UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADY WALLACE JAQUES SILVA

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

CASTANHAL
2020
DM - 2020/02

ADY WALLACE JAQUES SILVA

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Samuel Levi Freitas da Luz - Orientador
Universidade Federal do Pará (Campus Castanhal)

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal (Membro interno)
Universidade Federal do Pará (Campus Castanhal)

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida (Membro interno)
Universidade Federal do Pará (Campus Castanhal)

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Membro interno)
Universidade Federal do Pará (Campus Belém)

Prof. Dr. João Batista Santiago Ramos (Membro externo)
Universidade Federal do Pará (Campus Castanhal)

CASTANHAL
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J36m Jaques Silva, Ady Wallace
O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COMO FERRAMENTA NA MODELAGEM MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO / Ady Wallace Jaques Silva. — 2020.
58 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Samuel Levi Freitas da Luz
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Campus Universitário de Castanhal, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2020.

1. Modelagem Matemática e Estatística. 2. Método dos Mínimos Quadrados. 3. Alunos do Ensino Médio. I. Título.

CDD 510.72

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado saúde em todos os sentidos para continuar nesse mestrado bem conceituado, no qual tive a oportunidade de conhecer alunos e professores humanos e maravilhosos.

Aos meus pais, em especial a memória de minha mãe, Maria Fátima Jaques Silva, minha âncora, por sempre acreditar em mim, e ser um exemplo de mulher virtuosa e humilde, deixando seu legado nesta terra.

À minha irmã, Waléria de Fátima Jaques Silva, por ser uma amiga e me incentivar e acreditar no meu sucesso.

À minha amada esposa, Daniele Lima do Nascimento Jaques, por sempre me apoiar em cada decisão que tomei e pela paciência em relação às horas de estudo, tanto para as disciplinas do curso quanto para o bendito ENQ, além do seu amor, parceria e amizade.

Ao grande professor Dr. Arthur Almeida, que foi bem mais que um professor e coordenador do curso, mas sim um amigo, pois através de sua generosidade e competência sempre nos orientou para que pudéssemos fazer um excelente curso.

Aos professores doutores Edilberto de Oliveira Rozal, Valdelírio da Silva e Silva, Roberta Modesto Braga e Gerlândia de Castro Silva, por contribuírem, de forma significativa, para o meu aprendizado. Destaco suas qualidades, tal como a autonomia em relação aos conteúdos de matemática.

Ao meu orientador, Professor Dr. Samuel Levi, parceiro de trabalho, que sempre esteve presente e disposto a me ajudar e que sugeriu esse tema tão relevante para educação.

E por fim, agradeço aos meus familiares de forma geral, por sempre vibrarem por cada etapa vencida de minha vida.

“Há um número incontável de
espécies: incontáveis espécies diferentes
de aplicação daquilo a quem chamamos
“simbolos”, “palavras”, “proposições”. E
essa multiplicidade não é nada fixo, dado
de uma vez por todas; mas antes novos
tipos de linguagem, novos jogos de
linguagem, como poderíamos dizer,
surgem e outros envelhecem
e são esquecidos.
WITTGENSTEIN

Resumo

Neste trabalho, apresentamos elementos que fazem parte da modelagem matemática e estatística para alunos do ensino médio, visando fomentar um pensamento científico ainda prematuro nos estudantes. Especificamente, desenvolvemos os conceitos e resultados, já existentes na literatura, de um dos mais utilizados métodos de estimação de parâmetros em modelos de regressão: o Método dos Mínimos Quadrados. Incluímos a sua forma básica, o conceito de modelo de regressão linear e suas extensões, como o modelo de regressão exponencial e quadrático. Para dar apoio aos conceitos apresentados, bem como servir de conteúdo para a apresentação lúdica aos alunos, apresentamos três aplicações em conjuntos de dados reais utilizando como ferramenta o *Microsoft Excel*.

Palavras-chave: Modelagem matemática e estatística. Método dos Mínimos Quadrados. Alunos do ensino médio.

Abstract

In this work, we present elements that are part of the mathematical and statistical modeling for students of high school students, aiming to foster scientific thinking still premature in students. Specifically, we developed the concepts and results, already existing in the literature, of one of the most used methods of parameter estimation in regression models: the Least Squares Method. We include its basic form, the concept of linear regression model and its extensions, such as the exponential and quadratic regression model. To support the concepts presented, as well as serve as content for the playful presentation to students, we present three applications in real data sets using *Microsoft Excel* as a tool.

Keywords: Mathematical and statistical modeling. Minimum squares method. High school students.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na Idade Média, mais especificamente no Renascimento e no início dos tempos da Idade Moderna os debates sobre o ensino da matemática foram bastante discutidos, conforme Miguel et al. (2004). No Brasil, entretanto, foi somente por meio da Revolução Industrial, da Revolução Americana e da Revolução Francesa que os cuidados com a educação matemática começaram a se desenvolver no processo educacional.

Segundo D'AMBROSIO (1996), a educação matemática se tornou uma área prioritária no setor educacional no final do século XIX e início do século XX, devido aos estudos de John Dewey, que propôs, em 1895, no seu livro *Psicologia do número*, uma reação contra o formalismo e uma relação não tensa, mas cooperativa, entre aluno e professor, integrando todas as disciplinas. Nessa mesma premissa, estudos têm evidenciado que o ensino em matemática na modernidade deve ser um processo distribuído e colaborativo, dependendo dos conhecimentos dos estudantes e sobre as circunstâncias que norteiam a sociedade e ainda sobre a educação básica.

No entanto, sabemos que o processo de educar em matemática, não se aplica de forma efetiva na maioria das nossas escolas brasileiras (CHAGAS, 2004). Esse "fracasso", em muitos casos, do ensino da matemática em muitas instituições educacionais ocasiona aos docentes da educação básica a procurarem estratégias didáticas que auxiliem na compreensão dos conceitos matemáticos em todos os níveis educacionais. Outro ponto a se destacar, se refere ao fato de que a disciplina é tratada como sendo uma área do conhecimento desligada do cotidiano dos alunos. É comum professores ouvirem de seus alunos perguntas do tipo: "Para que serve isso?" ou "Onde vou utilizar isso?", conforme alerta Chagas (2004).

Nesse aspecto, a matemática ainda é vista como um filtro social entre os estudantes na sala de aula. Os conhecimentos sobre a diversidade de funções e seus comportamentos, por exemplo, se tornam circunstanciais para compreender, em certa medida, algumas indagações que norteiam a educação matemática nas escolas básicas e as atribuições do professor de matemática. Nesse último caso, construir o conhecimento com desafios se torna basilar, já que os estudantes aprendem se adaptando a um meio, no qual este é um fator de dificuldades, contradições e desequilíbrios.

Com efeito, a adoção de estratégias de ensino-aprendizagem que foge das aulas tecnicistas, pode causar apreensão que muitas das vezes enfrenta-se a resistência dos professores da escola básica. Esse fato impede infinitas possibilidades de tornar o ensino da matemática algo mais importante e interessante na visão do aluno.

Tendo isso em vista, esse trabalho pretende abordar exatamente essa carência observada no ensino, principalmente da matemática. Vamos buscar uma metodologia apresentada no ensino superior, e que apresenta conceitos básicos do ensino médio, como forma de despertar no discente o seu olhar de curiosidade e atenção frente a um problema real. Mais especificamente, vamos abordar conceitos muito utilizados na Estatística, envolvendo modelagem e previsão de valores a partir de dados já existentes.

O objetivo é deixar em evidência que com a modelagem de dados, ocorre a possibilidade de inserir no ensino da matemática elementos do cotidiano do aluno, levando-os a vivenciarem seu próprio processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo assim a criatividade e autonomia para elaborar estratégias, alcançando assim a solução de um problema.

O método escolhido para essa atividade foi métodos dos mínimos quadrados, que trata-se de uma importante ferramenta utilizada por matemáticos e estatísticos para modelagem de casos em diversas áreas, tais como saúde, economia e educação. Ao sugerimos a aplicação dessa pesquisa, buscamos criar oportunidades, através da troca de ideias, na qual docentes e discentes tenham a oportunidade de interagir e opinar sobre os rumos da atividade que será realizada, exemplificando situações, de forma a apresentar a modelagem em toda sua riqueza, para que cada professor possa vir a praticá-la a partir de seus objetivos didáticos e mediante suas percepções educacionais.

Utilizaremos, durante a atividade com os alunos, uma outra ferramenta extremamente utilizada em diversos campos: o *Microsoft Excel*. Esse será o instrumento pelo qual conseguiremos repassar o conteúdo de modelagem, visto que os valores obtidos para os modelos, a construção de gráficos e conclusões finais serão obtidas com o seu auxílio. Existem outros softwares que também desempenham esse papel, tais como R, SPSS e SAS, porém são softwares um pouco mais robustos e que podem causar receio e medo nos estudantes em um primeiro momento. Fato que não acontecerá com o *Microsoft Excel*, visto sua usabilidade frequente em atividades de laboratório e em outros momentos.

1.1 DIVISÃO DO TRABALHO

A pesquisa de dissertação está dividida em mais três capítulos (além deste): o capítulo 2 apresenta a história da modelagem matemática, bem como as etapas dessa modelagem e sua importância no contexto educacional; o capítulo 3 enfatiza os conceitos envolvendo o método dos mínimos quadrados, apresentando o ajuste linear, quadrático e exponencial; e o capítulo 4 apresenta três aplicações, para cada um dos ajustes propostos, de forma que os alunos do primeiro ano do ensino médio possam desenvolver, em sala de aula (laboratório de informática), os mesmos resultados apresentados neste capítulo em questão.

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos uma breve história da modelagem matemática por meio da literatura especializada, assim como suas etapas, de acordo com Carlos Bassanezi, e sua importância para a educação básica no Brasil.

2.1 HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O processo de modelagem matemática é efetuado desde o início da própria matemática. Para Biembengut e Hein (2003), por exemplo, a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. Biembengut (2009) refere que o debate sobre modelagem matemática ocorre, sobretudo, na década de 1960, por meio do movimento chamado utilitarista, no qual era definido como aplicação prática dos saberes matemáticos para a sociedade.

No Brasil o movimento educacional sobre a modelagem matemática sofreu influência com a colaboração dos professores, que estudaram/estudam sobre a Educação Matemática. Sendo estes, referências que impulsionaram a consolidação da área no aspecto da educação, tais como: Ubiratan D' Ambrosio e Rodney C. Bassanezi. Estes pesquisadores iniciaram um movimento no Brasil nos anos de 1970 e início dos anos 1980. Por meio desses percursos e estudos que os debates e diálogos sobre como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática fizeram emergir a linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro (QUARTIERI; KNIJNIK, 2012).

Ao encontro da proposição, comumente se apresenta o breve percurso da modelagem matemática em três episódios a qual estes saberes são utilizados para resolver uma situação problema do cotidiano (BIEMBENGUT; HEIN, 2003). O primeiro episódio é de Arquimedes e a Coroa do Rei Hieron. Entre as pesquisas publicadas por Arquimedes, existe o tratado sobre os corpos flutuantes, no qual é descoberto o atualmente conhecido Teorema ou Princípio de Arquimedes. Nesse trabalho, ele afirma que *todo corpo mergulhado em um fluido recebe um empuxo, de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado*.

O segundo é o modelo planetário de Cláudio Ptolomeu, entre suas definições se pode observar o conceito de modelo matemático, ao qual é uma representação aproximada e seletiva de uma dada situação. O terceiro episódio, por sua vez, ficou conhecido como *Euler e as Pontes de Königsberg*. Os habitantes de Konigsberg na Prússia (hoje Rússia) passeavam atravessando as sete pontes que ligavam o Rio Pregel à cidade e, nesse percurso de caminhadas, perguntavam-se como seria possível, partindo-se de qualquer uma das regiões, margens ou ilhas, atravessar as sete pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. Esse questionamento tratado como lenda ou ainda como “charada matemática”, ficou conhecido como o *Problema das Pontes de Königsberg* e coube ao grande matemático Leonhard Euler resolvê-lo.

Nessa premissa, Predosa, Mafra e Siqueira (2015) apontam que a modelagem matemática tem estado presente desde os tempos mais primitivos, surgindo da necessidade dos seres humanos em resolver situações ou problemas do cotidiano e nas aplicações das rotinas dos povos antigos quando surgiu a matemática. Para a compreensão de forma mais ativa e pertinente da área, se torna essencial a compreensão dos saberes matemáticos e de seus modelos, não somente no presente, mas dos pesquisadores de séculos atrás, pois a matemática está conectada com as invenções e as criações da sociedade, já que a imaginação e a criatividade estão desde sempre presentes no ser humano que, geralmente, baseia-se na razão para compreender, expressar e solucionar uma situação - problema pautando-se em representações e modelos matemáticos.

Atualmente, a modelagem caracteriza-se como um ramo próprio da matemática (BASSANEZI, 1994), que objetiva aproximar situações presente na vida da sociedade em linguagem matemática, para que, por meio desta, alcance melhores interpretações, inflexões e ou ainda, mudar determinadas vias de acontecimentos, nas mais variadas áreas do conhecimento. Mas para Brumano (2014), o estudo da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem é mais recente, sendo tendência na educação matemática da década de 1980, esta concepção vem ganhando seu "espaço" na educação matemática por meio de pesquisas em teses e dissertações que a discutem nos currículos escolares . Sua inserção na Educação Matemática vem colaborando por meio de discussões para repensar o ensino purista em um ensino direcionando a sua aplicação.

Nesse sentido, pode-se dizer que modelagem matemática envolve a obtenção de um modelo que planeja descrever matematicamente fenômenos da realidade da educação básica e tentar compreendê-lo e estudá-lo, possibilitando suas reflexões para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, como menciona Burak (2016). Essa ênfase possibilitam envolvimentos em fenômenos e problemas que a princípio as soluções se tornavam difíceis no processo educacional brasileiro.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL

O processo de desenvolvimento da modelagem matemática se tornou um instrumento para o uso das ciências, relacionando a matemática, assim como em outras áreas do conhecimento humano. Consubstanciando esse percurso, Rodney Carlos Bassanezi se tornou um dos precursores de ampliação e divulgação sobre a modelagem matemática em pesquisas em congressos nacionais e internacionais, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos. Carlos Bassanezi ministrou cursos de formação continuada, além de ministrar aulas em programas de pós-graduação sobre modelagem matemática em diversas instituições brasileiras, foram identificados 23 cursos de pós-graduação lato sensu e mais de 50 de formação continuada de acordo como aponta Biembengut (2009).

Como exemplificação da constituição do campo da modelagem matemática, em 1982 é organizado um curso de pós-graduação na Universidade Estadual de Guarapuava, no Paraná, o qual Bassanezi é o coordenador. O professor propõe uma modificação no programa do curso, o qual por meio do primeiro contato com empresas a serem visitadas, estes deveriam levantar questões da realidade e problemas de interesse para serem investigados, relacionados a modelagem matemática em instituições de educação superior. Pode-se mencionar que o histórico da modelagem matemática se deu como um processo que traduz ou que organiza situações problema provenientes do cotidiano que envolvem a matemática, ou de outras áreas do conhecimento, como afirma Chaves (2014).

2.3 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

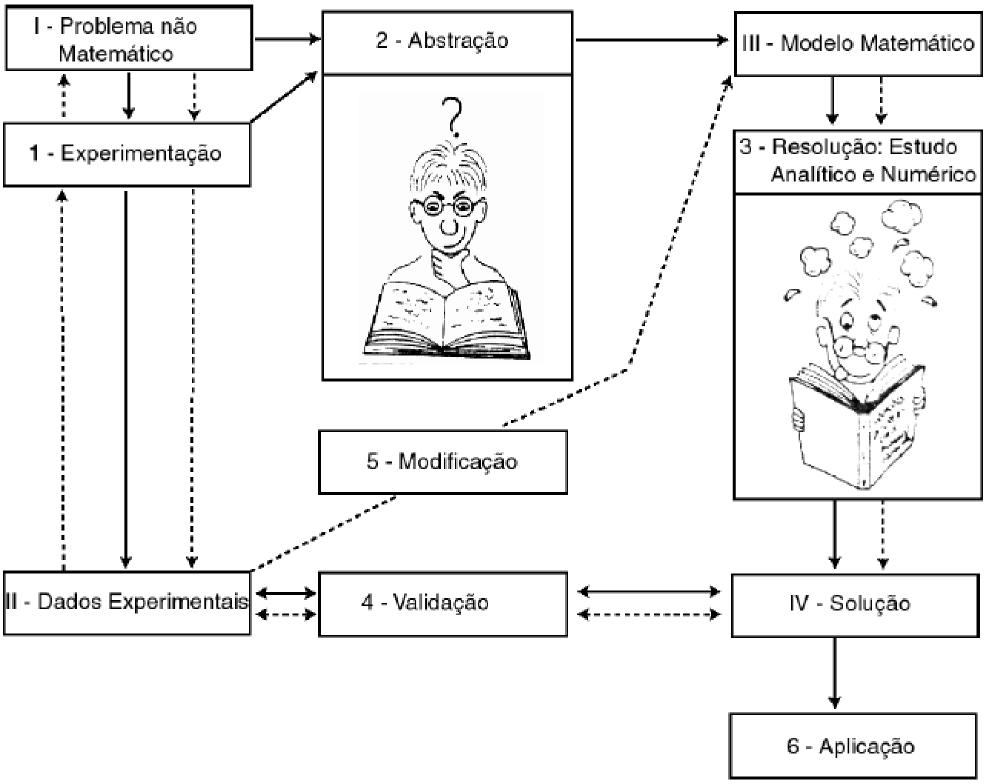
Nos questionamentos anteriores, foram dialogados algumas definições por meio dos aportes teóricos sobre a modelagem matemática. Neste momento, será ressaltado o processo de modelagem segundo Bassanezi (2010), no qual é especificada uma sequência de etapas e propostas sobre o modelo matemático para a possível solução de um dado problema.

Desse modo, para tal finalidade, faz necessário passar por algumas etapas importantes da modelagem matemática e estatística, cuja esquematização é dada pela Figura 1 e cujos passos são explicados em seguida.

- A primeira etapa é a experimentação. Nessa fase, as informações relativas ao experimento serão compiladas, ou seja, o conhecimento e a experiência do modelador são fundamentais para direcionar as etapas posteriores. A aplicação de técnicas e métodos estatísticos favorece a confiabilidade dos dados obtidos na experimentação;

- A segunda etapa é a abstração, cuja finalidade é obter modelos matemáticos para a situação ou problema abordado no experimento. Portanto, a seleção de variáveis e as relações entre elas descrevem a evolução do sistema. A problematização por meio dos aportes teóricos sobre a modelagem matemática, neste momento será resultado de forma compreensível e operacional, portanto, o problema é constituído através de uma pergunta científica quando específica à relação entres as variáveis ou acontecimentos envolvidos no fenômeno. A formulação de hipóteses direciona a investigação, referindo a inter-relação entre as variáveis analisadas nos experimentos, porém formulada de maneira universal para generalizar os resultados. As hipóteses poderão ser trabalhadas através de observação dos fatos, comparando com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal, etc. A simplificação consiste exatamente em restringir e isolar o campo de estudo

Figura 1 – Etapas de modelagem segundo Bassanezi (2010).



Fonte: Retirado de Bassanezi (2010).

apropriadamente de tal modo que o problema seja tratável e, ao mesmo tempo, mantenha a sua importância;

- A terceira etapa é a resolução, que consiste na manipulação do modelo matemático que está sempre vinculado com o grau de complexidade contido na formulação. Muitas vezes só será possível viabilizar através de recursos computacionais, operando com resultados aproximados. A resolução é uma atividade da Matemática que pode ser completamente desvinculada da realidade modelada;

- A quarta etapa é a validação, é a etapa que verifica a aceitação ou rejeição do modelo proposto. Os modelos e as hipóteses serão testados com os dados experimentais, confrontando as soluções e previsões com os dados obtidos no sistema real. O grau de aproximação definido na previsão será fundamental para sua validação. O problema de aceitação ou não de um modelo depende dos fatores que o modelador condiciona com seus objetivos e recursos disponíveis;

- A quinta etapa é a modificação, ou seja, a última etapa no processo de modelar em que os modelos podem ser melhorados, se necessário, e sua reformulação se torna fundamental no processo. Vale ressaltar que nenhum modelo deve ser considerado definitivo, e que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos.

As etapas descritas por Bassanezi (2010), tornam-se essenciais à medida que este trabalho se utiliza dele como suporte para consubstanciar nossos estudos sobre o método dos míninos quadrados o qual será enfatizado (posteriormente) e aprofundar teoricamente esse estudo.

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Richit (2005) defende que a metodologia da modelagem matemática é uma alternativa para o ensino e a aprendizagem da Matemática, na qual pode proporcionar aos alunos oportunidades de estudar situações problemas de sua realidade de forma sistematizada, aplicada e efetiva, proporcionando interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo acerca dos conteúdos da Matemática escolar.

A metodologia chamada de modelagem matemática potencializa a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, que contribui para aumentar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas (BARBOSA, 2004). Portanto, torna-se fundamental a importância da criação de novos ambientes para o processo de aprendizagem, o qual o docente da educação básica oriente as atividades, propondo aos alunos a liberdade para desenvolver, criar, elaborar, modelar, as ideias sobre os saberes matemáticos e não mero receptor de informação.

A modelagem matemática, portanto, é um ramo da matemática que pode ser facilitadora da aprendizagem significativa da disciplina de matemática na educação básica, pois as atividades de ensino que são realizadas por modelagem permitem emergir e ressignificar conceitos matemáticos que proporcionam interações favoráveis à aprendizagem. Nessa linha, apresentar os conceitos e desenvolver as técnicas para ensinar um conteúdo matemático é importante, mas não suficiente quando se deseja um aprendizado significativo (BASSANEZI, 2010). Na proposta metodológica da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, é necessário dar significados aos elementos que compõe os conteúdos matemáticos, tornando-o mais próximo da realidade dos estudantes.

Incluindo no debate a visão de Biembengut e Hein (2005), os objetivos centrais da modelação matemática na educação básica se referem aos reflexos na sala de aula, nos quais podem corroborar na apreensão dos conceitos matemáticos desenvolvendo a habilidade para resolver problemas e estimular a criatividade. Assim, a modelagem como uma estratégia de ensino e aprendizagem permite aos professores tornar suas aulas mais significativas, transformando problemas da realidade em expressões matemáticas, motivando os alunos a buscarem respostas por meio de uma linguagem matemática e conduzindo-os a interpretar os dados obtidos, esses elementos se aprontam com uma habilidade que se denomina *arte de modelar* (MATTEI, 2012).

A intuição facilita o entendimento acerca dos conceitos matemáticos, porém, ela não pode ser usada como instrumento única do processo de construção do conhecimento na escola básica, pois a matemática não se resume a intuição, necessita ainda de outros conceitos que a torna exata, justificar, comprovar e demonstrar proposições são necessários, principalmente quando o enfoque é o ensino da matemática, pois além de trabalhar com o estudante sua capacidade de imaginação e intuições fundamentadas é necessário que os mesmos desenvolvam habilidades para a formalização dos conteúdos.

Nesse aspecto conceitual, a metodologia para a iniciação da construção de um novo conhecimento exige um acúmulo de conhecimentos, denominada por Coll et al. (2000) de conhecimentos prévios. O autor define esses conhecimentos como todos aqueles (corretos ou incorretos), no qual cada indivíduo possui e adquiriu ao longo de sua vida, seja na interação com o mundo que o cerca seja na escola. Esse conjunto de conhecimentos serve, portanto, para que o sujeito conheça o mundo e os fenômenos que observa ao mesmo tempo em que ajudam a prever e controlar os fatos e acontecimentos futuros.

Mediante os argumentos dialogados, pode-se alegar que também existam pesquisadores, que nomeiam alguns obstáculos e entraves que, em muitos casos, impossibilitam a inserção da modelagem matemática no ensino, tais como: programa curricular que deve ser cumprido, não havendo tempo para trabalhar modelagem; professores conteudistas, que evitam inovar sua prática de ensino, para que tenham menos trabalho; negação dos alunos ao conteúdo, por estarem acostumados com o ensino tecnicista, de forma a pensarem que o conteúdo torna-se mais complexo. No entanto, caso o professor encontre dificuldades em utilizar a metodologia, é substancial que o docente esteja bem preparado, tendo um papel crucial neste processo, cabe-lhe a responsabilidade de planejamento levando em consideração todos estes impasses apresentados. Assim, a formação de professores de matemática seja inicial ou continuada se torna precípuo para o desenvolvimento da metodologia na educação básica (GOULART, 2016).

2.5 AS VANTAGENS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Nas últimas décadas, o ensino da matemática vem sendo dialogado pela literatura especializada em virtude de questões relacionadas ao desempenho acadêmico dos alunos. Acredita-se que a forma como esta disciplina tem sido estruturada nas esferas institucionais pode ser um fator decisivo para o desinteresse dos alunos, bem como a dificuldade em compreender os conteúdos matemáticos escolares.

Contudo, cabe lembrar que a educação matemática objetiva formar um "novo" cidadão que tenha capacidade de pensar criticamente e possa intervir na sociedade, desenvolvendo suas próprias potencialidades enquanto agente social. Deste modo, o professor de Matemática deve propiciar aos alunos em suas aulas não somente um conteúdo específico da matemática, mas relacionar estes com outras áreas do conhecimento, para alcançar esse efeito, deve lançar metodologias adequadas que visem explorar o real significado e conceitos e suas aplicações. Os professores devem ensinar matemática de forma que o conhecimento seja visto pelos alunos como interessante e prazeroso para que os mesmos sintam-se estimulados e percebam a utilização dos conteúdos ensinados.

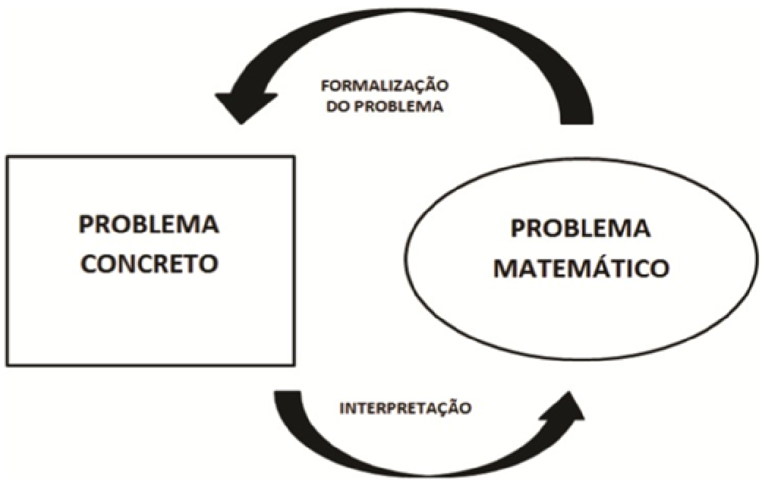
Conforme aponta Pontes e Burak (), a prática educativa da modelagem matemática, se torna dentre outras metodologias, como uma alternativa na educação matemática, pois auxilia no processo de construção de modelos e habilidades tendo a necessidade da preparação de estudantes para a compreensão da realidade social e natural em que vivem, para posteriormente se tornarem agentes ativos na sociedade. Neste sentido, a modelagem matemática pode ser percebida como um instrumento pedagógico na educação matemática que visa dentre outros objetivos centrais na área, potencializar resultados satisfatórios no processo de ensino e aprendizagem, trazendo para o contexto escolar situações reais, proporcionando de forma qualificada, modelos matemáticos que permitam a compreensão e resolução de um problema posto, sempre relacionando a esfera social com o contexto matemático, construídos conjuntamente e não simplesmente transmitindo conhecimentos desvinculados do contexto real dos alunos.

A modelagem também pode possibilitar a formação de um professor crítico, reflexivo, criativo, motivador e quando isso acontece, causa um intermediário entre o saber comum, e o saber matemático, ou seja, entre o conhecimento que os alunos adquirem ao longo da vida em sociedade com os saberes formalizados construídos na escola (CARLOS, 2006), neste enfoque, o aluno torna-se um agente construtivo do seu próprio saber, proporcionando momentos de investigação no processo da matemática, contribuindo na formação de professores para a abordagem na sala de aula, assim como nas competências necessárias. Consubstanciando essa interlocução, os alunos também devem ter a oportunidade de interagir com o ambiente ao qual estão inseridos, abstraindo e construindo modelos matemáticos que forneçam suporte ás suas hipóteses e observações da sala de aula.

Além das etapas sobre o processo da modelagem na educação matemática, esta deve estar unido as informações adicionais consideradas importantes para consubstanciar o processo de aprendizagem no âmbito escolar que facilitem a interpretação do problema, tais como, figuras, gráficos, esquemas e fluxogramas, desta maneira o docente estará facilitando ao aluno o entendimento do problema proposto e a partir daí, poderão utilizar seus conhecimentos prévios matemáticos para solucioná-lo.

Em um contexto de modelagem matemática na perspectiva de Bassanezi (2011) se torna basilar a capacidade de reconhecer e interpretar um problema concreto do meio social, com algum grau de dificuldade, em um modelo com linguagem matemática, em seguida analisá-lo e posteriormente utilizar os conhecimentos matemáticos antes estudados para que possa ser solucionado. A Figura 2 ilustra como se dá o procedimento de modelagem matemática, no qual interpretamos um problema concreto do meio social e transformamos em um problema matemático que permite interpretá-lo mais facilmente.

Figura 2 – Processo Simplificado da Modelagem Matemática



Fonte: Retirado de Bassanezi (2011).

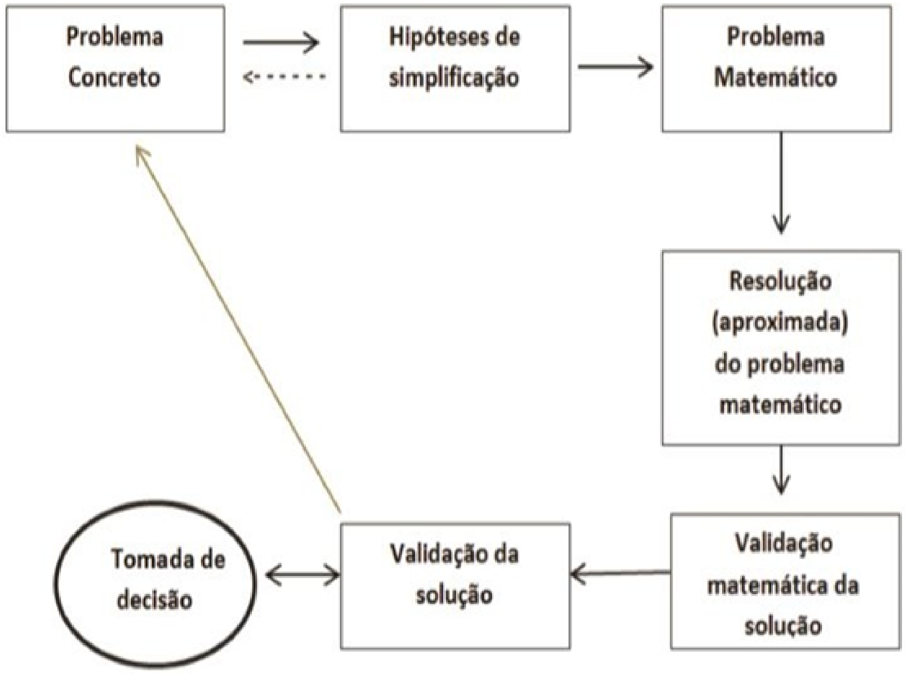
Como exposto pela figura, um dos aspectos da modelagem matemática em sala de aula é o fato dos alunos terem a oportunidade de estudar situações problemas por meio da interpretação, contudo o processo não fica somente restrito na área da educação matemática, mas pode ser ampliada para as demais áreas do conhecimento. Esse investimento nas demais áreas, permite que os alunos desenvolvam capacidades como, habilidade investigativa, identificação, compreensão e interpretação de problemas reais, formulação de hipóteses, desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, experimentação e validação de suas hipóteses. Dessa forma, os alunos terão uma aprendizagem mais significativa, consciente e autônoma.

Conforme Silva et al. (2016) esclarece, existem alguns benefícios ao ser trabalhado com modelagem matemática na educação básica, tais como: desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo; compreensão do papel sociocultural da matemática, tornando-a assim, mais importante diante da visão do aluno; motivação dos alunos e do próprio professor, preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento, devido à interatividade do conteúdo matemático com outras disciplinas; facilitação da aprendizagem, o conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto; desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade. Nesse contexto, o esquema da modelagem é referendada na Figura 3.

Entende-se de acordo com a imagem, que para se utilizar a modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, é oportuno estabelecer um paralelo entre o ensino tecnicista e o ensino por meio dessa metodologia, e comparar aspectos relacionados à criatividade, ao interesse, motivação e entusiasmo demonstrado pelos alunos em sala de aula, é necessário ainda perceber os resultados das avaliações da aprendizagem dos conteúdos, levando o professor a refletir sobre a sua metodologia de ensino da matemática.

O aluno terá ainda a oportunidade de construir modelos, de forma criativa, modificando

Figura 3 – Esquema do Processo de Modelagem Matemática



Fonte: Retirado de Bassanezi (2010).

sua realidade, com a possibilidade de fazê-lo de forma crítica. Para isso, o professor deve utilizar esta prática de ensino procurando manter um clima de certa liberdade descontração, estimulando a participação e a criatividade individual, de forma que seja vista pelos alunos como algo prazeroso. Nesse aspecto, quando proporcionados momentos em sala com a modelagem, pode-se obter resultados satisfatórios em relação ao aprendizado de Matemática.

Nesse percurso, entende-se como Richit (2005), que o ambiente de aprendizagem de modelagem, baseado na indagação e investigação, se diferencia da forma que o ensino tradicional (visivelmente hegemônico nas escolas), já que o mesmo busca estabelecer relações com outras áreas e o dia-dia, este último procura trazer situações que podem ser diretamente abordadas por ideias e sugeridos pela exposição anterior do professor.

Com isso, o ensino da matemática deve assumir um compromisso com o educando e ao mesmo tempo com a sociedade, já que aa educação básica a modelagem matemática quando desenvolvida pode favorecer a construção do conhecimento matemático sendo um potencializador para uma aprendizagem significativa (SILVEIRA; CALDEIRA, 2012) uma vez que a partir de um fato real, possa se criar, por meio da coleta, organização dos dados e análise, uma expressão em linguagem matemática que possa servir de parâmetro para descrição e compreensão da realidade pelo modelo criado. Nessa proporsição, uma atividade de modelagem faz-se importante, pois tem como objeto, além do aprendizado de conteúdos matemáticos, colaborar com a formação de pessoas capazes de evidenciar o papel da matemática e intervir na sociedade em que vivem.

2.6 A IMPORTÂNCIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática no currículo da educação básica é mais do que uma alternativa de ensino, pode ser considerada uma forma de envolver os alunos com situações que vão além da sala de aula, dinamizando a compreensão da matemática contribuindo para a formação do hábito de investigação. No que tange ao ensino médio, em que sua principal característica é de completar a educação básica ao invés de preparar para o ensino superior, há maior facilidade na formação desse hábito de investigação, base para a modelagem matemática, pois os estudantes que as ingressam já trazem consigo uma bagagem adquirida nas etapas anteriores e esses conhecimentos devem ser ampliados, sendo capazes de elaborar propostas, permitindo sua utilização em situações sociais e políticas.

O essencial ainda, seria que a modelagem matemática fosse implementada nos primeiros anos de escolarização dos alunos, aguçando o espírito da pesquisa como alega Silva, 2017, mas levando em consideração que as potencialidades do uso da modelagem não se limitam a desenvolver competências puramente matemáticas, mas favorecendo a riqueza da reflexão pelos alunos sobre diversas temáticas e temas que podem serem abordados, até a conclusão do modelo.

2.7 A FERRAMENTA ESCOLHIDA

Apresentado todos os conceitos e ideias presentes na literatura, partimos agora para a apresentação do método escolhido nesse estudo. Vamos destinar o próximo capítulo à explanação dos principais conceitos envolvendo o método dos mínimos quadrados, incluindo derivadas parcias e máximos e mínimos de funções.

Vale ressaltar que esses conceitos servirão como base para o entendimento e aplicação dos três bancos de dados apresentados no capítulo 4, aquele destinado à atividade em sala de aula com os alunos do ensino médio.

3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

3.1 OS MODELOS DE REGRESSÃO

No âmbito científico, e até mesmo em situações do cotidiano, temos interesse de investigar se duas ou mais variáveis estão inerentemente relacionadas. Um engenheiro, por exemplo, pode estar interessado em saber se a temperatura de um material apresenta alguma relação com sua resistência; por sua vez, um médico pode precisar saber se o tempo de vida de um paciente é diretamente influenciado pelo seu tipo de alimentação; ou um comerciante, que deseja saber se em dias de chuva suas vendas são afetadas ou não.

Em todos esses cenários, podemos aplicar uma das técnicas mais comuns e importantes em análise de dados: a **Análise de regressão**. Ela estabelece um modelo que possa descrever a relação entre as variáveis de estudo. Nesse modelo, temos a variável aleatória Y, chamada de variável resposta, e a variável observável X, chamada de variável explicativa, explanatória ou covariável – para mais detalhes, veja Morettin e Bussab (2017). Os modelos de regressão, portanto, podem apresentar diversos comportamentos, podendo ser linear, quadrático, exponencial, polinomial, dentre outros.

Neste trabalho, vamos focar no estudo dos modelos de regressão do tipo linear, quadrático e exponencial, apresentando o mais conhecido método de estimação de parâmetros desconhecidos em modelos de regressão, o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Esse método teve suas origens em 1809, com Carl Friedrich Gauss, quando demonstrou que a melhor forma de estimar ou determinar um parâmetro desconhecido de uma equação é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos (ideia central do método). Posteriormente, em 1810, Pierre-Simon Laplace apresenta uma generalização para problemas com vários parâmetros desconhecidos. Atualmente, o método dos mínimos quadrados apresenta diversas extensões, tais como Mínimos Quadrados Ponderados e Mínimos Quadrados Generalizados.

Nos tópicos a seguir, vamos apresentar como funciona o MMQ para o caso linear, quadrático e exponencial. Entretanto, antes dessa explanação, é preciso apresentar conceitos derivadas de funções de uma variável, derivadas de funções de duas variáveis, bem como conceitos de máximos e mínimos de funções. Tais conceitos a serem explanados, bem como exemplos, foram retirados de Guidorizzi (1987), Stewart (2008) e Ribeiro (2019a).

3.2 DERIVADAS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

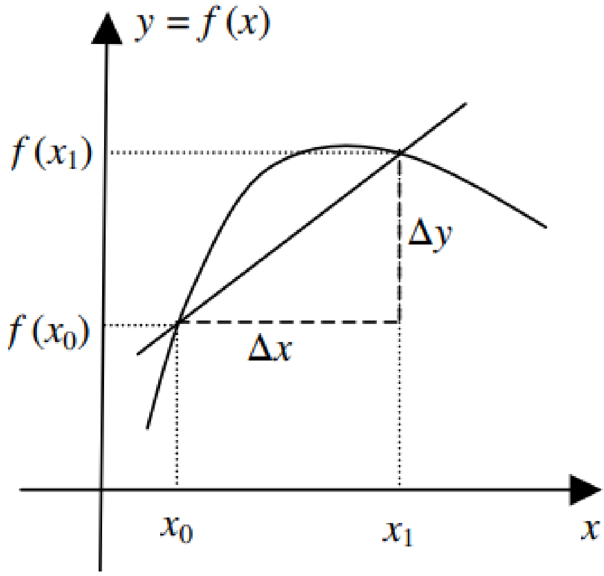
Suponha que seja de interesse de um pesquisador, por exemplo, determinar a taxa de crescimento de uma certa população ou estudar a taxa de crescimento econômico do seu país ou, até mesmo, avaliar a taxa de variação de temperaturas e de velocidade de corpos ou objetos, conforme apresenta Ribeiro (2019a).

Para todos esses interesses, é necessário avaliar uma função que está variando em um determinado momento e, para isso, utilizamos umas das ferramentas mais importantes do cálculo: **a derivada**.

O conceito de derivada está relacionado tanto a ideia de taxa de variação instantânea, como a variação de y em relação a x neste ponto, como com a ideia de reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$ de uma dada função de interesse, considerando que a derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto $x = x_0$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0.

Para um melhor entendimento, considere a Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Ilustração gráfica do conceito de derivada.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

Desse modo, se f é uma função uma função definida em um intervalo aberto I contendo x_0, ou seja, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, então dizemos que a função $f(x)$ é derivável no ponto $x_0 \in I$, denotada por $f'(x_0)$, se existir o seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{3.1}$$

sendo Δx uma pequena variação em x, próximo de x_0.

Assim, o conceito de taxa de variação instatânea vem do fato de que a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Ou seja, suponha uma função $f(x)$, de tal modo que se x variar de um valor x_0 até um valor x_1, representaremos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x ou mesmo por $\Delta x = x_1 - x_0$.

Então, a variação de $f(x)$, nesse caso, será dada por $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, conforme ilustrado na Figura 4.

Com isso, o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é chamado de taxa de variação média de y em relação a x, no intervalo $[x_0, x_1]$. Considerando o limite dessa taxa de variação, dado pela expressão (3.1), temos a chamada taxa de variação instantânea de y em relação a x.

Em linhas gerais, portanto, a derivada é o coeficiente da reta tangente. Considerando um plano cartesiano, por exemplo, as retas são ótimas para exemplificar isso, conforme apresentamos na Figura 4, pois é claramente posível entender a informação do quanto varia o valor de y conforme varia o valor de x.

Em um exemplo extremamente didático, Strogatz (2017) descreve que no momento que um jogador salta no ar para comemorar um gol, por exemplo, existe um pequeno instante de tempo em que a derivada dessa função que descreve esse movimento é igual a zero, isto é, um pequeno instante de tempo em que o jogador não está nem subindo (derivada positiva) nem descendo (derivada negativa). Nesse infinitésimo de segundo em que o jogador fica parado no ar, a derivada é zero, simplesmente por não existir variação alguma.

Assim, nas proximidades de um ponto x qualquer a função, por mais complexa que seja ou não, comporta-se como uma reta. Por isso, essa função pode ser aproximada pela função derivada aqui apresentada, ou seja, por uma simples reta tangente à função.

Um último ponto que Ribeiro (2019a) destaca sobre a interpretação da derivada, é que se existir uma reta tangente ao ponto de um gráfico de função e este apresenta comportamento pontiagudo, a função não é derivável. Logo, o gráfico de uma função diferenciável é sempre uma curva suave, sem nenhum pico "pontudo".

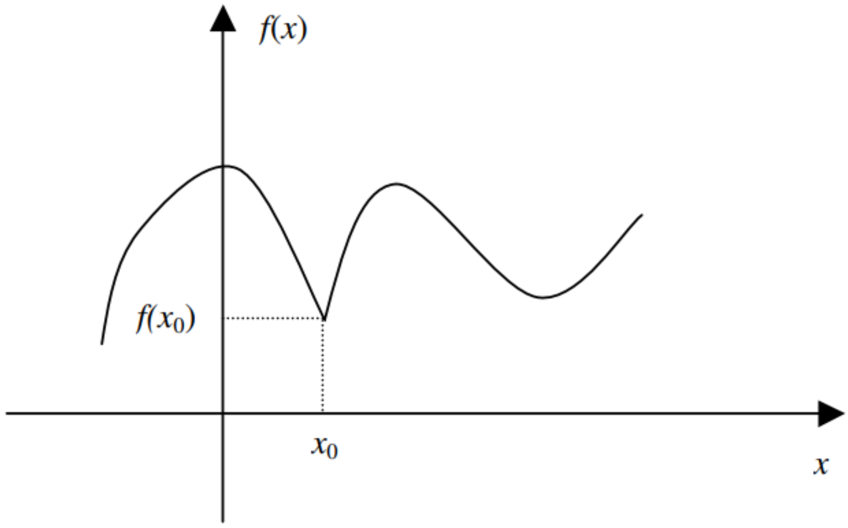
Para ilustrar essa ideia, Ribeiro (2019a) apresenta a Figura 5, a seguir, na qual é um tipo de função não diferenciável em x_0, ou seja, neste ponto não existe a sua derivada, pois nele é possível traçar várias retas tangentes, o que escapa da ideia de derivada na qual temos somente uma.

Para o cálculo da derivada de funções não usamos o conceito de limite, visto que é em alguns casos sua definição não é simples. Como solução, existem as chamadas regras de derivação, que decorrem da definição de derivada, e podem ser encontradas em Stewart (2008), por exemplo.

A seguir, vamos apresentar alguns exemplos de derivadas visando a exploração de suas propriedades. Para mais detalhes, consulte Ribeiro (2019a).

Exemplo 3.2.1 (Derivada de função constante)**.** *Dada a função $f(x) = a$, com a sendo uma*

Figura 5 – Ilustração gráfica de uma função não derivável.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

constante, então

$$f'(x) = 0.$$

Exemplo 3.2.2 (Derivada da soma)**.** *Dada a função $f(x) = x + 1$, então*

$$f'(x) = 1.$$

Exemplo 3.2.3 (Regra do produto)**.** *Dada a função $f(x) = x^2\, senx$, então*

$$f'(x) = 2x\, senx + x^2 \cos x.$$

Exemplo 3.2.4 (Regra da cadeia)**.** *Dada a função $f(x) = (2x+7)^3$, então*

$$f'(x_0) = 3(2x+7)^2 \cdot 2 \quad (3.2)$$

$$= 6(2x+7)^2. \quad (3.3)$$

Para derivadas de ordem superior, temos a aplicação do conceito de derivadas sucessivas vezes. A derivada de ordem dois de uma função $f(x)$, por exemplo, denotada por $f''(x)$, tem sua particularidade e apresentada no tópico a seguir juntamente com conceito de máximos e mínimos de funções.

3.3 MÁXIMOS E MÍNIMOS RELATIVOS E ABSOLUTOS DE FUNÇÕES

Dizemos que uma função real f, definida em um domínio X, tem um ponto de máximo global absoluto em x^* se

$$f(x^*) \geq f(x),$$

para todo x em X.

De forma semelhante, dizemos que a função tem um ponto mínimo global em $x*$ se

$$f(x^*) \leq f(x),$$

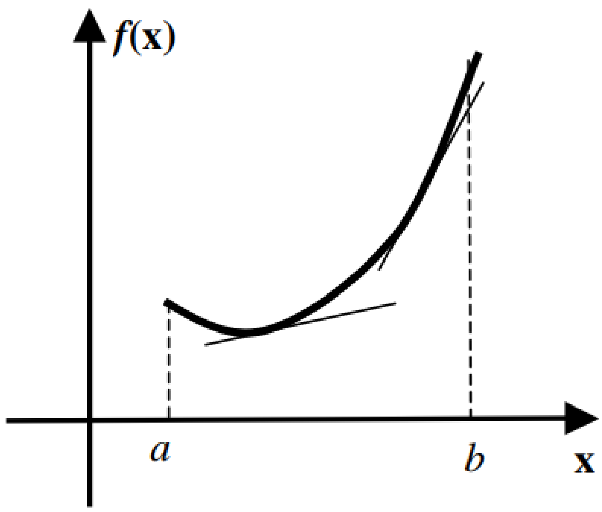
para todo x em X.

Ao encontrar o valor da função em seu ponto máximo, o chamamos de valor máximo da função. Logo, para o valor da função no seu ponto mínimo, o chamamos de valor mínimo da função. Uma forma de obter esses pontos é contruir o gráfico da respectiva função e indetificá-los.

Entretanto, essa tarefa se torna complicada para algumas funções, cujo comportamento impede seu desenho. Como solução para esse problema, utilizam-se as derivadas de segunda ordem.

Para entender essa ideia, considere uma função $f(x)$ diferenciável, pelo menos até a segunda derivada, em um dado intervalo (a,b). Então, se tivermos $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, a função primeira derivada $f'(x)$ é crescente em (a,b) e a sua concavidade é voltada para cima, conforme mostra a Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Ilustração gráfica para o conceito de segunda derivada positiva.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

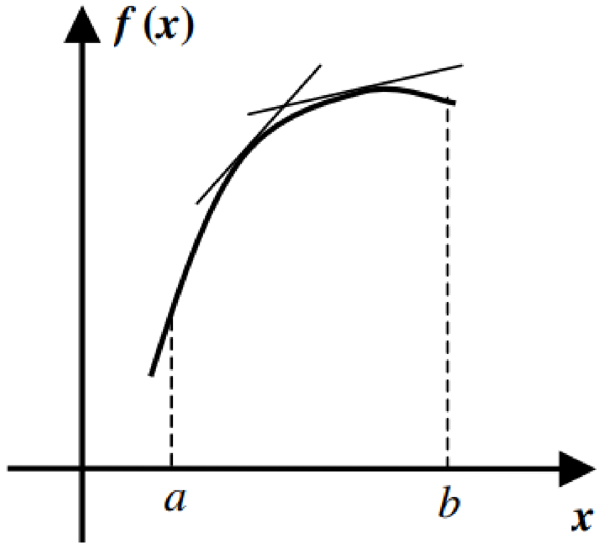
Exemplo 3.3.1 (Segunda derivada positiva)**.** *Dada a função* $f(x) = x^2 + 1$, *então*

$$f''(x) = 2.$$

Assim, $f''(x) > 0$, *logo a função tem concavidade para cima.*

Por outro lado, se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, a função primeira derivada $f'(x)$ é decrescente em (a,b) e a sua concavidade é voltada para baixo, conforme mostra a Figura 7.

Figura 7 – Ilustração gráfica para o conceito de segunda derivada negativa.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

Exemplo 3.3.2 (Segunda derivada negativa)**.** *Dada a função* $f(x) = -x^2 + 2x$*, então*

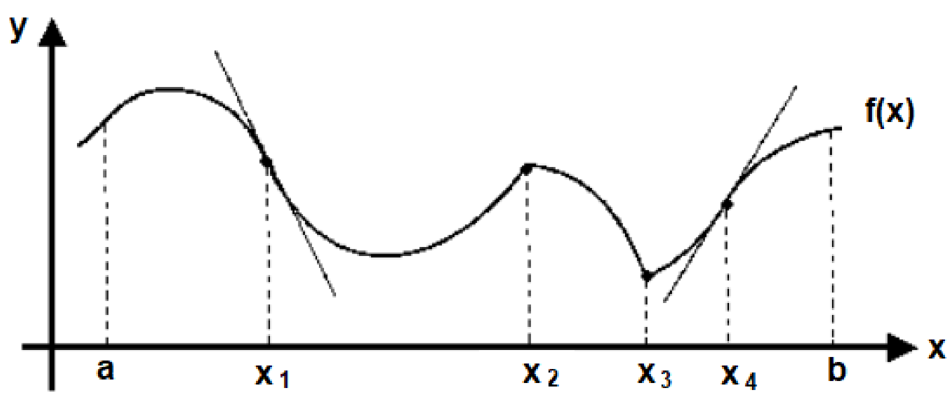
$$f''(x) = -2.$$

Assim, $f''(x) < 0$*, logo a função tem concavidade para baixo.*

Além dessa avaliação, existe outra ideia importante no estudo de funções e suas derivadas, são os chamados pontos de inflexão. Um ponto $P(a, f(a))$ do gráfico da função contínua $f(x)$ é chamado de ponto de inflexão, se a partir desse ponto o gráfico da função muda de concavidade.

Para entender melhor esse conceito, considere a Figura 8.

Figura 8 – Ilustração gráfica para o conceito de ponto de inflexão.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

Observe que os pontos de abscissa x_1, x_2, x_3 e x_4 são pontos de inflexão, pois ao passar por esses pontos, a função muda sua concavidade.

Utilizando-se, ainda, na mesma figura, temos mais informações que podemos obter, tais como as listadas abaixo:

- Os pontos de abscissa x_2 e x_3 são chamados de pontos extremos relativos de f, ou seja, são pontos em que a função não é derivável;
- Os pontos de abscissa x_1 e x_4 possuem derivadas $f'(x_1)$ e $f'(x_4)$, respectivamente;
- Nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_4, f(x_4))$ a reta tangente corta o gráfico de $f(x)$.

Além disso, note que na Figura 8 temos ainda uma outra informação útil, a ideia de máximo e mínimo global e local.

No intervalo (a, x_1) há um ponto de máximo global, ou seja, não há nenhum outro ponto que tenha valor aplicada na função maior que o deste ponto. Por sua vez, o ponto x_3 é mínimo global, ou seja, não nenhum outro ponto que tenha valor aplicada na função menor que o deste ponto. No intervalo (x_1, x_2) há um ponto de mínimo, mas é local, pois está restrito ao intervalo definido.

3.4 DERIVADAS DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Em alguns casos, uma função pode depender de mais do que uma variável, tais como as funções $f(x,y)$, $f(x,y,z)$ ou $f(x,y,z,w)$, por exemplo. Nesse caso, saímos do conceito básico de derivadas e entramos no conceito de derivada parcial. A seguir vamos explanar conceitos presentes em Guidorizzi (1987), Stewart (2008) e Ribeiro (2019a).

Essas derivadas são, basicamente, a derivada de uma função f para uma determinada variável, enquanto as outras se mantém fixadas. A notação de derivada parcial é dada pelo símbolo $\partial/\partial x f(x,y)$, sendo x a variável fixada sobre uma função $z = f(x,y)$.

Assim, considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis com $(x_0, y_0) \in A$. Se fixarmos $y = y_0$, passamos a ter uma função de uma variável, ou seja, $g(x) = f(x, y_0)$. A derivada dessa função no ponto $x = x_0$ é a chamada derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) e é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \tag{3.4}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \tag{3.5}$$

se o limite existe. Da mesma forma, podemos definir a derivada de y com relação a x.

Assim, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

é a derivada parcial de 1^{o} ordem da função $f(x,y)$, em relação a x, ou simplesmente, derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a x. Da mesma forma, podemos definir a derivada de y com relação a x.

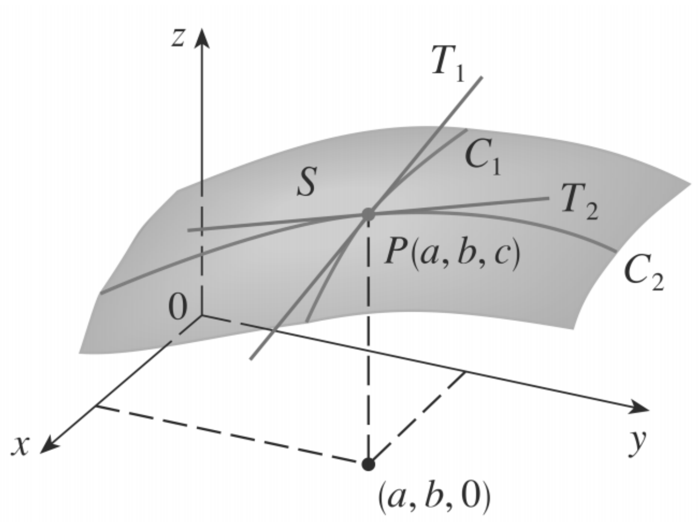
Uma representação gráfica para derivadas parciais é dada pela Figura 9. Nesse sentido, temos que a função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in A$, se para $y = y_0$, $f(x, y_0)$ é uma função de uma variável cujo gráfico é uma curva C_1, resultante da interseção da superfície $z = f(x,y)$ com plano $y = y_0$.

A inclinação (coeficiente angular) da reta tangente à curva C_1 no ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Podemos fazer o mesmo com relação à curva C_2. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ representam, portanto, as inclinações das retas tangentes à superfície S em $P(a,b,c)$, com $c = f(a,b)$, com os cortes C_1 e C_2 dos planos $y = b$ e $x = a$, respectivamente.

Figura 9 – Ilustração gráfica do conceito de derivada parcial.



Fonte: Retirado de Ribeiro (2019a).

Alguns exemplos de derivadas parciais também comumente utilizadas em diversas áreas são apresentados abaixo:

Exemplo 3.4.1. *Dada a função* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.2. *Dada a função* $f(x,y) = x^2 + xy^2$, *então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x + y^2 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2xy. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.3. *Dada a função* $f(x,y) = 2xy^2 + xy$, *então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2y^2 + y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 4xy + x. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.4. *Dada a função* $f(x,y) = x^3y - xy^3$, *então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3x^2y - y^3 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x^3 - 3y^2x. \end{aligned}$$

Visto os conceitos sobre máximos e mínimos de funções, aliados aos conceitos sobre derivadas e derivadas parciais, passaremos agora a explanação dos modelos de regressão linear, quadrático e exponencial, por meio do método dos mínimos quadrados.

3.5 MODELO DE REGRESSÃO LINEAR

Na estrutura de um modelo de regressão linear, há uma forte indicação de que os pontos referentes ao par (X, Y) repousam aleatoriamente dispersos em torno de uma linha reta.

Consequentemente, é provável considerar que a média da variável Y esteja relacionada a X pela seguinte relação linear:

$$\mathbb{E}[Y|x] = b + ax, \tag{3.6}$$

sendo b e a os coeficientes lineares e angulares, respectivamente, e $\mathbb{E}[Y|x]$ o valor esperado da variável Y dado a variável X.

Essa esperança é uma suposição de que a regressão de Y em X é linear, pelo simples fato de não existir nenhuma teoria subjacente para apoiar a relação de linearidade (CASELLA; BERGER, 2002).

Entretanto, trata-se de uma aproximação razoável, uma vez que a relação linear é muito conveniente para se trabalhar, conforme Ribeiro (2019b).

Dessa forma, devemos escrever, formalmente, a seguinte estrutura de relação:

$$\mathbb{E}[Y|x] \approx b + ax$$

Ao ajustar um reta, é notável que o valor de y (ao substituir x) não 'cai' exatamente na linha da reta estimada, logo o valor de Y é determinado pela função do valor médio (termo determinístico) mais um termo de erro aleatório (parte aleatória), dado por:

$$Y = b + ax + \varepsilon_i. \tag{3.7}$$

Suposição do Modelo de Regressão Linear

Devemos fazer a suposição de que os erros seguem uma distribuição normal com média 0 e variância fixa σ^2, ou seja:

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} Y_i|x_i &= b + ax + \varepsilon_i \\ \mathbb{E}[Y_i|x_i] &= \mathbb{E}[b + ax + \varepsilon_i] \\ &= b + ax + E[\varepsilon_i] \\ &= b + ax + 0 \\ &= b + ax. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} Y_i|x_i &= b + ax + \varepsilon_i \\ V[Y_i|x_i] &= V[b + ax + \varepsilon_i] \\ &= V[\varepsilon_i] \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Logo, chegamos ao resultado de nosso interesse:

$$Y_i|x_i \sim N(b + ax, \sigma^2)$$

Estimação dos parâmetros

Para encontrarmos a reta que miniminiza as distâncias entre o valor real, Y_i, e o valor estimado, $\widehat{Y_i}$, devemos minimizar o somatório dos quadrados dos erros. Nessa derivação, encontraremos os pontos que satisfazem tal objetivo e, consequentemente, serão estas as nossas estimativas para os parâmetros.

Existem vários métodos para encontrar tais estimadores, porém iremos utilizar aqui o método mais comum em modelos de regressão, o **Método dos Mínimos Quadrados**.

O objetivo, portanto, é minimizar o somatório, tal que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= Y_i - (b + ax_i) \\
\varepsilon_i^2 &= [Y_i - (b + ax_i)]^2 \\
\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (b + ax_i)]^2 .
\end{aligned}$$

Assim, considerando

$$E = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2,$$

temos que calcular as derivadas parciais com relação a cada coeficiente, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\,[Y_i - (b + ax_i)]\,(-1) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\,[Y_i - (b + ax_i)]\,(-x_i) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} \widehat{b} = \overline{Y} - \widehat{a}\overline{X} \\ \widehat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \end{cases} \tag{3.9}$$

Para simplificar a escrita de $\widehat{a}$, usaremos:

$$\widehat{a} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

Estimados os valores, encontramos, então a reta estimada:

$$\widehat{Y_i} = \widehat{b} + \widehat{a}x_i$$

Propriedade dos estimadores

A validade dos estimadores, ou seja, saber se eles são viciados ou não, bem como a precisão (variabilidade) dos estimadores dos parâmetros, podem ser encontrados com mais detalhes em Ribeiro (2019b) e em Draper e Smith (1998).

Em ambos, chega-se a conclusão de que a média é dada por:

$$E[\widehat{a}] = a,$$

e a variância é dada por

$$V[\widehat{a}] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}.$$

Análise de variância

Ao ajustar um modelo, precisamos avaliar seu comportamento para então validá-lo como adequado aos dados. A principal medida para quantificar o quão bom é um modelo estimado para os dados é por meio da sua variância.

Embora esse termo seja utilizado comumente, em modelos de regressão trabalha-se com uma denominação mais adequada, definida de particionamento, ou seja, não vamos analisar variâncias, e sim, a variabilidade das médias ou, simplesmente, a significância do modelo de regressão – para mais detalhes, consulte Ribeiro (2019b).

Comparar os valores de Y_i com a média da variável resposta parece ser um passo importante nesse início, pois essas distâncias nos informarão se a reta de regressão é significativa ou não para os dados.

Assim, se não houver efeito de regressão o comportamento dos dados pode ser explicado pelo própria reta da média, ou seja, $\overline{Y}$.

Em suma, para análise de variância, iremos comparar Y_i com $\overline{Y}$, ou seja, teremos que avaliar o comportamento do seguinte somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2.$$

Para a manipulação algébrica da expressão anterior (precisamos desenvolvê-la mais para que se consiga mais detalhes), considere a soma e a subtração do termos $\widehat{Y}_i$ (que representa o valor estimado de Y_i), conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\widehat{Y}_i - \widehat{Y}_i) - \overline{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i + \widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)(Y_i - \overline{Y}).
\end{aligned}$$

A terceira parcela da soma, pode também ser expressa por:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})(Y_i-\overline{Y}) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})Y_i-\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})\overline{Y}.$$

Calculando cada parte, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})\overline{Y} &= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-(\widehat{b}+\widehat{a}x_i))\right] \\
&= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i-\sum_{i=1}^{n}\widehat{b}+\widehat{a}x_i\right] \\
&= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\widehat{b}+\widehat{a}\sum_{i=1}^{n}x_i\right] \\
&= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\widehat{b}+n\widehat{a}\overline{X}\right] \\
&= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i-n(\overline{Y}+\widehat{a}\overline{X})+n\widehat{a}\overline{X}\right] \\
&= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\overline{Y}-n\widehat{a}\overline{X}+n\widehat{a}\overline{X}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})\widehat{Y_i} &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i\widehat{Y_1}-\widehat{Y_i}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i(\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_i)-(\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_i)^2\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})^2+\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i}-\overline{Y})^2. \tag{3.10}$$

Em palavras, tal resultado é:

- $SQ_{total}=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$;
- $SQ_{res}=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y_i})^2$;
- $SQ_{reg}=\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i}-\overline{Y})^2$.

A tabela ANOVA (Análise de Variância), portanto, é constituída pelas seguintes quantidades:

Tabela 1 – Análise de Variância – ANOVA

Fonte de variação	GL	SQ	QM	F_0
Regressão	1	$\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2$	$\frac{SQ_{reg}}{1}$	$\frac{QM_{reg}}{QM_{res}}$
Resíduo	n-2	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2$	$\frac{SQ_{res}}{n-2}$	
Total	n-1	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$		

Fonte: Fonte: Retirado de Ribeiro (2019b).

Sendo GL os graus de liberdade, SQ a soma de quadrados, QM o quadrado médio e F_0 o valor da estatística F, utilizada para verificação de significância do modelo (essa parte não será detalhada neste trabalho).

Coeficiente de determinação

Tal coeficiente nos informa o quão a variabilidade total é explicada pelo modelo. Quando mais próximo de 1, melhor pode ser o modelo em estudo.

A medida é denotada por R^2 e é delimitada no intervalo $[0,1]$, sendo definida por:

$$R^2 = \frac{SQ_{reg}}{SQ_{total}} = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{total}}. \tag{3.11}$$

Outro coeficiente importante é o coeficiente de determinação ajustado pelos graus de liberdade, que é definido por:

$$R^2_{ajust} = 1 - \frac{\frac{SQ_{reg}}{n-2}}{\frac{SQ_{total}}{n-1}}. \tag{3.12}$$

3.6 EXEMPLOS PARA OS MODELOS

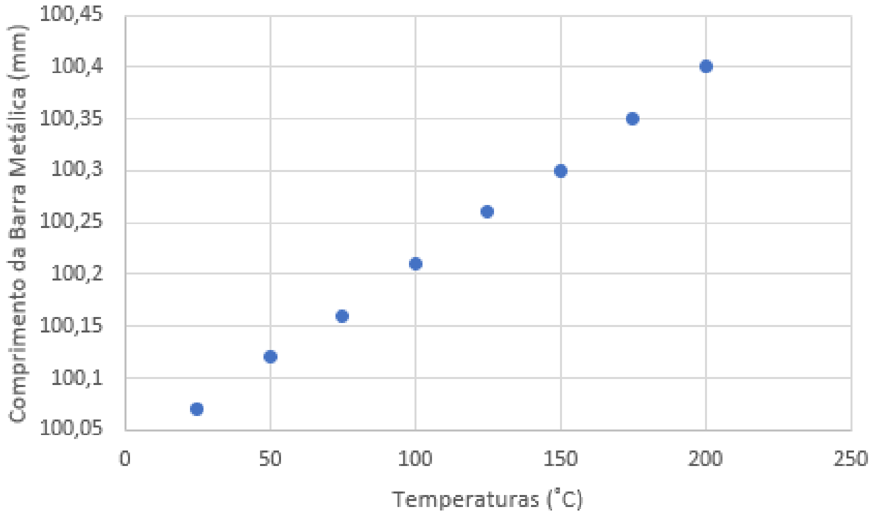
Aplicação do modelo de regressão linear

Os dados dessa aplicação referem-se ao estudo entre a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em ^{o}C) de um material. Valea ressaltar, que quando os corpos são submetidos a uma variação de temperatura, eles dilatam, ou seja, sofrem aumento ou diminuição nas suas dimensões. Essa variação é bem pequena, e que muitas vezes ela não é perceptível a olho nu, necessitando, assim, de equipamentos, como o microscópio, para poder visualizar.

Sabe-se que quando ocorre a variação da temperatura do corpo, os átomos que o constituem se agitam mais, com isso a distância média entre eles aumenta. Assim sendo, o corpo ganha novas dimensões, ou seja, ele se dilata. De uma forma geral, todos os corpos se dilatam após serem aquecidos e se contraem após terem sua temperatura reduzida.

A partir desse fenôneno, foram observados dados da dilatação linear de um material. A Figura 10 a seguir apresenta o gráfico de dispersão referente a essa duas variáveis.

Figura 10 – Gráfico de dispersão entre a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em °C) de um material.



Fonte: Próprio autor.

Observe que a relação entre as variáveis é claramente linear, o que indica que um modelo de regressão linear pode ser bem ajustado a esses dados. No Capítulo 4, vamos apresentar novamente essa aplicação, apresentando os possíveis ajustes para esses dados.

Mostraremos agora que existem modelos não-lineares que se transformam em funções lineares por anamorfose, isto é, por substituição dos valores de uma ou mais variáveis por funções destas variáveis.

Aplicação do modelo de regressão exponencial

Considere agora que a relação entre duas variáveis em estudo não seja linear, apresentando, portanto, um comportamento semelhante ao de uma função exponencial. Imediatamente, pensamos que o modelo anteriormente apresentado já não se torna adequado para a modelagem, visto que estávamos trabalhando de forma linear.

A saída para esse problema é bem simples e frequentemente utilizado por diversos profissionais da área. Considere que a função em questão seja dada por:

$$y = be^{ax} + \varepsilon. \tag{3.13}$$

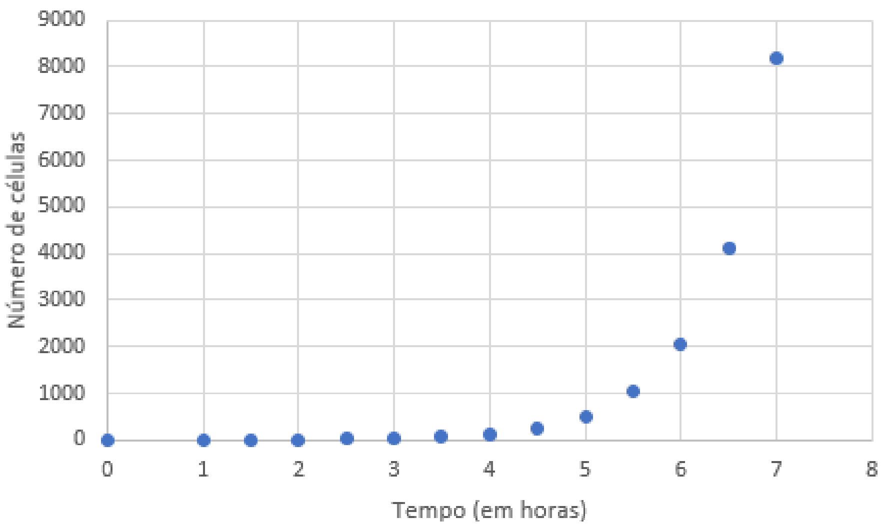
Se aplicarmos o logarítmo em ambos os lados da equação, podemos linearizá-la, ou seja,

$$\log y = \log b + ax + \log \varepsilon. \tag{3.14}$$

Dessa forma, convertemos uma estrutura para a que já conhecemos, ou seja, podemos aplicar as mesmas etapas anteriormente apresentadas para o caso linear, no caso exponencial, com a diferença de que precisaremos aplicar uma transformação logarítmica nos dados em estudo.

Nesse sentido, suponha que seja do interesse de um pesquisador avaliar o crescimento de células. Vale ressaltar que uma população de células em crescimento tem seu comportamento representado por uma função exponencial. Ao coletar as informações, temos a representação apresentada na Figura 11 a seguir.

Figura 11 – Gráfico de dispersão sobre o crescimento de células.



Fonte: Próprio autor.

Observe que a relação entre as variáveis tem um comportamento semelhante ao de uma função exponencial, o que sugere a utilização do modelo de regressão exponencial aos dados. Assim como a aplicação anterior, vamos, no Capítulo 4, abordar novamente essa aplicação, apresentando seus possíveis ajustes.

Vale ressaltar, ainda, que o modelo exponencial é uma estrutura muito utilizada na área da saúde, especificamente no que se chama de Análise de Sobrevivência, pois estima o tempo de vida de pacientes sujeitos a determinada doença ou mesmo o tempode vida útil de equipamente elétricos e eletrônicos. Mais detalhes sobre essa área podem ser visto em Colosimo e Giolo (2006).

Aplicação do modelo de regressão quadrático

Considere agora que a relação entre duas variáveis em estudo não seja nem linear nem exponencial, apresentando, portanto, um comportamento semelhante ao de uma função de grau 2. Definida como regressão quadrática, essa regressão é um caso particular da regressão polinomial.

Um modelo de regressão polinomial de grau 2, é dado por:

$$y = c + bx + ax^2 + \varepsilon. \tag{3.15}$$

Vale ressaltar que o modelo de regressão quadrático, ou mesmo o caso geral com modelo polinomial, temos uma abordagem de regressão múltipla. Isso porque agora tem-se um parâmetro a mais para ser estimado, que se refere ao coefciente de x^2.

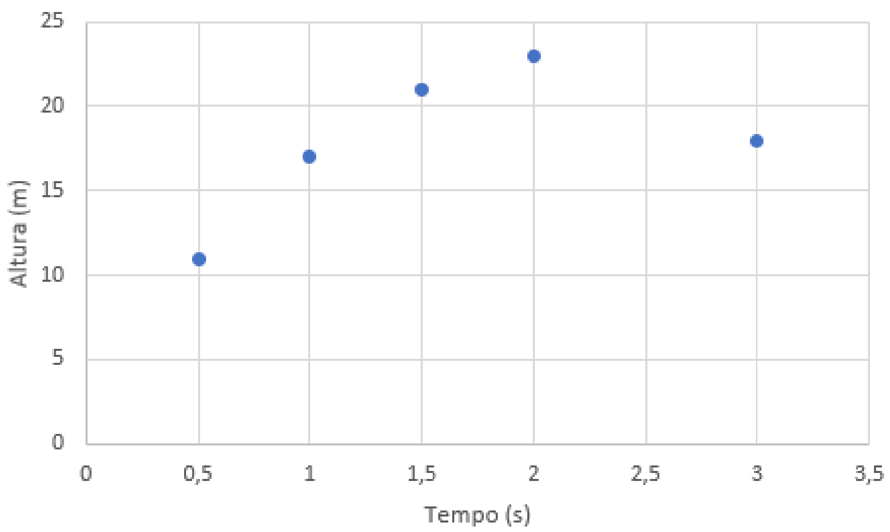
Entretanto, isso não é problema, pois podemos aplicar as mesmas etapas do caso linear para conseguir estimar todos os parâmetros envolvidos, bem como obter todas as propriedades anteriormente obtidas.

Nesta última aplicação, os dados referem-se ao tempo (em segundos) e altura (em metros) de um objeto lançado. Vale ressaltar que o movimento de um objeto lançado para cima tem muitas aplicações práticas (como o lançamento de foguetes) e merece atenção especial, pois sua velocidade mudará de sentido quando o objeto atingir a altura máxima.

Quando um objeto é lançado verticalmente (uma bola de vôlei, ou uma bola de tênis, por exemplo), sua velocidade inicial aponta para cima e a aceleração é a da gravidade, que aponta sempre para baixo. À medida que a bola sobe, sua velocidade diminui, sendo nula quando a bola atinge a altura máxima. A partir desse instante, o objeto começa a cair, e o módulo, ou seja, o valor da velocidade, aumenta até o objeto atingir o solo. Esse é um movimento com aceleração constante.

Nesse sentido, um estudo foi realizado e coletou-se uma amostra de 5 observações, referentes a esses dados. Os dados obtidos estão na Tabela 12 a seguir.

Figura 12 – Gráfico de dispersão entre o tempo (em segundos) e altura (em metros) de um objeto lançado.



Fonte: Próprio autor.

Podemos observar, por esse exemplo, que a relação entre as variáveis tem um comportamento semelhante ao de uma função polinomial, mais especificamente à uma função do segundo grau, o que sugere a utilização do modelo de regressão quadrático aos dados. Assim como as aplicações anteriorres, vamos, no Capítulo 4, abordar novamente essa aplicação, apresentando seus possíveis ajustes.

3.7 PRÓXIMOS PASSOS

A seguir, vamos utilizar os conceitos abordados neste capítulo e aplicá-los a três exemplos reais do cotidiano (já introduzidos anteriormente). Para essa modelagem, utilizaremos o esquema de Bassanezi (2010), apresentado na Figura 1 desta dissertação.

4 APLICAÇÕES

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos apresentar três aplicações e ajustar, para cada uma delas, os três modelos apresentados no capítulo anterior: modelo linear, modelo exponencial e modelo polinomial.

Utilizaremos o *Microsoft Excel*, versão *Microsoft 365*, para as análises estatísticas e o passo a passo de como será feita a análise está descrita em cada seção de aplicação a seguir. Esse procedimento também pode ser feito por qualquer outra aplicação que trabalhe com ajustes de modelos, tais como outros softwares e outros aplicativos para celulares.

Em cada uma das aplicações, utilizaremos o caminho apresentado na Figura 1, presente no capítulo anterior, ou seja,

1. Experimentação;
2. Abstração;
3. Resolução;
4. Validação;
5. Modificação.

O objetivo do texto é descrever exatamente as mesmas etapas que os alunos irão seguir em sua atividade no laboratório. Para isso, em cada uma das aplicações, os dados já estarão disponíveis em arquivo *Excel* para que o professor ministre suas instruções para a realização da atividade.

Vale ressaltar, ainda, que não serão abordados temas específicos, tais como derivadas de funções e estimação de parâmetros, visto que são conteúdos de nível superior e que o objetivo deste trabalho é fomentar a curiosidade e o conhecimento em prol do desenvolvimento do intelecto do estudante com exemplos mais acessíveis, não com metodologias robustas.

Desse modo, ficaremos restritos às atividades de construção de gráficos e ajuste de modelos utilizando o próprio *Excel*. Os comandos a serem seguidos pelos alunos para a utilização desse programa serão apresentados com letras maiúsculas, para diferenciá-los do texto de escrita comum. Iniciamos, portanto, com a aplicação 1 a seguir.

4.2 APLICAÇÃO 1

Os dados dessa aplicação referem-se ao estudo entre a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em ^oC) de um material.

Na Tabela 2 são apresentados os dados que foram coletados para este estudo (esses dados estão no mesmo formato na planilha de dados que será disponibilizada para os alunos).

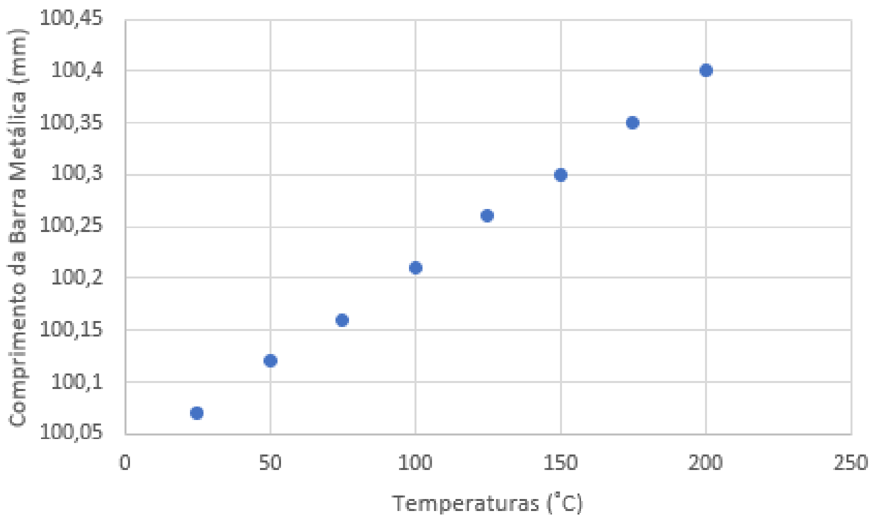
Tabela 2 – Dados referentes à dilatação de um material.

Temperatura (^oC)	Comprimento da barra (mm)
25	100,07
50	100,12
75	100,16
100	100,21
125	100,26
150	100,3
175	100,35
200	100,4

Nessa fase, já foi realizada a **experimentação**, ou seja, os dados já foram coletados e as variáveis para o estudo já foram selecionadas, no caso serão somente duas: renda e gasto.

A próxima fase é a **abstração**, ou seja, é o momento que deve-se considerar a formulação dos modelos matemáticos ou estatísticos. Para isso, precisamos observar, graficamente, o comportamento dos dados. Observe a Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Gráfico de dispersão entre a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em ^oC) de um material.



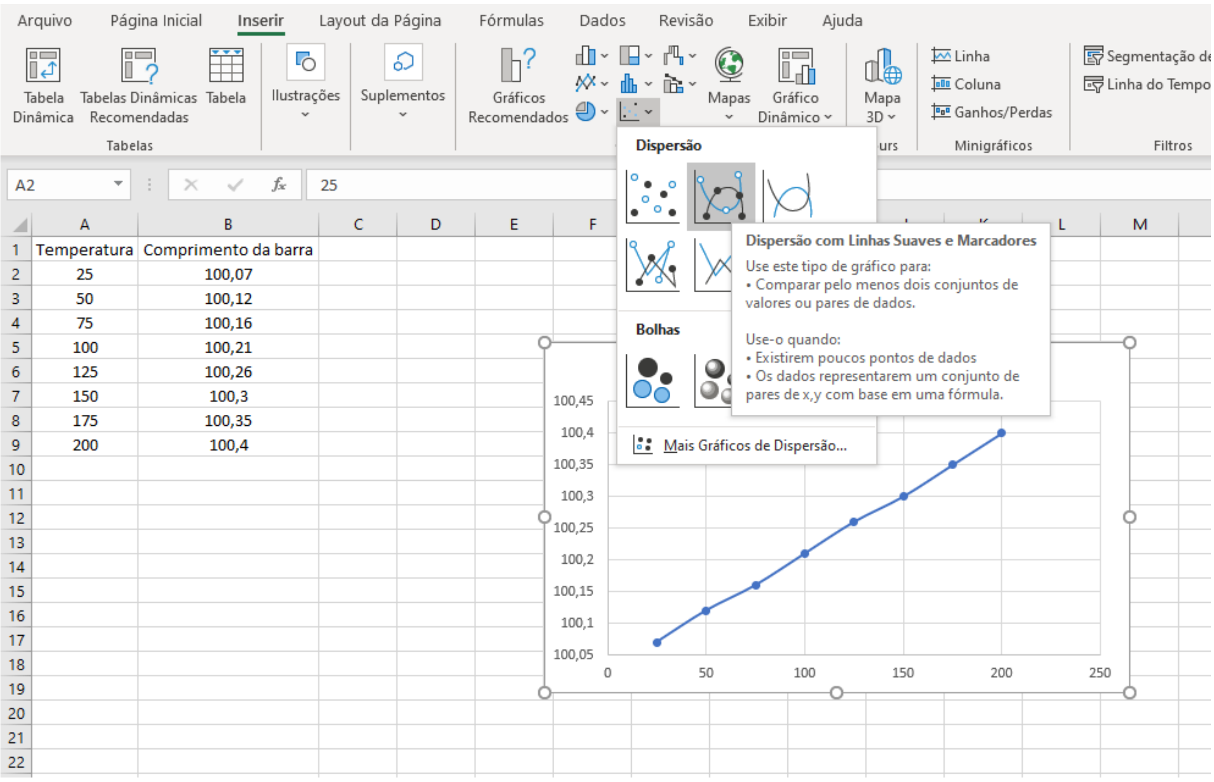
Fonte: Próprio autor.

Observe que os pontos estão, em conjunto, apresentando um comportamento linear, ou seja, os pontos estão repousados em torno de uma linha reta, o que nos sugere utilizar o modelo de regressão linear para modelar a relação entre as duas variáveis.

Partindo para a terceira etapa, a etapa de **resolução**, vamos ajustar um modelo de regressão linear, por meio do método dos mínimos quadrado utilizando o Excel. O passo a passo é descrito a seguir com auxílio de imagens para facilitar o entendimento (quando a palavra estiver escrita com todas as letras maiúsculas, significa que o termo é um comando do *Excel*).

Passo 1: Com o *Excel* aberto na planilha dos dados, selecione os dados que serão analisados (colunas X e coluna Y). Clique em INSERIR e depois, na opção de GRÁFICOS, escolha o do tipo DISPERSÃO COM LINHAS SUAVES E MARCADORES, conforme mostra a Figura 14 a seguir.

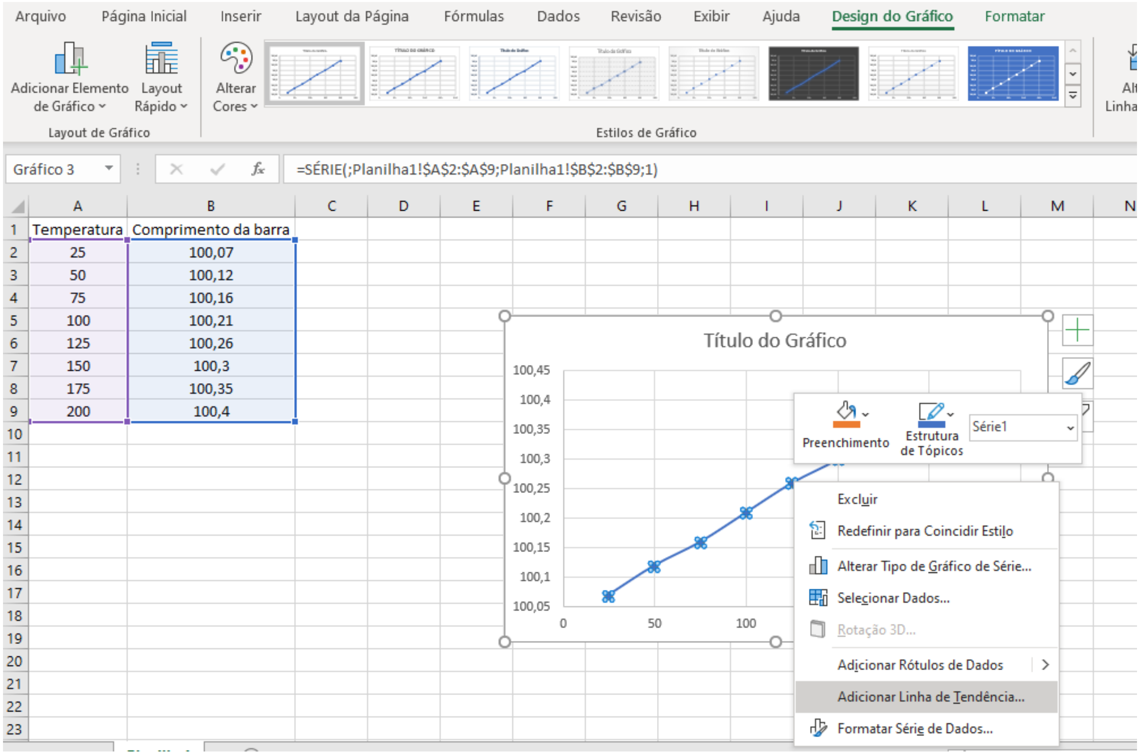
Figura 14 – Passo 1 para o ajuste de um modelo de regressão usando o *Excel*



Fonte: Próprio autor.

Passo 2: Feito o passo 1, aparecerá um gráfico representando os pontos e as suas ligações. Clique com o botão direito na linha que aparece no gráfico e escolha opção ADICIONAR LINHA DE TENDÊNCIA, conforme mostra a Figura 15, a seguir.

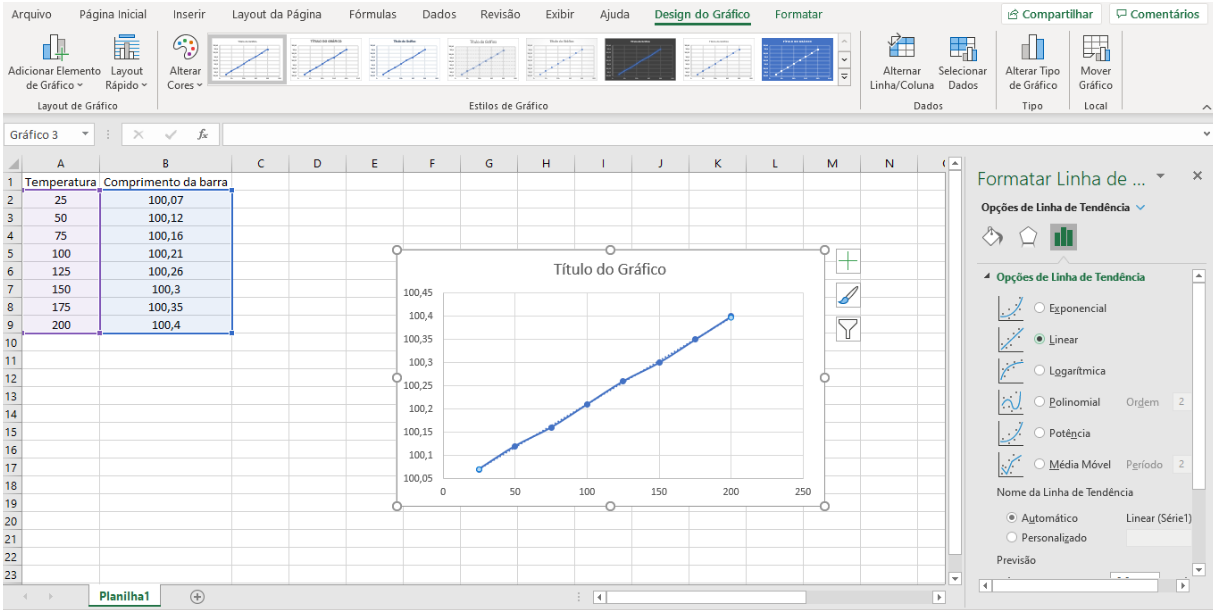
Figura 15 – Passo 2 para o ajuste de um modelo de regressão usando o *Excel*



Fonte: Próprio autor.

Passo 3: Feito o passo 2, aparecerá uma janela do lado direito do monitor com alguns campos para selecionar. Em OPÇÕES DE LINHAS DE TENDÊNCIA, escolha a opção LINEAR, se você quer um ajuste linear, a opção EXPONENCIAL ou POLINOMIAL (para n=2), se você quer uma regressão exponencial ou quadrática. Veja na Figura 16 a tela que aparecerá disponível neste momento.

Figura 16 – Passo 3 para o ajuste de um modelo de regressão usando o *Excel*.

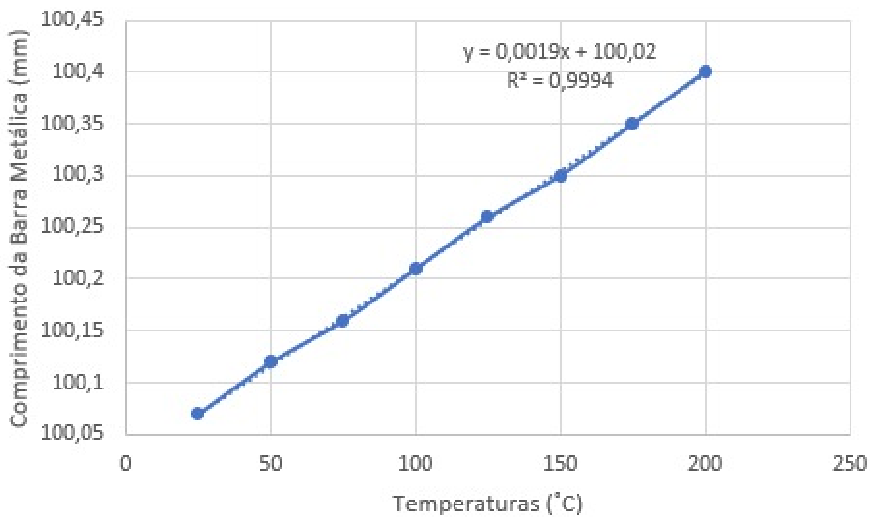


Fonte: Próprio autor.

Passo 4: Com o ajuste feito, clique em EXIBIR EQUAÇÃO NO GRÁFICO, para que você tenha acesso às informações do ajuste.

Seguindo esses passos para a aplicação 1 e escolhendo a opção LINEAR, obtemos que o intercepto é 100,02 e o coeficiente angular (de X) é 0,0019. Conforme mostar a figura a seguir:

Figura 17 – Gráfico de dispersão com modelo linear ajustado para a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em °C) de um material.



Fonte: Próprio autor.

Assim, a equação fica na forma:

$$\widehat{Y} = 0,0019X + 100,02.$$

A próxima etapa, a de **validação** (processo de aceitação ou não do modelo proposto) é feita por meio do coeficiente de determinação.

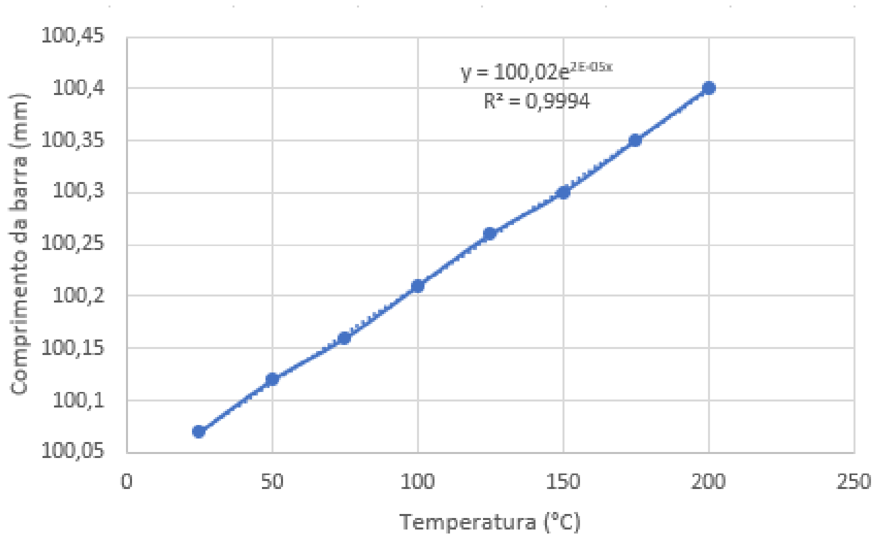
Para obter esse valor, o aluno, estando no passo 4, vai clicar na opção EXIBIR VALOR DE R-QUADRADO NO GRÁFICO. Feito isso, obtemos que $R^2 = 0,9994$.

Como o modelo apresentou R^2 muito próximo a 1, usaremos este modelo como o proposto para modelar a relação entre as duas variáveis. Dessa forma, a etapa de **modificação** (última etapa) não será necessária.

Embora seja um ótimo ajuste, vamos verificar o comportamento do modelo ao considerar um ajuste exponencial e um ajuste quadrático.

Para o exponencial, o aluno deve, no passo 3, escolher a opção EXPONENCIAL. Assim, temos o seguinte resultado:

Figura 18 – Gráfico de dispersão com modelo exponencial ajustado para a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em ºC) de um material.

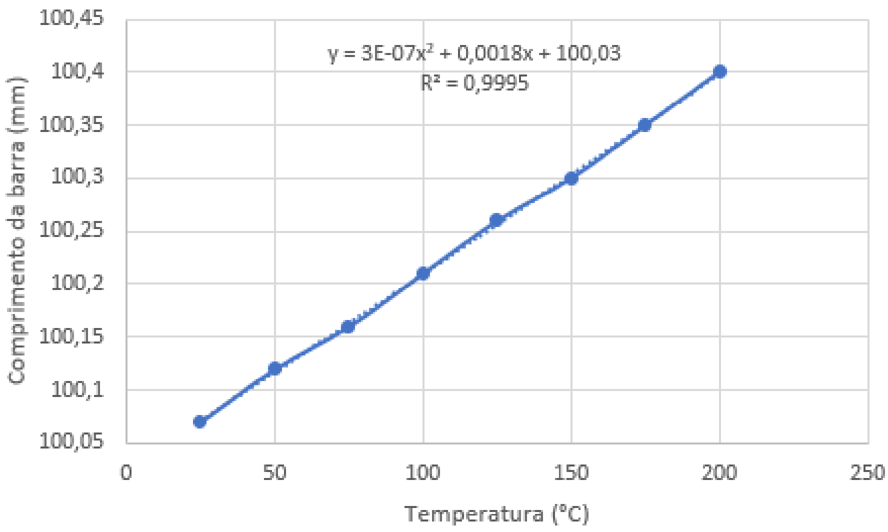


Fonte: Próprio autor.

Observamos que o ajuste, embora seja exponencial, se ajusta bem aos dados. O R^2 parece adequado e igual ao caso linear. Entretanto, esse coeficiente está mascarando a informação de que o termo da expoencial é muito próximo a zero, o que implica que ele é não significativo para o modelo – detalhes sobre inferência consulte Casella e Berger (2002).

No caso quadrático, temos o seguintes resultado:

Figura 19 – Gráfico de dispersão com modelo quadrático ajustado para a dilatação linear (em mm) e a temperatura (em °C) de um material.



Fonte: Próprio autor.

O modelo se ajustou bem aos dados, assim como no caso linear, já que $R^2 = 0,9995$. Embora maior, esse coeficiente também está mascarando a informação de que o coeficiente de x^2 é muito próximo a zero, o que implica que ele é não significativo para o modelo.

Logo, o modelo linear continua sendo o mais adequado para modelar a relação entre as variáveis em estudo.

4.3 APLICAÇÃO 2

Nesta aplicação, os dados referem-se ao crescimento de células. Na Tabela 3, a seguir, são apresentados os dados que foram coletados para este estudo (lembrando, novamente, que esses dados estão no mesmo formato na planilha de dados que será disponibilizada para os alunos).

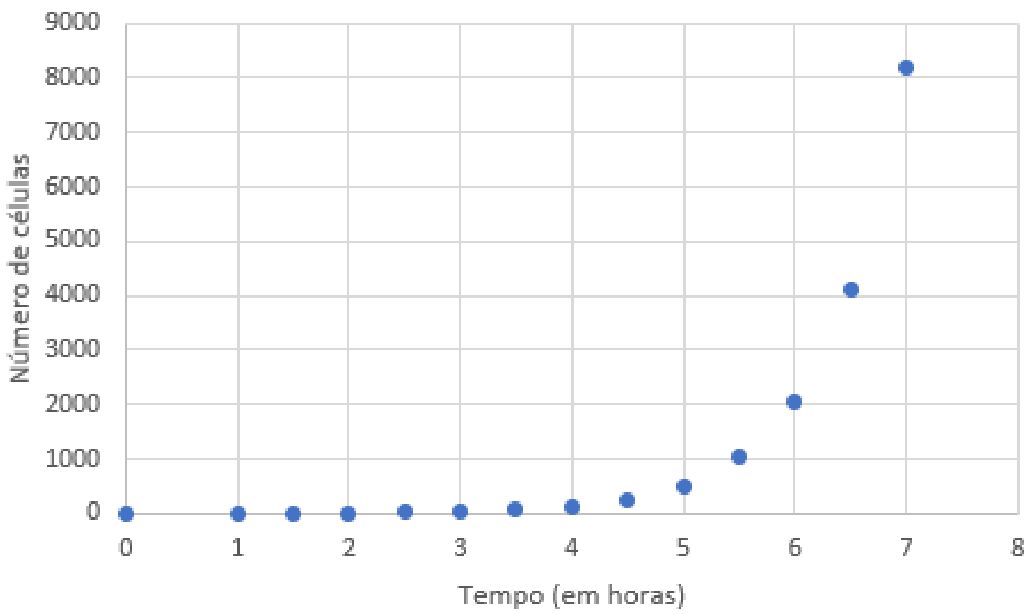
Tabela 3 – Dados referentes ao crescimento de células.

Tempo (h)	Número de células
0	1
1	2
1,5	4
2	8
2,5	16
3	32
3,5	64
4	128
4,5	256
5	512
5,5	1024
6	2048
6,5	4096
7	8192

Nesse caso, note que já foi realizada a **experimentação**, ou seja, os dados já foram coletados e as variáveis para o estudo já foram selecionadas.

A próxima fase é a **abstração** (conforme já apresentamos no tópico anterior). Para isso, precisamos observar, graficamente, o comportamento dos dados. Observe a Figura 20 a seguir.

Figura 20 – Gráfico de dispersão sobre o crescimento de células.



Fonte: Próprio autor.

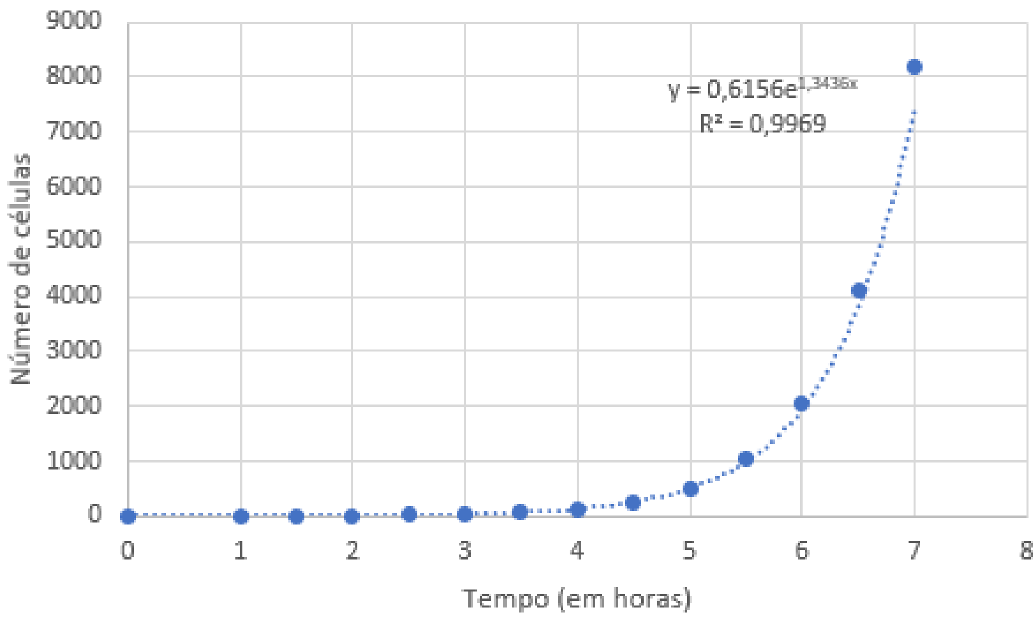
Observe que os pontos estão, em conjunto, apresentando um comportamento crescente do tipo exponencial, ou seja, os pontos estão repousados em torno de uma linha exponencial, o que nos sugere utilizar o modelo de regressão exponencial para modelar a relação entre as duas variáveis.

Partindo para a terceira etapa, a etapa de **resolução**, vamos ajustar um modelo de regressão exponencial, por meio do método dos mínimos quadrados utilizando, novamente, o *Excel*.

O passo a passo já foi descrito anteriormente, na aplicação 1, e aqui vamos partir diretamente para o passo 3, momento em que o aluno deverá optar pela opção de regressão EXPONENCIAL.

Realizando isso, temos o seguinte resultado apresentado na Figura 21.

Figura 21 – Gráfico de dispersão com modelo exponencial ajustado ao crescimento de células.



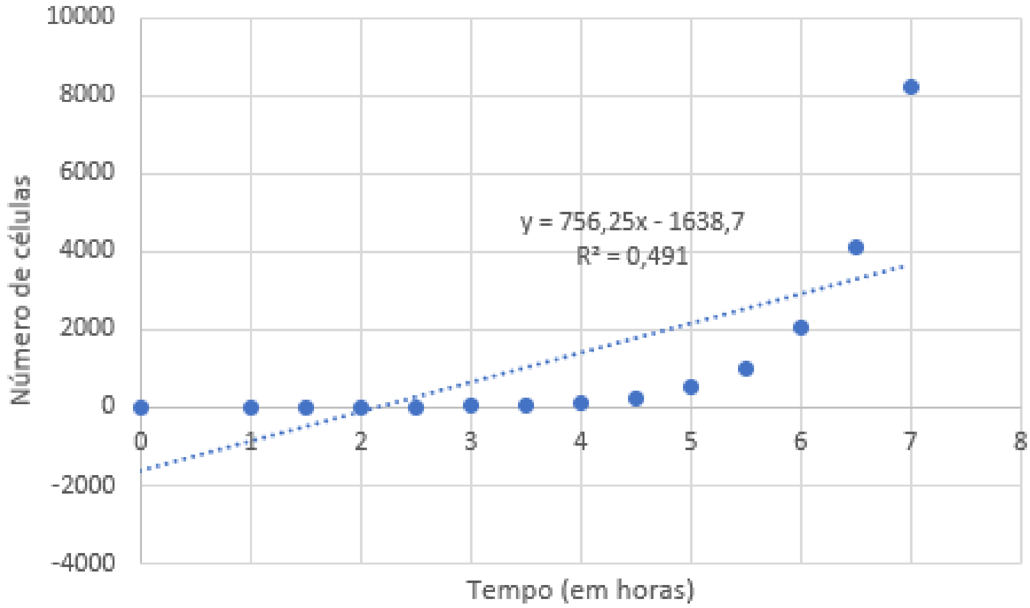
Fonte: Próprio autor.

Note que o modelo ajustado (linha tracejada) apresenta ótimo comportamento, bem como o coeficiente de determinação, no qual resultadou em $R^2 = 0,9969$.

Vamos verificar como ficaria a modelagem se considerarmos um ajuste linear ou quadrático.

Primeiramente para o linear, temos o seguinte resultado da Figura 22.

Figura 22 – Gráfico de dispersão com modelo linear ajustado ao crescimento de células.

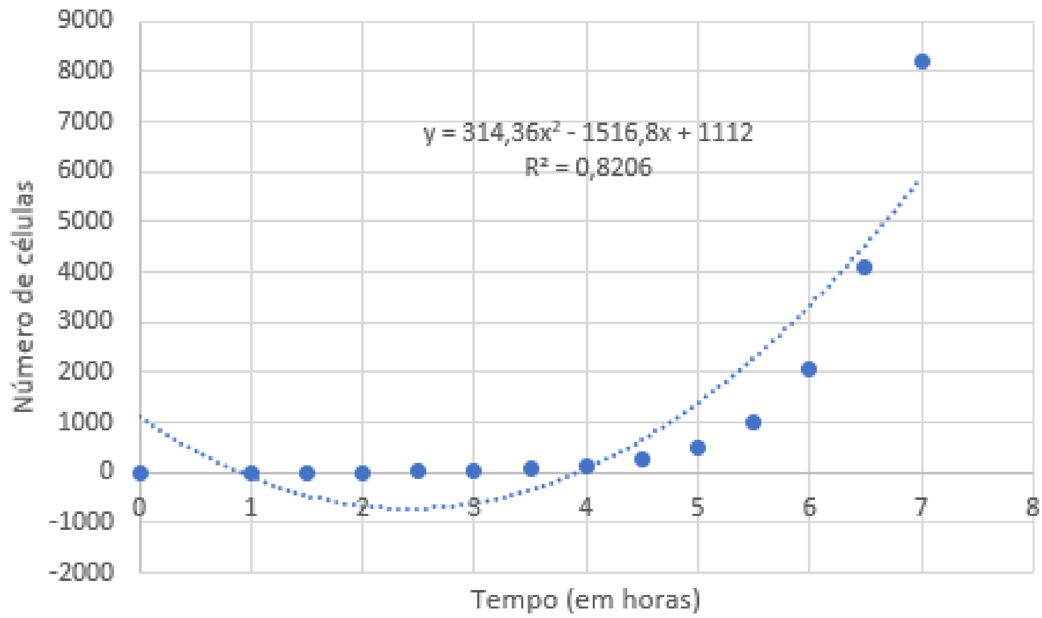


Fonte: Próprio autor.

É possível observar que o valor de R^2 foi bem abaixo do que no caso exponencial e, além disso, a curva estimada não está bem ajustada aos dados.

Partindo para o caso quadrático, temos o seguinte gráfico.

Figura 23 – Gráfico de dispersão com modelo quadrático ajustado ao crescimento de células.



Fonte: Próprio autor.

É possível observar que o valor de R^2 é acima do valor obtido no caso linear, porém continua inferir ao caso expoencial. Além disso, a curva estimada não está bem ajustada aos dados.

Logo, o modelo mais adequado para a modelagem da relação entre as variáveis em estudo é modelo exponencial.

4.4 APLICAÇÃO 3

Nesta última aplicação, os dados referem-se ao tempo (em segundos) e altura (em metros) de um objeto lançado. Foi coletada um amostra de 5 observações, referentes a esses dados. Os dados obtidos estão na Tabela 4 a seguir.

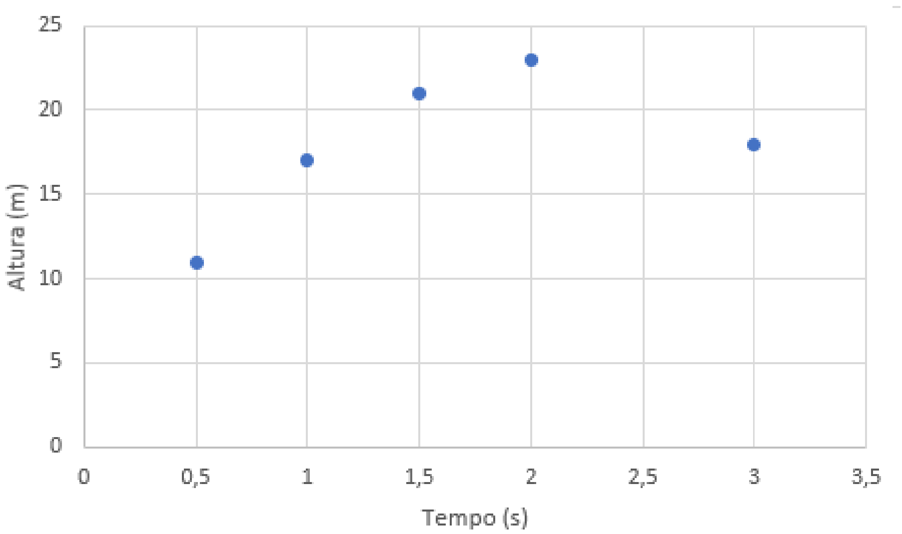
Tabela 4 – Dados referentes ao tempo e altura de um objeto lançado.

Tempo (s)	Altura (m)
0,5	11
1	17
1,5	21
2	23
3	18

Nessa fase, já foi realizada a **experimentação**, ou seja, os dados já foram coletados e as variáveis para o estudo já foram selecionadas, no caso serão somente duas: tempo e altura.

A próxima fase é a **abstração** (conforme já apresentamos no tópico anterior). Para isso, precisamos observar, graficamente, o comportamento dos dados. Observe a Figura 24 a seguir.

Figura 24 – Gráfico de dispersão entre o tempo (em segundos) e altura (em metros) de um objeto lançado.



Fonte: Próprio autor.

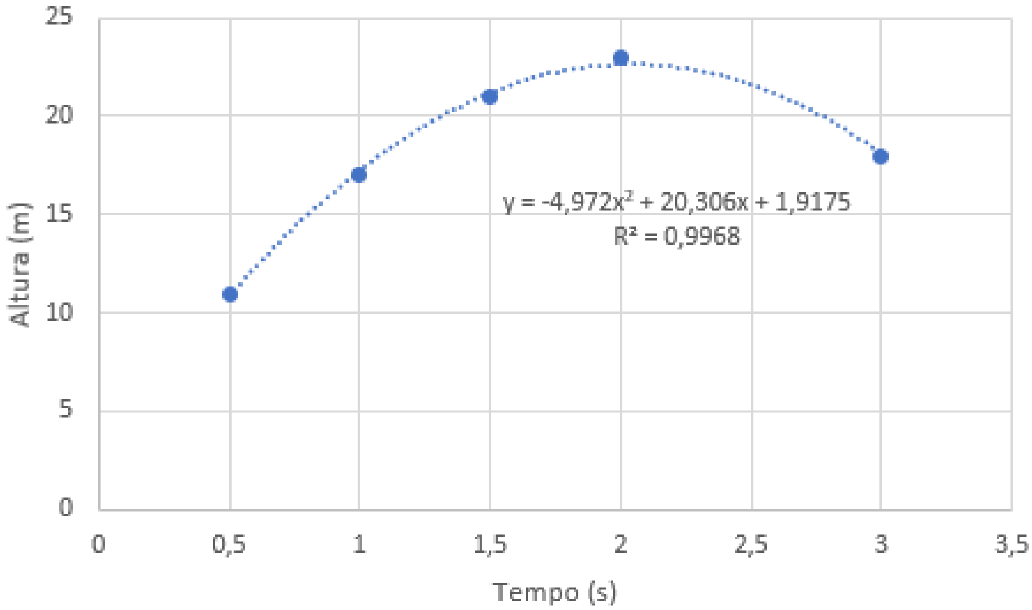
Observe que os pontos estão, em conjunto, apresentando um comportamento de uma parábola, ou seja, os pontos estão repousados em torno de uma linha de uma equação quadrática, o que nos sugere utilizar o modelo de regressão quadrático para modelar a relação entre as duas variáveis.

Partindo para a terceira etapa, a etapa de **resolução**, vamos ajustar um modelo de regressão quadrático, por meio do método dos mínimos quadrados utilizando, ainda usando o *Excel*.

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, temos que, no passo 3, momento em que o aluno deverá optar pela opção de regressão, deve-se escolher a opção POLINOMIAL (com ordem 2).

Realizando isso, temos o seguinte resultado:

Figura 25 – Gráfico de dispersão com modelo quadrático ajustado o tempo (em segundos) e a altura (em metros) de um objeto lançado.



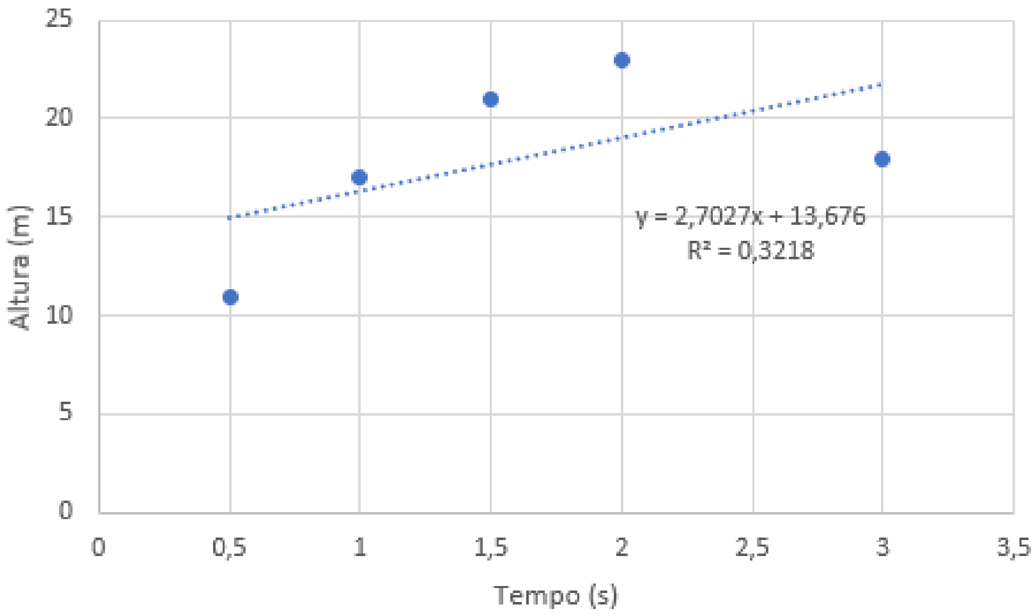
Fonte: Próprio autor.

Note que o modelo ajustado (linha tracejada) apresenta ótimo comportamento. O coeficiente de determinação resultou em $R^2 = 0,9968$.

Vamos verificar como ficaria a modelagem se considerarmos um ajuste linear ou exponencial e avaliar o que acontece com o coeficiente de determinação.

Para o linear, temos a Figura 26.

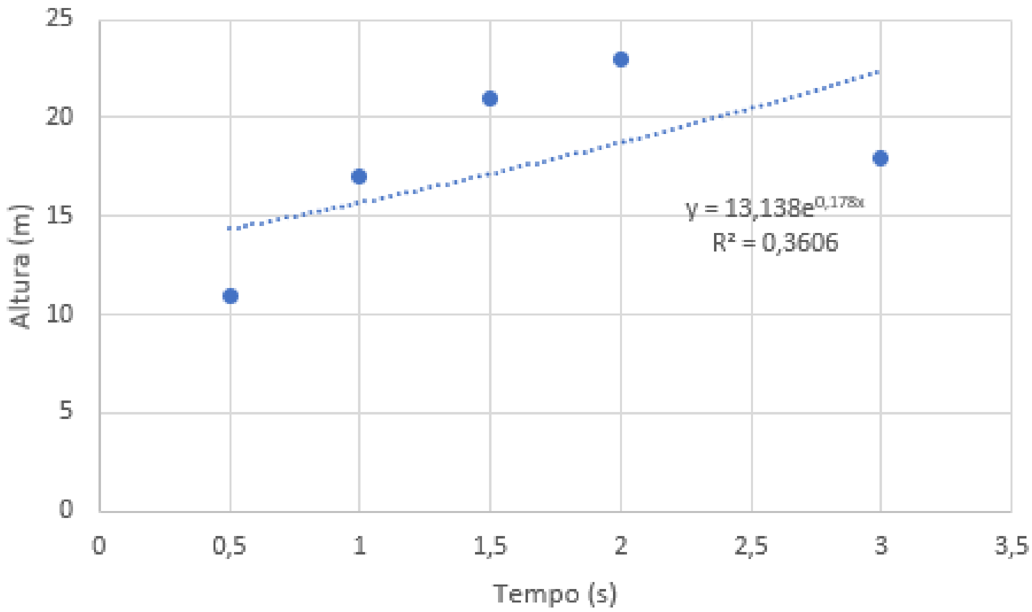
Figura 26 – Gráfico de dispersão com modelo linear ajustado o tempo (em segundos) e a altura (em metros) de um objeto lançado.



Fonte: Próprio autor.

É possível observar que o valor de R^2 foi muito baixo. Além disso, a curva estimada não é, de forma alguma adequada aos dados. Partindo para o caso exponencial, temos o seguinte gráfico.

Figura 27 – Gráfico de dispersão com modelo exponencial ajustado o tempo (em segundos) e a altura (em metros) de um objeto lançado.



Fonte: Próprio autor.

É possível observar que o valor de R^2 é também muito baixo e que a reta ajustada não se adequa aos dados, repetindo o comportamento do caso do ajuste linear.

Logo, o modelo mais adequado para a modelagem da relação entre as variáveis em estudo é o modelo quadrático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O contato com a literatura especializada sobre educação básica e modelagem matemática, por intermédio desse trabalho, instigou minhas reflexões sobre como abordar diferentes formas de ensino da matemática. Assim, foi possível compreender que os docentes realmente precisam buscar, dentro de sua realidade, obviamente, trabalhar questionamentos sobre a aplicabilidade e importância da Matemática, de modo a instigar aos seus alunos a curiosidade e a eterna busca pelo conhecimento.

Este trabalho torna-se, portanto, um importante instrumento de ensino para que outros professores o utilize como motivação para incrementar e apresentar, em sala de aula, conceitos ligados à aplicabilidade da Matemática para os alunos da eduacação básica. Aqui utilizamos o método dos mínimos quadrados e sua implementação com aplicações em Excel, mas existem infinitas outras abordagens interessantes que podem ser trabalhadas, tais como conceitos sobre aprendizado de máquina, inteligência artificial e ciência de dados: três conceitos importantes atualmente e que utilizam a matemática em sua essência.

Partindo para o lado da aplicação em sala de aula da ideia aqui proposta, percebemos que o método dos mínimos quadrados pode despertar muito interesse para os alunos do primeiro ano do ensino médio, pois, aliado ao suporte do *Microsoft Excel*, os discentes podem ver, na prática, como a modelagem matemática é importante para as tomadas de decisões e que tais decisões são tomadas com base em relações básicas, tais como a relação matemática $y = f(x)$, no qual as duas variáveis x e y são ajustadas por meio de uma curva a ser estimada e que nos passará informações valiosas.

A escolha desse método como metodologia de apresentação aos alunos baseou-se em analisar que o Método dos Mínimos Quadrados oferece a possibilidade de utilizar, de forma significativa, conteúdos já razoavelmente sedimentados em seus anos escolares, tornando a aprendizagem mais sólida e robusta. A utilização dos conceitos de máximos e mínimos de funções, de funções lineares, de funções de polinômios de grau 2 e de funções exponenciais, por exemplo, são conteúdos ainda abordados no ensino básico e médio.

Dessa forma, objetiva-se, em um futuro trabalho de doutorado, por exemplo, aprofundar o estudo do método dos mínimos quadrados aqui apresentado, buscando definições e conceitos mais robustos, visando a utilização desse método em outras condições, tais como em exemplo ainda não utilizados na literatura. Esse trabalho é apenas um início do que se pode fazer com o importantíssimo método de estimação chamado de mínimos quadrados.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por que? como. **Por que**, p. 73–80, 2004.

BASSANEZI, R. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 2ª reimpressão são paulo. **Contexto**, 2010.

BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática. **Dynamis, Blumenau**, v. 1, n. 7, p. 55–83, 1994.

BASSANEZI, R. C. Uma introdução à biomatemática. **Notas de aula do minicurso, proferido na 1ª Escola de Inverno em Matemática Pura e Aplicada da UFABC, Santo André–SP**, p. 76, 2011.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. 850 paulo—sp: Contexto. 2005.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. **São Paulo**, 2003.

BRUMANO, C. E. P. A modelagem matemática como metodologia para o estudo de análise combinatória. 2014.

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. **BRANDT, CF, BURAK, D., and KLÜBER, TE, orgs. Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]. 2nd ed. rev. and enl. Ponta Grossa: Editora UEPG**, p. 17–40, 2016.

CARLOS, B. R. Ensino–aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. **Contexto, São Paulo–SP**, 2006.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. v. 2.

CHAGAS, E. M. P. d. F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. **Millenium**, Instituto Politécnico de Viseu, p. 240–248, 2004.

CHAVES, M. L. Repercussões de experiências com modelagem matemática em ações docentes. **REMATEC, Natal (RN), ano**, v. 9, p. 24–45, 2014.

COLL, C. et al. Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. In: **Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes**. [S.l.: s.n.], 2000.

COLOSIMO, E.; GIOLO, S. Análise de sobrevivência aplicada. 1ª edição. **São Paulo: Editora Edgard Blücher**, 2006.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. v. 326.

D'AMBROSIO, U. História da matemática e educação. **cadernos cedes**, v. 40, p. 7–17, 1996.

GOULART, É. B. **Formação de professores e Modelagem Matemática: implicações na prática pedagógica**. Dissertação (Mestrado), 2016.

GUIDORIZZI, H. L. Curso de cálculo. 1987.

MATTEI, F. **A modelagem como ferramenta para a construção de conhecimentos matemáticos**. Dissertação (Mestrado), 2012.

MIGUEL, A. et al. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista brasileira de educação**, SciELO Brasil, n. 27, p. 70–93, 2004.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. [S.l.]: Editora Saraiva, 2017.

PONTES, H. M. de S.; BURAK, D. 10 modelagem matemática na educação básica.

PREDOSA, M. S.; MAFRA, J. C. M.; SIQUEIRA, A. S. Uma proposta de modelagem matemática: Prática de diluição contínua monitoradas por espectrofotometria visível na motivação do ensino de equações diferenciais para alunos de química. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, 2015.

QUARTIERI, M. T.; KNIJNIK, G. Modelagem matemática na escola básica: surgimento e consolidação. **Revista Caderno Pedagógico**, v. 9, n. 1, 2012.

RIBEIRO, V. S. O. **Advanced Mathematics Topics**: Lecture notes. [S.l.: s.n.], 2019.

RIBEIRO, V. S. O. **Regression models**: Lecture notes. [S.l.: s.n.], 2019.

RICHIT, A. Barbosa, jonei cerqueira. modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. tese (doutorado em educação matemática)–instituto de geociências e ciências exatas, universidade estadual paulista, rio claro, 2001. orientador: Marcelo de. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 18, n. 23, p. 127–132, 2005.

SILVA, A. B. d. et al. O método simplex e o método gráfico na resolução de problemas de otimização. Universidade Federal de Goiás, 2016.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 26, n. 43, p. 1021–1047, 2012.

STEWART, J. **Cálculo: volume 1**. [S.l.]: Thomson, 2008.

STROGATZ, S. **A matemática do dia a dia: transforme o medo de números em ações eficazes para a sua vida**. [S.l.]: Alta Books Editora, 2017.