



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Marlene Jucélia Beloli Stairk

Geometria das Curvas Planas

Florianópolis
2020

Marlene Jucélia Beloli Stairk

Geometria das Curvas Planas

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Eliezer Batista, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Stairk, Marlene Jucélia Beloli
Geometria das Curvas Planas / Marlene Jucélia Beloli
Stairk ; orientador, Eliezer Batista, 2020.
80 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria diferencial; Curva
parametrizada diferenciável, Comprimento de arco;
Curvatura.. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

Marlene Jucélia Beloli Stairk

Geometria das Curvas Planas

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.
Membro externo

Prof. Celso Melchíades Dódia, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Eliezer Batista, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

Este trabalho é dedicado às pessoas muito especiais na minha trajetória de vida: meu esposo João Batista, pelo incentivo e paciência durante estes anos, ao meu afilhado Jurandi, pela solicitude e espontaneidade, colocando-se à disposição como condutor do veículo às viagens a Florianópolis, amenizando a minha tensão e desgaste emocional. Às minhas irmãs, irmãos, cunhados(as) e sobrinhos pela força em prosseguir, ainda que os obstáculos corriqueiros, colocassem-me à prova do meu plano traçado. Hoje podemos comemorar: tarefa cumprida, sonho realizado! Meu eterno reconhecimento e gratidão a todos.

Marlene

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por ter-me possibilitado realizar este sonho, já há muito desejado.

A todos os colegas de turma, em especial ao Robson e a Angelita, por tudo que me ajudaram.

Aos colegas de trabalho das escolas Dionízio Milioli e Paulo Rizzieri, pelo apoio durante esse período.

Aos mestres, que muito contribuíram para meu aprendizado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eliezer Batista, por me conduzir a alcançar um novo degrau em minha vida.

*“O sucesso nasce do querer,
da determinação e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos,
no mínimo fará coisas admiráveis.”
(José de Alencar)*

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de mostrar alguns resultados de geometria diferencial das curvas. No estudo abordamos alguns tópicos importantes das curvas planas: a parametrização, a reta tangente em pontos específicos da curva, a condição de regularidade de uma curva, o comprimento de arco de uma curva em parametrização arbitrária, a reparametrização por comprimento de arco e o conceito mais fundamental da geometria diferencial, o de curvatura. Apresentaremos também uma proposta de ensino, empregando os conceitos aqui referenciados, para ser utilizada no ensino fundamental e médio com o objetivo de ampliar e melhorar a qualidade do ensino da matemática .

Palavras-chave: Geometria diferencial. Curva. Curva parametrizada diferenciável. Comprimento de arco. Curvatura.

ABSTRACT

This work aims to show some results of differential geometry of the curves. In the study we covered some important topics of plane curves: the parameterization, the tangent line at specific points of the curve, the condition of regularity of a curve, the arc length of a curve in arbitrary parametrization, reparametrization by arc length and the concept fundamental element of differential geometry, curvature. We will also present a teaching proposal using the concepts referenced here to be used in elementary and high school with the aim of expanding and improving the quality of teaching mathematics

Keywords: Differential geometry. Curve. Parameterized differentiable curve. Arc length. Curvature.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de curvas	14
Figura 2 – Coordenadas cartesianas, paramétricas e polares.	17
Figura 3 – Reta	18
Figura 4 – Elementos da parábola	19
Figura 5 – Parábola	20
Figura 6 – Círculo	21
Figura 7 – Elipse	22
Figura 8 – Gráfico de $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$	23
Figura 9 – Hipérbole	23
Figura 10 – Espiral de Arquimedes	25
Figura 11 – Triângulo sugerido por Cassini	26
Figura 12 – As ovais de Cassini	27
Figura 13 – Lemniscata de Bernoulli	28
Figura 14 – Desenvolvimento da cicloide	29
Figura 15 – Trocóides	30
Figura 16 – Desenvolvimento da cardioide	31
Figura 17 – $r = R$, Cardioide	33
Figura 18 – Desenvolvimento da astroide	34
Figura 19 – Astroide	35
Figura 20 – Folium de Descartes obtido com $a = 1$	36
Figura 21 – $r' \perp r$ e P' simétrico de P em relação a r	37
Figura 22 – Curvas parametrizadas distintas com o mesmo traço.	39
Figura 23 – Corda ligando dois pontos da curva	40
Figura 24 – Reta tangente ao círculo no ponto P	42
Figura 25 – Retas tangentes para $r = 1 + \sin \theta$	44
Figura 26 – Curvas parametrizadas distintas com o mesmo traço.	47
Figura 27 – Curva não regular	47
Figura 28 – Poligonal associada a uma partição de $[a, b]$	49
Figura 29 – Trângulo da lemniscata	54
Figura 30 – Lemniscata	55
Figura 31 – Campo de vetores $X(t)$ ao longo de γ	61
Figura 32 – Vetores unitários perpendiculares a $T(s)$	62
Figura 33 – Vetor normal unitário	62
Figura 34 – Vetores tangentes unitários na circunferência de raio 1	65
Figura 35 – Círculo osculador no ponto P	66
Figura 36 – Curvatura com sinal positivo	67
Figura 37 – Curvatura com sinal negativo	68

Figura 38 – Exemplo de material	73
Figura 39 – Desenhando a cicloide	73
Figura 40 – Início da construção da cicloide	76
Figura 41 – Curvas no Geogebra	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CURVAS	14
2.1	CONCEITOS INICIAIS	14
2.2	CURVAS PLANAS	15
2.3	EXEMPLOS DE CURVAS PLANAS	17
3	CURVA REGULAR	39
3.1	CURVAS SUAVES	39
3.2	VETOR TANGENTE	39
3.2.1	Vetor tangente a uma curva paramétrica	41
3.2.2	Vetor tangente a uma curva polar	42
3.3	CURVA REGULAR	44
4	COMPRIMENTO DE ARCO	49
4.1	COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA	49
4.2	REPARAMETRIZAÇÃO POR COMPRIMENTO DE ARCO	56
5	TEORIA LOCAL DAS CURVAS PLANAS	61
5.1	CAMPOS DE VETORES AO LONGO DE UMA CURVA	61
5.2	CURVATURA	63
5.2.1	Sinal da Curvatura	67
6	PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO	72
6.1	CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO	73
6.2	CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	74
6.3	EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA	74
6.4	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS	75
6.5	UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS	76
7	CONCLUSÃO	78
	Referências	79

1 INTRODUÇÃO

O matemático e historiador da matemática Enrico Giusti assim define curvas:

Objetos matemáticos por excelência, as curvas desempenham, no imaginário matemático, o delicado papel de uma região de fronteira onde desembocam atividades diferentes e, as vezes, contrapostas. Essas remetem ao desenho, ao projeto, ao construir, mas juntas simbolizam o gesto e a beleza; ao mesmo tempo, objetos da imaginação e instrumentos da técnica. (GIUSTI; CONTI, 1999).

Desde a origem da geometria, as curvas permeiam praticamente toda a atividade e pensamento dos matemáticos, que nunca pouparam esforços para estudá-las, classificá-las, medi-las e até inventar instrumentos para traçá-las. No campo das ciências naturais, as curvas também ocupam um lugar de destaque, já que se prestam fortemente à modelagem e a descrição de inúmeros fenômenos matemáticos.

Inicialmente tratadas como objetos particulares — quando as curvas eram tratadas uma a uma, através de seus específicos procedimentos de construção e de suas propriedades e aplicabilidades características — as curvas adquiriram o status de objeto matemático de pleno direito a partir dos trabalhos de Descartes, através dos quais elas passaram a ser vistas como lugares geométricos descritos por equações algébricas. Mais tarde, com o advento do cálculo infinitesimal e da geometria diferencial, esse processo atingiu seu pleno amadurecimento. É o ponto de vista da geometria diferencial que nos interessa neste trabalho. Nesse contexto uma curva é completamente caracterizada por suas propriedades geométricas. No caso das curvas planas, apenas uma característica entra em cena: a curvatura.

A exploração do conceito de curvatura foi um dos objetivos principais desse trabalho. A escolha dos temas abordados nesse trabalho foi baseada na tentativa de estimular o interesse matemático para vários conceitos geométricos. Estão juntos aqui as noções de convexidade e curvatura; como o comportamento do vetor tangente de uma curva pode estar ligado com sua topologia.

No Capítulo 2 mostraremos a parametrização de algumas curvas planas, utilizando para isso dois diferentes parâmetros: o parâmetro t e o parâmetro θ . No Capítulo 3 apresentaremos o comportamento das curvas no plano, a sua regularidade, o vetor tangente e a mudança de parâmetro e mostraremos a importância do vetor tangente para a geometria. Já no Capítulo 4, trabalharemos com o comprimento de arco para parametrizar e reparametrizar as curvas, ou seja, calcular a distância efetivamente percorrida ao longo de sua trajetória. No Capítulo 5, estudaremos as curvas como um todo, suas propriedades locais (vetor tangente, vetor normal e curvatura) e a influências das mesmas sobre o comportamento da curva. O Capítulo 6 trará uma proposta pedagógica para o uso e aprendizado da parametrização da cicloide no ensino médio. No Capítulo de conclusão, falaremos da importância do trabalho como instrumento de

pesquisa e da contribuição do mesmo em levar uma proposta de ensino didático para a melhor compreensão da matemática no ensino fundamental e médio.

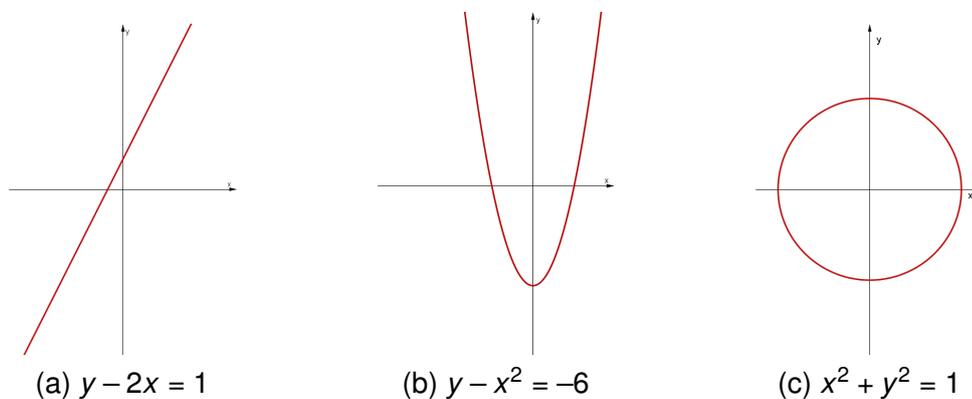
2 CURVAS

2.1 CONCEITOS INICIAIS

Usualmente se pensa em uma curva de duas maneiras: como a trajetória descrita pelo deslocamento de um ponto, ou o lugar geométrico de um ponto que se move de acordo com uma ou mais leis especificadas, neste caso, as leis comporão uma condição necessária e suficiente para a existência do objeto definido. Frequentemente há maior interesse nas curvas em um espaço Euclidiano de duas dimensões (curvas planas) ou três dimensões (curvas espaciais).

De modo intuitivo, uma curva no plano pode ser entendida como o gráfico de funções de uma variável real, e pode ser representada como um subconjunto que tenha dimensão 1. Se pedirmos que dê um exemplo de curva, certamente todos terão em mente um subconjunto de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 como por exemplo uma circunferência, uma elipse ou uma reta. Sob o ponto de vista intuitivo, uma curva será um conjunto de pontos que se pode descrever com um único parâmetro. Outro ponto de vista, inspirado na Geometria Analítica, será considerar uma curva em \mathbb{R}^2 como um conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que satisfazem uma equação do tipo $F(x, y) = c$. Alguns exemplos do que podemos considerar como curvas estão representadas graficamente abaixo:

Figura 1 – Exemplos de curvas



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

A equação $xy = 0$ descreve o conjunto formado pelos eixos coordenados. De forma parecida, existem conjuntos que gostaríamos de considerar como curvas e não podem ser descritas dessa maneira. Um exemplo importante é quando $F(x, y)$ assume $F(x, y) = 0$ que é o conjunto de zeros de um polinômio real, de duas variáveis. esse tipo de curva é chamada de curva algébrica. Esse tipo de “curva” é estudada em Geometria Algébrica, um importante ramo da Matemática.

Em Geometria Diferencial, é mais conveniente considerarmos curvas como acima, vamos abordar a ideia que uma curva deve descrever uma trajetória suave

no plano. Tomando pontos $\gamma(t)$, representando a posição da partícula em movimento contínuo, quando t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto que iremos considerar é

$$\zeta = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}.$$

Utilizando essa notação, facilmente verificamos as várias informações sobre como o ponto $\gamma(t)$ percorre o conjunto ζ , o sentido em que o ponto “anda” sobre ζ . Assim, a partir disso podemos definir sua velocidade, aceleração, etc. Vamos então introduzir a definição formal de curva.

2.2 CURVAS PLANAS

Definição 1. Uma curva plana **parametrizada diferenciável** é uma aplicação diferenciável γ , de classe C^∞ ¹ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva, e o subconjunto de \mathbb{R}^2 formado pelos pontos $\gamma(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, onde $x(t), y(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

Nesse trabalho, a menos que seja esclarecido de forma diferente, as curvas as quais vamos nos referir serão sempre curvas diferenciáveis.

Definição 2. Se a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são ditos ponto inicial de γ e ponto final de γ , respectivamente.

Definição 3. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida em um intervalo $I = [a, b]$ dizemos que γ é uma **curva fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$, ou seja, se seus pontos, inicial e final, coincidem.

Definição 4. Um curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida como **periódica** se existe um número real $l > 0$, tal que

$$\gamma(t + l) = \gamma(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor de l_0 com $l_0 > 0$ para o qual a equação se verifica é chamado de **período** de γ . É fácil perceber que a curva γ fica completamente determinada pela sua restrição a um intervalo da forma $[t_0, t_0 + l_0]$.

Observação 1. A curva constante $f(x) = c$ tem como período qualquer número real $P \neq 0$ e não possui período fundamental, ou seja, ela não é uma curva periódica.

Observação 2. Um curva simples é injetiva. Quando temos que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que γ possui um ponto duplo(ou múltiplo) em t_1 e t_2 .

¹ Quando se disser que uma função $f : A \rightarrow B$ é de classe C^1 , deve-se entender que sua primeira derivada é uma função contínua. Analogamente, se f for de classe C^2 , então, sua derivada segunda é uma função contínua. Assim como, se f é dita de classe C^n , se sua n -ésima derivada também é uma função contínua e é de classe C^∞ se for de classe C^n para todo n

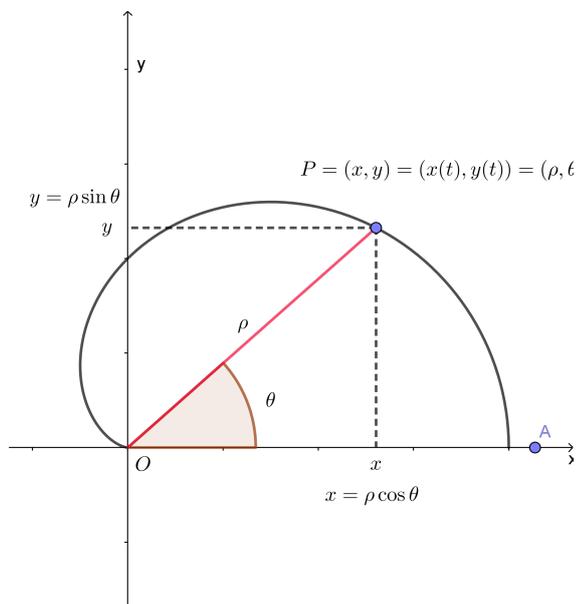
Para melhor entendermos os exemplos de curvas que mostraremos no próximo capítulo é importante mostrarmos que uma curva pode ser expressa em coordenadas cartesianas, paramétricas e polares.

O sistema de coordenadas mais utilizado é o plano cartesiano, onde cada ponto recebe uma coordenada x , que representa a posição horizontal, e uma coordenada y , representando sua posição vertical. Estas são geralmente escritas em um par ordenado (x, y) . Uma **equação cartesiana** é uma equação do tipo $f(x, y) = c$ onde f é uma função de x e y e c é uma constante.

Em vez de considerarmos curvas definidas por equações cartesianas, podemos imaginar uma curva descrevendo uma trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto representa a posição dessa partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto que iremos considerar é $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in [a, b]$. O t é chamado de parâmetro. As coordenadas x e y cartesianas são escritas em função do parâmetro t , ou seja, o par ordenado é escrito $(x(t), y(t))$. Essas equações são denominadas **equações paramétricas** da curva. A vantagem dessa abordagem é que ela poderia ser facilmente formalizada e conter várias informações sobre como o ponto $\gamma(t)$ percorre a curva e, assim, podemos definir sua velocidade, sua aceleração, etc.

Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito mais simples em relação a um referencial não cartesiano. Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ de um plano consiste de um ponto O , denominado polo ou origem, de uma semirreta OA , com origem em O , denominada eixo polar. Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema, são os valores ρ e θ , onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta OP . Escrevemos $P = (\rho, \theta)$. Convencionamos que a medida do ângulo tomada de OA para OP no sentido anti-horário é positiva e negativa no sentido horário. As equações escritas com esse sistema são as **equações polares**.

Figura 2 – Coordenadas cartesianas, paramétricas e polares.



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

2.3 EXEMPLOS DE CURVAS PLANAS

Destacaremos a seguir alguns exemplos de curvas planas:

Exemplo 1. Reta

Consideremos o plano munido de um sistema de eixos ortogonais xy . Uma reta r no plano pode ser:

- Vertical: quando coincide com o eixo y ou é paralela a esse eixo. Nesse caso, a equação de r é $x = d$, onde $d \in \mathbb{R}$ é uma constante. Mais precisamente, a reta r , caracterizada pelo número $d \in \mathbb{R}$, é o conjunto

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = d\}.$$

- Não-vertical: Nesse caso, existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $r : y = mx + n$, ou seja, a reta r é o conjunto

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid mx - y = -n\}.$$

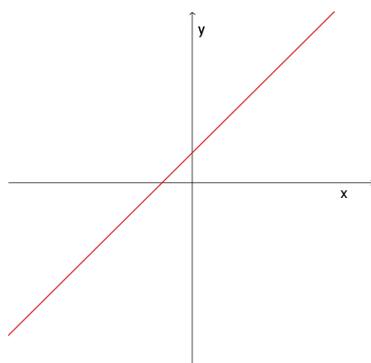
Assim, é fácil verificar que toda reta r do plano se expressa na forma:

$$r : ax + by = c,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo a e b não ambos iguais a zero. A equação acima é a equação cartesiana da reta r .

É importante notar que duas partículas podem percorrer a mesma curva mas com movimentos diferentes, de modo que uma dada curva pode ter diversas parametrizações, cada uma delas representando um determinado movimento. Por exemplo, os pares de equações $x(t) = t; y(t) = 1 + t$ e $x(t) = 2t; y(t) = 1 + 2t$ são parametrizações da mesma reta $y = 1 + x$, mas descrevem movimentos diferentes.

Figura 3 – Reta



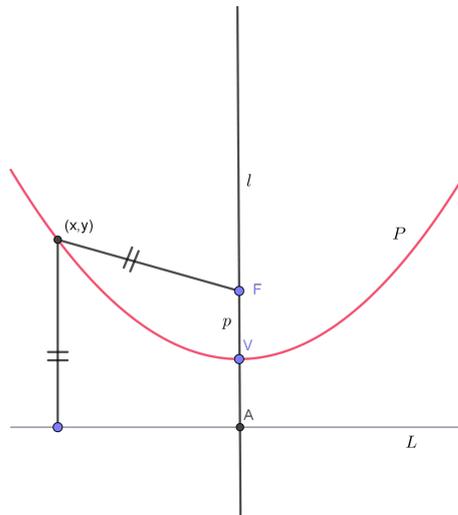
Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 2. Parábola

Vamos conhecer a forma parametrizada da parábola, dada a sua forma canônica. Para isso, vamos considerar primeiro que o vértice da parábola é a origem e sua reta focal coincide com o eixo OY . Sejam L uma reta e F um ponto do plano não pertencente a L . A Parábola P de foco F e diretriz L é o conjunto de pontos no plano cuja distância a F é igual à sua distância a L . A reta focal I da parábola P é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz. O ponto V da parábola P que pertence à reta focal é o vértice de P . Se A é ponto onde L intersecciona I , então V é o ponto médio do segmento AF , ou seja, $d(V, F) = d(V, A)$. Chamamos de parâmetro da parábola P o número $p = d(V, F)$. Assim, em coordenadas cartesianas, uma parábola de foco $F = (p, 0)$, $V = (0, 0)$ e, logo, reta diretriz $L : x = -p$ tem equação:

$$x^2 = 4py.$$

Figura 4 – Elementos da parábola



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Quando $V = (h, k)$ a equação é definida por:

$$(x - k)^2 = 4p(y - h).$$

Comumente, esta equação aparece reescrita na forma de um trinômio de segundo grau:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

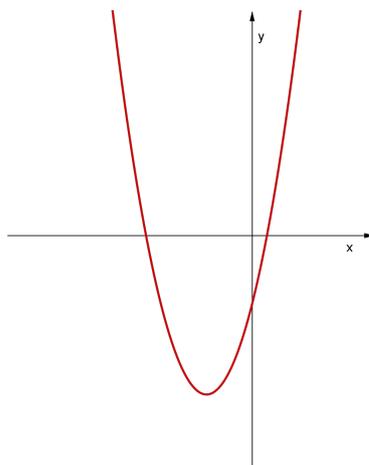
onde: $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{h}{2p}$, $c = \frac{h^2}{4p}$, $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Muitas vezes é útil descrever uma parábola via equações paramétricas. Tomando $x = x(t)$, por exemplo $x(t) = 2pt + h$, e substituindo na equação padrão, obtemos $y = y(t)$. Isso nos fornece a seguinte parametrização de uma tal parábola:

$$\begin{cases} x(t) = 2pt + h \\ y(t) = pt^2 + k \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observamos que a parametrização de x , isto é $x = x(t)$, é arbitrária, sendo que diferentes escolhas levam a um conjunto diferente de equações paramétricas.

Figura 5 – Parábola



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

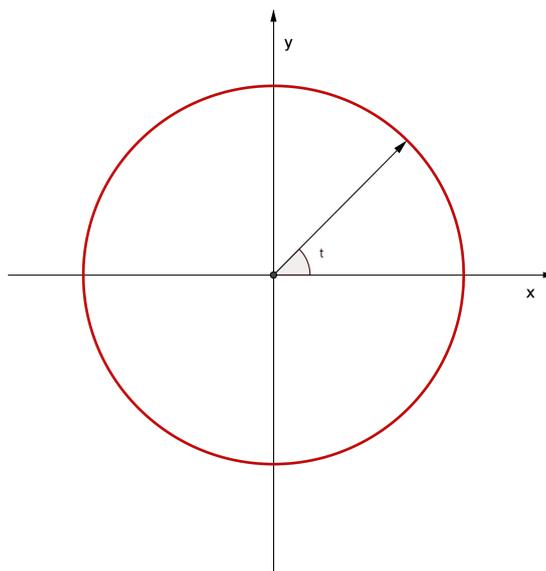
Exemplo 3. Círculo

O círculo de raio R e centro na origem O , $S_R(O)$, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto $(0, 0)$ é constante e igual a R , isto é,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

O círculo $S_R(O)$ é o traço da curva contínua γ , definida por $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. o parâmetro t representa o ângulo que $\gamma(t)$ faz com o eixo Ox . Mas geralmente o círculo de centro (a, b) e raio R , $S_R((a, b))$, é o traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$. Note que, quando t desloca-se ao longo da reta real, $\gamma(t)$ move-se sobre $S_R((a, b))$ no sentido anti-horário um número infinito de vezes. Se limitarmos o domínio de γ a um intervalo de comprimento 2π então $\gamma(t)$ percorrerá $S_R((a, b))$ uma única vez. A curva $\gamma|_{[0, 2\pi]}$ é uma curva de Jordan.

Figura 6 – Círculo



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

A curva $\delta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\delta(t) = (R \cos(2t), R \sin(2t)),$$

é uma outra parametrização de $S_R(0)$. Tal curva também percorre $S_R(0)$ no sentido anti-horário, porém com o dobro da velocidade escalar (que estudaremos no capítulo 2) de γ .

Exemplo 4. *Elipse*

A elipse de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é uma constante $2a > 0$, maior que a distância entre os focos $2c \geq 0$. O eixo BB' tem comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$. O número a é a distância do centro ao vértice sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos. Se escolhermos o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que $P_1 = (-c, 0)$ e $P_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a elipse é descrita pela equação

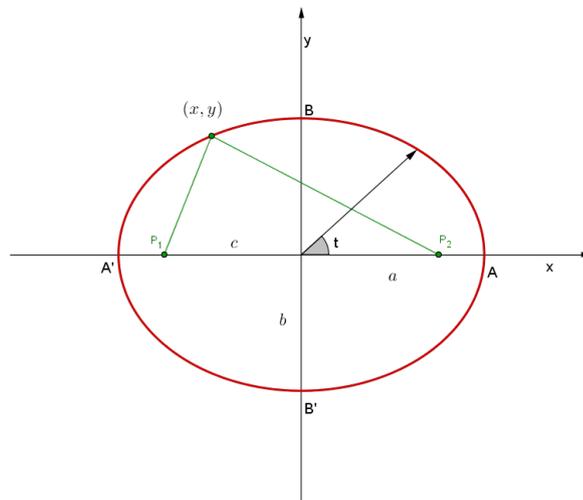
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo entre o vetor com ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz o semi-eixo Ox positivo. Agora podemos parametrizar a elipse por $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t), \quad a, b > 0.$$

A elipse intersecta os eixos coordenados nos pontos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$. Os segmentos AA' e BB' são chamados de eixos focal e não focal da elipse. Veja o exemplo abaixo:

Figura 7 – Elipse



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 5. Hipérbole

A hipérbole de focos F e F' é conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja diferença das distâncias aos pontos F e F' é, em valor absoluto, uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 , tal que $F' = (-c, 0)$ e $F = (c, 0)$ com $c > 0$, então a hipérbole é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde a e b são números reais e positivos.

Consideremos a hipérbole $H : x^2 - y^2 = 1$ equilátera ($a = b = 1$) de centro na origem cuja reta focal é o eixo x . Sejam $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Os pontos

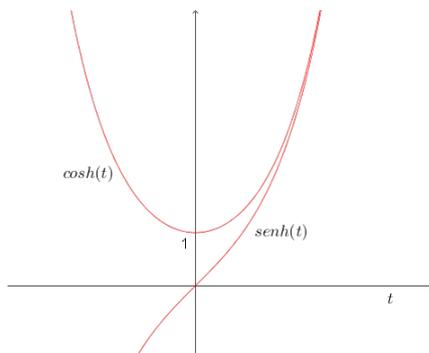
$$(\cosh t, \sinh t) \text{ e } (-\cosh t, \sinh t)$$

pertencem à hipérbole H , pois

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Figura 8 – Gráfico de $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

A hipérbole possui dois ramos, onde $x = \cosh t$ gera um desses ramos, enquanto que $(x = -\cosh t)$ gera o outro como veremos a seguir. Além disso, variando $t \in \mathbb{R}$, vemos que $x = \cosh t$ ($x = -\cosh t$) percorre todos os valores em $[1, +\infty)$ (respectivamente $(-\infty, -1]$), enquanto $y = b \sinh t$ percorre todos os valores reais. Portanto,

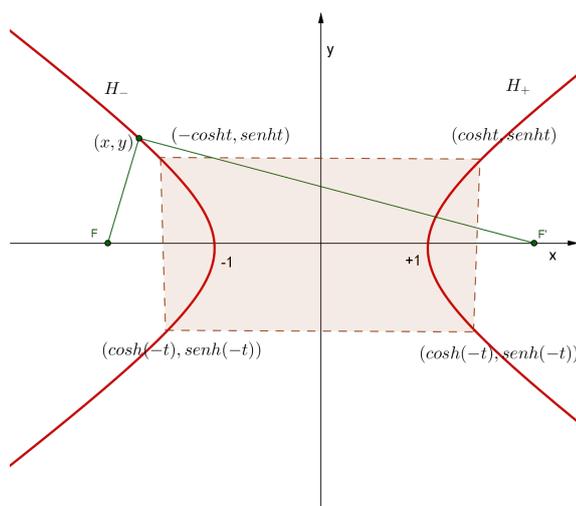
$$\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do ramo H^+ de H que intersecta o semieixo positivo x , e

$$\begin{cases} x(t) = -\cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do ramo H^- de H e que intersecta o semieixo negativo x .

Figura 9 – Hipérbole



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Seja, agora, a hipérbole $H : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo x .

Considere a hipérbole $H_0 = \alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Como $(x, y) \in H$ se, e só se, $\alpha = \frac{x-x_0}{a}$ e $\beta = \frac{y-y_0}{b}$ com $(\alpha, \beta) \in H_0$ e

$H_0 = \begin{cases} \alpha(t) = \pm \cosh t \\ \beta(t) = \sinh t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$, é uma parametrização de H_0 , temos que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \pm a \cosh t \\ y(t) = y_0 + b \sinh t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

são equações paramétricas da hipérbole H .

De modo análogo, podemos verificar que

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + b \sinh t \\ y(t) = y_0 \pm a \cosh t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

são equações paramétricas da hipérbole $H : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo y .

Observação 3. Podemos ainda obter outras parametrizações da hipérbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, utilizando as funções trigonométricas.

Exemplo 6. Espirais

Espirais é o nome genérico que é dado a todas as curvas polares abertas que dão infinitas “voltas” em torno da origem à medida que θ aumenta ou diminui.

Existem diferentes tipos de espirais, das quais destacamos a **Espiral de Arquimedes**. Entre as memórias científicas e trabalhos originais de Arquimedes, podemos destacar a obra **Acerca das Espirais**, onde é definida a Espiral de Arquimedes e são apresentadas as propriedades geométricas desta curva.

A Espiral de Arquimedes é uma curva descrita por um ponto que se desloca com uma velocidade uniforme ao longo de uma semirreta, a partir da origem, que roda, com uma velocidade angular uniforme, em torno da origem. A origem da semirreta é o polo da espiral; a distância de um ponto da espiral ao polo é o raio vetor desse ponto. Os ângulos de rotação são os ângulos polares que se contam a partir do eixo polar, de zero para infinito. A cada valor do ângulo polar corresponde um valor para o raio vetor. As espirais distinguem-se segundo a relação que liga o raio vetor com o ângulo polar.

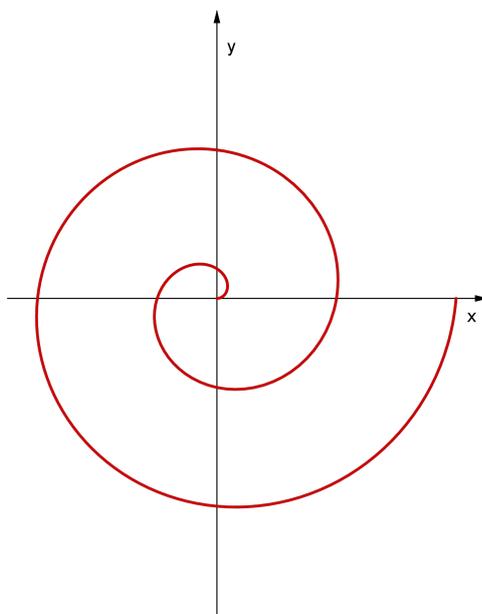
Uma propriedade fundamental da espiral, relaciona o comprimento do raio vetor com o ângulo de revolução que gera a espiral. No caso da Espiral de Arquimedes, esta relação é expressa pela equação em coordenadas polares:

$$r = r_0 + b\theta, r_0 > 0, b > 0.$$

Facilmente se deduz que a Espiral de Arquimedes pode ser parametrizada por

$$r' = \begin{cases} x = (r_0 + b\theta) \cos(\theta) \\ y = (r_0 + b\theta) \sin(\theta) \end{cases}.$$

Figura 10 – Espiral de Arquimedes



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 7. As Ovais de Cassini e a Lemniscata de Bernoulli

Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712) foi um astrônomo e matemático italiano que, nas suas tentativas de compreender o movimento dos corpos celestes, apresentou estranhas curvas como alternativas às trajetórias elípticas de Kepler (1571 – 1630).

Como vimos no Exemplo 4, em uma elipse, a soma da distância de um ponto da mesma a um de seus focos com a distância deste mesmo ponto ao outro foco é constante.

Cassini supôs que, em um movimento orbital de um astro, em torno de dois focos, no lugar de pensar na soma, seria o produto das distâncias consideradas anteriormente que seria constante.

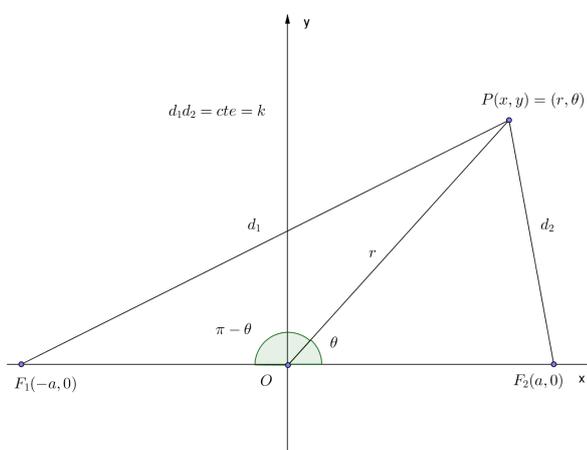
Neste último caso, a equação resultante gera curvas que ficaram conhecidas como **ovais de Cassini**, mesmo que nem sempre tenham o aspecto sugerido.

A **lemniscata de Bernoulli** é um caso particular de oval de Cassini, embora dificilmente se possa imaginar um planeta com tal trajetória.

Vamos calcular, agora, a equação de um ponto que descreve uma trajetória cujo produto das distâncias deste ponto à dois focos fixados seja sempre constante (como sugerido por Giovanni Cassini).

Considere o diagrama a seguir:

Figura 11 – Triângulo sugerido por Cassini



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

No diagrama, os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ são fixados ao longo do eixo X simetricamente em relação a origem O . Os mesmos são os focos da curva que queremos equacionar.

Considere o ponto P móvel em relação à origem O . Sua coordenada polar é (r, θ) enquanto sua coordenada cartesiana é (x, y) . Denotando por d_1 é a distância de P ao foco F_1 e d_2 a distância de P ao foco F_2 , assim o ponto P é tal que $d_1 \cdot d_2 = K(\text{constante})$.

Nestas condições, qual a equação que descreve a trajetória de P ?

Para começar, usaremos a lei dos cossenos duas vezes. Primeiro para expressar d_1 no triângulo POF_1 e depois para expressar d_2 no triângulo POF_2 .

$$\begin{aligned} d_1^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos \theta; \\ d_2^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\pi - \theta) \\ d_2^2 &= r^2 + a^2 - 2ar \cdot (-\cos \theta) \\ d_2^2 &= r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Assim, $d_1^2 \cdot d_2^2 = k^2 = [(r^2 + a^2) - (2ar \cdot \cos \theta)][(r^2 + a^2) + (2ar \cdot \cos \theta)] \implies$, logo pelo produto notável, temos

$$\begin{aligned} k^2 &= (r^2 + a^2)^2 - (2ar \cdot \cos \theta)^2 \implies \\ k^2 &= r^4 + 2a^2r^2 + a^4 - 4a^2r^2 \cdot \cos^2 \theta \implies \\ k^2 &= r^4 + a^4 + 2a^2r^2(1 - 2\cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Mas, $2\cos^2 \theta = 1 + \cos(2\theta)$. Substituindo,

$$\begin{aligned} k^2 &= r^4 + a^4 + 2r^2a^2[1 - (1 + \cos(2\theta))] \implies \\ k^2 &= r^4 + a^4 - 2r^2a^2 \cos(2\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

Esta é a equação polar das ovas que pode ser simplificada na seguinte situação particular.

Observando novamente o diagrama acima, vejam que no caso do ponto P , em seu trajeto, passar pela origem O e, no momento em que ele estiver neste ponto, teríamos $d_2 = OF_2 = a$ e $d_1 = OF_1 = a$, de forma que $d_1 \cdot d_2 = cte = a^2$. Substituindo este valor k de em (1):

$$\begin{aligned} (a^2)^2 &= r^4 + a^4 - 2r^2 a^2 \cos(2\theta) \implies \\ r^2 &= 2a^2 \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Voltaremos a esta forma reduzida mais a frente.

Colocaremos (1) agora nas variáveis x e y . Já que $a^2 = x^2 + y^2$, $\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$ e $\text{cos } \theta = \frac{x}{r}$, temos

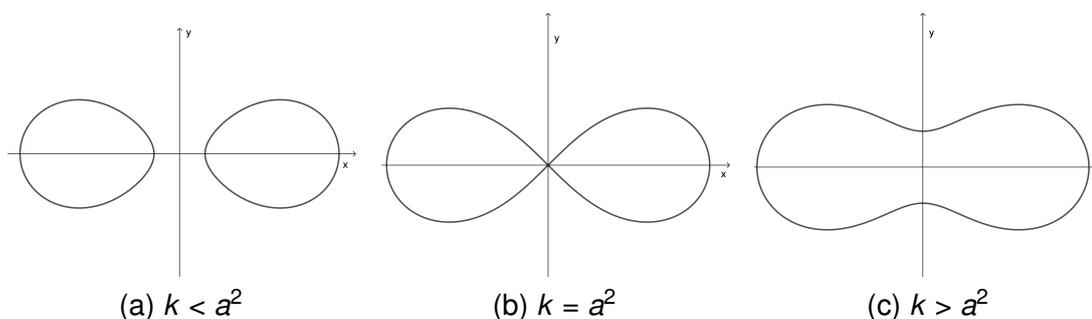
$$\begin{aligned} k^2 &= r^4 + a^4 - 2r^2 a^2 \cos(2\theta) \implies \\ k^2 &= r^4 + a^4 - 2r^2 a^2 (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \implies \\ k^2 &= (x^2 + y^2)^2 + a^4 - 2r^2 a^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) \implies \\ k^2 &= (x^2 + y^2)^2 + a^4 - 2a^2(x^2 - y^2) \implies \\ (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= k^2 - a^4, \end{aligned} \quad (3)$$

que é a equação cartesiana das **ovas de Cassini**. Temos três casos a considerar referente ao produto $k = d_1 \cdot d_2 = cte$:

- $k < a^2$;
- $k = a^2$;
- $k > a^2$.

Estes três casos originam três formatos da trajetória do ponto ou curvas em estudo.

Figura 12 – As ovas de Cassini

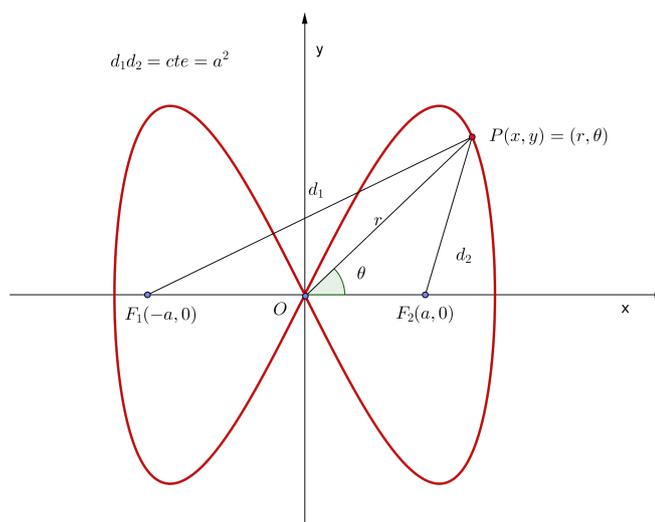


Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Vamos apresentar somente o segundo caso em que $k = a^2$. Neste caso, temos $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ e o trajeto do ponto $P(x, y)$ é semelhante a um “oito deitado”.

O gráfico passa pela origem e o equivalente polar desta equação é $r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$ já vista em (2.3).

Figura 13 – Lemniscata de Bernoulli



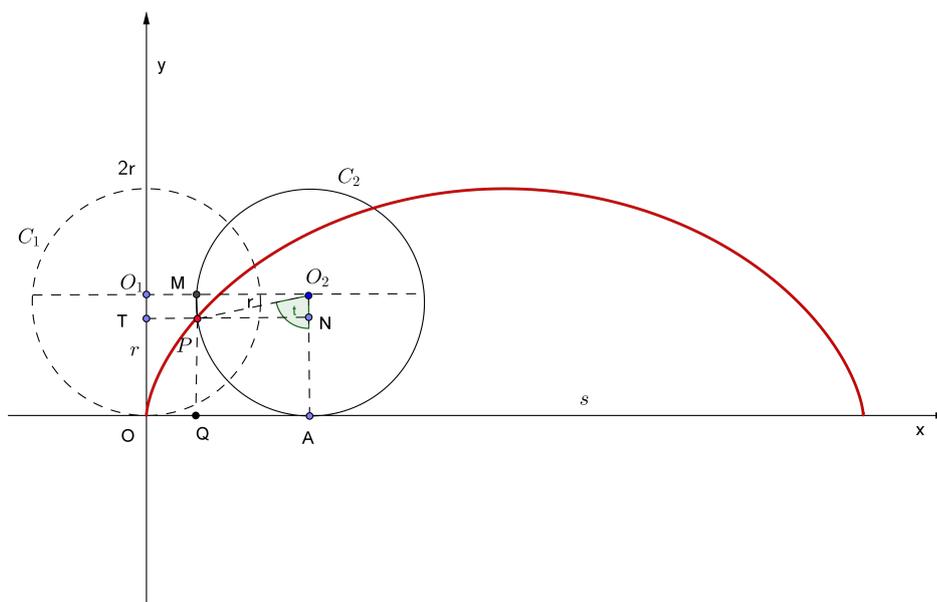
Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Esta curva é conhecida como **lemniscata de Bernoulli**. James Bernoulli (1654–1705), matemático e cientista suíço, apresentou-a em 1694. Apesar do aspecto incomum, ela teve um papel importante nas obras de Gauss e Abel sobre funções elípticas e construções com régua e compasso.

Exemplo 8. Cicloide

Sejam C um círculo de raio r , s é uma reta tangente a C e P um ponto de C . Denominamos cicloide à curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s , sem deslizar.

Figura 14 – Desenvolvimento da cicloide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, admitamos que:

- a reta s é o eixo OX ;
- o círculo C inicia o movimento com centro no ponto $(0, r)$;
- o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Tracemos dois círculos: C_1 , representando C em sua posição inicial, e C_2 , representando C após ter rolado alguns instantes. Veja, na Figura 15, a designação dos seguintes elementos:

- sejam O_1 e O_2 os centros de C_1 e C_2 , respectivamente;
- $P = (x, y)$ o ponto da cicloide em C_2 ;
- A o ponto em que C_2 toca o eixo OX ;
- $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções ortogonais de P sobre os eixos OX e OY , respectivamente;
- M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A .
- t a medida do ângulo $\widehat{AO_2P}$, tomada em radianos.

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P sobre o círculo C_2 , que consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta s . Como t é a medida de $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de C_2 de A a P que já fez contato com s é rt . Logo $|OA| = rt$. Analisando o sinal de $\text{sen}(t)$ e $\text{cos}(t)$ nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, vemos que as coordenadas x e y de P são

determinadas por meio das seguintes relações:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r \cdot \text{sen } t; \\ y &= |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r \cdot \text{cos } t. \end{aligned}$$

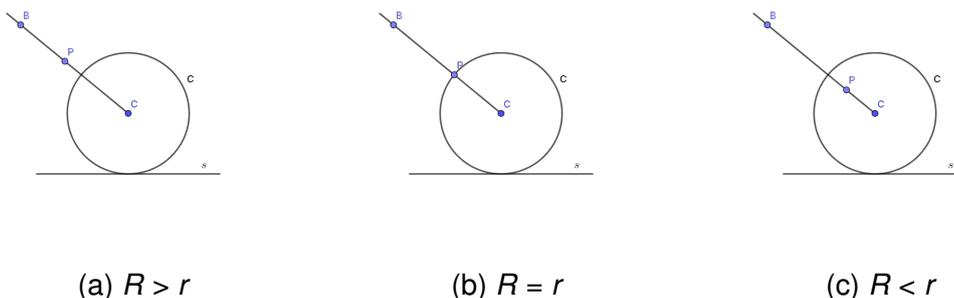
Obtemos, assim, as seguintes equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = rt - r \cdot \text{sen } t; \\ y(t) = r - r \cdot \text{cos } t; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

A cicloide pertence a uma classe mais ampla de curvas rolantes, denominadas **trocóides**.

Seja C um círculo de centro C e raio r , e seja s uma reta. Consideremos uma semirreta radial CB e um ponto P nessa semirreta. Uma **trocóide** é o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre a reta s sem deslizar.

Figura 15 – Trocóides



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

A trocóide é denominada:

- **Cicloide Longa** quando P é exterior a C (isto é, $R = d(P, C) > r$);
- **Cicloide** quando P pertence a C (isto é, $R = d(P, C) = r$);
- **Cicloide Curta** quando P é interior a C (isto é, $R = d(P, C) < r$).

O procedimento para obter equações paramétricas da cicloide curta e da cicloide longa é análogo ao caso da cicloide que analisamos anteriormente.

Exemplo 9. Cardioides

Consideremos dois círculos, Γ e C , de raios R e r , respectivamente, tais que

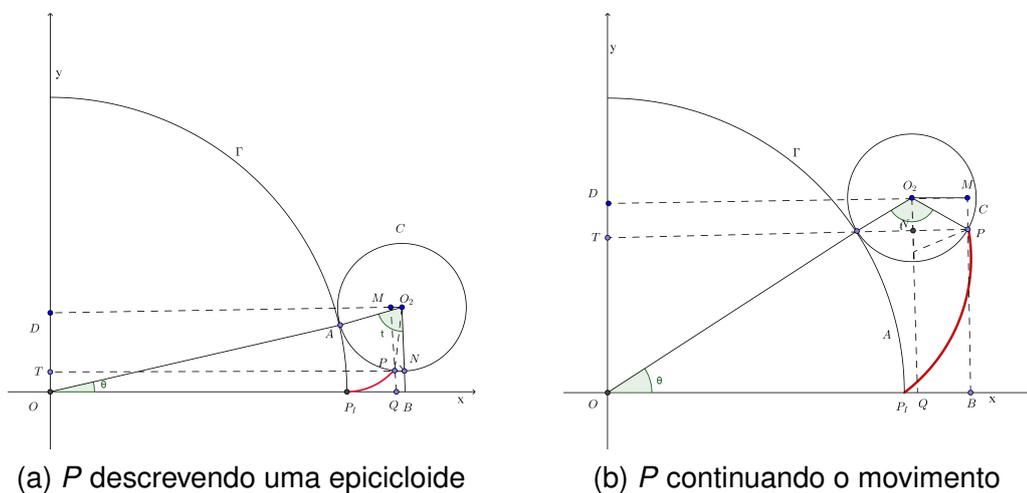
- Γ e C são tangentes externamente em um ponto P ;
- os pontos de C , diferentes de P , estão no exterior de Γ .

Denominamos **epicicloide** o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre Γ , sem deslizar. Para obtermos as equações paramétricas da epicicloide, admitamos Γ com centro na origem, C com centro no ponto $(R + r, 0)$ e que a posição

inicial de P seja $P_1 = (R, 0)$. Nas Figuras 16a e 16b, mostramos o círculo C após ter rolado alguns instantes sobre o círculo Γ . Acompanhe, nessas figuras, a designação dos seguintes elementos:

- $P = (x; y)$ o ponto da epicloide que, estando inicialmente na posição P_1 , descreve o arco P_1P quando C rola um ângulo de medida θ sobre Γ ;
- A o ponto de contato entre os círculos;
- O_2 o centro de C ;
- B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY , respectivamente;
- $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ;
- M e N , as projeções de P sobre as retas O_2D e O_2B ,
- t o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semirreta radial OO_2 .

Figura 16 – Desenvolvimento da cardioide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

O nosso problema consiste em descrever as coordenadas do ponto P em termos de um parâmetro. Nas Figuras 16a e 16b, vemos que as posições entre Q e B variam de acordo com a posição do ponto P . Isto é, de acordo com a medida t do ângulo $\widehat{AO_2P}$. No caso em que Q está entre O e B , temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|; \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \tag{4}$$

Note que, enquanto C rola sobre Γ , seu centro descreve um círculo centrado em O e de raio $R + r$. Sendo θ a medida do ângulo do semieixo OX positivo para a semirreta OO_2 (medido no sentido anti-horário), obtemos:

$$\begin{aligned} |OB| &= (R + r) \cos \theta; \\ |OD| &= (R + r) \sen \theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Sendo t a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido anti-horário, vemos que:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - t = \frac{\pi}{2} - (\theta + t).$$

Portanto, no triângulo-retângulo PNO_2 , temos:

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \cos(\theta + t); \\ |O_2N| &= r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \operatorname{sen}(\theta + t). \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo as identidades (4) e (5) em (6), obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \theta - r \cos(\theta + t); \\ y &= (R + r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}(\theta + t). \end{aligned} \quad (7)$$

Mas ainda resta um problema: as expressões das coordenadas x e y estão dadas em função de duas variáveis θ e t . Vamos resolver isto. Observe que o comprimento do arco de A a P , ao longo de C , é igual ao comprimento do arco de P_1 a A sobre o círculo γ (lembre que C rola sobre Γ). Como a medida do primeiro arco é rt e a medida do segundo é $R\theta$, então $rt = R\theta$, isto é, $t = \frac{R\theta}{r}$.

Logo, substituindo $t = \frac{R\theta}{r}$ em (7), obtemos as seguintes equações paramétricas da epicloide, em função apenas do parâmetro θ :

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right); \\ y &= (R + r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Resta verificar o caso em que B está entre O e Q (Figura 16b). No triângulo NPO_2 , (Figura 16b), temos $\widehat{NO_2P} = t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (\theta + t) - \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \operatorname{sen}(\theta + t) - \frac{\pi}{2} = -r \cos(\theta + t); \\ |O_2N| &= r \cos(\theta + t) - \frac{\pi}{2} = r \operatorname{sen}(\theta + t). \end{aligned}$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|; \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned}$$

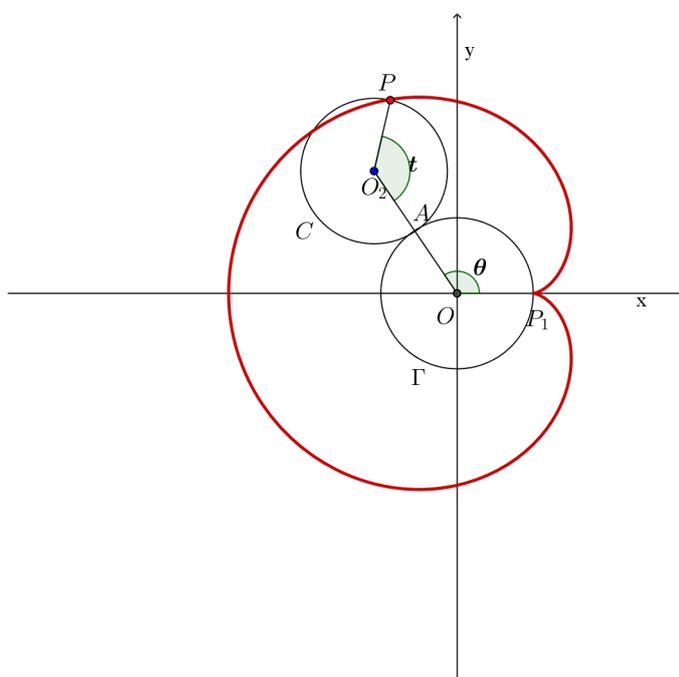
obtemos as mesmas equações paramétricas do caso anterior. Assim, quando C rola sobre Γ , as coordenadas do ponto P satisfazem as equações (8), independentemente da posição de P . Conclusão: as equações paramétricas da epicloide são:

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R + r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \end{cases}; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Observe que, quando C percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ . Portanto, se $\frac{R}{r} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a n -ésima vez coincide com sua posição inicial. Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de C , pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$: A **Cardioide** é a epicycloide com $r = R$ e, portanto, $\theta = t$ e sua equação paramétrica é:

$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta - r \cos(2\theta) \\ y = 2r \sin \theta - r \sin(2\theta) \end{cases}$$

Figura 17 – $r = R$, Cardioide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Há várias outras epicycloides. Para encontrarmos outros exemplos basta fazermos variar os valores de r e R .

Exemplo 10. Astroide

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que:

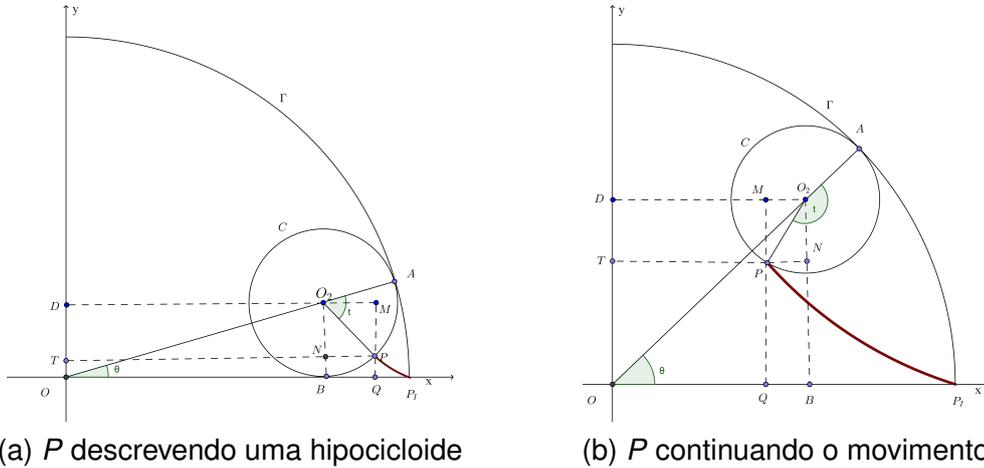
- $r < R$;
- Γ e C se tocam apenas em um ponto P ;
- os pontos de C , diferentes de P , estão no interior de Γ .

Denominamos **hipocicloide** o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola sobre Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da hipocicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R - r, 0)$ e P com

posição inicial $P_1 = (R, 0)$. Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x; y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

Figura 18 – Desenvolvimento da astroide



(a) P descrevendo uma hipocicloide

(b) P continuando o movimento

Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Acompanhe, nas Figuras 18a e 18b, a designação dos seguintes elementos:

- A é o ponto de C que toca Γ ;
- O_2 o centro de C ;
- B e D são as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ;
- $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ;
- M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q , mostrado na Figura 18a, temos

$$x = |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|;$$

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|.$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R-r$, e sendo θ a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R-r) \cos \theta \text{ e } |OD| = (R-r) \sin \theta.$$

Denotando t a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido horário, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - r \text{ e } \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + \widehat{OO_2P} = -\frac{\pi}{2} + \theta + (\pi - r) = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2 , temos:

$$|O_2M| = r \operatorname{sen} \widehat{NO_2P} = r \operatorname{sen} \left((\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = r \operatorname{sen}(\theta - t) = r \cos(t - \theta);$$

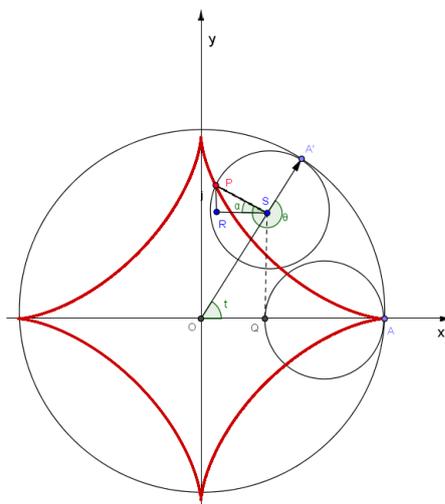
$$|O_2N| = r \cos \widehat{NO_2P} = r \cos \left((\theta - t) + \frac{\pi}{2} \right) = r \cos(\theta - t) = r \operatorname{sen}(t - \theta).$$

Substituindo essas identidades nas relações (1.9) e usando o fato de que $t = \frac{R\theta}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipocicloide:

$$\begin{cases} x = (R-r) \cos \theta + r \cos \left(\left(\frac{R-r}{r} \right) \theta \right) \\ y = (R-r) \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen} \left(\left(\frac{R-r}{r} \right) \theta \right) \end{cases}; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

A **astroide**, também chamada tetracúspide, cubocicloide ou paraciclo, é a hipocicloide obtida quando $r = \frac{R}{4}$.

Figura 19 – Astroide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Suas equações paramétricas são:

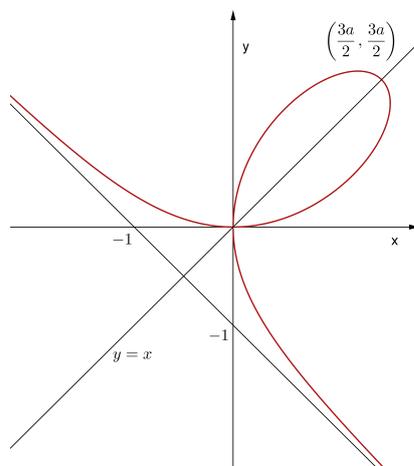
$$\begin{cases} x = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta) \\ y = 3r \operatorname{sen} \theta - r \operatorname{sen}(3\theta) \end{cases}; \quad \theta \in \mathbb{R},$$

e seu lugar geométrico é mostrado na Figura 19.

Variando os valores de R e r encontramos outros exemplos de hipocicloides.

Exemplo 11. *Folium de Descartes*

O Folium de Descartes possui o aspecto de uma folha. Sua forma cartesiana é $C : x^3 + y^3 = 3axy$, onde $a > 0$.

Figura 20 – Folium de Descartes obtido com $a = 1$ 

Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Para fazermos um esboço detalhado desta curva, vamos primeiro parametrizá-la. Para isso, introduzimos o parâmetro:

$$t = \frac{y}{x}.$$

Observe que:

- Se $(x, y) \in C$, então $x = 0 \iff y = 0$;
- Se $t = -1$, isto é, $y = -x$, e $(x, y) \in C$, então $x^3 + (-x)^3 = 3ax(-x) \implies 0 = -3ax^2 \implies x = 0$ e $y = 0$.

Substituindo $y = tx$ na equação $x^3 + y^3 = 3axy$ e supondo que $(x, y) \neq (0, 0)$, obtemos:

$$x^3 + (tx)^3 = 3ax(tx) \implies (1 + t^3)x^3 = 3atx^2;$$

Portanto, para $t \neq -1$, temos $x = \frac{3at}{1 + t^3}$ e, como $y = tx$, obtemos $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}t$. Assim,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1 + t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}; \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

é uma parametrização da **Folium de Descartes**.

Vamos agora verificar algumas propriedades relativas a esta curva:

1. A curva intersecta a reta $r : y = x$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.

De fato, fazendo $y = x$ na equação cartesiana, obtemos: $x^3 + x^3 = 3axx \implies 2x^3 = 3ax^2 \implies x = 0$ ou $x = \frac{3a}{2}$.

2. A curva é simétrica em relação à reta $r : y = x$.

Para verificar isso, basta mostrar que $(x, y) \in C$ se, e só se, $(y, x) \in C$, o que é evidente pela equação cartesiana de C . De fato, seja $P = (x_0, y_0)$ um

ponto do plano e P' o simétrico de P em relação à reta $r : x - y = 0$. Seja r' a reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P . Então, r'

$$r' = \begin{cases} x = s + x_0; \\ y = -s + y_0 \end{cases}; \quad s \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica da reta r' . O ponto $Q = (s + x_0, -s + y_0)$ de interseção da reta r' com a reta r é dado por:

$$s + x_0 = -s + y_0 \implies s = \frac{y_0 - x_0}{2}.$$

Logo,

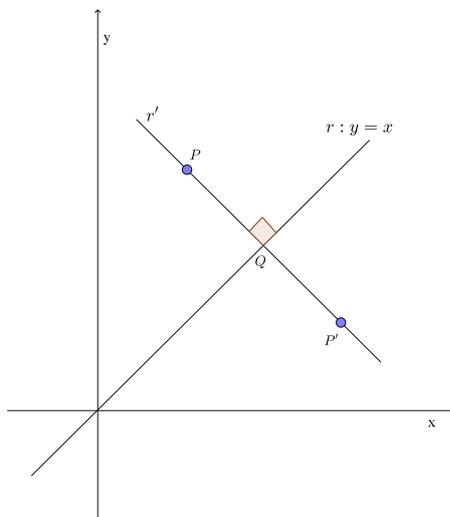
$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, -\frac{y_0 - x_0}{2} + y_0 \right) = \\ &= \left(\frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, \frac{x_0 - y_0}{2} + y_0 \right) = \\ &= \left(\frac{y_0 + x_0}{2}, \frac{y_0 + x_0}{2} \right) \end{aligned}$$

e, portanto

$$P' = 2Q - P = (x_0 + y_0, x_0 + y_0) - (x_0, y_0) = (y_0, x_0),$$

como foi afirmado anteriormente.

Figura 21 – $r' \perp r$ e P' simétrico de P em relação a r



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

3. Vamos analisar agora o comportamento da curva em função do parâmetro t nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $[0, 1]$ e $[1, \infty)$

a) Para $t \in (-\infty, -1)$: $1 + t^3 < 0$; $x(t) > 0$ e $y(t) < 0$;

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t + t^2} \right) = (0, 0);$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} (x(t), y(t)) = (+\infty, -\infty);$$

b) $t \in (-1, 0) : 1 + t^3 > 0; x(t) < 0$ e $y(t) > 0;$

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} (x(t), y(t)) = (-\infty, +\infty);$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} (x(t), y(t)) = (+\infty, -\infty);$$

c) $t \in [0, 1] : 1 + t^3 > 0; x(t) > y(t) > 0$ se $t \in (0, 1); x(0) = y(0) = 0$ e $x(1) = y(1) = \frac{3a}{2};$

d) $t \in (1, +\infty) : 1 + t^3 > 0; y(t) > x(t) > 0;$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t + t^2} \right) = (0, 0);$$

4. A curva está contida no semi-plano $x + y + a > 0$ e $d((x(t), y(t)), r) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -1^{\pm 1}$, onde r é a reta $x + y + a = 0$, isto é, r é uma assíntota da curva.

De fato:

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) + a &= \frac{3at}{1 + t^3} + \frac{3at^2}{1 + t^3} + a = \\ &= \frac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1 + t^3} = a \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{1 + t^3} = \\ &= a \frac{(t + 1)(t^2 + 2t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} = a \frac{(t + 1)^2}{t^2 - t + 1} > 0, \end{aligned}$$

pois $(t + 1)^2 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R} - -1$ e $t^2 - t + 1 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{t \rightarrow -1^{\pm 1}} d((x(t), y(t)), r) &= \lim_{t \rightarrow -1^{\pm 1}} \frac{|x(t) + y(t) + a|}{\sqrt{2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^{\pm 1}} \frac{a(t + 1)^2}{\sqrt{2}(t^2 - t + 1)} = \frac{a \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3 CURVA REGULAR

Nesse capítulo apresentaremos o comportamento da curva no plano, ou seja, fixado t_0 , verificaremos qual é o seu comportamento para valores de t próximos de t_0 .

3.1 CURVAS SUAVES

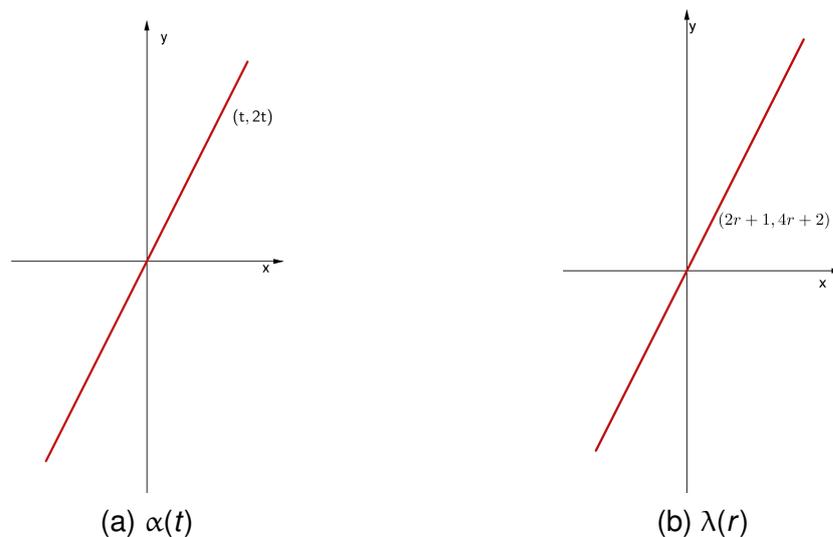
Definição 5. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita suave se suas funções coordenadas são infinitamente deriváveis, ou seja, $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada de qualquer ordem, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $t \in I$

Exemplo 12. Duas curvas parametrizadas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. A diferença entre as curvas está na velocidade que seu traço é percorrido. Por exemplo:

$$\alpha(t) = (t, 2t); \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\lambda(r) = (2r + 1, 4r + 2); \quad r \in \mathbb{R}.$$

Figura 22 – Curvas parametrizadas distintas com o mesmo traço.



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 13. A aplicação $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) = (t, |t|),$$

embora seja uma curva contínua no sentido do 2, é uma curva parametrizada suave, pois a função $y(t) = |t|$ não é diferenciável em $t = 0$.

3.2 VETOR TANGENTE

Definição 6. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável. A **reta tangente** a γ em $t \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t)$ na direção de $\gamma'(t)$, isto é, dada pela função

$$g(r) = \gamma(t) + r \cdot \gamma'(t),$$

onde $r \in \mathbb{R}$.

Definição 7. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. O vetor

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

é chamado **vetor tangente** (ou **vetor velocidade**) de γ em t_0 .

A velocidade de γ em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\gamma'(t_0)$, isto é:

$$\|\gamma'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

A definição de vetor tangente coincide com a noção intuitiva que temos de um vetor tangente a uma curva, isto é, um vetor cuja direção é a direção limite de cordas, determinados por um ponto $\gamma(t)$ e pontos próximos a $\gamma(t+h)$, quando h tende para 0. De fato, fixado $t \in I$, para $h \neq 0$, tal que $(t+h) \in I$,

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

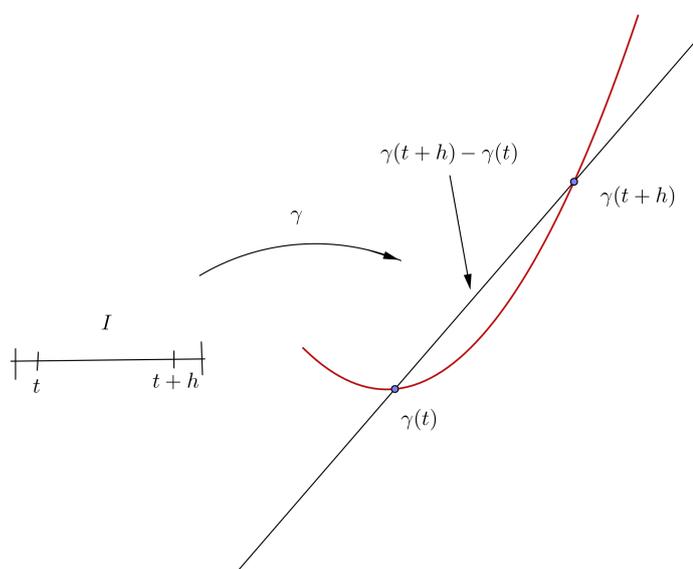
é o vetor $\gamma(t)$ e $\gamma(t+h)$ multiplicado pelo escalar $\frac{1}{h}$.

Observamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

é exatamente a definição da derivada da função γ em t .

Figura 23 – Corda ligando dois pontos da curva



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

3.2.1 Vetor tangente a uma curva paramétrica

Nessa seção queremos determinar a equação da reta tangente à curva definida pelas equações paramétricas dadas por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I.$$

Recordamos que a equação da reta tangente ao gráfico de uma função derivável $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $(x_0, F(x_0)) \in \mathbb{R}^2$, com $x_0 \in I$ é dada por

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Então se podemos calcular $\frac{dy}{dx}$ para as equações paramétricas, podemos usar a equação acima para achar a equação da reta tangente.

Suponha que podemos eliminar o parâmetro t na equação paramétrica e reescrevê-lo na forma $y = F(x)$. Se substituirmos $x = x(t)$ e $y = y(t)$ na equação $y = F(x)$, obtemos

$$y(t) = F(x(t)).$$

Derivando implicitamente¹, usando a Regra da Cadeia, temos

$$y'(t) = F'(x(t))x'(t),$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = F'(x) \frac{dx}{dt}.$$

Como $F'(x) = \frac{dy}{dx}$ obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ desde que } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

- **Tangentes horizontais:** Podemos observar na equação acima que a curva tem uma tangente horizontal quando

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

- **Tangentes verticais:** Notemos também que esta mesma curva tem uma tangente vertical quando

$$\frac{dy}{dt} \neq 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} = 0.$$

¹ Teorema da função implícita: Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , definida num intervalo aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0) tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $g : I \rightarrow J$, de classe C^1 . Isto é, para cada $x \in I$ existe um único $y = g(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, g(x)) = c$. E para todo $x \in I$ temos $g'(x) = -\frac{df/dx}{df/dy}$, onde estas derivadas são calculadas no ponto $(x, g(x)) = (x, y) \in (I \times J)$.

Exemplo 14. Seja o círculo, de raio 1 e centro na origem, parametrizado por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, vamos determinar a sua tangente no ponto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Temos que

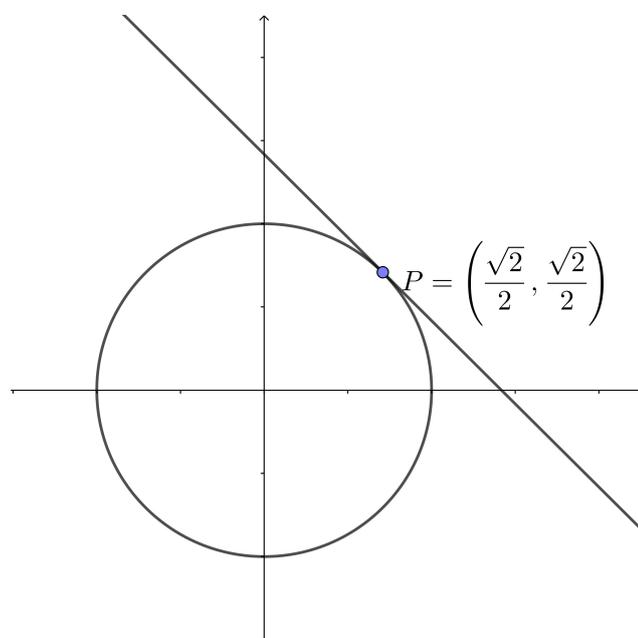
$$x(t) = \cos t \text{ e } y(t) = \sin t.$$

Assim, no ponto P temos que $x = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $t = \frac{\pi}{4}$.

Calculando o vetor tangente da curva, obtemos $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e fazendo $t = \frac{\pi}{4}$ obtemos $\gamma'(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e a reta tangente à curva é dada por $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Figura 24 – Reta tangente ao círculo no ponto P



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

3.2.2 Vetor tangente a uma curva polar

Para encontrarmos o vetor tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta.$$

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas parametrizadas e a regra do produto, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta}.$$

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (desde que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$). Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $\frac{dx}{d\theta} = 0$ (desde que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$).

Observe que, se estivermos olhando para as retas tangentes no polo, então $r = 0$ e a equação é simplificada para

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \text{ se } \frac{dr}{d\theta} \neq 0.$$

Por exemplo, considerando a função $r = \cos 2\theta$, temos que $r = 0$ quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Isso significa que as retas $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (ou $y = x$ e $y = -x$) são tangentes de $r = \cos 2\theta$ na origem.

Exemplo 15. Considere a cardioide dada por $r = 1 + \sin \theta$. Determinemos:

- a) a inclinação da reta tangente quando $\theta = \frac{\pi}{3}$;
- b) os pontos da cardioide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

Usando a equação da reta tangente com $r = 1 + \sin \theta$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta + (1 + \sin \theta) \cos \theta}{\cos \theta \cos \theta - (1 + \sin \theta) \sin \theta} = \\ &= \frac{\cos \theta(1 + 2 \sin \theta)}{1 - 2 \sin^2 \theta - \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 + 2 \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - 2 \sin \theta)}. \end{aligned}$$

- a) A inclinação da reta tangente no ponto $\theta = \frac{\pi}{3}$ é

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} &= \frac{\cos \frac{\pi}{3}(1 + 2 \sin \frac{\pi}{3})}{(1 + \sin \frac{\pi}{3})(1 - 2 \sin \frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})(1 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1 = m; \end{aligned}$$

- b) Observe que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \cos \theta(1 + 2 \sin \theta) = 0 \text{ quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}; \\ \frac{dx}{d\theta} &= (1 + \sin \theta)(1 - 2 \sin \theta) = 0 \text{ quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$ e tangentes verticais em $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$.

Quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{dy}{d\theta} = 0$ e $\frac{dx}{d\theta} = 0$ e, desta forma, devemos ser cuidadosos. Usando a regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta} \right) \left(\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \right)$$

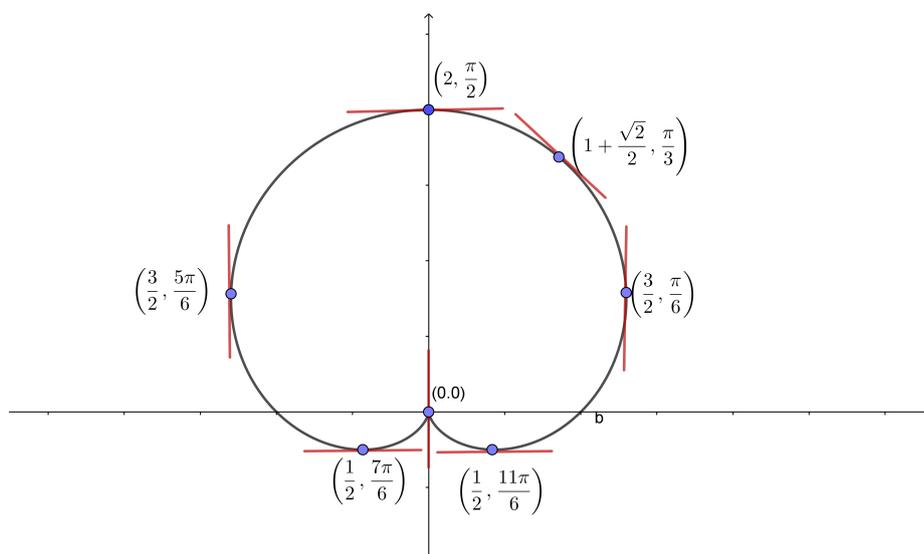
$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = -\frac{1}{3} \lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \infty.$$

Por simetria,

$$\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{dy}{dx} = -\infty,$$

então, existe uma reta tangente vertical no polo.

Figura 25 – Retas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

3.3 CURVA REGULAR

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é necessário que exista reta tangente à curva γ para cada valor do parâmetro t . Para isto, é suficiente que o vetor tangente a γ não seja nulo para todo t . Portanto restringiremos o nosso estudo apenas às curvas que satisfazem essa condição. Essas curvas são definidas a seguir:

Definição 8. Uma curva parametrizada diferenciável suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **regular** se $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$.

Como afirmamos, se γ for uma curva regular, o vetor $\gamma'(t)$ é paralelo à reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t)$.

Observação 4. Uma curva parametrizada no plano pode ser **regular por partes**, ou seja, $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular de classe C^n , $n > 1$, exceto para uma quantidade finita de valores de t nos quais $\gamma'(t)$ não existe ou $\gamma'(t) = (0, 0)$.

O traço de uma curva regular intuitivamente é suave, sem bifurcações, exceto possíveis pontos de auto-interseção. Localmente porém, γ não tem auto-interseção como mostra o resultado seguinte:

Proposição 1. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular em $t_0 \in I$. Então existe $\varepsilon > 0$, tal que γ é injetiva no intervalo $I_\varepsilon = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$.

Demonstração. Como $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, temos que $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$, sem perda de generalidade suponhamos que $x'(t_0) > 0$. Logo, visto que x' é uma função contínua, existe $\varepsilon > 0$, tal que $x'(t) > 0$, para todo $t \in I_\varepsilon$. Nesse caso, x é estritamente crescente e, portanto injetiva, o que implica que $\gamma|_{I_\varepsilon}$ é injetiva. A prova no caso $y'(t_0) \neq 0$ é análoga. \square

Dada uma curva diferenciável, seu gráfico é uma curva parametrizável regular, ou seja, considere a curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Como $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$, logo γ é uma curva parametrizada e regular. Vamos provar que localmente toda curva regular é dessa forma.

Proposição 2. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular em $t_0 \in I$. Então, existe $\delta > 0$, tal que, restrito ao intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, o traço de γ coincide com o traço de uma curva λ da forma $\lambda(t) = (t, f(t))$ ou $\lambda(t) = (f(t), t)$, para uma função diferenciável $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ contido em J .

Demonstração. Seja γ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Como γ é regular em $t = t_0$, temos que

$$\gamma'(t) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Vamos supor que $x'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, pelo Teorema da Função Inversa², existe um intervalo $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$, tal que a função x é um difeomorfismo³, isto é, uma função diferenciável com inversa diferenciável, sobre $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$. Seja $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = \gamma(x^{-1}(t))$. Temos portanto, que λ é uma curva diferenciável e

² Seja f inversível com inversa f^{-1} . Se f for derivável em $x_0 = f^{-1}(y_0)$ com $f'(x_0) \neq 0$, e se f^{-1} for contínua em y_0 , então será derivável em y_0 , com $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

³ Duas variedades diferenciáveis dizem-se difeomorfas se existir uma aplicação entre essas variedades que seja diferenciável, invertível e a sua inversa seja diferenciável. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre variedades diferenciáveis. Então f diz-se um difeomorfismo se as funções $\phi_i f \psi_j^{-1}$ forem invertíveis e tanto elas como as suas inversas tiverem derivadas de todas as ordens.

$$\lambda(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t))$$

é uma função diferenciável onde f é dada por $f(t) = y(x^{-1}(t))$. A prova, no caso em que $y'(t_0) \neq 0$, é análoga e, nesse caso, obtemos que o traço de γ coincide localmente em $\gamma(t_0)$ com o traço de uma curva da forma $\lambda = (f(t), t)$. \square

Definição 9. Seja $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva e $h: J \rightarrow I$ uma função real de variável real contínua e bijetiva. A curva

$$\beta = \gamma \circ h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

diz-se uma **mudança de parâmetro** de γ .

Exemplo 16. Seja $\gamma: [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t, t^2)$. A curva $\beta: [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(t) = (-t, t^2)$ é uma mudança de parâmetro de γ . De fato, $\beta = \gamma \circ h$ em que

$$h: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1],$$

tal que $h(t) = -t$ é uma função contínua e bijetiva. Observe-se que o traço de γ e de β são o arco de parábola

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge y = x^2 \right\},$$

mas percorridos em sentidos opostos.

Para finalizarmos esta seção veremos dois exemplos de curvas, uma regular e outra não regular.

Exemplo 17. As duas curvas distintas

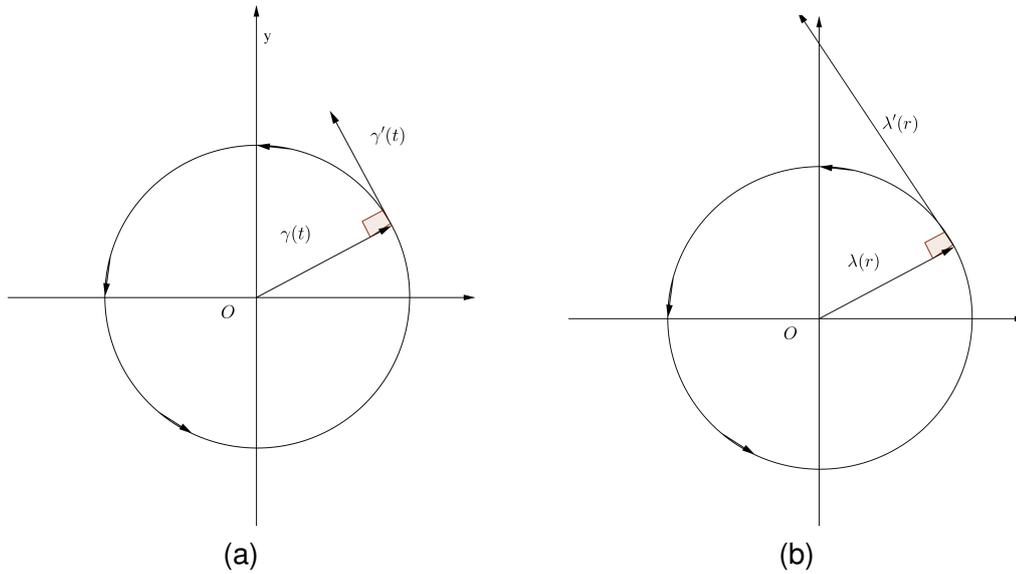
$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, \sin t), t \in (0, 2\pi); \\ \lambda(r) &= (\cos 2r, \sin 2r), r \in (0, \pi), \end{aligned}$$

possuem o mesmo traço, o círculo $x^2 + y^2 = 1$. No entanto, observe que o vetor tangente da segunda curva é o dobro da primeira. Em ambas as curvas, para cada $t, r \in I$, existe $\gamma'(t) \neq 0$ e $\lambda'(r) \neq 0$.

Temos $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos t)$, então $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$ e $\lambda'(r) = 2(-\sin(2r), \cos(2r))$, então $\|\lambda'(r)\| = \sqrt{2^2(-\sin(2r))^2 + (\cos(2r))^2} = 2$ ou seja, embora ambas as curvas apresentem o mesmo traço, a velocidade de $\gamma'(t)$ é o dobro da velocidade de $\lambda'(r)$, isto é, $\|\gamma'(t)\| = 2\|\lambda'(r)\|$.

Além disso, o vetor tangente $\gamma'(t)$ é perpendicular a $\gamma(t)$ e o vetor tangente $\lambda'(r)$ é perpendicular a $\lambda(r)$.

Figura 26 – Curvas parametrizadas distintas com o mesmo traço.



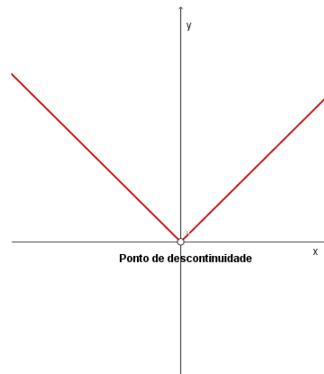
Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 18. A função $(x, |x|)$, por exemplo, não é uma função regular, pois a derivada no $(0, f(0))$ não existe, como podemos observar

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1. \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1. \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &\neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \end{aligned}$$

Logo, não existe reta tangente no ponto $(0, f(0))$.

Figura 27 – Curva não regular



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Exemplo 19. Observemos agora a curva

$$\delta(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2), & t < 0 \\ (t^2, t^2), & t \geq 0 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R},$$

que é uma parametrização do Exemplo 18. Essa curva é diferenciável por partes e o vetor tangente é

$$\delta'(t) = \begin{cases} (-2t, 2t), & t < 0 \\ (2t, 2t), & t \geq 0 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R},$$

assim $\delta'(0) = (0, 0)$ e, logo, existe o vetor tangente no ponto. Isso nos permite concluir que apesar de haver nesse ponto um problema de descontinuidade na curva, há parametrizações que nos permitem calcular o vetor tangente. Com essa parametrização da curva dada, a velocidade nesse ponto é nula.

4 COMPRIMENTO DE ARCO

Para melhor entendermos esta definição, devemos ter previamente um entendimento sobre as integrais definidas e o cálculo integral, que não faremos aqui, pois não é nosso foco principal.

Consideremos então, uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por suas equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ com $t \in [t_0, t_1]$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas e possuem derivadas em todos os seus pontos e com $x'(t) \neq 0$ para $t \in [t_0, t_1]$. Tomemos então uma partição P do intervalo $[a, b]$, dada por $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, e definamos a norma de P por

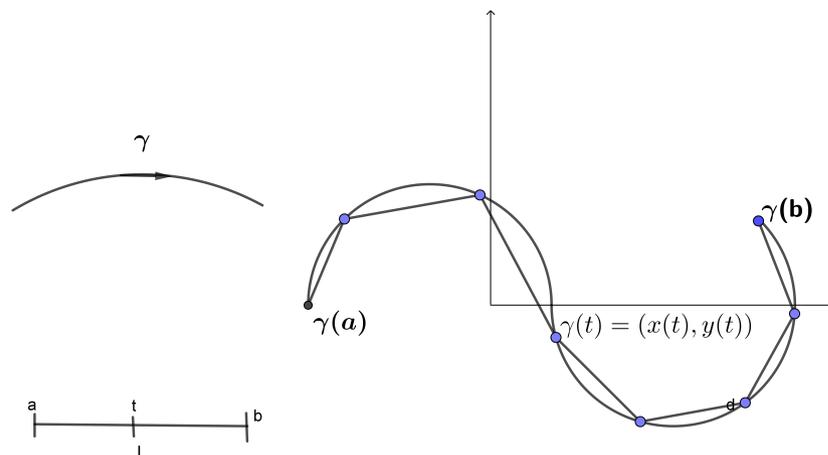
$$|P| = \max |t_i - t_{i-1}|; i = 1, \dots, n.$$

Consideremos agora os pontos da curva γ correspondentes ao valores da partição, ou seja, consideremos $P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$ onde $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $A = \gamma(a) = (x(a), y(a))$ e $B = \gamma(b) = (x(b), y(b))$.

Ligando esses pontos consecutivamente, obtemos a poligonal, cujo comprimento nos dará uma aproximação do arco da curva γ , do ponto A ao ponto B .

4.1 COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA

Figura 28 – Poligonal associada a uma partição de $[a, b]$.



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Então, o comprimento S_n da poligonal é dado por

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Agora, aplicando o Teorema do Valor Médio¹ em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (uma vez que x e y são diferenciáveis em $[a, b]$ e, portanto, em cada intervalo da partição) garantimos que (para cada i) existem, $c_i, d_i \in]t_{i-1}, t_i[$ tais que

$$\begin{aligned}y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(c_i)(t_i - t_{i-1}); \\x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(d_i)(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Então, voltando à expressão do comprimento da poligonal e aplicando esse resultado, obtemos

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\&= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(d_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (y'(c_i)(t_i - t_{i-1}))^2} = \\&= \sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(d_i))^2 + (y'(c_i))^2](t_i - t_{i-1})^2} = \\&= \sum_{i=1}^n \sqrt{[(x'(d_i))^2 + (y'(c_i))^2]}(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Considerando todas as partições possíveis e tomando o limite S_n quando $|P| \rightarrow 0$ que equivale a $n \rightarrow \infty$ teremos,

$$\begin{aligned}S(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(d_i))^2 + (y'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}) = \\&= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \\&= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.\end{aligned}$$

Rigorosamente,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| &= 0; \\S(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,\end{aligned}$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

¹ Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe c pertencente a $]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Se γ é o gráfico de uma função diferenciável f , logo $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\gamma'(t) = (1, f'(t))$, assim o comprimento de γ será

$$S(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Definição 10. *Comprimento de Arco é o menor número tal que o comprimento dos caminhos polinomiais nunca pode ultrapassar, não importando quanto juntos sejam colocados os pontos finais dos segmentos.*

Exemplo 20. *Calcular o comprimento do círculo de raio R e centrado na origem.*

Parametrizando o círculo por

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ et } t \mapsto (R \cos(t), R \sin(t)),$$

logo, $\gamma'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$ e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2(\sin t)^2 + R^2(\cos t)^2} = \sqrt{R^2} = R,$$

portanto, o comprimento de γ é:

$$S = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Exemplo 21. *Calcule o comprimento de arco do laço da curva dada pelas equações*

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \frac{t^3}{3} - t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Temos $x'(t) = 2t$ e $y'(t) = t^2 - 1$ e de acordo com as equações

$$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}; \quad t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \quad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Calculando a auto-intersecção: Sejam $t_1 < t_2$ tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$.
 $x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow (t_1)^2 + 1 = (t_2)^2 + 1 \Rightarrow t_1 = \pm t_2$.

Como $t_1 < t_2$, logo a solução $t_1 = t_2$ não é possível. Portanto $t_1 = -t_2$, assim $y(t_1) = y(t_2)$ e $t_1 = -t_2 \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} + t_2 + 1 = \frac{(t_2)^3}{3} - t_2 + 1 \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} + t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0$ ou $t_2 = \pm\sqrt{3}$.

A solução $t_2 = 0$ implica em $t_1 = t_2$, o que não pode, logo $t_2 = \pm\sqrt{3}$.

Como $t_1 = -t_2$ e $t_1 < t_2$ logo $t_1 = -\sqrt{3}$ e $t_2 = \sqrt{3}$. Temos $t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

Calculando o comprimento do laço

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |t^2 + 1| dt \end{aligned}$$

Como $t^2 + 1$ é positivo para todo $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, logo

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Exemplo 22. Calcule o comprimento de arco do círculo parametrizado por $\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Como $\gamma'(t) = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)$ para $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{16t^2}{(1+t^2)^4} + \frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{16t^2 + 4 - 8t^2 + 4t^4}{(1+t^2)^4}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{4t^4 + 8t^2 + 4}{(1+t^2)^4}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{4(t^2+1)^2}}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2+1)}{(t^2+1)^2} dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= [2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 23. Calcule o comprimento do arco da cicloide parametrizado por $\gamma(t) = (at - a \operatorname{sen}(t), a - a \operatorname{cos}(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Temos $\gamma'(t) = (a - a \operatorname{cos}(t), a \operatorname{sen}(t))$ e

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{a^2 - 2a^2 \operatorname{cos}(t) + a^2 \operatorname{cos}^2(t) + a^2 \operatorname{sen}^2(t)} = \\ &= \sqrt{2a^2(1 - \operatorname{cos}(t))} = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \operatorname{cos}(t)}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \\ &= \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right) dt = \\ &= 2a \left(-2 \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 2a[2 - (-2)] = 8a. \end{aligned}$$

Exemplo 24. Seja $\gamma : [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calculemos o comprimento do arco de γ . Como $\gamma'(t) = (1, 2t)$ e portanto $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1 + (2t)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(2t + \sqrt{1 + (2t)^2} \right) \Big|_{-1}^1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{-2 + \sqrt{5}} \right) = \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Daremos abaixo, dois exemplos de curvas onde a integral não é expressa por modo de funções elementares.

Exemplo 25. Comprimento de arco da elipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, $a > b$ e $t \in [0, 2\pi]$.

Solução: Temos $\gamma'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen} t + b^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \\ &= \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t} = b \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}_{k^2} \operatorname{sen}^2 t}. \end{aligned}$$

Então,

$$S = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt$$

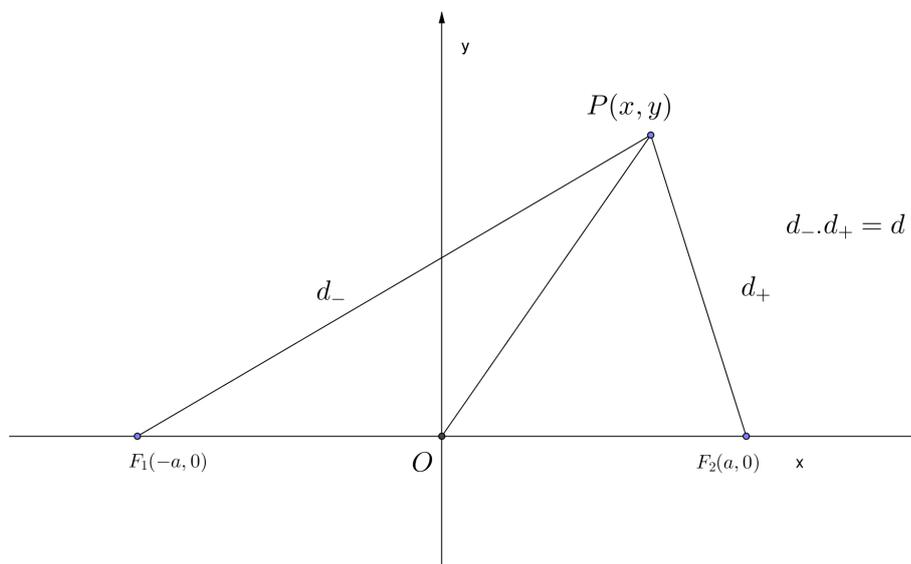
Tome, $x = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{-\operatorname{sen} t} = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$S = b \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = b \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx.$$

Essa última integral é uma integral elíptica de 2º tipo.

Exemplo 26. Lemniscata

Figura 29 – Triângulo da lemniscata



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Solução:

$$d_+ = \sqrt{(x - a)^2 + y^2};$$

$$d_- = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = d.$$

$$((x^2 + a^2 + y^2) + 2ax)((x^2 + a^2 + y^2) - 2ax) = d^2$$

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = d^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) - 4x^2a^2 = d^2 - a^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) = d^2 - a^4.$$

Equação polar: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$r^4 + 2a^2r^2 \cos(2\theta) = d^2 - a^4.$$

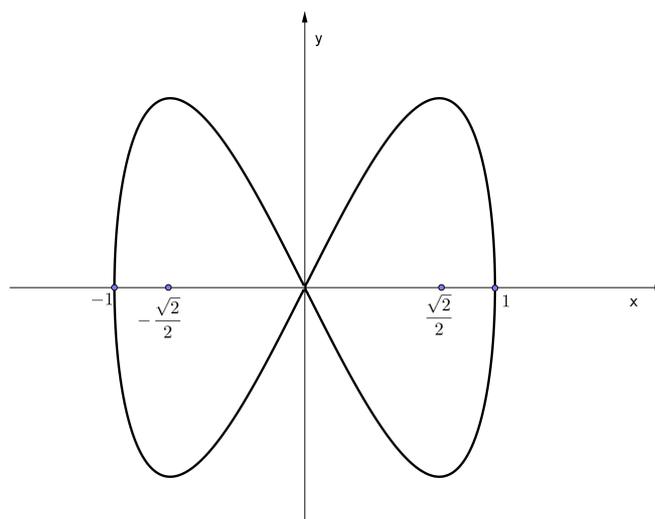
Particularizando:

$$d = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2) = 0 \implies (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

Usando o fato de que $x^2 + y^2 = r^2$

Figura 30 – Lemniscata



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

$$r^4 = x^2 - (r^2 - x^2);$$

$$2x^2 = r^4 + r^2 \implies x^2 = \frac{1}{2}(r^4 + r^2);$$

$$r^4 = (r^2 - y^2) - y^2 \implies -2y^2 = r^4 - r^2 \implies y^2 = \frac{1}{2(r^2 - r^4)};$$

$$2xx' = \frac{1}{2(2r + 4r^3)} = r + 2r^3 \implies x' = \frac{r + r^3}{2x};$$

$$2yy' = \frac{1}{2}(2r - 4r^3) = r - 2r^3 \implies y' = \frac{r - 2r^3}{2y};$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= \sqrt{\left(\frac{r + 2r^3}{2x}\right)^2 + \left(\frac{r - 2r^3}{2y}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\left(\frac{r + 2r^3}{2(r^2 + r^4)}\right)^2 + \left(\frac{r - 2r^3}{2(r^2 - r^4)}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(r + 2r^3)2(r^2 - r^4) + (r - 2r^3)2(r^2 + r^4)}{r^4 - r^8}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r^2[(r + 2r^3)^2 + (r - 2r^3)^2] + r^4[(r - 2r^3)^2 - (r + 2r^3)^2]}{r^4 - r^8}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r^2(2r^2 + 8r^6) + r^4(-8r^4)}{r^4 - r^8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2r^4}{r^4(1 - r^4)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^4}}; \end{aligned}$$

$$S = 4 \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \implies \text{Integral elíptica de 1ª ordem.}$$

No cálculo integral, integrais elípticas originalmente surgiram em conexão com o problema do comprimento do arco de uma elipse e foram inicialmente estudadas por Giulio Carlo Fagnano dei Toschi e Leonhard Euler. Na sua definição moderna, uma integral elíptica é qualquer função f que pode ser expressa na forma:

$$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt,$$

onde R é uma função racional de dois argumentos, P é um polinômio de grau 3 ou 4 com nenhuma raiz repetida, e c é uma constante.

A integral do tipo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}},$$

onde $0 < k^2 < 1$ é uma forma de integral elíptica.

Como a integral acima não pode ser expressa por funções elementares. Para resolver esta integral é necessário recorrer a métodos numéricos e que geralmente já possuem valores tabelados.

4.2 REPARAMETRIZAÇÃO POR COMPRIMENTO DE ARCO

Definição 11. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e t_0 um instante qualquer fixo. A **função comprimento** de γ é a função $h : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(r) = \int_{r=t_0}^r \|\gamma'(r)\| dr.$$

Se pensarmos no traço da curva como a trajetória de uma partícula, podemos afirmar que $s = h(t)$ representa o comprimento da trajetória entre os "instantes" t_0 e t_1 . observe-se que

$$\frac{ds}{dt} = h'(t) = \|\gamma'(t)\| = v(t),$$

o que significa que h aplica bijetivamente I em um intervalo J . A função é denominada como mudança de parâmetro. Neste caso, dizemos que as duas curvas regulares h e γ são equivalentes.

Exemplo 27. Considere a reta $\gamma(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de γ a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

A função inversa de s é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $\beta = \gamma \circ h$, que a cada s associa

$$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

é uma reparametrização de γ pelo comprimento do arco.

Exemplo 28. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ cujo traço é uma circunferência.

Reparametrizaremos usando a função comprimento de arco. Consideremos o instante fixo $t_0 = 0$. Como $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2} = 2$

$$h(t) = \int_0^{t_0} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$h(t) = \int_0^{t_0} 2 dt$$

$$h(t) = 2t \Big|_0^{t_0}$$

$$h(t) = 2t.$$

Assim temos que h aplica bijetivamente o intervalo $[0, 2\pi]$, no intervalo $[0, 4\pi]$. Assim existe a função inversa s^{-1} . Deste modo, $\beta = \gamma \circ s^{-1} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = s \circ s^{-1} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(s) = (2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2})$ reparametriza γ . Observemos que $\beta'(s) = (-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2})$ e portanto $\|\beta'(t)\| = 1$.

Exemplo 29. *Reparametrização do arco da cicloide*

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

por comprimento de arco preservando sua orientação.

Temos

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)| &= |(1 - \cos(t), \sin(t))| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(t)} = \sin\left(\frac{t}{2}\right), \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{cases} 1 &= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos(u) &= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases} \implies 1 - \cos(u) = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right),$$

ou seja, γ não está parametrizada por comprimento de arco. Seja $t_0 \in]0, 2\pi[$. Temos

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du \\
&= \int_{t_0}^t \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(u)} du \\
&= \int_{t_0}^t 2 \operatorname{sen} \left(\frac{u}{2} \right) du \\
&= 2 \left(-2 \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \Big|_{t_0}^t \\
&= 4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Assim, $s]0, 2\pi[=]4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - 1 \right), 4 \left(\cos \left(\frac{t}{2} \right) + 1 \right)[$. Seja,

$$h = s^{-1}(t) :]4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - 1 \right), 4 \left(\cos \left(\frac{t}{2} \right) + 1 \right)[\begin{array}{l} \rightarrow]0, 2\pi[\\ \mapsto t \end{array} .$$

Logo,

$$h(s) = t \implies s = s(t) = 4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right) \implies t = 2 \arccos \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right),$$

ou seja,

$$h :]4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - 1 \right), 4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) + 1 \right)[\begin{array}{l} \rightarrow]0, 2\pi[\\ \mapsto 2 \arccos \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right) \end{array} .$$

é uma mudança de parâmetros para γ que preserva sua orientação (pois

$$h'(s) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right)^2}} > 0$$

para $s \in]4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - 1 \right), 4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) + 1 \right)[$).

Finalmente, $\beta : \gamma \circ h :]4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - 1 \right), 4 \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) + 1 \right)[\rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\beta(s) = \left(2 \arccos \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right) - \operatorname{sen} \left(2 \arccos \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right) \right), 1 - \cos \left(2 \arccos \left(\cos \left(\frac{t_0}{2} \right) - \frac{s}{4} \right) \right) \right)$$

é uma parametrização de γ pelo comprimento de arco.

Nos exemplos anteriores verificamos que ao parametrizar uma curva usando a função comprimento de arco obtivemos uma curva em que o vetor velocidade tem norma 1. Isso sucede sempre que a parametrização é feita usando a função comprimento de arco e não somente nesse caso particular. De fato, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3. *Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A curva obtida a partir de γ por parametrização usando a função comprimento de arco é percorrida com velocidade escalar constante e igual a 1.*

Demonstração. Seja s a **função comprimento de arco** de γ , $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Representamos por $s = h(t)$ o comprimento da trajetória percorrida pela partícula entre os instantes t_0 e t_1 e portanto, $h(t) \geq 0$ e $h(t) = 0$ se, e somente se $t_1 = t_0$. Uma vez que $h'(t) = \|\gamma'(t)\|$ e a curva é regular segue-se que $h'(t) > 0$. Deste modo, o que significa que h aplica bijetivamente I num intervalo J e podemos definir a reparametrização da curva γ usando a função comprimento de arco

$$\beta = \gamma \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Calculamos agora o vetor velocidade, usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (\gamma \circ h^{-1})'(s) \\ \beta'(s) &= \gamma'(h^{-1}(s)) \cdot (h^{-1})'(s), \end{aligned}$$

mas como sabemos

$$(h^{-1})'(s) = \frac{1}{h'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Logo,

$$\beta'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|},$$

e, portanto, $\beta'(t)$ é um vetor unitário, isto é, $\|\beta'(t)\| = 1$. □

Teorema 1. *O comprimento de arco da curva $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é invariante por reparametrização.*

Demonstração. Seja $f : J \rightarrow I$ uma bijeção entre intervalos de \mathbb{R} , ou seja, f é uma mudança de parâmetro satisfazendo $f'(s) > 0$, $\beta(s) = \gamma \circ f(s)$ outra parametrização da curva γ , então teremos,

$$s_\beta = \int_c^d |\beta'(s)| ds = \int_c^d |\gamma'(f(s))| |f'(s)| ds$$

pela regra da substituição, fazendo $t = f(s)$ teremos

$$\int_c^d |\gamma'(f(s))| |f'(s)| ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = s_\gamma$$

assim, $s_\beta = s_\gamma$. □

Exemplo 30. Nos Exemplos 3 e 28, apresentamos duas parametrizações diferentes para uma circunferência de raio r centrada na origem. Pelo Teorema 1, comprimento de arco deve ser invariante por reparametrização. De fato, vimos no Exemplo 20 que o comprimento da circunferência é $2\pi r$ utilizando a parametrização $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$. Agora, usando a parametrização apresentada no Exemplo 28, vamos recalculer o comprimento da circunferência.

Lembre que

$$\begin{aligned} \beta : [0, 2\pi r] &\rightarrow \mathbb{R}^2; \\ s &\mapsto \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right). \end{aligned}$$

Note que ao invés de calcularmos no intervalo de $[0, 2\pi]$ como feito no Exemplo 28, devemos alterar esse intervalo para $[0, 2\pi r]$, por conta da reparametrização. Note que a curva β necessita deste intervalo para completar uma volta completa. E $\|\beta'(s)\| = 1$. Portanto,

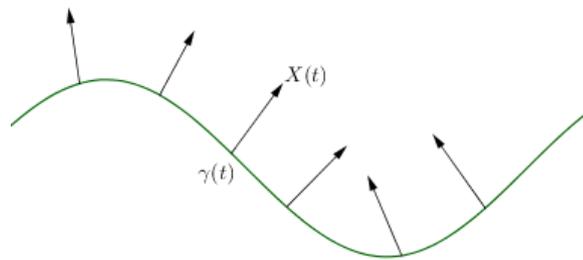
$$S(s) = \int_0^{2\pi r} \|\beta'(s)\| ds = \int_0^{2\pi r} 1 ds = 2\pi r.$$

5 TEORIA LOCAL DAS CURVAS PLANAS

5.1 CAMPOS DE VETORES AO LONGO DE UMA CURVA

Intuitivamente, um campo de vetores $X(t)$ ao longo de uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor com origem em $\gamma(t)$.

Figura 31 – Campo de vetores $X(t)$ ao longo de γ



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Logo, para determinar $X(t)$, basta conhecer a extremidade final do vetor $X(t)$, uma vez que sua extremidade inicial é $\gamma(t)$.

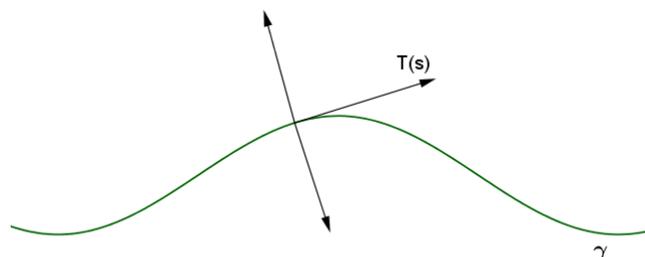
Definição 12. *Um campo de vetores de classe C^n ao longo de γ é uma aplicação $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^n , em que $n \in \mathbb{N}$.*

Geometricamente, o campo de vetores X é dado, em cada ponto $\gamma(t)$, pelo vetor de extremidades $\gamma(t)$ e $X(t)$. Se γ é uma curva suave e regular, parametrizada pelo comprimento de arco, o vetor tangente $\gamma'(s)$ é unitário. Esse vetor tangente, a partir de agora, será representado por $T(s) = \gamma'(s)$.

Doravante assumiremos que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave, regular e parametrizada por comprimento de arco.

Observação 5. • *A aplicação $t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferencial com $\|T(s)\| = 1$*

- *Existem dois vetores não-nulos e unitários perpendiculares a $T(s)$, sendo um deles correspondente ao giro de 90° em sentido horário e o outro em sentido anti-horário. Ambos são dados por uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .*

Figura 32 – Vetores unitários perpendiculares a $T(s)$ 

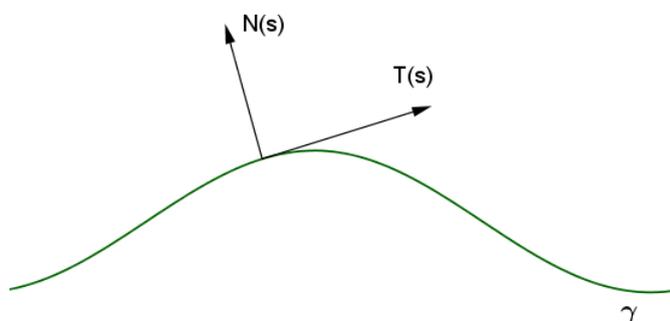
Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Definição 13. Chamaremos **vetor normal unitário** à curva γ em s o vetor unitário ortogonal a $T(s)$, tal que a base ortogonal do \mathbb{R}^2 formada por $T(s)$ e $N(s)$ tem a mesma orientação que a base $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , isto é,

$$N(s) = (-y'(s), x'(s))$$

$$\text{pois, } |N(s)| = 1, \langle N(s), T(s) \rangle = 0 \text{ e } \det \begin{pmatrix} x'(s) & y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Figura 33 – Vetor normal unitário



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Observação 6. • Se $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, então $T(s) = (x'(s), y'(s))$ e portanto, $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

- A reta normal à curva em um ponto $\gamma(s)$ é aquela que passa nesse ponto e tem como vetor direção o vetor unitário $N(s)$.

Observação 7. Propriedades do vetor normal unitário:

1. $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável;
2. $N(s)$ é um vetor unitário;

$$3. \langle T(s), N(s) \rangle = 0^1;$$

$$4. \det(T(s), N(s)) = \begin{vmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{vmatrix} = 1.$$

5. Os vetores $T(s)$ e $N(s)$ constituem uma base ortogonal do \mathbb{R}^2 , para cada $s \in I$.

5.2 CURVATURA

Um conceito de suma importância para o estudo de geometria diferencial é a curvatura. Geometricamente, a curvatura $k(s)$ é a medida do quanto uma curva se difere de uma reta, ou seja, a curvatura mede a taxa em que varia a direção da tangente à curva num ponto $\gamma(s)$. Assim, precisamos que o comprimento do vetor tangente não se altere, por isso usamos uma curva parametrizada por comprimento de arco.

Sabemos que $T(s)$ e $N(s)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ e que correspondem elementos de $s \in I$ a \mathbb{R}^2 ; e ainda, $T'(s)$ e $N'(s)$ são combinação de linear de $T(s)$ e $N(s)$. Entendemos que como $T(s)$ é um vetor unitário, então $T'(s)$ e $T(s)$ são ortogonais e, portanto $T'(s)$ é proporcional ao vetor normal unitário $N(s)$. Ao fator de proporcionalidade denominamos curvatura $k(s)$ da curva em s .

Proposição 4. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada $s \in I$, o vetor $T'(s)$ está na direção de $N(s)$, isso quer dizer

$$T'(s) = k(s).N(s), \text{ para cada } s \in I.$$

Então

$$(a) k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle T(s), N'(s) \rangle.$$

$$(b) N'(s) = -k(s)T(s).$$

Demonstração. Para cada $s \in I$, se verifica $\|T(s)\|^2 = \langle T(s), T(s) \rangle = 1$, se derivamos essa equação obtemos

$$\langle T(s), T(s) \rangle' = 1' \Rightarrow \langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle T'(s), T(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle T'(s), T(s) \rangle = 0,$$

o que significa que $T'(s)$ é ortogonal a $T(s)$ e portanto, proporcional à $N(s)$. Então, para cada $s \in I$ existe, um número real $k(s)$ de maneira que se tenha $T'(s) = k(s)N(s)$.

Para obter o item (a) consideramos que $\|N(s)\|^2 = \langle N(s), N(s) \rangle = 1$, fazendo o produto escalar de $T'(s)$ e $N(s)$, então

$$\langle T'(s), N(s) \rangle = \langle k(s)N(s), N(s) \rangle = k(s)$$

¹ O símbolo \langle, \rangle representa o produto escalar (ou interno) entre dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, escrito em coordenadas relativamente à uma base (no nosso caso \mathbb{R}^2), e é definido como $\langle u, v \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2)$. Se \vec{u} e \vec{v} são valores não-nulos, então $\langle u, v \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo formado entre os vetores \vec{u} e \vec{v} . Os vetores \vec{u} e \vec{v} são **ortogonais** ($\theta = \frac{\pi}{2}$) se, e somente se, o produto escalar entre eles é 0, ou seja, $\langle u, v \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Por outro lado, como $T(s)$ e $N(s)$ são ortogonais $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$. Se derivamos essa expressão, obtemos que

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0$$

o que significa que

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle T(s), N'(s) \rangle.$$

Para o item (b), o vetor $N(s)$ é unitário, logo, $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ e derivando, obtemos $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$, o que significa que $N'(s)$ é perpendicular a $N(s)$ e, portanto, proporcional a $T(s)$, então $N'(s) = h(s)T(s)$, com $h(s)$ número real para cada $s \in I$. Substituindo na igualdade do item (a)

$$k(s) = -\langle T'(s), h(s)T(s) \rangle = -h(s)$$

e isso implica que $N'(s) = -k(s)T(s)$. □

Definição 14. Se uma curva paramétrica regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco s então para $\forall s \in I$ temos $\|\gamma'(s)\| = 1$. Assim, $T(s) = (x'(s), y'(s))$ e $N(s) = (-y'(s), x'(s))$. A **curvatura** de γ em s é o número real $k(s)$ tal que $T'(s) = k(s)N(s)$.

Para curvas planas a curvatura tem sinal, onde será detalhado mais adiante o significado desse sinal.

Observe que se a curva é parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\gamma(s) = (x(s), y(s))$$

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

Logo

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$$

Exemplo 31. É natural esperar que a curvatura de uma reta seja nula. Vamos apresentar uma parametrização da reta. Seja v um vetor unitário em \mathbb{R}^2 e p um ponto do plano. Seja β uma curva parametrizada por comprimento de arco dada por $\beta(s) = sv + p$. Calculando, temos $\beta'(s) = v$ e $\beta''(s) = 0$ para $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 32. Uma parametrização por comprimento de arco da circunferência é $\beta(s) = r(\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}))$. Vamos calcular $k(s) = \|\beta''(s)\|$.

$$\beta''(s) = -\frac{1}{r} \left(\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

Portanto,

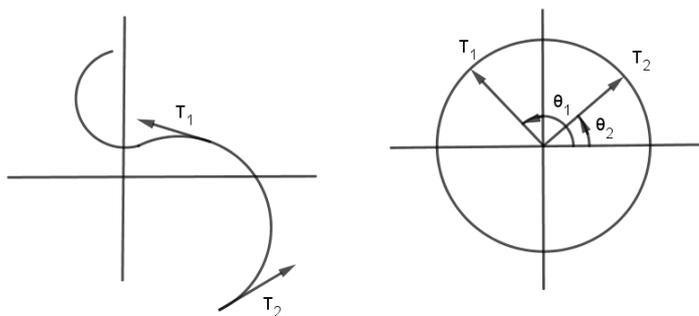
$$\|\beta''(s)\| = \frac{1}{r} \sqrt{\sin^2\left(\frac{s}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)} = \frac{1}{r}$$

A curvatura da circunferência independe de s , ou seja, ela é constante, para todo $s \in [0, 2\pi r]$. É também inversamente proporcional ao raio, isto é, quanto maior o raio, menor a curvatura da circunferência. Se pensarmos em um raio muito grande, a curvatura está próxima de zero. Em uma pequena vizinhança da circunferência, a circunferência quase chega a ser uma reta.

A cada ponto da curva $\gamma(t)$, podemos associar o vetor tangente unitário $T = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. Note que se a curva é parametrizada por comprimento de arco, $\|\gamma'(s)\| = 1$ e $T = \gamma'(s)$. Podemos ainda, a cada t , associarmos um ângulo $\theta = \theta(t)$ tal que $T = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ na circunferência de raio 1.

$$\begin{aligned} T(s) &= (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ T'(s) &= (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \\ &= \theta'(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \\ &= \theta'(s)N(s) \\ \Rightarrow k(s) &= \theta'(s) \end{aligned}$$

Figura 34 – Vetores tangentes unitários na circunferência de raio 1



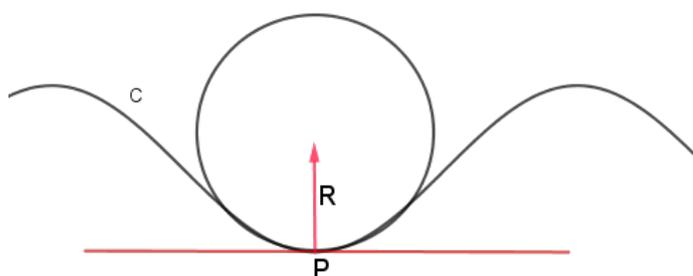
Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Outra maneira de pensar sobre a curvatura é aproximar uma curva em um determinado ponto com um círculo. Esse círculo, chamado círculo de osculação (que significa “círculo de beijo”), apenas toca (ou “beija”) a curva naquele ponto e tem a mesma curvatura que a curva ali.

O raio da circunferência que melhor aproxima uma curva em cada ponto é igual ao inverso da curvatura nesse ponto.

A curvatura de qualquer círculo é $1/R$ onde R é o raio. Um círculo com um raio muito grande tem uma curvatura muito pequena — andar em linha reta na Terra, está viajando em volta de um círculo gigante, mas nós realmente não percebemos essa curvatura e parece muito com andar sobre uma superfície plana — enquanto um pequeno círculo com um pequeno raio tem uma curvatura muito grande. Assim, a curvatura de qualquer ponto em uma curva pode ser definida como $1/R$, onde R é o raio do círculo de oscilação naquele ponto.

Figura 35 – Círculo osculador no ponto P



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Raio do Círculo Osculador Tomamos a circunferência de centro P e raio R que representamos por $\varphi = (P, R)$ e sabendo que s é o parâmetro comprimento de arco, temos que

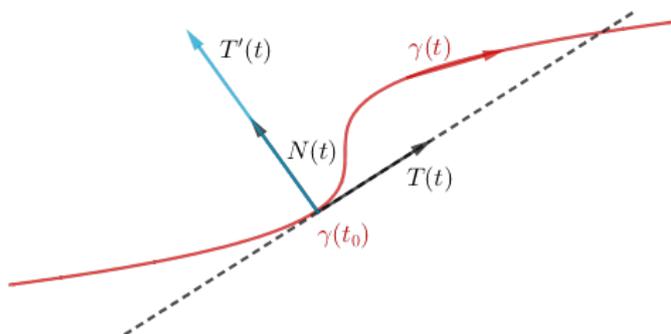
$$\begin{aligned} \|\gamma(s) - P\| &= R \\ \langle \gamma(s) - P, \gamma(s) - P \rangle &= R^2 \\ 2 \langle \gamma'(s), \gamma(s) - P \rangle &= 0 \\ \langle T(s), \gamma(s) - P \rangle &= 0 \text{ e } \gamma(s) - P = \pm RN(s) \\ \langle T'(s), \gamma(s) - P \rangle + \langle T(s), T(s) \rangle &= 0 \\ \langle k(s)N(s), \gamma(s) - P \rangle + 1 &= 0 \\ k(s) \langle N(s), \pm RN(s) \rangle &= -1 \\ \pm k(s)R &= -1 \Rightarrow k(s) = \pm \frac{1}{R} \end{aligned}$$

O sinal depende se N está apontando para o centro do círculo ou para o exterior do mesmo.

5.2.1 Sinal da Curvatura

Seja $t_0 \in I$; se $k(t_0) > 0$, então, para t suficientemente próximo de t_0 , $\gamma(t)$ está contida no semi-plano determinado pela reta tangente à γ no ponto $\gamma(t_0)$ e para o qual aponta o vetor $N(t_0)$.

Figura 36 – Curvatura com sinal positivo



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Para provar esse fato mostraremos que a projeção do vetor $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ sobre o vetor $N(t_0)$ assume um valor não-negativo quando t se aproxima de t_0 , ou seja, que a função

$$f(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), N(t_0) \rangle$$

é maior que zero. Observe que

$$f'(t) = \langle \gamma'(t) - \gamma'(t_0), N(t_0) \rangle + \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), N'(t_0) \rangle.$$

Como $\gamma(t_0)$ e $N(t_0)$ são vetores constantes, temos que

$$f'(t) = \langle \gamma'(t), N(t_0) \rangle + \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), 0 \rangle.$$

Mas $\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), 0 \rangle = 0$, logo

$$f'(t) = \langle \gamma'(t), N(t_0) \rangle.$$

Por outro lado, $\gamma'(t) = T(t)$, conseqüentemente

$$f'(t_0) = \langle \gamma'(t_0), N(t_0) \rangle + \langle T(t_0), N(t_0) \rangle = 0.$$

Logo t_0 é um ponto crítico de f e, por outro lado, temos

$$f''(t) = \langle \gamma''(t), N(t_0) \rangle + \langle \gamma'(t), N'(t_0) \rangle.$$

Sabemos que a derivada de uma constante é zero, assim

$$f''(t) = \langle \gamma''(t), N(t_0) \rangle + \langle \gamma'(t), 0 \rangle.$$

Mas, $\langle \gamma'(t), 0 \rangle = 0$ e $\gamma''(t) = T'(t)$, logo

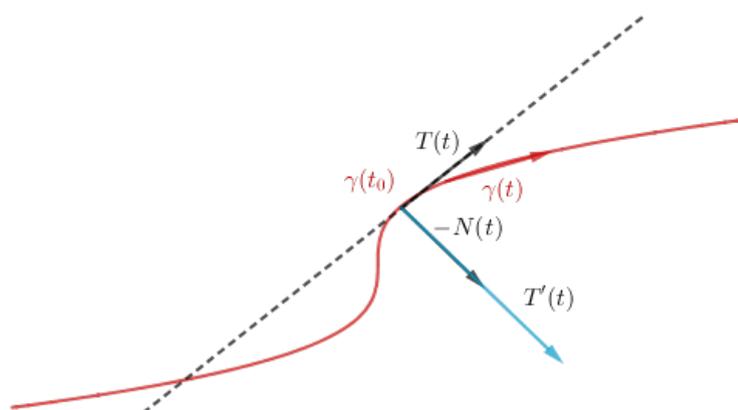
$$f''(t) = \langle \gamma''(t), N(t_0) \rangle = \langle T'(t), N(t_0) \rangle.$$

Desse modo,

$$f''(t_0) = \langle T'(t_0), N(t_0) \rangle = k(t_0) > 0.$$

Assim, tem-se que t_0 é um ponto crítico da função f pois $f'(t_0) = 0$, além disso t_0 é um mínimo relativo estrito de f , pois $f''(t_0) > 0$. Portanto, $f(t) > f(t_0) = 0$, para $t \approx t_0$, demonstrando o desejado. Se $k(t_0) < 0$, então, para t suficientemente próximo de t_0 , $\gamma(t)$ está contida no semiplano determinado pela reta tangente à γ no ponto $\gamma(t)$ e para o qual aponta o vetor $-N(t_0)$.

Figura 37 – Curvatura com sinal negativo



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Nesse caso, temos

$$f'(t_0) = \langle \gamma'(t_0), N(t_0) \rangle = \langle T(t_0), N(t_0) \rangle = 0$$

e

$$f''(t_0) = \langle T'(t_0), N(t_0) \rangle = k(t_0) < 0.$$

ou seja, a função f possui um máximo relativo estrito em t_0 , logo $f(t) < f(t_0) = 0$, para $t \approx t_0$, demonstrando o desejado.

Definimos a curvatura em função do comprimento de arco, mas podemos obter a curvatura em função de uma parametrização arbitrária da curva γ , ou seja, podemos

expressar a curvatura em termos das derivadas de uma parametrização qualquer da curva γ .

Sabemos que s é parâmetro comprimento de arco e t é o parâmetro da curva. Temos que

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \\ s(t) &= \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt \\ \frac{ds}{dt} &= \|\gamma'(t)\| \\ T(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dT}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) &= \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\| - \gamma'(t)\frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^2}\end{aligned}$$

Como

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\| &= \frac{d}{dt}(\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \\ &= \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) &= \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\| - \gamma'(t)\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|}}{\|\gamma'(t)\|^2} \\ &= \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3}\end{aligned}$$

Então

$$k(t) = \left\| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right\|$$

Vamos calcular

$$\|\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle\|$$

Mas,

$$\|\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle\|^2 =$$

$$\langle \gamma''(t) \| \gamma'(t) \|^2 - \gamma'(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle, \gamma''(t) \| \gamma'(t) \|^2 - \gamma'(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \rangle$$

$$\| \gamma''(t) \|^2 \| \gamma'(t) \|^4 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 \| \gamma'(t) \|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 \| \gamma'(t) \|^2 + \| \gamma'(t) \|^2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2$$

Observe que

$$\| \gamma''(t) \|^2 \| \gamma'(t) \|^4 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 = \| \gamma'(t) \|^2 (\| \gamma'(t) \|^2 \| \gamma''(t) \|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2)$$

Vamos calcular explicitamente a expressão do parênteses.

Sabemos que $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ e $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$, logo

$$\| \gamma'(t) \|^2 \| \gamma''(t) \|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 = ((x'(t))^2, (y'(t))^2)((x''(t))^2 + (y''(t))^2) - (x'x'' + y'y'')^2$$

$$= (x'(t))^2(y''(t))^2 + (y'(t))^2(x''(t))^2 - 2x'(t)y'(t)x''(t)y''(t)$$

Por outro lado,

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))\vec{k}$$

$$\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|^2 = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^2 = (x'(t))^2(y''(t))^2 + (y'(t))^2(x''(t))^2 - 2x'(t)y'(t)x''(t)y''(t)$$

Ou seja, exatamente a mesma coisa.

Voltando a expressão, temos

$$\| \gamma'(t) \|^2 \| \gamma''(t) \|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 = \| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|^2$$

Assim,

$$\| \gamma'(t) \|^2 \| \gamma''(t) \|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 = \| \gamma'(t) \| \| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|$$

Voltando à curvatura,

$$k(t) = \frac{\| \gamma''(t) \| \| \gamma'(t) \|^2 - \gamma'(t) \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\| \gamma'(t) \|^4} = \frac{\| \gamma'(t) \| \| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|}{\| \gamma'(t) \|^4}$$

$$k(t) = \frac{\| \gamma'(t) \times \gamma''(t) \|}{\| \gamma'(t) \|^3}$$

Exemplo 33. Calcule a curvatura da cicloide parametrizada $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ no topo de um dos arcos, ou seja quando $t = \pi$.

Temos que $\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$ e $\gamma''(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Vamos substituir as derivadas na fórmula acima:

$$k(t) = \frac{|\cos(t) - \cos^2(t) - \sin^2(t)|}{\|(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)\|^3}$$

$$k(t) = \frac{|\cos(t) - (\sin^2(t) + \cos^2(t))|}{\|1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)\|}$$

$$k(t) = \frac{|\cos(t) - 1|}{(2 - 2\cos(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Substituindo $t = \pi$ teremos,

$$k = \frac{|\cos \pi - 1|}{(2 - 2\cos \pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|-1 - 1|}{(2 - 2(-1))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Descobrimos que a curvatura no topo da cicloide é $k = \frac{1}{4}$.

Exemplo 34. *Curvatura no círculo parametrizado*

Seja $\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$ uma parametrização do círculo de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R , assim:

$$\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

e

$$\gamma''(t) = (-R\cos(t), -R\sin(t)).$$

Logo,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} = \sqrt{R^2} = R,$$

então, sua curvatura é dada por:

$$k(t) = \frac{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

6 PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Os elementos geométricos normalmente são estudados na escola básica de forma estática, porém quando a geometria é aplicada a problemas concretos são comuns aqueles onde a ação de movimento se faz presente. No campo da engenharia mecânica e da automatização industrial, por exemplo, configurações geométricas que sofrem ação de movimento servem de base para a construção de máquinas. Nesse contexto, é pertinente observar as trajetórias de pontos fixos nessas configurações geométricas que sofrem ação de movimento, visto que as curvas descritas por tais trajetórias podem ser aplicáveis a diversos campos da ciência e conduzir a avanços tecnológicos significativos.

Pensando na escola básica, o estudo das curvas descritas mecanicamente pode auxiliar no sentido de proporcionar uma abordagem inovadora para o estudo das geometrias plana, com a possibilidade de articulação com a geometria analítica, indo de encontro com as competências descritas nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O objeto dessa proposta metodológica é justificado pela constatação do autor, docente do Ensino Fundamental e Ensino Médio, da limitação de parte dos alunos no que diz respeito ao raciocínio geométrico, principalmente à compreensão da relação entre os aspectos visuais e às propriedades de certas figuras geométricas.

Esta proposta experimental faz parte trabalho que desenvolvemos sobre curvas parametrizadas. O principal objetivo da atividade experimental é incentivar os alunos de graduação, professores e interessados a trabalhar com experimentos simples com alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Como já dissemos, a matemática não é bem compreendida no Ensino Fundamental e Médio e por isso essa disciplina é uma das mais odiadas em todos os níveis de ensino. Uma forma de atrair os discentes para os temas da matemática é com atividades experimentais. A proposta é a de instigar o aprender da matemática não como um ato mecânico de "decorar e aplicar fórmulas", mas compreender que a matemática está na vida, muito antes de ser aprendida ou apresentada no espaço escolarizado. Uma atividade experimental já é um bom começo.

A proposta experimental desenvolvida neste trabalho é constituída de duas etapas. A primeira parte do experimento consiste em obter a cicloide e a segunda parte consiste em explorar a sua parametrização.

De forma prática, este estudo visa observar a curva descrita pela trajetória de um ponto de uma configuração geométrica quando essa sofre a ação de movimento. Por exemplo, qual seria a curva descrita pela trajetória de um ponto fixo da circunferência quando essa rola, sem deslizar, ao longo da reta?

Como a ação do movimento é essencial para a visualização da geração das cur-

vas, se faz imprescindível um instrumento que permita tal visualização de forma prática, no caso desse trabalho, um software de geometria dinâmica. Na proposta aqui desenvolvida, utiliza-se o software Geogebra, em função desse ser um software gratuito e possuir ferramentas cuja aplicação é relativamente simples e eficaz considerando-se os objetivos elencados.

O nosso objeto de demonstração aqui será a cicloide.

6.1 CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO

Material necessário:

- régua;
- copinho de acrílico(vidro) com grafite(lápis) fixado na borda;
- folha de ofício.

Figura 38 – Exemplo de material



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Instruções:

- a) Role(no sentido horário), sem deslizar, o copinho ao longo da reta (régua), conforme ilustra a Figura 39.

Figura 39 – Desenhando a cicloide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

- b) Visualmente, qual a relação entre o comprimento do arco TP (da circunferência) e do segmento AT da reta?
- c) Supondo que a relação intuída visualmente na questão anterior seja verdadeira, escreva o ângulo \widehat{TCP} em função da medida do segmento AT .
- d) Novamente, supondo que a relação descrita no exercício b é verdadeira, qual a relação entre o comprimento da circunferência e a distância entre os dois primeiros pontos de tangencia da curva cicloide sobre a reta diretriz?

6.2 CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Reta AB e circunferência de raio r .

- Crie um controle deslizante r de valor máximo 10;
- Crie dois pontos A e B ;
- Crie uma semirreta AB (com origem em A);
- Crie um ponto T na semirreta AB ;
- Crie uma circunferência de raio r com centro em T ;
- Crie uma reta perpendicular a AB passando por T ;
- Obtenha os pontos de intersecção da reta perpendicular a AB com a circunferência de centro T (o ponto de intersecção acima da semirreta AB deve ser C);
- Crie uma circunferência de raio r com centro em C ;
- Obtenha o segmento AT ;
- Obtenha o ponto P , criando um ângulo de amplitude fixa \widehat{TCP} , de medida e/r (a variável e corresponde ao nome atribuído pelo programa para o comprimento do segmento AT) no sentido horário;
- Habilite o rastro no ponto P .

A cicloide é a curva obtida pelo traçado do ponto P ao movimentarmos o ponto T (isso faz com a que a circunferência de raio r e centro C role, sem deslizar, pela reta AB).

6.3 EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

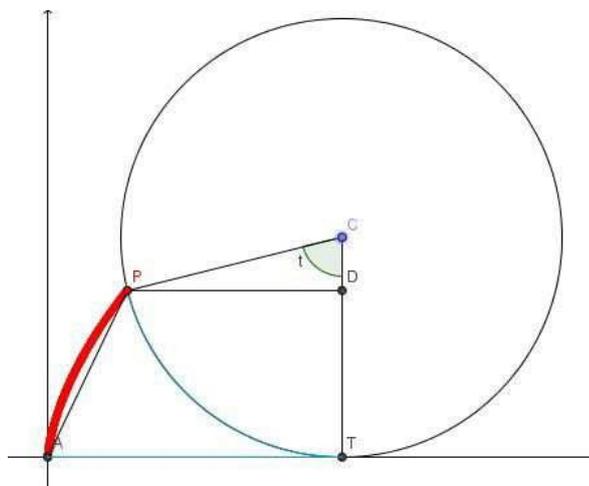
1. Utilize a ferramenta Arco Circular, meça o comprimento do arco TP no início da trajetória de P e compare-o com o do segmento AT .
2. Explique o que acontece com a relação constatada no exercício anterior a partir do momento que ponto P tangencia a reta AB pela primeira vez, após o início de sua trajetória.

3. Modifique o valor de r nos itens a seguir e verifique qual a cicloide formada.
 - a) $r = 1$
 - b) $r = 2,5$
 - c) $r = 4$
 - d) $r = \pi$
4. Considerando $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$, qual o menor intervalo para que a curva volte a tangenciar a reta AB em cada um dos itens do exercício anterior?
5. Calcule o valor adequado de raio para que, no intervalo $[0, 20\pi]$, se tenha tantos pontos de tangência com a reta AB quanto indicado em cada item, de modo que os extremos do intervalo sejam pontos de tangência. Verifique a coerência de suas respostas no Geogebra.
 - a) 3
 - b) 6
 - c) 11
6. Utilizando a construção feita para gerar as cicloides no Geogebra, construa uma cicloide cuja circunferência tem raio 2. Trace a reta CP e marque sobre essa reta dois pontos exteriores, dois pontos interiores e os dois pontos pertencentes à circunferência. Habilite o rastro e escolha cores distintas para cada um desses pontos. Movimente o ponto C para gerar o conjunto de curvas e identifique as cicloides, cicloides alongadas e cicloides encurtadas.

6.4 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

1. Utilize a construção geométrica com a qual é possível obter a curva reproduzindo o movimento descrito na definição. Obtenha os segmentos AT e PD , paralelos ao eixo x , CT , paralelo ao eixo y e PD . O ponto de intersecção D (entre PD e CT) também deve ser obtido. A Figura 40 mostra a configuração que deve ser obtida no início da trajetória do ponto P .

Figura 40 – Início da construção da cicloide



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

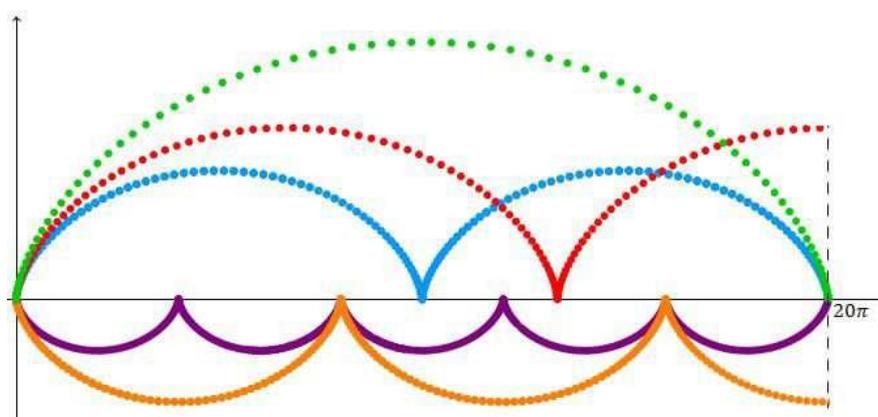
2. Escreva as coordenadas x e y de P como subtrações de segmentos.
 3. Utilize a relação entre o segmento AT e o arco TP e escreva AT em função de t .
 4. Utilize relações trigonométricas no triângulo retângulo DPC para obter as medidas dos segmentos DC e PD em função de t .
 5. Escreva as expressões que determinam x e y no ponto P da figura, em função de t .
 6. Sabendo que dependendo da posição de P , as expressões que determinam suas coordenadas em termos de adição de segmentos mudam, mas que sempre chega-se as mesmas expressões em função de t , escreva as equações paramétricas da cicloide de reta $y = 0$, ponto inicial $(0, 0)$ e circunferência de raio r .
 7. No software Geogebra, crie um comando deslizante t de valor máximo 20 e mínimo 0 (parâmetro t) e um ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir das equações paramétricas da cicloide cuja origem é o ponto $(0, 0)$ e que o eixo x como diretriz e uma circunferência de raio 2. Habilite o rastro no ponto P e varie o parâmetro t a fim de observar a curva formada.
- 6.5 UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS
1. Encontre as coordenadas do ponto P de uma cicloide cujos raios das circunferências diretriz e geratriz são 1, para os seguintes valores de t :

a) $t = \frac{\pi}{2}$

- b) $t = \pi$
- c) $t = \frac{5\pi}{4}$
- d) $t = 9$

2. Utilize o software Geogebra e crie um comando deslizante (parâmetro t) e o ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir da cicloide descrita no exercício 1. Verifique, com o auxílio do programa, que os pontos calculados realmente pertencem à curva em questão.
3. Reproduza a seguinte configuração no Geogebra, indicando quais as equações paramétricas utilizadas.

Figura 41 – Curvas no Geogebra



Fonte – Produzido pelo Autor (2020).

Boa parte das atividades sugeridas utiliza, no processo resolutivo, conceitos elencados na Base Nacional Comum Curricular. A aplicação de tais atividades permite que esses conceitos sejam explorados de forma diferenciada, constituindo uma alternativa à abordagem tradicional dos mesmos, que muitas vezes se dá de forma desconexa com as outras ciências e até mesmo com os demais campos da própria Matemática.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como principal objetivo estudar a importância das curvas planas e alguns aspectos que as envolve como: parametrização, regularidade, comprimento de arco, vetor tangente, vetor normal e curvatura, assim como elaborar uma proposta pedagógica para aplicar no ensino regular objetivando a melhoria da qualidade de ensino da matemática.

Na introdução trouxemos um pouco da história da geometria das curvas e sua importância para a Geometria Diferencial.

No segundo capítulo saímos de uma curva algébrica para chegarmos a uma curva parametrizada diferenciável usando para isso dois parâmetros diferentes: o parâmetro t e o parâmetro θ .

No capítulo três, calculamos o comprimento de arco de uma curva parametrizada, assim como reparametrizamos a mesma utilizando para tal o comprimento de arco ou um parâmetro qualquer.

No quarto capítulo, abordamos os aspectos locais de um ponto específico da curva, ou seja, seu vetor tangente, seu vetor normal e sua curvatura.

No último capítulo, trouxemos uma proposta pedagógica para o ensino fundamental e médio, utilizando a cicloide. Esse capítulo é a contribuição desse trabalho para a educação básica(ensino fundamental e médio). Nele utilizamos o software Geogebra para construir a cicloide e através dessa construção calcularmos a parametrização da mesma explorando os aspectos geométricos dessa curva.

Em um contexto geral, a importância desse trabalho se dá no sentido de trazer ideias diferentes das tradicionais com a finalidade de propor um processo de ensino-aprendizagem significativo, em cumprimento com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular. A atividade aqui sugerida pode ser utilizada na íntegra ou adaptada para enfoque em algum tópico específico do Ensino Médio. Espera-se que as ideias aqui expostas possam colaborar para reflexões acerca do ensino da Matemática no país, em especial no campo da Geometria.

Esperamos através desse trabalho, contribuir com a educação, seja como forma de pesquisa ou através da proposta pedagógica fazendo com que compreendam a matemática de forma mais aprazível e interessante.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria diferencial das curvas planas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSALF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- GIUSTI, Enrico; CONTI, Franco. **La Geometria delle curve**. [S.l.]: Diagonale, 1999.
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. [S.l.]: Harper e Row do Brasil, 1982.
- TENENBLAT, Kate. **Introdução à geometria diferencial**. [S.l.]: Edgar Blucher, 2008.