o ponto de interseção entre tal altura e a reta suporte de tal lado. Nessas condições, seja P o pé da altura relativa ao lado AC . Vamos separar a demonstração em três casos.

1º caso: $\widehat{A} < 90^\circ$. Neste caso, o ponto P está situado entre os vértices A e C , de forma que no triângulo retângulo BPA temos

$$(\overline{BP})^2 = c^2 - (\overline{AP})^2 \quad \text{e} \quad \overline{AP} = c \cdot \cos \widehat{A}. \quad (5)$$

Por outro lado, no triângulo retângulo BPC , podemos escrever

$$a^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{CP})^2. \quad (6)$$

Usando as relações dadas em (5) na equação (6), obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - (\overline{AP})^2 + (\overline{CP})^2 = c^2 - (\overline{AP})^2 + (b - \overline{AP})^2 \\ &= c^2 - (\overline{AP})^2 + b^2 - 2b \cdot \overline{AP} + (\overline{AP})^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}. \end{aligned}$$

2º caso: $\widehat{A} = 90^\circ$. Neste caso, como $\cos \widehat{A} = 0$, pelo teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

3º caso: $\widehat{A} > 90^\circ$. Neste caso, o vértice A está entre o ponto P e o vértice C . No triângulo retângulo BPA temos que

$$(\overline{BP})^2 = c^2 - (\overline{AP})^2 \quad \text{e} \quad \overline{AP} = c \cdot \cos (180^\circ - \widehat{A}). \quad (7)$$

Por outro lado, para o triângulo retângulo BPC , podemos escrever

$$a^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{CP})^2 \quad \implies \quad a^2 = (\overline{BP})^2 + (b + \overline{AP})^2 \quad \implies$$

$$a^2 = (\overline{BP})^2 + b^2 + 2b \cdot \overline{AP} + (\overline{AP})^2. \quad (8)$$

Usando as relações dadas em (7) na equação (8), obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - (\overline{AP})^2 + b^2 + 2bc \cdot \cos (180^\circ - \widehat{A}) + (\overline{AP})^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot (-\cos \widehat{A}) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}. \end{aligned}$$

2 POLÍGONOS CÍCLICOS

2.1 Triângulos

2.1.1 Concorrência entre segmentos

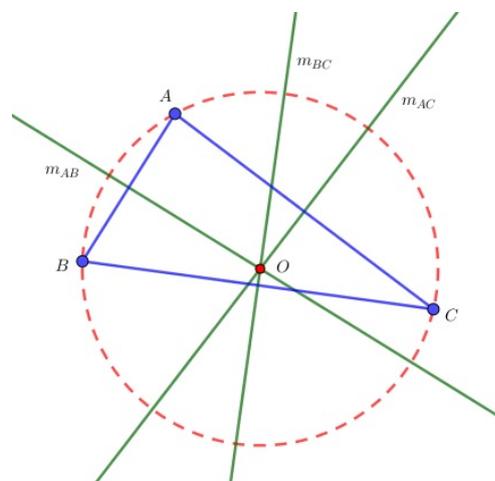
O objetivo desta subseção é mostrar que todo triângulo é cíclico e também circunscritível. Mostraremos também sob quais condições suas três cevianas concorrem num mesmo ponto.

Proposição 2.1.1. *Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto chamado circuncentro do triângulo.*

Demonstração. Seja ABC o referido triângulo e m_{AB}, m_{BC}, m_{AC} as respectivas mediatrizes dos lados AB, BC , e AC . Considere que O seja o ponto onde as mediatrizes m_{AB} e m_{BC} concorrem. Pela caracterização da mediatriz como lugar geométrico, temos que $OA \equiv OB$ e $OB \equiv OC$. Portanto, $OA = OC$, ou seja, o ponto O também pertence à mediatriz m_{AC} .

Proposição 2.1.2. *Todo triângulo é cíclico.*

Demonstração. Seja ABC o triângulo de circuncentro O . Pela proposição anterior, O é o ponto onde as três mediatrizes de ABC concorrem. Portanto O equidista dos vértices A, B, C de forma que, denotando tal distância por R , temos que o círculo de centro O e raio R passa por A, B e C . Existe portanto um único círculo passando por ABC .



Circuncentro O de um triângulo

Reciprocamente, considere o triângulo ABC inscrito num círculo de centro O' . Neste caso, as distâncias de O' até os vértices do triângulo são iguais. Conseqüentemente,

O' deve ser o ponto onde as três mediatrizes de ABC concorrem, ou seja, O' é o circuncentro O de tal triângulo. O raio do círculo, sendo a distância de O aos vértices é igual a R .

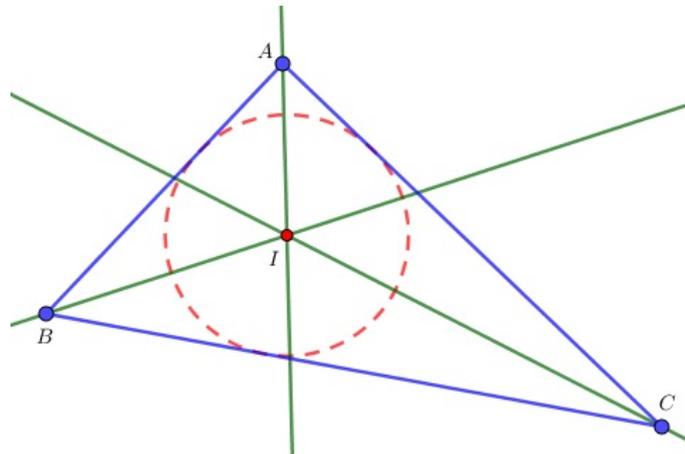
Proposição 2.1.3. *Em todo triângulo, suas bissetrizes internas concorrem em um único ponto chamado incentro do triângulo.*

Demonstração. Seja ABC o referido triângulo e sejam r, s e t as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A, \angle B$ e $\angle C$, respectivamente. Considere que o ponto I é o ponto de interseção das bissetrizes r e s . Pela caracterização da bissetriz como lugar geométrico, temos que $d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC)$ e portanto, I deve pertencer à bissetriz t . Assim, tais bissetrizes concorrem no único ponto I

Proposição 2.1.4. *Todo triângulo é circunscritível.*

Demonstração. Seja ABC o triângulo de incentro I . Como I é interseção das bissetrizes internas de ABC , temos que I equidista dos lados do mesmo. Tomando a distância de I até os lados igual a r , temos que o círculo de centro I e raio r é inscrito no triângulo ABC e é único.

Reciprocamente, consideremos um círculo de centro I e raio r inscrito no triângulo ABC . O centro I equidista r dos lados do triângulo e portanto, I é incentro de ABC .



Incentro I de um triângulo

Uma *ceviana* de um triângulo, é qualquer segmento que ligue um determinado vértice à reta suporte do respectivo lado oposto. Neste caso, a outra extremidade é chamada *pé da ceviana*. São exemplos de cevianas as três alturas (neste caso, tal ceviana é perpendicular à referida reta suporte), as três bissetrizes internas ou externas e as três medianas.

A seguir daremos a condição para que as três cevianas de um triângulo concorram num determinado ponto. Tal resultado é conhecido como Teorema de Ceva, devido ao

matemático italiano dos séculos XVII e XVIII Giovanni Ceva. Primeiro, vamos mostrar os dois seguintes lemas.

Lema 2.1.1. *Qualquer ceviana de um triângulo, divide o lado oposto na mesma razão em que divide a área do triângulo.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que AP é uma ceviana do triângulo ABC relativa ao vértice A . Consideremos ainda que as áreas dos triângulos ABP e APC são dadas, respectivamente, por S_{ABP} e S_{APC} .

Seja h a medida da altura de ABC , temos que

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BP} \cdot h \quad \text{e} \quad S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot h.$$

$$\implies \frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BP} \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot \overline{PC} \cdot h} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.$$

Lema 2.1.2. *Seja ABC um triângulo tal que AP é ceviana relativa ao vértice A . Se $E \in AP$, então*

$$\frac{S_{ABE}}{\overline{BE}} = \frac{S_{AEC}}{\overline{CE}}.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, se tivermos um ponto $E \in AP$, temos que

$$\frac{S_{ABP}}{\overline{BP}} = \frac{S_{APC}}{\overline{PC}} \quad \text{e} \quad \frac{S_{EBP}}{\overline{BP}} = \frac{S_{EPC}}{\overline{PC}}.$$

Por outro lado, $S_{ABE} = S_{ABP} - S_{EBP}$.

$$\implies \frac{S_{ABE}}{\overline{BE}} = \frac{S_{ABP}}{\overline{BP}} - \frac{S_{EBP}}{\overline{BP}}$$

$$= \frac{S_{APC}}{\overline{PC}} - \frac{S_{EPC}}{\overline{PC}}$$

$$= \frac{S_{APC} - S_{EPC}}{\overline{PC}}$$

$$\implies \frac{S_{ABE}}{\overline{BE}} = \frac{S_{AEC}}{\overline{CE}}.$$

Teorema 2.1.3 (Teorema de Ceva). *As três cevianas de um triângulo ABC são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1,$$

onde P, Q e R são, respectivamente, os pés de tais cevianas relativas aos lados BC, AC e AB .

Demonstração. Seja E o ponto onde tais cevianas concorrem. Pelo segundo lema anterior, temos que

$$\frac{S_{ABE}}{\overline{BP}} = \frac{S_{AEC}}{\overline{PC}} \implies \frac{S_{ABE}}{S_{AEC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.$$

Da mesma forma podemos escrever

$$\frac{S_{BCE}}{S_{ABE}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \quad \text{e} \quad \frac{S_{AEC}}{S_{BCE}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}.$$

Multiplicando tais relações, membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABE}}{S_{AEC}} \cdot \frac{S_{BCE}}{S_{ABE}} \cdot \frac{S_{AEC}}{S_{BCE}} &= \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \\ \implies \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} &= 1. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1.$$

Seja W o ponto onde as cevianas CR e AP concorrem. Tracemos a ceviana BQ' passando por W . Já provamos que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ'}}{\overline{Q'A}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1.$$

Comparando com nossa hipótese inicial e lembrando a propriedade para proporções

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d},$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CQ'}}{\overline{Q'A}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} &\implies \frac{\overline{CQ'}}{\overline{CQ'} + \overline{Q'A}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CQ} + \overline{QA}} \\ \implies \frac{\overline{CQ'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} &\implies \overline{CQ'} = \overline{CQ} \end{aligned}$$

$$\implies Q' = Q.$$

Logo, as três cevianas concorrem num mesmo ponto W .

2.1.2 Área de um triângulo em função dos lados (Fórmula de Heron)

Heron de Alexandria, matemático e mecânico grego, deu diversas contribuições à Matemática e Mecânica. Há muita controvérsia a respeito da época exata em que ele viveu, havendo estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Em Mecânica, seus trabalhos se preocupavam em descrever aparelhos mecânicos engenhosos, entre eles, máquinas de guerras.



Uma possível imagem de Heron retirada do site wikipedia.org

Dos trabalhos geométricos de Heron, o mais importante é sua “A Métrica”, em três livros que segundo [EVES, 2004], só foi descoberta em Constantinopla no ano de 1896, por R.Schone. O Livro I ocupa-se da medida da área de diversas superfícies como triângulos, quadriláteros diversos, polígonos regulares desde o triângulo equilátero até o dodecágono regular, círculos, elipses, segmentos parabólicos, superfícies de cilindros, cones, esferas e zonas esféricas. É nesse livro que se encontra a famosa fórmula para a área de um triângulo em função dos três lados, cuja demonstração é reproduzida nas páginas 31 e 32 de [HELLMEISTER, 2013]. Também nesse livro, Heron apresenta um método para o cálculo aproximado da raiz quadrada de um inteiro que não é quadrado perfeito. Tal método consiste em supor que se $n = ab$, então $\frac{a+b}{2}$ é uma aproximação de \sqrt{n} tão boa quanto for a proximidade de a e b . Esse método permite sucessivas aproximações onde, se a_1 é a primeira aproximação de \sqrt{n} , então

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2}$$

é uma aproximação melhor, e

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{n}{a_2}}{2}$$

é ainda melhor, e assim sucessivamente.

Por exemplo, se $n = 14$, temos $n = 2 \cdot 7$ e portanto $a_1 = \frac{2+7}{2} = 4,5$ é nossa primeira aproximação para $\sqrt{14}$. Continuando, temos que

$$a_2 = \frac{4,5 + \frac{14}{4,5}}{2} \cong 3,80556 \quad , \quad a_3 = \frac{3,80556 + \frac{14}{3,80556}}{2} \cong 3,74219 \quad , \dots$$

Neste caso, como $\sqrt{14} \cong 3,74165$ temos que tal método é de fato eficiente.

Sobre os outros dois livros, o Livro II ocupa-se em medir volumes de cilindros, cones, troncos de cones, paralelepípedos, prismas, pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros, entre outros sólidos, enquanto que o Livro III se preocupa com problemas de divisões de áreas e volumes em partes, respeitando uma certa razão dada.

A seguir, apresentamos a fórmula da área de um triângulo em função de seus lados, conhecida na literatura como Fórmula de Heron.

Teorema 2.1.4 (Fórmula de Heron). *Se ABC é um triângulo qualquer de área S , semi-perímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demonstração. Com as notações dadas e utilizando a fórmula do seno para a área de um triângulo (Teorema 1.1.1), a área do triângulo ABC pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \widehat{B}.$$

Fazendo $\widehat{B} = \alpha$ na relação acima, obtemos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2S}{ac}. \tag{9}$$

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos (Teorema 1.1.3) ao triângulo ABC , temos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha.$$

$$\implies 2ac \cos \alpha = a^2 + c^2 - b^2 \implies$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \quad (10)$$

Substituindo (9) e (10) na relação fundamental $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2 + \left(\frac{2S}{ac} \right)^2 = 1. \\ \implies & \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} + \frac{4S^2}{a^2c^2} = 1 \\ \implies & (a^2 + c^2 - b^2)^2 + 16S^2 = 4a^2c^2 \\ \implies & 16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 \\ & = (2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2) \\ & = [b^2 - (a - c)^2] [(a + c)^2 - b^2] \\ \implies & 16S^2 = (b + a - c)(b - a + c)(a + c + b)(a + c - b). \end{aligned}$$

Finalmente, dividindo ambos os membros por 16 e reescrevendo de forma conveniente, chegamos em

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{(a + b + c)}{2} \cdot \frac{(b + c - a)}{2} \cdot \frac{(a + c - b)}{2} \cdot \frac{(a + b - c)}{2} \\ &= s(s - a)(s - b)(s - c) \\ \implies & S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}. \end{aligned}$$

2.1.3 Circunraio de um triângulo em função dos lados

O objetivo desta subseção é encontrar uma fórmula que nos permita calcular o circunraio de um triângulo qualquer em função de seus lados. Para isso, consideremos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.5 (Circunraio em função dos lados). *Seja ABC um triângulo qualquer de semiperímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se R é a medida de seu circunraio, então*

$$R = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Demonstração. Utilizando a fórmula do seno para área de triângulos (Teorema 1.1.1), a área do triângulo ABC pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \widehat{B}. \quad (11)$$

Por outro lado, aplicando a lei dos senos (Teorema 1.1.2) ao triângulo ABC , temos que

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = 2R \quad \implies \quad \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{2R}. \quad (12)$$

Com (12) em (11), vem que

$$S = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \frac{b}{2R} \quad \implies \quad S = \frac{abc}{4R} \quad \implies \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Usando a fórmula de Heron (Teorema 2.1.4) no triângulo ABC , podemos escrever

$$R = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

2.1.4 Inraio de um triângulo em função dos lados

Aqui, iremos apresentar uma fórmula que nos permitirá calcular o inraio de qualquer triângulo em função de seus lados. Antes, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.1.6. *Se ABC é um triângulo qualquer de área S , semiperímetro s e inraio r , então*

$$S = s \cdot r.$$

Demonstração. Suponhamos que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Nessas condições, sendo I o incentro do triângulo ABC , temos que os triângulos AIB , BIC e AIC , ambos com altura medindo r , particionam ABC de forma que

$$S_{AIB} + S_{BIC} + S_{AIC} = S.$$

$$\implies S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \cdot r = s \cdot r.$$

Teorema 2.1.7 (Inraio em função dos lados). *Seja ABC um triângulo qualquer de semiperímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se r é a medida de seu inraio, então*

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, podemos escrever para o triângulo ABC de área S ,

$$S = s \cdot r \implies r = \frac{S}{s}.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Heron (Teorema 2.1.4) no triângulo ABC , obtemos

$$\begin{aligned} r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} &\implies r = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} \\ &\implies r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \end{aligned}$$

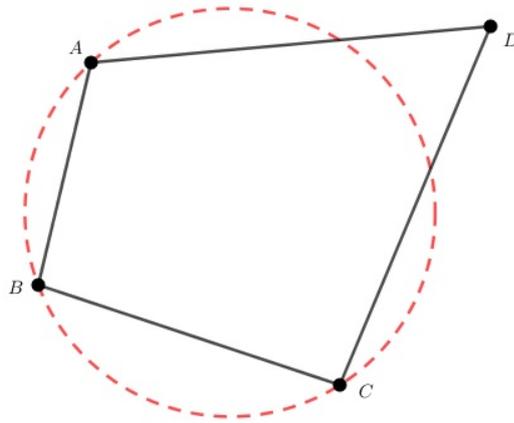
2.2 Quadriláteros

2.2.1 Condições para um quadrilátero ser cíclico

Ao contrário dos triângulos, nem todo quadrilátero é cíclico ou circunscritível. O objetivo desta subseção é apresentar sob quais condições um determinado quadrilátero convexo é cíclico. Precisaremos utilizar em nossos argumentos, o teorema do ângulo externo para triângulos. Tal resultado, bastante conhecido na educação básica, pode ser encontrado nas páginas 40 e 41 de [NETO, 2013].

Proposição 2.2.1. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é cíclico se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita:*

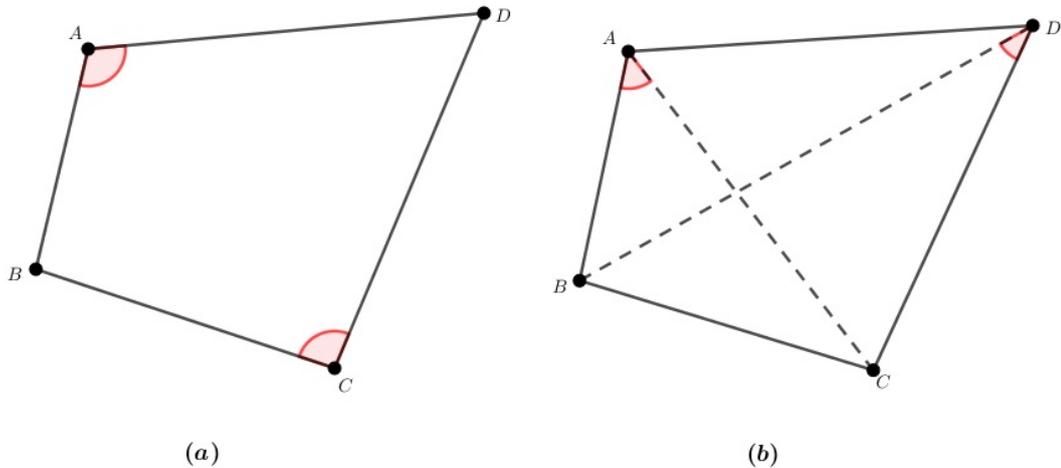
- (a) $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$.
- (b) $B\hat{A}C = B\hat{D}C$.



Exemplo de quadrilátero convexo não-cíclico

Demonstração. Supondo que $ABCD$ seja cíclico, pela definição de ângulo inscrito (Definição 1.1.3), temos que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ pois tais ângulos compreendem o mesmo arco \widehat{BC} . Temos ainda que

$$D\widehat{AB} + B\widehat{CD} = \frac{m(\widehat{BCD})}{2} + \frac{m(\widehat{DAB})}{2} = \frac{m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{DAB})}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$



Condições para que um determinado quadrilátero convexo seja cíclico

Reciprocamente, se $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \alpha$, então A e D estão situados sobre o mesmo arco capaz de α sobre BC . Daí, o círculo que contém tal arco capaz circunscreve $ABCD$.

Agora, vamos considerar que $D\widehat{AB} + B\widehat{CD} = 180^\circ$.

Seja Γ o círculo que circunscreve o triângulo ABD . Se o vértice C não pertence a tal círculo, tomemos o ponto E diferente dos pontos B e C tal que E seja a interseção da reta \overleftrightarrow{BC} com Γ .

Como $ABED$ é cíclico, segue pela primeira parte da demonstração que

$$D\widehat{AB} + B\widehat{ED} = 180^\circ = D\widehat{AB} + B\widehat{CD} \implies B\widehat{ED} = B\widehat{CD},$$

que é absurdo, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo CED .

Portanto, C pertence ao círculo Γ e $ABCD$ é cíclico.

Da proposição acima, seguem os seguintes corolários.

Corolário 2.2.1. *Todo retângulo é cíclico.*

Corolário 2.2.2. *Todo trapézio isósceles é cíclico.*

2.2.2 Diagonais de um quadrilátero cíclico convexo em função dos lados

Para calcularmos as medidas das diagonais de um quadrilátero cíclico, precisaremos de dois resultados fundamentais conhecidos na literatura como os dois primeiros teoremas de Ptolomeu.



Uma possível imagem de Ptolomeu retirada de [NETO, 2013]

Cláudio Ptolomeu (90 d.C. - 168) de Alexandria, matemático e astrônomo grego do século II d.C., deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana. Como astrônomo, Ptolomeu propôs a Teoria Geocêntrica segundo a qual a Terra ocuparia o centro do Universo. Essa teoria foi aceita como um dogma pela igreja católica por cerca de 1400 anos, tendo sido a responsável pelo julgamento de Galileu Galilei no Tribunal da Santa Inquisição.

Seu tratado é composto de treze livros. O livro I contém a famosa proposição geométrica conhecida na literatura como o Primeiro Teorema de Ptolomeu: “Num quadrilátero cíclico convexo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos”. O livro II considera fenômenos que dependem da esfericidade da

Terra. Os livros III, IV e V desenvolvem o sistema astronômico geocêntrico por meio de epiciclos. No livro VI, em que é dada a teoria dos eclipses, encontra-se uma aproximação para o valor de π , com quatro casas decimais. Os livros VII e VIII dedicam-se a apresentar um catálogo de 1028 estrelas fixas. Os demais livros ocupam-se dos planetas. Seu tratado se tornou referência até os tempos de Copérnico e Kepler. Ptolomeu escreveu ainda sobre mapas, por meio de projeções, óptica e música.

Teorema 2.2.3 (Primeiro Teorema de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico convexo, então*

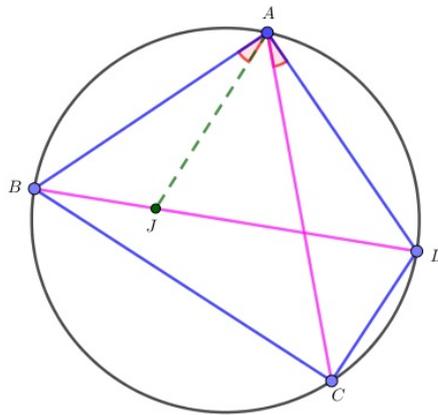
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Demonstração. Inicialmente, tomemos um ponto J sobre a diagonal BD tal que $\widehat{BAJ} = \widehat{CAD}$. Como $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, pois ambos são ângulos inscritos ao arco \widehat{AD} , temos que os triângulos ABJ e ACD são semelhantes pelo caso de semelhança (AA). Daí, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{CD}} \implies \overline{AC} \cdot \overline{BJ} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}. \quad (13)$$

Por outro lado, nos triângulos DAJ e CAB , temos que $\widehat{DAJ} = \widehat{CAB}$ por construção e $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, pois ambos são ângulos inscritos ao arco AB . Mas $\widehat{ADB} = \widehat{ADJ}$ e portanto, tais triângulos são semelhantes pelo caso (AA). Daí segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{JD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \implies \overline{AC} \cdot \overline{JD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}. \quad (14)$$



Primeiro teorema de Ptolomeu

Somando, membro a membro, as equações (13) e (14), vem que

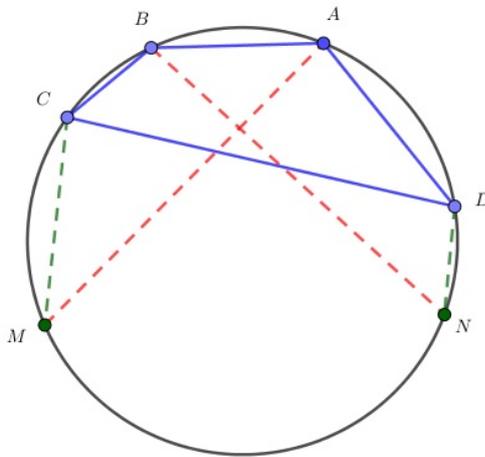
$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BJ} + \overline{AC} \cdot \overline{JD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ \implies \overline{AC} (\overline{BJ} + \overline{JD}) &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \end{aligned}$$

$$\implies \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Teorema 2.2.4 (Segundo Teorema de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico convexo, então*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CD} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}}.$$

Demonstração. Vamos supor inicialmente, que os vértices do quadrilátero estejam dispostos no sentido anti-horário. Agora marquemos os pontos M e N , respectivamente, sobre o arco \widehat{CD} que não contém os vértices A e B , e de forma que $\overline{CM} = \overline{AD}$ e $\overline{ND} = \overline{BC}$.



Segundo teorema de Ptolomeu

Nos triângulos BCM e ADN temos que $\overline{BC} = \overline{DN}$, $\overline{CM} = \overline{AD}$ e $\widehat{C} = \widehat{D}$, pois tais ângulos são ângulos inscritos em arcos congruentes, pois $\widehat{BM} = \widehat{AN}$ por construção. Daí segue que tais triângulos são congruentes pelo caso (LAL) e portanto, $\overline{BM} = \overline{AN}$. Com argumento análogo, mostra-se que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CD}$. Aplicando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3) aos quadriláteros $ABCM$ e $ABND$, temos que

$$\overline{BM} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AM} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{AN} \cdot \overline{BD} = \overline{BN} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{DN}.$$

Dividindo ambos os membros da primeira relação pelos da segunda, obtemos

$$\begin{aligned} \implies \frac{\overline{BM} \cdot \overline{AC}}{\overline{AN} \cdot \overline{BD}} &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM} + \overline{CM} \cdot \overline{AB}}{\overline{BN} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{ND}} \\ \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{CD} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}}. \end{aligned}$$

Tendo em mãos os dois teoremas acima, podemos obter uma fórmula fechada para

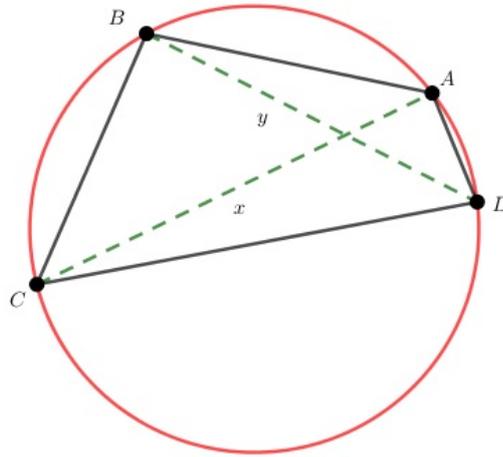
as diagonais de um quadrilátero cíclico convexo. Veremos que tal fórmula depende apenas dos lados do mesmo.

Teorema 2.2.5 (Diagonais em função dos lados). *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$. Se x e y denotam, respectivamente, as medidas das diagonais AC e BD , então*

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(bc + ad)}{cd + ab}} \quad e \quad y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(cd + ab)}{bc + ad}}.$$

Demonstração. Aplicando o segundo teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.4) ao quadrilátero $ABCD$ temos, com as notações dadas, que

$$\frac{x}{y} = \frac{bc + ad}{cd + ab}. \quad (15)$$



Diagonais de um quadrilátero cíclico convexo

Multiplicando ambos os membros da relação acima por xy , chegamos à expressão

$$xy \cdot \frac{x}{y} = xy \cdot \frac{bc + ad}{cd + ab}$$

que nos permite, utilizando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3), escrever

$$\implies x^2 = (ac + bd) \cdot \frac{(bc + ad)}{(cd + ab)}$$

$$\implies x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(bc + ad)}{cd + ab}}.$$

De modo análogo, partindo do inverso de (15), obtemos

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(cd + ab)}{bc + ad}}.$$

2.2.3 Área de um quadrilátero cíclico convexo em função dos lados (Fórmula de Brahmagupta)

A fórmula para calcular a área de um quadrilátero convexo qualquer é atribuída, segundo [COOLIDGE, 1939], ao matemático alemão Carl Anton Bretschneider (1808-1878).

Bretschneider trabalhou em geometria, teoria dos números e história da geometria. Foi um dos primeiros matemáticos a usar o símbolo da constante de Euler quando publicou seu artigo [BRETSCHNEIDER, 1837] em 1837.

Teorema 2.2.6 (Fórmula de Bretschneider). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de área S , semiperímetro s e tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$. Se α e β são as medidas de dois ângulos internos opostos quaisquer de $ABCD$, então*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}.$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha = \widehat{A}$ e $\beta = \widehat{C}$. Sendo x a medida da diagonal BD , temos que os triângulos ABD e BCD particionam o quadrilátero $ABCD$ de forma que

$$S = S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Pela fórmula do seno para área de triângulos (Teorema 1.1.1), temos que

$$S = \frac{1}{2}ad \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \beta.$$

$$\implies 2 \cdot S = ad \operatorname{sen} \alpha + bc \operatorname{sen} \beta$$

$$\implies (2 \cdot S)^2 = (ad \operatorname{sen} \alpha + bc \operatorname{sen} \beta)^2 \implies$$

$$4 \cdot S^2 = (ad \operatorname{sen} \alpha)^2 + (bc \operatorname{sen} \beta)^2 + 2abcd \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \quad (16)$$

Por outro lado, aplicando a lei dos Cossenos (Teorema 1.1.3) aos triângulos ABD e BCD , temos que

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \quad \text{e} \quad x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta.$$

$$\implies a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta$$

$$\implies \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad \cos \alpha - bc \cos \beta.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, podemos escrever

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = (ad \cos \alpha)^2 + (bc \cos \beta)^2 - 2abcd \cos \alpha \cos \beta. \quad (17)$$

Somando as equações (16) e (17), utilizando a identidade $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 4 \cdot S^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \beta) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd - 2abcd \cos(\alpha + \beta) \\ &= (ad + bc)^2 - 2abcd [1 + \cos(\alpha + \beta)] \\ &= (ad + bc)^2 - 4abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \end{aligned}$$

pois também vale a identidade $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$. Em nosso caso, $\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

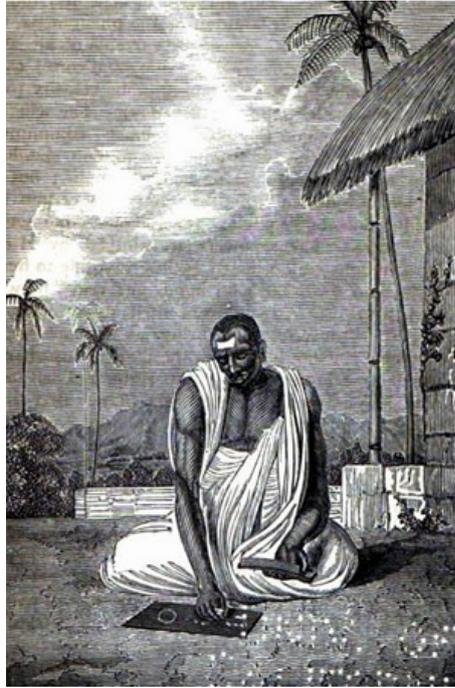
$$\begin{aligned} \implies 16 \cdot S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4(ad + bc)^2 - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ \implies 16 \cdot S^2 &= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ &= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ \implies 16 \cdot S^2 &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por 16 e arrumando os termos de forma conveniente, temos que

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{(b + c + d - a)}{2} \cdot \frac{(a + c + d - b)}{2} \cdot \frac{(a + b + d - c)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - d)}{2} - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ &= (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\implies S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}.$$

Um corolário importante da fórmula de Bretschneider é a fórmula de Brahmagupta para quadriláteros cíclicos convexos.



Uma possível imagem de Brahmagupta retirada do site wikipedia.org

Brahmagupta (568 d.C. - 665) foi um matemático e astrônomo indiano. Viveu e trabalhou no centro astronômico de Ujjain, na Índia Central. Em 628, escreveu a obra *Brahmasphutasiddhanta* “o sistema de Brahma revisado”, um trabalho de astronomia em vinte e um capítulos, dos quais o 12º e o 18º se ocupam de matemática. Nessa obra, ele fornece a primeira solução geral para a equação quadrática $ax^2 + bx = c$, que é equivalente a

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Corolário 2.2.7 (Fórmula de Brahmagupta). *Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico convexo de área S , semiperímetro s e tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$, então*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Demonstração. Se $ABCD$ um quadrilátero cíclico convexo, então seus ângulos opostos são suplementares, ou seja, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Pela fórmula de Bretschneider (Teorema 2.2.6) temos que

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 (90^\circ)}.$$

Como $\cos(90^\circ) = 0$, segue que

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Observe, que se fizermos $d = 0$, a fórmula de Brahmagupta se reduz à fórmula de Heron para triângulos.

2.2.4 Circunraio de um quadrilátero convexo em função dos lados

Agora que já temos uma fórmula fechada para a área de um quadrilátero cíclico convexo, vamos obter uma fórmula para a medida do circunraio do mesmo.

Teorema 2.2.8 (Circunraio em função dos lados). *Se $ABCD$ é um quadrilátero cíclico convexo de área S , circunraio R e tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$, então*

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}.$$

Demonstração. Traçando a diagonal AC de medida l , a fórmula para o cálculo das diagonais (Teorema 2.2.5), nos dá

$$l = \sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}. \quad (18)$$

Por outro lado, os triângulos ABC e ACD particionam o quadrilátero $ABCD$ de forma que, pela fórmula do circunraio de um triângulo (Teorema 2.1.5), podemos escrever

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{abl}{4R} + \frac{cdl}{4R} \implies \\ S &= \frac{(ab+cd)}{4R} \cdot l. \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19) obtemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{(ab+cd)}{4R} \cdot \sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}} \\ &= \frac{1}{4R} \cdot \sqrt{\frac{(ab+cd)^2 (ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}} \\ \implies S &= \frac{1}{4R} \cdot \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bs)} \implies \end{aligned}$$

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4S}.$$

Repare que R depende apenas das medidas dos lados do quadrilátero já que pela fórmula de Brahmagupta (Corolário 2.2.7), S é uma função dos lados do mesmo. Fazendo $d = 0$ na expressão cima, obtemos

$$R = \frac{\sqrt{ab \cdot ac \cdot bc}}{4S} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 c^2}}{4S} = \frac{abc}{4S},$$

que é exatamente a medida do circunraio de um triângulo cujos lados medem a, b e c , conforme o Teorema 2.1.5.

2.2.5 Condições para um quadrilátero ser circunscritível

O objetivo desta subseção é apresentar sob quais condições um determinado quadrilátero convexo é circunscritível. Antes, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.2.9. *Seja Γ um círculo de raio r e centro O . Considere um ponto P exterior a Γ . Se T_1 e T_2 são pontos de Γ tais que PT_1 e PT_2 são tangentes a Γ , então $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$.*

Demonstração. Como os segmentos PT_1 e PT_2 são ambos tangentes a Γ , temos que $OT_1 \perp PT_1$ e $OT_2 \perp PT_2$. Mais ainda, $\overline{OT_1} = \overline{OT_2} = r$. Como O equidista de PT_1 e PT_2 , temos que OP é bissetriz do ângulo $\angle T_1 P T_2$. Portanto, $\widehat{OPT_1} = \widehat{OPT_2}$.

Podemos concluir então que os triângulos OPT_1 e OPT_2 são congruentes pelo caso (LAA_o) e conseqüentemente, $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$.

Teorema 2.2.10 (Teorema de Pitot). *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos forem iguais.*

Demonstração. Primeiro, consideremos que $ABCD$ é circunscritível. Sejam P, Q, R e S , respectivamente, os pontos de tangência do círculo inscrito no quadrilátero com os lados AB, BC, CD, AD . Pelo lema anterior, temos que $\overline{AP} = \overline{AS}$, $\overline{BP} = \overline{BQ}$, $\overline{CQ} = \overline{CR}$ e $\overline{DR} = \overline{DS}$. Conseqüentemente,

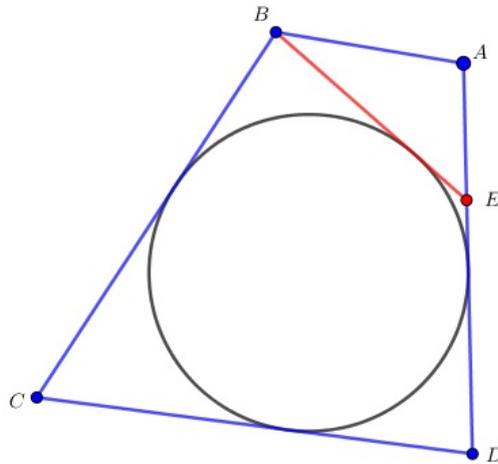
$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CR} + \overline{DR} \\ &= \overline{AS} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DS} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{AS} + \overline{DS} \\
 &= \overline{BC} + \overline{AD}.
 \end{aligned}$$

Reciprocamente, consideremos que $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$. Vamos admitir que $ABCD$ não é circunscritível. Neste caso, temos dois casos a considerar.

1º caso: O segmento AB não intersecta tal círculo. Neste caso, traçamos o segmento BE tangente ao círculo. Como o quadrilátero $EBCD$ é circunscritível, já mostramos que

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{ED}. \quad (20)$$



Recíproca do Teorema de Pitot - 1º caso

Por outro lado, por hipótese temos que

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} \implies$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{ED} + \overline{AE}. \quad (21)$$

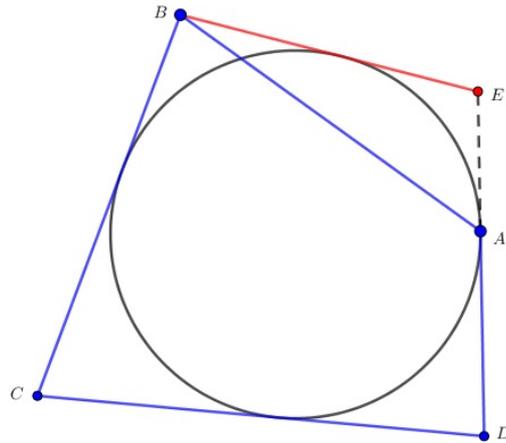
Com (20) em (21), temos

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EB} + \overline{CD} + \overline{AE}$$

$$\implies \overline{AB} = \overline{EB} + \overline{AE}$$

que é absurdo pois contradiz a desigualdade triangular no triângulo ABE .

2º caso: O segmento AB é secante ao círculo. Neste caso, traçamos o ponto E sobre a reta \overleftrightarrow{AD} tal que BE seja tangente ao círculo.



Recíproca do Teorema de Pitot - 2º caso

Como $EBCD$ é circunscritível, temos que

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{ED} \implies$$

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{EA} + \overline{AD}. \quad (22)$$

Por outro lado, por hipótese temos que

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}. \quad (23)$$

Com (23) em (22), temos que

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EA}$$

$$\implies \overline{EB} = \overline{AB} + \overline{EA},$$

que é absurdo pois contradiz a desigualdade triangular para o triângulo ABE .

Portanto, $ABCD$ é circunscritível.

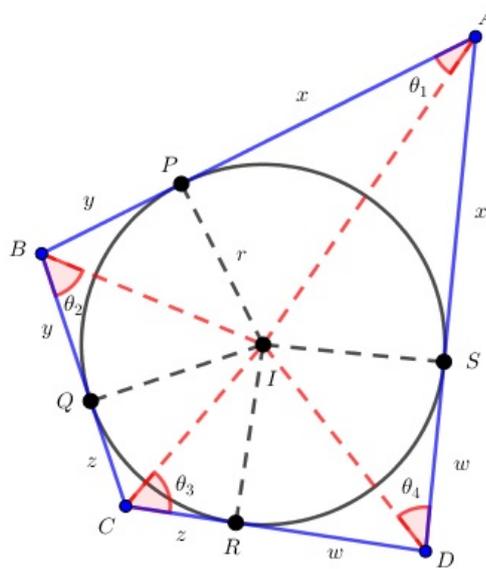
2.2.6 Inraio de um quadrilátero convexo em função dos segmentos tangentes

Nesta seção, iremos apresentar a fórmula para calcular o inraio de um quadrilátero convexo circunscritível. Veremos que tal fórmula não depende apenas das medidas dos lados de tal quadrilátero.

Teorema 2.2.11 (Inraio em função dos segmentos tangentes). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo circunscritível tal que P, Q, R e S são os respectivos pontos de tangência dos lados AB, BC, CD e DA com seu círculo inscrito, cujo raio mede r . Se $\overline{AP} = x$, $\overline{BQ} = y$, $\overline{CR} = z$ e $\overline{DS} = w$, então*

$$r = \sqrt{\frac{xyz + xyw + xzw + yzw}{x + y + z + w}}.$$

Demonstração. Seja I o incentro do quadrilátero $ABCD$. Como I equidista r dos lados do respectivo quadrilátero, temos que as retas \overleftrightarrow{AI} , \overleftrightarrow{BI} , \overleftrightarrow{CI} e \overleftrightarrow{DI} são bissetrizes internas dos ângulos $\angle A, \angle B, \angle C$ e $\angle D$, respectivamente.



Cálculo do inraio de um quadrilátero convexo

Fazendo $\widehat{A} = 2\theta_1$, $\widehat{B} = 2\theta_2$, $\widehat{C} = 2\theta_3$ e $\widehat{D} = 2\theta_4$, uma vez que

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

temos que

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \operatorname{tg}[(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_3 + \theta_4)]$$

$$\implies \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{tg}(\theta_3 + \theta_4)}{1 - \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \operatorname{tg}(\theta_3 + \theta_4)}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2} + \frac{\operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4}{1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4}}{1 - \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4}{1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4}}$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)(1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4) + (\operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4)(1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2)}{(1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2)(1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4)} \\ = \frac{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)(1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4) - (\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)(\operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4)}{(1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2)(1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_3 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_4}{1 - \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 - \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 - \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 - \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_4} \\
&= \frac{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_4) - (\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4)}{1 - (\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_4 + \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4) + (\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \theta_4)}.
\end{aligned}$$

Para o próximo passo, precisaremos do conceito de funções simétricas. Tal conceito pode ser encontrado no apêndice do capítulo 7 de [FIGUEIREDO, 2011].

De posse deste conceito, fazendo $a_i = \operatorname{tg} \theta_i$, com $1 \leq i \leq 4$, podemos compactar a expressão anterior utilizando as funções simétricas elementares

$$\sigma_1 = \sum a_i, \quad \sigma_2 = \sum a_i a_j, \quad \sigma_3 = \sum a_i a_j a_k, \quad \text{e} \quad \sigma_4 = a_i a_j a_k a_l,$$

com $i < j < k < l$ e assim obtendo

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 - \sigma_2 + \sigma_4}.$$

Por outro lado, como $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 180^\circ$, temos que $\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0$ de forma que $\sigma_1 = \sigma_3$. Pelo fato de $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{r}{x}$, $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{r}{y}$, $\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{r}{z}$ e $\operatorname{tg} \theta_4 = \frac{r}{w}$, podemos escrever

$$\frac{r}{x} + \frac{r}{y} + \frac{r}{z} + \frac{r}{w} = \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{z} + \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{w} + \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{z} \cdot \frac{r}{w} + \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{z} \cdot \frac{r}{w}.$$

$$\implies r \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right) = r^3 \left(\frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyw} + \frac{1}{xzw} + \frac{1}{yzw} \right)$$

$$\implies \frac{yzw + xzw + xyw + xyz}{xyzw} = r^2 \cdot \frac{x^2 y^2 z^2 w^3 + x^2 y^2 z^3 w^2 + x^2 y^3 z^2 w^2 + x^3 y^2 z^2 w^2}{x^3 y^3 z^3 w^3}$$

$$\frac{xyz + xyw + xzw + yzw}{xyzw} = r^2 \cdot \frac{x^2 y^2 z^2 w^2 \cdot (x + y + z + w)}{x^3 y^3 z^3 w^3}$$

$$\implies r^2 = \frac{xyz + xyw + xzw + yzw}{x + y + z + w}$$

$$\implies r = \sqrt{\frac{xyz + xyw + xzw + yzw}{x + y + z + w}}.$$

2.3 Generalizações

2.3.1 Polígonos cíclicos e circunscritíveis

Vimos na seção anterior que nem sempre um quadrilátero convexo é cíclico ou circunscritível. O mesmo ocorre de forma geral, ou seja, um polígono convexo nem sempre terá tais propriedades. As condições para que um determinado polígono convexo seja cíclico ou circunscritível são dadas pelas duas proposições a seguir.

Proposição 2.3.1. *Um polígono convexo é cíclico se, e somente se, as mediatrizes dos seus lados concorrem em um único ponto. O círculo que circunscreve tal polígono é único.*

Demonstração. Vamos considerar inicialmente que tal polígono está inscrito num círculo de centro O . Neste caso, as distâncias de O até os vértices do polígono são iguais e conseqüentemente, O é o ponto onde as mediatrizes do polígono concorrem.

Reciprocamente, consideremos agora que as mediatrizes dos lados do polígono concorrem no ponto O . Pela caracterização da mediatriz como lugar geométrico, as distâncias de O até os vértices são iguais e portanto, sendo tais distâncias iguais a R , temos que existe um único círculo de centro O e raio R que circunscreve tal polígono.

Proposição 2.3.2. *Um polígono convexo é circunscritível se, e somente se, as bissetrizes internas de seus ângulos concorrem num mesmo ponto. O círculo que tal polígono circunscreve é único.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que existe um círculo de centro I e raio r tangente aos lados do polígono. Sejam A, B, C três vértices consecutivos quaisquer do polígono e P, Q os pontos de tangência do círculo com os lados AB e BC , respectivamente.

Nos triângulos IPB e IQB temos, pela propriedade dos segmentos tangentes a um círculo (Lema 2.2.9), que $\overline{PB} = \overline{QB}$. Temos ainda que $\overline{IP} = \overline{IQ} = r$, e $\widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$. Portanto, tais triângulos são congruentes pelo caso (LAL). Conseqüentemente, $\widehat{PBI} = \widehat{IBQ}$, ou seja, BI é bissetriz do ângulo interno $\angle B$.

Como a escolha dos vértices foi arbitrária, temos que I pertence a todas as bissetrizes internas do polígono, ou seja, tais bissetrizes concorrem num único ponto I .

Reciprocamente, vamos admitir que todas as bissetrizes internas do polígono concorrem num único ponto I . Pela caracterização da bissetriz como lugar geométrico, temos que I deve equidistar dos lados do polígono. Denotando por r tais medidas, temos um círculo de centro I e raio r que tangencia internamente o polígono. Como I e r estão bem definidos, tal círculo é único.

Como consequência das proposições acima, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.1. *Todo polígono convexo regular é cíclico e circunscritível.*

Considerando que O e I são, respectivamente os centros dos círculos circunscrito e inscrito a um polígono regular, pela proposição anterior, sendo M o ponto médio de um lado qualquer, como o segmento OM é exatamente o inraio do polígono, temos que os centros O e I dos respectivos círculos coincidem, ou seja, tais círculos são *concêntricos*.

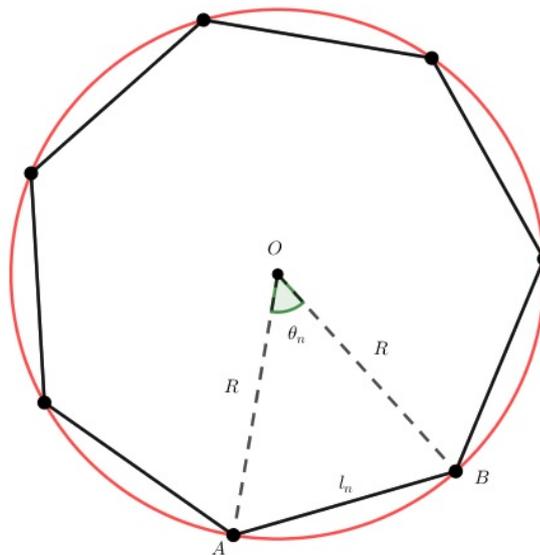
2.3.2 Relações importantes para polígonos regulares

Nesta subseção, iremos apresentar algumas relações importantes válidas para polígonos regulares. Tais relações são encontradas em diversos livros de educação básica e por esse motivo, daremos um caráter menos formal em sua abordagem. Vamos considerar polígonos convexos regulares, inscritos num mesmo círculo de raio R , cujos lados medem l_n , inraios r_n e áreas S_n , com $n \geq 3$.

Primeiro vamos obter uma relação entre os lados de tais polígonos com o circunraio de medida R .

Consideremos dois vértices A e B quaisquer do polígono. Sendo O o centro do círculo circunscrito, pelo fato de tal polígono ser regular, a medida do ângulo $\angle AOB$ será dada por

$$\theta_n = \frac{360^\circ}{n}.$$



Relação entre l_n e R

Pela lei dos cossenos (Teorema 1.1.3) no triângulo AOB , temos que

$$l_n^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \theta_n$$

$$\begin{aligned}
&= 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \theta_n = 2R^2 (1 - \cos \theta_n) \\
\implies l_n^2 &= 2R^2 \left[1 - \cos \left(\frac{360^\circ}{n} \right) \right]. \tag{24}
\end{aligned}$$

Uma relação entre S_n e R decorre da aplicação da fórmula do seno para área de triângulos (Teorema 1.1.1) no triângulo AOB . De fato pois nesse caso, sendo S_{AOB} a área de tal triângulo, podemos escrever

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen } \theta_n = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$$

e como a área do polígono é n vezes a área do triângulo AOB , vem que

$$S_n = \frac{1}{2} n R^2 \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right). \tag{25}$$

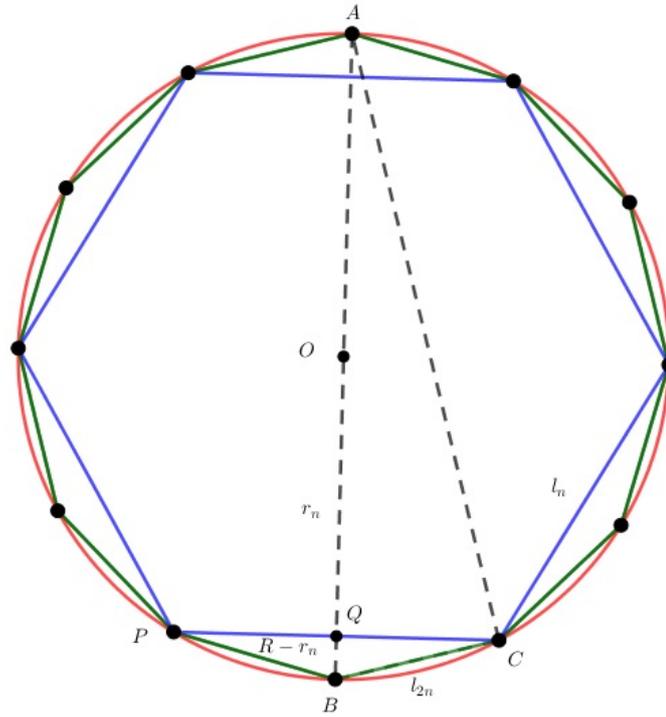
Vamos agora obter uma relação entre r_n e R . Para isso, sendo M o ponto médio do lado AB , aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMB , obtemos

$$\begin{aligned}
r_n^2 &= R^2 - \left(\frac{l_n}{2} \right)^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4} = \frac{4R^2 - l_n^2}{4} \\
\implies r_n &= \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Podemos também estabelecer uma relação entre os lados de dois polígonos regulares com mesmo circunraio R , onde o número de lados de um é o dobro do número de lados do outro. Sejam l_n e l_{2n} , respectivamente, as medidas dos lados de tais polígonos que denotaremos aqui por P_n e P_{2n} . Consideremos que AB é um diâmetro do círculo de centro O tal que A e B são vértices de P_{2n} . Se PC é lado de P_n onde P e C são adjacentes a B no polígono P_{2n} , considerando Q o ponto médio do lado PC , temos para os triângulos OPQ e OCQ :

- OQ é lado comum;
- $\overline{OP} = \overline{OC} = R$;
- $\overline{PQ} = \overline{CQ}$, pois Q é ponto médio.

Logo, os triângulos OPQ e OCQ são congruentes pelo caso (LLL) e consequentemente, os ângulos $\angle OQP$ e $\angle OQC$ são ambos retos, de forma que PC é perpendicular a OQ e consequentemente, perpendicular a AB .



l_{2n} em função de l_n

Temos também que o triângulo ABC é retângulo em C pois seu lado AB é diâmetro do círculo de forma que, utilizando a relação métrica para triângulos retângulos

$$(\overline{BC})^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BQ},$$

podemos escrever

$$l_{2n}^2 = 2R(R - r_n) = 2R^2 - 2R \cdot r_n$$

e utilizando (26), obtemos

$$l_{2n}^2 = 2R^2 - 2R \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

$$\implies l_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}. \quad (27)$$

Exemplo: Vamos utilizar a equação (27) para encontrarmos as medidas dos lados de um triângulo equilátero ($n = 3$) e um dodecágono regular ($n = 12$) em função de R . Para isso precisamos da medida do lado do hexágono regular ($n = 6$).

Usando (24), temos que

$$\begin{aligned} l_6^2 &= 2R^2 \left[1 - \cos \left(\frac{360^\circ}{6} \right) \right] = 2R^2 (1 - \cos 60^\circ) \\ &= 2R^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 2R^2 \cdot \frac{1}{2} = R^2 \end{aligned}$$

$$\implies l_6 = R.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} l_{12}^2 &= 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2} \\ &= 2R^2 - R\sqrt{3R^2} = 2R^2 - R^2\sqrt{3} \\ &= R^2(2 - \sqrt{3}) \\ \implies l_{12} &= R\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Para o triângulo equilátero, podemos escrever

$$\begin{aligned} l_6^2 &= 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_3^2} \implies R^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_3^2} \\ \implies R\sqrt{4R^2 - l_3^2} &= R^2 \implies \sqrt{4R^2 - l_3^2} = R. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$4R^2 - l_3^2 = R^2 \implies l_3^2 = 3R^2 \implies l_3 = R\sqrt{3}.$$

2.3.3 Sobre áreas de polígonos cíclicos

Na subseção anterior, vimos que se um polígono cíclico convexo for regular, então sua área é dada pela expressão (25). No entanto, se tal polígono não for regular, calcular a sua área é uma tarefa um pouco complicada quando utilizamos geometria sintética.

Nos casos $n = 3$ ou $n = 4$, podemos calcular tais áreas usando as fórmulas de Heron (Teorema 2.1.4) ou a fórmula de Brahmagupta (Corolário 2.2.7). Desenvolvendo a fórmula de Heron obtemos

$$\begin{aligned} S_3 &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \implies S_3^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \\ \implies S_3^2 &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \\ \implies 16S_3^2 &= [(b+c)+a] \cdot [(b+c)-a] \cdot [a+(b-c)] \cdot [a-(b-c)]. \end{aligned}$$

Após desenvolver a equação acima em função dos lados a , b e c do triângulo, obtemos uma nova equação

$$16S_3^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4. \quad (28)$$

Repetindo esse procedimento para a fórmula de Brahmagupta, temos que

$$\begin{aligned}
 S_4^2 &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \implies S_4^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\
 \implies S_4^2 &= \frac{-a+b+c+d}{2} \cdot \frac{a-b+c+d}{2} \cdot \frac{a+b-c+d}{2} \cdot \frac{a+b+c-d}{2} \\
 \implies 16S_4^2 &= (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d).
 \end{aligned}$$

Após desenvolvermos a equação acima, obtemos a seguinte relação

$$16S_4^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd. \quad (29)$$

As equações (28) e (29) intrigaram o matemático estadunidense David P. Robbins (1942-2003) de forma que o mesmo se perguntou: Será que existe uma fórmula para a área de um polígono cíclico qualquer, onde essa é uma função que depende apenas das medidas de seus lados?

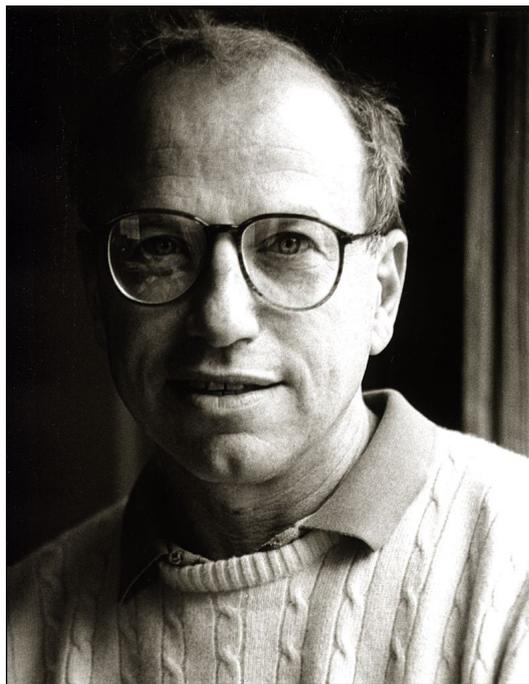


Imagem de David P. Robbins fornecida pela American Mathematical Society

Robbins desenvolveu tais equações de forma a obter

$$16S_3^3 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0 \quad (30)$$

e

$$16S_4^2 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 8abcd = 0 \quad (31)$$

onde, considerando os lados dos polígonos como a_1, a_2, a_3, a_4 e usando funções simétricas

elementares nos quadrados de tais lados, dadas por

$$\sigma_1 = \sum a_i^2, \quad \sigma_2 = \sum a_i^2 a_j^2, \quad \sigma_3 = \sum a_i^2 a_j^2 a_k^2, \quad \text{e} \quad \sigma_4 = a_i^2 a_j^2 a_k^2 a_l^2,$$

com $i < j < k < l$, Robbins reescreveu tais equações como

$$16S_3^2 - 4\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0 \tag{32}$$

e

$$16S_4^2 - 4\sigma_2 + \sigma_1^2 - 8\sqrt{\sigma_4} = 0 \tag{33}$$

e observou que se o quadrilátero cíclico for não-convexo, bastaria trocar o sinal do último termo da equação (33), devido à orientação de seus vértices.

No ano de 1994, Robbins provou em seu artigo [ROBBINS, 1994] que se um polígono cíclico de área S possui lados medindo a_1, a_2, \dots, a_n , então existe um único polinômio, a menos do sinal, α_n tal que

$$\alpha_n(16S^2, a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2) = 0.$$

O polinômio α_n é conhecido na literatura como *polinômio de Heron generalizado*. Nos casos do triângulo e quadrilátero, temos

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 16S^2 - 4\sigma_2 + \sigma_1^2 \mp 8\sqrt{\sigma_4},$$

onde para o triângulo, basta fazermos $a_4 = 0$. Fazendo $u = 16S^2$, podemos escrever

$$\alpha_3 = \alpha_4 = u - 4\sigma_2 + \sigma_1^2 \mp 8\sqrt{\sigma_4},$$

ou seja, o grau dos polinômios α_3 e α_4 , na indeterminada u , é igual a 1.

O grau do polinômio α_n , com $n > 4$, é dado por

$$\Delta_m = \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \binom{2m+1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \left[(2m+1) \binom{2m}{m} - 2^{2m} \right],$$

quando $n = 2m + 1$ for ímpar. Quando $n = 2m + 2$ for par, o grau de α_n será $2\Delta_m$.

No caso do pentágono, temos que $n = 5$, ou seja, $m = 2$ e portanto

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[(4+1) \binom{4}{2} - 2^4 \right] = \frac{1}{2} \cdot [30 - 16] = 7,$$

ou seja, α_5 possui grau 7. Para α_5 , Robbins também escreveu sua expressão usando as funções simétricas elementares, neste caso σ_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. A fórmula para a área de um pentágono cíclico é dada por

$$ut_4^3 + t_3^2 t_4^2 - 16t_3^3 t_5 - 18ut_3 t_4 t_5 - 27u^2 t_5^2 = 0,$$

onde $u = 16S^2$, $t_2 = u - 4\sigma_2 + \sigma_1^2$, $t_3 = 8\sigma_3 + \sigma_1 t_2$, $t_4 = -64\sigma_4 + t_2^2$ e $t_5 = 128\sigma_5$.

Para α_6 , Robbins estabeleceu uma conjectura onde tal polinômio poderia ser escrito como produto de dois polinômios, denotados por β_6 e β_6^* , ambos com grau $\Delta_2 = 7$. Neste caso, Robbins mostrou que

$$\beta_6 = ut_4^3 + t_3^2 t_4^2 - 16t_3^3 t_5 - 18ut_3 t_4 t_5 - 27u^2 t_5^2,$$

onde $u = 16S^2$, $t_2 = u - 4\sigma_2 + \sigma_1^2$, $t_3 = 8\sigma_3 + \sigma_1 t_2 - 16\sigma'_6$, $t_4 = t_2^2 - 64\sigma_4 + 64\sigma_1 \sigma'_6$ e $t_5 = 128\sigma_5 + 32t_2 \sigma'_6$. Vale observar que $\sigma'_6 = \sqrt{\sigma_6}$.

Para o polinômio β_6^* basta usarmos $\sigma'_6 < 0$. Conseqüentemente, a fórmula para a área de um hexágono cíclico será dada por

$$\alpha_6 = \beta_6 \cdot \beta_6^* = 0.$$

As demonstrações das fórmulas para α_5 e α_6 serão omitidas pois fogem do objetivo de nosso trabalho. Mais tarde, em seu artigo [MALEY; ROSKIES, 2004], F. Miller Maley e Julie Roskies apresentaram as fórmulas da área para o heptágono cíclico (α_7) e para o octógono cíclico (α_8). Neste mesmo artigo, é encontrada referência sobre a validade da conjectura de Robbins de que o polinômio α_n pode ser escrito como produto $\beta_n \cdot \beta_n^*$, quando n for par. Encontrar as fórmulas para α_n , com $n > 8$ ainda é um problema em aberto.

Em sua memória, no ano de 2005, membros de sua família estabeleceram o Prêmio David P. Robbins. Tal prêmio contempla trabalhos que relatem novas pesquisas em álgebra, combinatória ou matemática discreta. O valor atual do prêmio é de cinco mil dólares e os últimos ganhadores, no ano de 2019, foram os matemáticos Roger Behrend, Ilse Fischer e Matjaž Konvalinka por seu artigo [BEHREND; FISCHER; KONVALINKA, 2017].

3 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA

Neste capítulo, iremos apresentar um método para a construção de polígonos cíclicos cujos lados, diagonais e área são inteiros positivos. Tais polígonos são conhecidos na literatura como *polígonos de Brahmagupta*.

3.1 Construindo triângulos de Heron

Todo triângulo retângulo cujos lados são racionais é chamado de *triângulo pitagórico racional*. Uma vez que a área S de tal triângulo é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc,$$

em que b e c são as medidas dos catetos do referido triângulo, temos que S também é um número racional. Quando tais lados são inteiros, tal triângulo é dito *triângulo pitagórico*.

De uma forma mais geral, um polígono cujas medidas dos lados, diagonais e área são racionais é chamado de *polígono de Heron racional*, e se tais medidas forem inteiras, tal polígono é chamado simplesmente de *polígono de Heron*.

Definição 3.1.1. Um *polígono de Brahmagupta* é todo polígono de Heron cíclico.

Nesta seção, apresentaremos um método para construirmos triângulos de Heron, ou seja, triângulos cujos lados e área possuem medidas inteiras. De acordo com a Proposição 2.1.2, todo triângulo é cíclico e portanto, todo triângulo de Heron é também um triângulo de Brahmagupta. Nas seções seguintes, apresentaremos um método para obtermos polígonos de Brahmagupta com uma quantidade qualquer de lados. Para isso, precisaremos dos resultados que seguem.

Proposição 3.1.1. *Todo triângulo pitagórico é um triângulo de Heron.*

Demonstração. Seja ABC o referido triângulo, retângulo em A e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Como seus lados, por hipótese, possuem medidas inteiras, basta mostrarmos que sua área S também é inteira. Tal área é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc.$$

Portanto, S será inteira se b ou c for par. Suponhamos que b e c são ímpares. Neste caso, podemos escrever $b = 2k + 1$ e $c = 2q + 1$, onde $k, q \in \mathbb{Z}_+$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC , temos que

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 = (2k + 1)^2 + (2q + 1)^2 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 4 \left(\underbrace{k^2 + q^2 + k + q}_{\lambda_1} \right) + 2 \\
&= 4\lambda_1 + 2 \quad , \text{ com } \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+ .
\end{aligned}$$

$$\implies a^2 \equiv 2 \pmod{4} . \quad (34)$$

Se a for um número ímpar, temos que $a = 2m + 1$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, e portanto

$$\begin{aligned}
a^2 &= (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4 \left(\underbrace{m^2 + m}_{\lambda_2} \right) + 1 \\
&= 4\lambda_2 + 1 \quad , \text{ com } \lambda_2 \in \mathbb{Z}_+ .
\end{aligned}$$

$$\implies a^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

que é absurdo, pelo resultado (34).

Por outro lado, sendo a um número par, podemos escrever $a = 2n$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, e portanto

$$a^2 = (2n)^2 = 4n^2 \implies a^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

que também é absurdo pelo resultado (34).

Portanto, b ou c é par e S é de fato um número inteiro.

Para construirmos triângulos de Heron retângulos, de acordo com a proposição anterior, basta encontrarmos uma maneira de construirmos triângulos pitagóricos. O próximo teorema nos dá uma forma de obtermos tais triângulos. Antes porém, serão necessárias as seguintes definições.

Definição 3.1.2. Uma *tripla* (a, b, c) de números reais positivos representa um triângulo ABC quando tais reais são, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} de tal triângulo.

Definição 3.1.3. Uma tripla (a, b, c) de inteiros positivos é dita *pitagórica* quando esta é solução da equação pitagórica, ou seja, quando $a^2 = b^2 + c^2$. Quando tais inteiros forem coprimos, ou seja, $\text{m.d.c.}(a, b, c) = 1$, o triângulo pitagórico formado por tais lados será dito primitivo.

Teorema 3.1.1. *Uma tripla (a, b, c) é pitagórica se, e somente se,*

$$a = \lambda(u^2 + v^2), \quad b = \lambda(u^2 - v^2) \quad e \quad c = \lambda(2uv), \quad (35)$$

onde u, v e λ são inteiros positivos tais que $m.d.c.(u, v) = 1$ e $u > v$.

Demonstração. Inicialmente, note que podemos considerar apenas os casos em que a, b e c não possuem fatores comuns dois a dois. De fato se, por exemplo, b e c possuem um fator d comum, então d^2 divide $b^2 + c^2 = a^2$ e portanto d também divide a . Consequentemente, $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ também é uma tripla pitagórica.

Considerando $m.d.c.(a, b, c) = 1$ temos que dois dos três números a, b, c são obrigatoriamente ímpares. Mas b e c não podem ser simultaneamente ímpares. De fato, pois neste caso teríamos

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2 \equiv 2 \pmod{4}, \end{aligned}$$

para k, l inteiros positivos.

Se a for um número par, podemos escrever $a = 2m$, com m inteiro positivo e neste caso, $a^2 = (2m)^2 = 4m^2 \equiv 0 \pmod{4}$, que é absurdo já que $a^2 = b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$.

Por outro lado, se a for ímpar, temos $a = 2n + 1$ com n inteiro positivo e neste caso $a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ que também é absurdo.

Portanto, de fato b e c não podem ser ambos ímpares, ou seja, a deve ser ímpar. Vamos supor, sem perda de generalidade, que a e b são ímpares. Podemos escrever então

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 &\implies a^2 - b^2 = c^2 \implies (a + b)(a - b) = c^2 \\ &\implies \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a - b}{2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Como $m.d.c.(a, b) = 1$, temos que $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$ não possuem fator comum. De fato pois se e for fator comum de tais números, então e dividirá a sua soma $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$ e também a sua diferença $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$, que é absurdo já que $m.d.c.(a, b) = 1$.

Daí segue que, como o produto $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2}$ é um quadrado e $m.d.c.(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) = 1$, então cada um dos números $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$ tem que ser o quadrado de um número inteiro. Neste caso, podemos escrever

$$\frac{a + b}{2} = u^2, \quad \frac{a - b}{2} = v^2 \quad e \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 = u^2 v^2,$$

para determinados u e v inteiros positivos. Consequentemente,

$$a = u^2 + v^2, \quad b = u^2 - v^2, \quad e \quad c = 2uv.$$

Multiplicando pela constante inteira positiva λ , temos que qualquer tripla pitagórica poderá ser expressa na forma

$$a = \lambda(u^2 + v^2), \quad b = \lambda(u^2 - v^2) \quad \text{e} \quad c = \lambda(2uv),$$

com m.d.c. $(u, v) = 1$ e $u > v$.

Reciprocamente, se uma tripla (a, b, c) satisfaz as condições deste teorema, então é fácil verificar que

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= [\lambda(u^2 - v^2)]^2 + [\lambda(2uv)]^2 = \lambda^2(u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + \lambda^2(4u^2v^2) \\ &= \lambda^2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) = \lambda^2(u^2 + v^2)^2 \\ &= [\lambda(u^2 + v^2)]^2 = a^2 \end{aligned}$$

e portanto é uma tripla pitagórica.

Tomando $\lambda = 1$, $u = 2$ e $v = 1$ em (35), obtemos o triângulo pitagórico primitivo $(5, 3, 4)$. Por outro lado, tomando $\lambda = 2$, $u = 3$ e $v = 2$, obtemos o triângulo pitagórico $(26, 10, 24)$. Conforme a Proposição 3.1.1, tais triângulos são de Heron. Para construirmos triângulos de Heron isósceles ou escalenos, precisaremos do próximo teorema.

Teorema 3.1.2. *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e $\cos \widehat{A} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$, com $p > q$ e m.d.c. $(p, q) = 1$. A tripla (a, b, c) representa uma família de triângulos de Heron com o ângulo $\angle A$ comum se, e somente se,*

$$(a, b, c) = (pq(u^2 + v^2), (pu - qv)(qu + pv), (p^2 + q^2)uv), \quad (36)$$

onde $u > \frac{q}{p}v$.

Demonstração. Usando a lei dos cossenos (Teorema 1.1.3) no triângulo ABC , obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \\ \implies a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \\ &= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c\right)^2 + c^2 - \frac{(p^2 - q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2} \cdot c^2 \\ &= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c\right)^2 + \frac{(p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2} \cdot c^2 \\ &= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c\right)^2 + \frac{(p^2 + q^2 + p^2 - q^2)(p^2 + q^2 - p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2} \cdot c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c \right)^2 + \frac{2p^2 \cdot 2q^2}{(p^2 + q^2)^2} \cdot c^2 \\
&= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c \right)^2 + \frac{4p^2 q^2}{(p^2 + q^2)^2} \cdot c^2 \\
&= \left(b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c \right)^2 + \left(\frac{2pq}{p^2 + q^2} \cdot c \right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, os números a , $b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c$ e $\frac{2pq}{p^2 + q^2} \cdot c$ devem formar uma tripla pitagórica. De acordo com o teorema anterior (Teorema 3.1.1), podemos escrever

$$a = \lambda(u^2 + v^2), \quad b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c = \lambda(u^2 - v^2) \quad \text{e} \quad \frac{2pq}{p^2 + q^2} \cdot c = \lambda(2uv).$$

O menor valor de λ para que c seja inteiro é $\lambda = pq$. Daí temos que

$$a = pq(u^2 + v^2), \quad b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot c = pq(u^2 - v^2), \quad \text{e} \quad c = (p^2 + q^2)uv.$$

$$\implies b - \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot (p^2 + q^2)uv = pq(u^2 - v^2)$$

$$\implies b - (p^2 - q^2)uv = pq(u^2 - v^2)$$

$$\implies b = pq(u^2 - v^2) + (p^2 - q^2)uv$$

$$= pqu^2 - pqv^2 + p^2uv - q^2uv$$

$$\implies b = (pu - qv)(qu + pv).$$

Como a, b, c são inteiros positivos, devemos ter

$$pu - qv > 0 \quad \implies \quad u > \frac{q}{p}v.$$

Reciprocamente, se uma tripla satisfaz as condições deste teorema, então podemos escrever

$$a = pqu^2 + pqv^2, \quad b = pqu^2 + p^2uv - q^2uv - pqv^2 \quad \text{e} \quad c = p^2uv + q^2uv.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} b + c &= pqu^2 + 2p^2uv - pqv^2 = pqu^2 + pqv^2 + 2p^2uv - 2pqv^2 \\ &= a + 2pv(pu - qv). \end{aligned}$$

Por hipótese, $u > \frac{q}{p}v \implies pu - qv > 0$ e conseqüentemente,

$$a < b + c.$$

De maneira similar, provamos que $b < a + c$ e $c < a + b$. Portanto, os números inteiros positivos a, b e c satisfazem a desigualdade triangular, ou seja, a tripla descrita neste teorema representa um triângulo com lados inteiros.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= 1 - \operatorname{cos}^2 \widehat{A} \\ &= 1 - \frac{(p^2 - q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2} = \frac{(p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2)^2}{(p^2 + q^2)^2} \\ &= \frac{(p^2 + q^2 + p^2 - q^2)(p^2 + q^2 - p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2} = \frac{4p^2q^2}{(p^2 + q^2)^2} \\ \implies \operatorname{sen} \widehat{A} &= \frac{2pq}{p^2 + q^2} \quad \text{pois } 0^\circ < \widehat{A} < 180^\circ. \end{aligned}$$

Pela fórmula do seno para área de um triângulo (Teorema 1.1.1), a área do triângulo ABC será dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (pu - qv)(qu + pv) \cdot (p^2 + q^2)uv \cdot \frac{2pq}{(p^2 + q^2)} \\ &= (pu - qv)(qu + pv)uvpq, \end{aligned}$$

que é de fato um número inteiro. Portanto, o triângulo ABC é um triângulo de Heron.

Para determinarmos uma família de triângulos de Heron com ângulo $\angle A'$ tal que $\widehat{A} + \widehat{A}' = 180^\circ$, basta notar que

$$\operatorname{cos} \widehat{A}' = \operatorname{cos}(180^\circ - \widehat{A}) = \operatorname{cos} 180^\circ \cdot \operatorname{cos} \widehat{A} - \operatorname{sen} 180^\circ \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}$$

$$= -1 \cdot \cos \widehat{A} - 0 \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} = -\cos \widehat{A}$$

e portanto,

$$\cos \widehat{A'} = -\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}.$$

Cálculos análogos aos do teorema anterior nos levam à tripla (a', b', c') que gera triângulos de Heron com ângulos $\angle A'$ suplementares ao ângulo $\angle A$. Neste caso, teremos

$$(a', b', c') = (pq(u^2 + v^2), (pu + qv)(qu - pv), (p^2 + q^2)uv) \quad (37)$$

com m.d.c. $(u, v) = \text{m.d.c.}(p, q) = 1$, $u > \frac{p}{q}v$ e $p > q$.

Fazendo, por exemplo, $p = 2$ e $q = 1$ em (36) e (37), obtemos

$$\cos \widehat{A} = \frac{2^2 - 1^2}{2^2 + 1^2} \implies \cos \widehat{A} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \cos \widehat{A'} = -\frac{3}{5}.$$

Isso irá acarretar nas famílias

$$(a, b, c) = (2(u^2 + v^2), (u + 2v)(2u - v), 5uv) \quad (38)$$

e

$$(a', b', c') = (2(u^2 + v^2), (u - 2v)(2u + v), 5uv). \quad (39)$$

Tais triângulos poderão ser associados sempre que $u > \frac{p}{q}v$, neste caso, $u > 2v$. A próxima definição será bastante útil.

Definição 3.1.4. *Ampliar* um polígono em k vezes, com k inteiro positivo, é multiplicar todos os lados do referido polígono por k . Da mesma forma, *reduzir* um polígono em k vezes, é dividir todos os lados do polígono por k .

O resultado do próximo teorema pode ser encontrado em [FRICKE, 2008] e será fundamental para nossos propósitos. Ele nos garante que ampliando ou reduzindo um triângulo de Heron por um fator k , onde k é um inteiro positivo, o triângulo resultante também será de Heron. É importante ressaltar neste caso que, para a redução, k deverá ser divisor comum dos lados do respectivo triângulo. Ainda para o próximo teorema, precisaremos utilizar em nossos argumentos o Teorema Fundamental da Aritmética, cuja demonstração o leitor poderá encontrar na página 123 de [HEFEZ, 2016]. Aqui, apenas o enunciaremos.

Lema 3.1.3 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Teorema 3.1.4. *Sejam a, b, c e k números inteiros positivos. Um triângulo ABC de lados a, b e c é de Heron se, e somente se, seu triângulo semelhante $A'B'C'$ de lados ka, kb e kc também for de Heron.*

Demonstração. Se s e s' denotam, respectivamente, os semiperímetros dos triângulos ABC e $A'B'C'$, então

$$s' = \frac{ka + kb + kc}{2} = \frac{k(a + b + c)}{2} = k \cdot \frac{a + b + c}{2} = ks.$$

Por outro lado, sendo S e S' as áreas dos respectivos triângulos, podemos escrever, utilizando a fórmula de Heron (Teorema 2.1.4),

$$\begin{aligned} S' &= \sqrt{ks(k s - ka)(k s - kb)(k s - kc)} \\ &= \sqrt{k^4 s(s - a)(s - b)(s - c)} = k^2 \cdot \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \\ &\implies S' = k^2 \cdot S. \end{aligned} \tag{40}$$

Como k e S são, por hipótese, inteiros positivos, temos que S' também será inteira e portanto $A'B'C'$ é um triângulo de Heron.

Reciprocamente, sendo $A'B'C'$ um triângulo de Heron, vamos mostrar que o triângulo ABC também será. Para isto, basta verificarmos a equação (40) para k primo e estender o resultado para qualquer k inteiro positivo, utilizando o teorema fundamental da aritmética.

Sendo k um número primo ímpar, pela equação (40), S deve ser racional pois S' e k são inteiros positivos, por hipótese. Como

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p - 2a}{2}\right) \left(\frac{p - 2b}{2}\right) \left(\frac{p - 2c}{2}\right)},$$

onde p denota o perímetro do triângulo ABC , chegamos a

$$S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$$

e concluímos que o denominador de S deve ser 4. Como, por hipótese, k é primo ímpar e S' é inteira, devemos ter que 4 divide a expressão $\sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$ pois obviamente neste caso, 4 não divide k . Consequentemente S é um inteiro positivo e ABC é um triângulo de Heron.

Sendo $k = 2$, suponhamos que 4 não divida $\sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$. Neste caso, p deverá ser ímpar e a expressão $p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$ deverá ser um quadrado

perfeito ímpar. Tal expressão poderá ser escrita na forma

$$(2\lambda + 1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 4(\lambda^2 + \lambda) + 1,$$

pra algum λ inteiro positivo. Verificamos assim que $p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$ deve deixar resto 1 na divisão por 4, ou seja,

$$p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c) \equiv 1 \pmod{4}.$$

Na tabela abaixo, em cada coluna foram atribuídas as possíveis congruências módulo 4 que a, b e c podem assumir a fim de que p seja ímpar. Devido à simetria de a, b e c na expressão $p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$, foram desconsideradas as análises das outras permutações.

Termos	Resto da divisão por 4									
	1	1	1	3	3	3	1	3	1	3
a	1	1	1	3	3	3	1	3	1	3
b	0	2	0	0	2	0	1	3	3	1
c	0	2	2	0	2	2	1	3	1	3
p	1	1	3	3	3	1	3	1	1	3
$p - 2a$	3	3	1	1	1	3	1	3	3	1
$p - 2b$	1	1	3	3	3	1	1	3	3	1
$p - 2c$	1	1	3	3	3	1	1	3	3	1
$p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

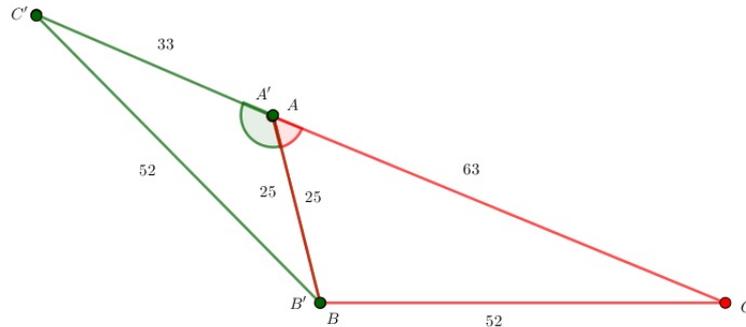
Repare que, de acordo com a tabela acima, em qualquer caso temos

$$p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c) \equiv 3 \pmod{4},$$

que é absurdo pois contraria a hipótese de p ser ímpar, ou seja, $p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)$ ser congruente a 1 módulo 4. Logo, 4 divide a expressão $\sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$ e consequentemente S é um inteiro positivo, ou seja, ABC é um triângulo de Heron.

Vamos agora, apresentar alguns exemplos de construção de triângulos de Heron isósceles ou escalenos. Para construirmos triângulos de Heron isósceles, basta utilizarmos os mesmos valores de u e v nas famílias (38) e (39). Para triângulos de Heron escalenos, basta escolhermos valores distintos de u e v para tais famílias. Nos exemplos, iremos representar triângulos utilizando triplas, ou seja $ABC = (a, b, c)$ ou simplesmente $T = (a, b, c)$.

Exemplo 1: Fazendo $u = 5$ e $v = 1$ em (38) e (39), obtemos os triângulos $ABC = (52, 63, 25)$ e $A'B'C' = (52, 33, 25)$. Unindo tais triângulos de forma que os vértices A e A' coincidam, ou seja, ao longo do lado de medida 25, obtemos o triângulo isósceles $(96, 52, 52)$. Tal triângulo possui área inteira pois é a união disjunta de dois triângulos de Heron.



Triângulo de Heron isósceles do exemplo 1

Exemplo 2: Neste exemplo, vamos tomar $u = 3$ e $v = 2$ em (38) e $u = 4$ e $v = 1$ em (39). Com isso iremos obter

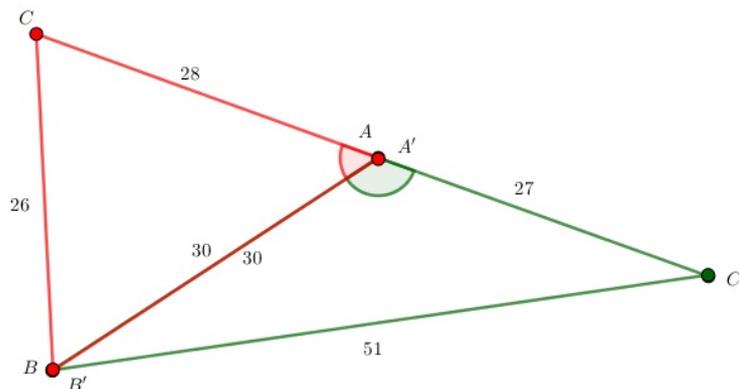
$$T = (26, 28, 30) \quad \text{que é semelhante ao triângulo } (13, 14, 15)$$

e

$$T' = (34, 18, 20) \quad \text{que é semelhante ao triângulo } (17, 9, 10),$$

após redução pelo m.d.c..

Podemos ampliar tais triângulos para obtermos um lado em comum. De acordo com o Teorema 3.1.4, tais triângulos também são de Heron. Por exemplo, ampliando o triângulo semelhante à T em duas vezes e o triângulo semelhante à T' em três vezes, iremos gerar os triângulos $ABC = (26, 28, 30)$ e $A'B'C' = (51, 27, 30)$ que podem ser unidos pelo lado de medida comum, gerando um novo triângulo $(55, 26, 51)$ de Heron, já que este também possui área inteira pelo mesmo argumento do exemplo anterior.



Triângulo de Heron escaleno do exemplo 2

Nesse momento, o leitor pode estar se perguntando: Poderíamos construir triângulos de Heron equiláteros? Tal resposta é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. *Não existe triângulo de Heron equilátero.*

Demonstração. A área de um triângulo equilátero cujo lado mede a pode ser obtida pela fórmula de Heron (Teorema 2.1.4). Nesse caso teremos

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a\right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} \implies S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Supondo que tal triângulo seja de Heron, devemos ter que sua área e lados sejam números inteiros positivos. Mas isso torna a igualdade acima um absurdo, pois o resultado do segundo membro será um número irracional enquanto que o primeiro membro é um número inteiro.

3.2 Construindo quadriláteros de Brahmagupta

Iniciaremos esta seção apresentando uma proposição que nos motivará a definir *ângulos de Heron*. Tal definição será importante para nossos objetivos.

Proposição 3.2.1. *Se ABC é um triângulo de Heron, então o seno e o cosseno de cada um de seus ângulos internos são racionais.*

Demonstração. Tomando $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, pela fórmula do seno para área de triângulos (Teorema 1.1.1), temos que

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \text{sen } \widehat{A} \implies \text{sen } \widehat{A} = \frac{2S}{bc}.$$

Como ABC é, por hipótese, um triângulo de Heron, temos que b , c e S são números inteiros e conseqüentemente $\text{sen } \widehat{A}$ é de fato racional. De maneira análoga prova-se a racionalidade de $\text{sen } \widehat{B}$ e $\text{sen } \widehat{C}$.

Por outro lado, tomando $\overline{BC} = a$ e aplicando a lei dos cossenos (Teorema 1.1.3) ao triângulo ABC , obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \implies \cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Como ABC é um triângulo de Heron, por hipótese, temos que a , b e c são números inteiros e portanto $\cos \widehat{A}$ é racional. De forma análoga prova-se a racionalidade de $\cos \widehat{B}$ e $\cos \widehat{C}$.

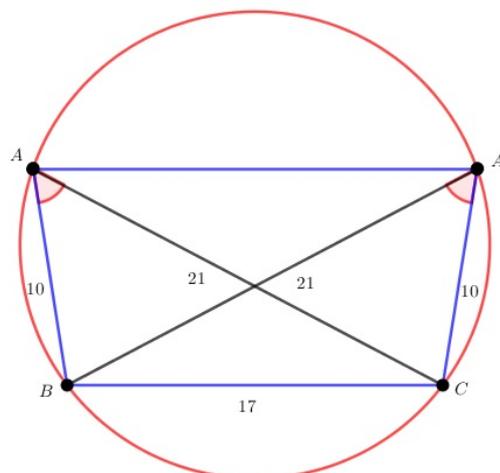
Definição 3.2.1. Um *ângulo de Heron* é todo ângulo que possui seno e cosseno racionais.

Para construirmos um quadrilátero de Brahmagupta iremos precisar de, no máximo, dois triângulos de Heron retirados das famílias (36) ou (37). Utilizaremos a tabela a seguir para nos auxiliar. Nela temos oito exemplos de triângulos de Heron onde os seis primeiros pertencem à família representada pela equação (38) e os dois últimos pertencem à família representada pela equação (39). Vale ressaltar que cada tripla primitiva foi obtida dividindo-se os lados de cada triângulo pelo m.d.c. de seus respectivos lados. Já as triplas ampliadas foram geradas multiplicando os lados de cada triângulo por um determinado fator, a fim de que todos os triângulos gerados tenham os lados opostos ao ângulo fixo congruentes.

Triângulos de Heron				
Triângulo	u	v	Primitiva (a, b, c)	Ampliada (a, b, c)
T_1	3	1	(4, 5, 3)	(340, 425, 255)
T_2	4	1	(17, 21, 10)	(340, 420, 200)
T_3	5	3	(68, 77, 75)	(340, 385, 375)
T_4	7	6	(85, 76, 105)	(340, 304, 420)
T_5	9	2	(85, 104, 45)	(340, 416, 180)
T_6	13	1	(68, 75, 13)	(340, 375, 65)
T_7	4	1	(17, 9, 10)	(340, 180, 200)
T_8	13	1	(340, 297, 65)	(340, 297, 65)

Utilizando os triângulos de Heron da tabela anterior, podemos construir um polígono de Brahmagupta qualquer. Vale observar que todos os triângulos utilizados deverão ter o lado a , oposto ao ângulo fixo, com a mesma medida de forma que eles possam ser unidos através deste lado. Os próximos exemplos nos mostram três possibilidades de construção de quadriláteros de Brahmagupta.

Exemplo 3: Neste exemplo, iremos associar um triângulo da família (38) a ele próprio.

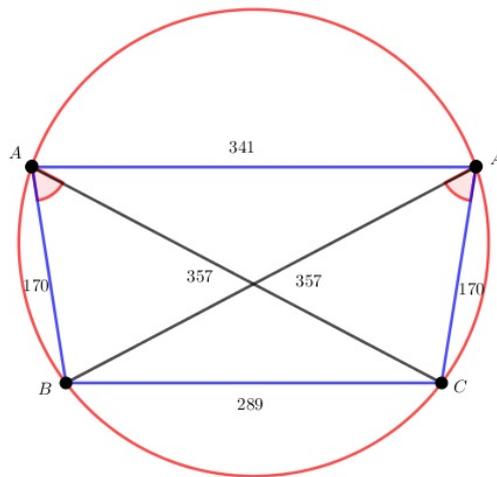


Quadrilátero cíclico $ABCA'$ do exemplo 3

Tomando o triângulo T_2 , ou seja, $ABC = (17, 21, 10)$, iremos usar seu triângulo simétrico em relação à mediatriz do lado BC cuja medida vale 17. Tal triângulo será denotado por $A'BC$. Por construção, $B\widehat{A}C = B\widehat{A}'C$ e portanto o quadrilátero $ABCA'$ é cíclico, conforme o item (b) da Proposição 2.2.1. Usando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3), obtemos

$$\overline{AA'} \cdot 17 + 10^2 = 21^2 \implies \overline{AA'} = \frac{341}{17}.$$

Ampliando tal quadrilátero em 17 vezes, obtemos o quadrilátero cíclico de lados e diagonais com medidas inteiras.



Quadrilátero de Brahmagupta $ABCA'$ do exemplo 3

Basta verificarmos que sua área é de fato inteira. Para isso, podemos utilizar a fórmula de Brahmagupta (Corolário 2.2.7) em tal quadrilátero. Neste caso obtemos

$$S = \sqrt{(485 - 170)(485 - 289)(485 - 170)(485 - 341)} = 52920,$$

que de fato é um número inteiro.

Exemplo 4: Neste exemplo, vamos associar dois triângulos distintos da família (38) que possuem medida de um dos lados em comum. Tomando os triângulos T_3 e T_6 da tabela anterior, ou seja, $ABC = (68, 77, 75)$ e $A'BC = (68, 75, 13)$, podemos unir tais triângulos pelo lado BC de medida comum 68, obtendo o quadrilátero $AA'BC$.

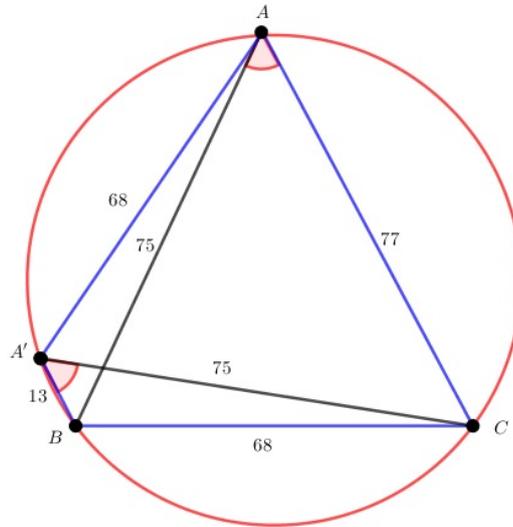
Como $B\widehat{A}C = B\widehat{A}'C$ temos, novamente pelo item (b) da Proposição 2.2.1, que tal quadrilátero é cíclico. Aplicando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3), obtemos

$$\overline{AA'} \cdot 68 + 13 \cdot 77 = 75^2 \implies \overline{AA'} = 68.$$

Usando novamente a fórmula de Brahmagupta, temos

$$S = \sqrt{(113 - 13)(113 - 68)(113 - 77)(113 - 68)} = 2700,$$

que é um número inteiro. Portanto, tal quadrilátero é de Brahmagupta.



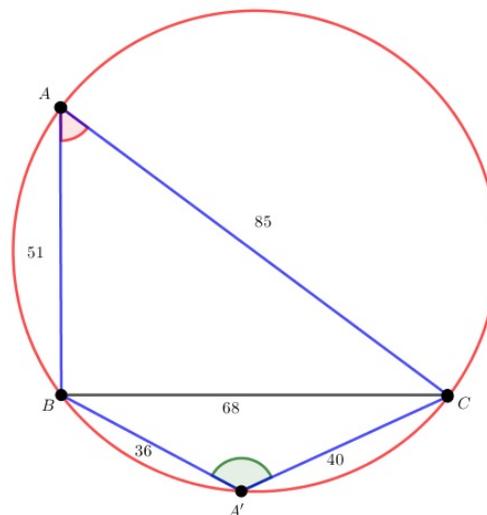
Quadrilátero de Brahmagupta $AA'BC$ do exemplo 4

Exemplo 5: Neste exemplo, vamos associar um triângulo da família (38) com um da família (39). Tomando os triângulos $T_1 = (4, 5, 3)$ e $T_7 = (17, 9, 10)$, podemos ampliar T_1 em 17 vezes e T_7 em 4 vezes, obtendo os triângulos $ABC = (68, 85, 51)$ e $A'BC = (68, 36, 40)$ que podem ser unidos através do lado BC de medida 68. Repare que, pelo Teorema 3.1.4, tais triângulos também são de Heron.

Como os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BA'C$ são suplementares, temos que o quadrilátero $ABA'C$ é cíclico e aplicando o primeiro teorema de Ptolomeu, obtemos

$$\overline{AA'} \cdot 68 = 51 \cdot 40 + 36 \cdot 85 \implies \overline{AA'} = 75.$$

Pelo fato da área de $ABA'C$ ser a soma das áreas dos triângulos de Heron ABC e $A'CB$, temos que sua área é inteira, ou seja, tal quadrilátero é de Brahmagupta.



Quadrilátero de Brahmagupta $ABA'C$ do exemplo 5

De maneira geral, quadriláteros de Brahmagupta podem ser gerados das seguintes formas:

- um triângulo da família (36) ou (37) associado a si mesmo, tomando seu simétrico em relação à mediatriz do lado oposto ao ângulo, $\angle A$ ou $\angle A'$, fixo;
- dois triângulos diferentes da mesma família com os lados, opostos ao ângulo fixo, congruentes;
- dois triângulos de famílias distintas com os lados, opostos aos ângulos fixos, congruentes.

No caso dos quadriláteros ($n = 4$) a fórmula de Brahmagupta nos ajuda a verificar que a área do quadrilátero construído é de fato um número inteiro. Tal verificação, apesar de em muitos casos ser trabalhosa, é possível por uma simples substituição na fórmula. No entanto, quando o polígono $P(n)$ a ser construído tiver uma quantidade de lados superior, $P(17)$ por exemplo, tal verificação não é trivial.

3.3 Construindo polígonos de Brahmagupta

Nesta seção, iremos apresentar o método de construção do polígono de Brahmagupta, denotado por $P(n)$. Para nossos propósitos, o seguinte lema será necessário.

Lema 3.3.1. *Todo triângulo de lados inteiros cujos ângulos internos são de Heron, é um triângulo de Heron.*

Demonstração. Sendo ABC um triângulo de área S , perímetro p , semiperímetro s e cujos lados medem a, b e c , pela fórmula do seno para a área de triângulos (Teorema 1.1.1), podemos escrever, sem perda de generalidade,

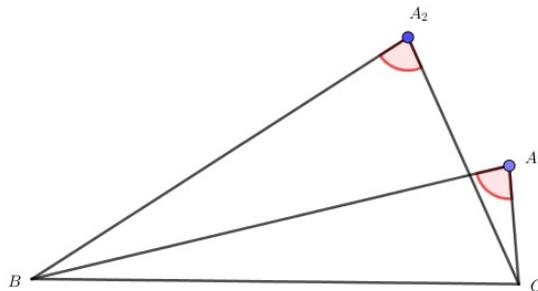
$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \widehat{A} \implies \sin \widehat{A} = \frac{2 \cdot S}{bc} \implies \sin \widehat{A} = \frac{2 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$\implies \sin \widehat{A} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}}{bc}.$$

Por hipótese, o ângulo $\angle A$ é de Heron e portanto $\sin \widehat{A}$ e $\cos \widehat{A}$ são racionais. Como a, b e c são inteiros, a expressão $p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$ deve ser um quadrado perfeito. Para mostrar que S é inteira basta mostrar que 4 divide $\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$. Mas isso já foi mostrado na prova do Teorema 3.1.4. Logo, S é um número inteiro positivo e ABC é um triângulo de Heron.

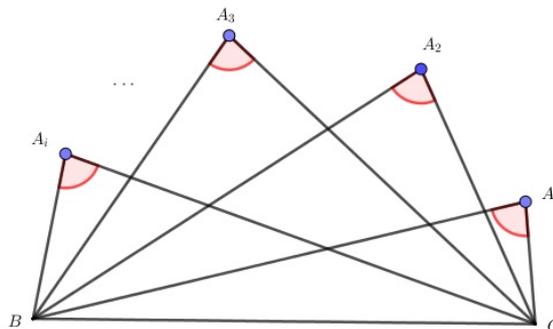
Vamos agora apresentar como construir o polígono $P(n)$. Tal polígono poderá ser construído continuando-se o método adotado para $P(4)$ na seção anterior.

- Começaremos escolhendo um triângulo T_1 qualquer da família (36), por exemplo.
- Escolheremos um segundo triângulo T_2 da mesma família do triângulo anterior. Iremos ampliar os triângulos T_1 e T_2 por um inteiro positivo k ou reduzi-los pelo m.d.c dos lados, de forma que tenhamos os lados, opostos ao ângulo $\angle A$ fixo, congruentes. Tais triângulos obtidos serão denotados por A_1BC e A_2BC . Repare que o Teorema 3.1.4 nos garante que tais triângulos são de Heron. Uniremos tais triângulos através do lado BC , de forma que A_1 e A_2 fiquem no mesmo semiplano em relação à reta que contém tal lado.



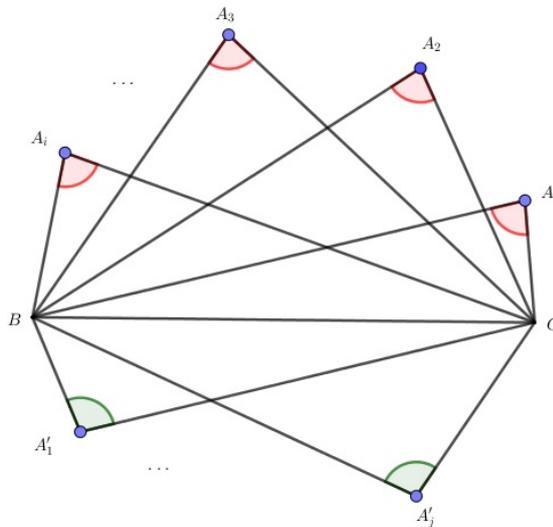
Triângulos A_1BC e A_2BC com o lado BC comum

- Continuaremos escolhendo o triângulo T_i da mesma família que o primeiro triângulo utilizado. Faremos uma ampliação ou redução de forma que os lados opostos ao ângulo $\angle A$ fixo, para todos os triângulos utilizados, sejam congruentes. Denotaremos tais triângulo por A_1BC , A_2BC , \dots , A_iBC . Sendo este o último triângulo utilizado, da mesma família de T_1 , uniremos todos os i triângulos utilizados ao longo do lado BC de forma que todos os vértices A_1, A_2, \dots, A_i estejam no mesmo semiplano relativo à reta que contém BC .



Triângulos A_1BC , A_2BC , \dots , A_iBC com o lado BC comum

- Neste momento, poderemos ainda escolher os triângulos T'_1, T'_2, \dots, T'_j da família (37) ainda não utilizada, que possui ângulo $\angle A'$ fixo suplementar ao da família anterior, e ampliarmos ou reduzirmos todos os triângulos, como nos passos anteriores, a fim de se obter os lados, opostos ao ângulo fixo, congruentes. Denotaremos tais triângulos por $A'_1BC, A'_2BC, \dots, A'_jBC$. Por fim, uniremos tais triângulos ao longo do lado BC , de forma que todos os vértices A'_1, A'_2, \dots, A'_j estejam no semiplano oposto ao dos i vértices iniciais e formaremos um polígono convexo com vértices $A_1, A_2, \dots, A_i, B, A'_1, A'_2, \dots, A'_j$ e C .



Triângulos de Heron com o lado BC comum

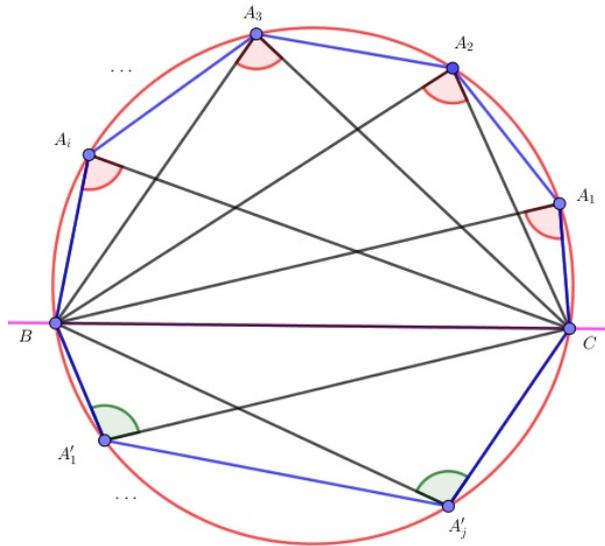
Em geral, o polígono construído não terá todas as medidas inteiras. Por exemplo, na figura anterior, o segmento A_1A_3 pode ter medida não-inteira. No entanto, o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3) aplicado ao quadrilátero A_1A_3BC nos garante que tal medida será racional pois todos os outros segmentos envolvidos são inteiros e portanto, podemos fazer uma ampliação de forma que tal medida se torne inteira. Tal argumento é válido para todos os demais segmentos do polígono construído. Dessa forma podemos garantir até o momento que tal polígono, após certa ampliação, possua todos os lados e diagonais com medidas inteiras e o denotaremos por $P(n)$. O próximo teorema nos garante que $P(n)$ é de Brahmagupta. Usaremos, para a sua prova, o método de indução. Sobre o método de indução, sugerimos ao leitor o capítulo 2 de [MORGADO; CARVALHO, 2015].

Teorema 3.3.2. *O polígono $P(n)$, com $n \geq 3$, é de Brahmagupta.*

Demonstração. Utilizando indução no número de lados n do polígono, temos que

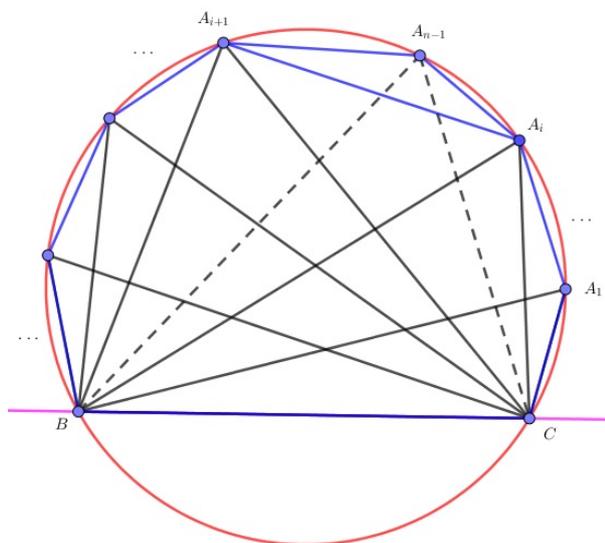
- $P(3)$ é trivial pois, por hipótese, todos os triângulos usados são de Heron e consequentemente possuem área inteira.

- Suponhamos que $P(k)$ seja um polígono de Brahmagupta, onde $3 \leq k \leq n$. Para verificarmos que $P(n+1)$ também é um polígono de Brahmagupta, basta verificarmos o caso em que todos os triângulos escolhidos pertençam à mesma família pois caso contrário, podemos dividir o polígono $P(n)$ em dois polígonos com o mesmo lado BC e cujos demais vértices estejam em semiplanos distintos com relação à reta que passa por tal lado.



Polígono $P(n)$ dividido pela reta \overleftrightarrow{BC}

A hipótese de indução garante que os polígonos $A_1A_2 \cdots A_iBC$ e $A'_iA'_2 \cdots A'_jCB$ são de Brahmagupta pois tais polígonos possuem quantidade de lados menor que n . Vamos então considerar que o polígono $P(n)$ está no mesmo semiplano em relação à reta que contém o lado BC comum aos triângulos utilizados.



Polígonos $P(n)$ e $P(n+1)$

Neste momento, vale lembrar que, para a construção do polígono $P(n)$ são necessários, no máximo, $(n - 2)$ triângulos de Heron. O polígono $P(n + 1)$ é obtido quando acrescentamos mais um triângulo de Heron com o lado BC comum aos demais triângulos. Digamos que seu outro vértice $A_{(n-2)+1} = A_{n-1}$ esteja situado entre os vértices A_i e A_{i+1} do polígono $P(n)$ que, por hipótese de indução, é de Brahmagupta. Por construção, todos os ângulos $\angle A_1, \angle A_2, \dots, \angle A_{n-1}$ são congruentes e conseqüentemente, $\angle A_{n-1}$ está sobre o mesmo arco capaz relativo ao lado comum BC dos triângulos utilizados. Dessa forma, podemos concluir que $P(n + 1)$ é cíclico.

Para verificarmos que sua área é inteira, basta mostrarmos que a área do triângulo $A_i A_{n-1} A_{i+1}$ é inteira, pois a área do polígono $P(n + 1)$ é a soma disjunta da área de tal triângulo com a área do polígono $P(n)$. Para isso, consideremos os ângulos de Heron $\angle A_i BC$ e $\angle A_{i+1} BC$. Como $A_{i+1} \widehat{BC} = A_i \widehat{BC} + A_{i+1} \widehat{BA}_i$, as fórmulas para $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$ garantem que o ângulo $\angle A_{i+1} BA_i$ também é de Heron. Por outro lado, como o quadrilátero $A_i A_{n-1} A_{i+1} B$ é cíclico, temos que os ângulos $\angle A_{i+1} A_{n-1} A_i$ e $\angle A_{i+1} BA_i$ são suplementares e, pelo fato de $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ e $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, podemos concluir que o ângulo $\angle A_{i+1} A_{n-1} A_i$ é um ângulo de Heron.

Com raciocínio análogo, podemos mostrar que os ângulos $\angle A_{n-1} A_{i+1} A_i$, congruente ao ângulo $\angle A_{n-1} BA_i$, e $\angle A_{n-1} A_i A_{i+1}$, congruente ao ângulo $\angle A_{i+1} CA_{n-1}$, são de Heron.

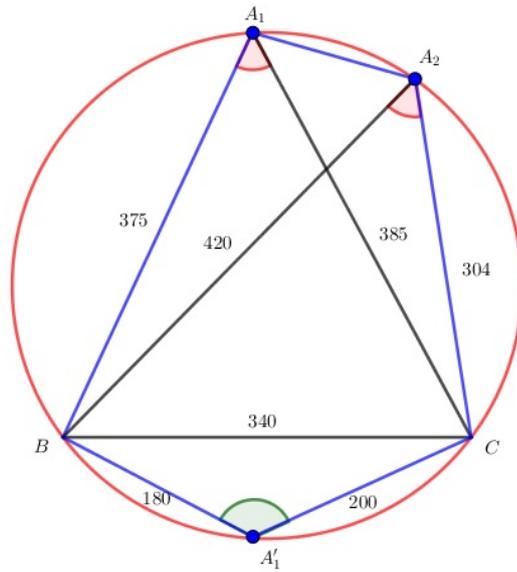
Finalmente, como o triângulo $A_i A_{n-1} A_{i+1}$ possui, por hipótese, os três lados inteiros e também possui os três ângulos internos de Heron, o lema anterior (Lema 3.3.1) garante que sua área é um número inteiro. Conseqüentemente, o polígono $P(n + 1)$ é de Brahmagupta.

Verificamos assim que todo polígono $P(n)$, onde $n \geq 3$, construído conforme indicado nesta seção, é sempre um polígono de Brahmagupta.

Encerraremos este capítulo, apresentando um exemplo de construção de pentágonos e hexágonos de Brahmagupta, pelo método apresentado.

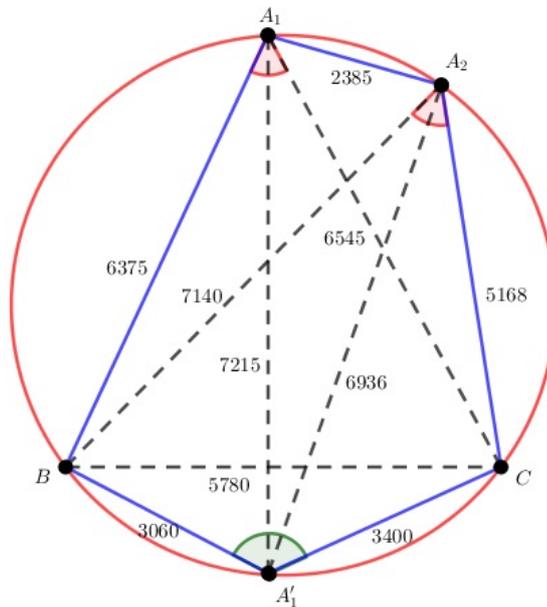
Exemplo 6: Tomando os triângulos T_3, T_4 e T_7 na tabela da seção anterior, ou seja, $(68, 77, 75)$, $(85, 76, 105)$ e $(17, 9, 10)$, podemos ampliar T_3 em cinco vezes, T_4 em quatro vezes e T_7 em vinte vezes, obtendo os triângulos $A_1 BC = (340, 385, 375)$, $A_2 BC = (340, 304, 420)$ e $A'_1 BC = (340, 180, 200)$ que possuem o lado de medida $\overline{BC} = 340$ comum. Tais triângulos podem ser unidos através desse lado. Utilizando o primeiro teorema de Ptolomeu nos quadriláteros $A_2 A_1 BC$, $A_1 B A'_1 C$ e $A_2 B A'_1 C$, obtemos

$$\overline{A_1 A_2} = \frac{2385}{17}, \quad \overline{A_1 A'_1} = \frac{7215}{17} \quad \text{e} \quad \overline{A_2 A'_1} = \frac{6936}{17}.$$



Pentágono cíclico $A_1BA_1'CA_2$ do exemplo 6

Ampliando o pentágono cíclico $A_1BA_1'CA_2$ em 17 vezes, obtemos um pentágono de Brahmagupta.



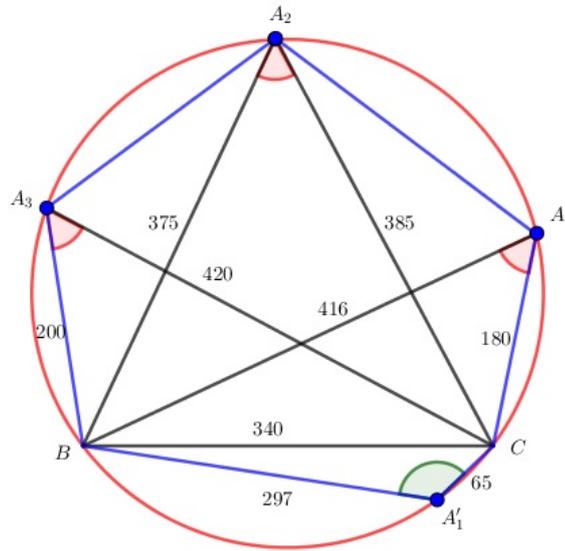
Pentágono de Brahmagupta $A_1BA_1'CA_2$ do exemplo 6

Para construirmos um hexágono de Brahmagupta, basta utilizarmos no máximo quatro triângulos das famílias (36) ou (37). Daremos aqui, um exemplo de tal construção.

Exemplo 7: Tomemos os triângulos T_2, T_3, T_5 e T_8 na tabela da seção anterior, ou seja, $(17, 21, 10), (68, 77, 75), (85, 104, 45)$ e $(340, 297, 65)$. Ampliando T_2 em vinte vezes, T_3 em cinco vezes e T_5 em quatro vezes, obtemos os triângulos $A_3BC = (340, 420, 200), A_2BC = (340, 385, 375)$ e $A_1BC = (340, 416, 180)$, que podem se unir com o triângulo $T_8 = A_1'BC$ através do lado de medida $\overline{BC} = 340$. Utilizando o primeiro teorema de Ptolomeu nos

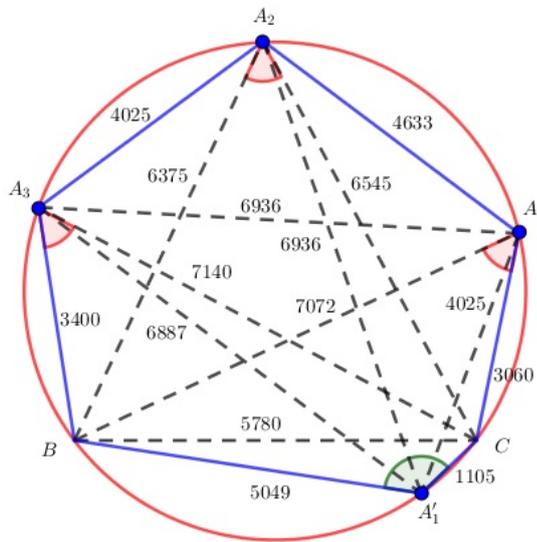
quadriláteros A_2A_3BC , A_3BCA_1 , $A_3BA'_1C$, A_1A_2BC , $A_2BA'_1C$ e $A_1BA'_1C$, obtemos

$$\overline{A_2A_3} = \frac{4025}{17}, \overline{A_1A_3} = 408, \overline{A_3A'_1} = \frac{6887}{17}, \overline{A_1A_2} = \frac{4633}{17}, \overline{A_2A'_1} = 408 \quad \text{e} \quad \overline{A_1A'_1} = \frac{4025}{17}.$$



Hexágono cíclico $A_1A_2A_3BA'_1C$ do exemplo 7

Ampliando o hexágono cíclico $A_1A_2A_3BA'_1C$ em 17 vezes obtemos o hexágono de Brahmagupta desejado.



Hexágono de Brahmagupta $A_1A_2A_3BA'_1C$ do exemplo 7

4 O TEOREMA JAPONÊS PARA POLÍGONOS CÍCLICOS CONVEXOS

4.1 Um pouco de história

Conforme escrito em um de seus artigos [AHUJA; UEGAKI; MATSUSHITA, 2004], o professor Mangho Ahuja, da Universidade de Missouri, EUA, encontrou o Teorema Japonês pela primeira vez em 1993, no artigo [MACKINNON, 1993]. Neste artigo, o autor escreveu “... eu usei o teorema acima como início para um trabalho em andamento, não esperando uma prova do mesmo (eu mesmo não posso provar sozinho)...”. Isso intrigou o professor Ahuja de forma que, no outono de 1995, ele designou tal teorema como problema para Cathy Hawn, um de seus alunos de mestrado. Na primavera de 1996, Ahuja e Hawn já tinham uma prova para o referido teorema. Tal prova pode ser encontrada em [HAWN, 1996]. Porém, uma questão permaneceu: Por que ele é chamado Teorema Japonês?

A longa pesquisa para a resposta terminou quando Ahuja recebeu um fax de quinze páginas do professor H.Yoshida, da Universidade de Kyoto. De acordo com [MIKAMI, 1905], tal teorema, caso geral, foi originado na China. Então, quando ele veio para o Japão aproximadamente em 1900, era conhecido como “O Teorema Chinês”. Tal registro se encontra em [HAYASHI, 1906].

Mais tarde, em 1905, quando Yoshio Mikami (1875-1950) o generalizou de um quadrilátero para um polígono qualquer, o nome permaneceu como “Teorema Chinês”. Então, quem alcunhou o termo “O Teorema Japonês”?

Acredita-se que, o fato deste teorema sem nome ter aparecido em 1906 num artigo [GREENSTREET, 1906] intitulado “Matemáticas Japonesas”, tenha feito com que os autores seguintes o chamassem de “O Teorema Japonês”. Este teorema, caso quadrilátero, foi inscrito em 1800 numa tábua de madeira por Ryōkwan Maruyama, num santuário xintoísta.



Sangaku do santuário de Kaizu Tenman, Shiga, Japão - 1875

De acordo com [FUKAGAWA; PEDOE, 1989], a procura por tais tábuas mostrando teoremas matemáticos, era um costume do povo japonês num período conhecido como Era Edo (1603 - 1868). Tais tábuas chamadas *Sangakus*, que significa em japonês “tábuas de madeira”, podem ser vistas por todo o Japão. O costume de se pendurar tais tábuas contendo problemas matemáticos, com figuras elegantes e coloridas, em santuários era uma forma de agradecer aos deuses pelo feito atingido e desafiar novos visitantes.



Sangaku do santuário de Konno Hachimango, Shibuya, Tóquio, Japão - 1864

O Sangaku do Teorema Japonês, caso quadrilátero, pertenceu ao santuário Tsuruoka - San'nosha, na área Ushu, atualmente, municípios de Yamagata e Akita, mas ele desapareceu. No entanto, sua inscrição foi registrada no segundo volume do *Zoku-Sinpeki-Sanpō* de Kagen Fujita [FUJITA, 1807], em 1807. Conforme tradição, Maruyama também incluiu a resposta e uma breve descrição de como chegar a ela, chamada arte do problema. Porém, ele não incluiu nenhuma prova. Segundo [FUJITA, 1807], a inscrição dizia:

“Desenhe seis linhas no círculo e faça quatro círculos inscritos em três das linhas. Se o diâmetro do círculo sul, leste e oeste é de 1 sol, 2 sóis e 3 sóis, respectivamente, qual o comprimento do diâmetro do círculo norte?”

Resposta: 4 sóis.

Arte: Adicione o diâmetro do círculo ocidental ao do leste e subtraia o do sul, e você obterá o do norte. Fim.”

Na inscrição acima, 1 sol era uma unidade de medida tradicional japonesa cujo valor é, aproximadamente, igual a 3 centímetros.

Para aprender mais sobre a história do teorema, no verão de 1999, Ahuja viajou para o Japão onde juntamente com o professor Kayo Matsushita, da Universidade de Kyoto, Japão, foram procurar referências nas bibliotecas da Universidade de Kyoto. Ao mesmo

tempo, o professor Wataru Uegaki, da Universidade de Mie, Japão, estava examinando cada documento disponível sobre o Teorema Japonês. Seus achados foram publicados em [UEGAKI, 1996].



Sangaku do santuário de Sachimiya, província de Gunma, Japão - 1824

É importante ressaltar, que o Japão era uma sociedade fechada até 1854, quando o Comodoro Perry os forçou a abrirem as portas, de forma que o Japão começou a exportar bens e conhecimentos para os países do ocidente. Os matemáticos japoneses nativos iniciaram seu contato com o mundo europeu no que ficou conhecido como *Wasan*, o que significa, matemática japonesa. A prova mais antiga do Teorema Japonês é atribuída a Tameyuki Yoshida (1819-1892) e pode ser encontrada em [YOSHIDA, s.d.].

No início do século 20, a matemática japonesa floresceu e documentos de matemáticos japoneses começaram a aparecer em periódicos ocidentais. Ainda existem aproximadamente 900 sangakus e acredita-se que milhares foram perdidos.

Na próxima seção, mostraremos a prova registrada mais antiga para o caso quadrilátero.

4.2 O teorema japonês para quadriláteros cíclicos convexos

Teorema 4.2.1 (Teorema Japonês para quadriláteros). *Adicionamos uma diagonal a um quadrilátero cíclico convexo. Se Inscrevermos círculos nos triângulos resultantes, então a soma dos inraios não dependerá da diagonal escolhida.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico convexo tal que r_a, r_b, r_c e r_d denotam, respectivamente, as medidas dos inraios dos triângulos ABD, BCA, CDB e DAC . Chamando tais triângulos, respectivamente, de T_1, T_2, T_3 e T_4 consideremos que P_i, Q_i , e S_i são os pontos de tangência do círculo C_i com T_i , onde $i = 1, 2, 3, 4$. Considerando a expressão

$$E = \overline{AB} + \overline{CD} - \overline{BC} - \overline{AD}$$

temos que

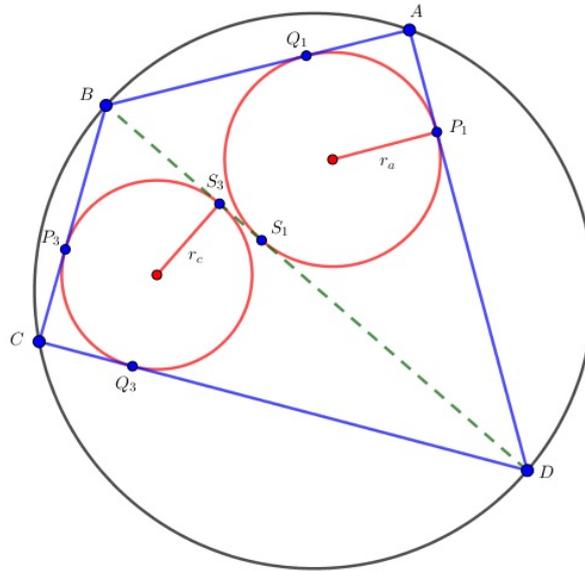
$$E = (\overline{AQ_1} + \overline{BQ_1}) + (\overline{CQ_3} + \overline{DQ_3}) - (\overline{BP_3} + \overline{CP_3}) - (\overline{AP_1} + \overline{DP_1}).$$

Pelo lema dos segmentos tangentes a um círculo (Lema 2.2.9), obtemos

$$\overline{AQ_1} = \overline{AP_1}, \overline{BQ_1} = \overline{BS_1}, \overline{BP_3} = \overline{BS_3}, \overline{CP_3} = \overline{CQ_3}, \overline{DQ_3} = \overline{DS_3}, \quad \text{e} \quad \overline{DP_1} = \overline{DS_1}$$

e portanto,

$$E = (\overline{BS_1} - \overline{BS_3}) + (\overline{DS_3} - \overline{DS_1}) = \overline{S_1S_3} + \overline{S_1S_3} = 2 \cdot \overline{S_1S_3}.$$



Primeira triangulação de $ABCD$

Por outro lado,

$$E = (\overline{AP_2} + \overline{BP_2}) + (\overline{CP_4} + \overline{DP_4}) - (\overline{BQ_2} + \overline{CQ_2}) - (\overline{AQ_4} + \overline{DQ_4}).$$

Utilizando novamente o Lema 2.2.9, podemos escrever

$$\overline{AP_2} = \overline{AS_2}, \overline{BP_2} = \overline{BQ_2}, \overline{CQ_2} = \overline{CS_2}, \overline{CP_4} = \overline{CS_4}, \overline{DP_4} = \overline{DQ_4} \quad \text{e} \quad \overline{AQ_4} = \overline{AS_4}$$

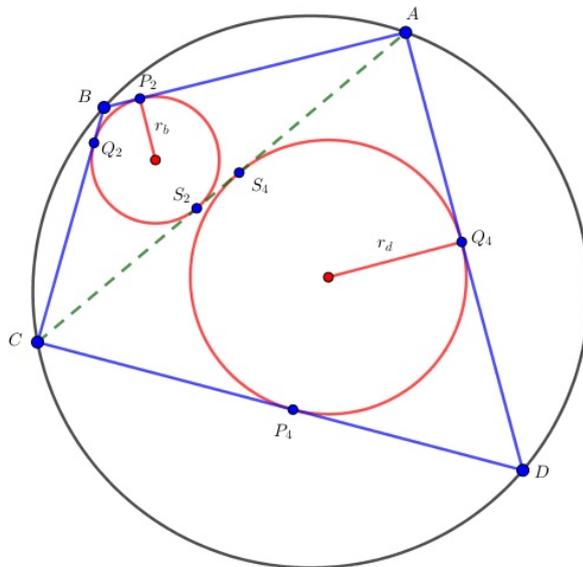
e portanto,

$$E = (\overline{AS_2} - \overline{AS_4}) + (\overline{CS_4} - \overline{CS_2}) = \overline{S_2S_4} + \overline{S_2S_4} = 2 \cdot \overline{S_2S_4}.$$

Consequentemente, devemos ter

$$2 \cdot \overline{S_1S_3} = 2 \cdot \overline{S_2S_4} \quad \implies$$

$$\overline{S_1S_3} = \overline{S_2S_4}. \quad (41)$$

Segunda triangularização de $ABCD$

Os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ são ambos inscritos no mesmo arco \widehat{AB} e portanto, podemos fazer $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 2\alpha$. Com argumento análogo, podemos escrever $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 2\beta$, $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 2\theta$ e $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = 2\gamma$. Usando tais notações, podemos escrever

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_b}{\overline{CS_2}} = \frac{r_a}{\overline{DS_1}} \implies r_b \cdot \overline{DS_1} - r_a \cdot \overline{CS_2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_b}{\overline{AS_2}} = \frac{r_c}{\overline{DS_3}} \implies r_c \cdot \overline{AS_2} - r_b \cdot \overline{DS_3} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_d}{\overline{AS_4}} = \frac{r_c}{\overline{BS_3}} \implies r_d \cdot \overline{BS_3} - r_c \cdot \overline{AS_4} = 0$$

e

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r_d}{\overline{CS_4}} = \frac{r_a}{\overline{BS_1}} \implies r_a \cdot \overline{CS_4} - r_d \cdot \overline{BS_1} = 0.$$

Somando as equações acima, membro a membro, temos que

$$r_a (\overline{CS_4} - \overline{CS_2}) + r_c (\overline{AS_2} - \overline{AS_4}) - r_b (\overline{DS_3} - \overline{DS_1}) - r_d (\overline{BS_1} - \overline{BS_3}) = 0.$$

$$\implies r_a \cdot \overline{S_2S_4} + r_c \cdot \overline{S_2S_4} - r_b \cdot \overline{S_1S_3} - r_d \cdot \overline{S_1S_3} = 0$$

$$\implies (r_a + r_c) \overline{S_2S_4} = (r_b + r_d) \overline{S_1S_3}$$

e utilizando (41), concluímos que

$$r_a + r_c = r_b + r_d.$$

□

4.3 Uma primeira aplicação do teorema japonês

Iniciaremos esta seção, apresentando a fórmula que nos dá as medidas dos segmentos tangentes ao círculo inscrito num triângulo qualquer. Tal fórmula é resultado da seguinte proposição.

Proposição 4.3.1. *Seja ABC um triângulo qualquer de semiperímetro s e tal que P, Q e S são, respectivamente, os pontos de tangência de seu círculo inscrito com os lados AB, BC e AC . Se $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então*

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = s - b \quad , \quad \overline{AP} = \overline{AS} = s - a \quad \text{e} \quad \overline{CQ} = \overline{CS} = s - c.$$

Demonstração. Sendo P, Q e S pontos de tangência do círculo inscrito em ABC e considerando I como sendo o incentro de tal triângulo, em relação aos triângulos BPI e BQI podemos afirmar que

- BI é lado comum;
- os ângulos $\angle PBI$ e $\angle QBI$ são congruentes, pois BI é bissetriz interna de $\angle PBQ$;
- os ângulos $\angle BPI$ e $\angle BQI$ também são congruentes, pois são ambos ângulos retos.

Portanto, $\Delta BPI \equiv \Delta BQI$ pelo caso de congruência (LAA_o). Daí decorre que os segmentos BP e BQ são congruentes, ou seja, $\overline{BP} = \overline{BQ}$. De forma análoga, provamos que $\overline{AP} = \overline{AS}$ e $\overline{CQ} = \overline{CS}$.

Agora, tomemos $\overline{BP} = x$, $\overline{AP} = y$ e $\overline{CQ} = z$. Com as definições dadas, temos que

$$x + y = c, \quad y + z = b \quad \text{e} \quad x + z = a.$$

Somando, membro a membro, essas três equações, temos que

$$2(x + y + z) = a + b + c \quad \implies \quad x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = s.$$

Daí concluímos que

$$x = s - (y + z) = s - b,$$

$$y = s - (x + z) = s - a,$$

e

$$z = s - (x + y) = s - c.$$

□

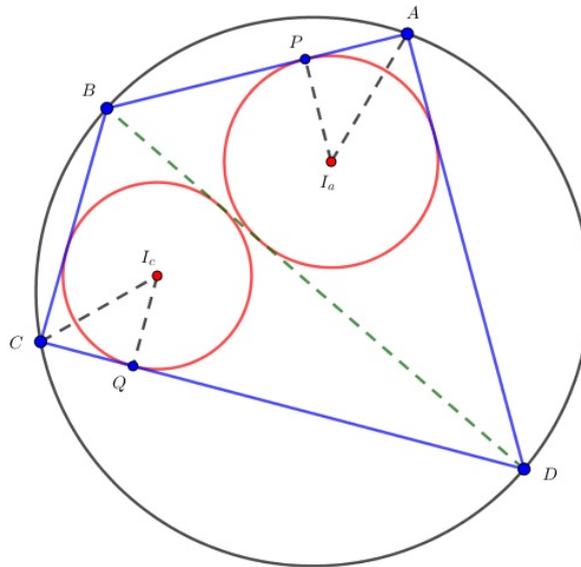
Lema 4.3.1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico convexo tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = x$ e $\overline{BD} = y$. Se r_a, r_b, r_c e r_d denotam, respectivamente, os inraios dos triângulos ABD, BCA, CDB e DAC obtidos nas triangularizações de tal quadrilátero, então*

$$r_a \cdot r_c \cdot x = r_b \cdot r_d \cdot y. \quad (42)$$

Demonstração. Vamos considerar os triângulos ABD e BCD obtidos em uma das duas possíveis triangularizações do referido quadrilátero.

Sejam P e Q os pontos de tangência dos círculos inscritos, respectivamente, com os lados AB e CD . Pela proposição anterior (Proposição 4.3.1), obtemos

$$\overline{AP} = \frac{a + d - y}{2} \quad \text{e} \quad \overline{CQ} = \frac{b + c - y}{2}.$$



Possível triangularização de $ABCD$

Sendo I_a e I_c os respectivos incentros dos triângulos ABD e BCD , podemos escrever, para os triângulos retângulos AI_aP e CI_cQ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r_a}{\overline{AP}} &\implies r_a = \frac{a + d - y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \\ &\text{e} \\ \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r_c}{\overline{CQ}} &\implies r_c = \frac{b + c - y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$4 \cdot r_a \cdot r_c = (a + d - y)(b + c - y) \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2}. \quad (43)$$

O fato de $ABCD$ ser cíclico acarreta que $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ de forma que

$$\operatorname{tg}(90^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2}}$$

e pelo fato de $\operatorname{tg} 90^\circ$ não estar definida, devemos ter que

$$1 - \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = 0 \quad \implies \quad \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = 1. \quad (44)$$

Com (44) em (43), obtemos

$$4 \cdot r_a \cdot r_c = (a + d - y)(b + c - y)$$

$$= ab + ac - ay + bd + cd - dy - by - cy + y^2.$$

Pelo primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3), temos que $xy = ac + bd$, de forma que podemos escrever

$$4 \cdot r_a \cdot r_c = ab + cd + xy - y(a + b + c + d) + y^2.$$

e multiplicando ambos os membros por x obtemos a relação

$$4 \cdot r_a \cdot r_c \cdot x = x(ab + cd) + xy(x + y - a - b - c - d). \quad (45)$$

De forma análoga, para a segunda triangularização obtemos

$$4 \cdot r_b \cdot r_d \cdot y = y(ad + bc) + xy(x + y - a - b - c - d). \quad (46)$$

Dividindo (45) por (46) podemos escrever

$$\frac{r_a \cdot r_c \cdot x}{r_b \cdot r_d \cdot y} = \frac{x(ab + cd) + xy(x + y - a - b - c - d)}{y(ad + bc) + xy(x + y - a - b - c - d)}$$

e como o segundo teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.4) nos dá

$$x(ab + cd) = y(ad + bc),$$

obtemos como resultado

$$\frac{r_a \cdot r_c \cdot x}{r_b \cdot r_d \cdot y} = 1 \quad \implies \quad r_a \cdot r_c \cdot x = r_b \cdot r_d \cdot y.$$

Agora, vamos apresentar uma primeira aplicação do teorema japonês.

Teorema 4.3.2. *Em todo quadrilátero cíclico convexo, o produto entre a diagonal de triangularização e a soma dos inversos dos inraios obtidos não depende da diagonal escolhida.*

Demonstração. Consideremos inicialmente que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico convexo tal que $\overline{AC} = x$ e $\overline{BD} = y$. Suponhamos também que r_a, r_b, r_c e r_d denotam, respectivamente, os inraios dos triângulos ABD, BCA, CDB e DAC . O produto da diagonal BD pela soma dos inversos dos inraios r_a e r_c dos triângulos obtidos pode ser escrito como

$$y \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} \right) = y \left(\frac{r_a + r_c}{r_a \cdot r_c} \right).$$

Utilizando o lema anterior, podemos escrever

$$r_a \cdot r_c = \frac{y}{x} \cdot r_b \cdot r_d$$

de forma que

$$y \left(\frac{r_a + r_c}{r_a \cdot r_c} \right) = y \left[\frac{x(r_a + r_c)}{y \cdot r_b \cdot r_d} \right] = x \left(\frac{r_a + r_c}{r_b \cdot r_d} \right).$$

Utilizando agora o teorema japonês para quadriláteros (Teorema 4.2.1) obtemos

$$r_a + r_c = r_b + r_d,$$

de onde podemos concluir que

$$y \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} \right) = y \left(\frac{r_a + r_c}{r_a \cdot r_c} \right) = x \left(\frac{r_a + r_c}{r_b \cdot r_d} \right) = x \left(\frac{r_b + r_d}{r_b \cdot r_d} \right) = x \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_d} \right).$$

4.4 Uma segunda aplicação do teorema japonês

Nesta seção, apresentaremos a definição de *ponto de Nagel* de um triângulo e mostraremos uma relação importante envolvendo o circuncentro de um quadrilátero e os pontos de Nagel dos triângulos obtidos ao triangularizarmos o mesmo. Antes porém, sugerimos ao leitor os capítulos 1 e 3 de [IEZZI, 1993a]. Tais capítulos dão uma boa noção sobre números complexos e equações polinomiais. Também seria interessante o capítulo 1 de [IEZZI, 1993b] pra uma noção elementar sobre geometria analítica. Tais noções serão importantes no que segue.

Todo número complexo $z_A = x + yi$ pode ser associado de maneira biunívoca a um ponto $A(x, y)$ do plano cartesiano. O ponto $A(x, y)$ é chamado *afixo* de z_A e o complexo

z_A é chamado de *coordenadas* do ponto $A(x, y)$. Se um ponto $P(x, y)$ divide um segmento AB numa determinada razão r , podemos escrever

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r.$$

Neste caso, as projeções do segmento AB sobre os eixos OX e OY também são divididas na mesma razão r . De fato, seja Q o ponto de interseção da reta paralela ao eixo OY , passando por A , com a reta paralela ao eixo OX , passando por B . Por outro lado, seja R o ponto de interseção da reta paralela ao eixo OY , passando por P , com a reta paralela ao eixo OX , passando por B . Finalmente, consideremos que S é o ponto de interseção da reta paralela ao eixo OY , passando por A , com a reta paralela ao eixo OX , passando por P .

Considerando $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, pelo teorema de Tales, temos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{RB}} \implies \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \implies x - x_1 = rx_2 - rx \implies x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

e

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SQ}} \implies \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r \implies y - y_1 = ry_2 - ry \implies y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}.$$

Se considerarmos A, B e P como afixos dos complexos z_A, z_B e z_P , podemos escrever simplesmente

$$z_P = \frac{z_A + rz_B}{1 + r}. \quad (47)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right) = \frac{1}{1 + r} (x_1 + rx_2, y_1 + ry_2) \\ &= \frac{1}{1 + r} [(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)] = \frac{1}{1 + r} [z_A + rz_B] = \frac{z_A + rz_B}{1 + r}. \end{aligned}$$

Exemplo: Se M é ponto médio de um segmento AB , então as coordenadas de M são dadas por

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

De fato, como M é ponto médio de AB , temos que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1 \implies z_M = \frac{z_A + 1 \cdot z_B}{1 + 1} \implies z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Se $z = x + yi$ é um complexo, definimos o seu *conjugado* como sendo o complexo

\bar{z} tal que $\bar{z} = x - yi$. A *norma* ou *módulo* de z , denotada por $|z|$, será dada por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definição 4.4.1 (Produto real entre dois complexos). O *produto real* entre os complexos z_1 e z_2 , denotado por $z_1 \cdot z_2$, é o número real

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2).$$

Repare que se considerarmos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, temos, pela definição acima, que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \frac{1}{2} [(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)] \\ &= \frac{1}{2} (x_1 x_2 + x_1 y_2 i - x_2 y_1 i + y_1 y_2 + x_1 x_2 - x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2) \\ &= \frac{1}{2} (2x_1 x_2 + 2y_1 y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \end{aligned}$$

que de fato é um número real.

O produto real é o análogo do produto escalar entre vetores. Para não causar confusão, iremos denotar a operação de multiplicação entre os complexos z_1 e z_2 sem o ponto, ou seja, simplesmente por $z_1 z_2$. Também podemos observar que o quadrado da norma de z é igual ao produto real de z por ele próprio, ou seja,

$$|z|^2 = z \cdot z.$$

Definição 4.4.2 (Produto complexo entre dois complexos). O *produto complexo* entre os complexos z_1 e z_2 , denotado por $z_1 \times z_2$, é o número imaginário puro

$$z_1 \times z_2 = \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2).$$

Se considerarmos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= \frac{1}{2} [(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)] \\ &= \frac{1}{2} (x_1 x_2 + x_1 y_2 i - x_2 y_1 i + y_1 y_2 - x_1 x_2 + x_1 y_2 i - x_2 y_1 i - y_1 y_2) \\ &= \frac{1}{2} (2x_1 y_2 - 2x_2 y_1) i = (x_1 y_2 - x_2 y_1) i \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} i \end{aligned}$$

que é, de fato, imaginário puro. O produto complexo é o análogo do produto cruzado entre vetores. Repare ainda que se os complexos z_1 e z_2 forem colineares, o produto complexo entre eles se anulará, ou seja, $z_1 \times z_2 = 0$. Isso ocorre pois, neste caso, tais complexos serão múltiplos um do outro, fazendo com que o determinante acima tenha duas linhas proporcionais e portanto, valor nulo.

Proposição 4.4.1. *Sejam A', B' e C' pontos dos lados BC, CA e AB de um triângulo tais que AA', BB' e CC' se intersectam num ponto Q de forma que*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{p}{n}, \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{m}{p} \quad e \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{n}{m}.$$

Se A, B e C são os respectivos afijos dos complexos z_A, z_B e z_C , então as coordenadas do ponto Q serão dadas por

$$z_Q = \frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m + n + p}. \quad (48)$$

Demonstração. Sejam $z_{A'}, z_{B'}$ e $z_{C'}$ as respectivas coordenadas dos pontos A', B' e C' . Usando o resultado (47), podemos escrever

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{z_B + \frac{p}{n} \cdot z_C}{1 + \frac{p}{n}} = \frac{\frac{nz_B + pz_C}{n}}{\frac{n+p}{n}} \implies z_{A'} = \frac{nz_B + pz_C}{n+p}, \\ z_{B'} &= \frac{z_C + \frac{m}{p} \cdot z_A}{1 + \frac{m}{p}} = \frac{\frac{mz_A + pz_C}{p}}{\frac{m+p}{p}} \implies z_{B'} = \frac{mz_A + pz_C}{m+p} \\ &\quad e \\ z_{C'} &= \frac{z_A + \frac{n}{m} \cdot z_B}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{\frac{mz_A + nz_B}{m}}{\frac{m+n}{m}} \implies z_{C'} = \frac{mz_A + nz_B}{m+n}. \end{aligned}$$

Supondo que $z_{Q'} = \frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m+n+p}$ seja as coordenadas de um ponto Q' , vamos mostrar que A, Q' e A' são colineares. Como

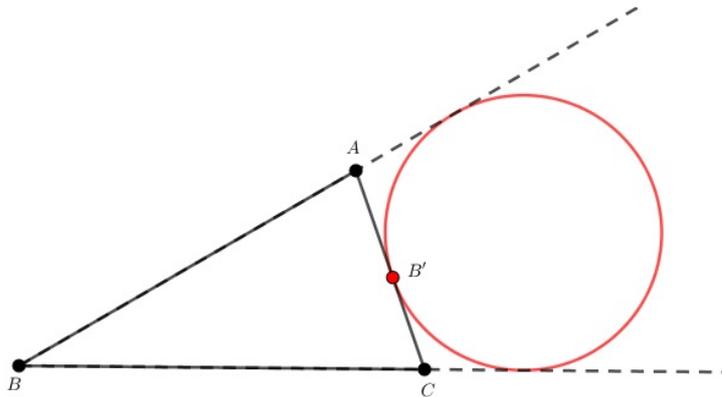
$$\begin{aligned} (z_{Q'} - z_A) \times (z_{A'} - z_A) &= \left(\frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m+n+p} - z_A \right) \times \left(\frac{nz_B + pz_C}{n+p} - z_A \right) \\ &= \left[\frac{nz_B + pz_C - (n+p)z_A}{m+n+p} \right] \times \left[\frac{nz_B + pz_C - (n+p)z_A}{n+p} \right] \\ &= [nz_B + pz_C - (n+p)z_A] \times [nz_B + pz_C - (n+p)z_A] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, A, Q' e A' são colineares. De maneira análoga prova-se que B, Q' e B' , assim como C, Q' e C' também são colineares e conseqüentemente, os segmentos AA', BB' e CC' concorrem no ponto Q' . Como tal ponto de concorrência é único, temos que $Q' = Q$

e portanto, as coordenadas do ponto Q são dadas pelo complexo $z_Q = z_{Q'}$, ou seja,

$$z_Q = \frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m + n + p}.$$

Para a próxima proposição, é necessário lembrar que o *círculo ex-inscrito* de um triângulo com um de seus lados, AC por exemplo, é o círculo tangente exteriormente à AC e às retas suportes dos outros dois lados. Todo triângulo admite três círculos ex-inscritos.



Exemplo de círculo ex-inscrito num triângulo com seu lado AC

Proposição 4.4.2. *Seja ABC um triângulo de semiperímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se A' , B' e C' são, respectivamente, os pontos de tangência, dos círculos ex-inscritos ao triângulo ABC com os lados BC , AC e AB , então*

$$\overline{BA'} = s - c, \quad \overline{A'C} = s - b, \quad \overline{CB'} = s - a, \quad \overline{B'A} = s - c, \quad \overline{AC'} = s - b \quad \text{e} \quad \overline{C'B} = s - a.$$

Demonstração. Consideremos o círculo ex-inscrito ao triângulo, relativo ao lado AC . Sejam P e Q os pontos de tangência de tal círculo com as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{BC} , respectivamente. Fazendo $\overline{B'A} = x$ e $\overline{CB'} = y$, pelo lema dos segmentos tangentes a um círculo (Lema 2.2.9) sabemos que $\overline{BP} = \overline{BQ}$, $\overline{AP} = \overline{B'A}$ e $\overline{CQ} = \overline{CB'}$. Portanto

$$\begin{aligned} \overline{BP} = \overline{BQ} &\implies x + c = a + y \implies 2x + c = a + x + y \implies 2x + c = a + b \\ &\implies x = \frac{a + b - c}{2} \implies x = s - c. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$y = b - x \implies y = b - \frac{a + b - c}{2} \implies y = \frac{-a + b + c}{2} \implies y = s - a.$$

De forma análoga, considerando os outros dois círculos, provamos as demais relações.

Proposição 4.4.3. *Seja ABC um triângulo qualquer de semiperímetro s . Se A', B' e C' denotam, respectivamente, os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com os lados BC, AC e AB , então AA', BB' e CC' concorrem num mesmo ponto.*

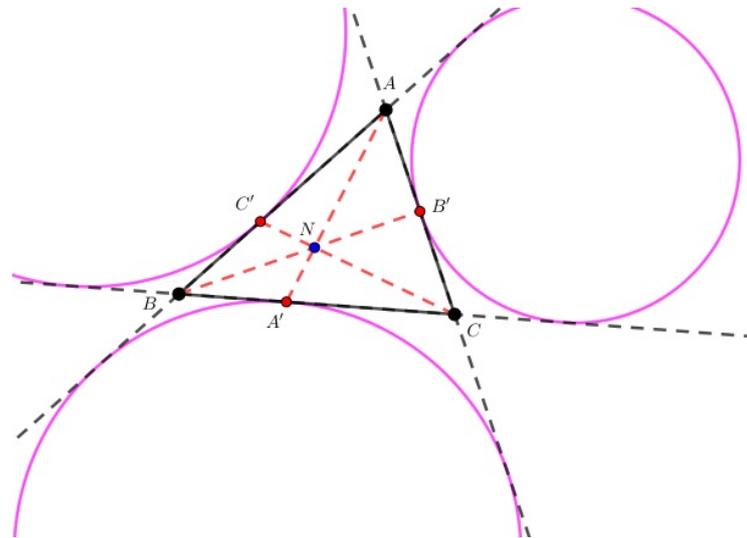
Demonstração. Fazendo $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, pela proposição anterior temos que

$$\overline{BA'} = s - c, \overline{A'C} = s - b, \overline{CB'} = s - a, \overline{B'A} = s - c, \overline{AC'} = s - b \quad \text{e} \quad \overline{C'B} = s - a.$$

$$\implies \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{s - c}{s - b} \cdot \frac{s - a}{s - c} \cdot \frac{s - b}{s - a} = 1$$

e, pelo teorema de Ceva (Teorema 2.1.3), temos que AA', BB' e CC' de fato concorrem num mesmo ponto.

Tal ponto será denotado por N e na literatura é conhecido como *Ponto de Nagel*, devido ao matemático alemão do século XIX Christian Heinrich von Nagel (1803 - 1882).



Ponto de Nagel de um triângulo ABC

Se os vértices A, B, C de um triângulo forem, respectivamente, afixos dos complexos z_A, z_B, z_C e considerarmos $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, podemos utilizar a equação (48) para escrever as coordenadas z_N de seu respectivo ponto de Nagel. Sendo s o semiperímetro de ABC , como

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{s - c}{s - b}, \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{s - a}{s - c} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{s - b}{s - a},$$

temos, pelo resultado (48), que

$$z_N = \frac{(s - a)z_A + (s - b)z_B + (s - c)z_C}{(s - a) + (s - b) + (s - c)} = \frac{1}{s} \cdot [(s - a)z_A + (s - b)z_B + (s - c)z_C]$$

$$\implies z_N = \left(1 - \frac{a}{s}\right)z_A + \left(1 - \frac{b}{s}\right)z_B + \left(1 - \frac{c}{s}\right)z_C. \quad (49)$$

Teorema 4.4.1. *Seja ABC um triângulo de semiperímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se r e R denotam, respectivamente, as medidas do inraio e circunraio de ABC , então a, b e c são raízes da equação cúbica*

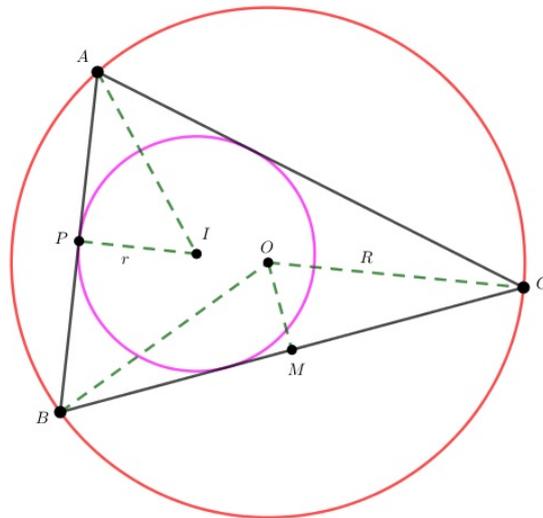
$$t^3 - 2st^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)t - 4sRr = 0. \quad (50)$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle A$ é ângulo inscrito sobre o menor arco \widehat{BC} de forma que $\widehat{A} = \frac{B\widehat{O}C}{2}$, onde O denota o circuncentro de ABC . Por outro lado, o triângulo OBC é isósceles pois $\overline{OB} = \overline{OC} = R$ e sendo M o ponto médio de BC temos, para o triângulo OMC , retângulo em M , que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{B\widehat{O}C}{2}\right) = \frac{a}{2R} \implies \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R} \implies a = 2R \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}.$$

Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, podemos escrever

$$a = 4R \cdot \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{A}}{2}. \quad (51)$$



Triângulo ABC do Teorema 4.4.1

Por outro lado, sendo I o incentro de ABC e P o ponto de tangência do círculo inscrito com o lado AB , temos para o triângulo API , retângulo em P , que

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{\overline{AP}}$$

e usando a fórmula que nos dá as medidas dos segmentos tangentes num triângulo (Proposição 4.3.1), podemos escrever

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{s-a} \implies \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{r}{s-a}$$

$$\implies \cos \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{s-a}{r} \cdot \sin \frac{\widehat{A}}{2}. \quad (52)$$

Substituindo (52) em (51), temos

$$\begin{aligned} a &= 4R \cdot \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \frac{s-a}{r} \cdot \sin \frac{\widehat{A}}{2} \\ \implies \sin^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) &= \frac{ar}{4R(s-a)} \end{aligned}$$

e conseqüentemente, do resultado (52) obtemos

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) &= \frac{(s-a)^2}{r^2} \cdot \sin^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) = \frac{(s-a)^2}{r^2} \cdot \frac{ar}{4R(s-a)} \\ \implies \cos^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) &= \frac{a(s-a)}{4Rr}. \end{aligned}$$

Pela relação fundamental da trigonometria,

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) &= 1 \implies \frac{ar}{4R(s-a)} + \frac{a(s-a)}{4Rr} = 1 \\ \implies \frac{ar^2 + a(s-a)^2}{4Rr(s-a)} &= 1 \implies ar^2 + a(s-a)^2 = 4Rr(s-a) \\ \implies ar^2 + a(s^2 - 2sa + a^2) &= 4Rr(s-a) \\ \implies a^3 - 2sa^2 + r^2a + s^2a + 4Rra - 4sRr &= 0 \\ \implies a^3 - 2sa^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)a - 4sRr &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a é raiz da equação (50). De forma análoga podemos provar que b e c também são raízes.

Usando as relações entre coeficientes e raízes para a equação (50), obtemos as relações

$$a + b + c = 2s, \quad (53)$$

$$ab + ac + bc = s^2 + r^2 + 4Rr, \quad (54)$$

e

$$abc = 4sRr. \quad (55)$$

Neste caso, tais resultados acarretam outras duas relações, sendo estas dadas por

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr) \quad (56)$$

e

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr). \quad (57)$$

De fato, pois

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

e usando as relações (53) e (54), temos que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2s)^2 - 2(s^2 + r^2 + 4Rr) = 4s^2 - 2s^2 - 2r^2 - 8Rr \\ &= 2s^2 - 2r^2 - 8Rr = 2(s^2 - r^2 - 4Rr). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$$

onde, usando as relações (53), (54) e (55), podemos escrever

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 2s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr - s^2 - r^2 - 4Rr) + 12sRr \\ &= 2s(s^2 - 3r^2 - 12Rr) + 12sRr = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr). \end{aligned}$$

Afim de que as contas não fiquem carregadas, usaremos na demonstração do próximo teorema a notação de somatório cíclico, denotada por \sum_{cic} . Um somatório cíclico é um somatório onde as variáveis podem ser permutadas. Dois exemplos de somatórios cíclicos sobre as variáveis a, b, c e d são

$$\sum_{cic} a^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \quad \text{e} \quad \sum_{cic} ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Teorema 4.4.2. *Seja ABC um triângulo de circunraio R e inraio r . Se O e N denotam, respectivamente, o circuncentro e o ponto de Nagel de ABC , então*

$$\overline{ON} = R - 2r.$$

Demonstração. Seja z_N as coordenadas do ponto de Nagel do triângulo ABC de semiperímetro s e tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Fixando o circuncentro O na origem do plano complexo, temos que

$$\overline{ON}^2 = |z_N|^2 = z_N \cdot z_N,$$

onde $z_N \cdot z_N$ denota o produto real de z_N por ele próprio. Pela equação (49), obtemos

$$z_N = \left(1 - \frac{a}{s}\right) z_A + \left(1 - \frac{b}{s}\right) z_B + \left(1 - \frac{c}{s}\right) z_C,$$

onde z_A , z_B e z_C denotam, respectivamente, as coordenadas dos vértices A , B e C do referido triângulo. Consequentemente,

$$\overline{ON}^2 = \left[\left(1 - \frac{a}{s}\right) z_A + \left(1 - \frac{b}{s}\right) z_B + \left(1 - \frac{c}{s}\right) z_C \right] \cdot \left[\left(1 - \frac{a}{s}\right) z_A + \left(1 - \frac{b}{s}\right) z_B + \left(1 - \frac{c}{s}\right) z_C \right]$$

Como $|z_A| = |z_B| = |z_C| = R$, segue que

$$\overline{ON}^2 = R^2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) z_A \cdot z_B. \quad (58)$$

Sendo $c = |z_A - z_B|$, podemos escrever

$$c^2 = |z_A - z_B|^2 = |z_A|^2 - 2(z_A \cdot z_B) + |z_B|^2 = R^2 - 2(z_A \cdot z_B) + R^2 \implies 2(z_A \cdot z_B) = 2R^2 - c^2$$

$$\implies z_A \cdot z_B = R^2 - \frac{c^2}{2} \quad (59)$$

e substituindo (59) em (58), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{ON}^2 &= R^2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) \left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) \\ &= R^2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + 2R^2 \cdot \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) - \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) c^2. \end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente os somatórios acima.

$$\mathbf{1}^\circ) \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{s}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{s}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2 = 3 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{s} + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}$$

$$= 3 - 2 \cdot \frac{2s}{s} + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2} = -1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}.$$

$$\begin{aligned}
2^\circ) \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) &= \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) + \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{c}{s}\right) + \left(1 - \frac{b}{s}\right) \left(1 - \frac{c}{s}\right) \\
&= 3 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{s} + \frac{ab+ac+bc}{s^2} = 3 - 2 \cdot \frac{2s}{s} + \frac{ab+ac+bc}{s^2} = -1 + \frac{ab+ac+bc}{s^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^\circ) \sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) c^2 &= \sum_{cic} \left(1 - \frac{a+b}{s} + \frac{ab}{s^2}\right) c^2 \\
&= \sum_{cic} c^2 - \frac{1}{s} \cdot \sum_{cic} (a+b) c^2 + \frac{1}{s^2} \cdot \sum_{cic} abc^2 \\
&= \sum_{cic} c^2 - \frac{1}{s} \cdot \sum_{cic} (2s-c) c^2 + \frac{1}{s^2} \cdot abc(a+b+c).
\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula para o circunraio de um triângulo (Teorema 2.1.5), podemos substituir abc na expressão anterior por $4RS$, onde S é a área do triângulo, de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) c^2 &= \sum_{cic} c^2 - 2 \cdot \sum_{cic} c^2 + \frac{1}{s} \cdot \sum_{cic} c^3 + \frac{1}{s^2} \cdot 4RS \cdot 2s. \\
&= -\sum_{cic} c^2 + \frac{1}{s} \cdot \sum_{cic} c^3 + 8R \cdot \frac{S}{s}.
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando a fórmula para a área de um triângulo em função do semi-perímetro (Lema 2.1.6), podemos substituir $\frac{S}{s}$ por r e desta forma, reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
\sum_{cic} \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{b}{s}\right) c^2 &= -\sum_{cic} c^2 + \frac{1}{s} \cdot \sum_{cic} c^3 + 8Rr \\
&= -(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{s} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) + 8Rr.
\end{aligned}$$

Tendo calculado os somatórios, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\overline{ON}^2 &= R^2 \left(-1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2}\right) + 2R^2 \left(-1 + \frac{ab + ac + bc}{s^2}\right) \\
&\quad - \left[-(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{s} (a^3 + b^3 + c^3) + 8Rr\right] \\
&= R^2 \left[-1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} - 2 + 2 \cdot \frac{ab + ac + bc}{s^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{s} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - 8Rr \\
= & R^2 \left[-3 + \frac{(a+b+c)^2}{s^2} \right] + (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{s} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - 8Rr \\
= & R^2 \left[-3 + \frac{(2s)^2}{s^2} \right] + (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{s} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - 8Rr \\
= & R^2 + (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{s} \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - 8Rr.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as relações (56) e (57), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{ON}^2 &= R^2 + 2s^2 - 2r^2 - 8Rr - 2s^2 + 6r^2 + 12Rr - 8Rr \\
&= R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R - 2r)^2 \\
\implies \overline{ON} &= R - 2r. \tag{60}
\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de apresentar uma segunda aplicação para o teorema japonês. Tal aplicação se encontra no próximo teorema.

Teorema 4.4.3. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito num círculo de centro O . Se N_a, N_b, N_c e N_d denotam, respectivamente, os pontos de Nagel dos triângulos ABD, BCA, CDB e DAC , então*

$$\overline{ON_a} + \overline{ON_c} = \overline{ON_b} + \overline{ON_d}.$$

Demonstração. Pela relação (60), podemos escrever

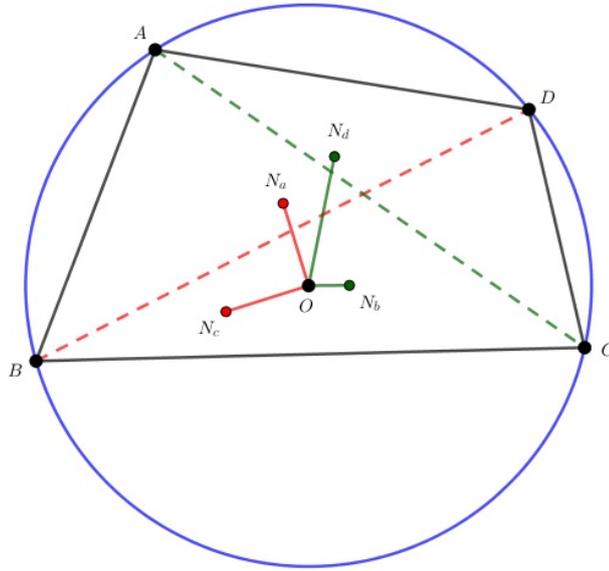
$$\overline{ON_a} + \overline{ON_c} = R - 2r_a + R - 2r_c = 2R - 2(r_a + r_c).$$

Por outro lado, usando o teorema japonês para quadriláteros (Teorema 4.2.1), obtemos

$$r_a + r_c = r_b + r_d$$

e conseqüentemente,

$$\overline{ON_a} + \overline{ON_c} = 2R - 2(r_b + r_d) = R - 2r_b + R - 2r_d = \overline{ON_b} + \overline{ON_d}.$$



Pontos de Nagel num quadrilátero $ABCD$

O teorema anterior afirma que para qualquer quadrilátero cíclico convexo, a soma das distâncias de seu circuncentro O até os pontos de Nagel dos triângulos obtidos em uma triangularização não depende da triangularização escolhida.

4.5 O teorema japonês para polígonos cíclicos convexos

Iremos agora, generalizar o Teorema Japonês para um polígono cíclico convexo qualquer. Daremos aqui, duas demonstrações para tal teorema. Na primeira, utilizaremos o teorema de Carnot para triângulos e na segunda, utilizaremos o princípio de indução.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), preparou-se para a carreira das armas, estudou na escola militar de Mézières, tornando-se capitão de engenharia em 1783. Em 1784 escreveu seu primeiro trabalho matemático, sobre mecânica, onde se encontra a mais antiga demonstração de que há perda de energia cinética no choque de corpos imperfeitamente elásticos. Com o estouro da Revolução Francesa, lançou-se na política, ocupando diversos cargos políticos e, em 1793, votou pela execução de Luis XVI como traidor. Em 1796 opôs-se ao golpe de estado de Napoleão, tendo que fugir para Genebra, onde escreveu um trabalho semifilosófico sobre a metafísica do cálculo.



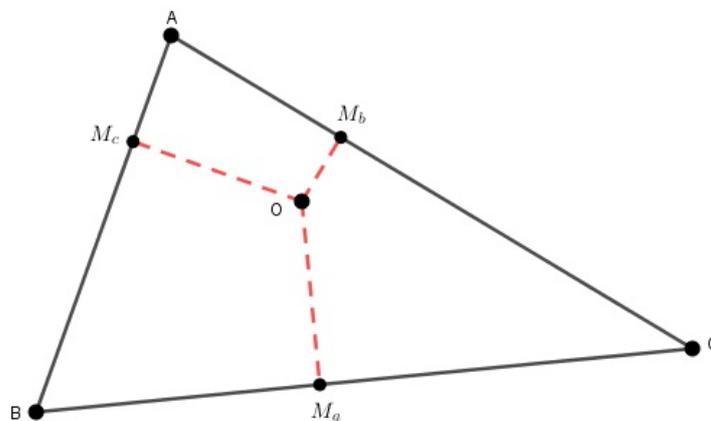
Uma possível imagem de Carnot retirada do site wikipedia.org

Suas duas contribuições importantes à geometria, *Géométrie de Position* e *Essai sur la Théorie des Transversals*, foram publicadas em 1803 e 1806. Em 1814, se ofereceu a lutar pela França, mas não pelo império. Com a Restauração, foi exilado, vindo a falecer em Madgeburg, cercado por dificuldades financeiras.

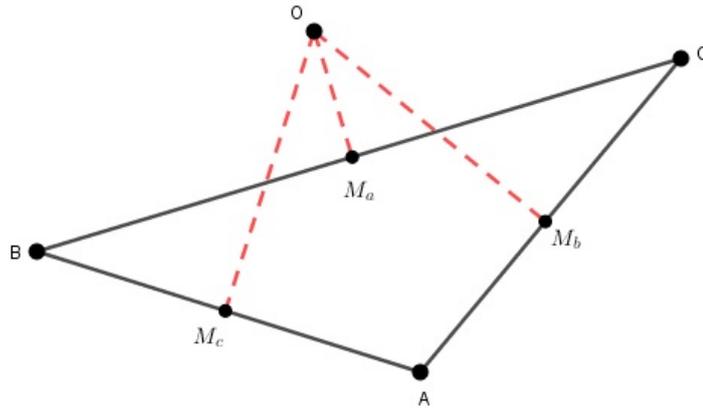
É na *Géométrie de Position* de Carnot que se encontra pela primeira vez o emprego sistemático de grandezas orientadas na geometria sintética.

Antes de demonstrarmos o teorema de Carnot, é importante fixarmos a seguinte convenção, que também será utilizada para a primeira prova do teorema japonês.

Uma determinada distância será negativa quando seu segmento correspondente estiver completamente fora do triângulo em questão. Caso contrário, tal distância será positiva.



Distâncias OM_a , OM_b e OM_c positivas



Distância OM_a negativa e distâncias OM_b e OM_c positivas

Tal convenção nos permite enunciar o teorema de Carnot de maneira simplificada. Também utilizaremos aqui o teorema da base média para triângulos. Tal teorema pode ser encontrada nas páginas 107 e 108 de [BARBOSA, 2012]. Aqui somente enunciaremos tal teorema.

Lema 4.5.1 (Teorema da base média para triângulos). *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Lema 4.5.2 (Teorema de Carnot). *Se ABC é um triângulo qualquer de inraio r e circunraio R , então a soma das distâncias do circuncentro de ABC aos seus respectivos lados é igual a $r + R$.*

Demonstração. Sendo S e O , respectivamente, a área e o circuncentro do triângulo ABC , iremos adotar aqui que OM_a, OM_b e OM_c denotam as respectivas distâncias de O aos lados BC, AC e AB , onde $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Vamos dividir a demonstração em três casos.

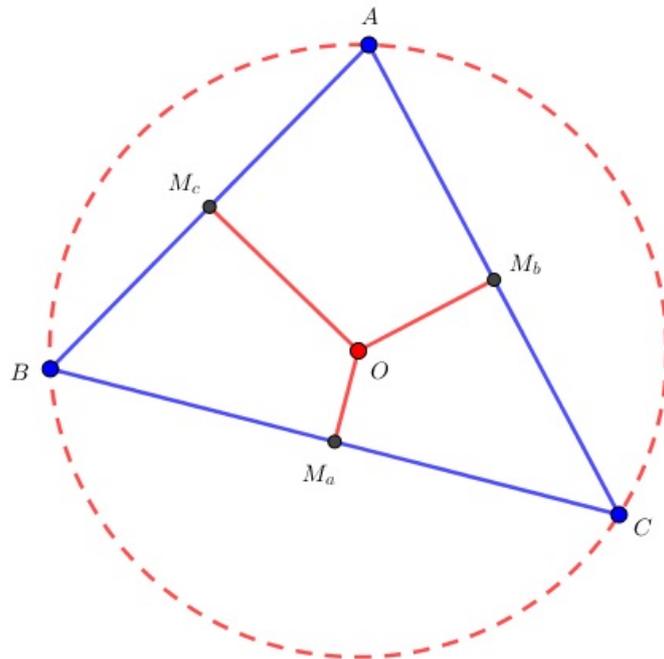
1º caso: ABC é acutângulo. Neste caso, temos que os triângulos AOB, BOC e AOC , de áreas S_{AOB}, S_{BOC} e S_{AOC} , particionam o triângulo ABC de forma que

$$S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = S.$$

Usando a fórmula para área de um triângulo em função de seu semi-perímetro (Lema 2.1.6) no o triângulo ABC , podemos reescrever tal relação como

$$\frac{c \cdot \overline{OM_c}}{2} + \frac{a \cdot \overline{OM_a}}{2} + \frac{b \cdot \overline{OM_b}}{2} = s \cdot r, \quad (61)$$

onde s denota o semi-perímetro de ABC .



Teorema de Carnot - 1º caso

Por outro lado, de acordo com a Proposição 2.2.1 os quadriláteros M_cBM_aO , M_aCM_bO e M_bAM_cO são cíclicos pois possuem ângulos opostos suplementares. Aplicando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3) em tais quadriláteros e observando que M_a , M_b e M_c são pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente, podemos escrever

$$M_cBM_aO \text{ cíclico} \implies \frac{a}{2} \cdot \overline{OM_c} + \frac{c}{2} \cdot \overline{OM_a} = \frac{b}{2} \cdot R \quad (62)$$

$$M_aCM_bO \text{ cíclico} \implies \frac{a}{2} \cdot \overline{OM_b} + \frac{b}{2} \cdot \overline{OM_a} = \frac{c}{2} \cdot R \quad (63)$$

$$M_bAM_cO \text{ cíclico} \implies \frac{c}{2} \cdot \overline{OM_b} + \frac{b}{2} \cdot \overline{OM_c} = \frac{a}{2} \cdot R \quad (64)$$

Vale observar que para o segundo membro das equações acima, utilizamos a propriedade da base média de um triângulo.

Somando, membro a membro, as equações dadas por (61), (62), (63) e (64), obtemos

$$\overline{OM_a} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) + \overline{OM_b} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) + \overline{OM_c} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = R \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) + s \cdot r.$$

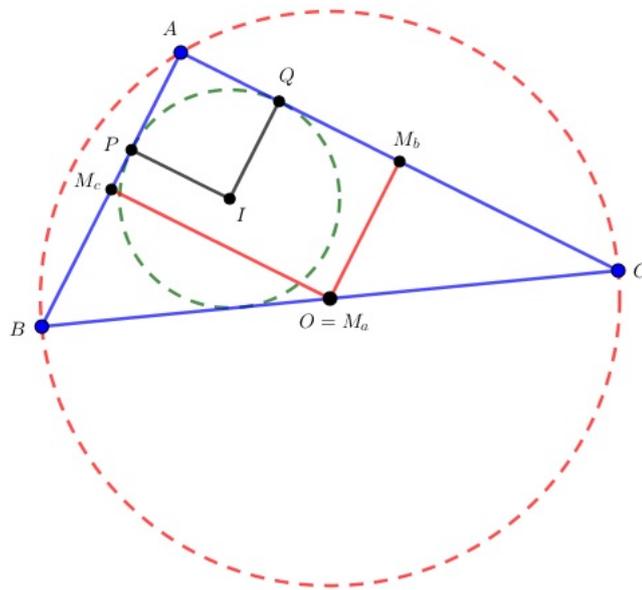
$$\implies \overline{OM_a} \cdot s + \overline{OM_b} \cdot s + \overline{OM_c} \cdot s = R \cdot s + r \cdot s$$

$$\implies (\overline{OM_a} + \overline{OM_b} + \overline{OM_c}) s = (R + r) s$$

$$\implies \overline{OM_a} + \overline{OM_b} + \overline{OM_c} = r + R$$

$$\implies OM_a + OM_b + OM_c = r + R.$$

2º caso: ABC é retângulo. Neste caso, sendo I o incentro do triângulo ABC , temos que, se P e Q são os pontos de tangência do círculo inscrito em ABC respectivamente com os lados AB e AC , então o quadrilátero $APIQ$ é retângulo. Consequentemente, $\overline{AP} = \overline{AQ} = r$.



Teorema de Carnot - 2º caso

Pela fórmula que nos dá a medida dos segmentos tangentes num triângulo (Proposição 4.3.1) aplicada ao triângulo ABC , temos que

$$\overline{AP} = r = s - a \implies r = \frac{a + b + c}{2} - a \implies r = \frac{b + c - a}{2}.$$

Além disso, como ABC é retângulo, vem que

$$R = \frac{a}{2}.$$

Consequentemente,

$$r + R = \frac{b + c - a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{b + c}{2}$$

$$\implies r + R = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} = \overline{AM_c} + \overline{AM_b}$$

e como o quadrilátero AM_cOM_b também é retângulo, temos que

$$AM_c = OM_b \quad \text{e} \quad AM_b = OM_c \quad \implies \quad r + R = \overline{OM_b} + \overline{OM_c}$$

$$\implies \quad r + R = OM_a + OM_b + OM_c,$$

já que neste caso, a distância OM_a é nula.

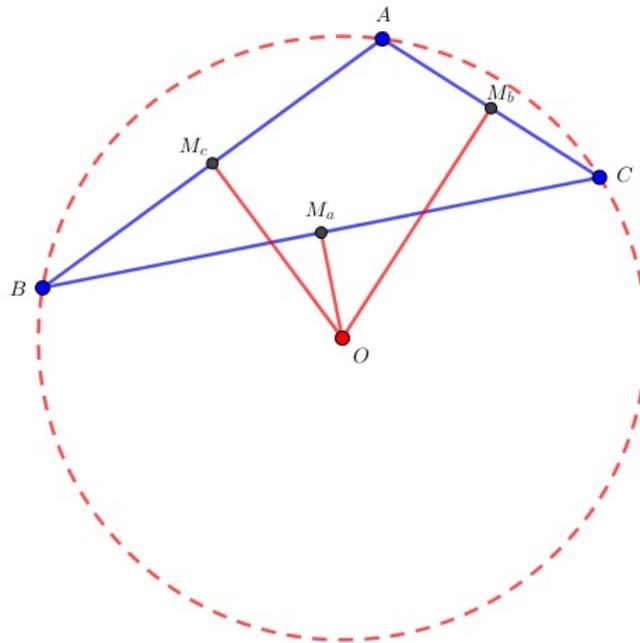
3º caso: ABC é obtusângulo. Neste caso, a relação entre as áreas dos triângulos AOB , BOC , AOC e ABC é dada por

$$S_{AOB} + S_{AOC} = S_{BOC} + S$$

$$\implies \quad S_{AOB} - S_{BOC} + S_{AOC} = S.$$

Usando novamente o Lema 2.1.6 para o triângulo ABC , podemos reescrever a relação anterior como

$$\frac{c \cdot \overline{OM_c}}{2} - \frac{a \cdot \overline{OM_a}}{2} + \frac{b \cdot \overline{OM_b}}{2} = s \cdot r. \quad (65)$$



Teorema de Carnot - 3º caso

Por outro lado, no quadrilátero M_aOCM_b os ângulos $\angle CM_aO$ e $\angle CM_bO$ são ambos ângulos retos e portanto os pontos M_a e M_b estão sobre o mesmo arco capaz relativo ao segmento OC . Conseqüentemente, o círculo que contém tal arco capaz circunscreve M_aOCM_b . Com argumento análogo, mostramos que o quadrilátero M_cBOM_a também é cíclico. Já para o quadrilátero M_bAM_cO , a Proposição 2.2.1 nos garante que tal qua-

drilátero é cíclico pois este possui os ângulos $\angle OM_bA$ e $\angle AM_cO$, ambos ângulos retos, suplementares.

Aplicando o primeiro teorema de Ptolomeu (Teorema 2.2.3) em tais quadriláteros e usando argumentos análogos aos do caso quando ABC é acutângulo, podemos escrever

$$M_aOCM_b \text{ cíclico} \implies \frac{c}{2} \cdot R + \frac{b}{2} \cdot \overline{OM_a} = \frac{a}{2} \cdot \overline{OM_b} \quad (66)$$

$$M_bAM_cO \text{ cíclico} \implies \frac{b}{2} \cdot \overline{OM_c} + \frac{c}{2} \cdot \overline{OM_b} = \frac{a}{2} \cdot R \quad (67)$$

$$M_cBOM_a \text{ cíclico} \implies \frac{c}{2} \cdot \overline{OM_a} + \frac{b}{2} \cdot R = \frac{a}{2} \cdot \overline{OM_c} \quad (68)$$

Somando, membro a membro, as equações dadas por (65), (66), (67) e (68) obtemos, após escrevermos de forma conveniente,

$$-\overline{OM_a} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) + \overline{OM_b} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) + \overline{OM_c} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = R \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) + s \cdot r.$$

$$\implies (-\overline{OM_a} + \overline{OM_b} + \overline{OM_c}) \cdot s = (r + R) \cdot s$$

$$\implies -\overline{OM_a} + \overline{OM_b} + \overline{OM_c} = r + R$$

que pela convenção adotada para o sinal das distância, podemos escrever

$$OM_a + OM_b + OM_c = r + R.$$

Teorema 4.5.3 (Teorema Japonês Generalizado). *Se triangularizarmos um polígono cíclico convexo a partir de um vértice qualquer e inscrevermos em cada triângulo um círculo, então a soma de todos os inraios não dependerá do vértice escolhido.*

Primeira Demonstração. Seja $P(n)$ um polígono cíclico convexo com n lados e cujos vértices são A_1, A_2, \dots, A_n , com $n \geq 3$.

Escolhendo um vértice qualquer para triangularizarmos $P(n)$, tal triangularização irá gerar um total de $(n - 2)$ triângulos. Isso se deve ao fato de que temos um total de $(n - 3)$ diagonais partindo do vértice escolhido e que tais diagonais determinam $(n - 3) + 1$ triângulos interiores à $P(n)$. Sendo O o circuncentro do referido polígono, vamos definir a medida OX_i

$$OX_i = OM_{ai} + OM_{bi} + OM_{ci},$$

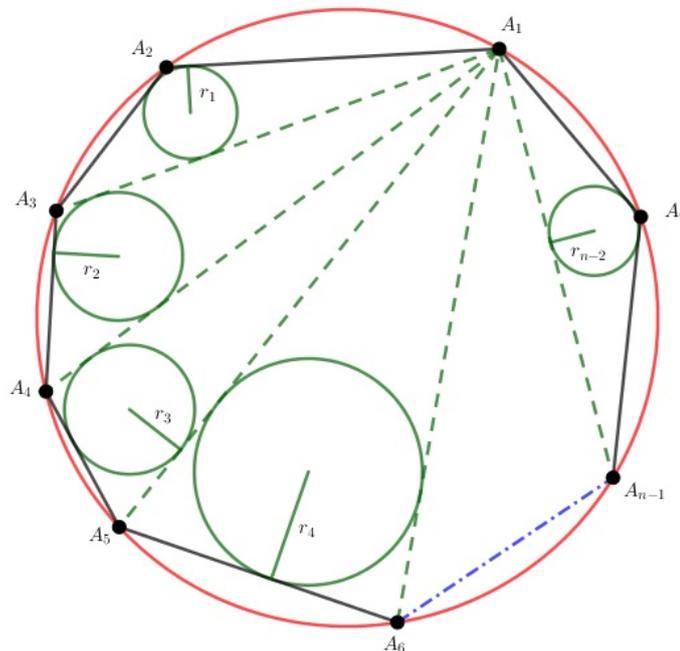
onde OM_{ai} , OM_{bi} e OM_{ci} são as distâncias de O até cada um dos lados do triângulo T_i , $i = 1, 2, \dots, n - 2$ gerado pela triangularização de $P(n)$. Daí temos que

$$OX_1 = OM_{a1} + OM_{b1} + OM_{c1}$$

$$OX_2 = OM_{a2} + OM_{b2} + OM_{c2}$$

$$\vdots$$

$$OX_{n-2} = OM_{a(n-2)} + OM_{b(n-2)} + OM_{c(n-2)}.$$



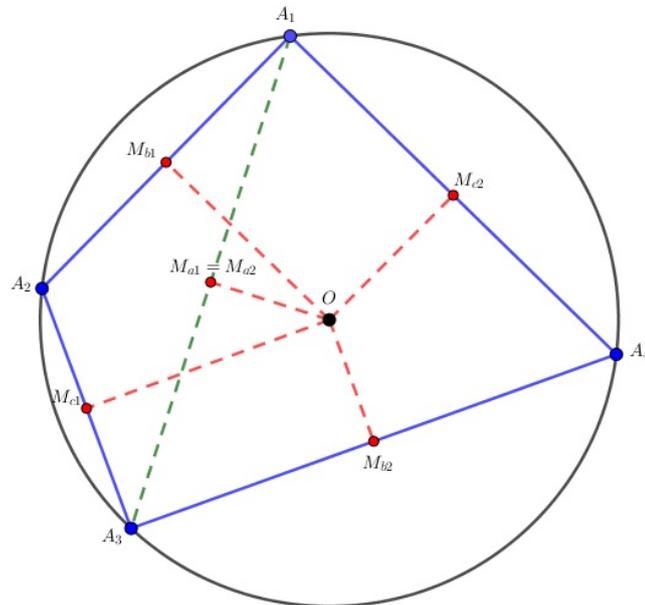
Teorema Japonês - caso geral

Somando membro a membro as equações acima e utilizando o teorema de Carnot (Lema 4.5.2) para cada triângulo T_i de inraio r_i , obtemos

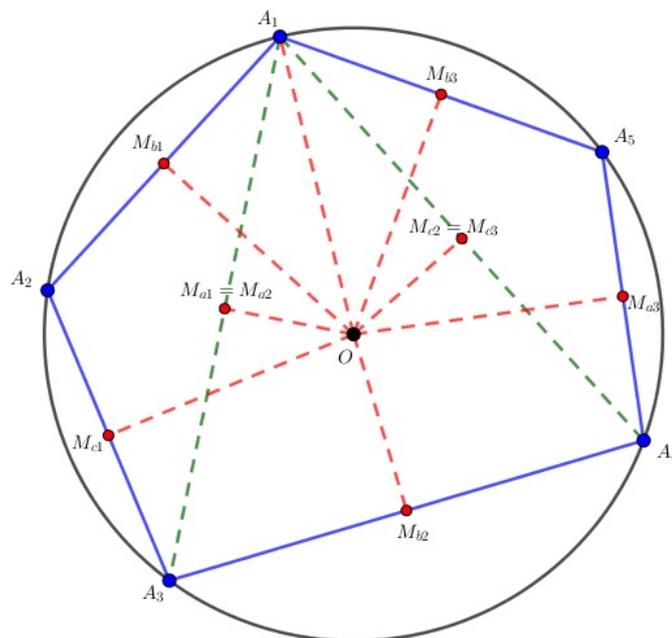
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} OX_i &= \sum_{i=1}^{n-2} (r_i + R) = (n-2)R + \sum_{i=1}^{n-2} r_i. \\ \implies \sum_{i=1}^{n-2} r_i &= -(n-2)R + \sum_{i=1}^{n-2} OX_i \end{aligned}$$

Agora, observe que o termo $(n-2)R$ que aparece na expressão acima é constante pois tanto a quantidade de lados do polígono como a medida do circunraio são bem determinadas. Mais ainda, pela definição de OX_i , no somatório $\sum_{i=1}^{n-2} OX_i$, cada perpendicular aos lados do polígono é contada uma única vez, enquanto que cada perpendicular às diagonais do polígono $P(n)$, geradas pela triangularização, é contada duas vezes onde uma delas é positiva e a outra negativa, conforme a convenção adotada para distâncias no

teorema de Carnot (Lema 4.5.2).



Teorema Japonês - caso $n = 4$



Teorema Japonês - caso $n = 5$

Consequentemente, todas as perpendiculares às diagonais irão se anular no somatório $\sum_{i=1}^{n-2} OX_i$, sobrando apenas as perpendiculares aos lados, ou seja, as distâncias de O aos lados do polígono. Porém, tal soma também é uma constante e consequentemente

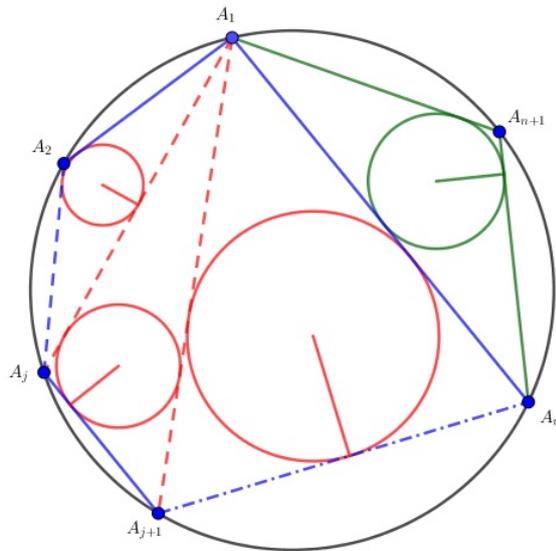
$$\sum_{i=1}^{n-2} r_i = \text{constante}.$$

Segunda Demonstração. Usaremos o princípio de indução no número de lados n do polígono $P(n)$.

- O teorema já foi mostrado para $P(4)$ na Seção 4.2.
- Supondo que o teorema seja válido para o polígono cíclico convexo $P(n)$ de vértices A_1, A_2, \dots, A_n , iremos mostrar sua validade para o polígono $P(n+1)$. Para isso, acrescentaremos o vértice A_{n+1} entre os vértices A_n e A_1 do polígono $P(n)$, de forma que A_{n+1} esteja contido no mesmo círculo que circunscreve $P(n)$.

Vamos denotar, por uma questão de simplicidade, os polígonos $P(n)$ e $P(n+1)$, respectivamente, por P e Q . Sendo $S_j(P)$ e $S_j(Q)$, respectivamente, a soma dos inraios de todos os triângulos obtidos na triangularização dos polígonos P e Q a partir do vértice A_j e também $r[ABC]$ a medida do inraio de um determinado triângulo ABC , se triangularizarmos P e Q a partir do vértice A_1 , então obtemos claramente que

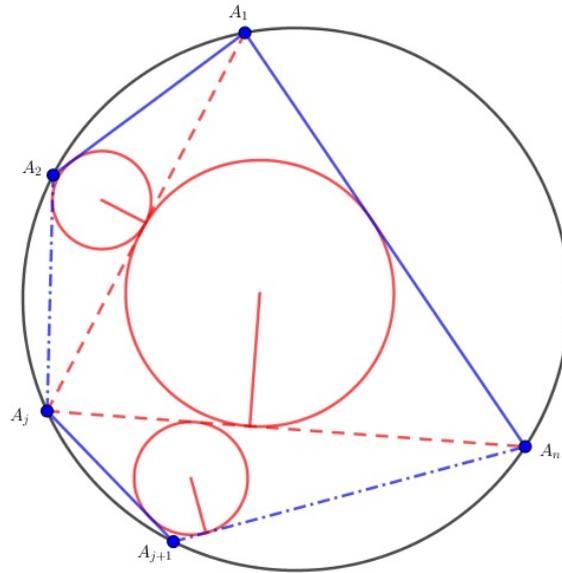
$$S_1(Q) = S_1(P) + r[A_n A_{n+1} A_1].$$



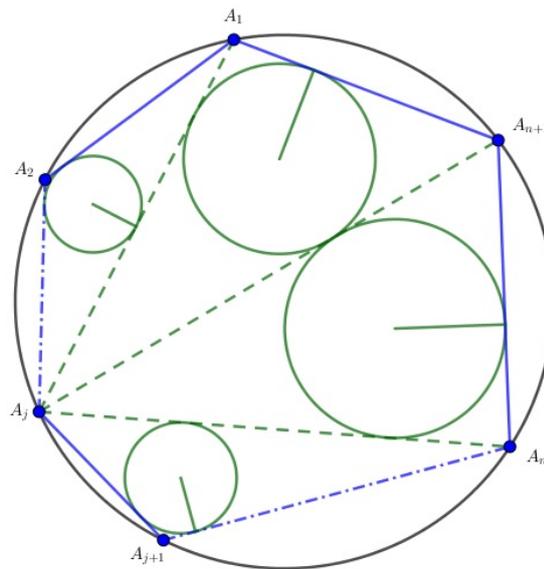
Triangularizações dos polígonos P e Q a partir do vértice A_1

Agora, vamos triangularizar P e Q a partir de um vértice A_j qualquer. Neste caso, a soma dos inraios na triangularização do polígono Q será igual à soma dos inraios na triangularização do polígono P menos o inraio do triângulo $A_j A_n A_1$, pois este não aparece na triangularização de Q , mais os inraios dos triângulos $A_j A_n A_{n+1}$ e $A_j A_{n+1} A_1$, pois estes não aparecem na triangularização de P . Portanto

$$S_j(Q) = S_j(P) - r[A_j A_n A_1] + r[A_j A_n A_{n+1}] + r[A_j A_{n+1} A_1]. \quad (69)$$



Triangularização do polígono P a partir do vértice A_j



Triangularização do polígono Q a partir do vértice A_j

Por outro lado, aplicando o teorema japonês para quadriláteros (Teorema 4.2.1), no quadrilátero $A_jA_nA_{n+1}A_1$ obtemos

$$r [A_jA_nA_{n+1}] + r [A_jA_{n+1}A_1] = r [A_jA_nA_1] + r [A_nA_{n+1}A_1]. \quad (70)$$

Substituindo (70) em (69), podemos escrever

$$S_j(Q) = S_j(P) - r [A_jA_nA_1] + r [A_jA_nA_1] + r [A_nA_{n+1}A_1] \implies$$

$$S_j(Q) = S_j(P) + r [A_nA_{n+1}A_1]. \quad (71)$$

Por hipótese de indução, a soma dos inraios do polígono P não depende do vértice escolhido, de forma que $S_j(P) = S_k(P)$, onde A_j e A_k são vértices distintos do polígono P . Somando $r[A_n A_{n+1} A_1]$ a ambos os membros, obtemos

$$S_j(P) + r[A_n A_{n+1} A_1] = S_k(P) + r[A_n A_{n+1} A_1]$$

e utilizando o resultado da equação (71), obtemos a relação

$$S_j(Q) = S_k(Q),$$

ou seja, tal propriedade também é válida para o polígono $Q = P(n+1)$. Portanto, tal propriedade é válida para todo $n \geq 4$ inteiro positivo.

Vale ressaltar que, utilizando os mesmos argumentos da primeira demonstração, podemos mostrar que o Teorema Japonês também é válido quando triangularizamos o polígono de maneira arbitrária, ou seja, utilizando vértices distintos quaisquer. Atualmente, também pode-se mostrar que o mesmo é válido para polígonos cíclicos não-convexos. Tal demonstração, pode ser encontrada no artigo [RICHESON, 2013] e utiliza basicamente o teorema de Carnot com algumas hipóteses adicionais ligadas à orientação dos vértices do polígono.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos resultados consistentes sobre polígonos cíclicos em geral de modo que esse, poderá servir futuramente como fonte de pesquisa para clubes de matemática, grupos da OBMEP, professores da educação básica, entre outros interessados em pesquisar sobre o assunto. Alguns tópicos abordados não possuem textos com referência em língua portuguesa. Sendo assim, a presente obra também visa contribuir nesse aspecto.

Pra efeito de uma melhor compreensão, dedicamos um capítulo para revisar conteúdos importantes da educação básica. Como tais conteúdos são bem conhecidos dos estudantes em geral, tal capítulo recebeu um caráter menos formal.

De maneira geral, um polígono nem sempre é cíclico e por esse motivo, apresentamos sob quais condições tais polígonos adquirem esta propriedade. Também apresentamos como calcular as medidas de suas diagonais, inraio, circunraio e área.

As fórmulas de Heron e Brahmagupta, dadas pelo Teorema 2.1.4 e pelo Corolário 2.2.7, nos permitem calcular a área de triângulos e quadriláteros cíclicos convexos apenas em função das medidas dos seus lados. Tais resultados intrigaram o matemático estadunidense David P. Robbins (1942 - 2003), fazendo-o imaginar que deveria existir uma fórmula para calcular a área de um polígono cíclico qualquer, onde essa dependesse apenas das medidas dos lados do mesmo.

No ano de 1994, em seu artigo [ROBBINS, 1994], Robbins provou que existe um único polinômio α_n com $(n + 1)$ indeterminadas onde, para um polígono cíclico qualquer de área S e cujos lados são denotados por a_1, a_2, \dots, a_n , temos

$$\alpha_n(16S^2, a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2) = 0 \quad .$$

O polinômio α_n acima é conhecido atualmente na literatura como *polinômio de Heron generalizado*. Resolvendo a equação $\alpha_n = 0$, obtemos o valor da área do respectivo polígono. Em geral, não é fácil obtermos um determinado polinômio de Heron.

Neste mesmo artigo, Robbins provou as fórmulas para o pentágono (α_5) e para o hexágono (α_6), fazendo uso do software *Mathematica*. Pouco após a sua morte, no artigo [MALEY; ROSKIES, 2004], F. Miller Maley e Julie Roskies provaram as fórmulas para o heptágono (α_7) e para o octógono (α_8). Nesse ponto, vale observar que mesmo se tratando de geometria elementar, ainda existem diversos problemas em aberto. Encontrar as fórmulas para α_n , com $n > 8$ é um exemplo.

A construção de polígonos cíclicos nem sempre é uma tarefa fácil. No entanto, conseguimos apresentar e provar um método bastante eficiente que utiliza basicamente duas famílias de triângulos de Heron, ou seja, triângulos cujos lados e área admitem medidas

inteiras. Associando tais triângulos, além de conseguirmos construir polígonos cíclicos, também podemos construir polígonos cíclicos cujos lados, diagonais e área admitem medidas inteiras. Vimos que tais polígonos são conhecidos atualmente como polígonos de Brahmagupta.

Finalizamos esse trabalho, apresentando o Teorema Japonês para polígonos cíclicos convexos. Mostramos que tal teorema, quando o polígono se trata de um quadrilátero, teve origem no Japão, em 1800, durante um período conhecido como Era Edo (1603 - 1868). Durante esse período, o Japão se isolou completamente do mundo ocidental e era comum a exibição, em templos budistas ou xintoístas, de placas de madeira contendo problemas matemáticos. Tais placas eram chamadas sangakus. Apesar de milhares de sangakus terem sido perdidos ao longo do tempo (atualmente estima-se que ainda existam cerca de 900), a arte dos sangakus evidencia a importância da matemática para o povo japonês. Podemos dizer que ela era tratada como ente cultural e até mesmo religioso.

Ainda sobre o Teorema Japonês, apresentamos duas aplicações geométricas para o caso quadrilátero. A primeira, possui como invariante o produto entre a diagonal de triangularização e a soma dos inversos dos inraios obtidos. Já a segunda, possui como invariante a soma das distâncias do circuncentro do quadrilátero aos pontos de Nagel dos triângulos obtidos em uma determinada triangularização.

Durante todo o nosso trabalho, nos preocupamos em desenvolver cada resultado de maneira simples e bem detalhada. Também sugerimos alguns livros para eventuais conceitos elementares que não puderam ser expostos aqui. Desta forma, mesmo leitores pouco familiarizados com a linguagem matemática poderão utilizar de maneira satisfatória o conteúdo aqui apresentado.

REFERÊNCIAS

- AHUJA, Mangho; UEGAKI, Wataru; MATSUSHITA, Kayo. *Japanese Theorem: A little known theorem with many proofs*. [S.l.]: Missouri Journal of Mathematics, 2004. 10 p.
- BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção do Professor de Matemática, 2012. 259 p.
- BEHREND, R.; FISCHER, I.; KONVALINKA, M. *Diagonally and antidiagonally symmetric alternating sign matrices of odd order*. Vol. 315. [S.l.]: Advances in Mathematics, 2017. 324-365 p.
- BRETSCHNEIDER, C. A. *Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova*. vol 17. [S.l.]: Crelle Journal, 1837. 257-285 p.
- COOLIDGE, J.L. *A Historically Interesting Formula for the Area of a Quadrilateral*. 46. ed. [S.l.]: Amer. Math. Monthly, 1939. 345-347 p.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9*. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.
- EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino H. Domingues*. 1. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. 844 p.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Números irracionais e transcendentos*. 3. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção de Iniciação Científica, 2011. 81 p.
- FRICKE, Jan. *On Hero simples and integer Embedding*. Universität Greifswald: Institut für Mathematik und informatik Ernst-Moritz-Arndt, 2008.
- FUJITA, K. *Zoku-Sinpeki-Sanpō, vol 2*. [S.l.: s.n.], 1807.
- FUKAGAWA, H.; PEDOE, D. *Japanese Temple Geometry Problems*. Winnipeg, Canadá: Centro de pesquisa Charles Babbage, 1989.
- GREENSTREET, W.J. *Japanese Mathematics*. [S.l.]: The Mathematical Gazette, 1906. 268-270 p.
- HAWN, C. *A Study of the Japanese Theorem*. Universidade do Estado de Missouri: Tese de Mestrado, 1996.
- HAYASHI, T. *Sur un Soi-Disant Theoreme Chinois*. [S.l.]: Mathesis, 1906. 257-260 p.
- HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção PROFMAT, 2016. 298 p.
- HELLMEISTER, Ana Catarina P. *Geometria em sala de aula*. 1. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção do Professor de Matemática, 2013. 552 p.
- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 6*. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.

- _____. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 7*. 4. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.
- MACKINNON, N. *Friends in Youth*. [S.l.]: A Gazeta Matemática, 1993. 20-21 p.
- MALEY, F.M.; ROSKIES, J. *On the areas of cyclic and semicyclic polygons*. NJ, Princenton: Center for Communications Research: Advances in Applied Mathematics, 2004.
- MIKAMI, Y. *A Chinese Theorem in Geometry*. [S.l.]: Arquivo de Matemática e Física, 1905. 308-310 p.
- MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*. 2. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção PROFMAT, 2015. 294 p.
- NETO, Antonio Caminha Muniz. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro:SBM: Coleção PROFMAT, 2013. 442 p.
- RICHESON, David. *The Japanese Theorem for Nonconvex Polygons - A Proof of the Generalized Japanese Theorem*. NW Washington D.C.:Mathematical Association of America: MAA Publications, 2013.
- ROBBINS, D.P. *Areas of polygons inscribed in a circle*. NJ, Princenton: Center for Communications Research: Discrete Comput. Geometry, 1994. 223-236 p.
- UEGAKI, W. *On the Origin and History of the Japanese Theorem*. [S.l.]: Jornal da Universidade de Mie, 1996.
- YOSHIDA, T. *Zoku Shinpeki Sanpo Huroku Kai*. [S.l.: s.n.], s.d.