Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Kleyber Júnio Costa Melo

Um Estudo Sobre a Presença da Matemática na Música

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

KLEYBER JÚNIO COSTA MELO

UM ESTUDO SOBRE A PRESENÇA DA MATEMÁTICA NA MÚSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha

Coorientador: Mehran Sabeti

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

Melo, Kleyber Junio Costa, 1989-

M517e Um estudo sobre a presença da matemática na música /
2020 Kleyber Junio Costa Melo. – Florestal, MG, 2020.
70f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: 69-70.

1. Monocórdio. 2. Música. 3. Séries de Fourier.
4. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

515

KLEYBER JÚNIO COSTA MELO

UM ESTUDO SOBRE A PRESENÇA DA MATEMÁTICA NA MÚSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2020.

Assentimento:

Kleyber Júnio Costa Melo

Kleyber Júnio Costa Melo
Autor

Alexandre A. Rocha

Alexandre Alvarenga Rocha
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais José Francisco de Melo e Vânia Maria Costa Melo, aos meus irmãos Warley e Débora por estarem sempre me incentivando e apoiando para enfrentar este desafio e concluí-lo.

Agradecimentos

À Deus, fonte de toda sabedoria.

À minha família, por compreenderem o motivo de tantas ausências. Em especial minha Tia Maria das Graças e primas Neuma Patrícia e Anna Faria por estar presente na minha caminhada, gratidão por tudo.

À Universidade Federal de Viçosa pela oportunidade de realizar o curso de Mestrado.

À todos os professores do Profmat do campus de Florestal-MG pelas contribuições ensinamentos e, principalmente, pela paciência que tiveram no decorrer do curso.

Ao professor e orientador Dr. Alexandre Alvarenga Rocha, pela orientação, paciência e apoio, que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor e coorientador Dr. Mehran Sabeti, pela atenção e boa vontade que contribuíram significativamente para este trabalho.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, por me compreender nos meus dias de anseios e com palavras de apoio me ajudaram, meu muito obrigado.

Aos meus amigos do Mestrado, pelo apoio, contribuições para meu crescimento profissional e, acima de tudo, pela parceria em todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Biografia

Kleyber Junio Costa Melo, nasceu no dia 25 de setembro de 1989, em Dores do Indaiá-MG. Possui graduação em Matemática pelo Centro Universitário do Sul de Minas (2013), Pós-graduação latu Senso no Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário do Sul de Minas(2015), Pós-graduação Latu Senso em Docência para o Ensino Superior pelo Centro Universitário do Sul de Minas(2017). Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa(UFV), campus Florestal. Atualmente é professor de Matemática - Colégio Elysium(Rede Bernoulli), onde ministra aulas de Matemática para o ensino médio e pré-vestibular. Professor efetivo de Matemática do Estado de Minas Gerais, onde ministra aulas de Matemática para o ensino médio.

Resumo

MELO, Kleyber Júnio Costa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020. **Um Estudo Sobre a Presença da Matemática na Música**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Mehran Sabeti .

Este trabalho tem como proposta estabelecer relação entre a matemática e a música, visando discorrer relação de frações e as notas musicais através de um instrumento chamado monocórdio, inventado por Pitágoras. Será feita uma análise quanto a algumas proporções musicais que nos auxiliarão na observação da escala musical pitagórica e suas particularidades. Relacionaremos a escala pitagórica e a escala temperada, aquela usada nos dias atuais. Em face do exposto, podem-se constatar analogias e similaridades existentes nessas duas áreas, capazes de proporcionar aplicações, utilizando estratégias de ensino, aspectos práticos e teóricos relacionados à Modelagem Matemática, no ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: monocórdio, música, frações, séries de Fourier.

Abstract

MELO, Kleyber Júnio Costa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2020. **How to Write a PROFMAT Dissertation**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Mehran Sabeti .

The purpose of this piece of work is to stablish a link between Math and Music, presenting the relation existing in fractions and musical notes through an instrument called monochord, created by Pythagoras. It will be made an analysis related to some musical proportions that will help us in the observation of the Pythagorean musical scale and its peculiarities. We'll relate the Pythagorean scale and the tempered scale, that one used nowadays. In that regard, we can verify analogies and similarities existing in these two areas, capable of providing applications, making use of teaching strategies, practical and theoretical aspects related to Mathematical Modeling, in teaching and learning of Math.

Key words: monochord, music, fractions, Fourier series.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α	letra grega Alfa
β	letra grega Beta
γ	letra grega Gama
δ	letra grega Delta
ϵ	letra grega Épsilon
ζ	letra grega Zeta
η	letra grega Eta
θ	letra grega Teta
ι	letra grega Iota
κ	letra grega Kapa
λ	letra grega Lambda
μ	letra grega Mi
ν	letra grega Ni
ξ	letra grega Xi
o	letra grega Ômicron
π	letra grega Pi
ρ	letra grega Rô
σ	letra grega Sigma
τ	letra grega Tau
υ	letra grega Upsilon
ϕ	letra grega Fi
χ	letra grega Chi
ψ	letra grega Psi
ω	letra grega Ômega

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

A matemática e a música se relacionam desde os primórdios da antiguidade. Em meio a cálculos, regras, hipóteses, teses e demonstrações, muitos nem sequer sabem da relação da Matemática com outras áreas de conhecimento, tais como a música. O primeiro registro científico encontrado foi na Grécia antiga, por volta do século VI a.C, na escola pitagórica. Os pitagóricos foram os únicos até Aristóteles, a fundamentar cientificamente a música, cujo gosto os tornaram os pioneiros, cientificamente, no desenvolvimento da mesma e os mais preocupados por esse assunto [1]. A matemática está presente no desenvolvimento das escalas musicais e na teoria musical. Envolve desde conhecimentos simples, como relações de frações a conhecimentos avançados, como em séries harmônicas que envolvem séries de Fourier. Pitágoras, a partir do experimento com um instrumento criado em sua escola pitagórica, o monocórdio (um instrumento composto por uma corda esticada entre dois cavaletes, cujo nome se dá ao fato de, mono = um / córdio= corda, uma única corda), estabeleceu relações de frações do comprimento da corda e sua altura [1] [1].

O som se comporta como uma onda, já que cada onda sonora possui algumas características próprias, tais como: Amplitude que correlaciona-se ao volume do som como também ao timbre, a frequência está diretamente ligada a altura do som, ou seja, o som ser "grave", "médio" ou "agudo". É através do timbre que distinguimos a fonte sonora. Com as ideias de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) vista neste trabalho, é possível modelar uma nota musical por meio de uma série trigonométrica. Nesse contexto, mostraremos com o auxilio de um Software (Geogebra) o som de uma nota musical por uma Série Trigonométrica. Percebe-se que entre matemática e música existem inúmeras relações, algumas já mencionadas acima, que serão discutidas ao longo deste trabalho.

Entre essas abordagens, a matemática concerne na tentativa de buscar fundamentos científicos para responder a desenvolvimentos musicais. Com o desenvolvimento desse artigo, espera-se que, ao final, possa responder algumas perguntas que até então eram vagas. Onde a matemática se evidencia na música? Por que na série harmônica se ouve com mais intensidade a tônica? O que é uma consonância? Quais são os intervalos entre cada nota?

[1] propriedade do som ser grave, agudo ou médio

Vale ressaltar que ‘a matemática por si só, não é capaz de explicar completamente a música, nem esta explica aquela, mas há uma forte ligação entre essas duas áreas [23]. Entretanto, segue-se com intuito de organizar historicamente e mostrar/fundamentar relações entre essas duas ciências.

Ademais, percebe-se que a matemática na educação básica, torna-se exaustiva em meios de demonstrações, teoremas e regras. Pensando nisto, este trabalho tem, como propósito, mostrar algumas relações entre a matemática e música, evidenciando algumas aplicações entre os conceitos de ambas.

2

Introdução e Contexto Histórico

2.1 A História e o Monocórdio

Conhecida pelos gregos como a "arte das musas", a música, assim como a Matemática faz combinações. A Música combina sons, silêncio, diálogo e interpretação, e, além de retratar a cultura das civilizações, é capaz de dividir emoções e sentimentos.

Desde a antiguidade percebe-se o desenvolvimento da matemática e da música, que vinham descobertas de diferentes disciplinas, porém, do mesmo pesquisador. Assim conduz-se a pensar que, em algum momento, o homem tenha começado a conjeturar relações entre matemática e musica, quer que seja no esticar de uma corda de arco-flecha em que diferente espessura traduzia diferentes sons, ou mesmo ao soprar um osso de urso que gera diferentes sons dependendo do seu comprimento.

Segundo Abdounur [1], P. VII:

> *Referente a um osso de urso com idade entre 43.000 a 82.000 anos encontrado por Alpes da Eslováquia em 1995, apresentando uma configuração de buracos capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons, elementos fundamentais da escala diatônica moderna, como por exemplo, dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó. Passível de ser considerado o instrumento musical mais antigo conhecido, esse achado emitia tais intervalos em virtude da distância entre o segundo e terceiro buracos ser duas vezes aquele existente o terceiro e quarto, o que já mostraria preocupações matemáticas quando de sua confecção. Porém, tais considerações não passam de conjecturas.*

O primeiro registro científico encontrado foi na Grécia antiga, por volta do século VI a.C, na escola pitagórica quando Pitágoras, através de um experimento com sons de um monocórdio, efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a música. Os pitagóricos foram os únicos até Aristóteles a fundamentar cientificamente a música, cujo gosto por tal os tornaram os pioneiros, cientificamente, no desenvolvimento da mesma e os mais preocupados por este assunto [1].

Ele utilizava a música para educar os seus discípulos, ensinando-os apreciar a beleza dos sons e das composições da mesma forma com que apreciavam as belíssimas formas geométricas e fórmulas matemáticas.

Por alguma causa divina ou ato de sorte, Pitágoras, ao passar em frente a uma oficina de um ferreiro, percebeu que as batidas de martelos de diferentes pesos produziam sons que eram agradáveis ao ouvido e se combinavam muito bem. Ele analisou e descobriu que os sons que lhe eram harmoniosos tinham uma relação matemática simples [20].

Pitágoras, admirado com o som agradável, pensava que a qualidade do som era proveniente da força das mãos, ele teria trocado o martelo e observado que cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Assim pesou-os e constatou que os martelos tinham pesos diferentes, o primeiro pesava 12 (doze), o segundo 9 (nove), o terceiro 8 (oito), o quarto 6 (seis), de uma unidade de peso desconhecida [11].

Segundo o autor em [1], Pitágoras foi quem, possivelmente, inventou o monocórdio, instrumento composto por uma corda, esticada entre dois cavaletes fixos nas extremidades e um cavalete móvel, semelhante à harpa, conforme figura 2.1. Foi a partir do monocórdio que Pitágoras estabeleceu várias relações entre frações e o som emitido.

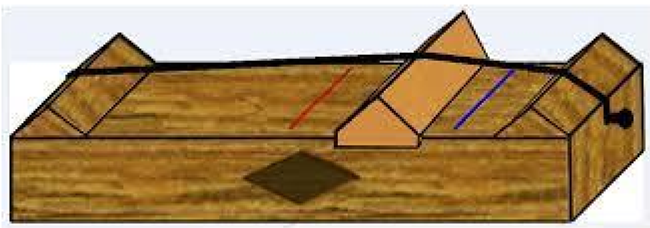


Figura 2.1: Monocórdio

Pitágoras observou que, ao tocar a corda do monocórdio inteira relativa aos dois cavaletes fixos produzia um determinado som com certa frequência (f) [1], percebeu que ao pressionar um ponto situado a metade do comprimento da corda em relação a sua extremidade encontrava-se a mesma nota, porém com o dobro da frequência (mais agudo). Pressionando-se a um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda ouvia-se um som equivalente a uma quarta acima da corda inteira; analogamente, ao pressionar um ponto situado a $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda, ouvia-se um som equivalente a uma quinta da corda inteira, e esses sons tocados juntos se combinavam e foram denominados consonância (reunião de sons harmônicos) pitagóricas conforme figura 2.2 [1].

[1]Frequência corresponde aos ciclos (oscilações por segundo) da onda sonora. Quanto maior a frequência, mais agudo é o som; e quanto menor a frequência, mais grave é o som.

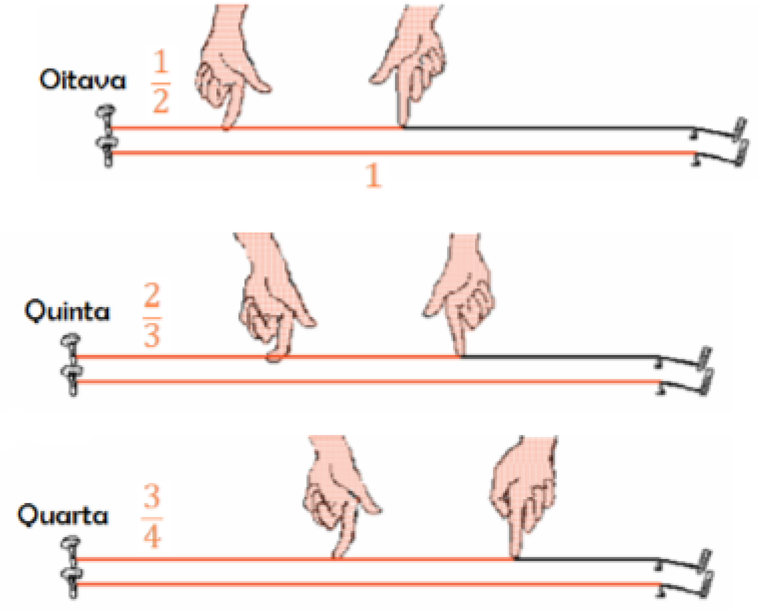


Figura 2.2: Intervalos Consonantes

A consonância, palavra usada para definir sons que se combinam, ao serem tocados simultaneamente, produz sons agradáveis e mostram-se naturais ao ouvido humano, já que acusticamente estabelecem ondas compostas por relações de pulsações simples – 1 contra 2, 2 contra 3 e 3 contra 4. De acordo com Descartes, tal característica cansaria menos o ouvido, já que, na onda resultante, o número de pulsos a serem percebidos diminui em função das coincidências [1].

Pitágoras justificou a implícita relação de pequenos números inteiros às consonâncias pelo fato de que os números 1,2,3 e 4 – envolvidos nas frações mencionadas- geravam toda a perfeição. Para os pitagóricos, o número 4, o primeiro quadrado par, era a origem de todo o universo, todo o mundo material. No cenário musical o número quatro faz alusão aos tetracordes, uma série de quatro tons que preenchem um intervalo de quarta justa[2], sendo a **escala mais elementar e unidade fundamental da música grega** [1].

Percebe-se a analogia entre o comprimento da corda e o peso dos martelos, pois seja a corda de comprimento 12 de certa unidade de medida, $\frac{1}{2}$ da corda é equivalente a 6, o que acontece com $\frac{2}{3}$ que equivale a 8 e $\frac{3}{4}$ equivalente a 9. É interessante observar que essas consonâncias possuem relações aritméticas, já que o 9 é a média aritmética de 12 e 6 e o 8 é a média harmônica entre 12 e 6 [4].

Média aritmética

$$9 = \frac{12+6}{2} \tag{2.1}$$

Média harmônica

$$8 = \frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}} \tag{2.2}$$

[2] intervalo de dois tons e um semiton na música, nomes musicais que serão justificados no discorrer do texto

2.1.1 A Escala Pitagórica

A partir do experimento de Pitágoras e de sua escala elementar, ocorre em sua escola pitagórica o desenvolvimento de um sistema musical fundamentado em relações simples de números inteiros. Parecia interessante partir de intervalos consonantes e estabelecer afinações que contivessem intervalos denominados puros [1].

Conduzindo-se do intervalo entre a corda solta e a sua metade, denominado de oitava, ao qual se mostrava intervalo fundamental [3], Pitágoras a toma como universo da escala. As notas diferenciadas por intervalos de oitava apresentam certa semelhança, podendo ser definidas como classe de equivalência, em que duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo entre elas for um número inteiro de oitavas. A partir dessa hipótese, a construção de uma escala reduzia-se em dividir a oitava em sons que pudessem expressar uma linguagem musical, ou seja, o alfabeto musical [1].

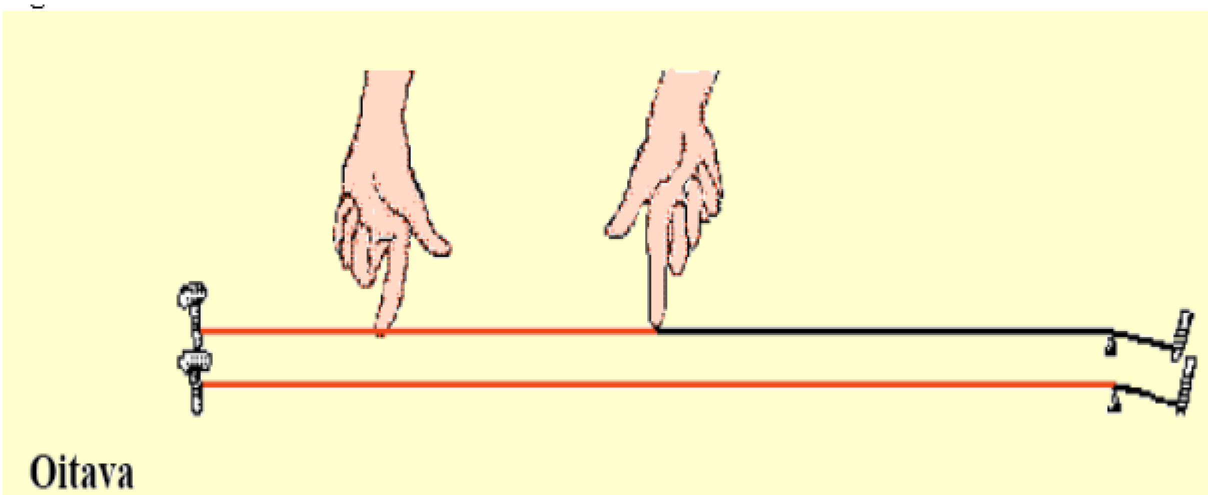


Figura 2.3: Intervalo de Oitava

Portanto Pitágoras dispôs-se a caminhar em intervalos de quintas ascendentes, ou seja, a partir de intervalos de $\frac{2}{3}$ da corda inteira, a nota que escapasse da oitava-universo, a multiplicava pelo fator de equivalência, retornando a oitavo-universo [1].

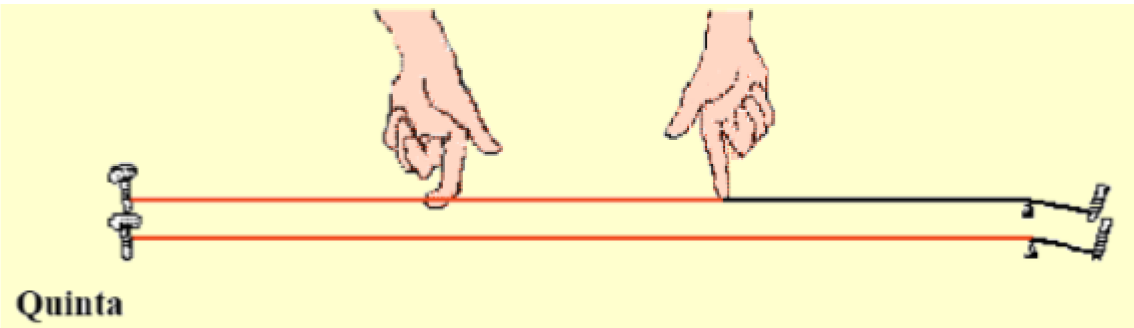


Figura 2.4: Intervalo de Quinta

[3]notas que se equivalem e diferenciam apenas pelas oitavas, ou seja, notas de mesma altura porém mais agudo. Significa sonoramente pelo fato de que quando uma criança acompanha um homem cantando, o faz por diferença de oitavas.

2.1.2 A Construção da Escala Pitagórica

Não se tem ao certo em que tom [4] estava afinado o monocórdio, porém não tem importância já que nos interessa a relação entre a corda solta(tônica) e as obtidas pressionando o monocórdio em determinadas posições conforme as figuras 2.4 e 2.3 e fazendo vibrar a corda nessas posições [15].

Sabe-se que a primeira escala musical de Pitágoras possuía apenas quatro sons. Porém, percebe-se que entre essas notas há outras que foram sendo descobertas seguindo as proporções de Pitágoras, até chegar ao que se conhece hoje como **Escala Diatônica**.

Suponhamos, para efeito de análise em questão, que a tônica seja Dó, logo a oitava, ou seja, ao pressionar a metade da corda e fazê-la vibrar, teremos outro Dó, porém mais agudo, aqui chamado de Dó oitava [5]. A Escala Diatônica [6] possui sete notas entre os intervalos de oitava, por isso tal nome oitava, pois incluindo a nota com o dobro da frequência, essa estará oito notas de sua correspondente.

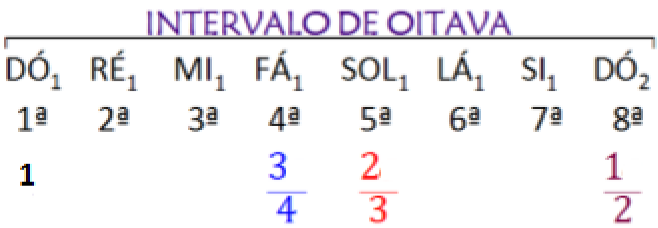


Figura 2.5: Escala diatônica de Dó

Antes de procedermos aos cálculos das outras notas, vamos adotar a seguinte convenção. A primeira oitava, a oitava fundamental, está delimitada entre Dó$_1$ e Dó$_2$ e entre essa notas, Ré$_1$, Mi$_1$ etc. Assim, genericamente a "n-ésima" oitava estará entre Dó$_n$ *e* Dó$_{n+1}$, e terá as notas Ré$_n$, Mi$_n$ etc.

Adotadas essas convenções, através do monocórdio e denominando a tônica como Dó$_1$, podemos afirmar que Pitágoras já percebia o Fá$_1$ denominado (**quarta**) pois, da tônica até o Fá há quatro notas, o Sol$_1$ (**quinta**) e o Dó$_2$ (**oitava**).

Partindo da razão do intervalo de $\frac{2}{3}$ da corda inteira, encontraremos as próximas notas musicais da Escala diatônica de Dó, já que sua tônica é Dó. Esse procedimento ficou denominado em todo o mundo como **Ciclo das Quintas**, uma vez que $\frac{2}{3}$ da corda inteira representa a quinta nota da escala.

Para tal, partiremos de dois resultados já conhecidos pela primeira escala musical, o tetracorde:

- A Quinta do Dó$_n$ é Sol$_n$
- A Quarta do Dó$_n$ é Fá$_n$

[4]Por enquanto, entedamos como tom a nota tomada como base, como referência para a escala. Aqui será o som da corda solta.

[5]nota com mesma nomenclatura porém o dobro da frequência.

[6]A palavra diatónica vem do grego e significa 'através da sucessão de sons'

Para simplificarmos a notação, denominamos a corda inteira por 1 unidade de comprimento e partindo do Fá$_1$ seguiremos os ciclos das quintas:

- Quinta de Fá$_1$: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, que corresponde a Dó$_2$
- Quinta de Dó$_2$: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ que corresponde a Sol$_2$.

  Logo, Sol$_1$ terá o dobro do comprimento: Sol$_1$ $= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- Quinta de Sol$_1$: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ que corresponde a Ré$_2$.

  Logo, Ré$_1$ terá o dobro do comprimento: Ré$_1$$= 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$
- Quinta de Ré$_1$: $\frac{8}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$ que corresponde a Lá$_1$.
- Quinta de Lá$_1$: $\frac{16}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$ que corresponde a Mi$_2$

  Logo, Mi$_1$ terá o dobro do comprimento: Mi$_1$ $= 2 \times \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$.
- Quinta de Mi$_1$: $\frac{64}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{243}$ que corresponde a Si$_1$

Portanto temos a sequência Fá, Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si, que ordenada apresenta-se nossa escala Diatônica, como Dó, Ré, Mí, Fá, Sol, Lá, Si, Dó. Cabe ressaltar que a nomenclatura aqui utilizada para as notas musicais, apresenta apenas referência para melhor entendimento, uma vez que estas possuíam diferentes nomes na época [1].

FRAÇÕES DO COMPRIMENTO

DÓ$_1$	RÉ$_1$	MI$_1$	FÁ$_1$	SOL$_1$	LÁ$_1$	SI$_1$	DÓ$_2$
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Figura 2.6: Intervalos

É importante evidenciar que, se uma nota encontra-se em uma 2ª oitava (entre Dó$_2$ e Dó$_3$) deve-se multiplicá-la por 2, seu fator de equivalência para que possa trazê-la à primeira oitava, ou seja, se o Dó$_2$ equivale a metade do Dó$_1$, então Dó$_1$ equivale ao dobro do Dó$_2$. Resultado usado para as notas acima que saíram da oitava fundamental.

Pensando em comprimento da corda, uma oitava de ordem n (entre Dó$_n$ e Dó$_{n+1}$) é definida pelo intervalo: $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$; $n \in \mathbb{N}^*$

Portanto para transpor uma nota X_n de uma oitava qualquer para a primeira oitava, utilizamos a equação: $\mathrm{X}_1 = 2^{n-1} \cdot \mathrm{X}_n$.

Exemplo:

Seja uma nota tocada numa corda pressionada na altura de $\dfrac{3}{32}$ do seu comprimento. Por análise, nota-se que: $\dfrac{1}{2^4} < \dfrac{3}{32} < \dfrac{1}{2^3}$; logo, essa nota pertence à 4ª oitava. Para encontrarmos uma nota equivalente à 1ª oitava, basta substituirmos na equação $n = 4$.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 2^{n-1} \cdot X_n \\
X_1 &= 2^{4-1} \cdot \frac{3}{32} \\
X_1 &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Portanto a nota de altura $\dfrac{3}{32}$ do seu comprimento é equivalente à altura de $\dfrac{3}{4}$ do comprimento correspondente à sua 1ª oitava.

3 A Escala Temperada

3.1 Temperamento Pitagórico

Partindo da Escala Pitagórica, pode-se observar que, sequencialmente, os graus [1] consecutivos possuem respectivamente, as relações de frequências do quadro abaixo:

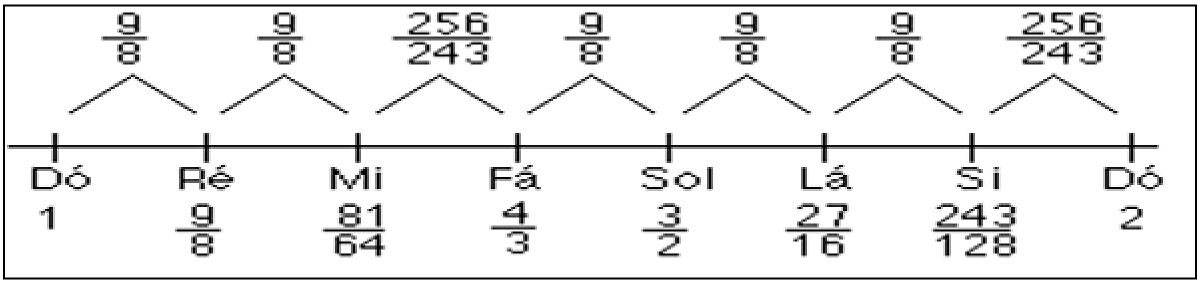


Figura 3.1: Intervalos entre as Notas

Analisando as frenquências dos graus consecutivos percebe-se que o intervalo entre (Mi e Fá) e o intervalo (Si e Dó) são menores que os demais intervalos. Portanto era conveniente que entre esses outros intervalos se encontrassem novas alturas[2], ou seja, novas notas.

Retornando à construção da Escala Pitagórica e percorrendo o ciclo das quintas puras, encontra-se a seguinte sequência *Fá*, *Dó*, *Sol*, *Ré*, *Lá*, *Mi*, *Si*, Fá♯, Dó♯, Sol♯, Ré♯, Lá♯ e por fim esparava-se voltar à nota Fá, porém esse ciclo não fecha a oitava. Isso se deve ao fato que 12 quintas puras empilhadas excedem o intervalo de 7 oitavas.

Um intervalo de quinta possui a relação de frequência $\frac{3}{2}$. Logo, o empilhamento de 12 quintas é $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cong 129{,}746$, que nunca poderá igualar-se precisamente a $2^7 \cong 128$, fator multiplicativo à frequência inicial quando percorre 7 oitavas. A partir desse ponto, a continuação do percurso das quintas, geraria notas bastante próximas daquelas adquiridas no primeiro ciclo. O quociente entre 12 quintas e 7

[1] Os graus se referem a altura (sons ser grave, médio ou agudo) de cada nota

[2] propriedade do som ser grave, médio ou agudo

oitavas puras - matematicamente, $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \div 2^7 = 1{,}01364326... \neq 1$, é conhecida como "Coma pitagórico" ou "Quinta de lobo". Essa diferença contribuiu fortemente para a emergência do Temperamento de intervalos iguais.

É importante lembrar que, para um bom entendimento, usa-se a nomenclatura atual, em que seguindo as quintas ascendentes, as notas entre intervalos de $\frac{9}{8}$ recebe o sinal $\sharp$ (sustenido) e leva no nome da nota anterior. E seguindo as quintas descendentes as notas entre os intervalos de $\frac{9}{8}$ recebe o sinal $\flat$ (Bemol) e leva o nome da nota anterior, de modo que as notas desses intervalos possuem nomes diferentes e mesma altura. Na música essas notas de mesma altura e nomes diferentes são chamados de **Enarmônicos**.

Exemplo

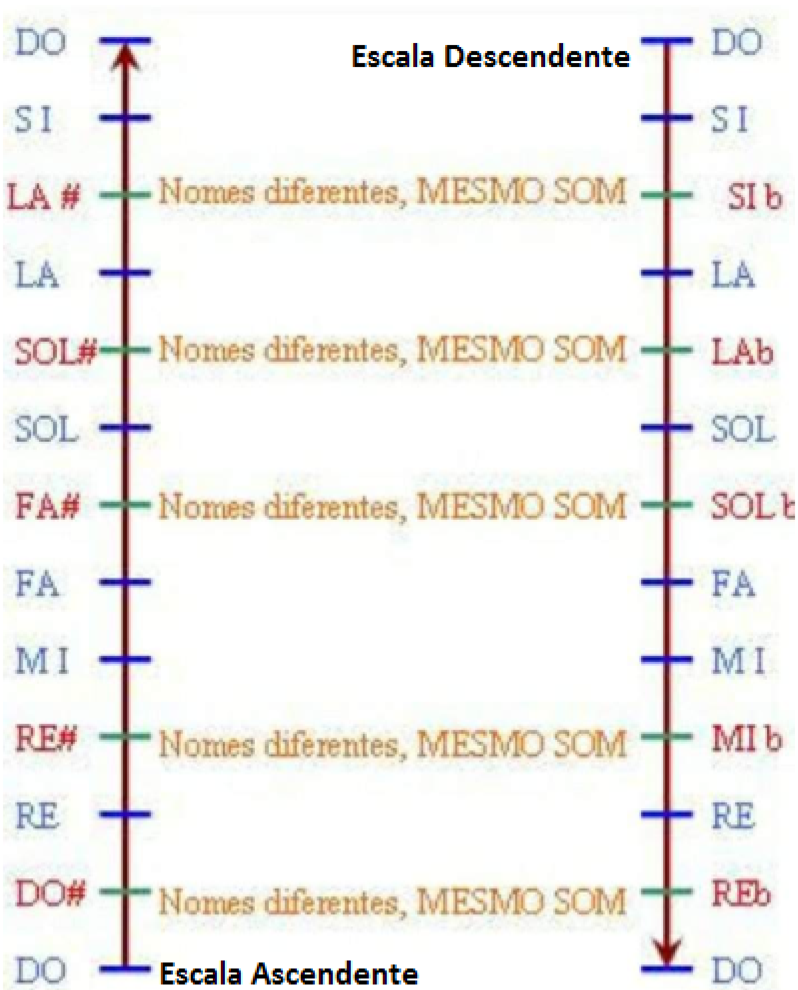


Figura 3.2: Enarmonia na Escala

3.2 Temperamento da Escala por Intervalos Iguais

Durante anos, por volta da Idade Média, a escala desenvolvida por Pitagóricos era a mais aceita pela comunidade musical no Ocidente, contudo havia outras. E outras estavam sendo desenvolvidas para tentar sanar as 'falhas' do modelo grego. Porventura até mesmo o próprio Pitágoras tinha percebido a diferença entre intervalos e as 'falhas' na sua escala, porém conjectura-se que, mesmo percebendo algumas discrepâncias, como o "coma pitagórico", nem Pitágoras nem seus discípulos pitagóricos poderiam "consertar o erro", já que eles não aceitavam, por assim dizer, os números irracionais, porque não poderiam ser representados como fração de números inteiros e assim contradiziam a base filosófica da sua escola, cujos membros acreditavam que todas as coisas no Universo poderiam ser representadas por números inteiros [15].

O caminho percorrido pela música ocidental conduzia a música à liberdade de modulação[3], porém a cada modificação tonal, fazia-se necessário uma certa simetria entre os intervalos, pois a mudança de tom poderia resultar numa escala com intervalos impuros.

Exemplo: Ao ajustarmos a afinação de um instrumento por intervalos de quintas puras ascendentes, partindo do Dó, temos: *dó-sol, sol-ré, ré-lá, lá-mi, mi-si, si-fá♯,fá♯-dó♯*, considerando-se a corda de comprimento 1, Dó♯ $= \dfrac{2048}{2187}$. Bem como se percorrermos os intervalos de quintas puras descendentes temos:

- Quinta de Dó$_2$: $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$, que corresponde a Fá$_1$
- Quinta de Fá$_1$: $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{16}$ que corresponde a Si$\flat_1$.
- Quinta de Sí$\flat_1$: $\dfrac{9}{16} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{32}$ que corresponde a Mi$\flat_1$.
- Quinta de Mi$\flat_1$: $\dfrac{27}{32} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{81}{64} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{81}{128}$ que corresponde a Lá$\flat_1$.
- Quinta de Lá$\flat_1$: $\dfrac{81}{128} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{243}{256}$ que corresponde a Ré$\flat_1$

Logo, as notas *Dó♯* e *Ré♭* que são enarmônicas, deveriam ter a mesma altura, porém se esbarra naquela pequena diferença chamada "coma pitagórica". Certamente essa diferença comprometera a afinidade harmônica. Isso significa, por exemplo que, ocorrendo modulação de Dó maior para Lá♭ maior, a música sofreria distorções intoleráveis nesse último cenário pois, o intervalo Fá♯-Ré♭ faltaria o coma pitagórico para completar o percurso [1].

Exemplo do quociente entre *Dó♯* e *Ré♭*: $\dfrac{243}{256} \div \dfrac{2048}{2187} = 1{,}01364326...$ equivalente ao coma pitagórico.

De fato, esse problema causaria transtorno na afinação de quintas puras. Por exemplo, na utilização de pianos, seria necessário teclas para cada tonalidade, ou seja, notas ré em contexto de Dó maior seria diferente da nota ré em contexto de ré maior e assim por diante. Tal tarefa seria como a de estabelecer diferentes formas para cada palavra, dependendo de seu significado em cada contexto. Esse modo seria impossível tecnicamente, pois seria necessário, por exemplo em um piano, aproximadamente 300

[3]Transposição (ou modulação) significa mudança de tonalidade, leva de uma tonalidade a outra num processo musical contínuo

teclas em cada uma das oito oitavas, ou seja, 2400 sons num instrumento. Portanto a diversidade tonal confrontava-se com a manutenção da afinidade harmônica nas escalas [1].

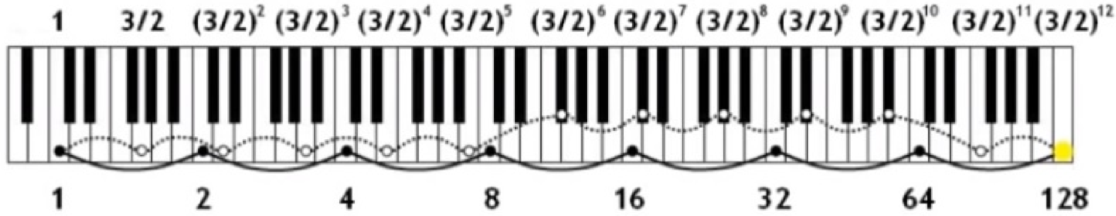


Figura 3.3: Diferença entre quintas puras e oitavas

Desde então, a matemática entra em ação numa tentativa de solucionar essa discussão entre a evolução cultural da música e a conservação de um caráter mais original e físico na música. Foram anos de experimento Chineses, indianos e gregos, na tentativa de encontrar uma distância comum nas escalas, respeitando a afinidade harmônica. Tal fato revelou que respeitando a afinidade harmônica sempre deixavam "restos"[4] [1]. Essa impossibilidade de solucionar o problema levantou à sugestão de um temperamento igual, ou seja, 'redução de alguns intervalos e aumento de outros, de modo a compensar os distintos percursos de intervalos iguais' [**MaxWeber**].

A ideia do temperamento da escala foi uma solução encontrada para corrigir esse problema de modulação, como também na afinação de instrumento de teclas, que passaram a ter livre transposição de tonalidades. Esse procedimento se conhece hoje como escala igualmente temperada ou, simplesmente, **Escala Temperada** abdounur2015matematica.

O nome completo da escala temperada é: ESCALA MUSICAL DODECAFÔNICA TEMPERADA. A expressão dodecafônica vem do grego: doódeka = doze, e fooné= som. A escala agora possuiria 12 notas, seriam incluídas 5 notas entre algumas das sete conhecidas e teriam intervalos igualmente espaçados. Esse temperamento foi apresentado em 1691, por Andréas Werckmeister e utilizado por J. S. Bach em O Cravo [5] Bem-temperado, uma obra composta em dois volumes na qual o músico faz um passeio por todos os doze tons da nova escala [15].

Matematicamente, o problema consistia em interpolar 11 termos geométricos entre as duas oitavas, ou seja, tomando uma frequência f e multiplicando por uma constante doze vezes, encontramos uma frequência 2f referente à sua oitava inicial, logo, podemos considerar essa sequência como uma progressão geométrica cujo primeiro termo é **f** e o último **2f**.

Para se obter a razão dessa progressão pela fórmula do termo geral de uma PG, temos:

$$\mathrm{a}_n = \mathrm{a}_1 \times q^{n-1}$$

[4] o sentido de resto é que a manutenção da pureza em alguns intervalos da escala implica na impureza em outros. Não é possível dividir a escala em intervalos puros.

[5] um instrumento de teclas, considerado o precursor do piano

$$2\mathrm{f} = \mathrm{f} \times q^{13-1}$$

$$\mathrm{q}^{12} = \frac{2.f}{f}$$

$$q = 2^{\frac{1}{12}} \cong 1{,}059463094$$

Considerando a nota dó$_1$ com frequência 1 como referência, obtemos para as outras notas da gama temperada Dó$\sharp$ = ré$\flat$ = $2^{\frac{1}{12}}$, ré = $2^{\frac{2}{12}}$,ré$\sharp$ = mi$\flat$= $2^{\frac{3}{12}}$,mi = $2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$, fá = $2^{\frac{5}{12}}$, fá$\sharp$ = sol$\flat$ $2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}$, sol = $2^{\frac{7}{12}}$, sol$\sharp$ = lá$\flat$ $2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}}$, lá = $2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}$, lá$\sharp$ = si$\flat$ = $2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}}$, si = $2^{\frac{11}{12}}$, dó$_2$ = $2^{\frac{12}{12}}$, = 2.

Na tabela abaixo (3.4) faz-se um comparativo entre o **temperamento pitagórico e a escala temperada** e pode-se perceber a pequena assimetria entre as mesmas.

NOTA	PITAGÓRICA	TEMPERADA
DÓ$_1$	1	1
DÓ$_1$#	2187/2048 = 1,068	1,05946
RÉ$_1$	9/8 = 1,125	1,12245
RÉ$_1$#	32/27 = 1,185	1,1892
MI$_1$	81/64 = 1,2656	1,2599
FÁ$_1$	4/3 = 1,3333	1,3348
FÁ$_1$#	729/512 =1,424	1,4142
SOL$_1$	3/2 = 1,5	1,49825
SOL$_1$#	6561/4096 = 1,6	1,5873
LÁ$_1$	27/16 = 1,6875	1,6817
LÁ$_1$#	16/9 = 1,777	1,7817
SI$_1$	243/128 = 1,8984	1,8877
DÓ$_2$	2	2

Figura 3.4: Frequência relativas

Note-se que, na escala temperada, os intervalos têm frequências iguais, logo, cada nota a partir da segunda é a anterior multiplicada pelo valor de $2^{\frac{1}{12}}$. Portanto há um aumento de aproximadamente 5,95% na frequência em relação à nota anterior [15].

Vale lembrar que a referência aqui adotada para a frequência 1 ao Dó$_1$ é apenas um referencial. De acordo com o padrão de frequência atual, essa nota, a primeira tecla do piano, tem frequência 32,7Hz. Já a nota padrão universal para afinação de grande parte dos instrumentos e também usada para afinação de orquestra é a nota Lá$_4$, cuja frequência é 440Hz. No piano, o Lá$_4$ fica logo após o Dó$_4$, o Dó central, já que o teclado abrange oito oitavas. No violino são quatro cordas afinadas em quintas, a segunda corda de baixo para cima, equivale a Lá$_4$ e é usada como referência de afinação das quintas.

Tomando-se o Lá$_4$ como referência, podemos calcular as frequências de cada uma da notas anteriores e posteriores multiplicando-se ou dividindo-se por 1,05946, respectivamente.

Vejamos os valores da tabela abaixo, valores aproximados:

NOTA	TEMPERADA
DÓ$_4$	f = 261,6 Hz
DÓ$_4$#	f = 277 Hz
RÉ$_4$	f = 294 Hz
RÉ$_4$#	f = 311 Hz
MI$_4$	f = 330 Hz
FÁ$_4$	f = 349 Hz
FÁ$_4$#	f = 370 Hz
SOL$_4$	f = 392 Hz
SOL$_4$#	f = 415 Hz
LÁ$_4$	**f = 440 Hz**
LÁ$_4$#	f = 466 Hz
SI$_4$	f = 494 Hz
DÓ$_5$	f = 523 Hz

Figura 3.5: Frequências absolutas

Portanto o menor intervalo entre dois sons consecutivos na escala temperada é denominado **semitom** e equivale a $2^{\frac{1}{12}}$ e um **Tom** é formado por dois semitons.

3.2.1 Curiosidades sobre as notas e a notação musical

Como na matemática, a música com suas figuras e notações ultrapassam fronteiras de diferentes idiomas, de modo que pode ser expressa como se fosse uma 'língua' própria. O sistema de notação musical sofreu transformações até chegar aos dias atuais. Há milhares de anos foram encontradas evidências arqueológicas de notação musical em que consistia de símbolos e letras. Para [7] a escrita do ritmo teve o seu desenvolvimento ao longo de trezentos anos, nos quais tiveram várias versões e interpretações tanto a grafia [6] quanto a performance musical.

O Epitáfio de Seikilos é um exemplo da notação musical praticada durante a Grecia Antiga.

[6] figuras musicais

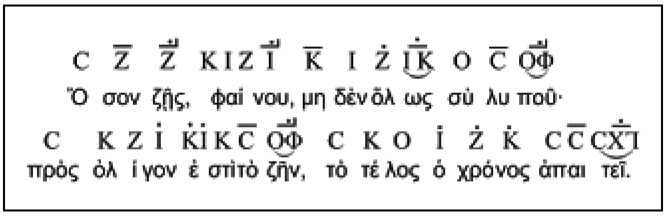


Figura 3.6: Epitáfio de Seikilos

O elemento básico de um sistema de notação musical é a nota, cuja principal função é indicar a propriedade do som referente à duração e altura. Segundo [17] a definição de duração e altura são:

- Duração é a propriedade do som ser curto ou longo.
- A altura consiste na maior ou menor elevação do som e depende do maior ou menor número de vibrações executadas num tempo dado, ou seja, é a propriedade do som ser **grave**, **médio** ou **agudo**.

Para representar as várias durações dos sons musicais, as notas são escritas sob formas diferentes. Essas diversas formas de notas usadas nos dias atuais são essas da figura abaixo:

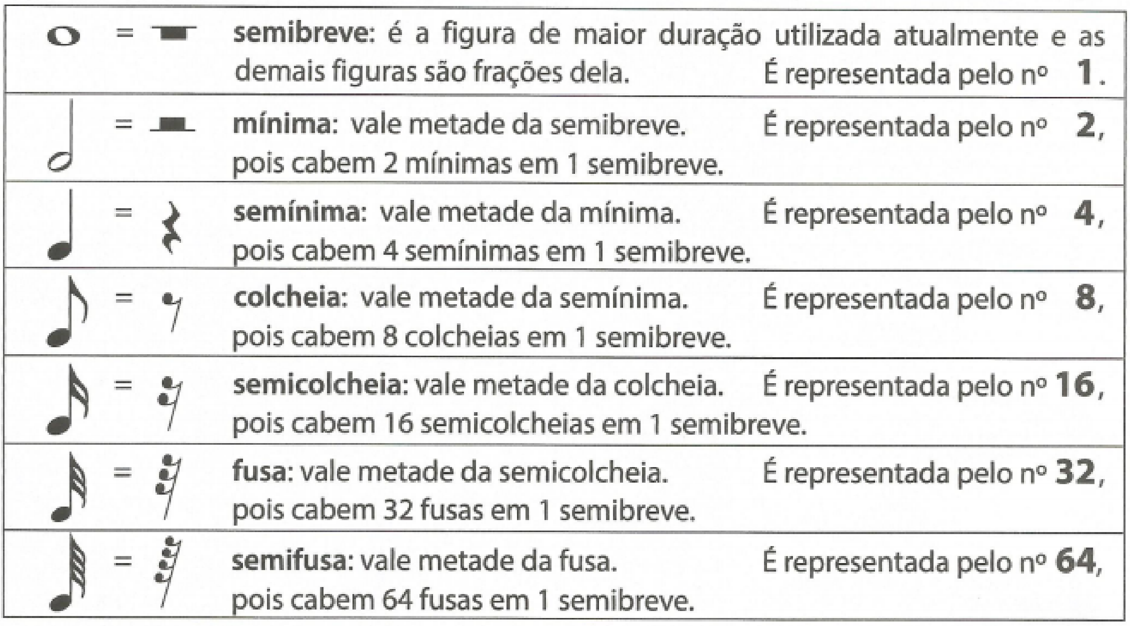


Figura 3.7: Escrita musical

As notas musicais são apenas sete: *Dó*, *Ré*, *Mi*,*Fá*, *Sol*, *Lá*, *Si*. E, como citado na construção da escala temperada, existem também as variações devido aos "acidentes musicais", conhecidos por *bemóis* e os *sustenidos*.

O acidente é um sinal que colocado posteriormente à nota, altera sua entoação. O sustenido (considerado elevação ascendente) é representado pelo símbolo "$\sharp$" e eleva a altura da nota em um semitom. E o bemol (alteração descendente) que é representado por ”$\flat$” abaixa a altura da nota em um semitom. Essas notas ficam entre o intervalo de notas naturais que se diferem em um tom.

Como por exemplo entre as notas *Dó-Ré*, *Ré-Mi*, *Fá-Sol*, *Sol-Lá* e *Lá-Si*. Portanto, o ’alfabeto’ musical é composto por 12 notas, 7 notas naturais e 5 acidentes.

Como para elevar a altura em um semiton usamos o sustenido e abaixar, usamos o bemol. Há notas que vão possuir nomes diferentes e alturas iguais, essas notas serão chamadas de **enarmônico** [7].

Exemplo de enarmonia nas teclas de um teclado:

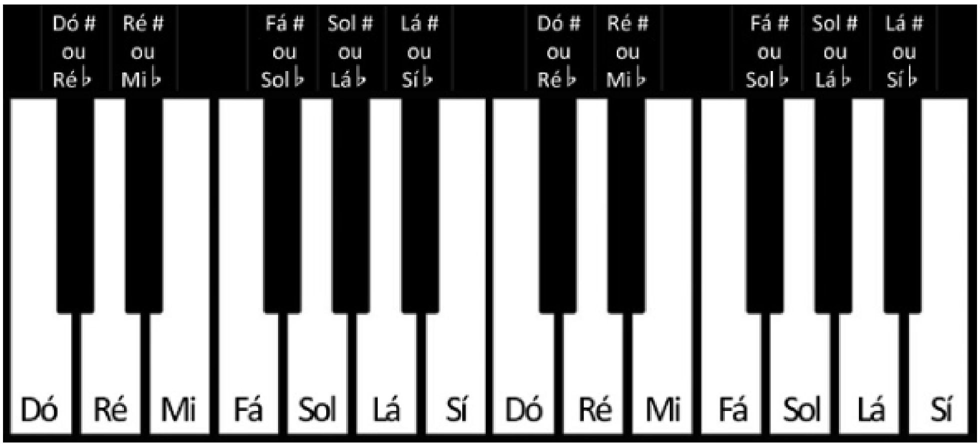
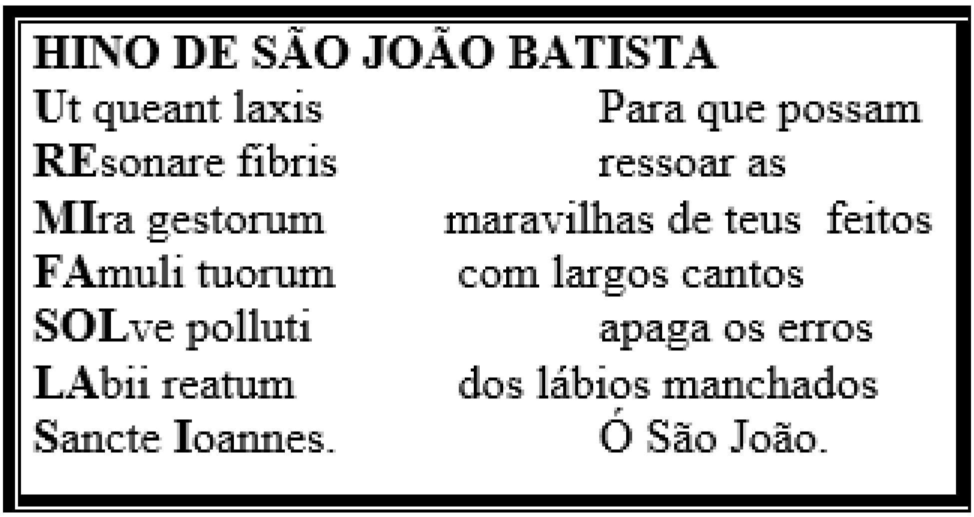


Figura 3.8: Notas Enarmônicas

O nome dado as notas musicais conhecidas nos dias de hoje, se deve ao monge benedito Guido D’Arezzo, músico do século XI. Guido D’Arezzo deu nome às notas usando as sílabas iniciais de um hino a São João Batista conforme figura (3.9), o qual era cantado por um coral à época. Ele tinha por costume cantar esse hino antes de suas apresentações em público, pedindo a São João Batista que protegesse sua voz.


HINO DE SÃO JOÃO BATISTA

Ut queant laxis	Para que possam
REsonare fibris	ressoar as
MIra gestorum	maravilhas de teus feitos
FAmuli tuorum	com largos cantos
SOLve polluti	apaga os erros
LAbii reatum	dos lábios manchados
Sancte Ioannes.	Ó São João.

Figura 3.9: Hino a São João Batista

[7]é o intervalo uníssono(dois sons de mesma altura) com nomes de notas diferentes

Como era de difícil entonação, o **Ut** foi substituído por **Dó**. Mas antes dessa nomenclatura que é latina, haviam outras, como os gregos que denominavam os sons pelas letras do alfabeto. Os graus da escala eram A,B,C, etc. Não muito fundamentado, o som representado pela letra A tinha frequência próxima do som da nota Lá. Portanto, a relação letras e notas perduram até os dias de hoje e são denominadas **cifras**.

C	D	E	F	G	A	B
DÓ	RÉ	MÍ	FÁ	SOL	LÁ	SI

4

Conceitos físicos e matemáticos do som

Na física, onda é toda perturbação que se propaga em um meio. Na propagação a energia é transportada, sem transporte de matéria. Como por exemplo: ao atirarmos uma pedra em um lago, esta causa uma perturbação na água (meio) que se propaga de maneira contínua, ponto a ponto na superfície do lago.

As ondas podem ter natureza mecânica ou eletromagnética. A primeira resulta de deformações provocadas em meios materiais elásticos, ou seja, necessita de um meio material para se propagar; a segunda, não. O som são ondas de natureza mecânica, pois necessitam de meios para se propagarem. Existem vários meios, como o ar, um líquido, um gás ou um sólido.

4.1 Ondas Sonoras

O som se propaga como uma onda, a qual é chamada onda sonora. A representação gráfica de uma onda discorre uma curva em que seu comportamento se repete a um certo período, logo, é periódica e por exemplo pode ser representada por uma senoide, já que cada som concreto corresponde na realidade, não a uma onda pura, mas a um feixe de ondas. Uma superposição intrincada de frequências de comprimento desigual. Cada onda sonora é única pois tem algumas características próprias, tais como: velocidade, frequência, amplitude e comprimento [23].

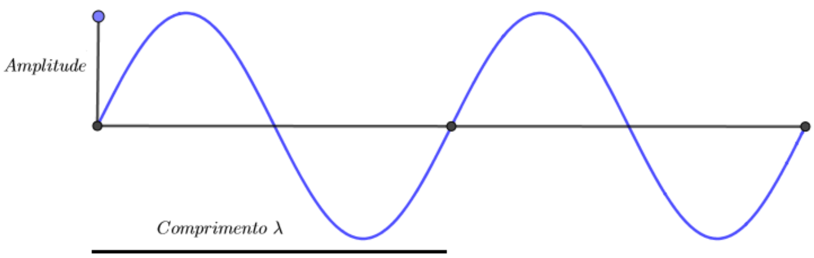


Figura 4.1: Onda Sonora

- **Amplitude**: É a distância entre o eixo da onda até a crista [1] ou até o vale [2]. A

[1] o ponto local de máximo
[2] o ponto local de mínimo

amplitude correlaciona-se diretamente com a nossa percepção de intensidade [3] sonora, por exemplo sons mais intensos serão resultado de uma maior amplitude. A intensidade do som é medida em decibéis (dB) [4]

- **Frequência**: É o número de oscilações da onda num período de tempo. A unidade mais comum é do Hertz (Hz) [5], que significa ciclos por segundo. Como por exemplo, uma frequência de 80 Hz, indica que a onda completa 80 ciclos em 1 segundo. Musicalmente, a frequência relaciona-se com a percepção de alturas, o quão grave ou agudo um som seja. Estima-se que o ouvido humano consegue captar frequências que variam de 20 a 20000 Hz, considerada a faixa audível. Portanto a faixa audível compreende aproximadamente 10 oitavas. Matematicamente, se uma nota de frequência 2**f** corresponde a uma oitava de frequência **f**, então:

$$\mathbf{f} = 20 \rightarrow f_n = f_1 \cdot 2^n \rightarrow 20 \cdot 2^n = 20000 \rightarrow 2^n = 1000 \rightarrow n \approx 10. \quad (4.1)$$

pereira2013matematica

Exemplos de frequência:

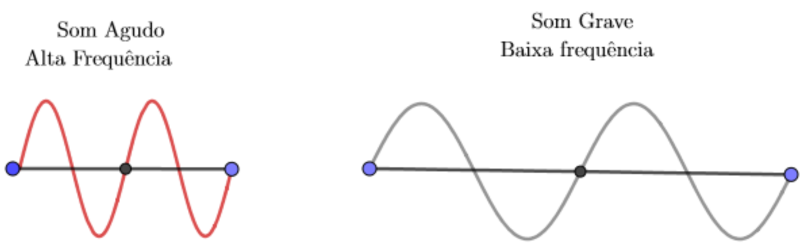


Figura 4.2: Exemplos de frequência

- **Período**: É o tempo (T) para se completar um ciclo de onda. O período (T) é medido em segundos. O período e a frequência, por definição são grandezas inversas. Ou seja: f: $\frac{1}{T}$

- **Comprimento**: É a distância percorrida pelo som durante o perído de vibração. Pode ser medido entre uma crista e outra ou um vale e outro. É representado pela letra grega λ (Lambda).

- **Velocidade**: A velocidade de uma onda é a razão entre a distância percorrida pelas ondas e o tempo gasto. Os livros de Física do Ensino Médio, em geral,

[3] é a propriedade do som ser fraco ou forte(volume do som)

[4] A escala de decibéis é uma escala logarítima, em que a duplicação da pressão do som corresponde a 6 decibéis no aumento de nível. É necessário entender que o termo dB pode ter diferentes significados e não tem um uma unidade fixa como as relacionadas a voltagem, metro, e afins. A unidade de dB vai depender do contexto em que ela é utilizada.

[5] Hertz é um nome dado para representar a unidade de frequência, e costuma ser abreviado para "Hz"

adotam o valor de aproximadamente $343m/s$ para a velocidade do som no ar com temperatura de 20°C.

A equação da velocidade constante de uma onda é:

$$v = \frac{distância}{tempo} = \frac{\lambda}{T}.$$

Como a frequência f $= \frac{1}{T}$, temos:

$$v = \lambda \cdot f$$

A partir dessa equação matemática, se pode concluir uma propriedade importante da onda, já descoberta por Pitágoras em seus experimentos.

"A frequência é inversamente proporcional ao comprimento da onda."

Outra característica importante do som que está relacionada com a qualidade do mesmo som é o **timbre**. Este permite distinguir sons de mesma intensidade e mesma altura emitidos por fontes diferentes. Por exemplo, o som emitido por uma nota musical de mesma altura e intensidade por um piano é diferente do emitido por um violino. Isso acontece porque cada instrumento ou voz produz ondas de formato singular.

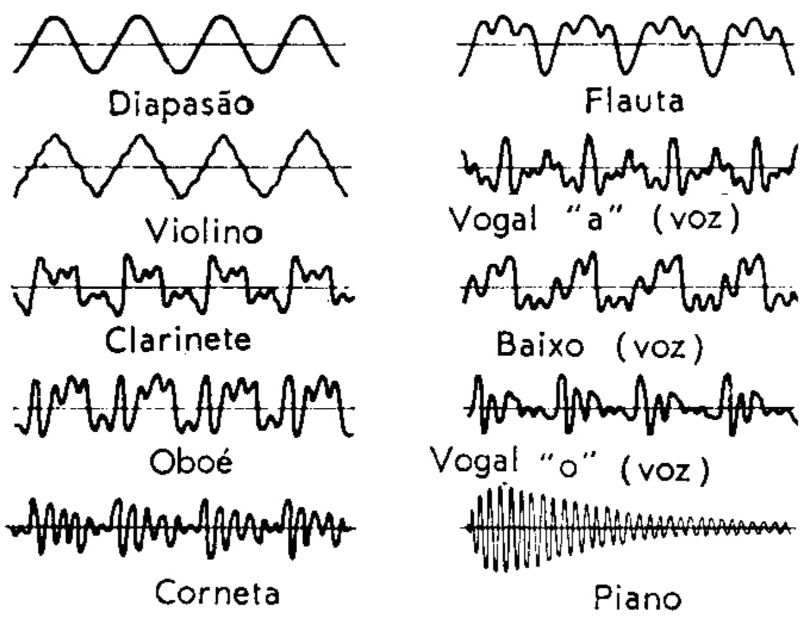


Figura 4.3: Formatos de ondas

É importante destacar a expressão matemática de uma onda, em particular as ondas senoidais que são resultados de oscilações em um movimento harmônico simples (MHS), para melhor compreensão do que será discutido posteriormente.

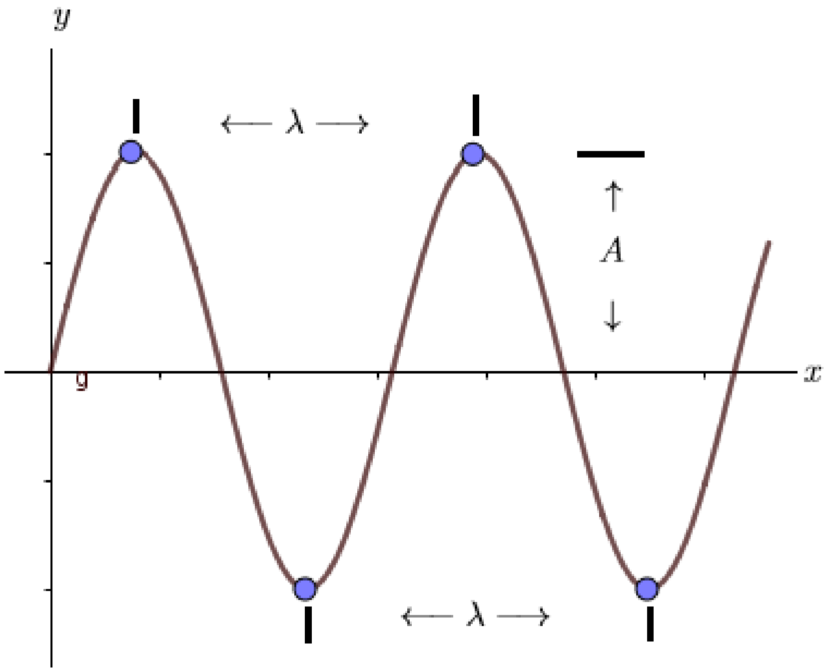


Figura 4.4: Onda Senoidal

Considere a onda senoidal na figura 4.4, que mostra a posição da onda em $t = 0$. Como a onda é uma senoide, a função da onda nesse instante deve ser expressa como $y(x{,}0) = A\,\mathrm{sen}(ax)$, onde A é a amplitude, e a, a constante a ser determinada. Em $x = 0$, percebemos que $y(0{,}0) = A\,\mathrm{sen}(a0) = 0$, equivalente com a figura 4.4. O próximo valor de x para que y seja igual a 0 é $x = \frac{\lambda}{2}$. Então:

$$y(\frac{\lambda}{2}{,}0) = A\,\mathrm{sen}(a\frac{\lambda}{2}) = 0 \tag{4.2}$$

Para que essa expressão seja válida, devemos ter $a\frac{\lambda}{2} = \pi$, portanto $a = \frac{2\pi}{\lambda}$. Sendo assim, a onda senoidal é representada matematicamente pela função:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{\lambda}x) \tag{4.3}$$

onde a constante A representa a amplitude da onda e λ seu comprimento de onda, y é o deslocamento em uma posição qualquer x e $\frac{2\pi}{\lambda}$ influencia diretamente no seu período e é chamado número de onda.

É possível verificar que quando o valor de x é aumentado por um comprimento de onda múltiplo de λ em um intervalo de tempo Δt igual a um período t, teremos que:

$$y = A\,\mathrm{sen}[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{\delta t}{T})] \tag{4.4}$$

Essa forma da função da onda mostra a natureza *periódica* de y.

O som, contudo, é um dos fenômenos ondulatórios na natureza que não pode ser representado por uma única onda e sim por uma combinação de ondas progressivas.

Portanto, ao tocar uma nota musical em um determinado instrumento, ela é composta por superposição de vários sons de frequências distintas. Essa série de sons é denominada Série Harmônica [18].

4.2 Séries Harmônicas

Tal como a luz branca evidencia distintas cores ”silenciosas” quando ultrapassa um prisma, um som também possui sons ocultos de frequências secundárias mais agudas que nossos ouvidos precisam ser educados para enxergá-los. Os harmônicos de uma nota musical são sons parciais que soados simultaneamente caracterizam o instrumento musical, isto é, a fonte que deriva o som. Já a Série Harmônica de uma nota, caracteriza-se pela sequência desses sons parciais, ordenados do grave ao agudo.

A qualidade sonora ou timbre da nota musical ouvida está relacionada pelo peso relativo desses harmônicos, logo, a sonoridade de um instrumento musical ou de uma voz humana, apresenta-se tanto mais brilhante quanto maior sua riqueza em harmônicos superiores.

Nenhum instrumento musical admite som puro. O dispositivo que mais se aproxima de um som puro é o diapasão.

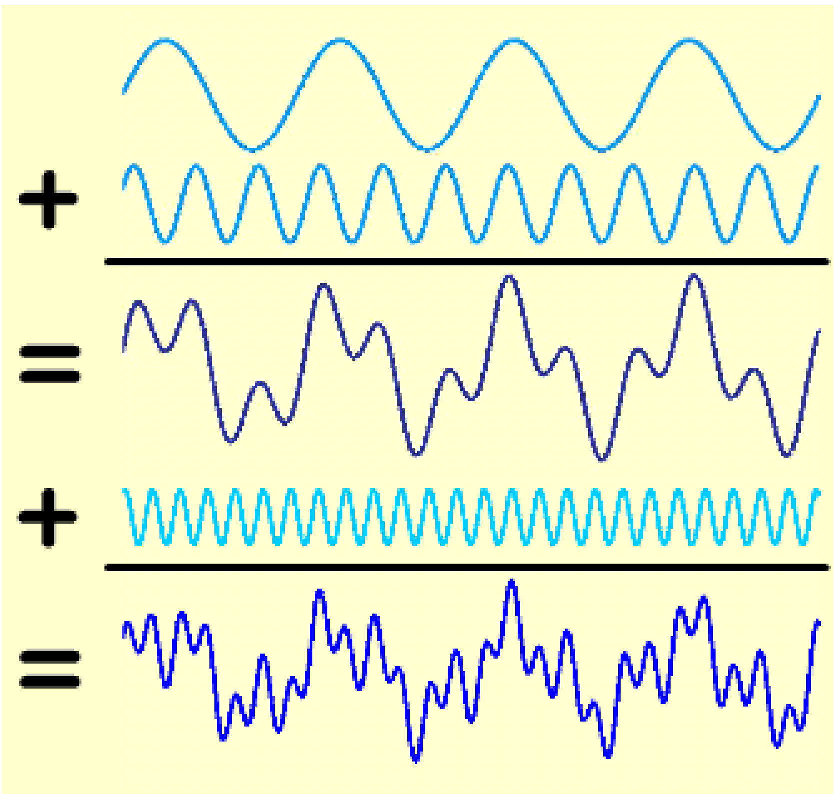


Figura 4.5: Formação de sons compostos a partir de sons puros

Quando uma corda é tocada, ela vibra em sua extensão total, em seguida vibra em sua metade, em sua terça parte, quarta parte e assim por diante conforme figura 4.6, produzindo sons mais agudos. Porém com menor intensidade. Essa ideia foi vista por Pitágoras em seu experimento com o monocórdio.

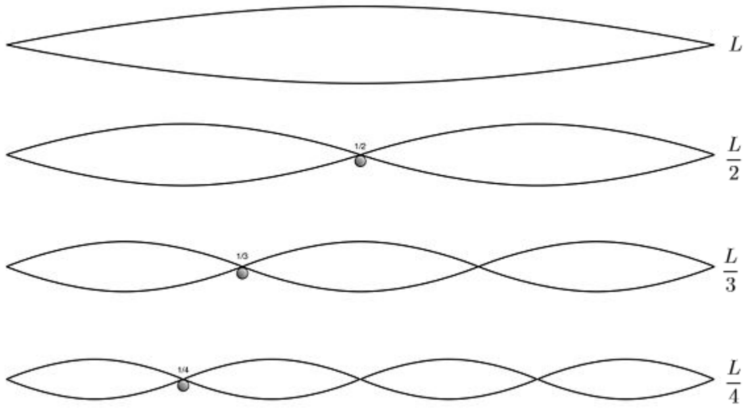


Figura 4.6: Vibrações de uma corda de comprimento L

Como mencionado anteriormente, o comprimento da corda é inversamente proporcional a frequência do som emitido. O som fundamental (primeiro harmônico) é o que possui menor frequência. Já o segundo harmônico possui o dobro da frequência. O terceiro, o triplo e assim sucessivamente. Portanto a série harmônica obedece o seguinte padrão: $f_1, 2f_1, 3f_1, ...$. Pode-se então, representar matematicamente a série harmônica de uma nota musical, a partir de uma função periódica através de uma soma de funções senos:

$$f(x) = k_1 \operatorname{sen}(2\pi \cdot f_1) + k_2 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 2f_1) + k_3 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 3f_1) + ... \tag{4.5}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}(2\pi \cdot n f_1 x) \tag{4.6}$$

De modo que k_n representa a intensidade (amplitude) dos harmônicos e $n \cdot f_1$ a frequência de cada harmônico fundamentado pela frequência f_1. É importante salientar que, a sequência k_n decresce à medida que n cresce pois, os harmônicos são menos intensos cada vez que a frequência aumenta linearmente. Vale destacar que o coeficiente k_n é fator fundamental na percepção da fonte sonora.

Vamos exemplificar a construção de série harmônica para uma nota musical, tocada por dois instrumentos distintos com a mesma intensidade k_1.

Suponhamos a nota Sol_1 com frequência aproximada $50Hz$. As alturas dos harmônicos superiores serão: $50Hz$, $100Hz$, $150Hz$, $200Hz$, etc, em que $100Hz$, $200Hz$, $400Hz$ determinam a frequência das oitavas subsequentes. Os harmônicos k_{n+1} foram escolhidos aleatoriamente, de maneira que estejam decrescendo a cada harmônico.

Instrumento A

$$f(x) = 4 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 50 \cdot x) + 2 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + \frac{1}{200} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 150 \cdot x) + \frac{1}{500} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) + ...$$

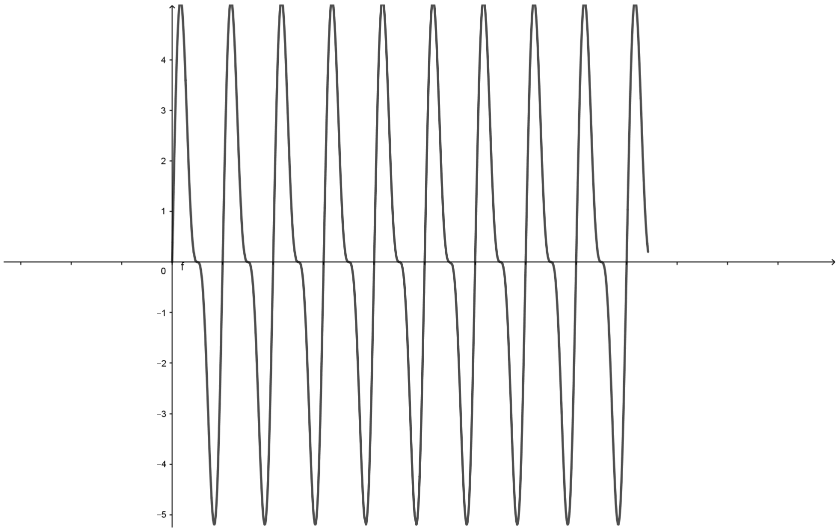


Figura 4.7

Instrumento B

$$f(x) = 4\,\text{sen}(2\pi \cdot 50 \cdot x) + 3\,\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 2\,\text{sen}(2\pi \cdot 150 \cdot x) + \frac{1}{10}\,\text{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) + ...$$

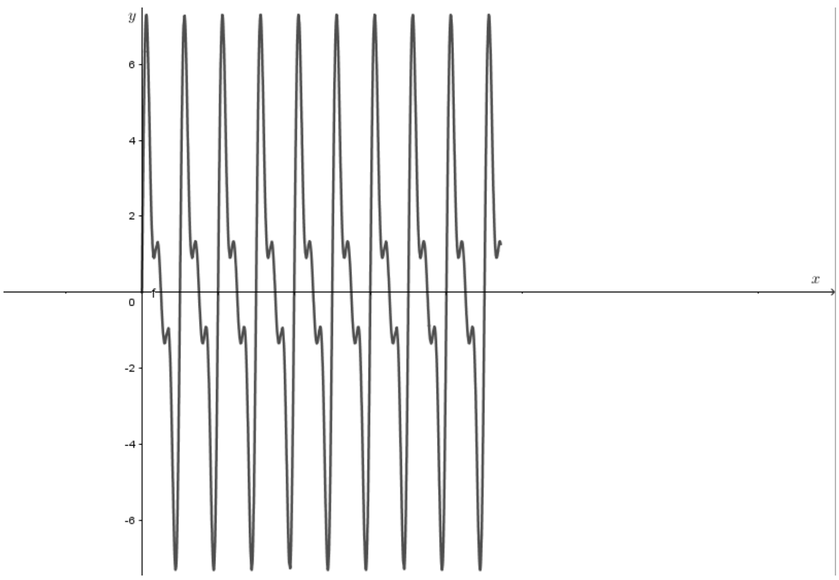


Figura 4.8

Pode-se perceber que as duas funções começam com o mesmo coeficiente k_n do harmônico fundamental, sons tocados com a mesma intensidade. Já os harmônicos subsequentes podem variar de acordo com cada instrumento e são fatores determinantes na qualidade sonora, ou seja, o timbre resulta da intensidade e qualidade dos harmônicos que acompanham o som fundamental. No entanto, como comprovar que os dois gráficos representam a mesma nota, visto que são diferentes entre si?

É evidente pelo gráfico que as funções são periódicas. Por definição, período e frequência são grandezas inversas. Consequentemente, se provarmos que as duas têm o mesmo período, então se prova que tem a mesma frequência, logo, representam o mesmo som, mesma altura.

Dizemos que f é uma função periódica de período T, se

$$\exists\, T \in \mathbb{R} \backslash \forall x \in D(f),\ f(x) = f(x+T),$$

Portanto, se T é um período para f, então $2T$ também é um período, pois

$$f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$$

Queremos mostrar que, se f é periódica então:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(ix)\ \textit{também é periódica de}\ \text{período}\ T$$

De fato:

$$g(x+T) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(i(x+T)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(ix+iT) = \sum_{i=1}^{\infty} f(ix) = g(x)$$

Logo, $g(x)$ é periódica, com período submúltiplo de T.

Como a frequência e período são grandezas inversas, isto é:

$$f = \frac{1}{T} \Longleftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

então, para uma função do tipo $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi f_1 \cdot x)$, podemos escrever $g(x)$ da seguinte forma:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \operatorname{sen}(2\pi i f_1 \cdot x).$$

Temos que f é periódica de período $T = \dfrac{2\pi}{c} = \dfrac{2\pi}{2\pi f_1} = \dfrac{1}{f_1}$

Assim, como queríamos demonstrar, $g(x)$ é periódica de período T, com frequência f_1, que é a frequência da nota tocada nos dois instrumentos acima.

Por fim, vale ressaltar que os padrões de ondas produzidas por instrumentos, não são ondas senoidais, mas a onda sonora tem característica periódica, permitindo representá-las com precisão arbitrária como uma série de termos de seno e de cosseno. A soma desses termos que representam a forma de onda periódica é denominada Série de Fourier, tema do próximo capítulo.

5

As Séries de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), o inventor/descobridor das assim chamadas Séries de Fourier. Ele chegou até suas séries trigonométricas quando estudava a propagação de calor em corpos sólidos, que mais tarde publicara sua *Theórie analytique de la chaleur*, que significa Teoria Analítica do Calor. Nesse seu estudo, Fourier alcançou um resultado que até então passou despercebido por gênios de sua época como, Bernoulli e Euler. Fourier mostrou que qualquer função pode ser decomposta como uma soma de senos e cossenos com amplitudes, fases e períodos escolhidos adequadamente.

Este capítulo trata-se de abordar as definições, conceitos e exemplos relacionados às Séries de Fourier. Para melhor entendimento é necessário recordar algumas propriedades elementares dos vetores e uma breve discussão sobre Ortogonalidade de funções.

5.1 Produto Interno

Definição 5.1: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Um *produto interno* sobre V é uma função $\langle\, , \rangle : V \text{x} V \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes quatro proriedades:

$(P1)$ $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall\, u, v, w \in V.$
$(P2)$ $\langle \lambda\, u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, u, v \in V.$
$(P3)$ $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle},\ \forall\, u,v \in V.$
$(P4)$ $\langle u,u\rangle > 0, \text{se}\, u \neq 0.$

OBSERVAÇÕES

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\, , \rangle$.

a) Prossegue das propriedades acima que

- $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0,\ \forall\, v \in V.$
- $\langle v,v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0.$

b) Veja que vale

$(P5)\,\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle \;+\; \langle u,w\rangle,\;\forall\, u,v,w\,\in V.$
De fato, utilizando as propriedades (P1) e (P3), teremos, para $u,v,w\,\in V$, que

$\langle u,v+w\rangle = \overline{\langle v+w,u\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle \;+\; \langle w,u\rangle}$
$= \overline{\langle v,u\rangle} \;+\; \overline{\langle w,u\rangle} = \langle u,v\rangle \;+\; \langle u,w\rangle.$

c) Utilizando as propriedades (P2) e (P3), chega-se a
$(P6)\,\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u,v\rangle,\forall\,\lambda\,\in\mathbb{K},\forall\, u,v\,\in\,V.$
De fato, se $\lambda\,\in\,\mathbb{K}\, e\, u,v\,\in\,V$, temos que

$\langle u,\lambda v\rangle =\; \overline{\langle\lambda v,u\rangle} = \overline{\lambda\langle v,u\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle v,u\rangle} = \overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle.$

d) Usando as propriedades acima, teremos também que

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\overline{\beta}_j\langle u_i,v_i\rangle$$

para $u_i,\; v_j\;\in\;V$ e $\alpha_i,\beta_j\;\in\;\mathbb{K},\; i=1,...,n$ e $j=1,\;...,m.$ [3]

Exemplo 5.1.1: Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V = C([a,b],\mathbb{K})$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$. As regras de interação garantem que

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x).g(x)dx$, para $f,g\in V$,

é um produto interno, já que satisfaz as quatro propriedades.

Demonstração.

$$\begin{aligned}(P1)\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f+g)(x).h(x)dx\\ &= \int_a^b [f(x)+g(x)].h(x)dx\\ &= \int_a^b [f(x)h(x)]dx + \int_a^b [g(x)h(x)]dx\\ &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(2)\langle\lambda f,g\rangle &= \int_a^b \lambda f(x)g(x)dx\\ &= \lambda\int_a^b f(X)g(x)dx\\ &= \lambda\langle f,g\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3)\langle f,g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x)dx \\ &= \langle g,f\rangle \end{aligned}$$

P(4) $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)^2 dx$

Temos que $f(x_0)^2 > 0$ para algum x_0. Como f é contínua, $f^2 > 0$ em um intervalo de x_0. Logo,
$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)^2 > 0$ e temos,
$\langle f,f\rangle > 0$ se $f \neq 0$

□

É chamado de *produto interno canônico* em $C([a,b],\mathbb{K})$.

Definição 5.2: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\, , \rangle$. Para cada $v \in V$, chamamos de *norma de* v ao número real dado por $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

OBSERVAÇÃO
Seja V um espaço vetorial com produto interno. Segue diretamente das definições envolvidas que
(a) $||u|| \geq 0, \forall u \in V$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
(b) $||\alpha u|| = |\alpha|\; ||u||, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall\, u \in V$. [3]

5.2 Funções Ortogonais

Definição 5.3: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\, , \rangle$ e sejam $u\, ,v \in V$. Dizemos que u, e v são ortogonais se $\langle u,v\rangle = 0$. Um subconjunto $\mathbb{A}$ de V é chamado de ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que $\mathbb{A}$ é um conjunto ortonormal se for um conjunto ortogonal e se $||u|| = 1, \forall\; u \in \mathbb{A}$

Exemplo 5.2.1: Seja $V = C([0,2\pi],\mathbb{R})$ munido do produto interno canônico. O conjunto

$$\mathbb{A} = \{f_n \in V : f_n(x) = \cos nx, n \in \mathbb{N}\}$$

é ortogonal. De fato, se tomarmos $< f_n,f_m >$ para $n,m \in \mathbb{N}$, teremos que

$$\int_0^{2\pi} (\cos nx . \cos mx)dx = \begin{cases} 0, & se\;\; m \neq n \\ \pi, & se\;\; m = n \\ 2\pi, & se\;\; m = n = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

[3]

Assim, dizemos que f e g são ortogonais em um intervalo $[a,b]$ se, e somente se,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \tag{5.2}$$

A expressão $\int_a^b f(x)g(x)dx$ é frequentemente chamada produto escalar ou produto interno de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Exemplo 5.2.2: As funções $p(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $q(x) = \operatorname{sen}(5x)$ no interlavo $[0,\pi]$ são ortogonais?

Solução:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(5x)dx$$

Para integração, vamos recordar a transformação do produto de senos em soma: Identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \tag{5.3}$$

Demonstração.

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ (I)

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ (II)

Subtraindo $II - I$ temos:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

Então,

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

□

Assim,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(5x)dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{cos(x-5x) - cos(x+5x)}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(-4x) - \cos(6x)]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(4x)}{4} - \frac{\text{sen}(6x)}{6}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\text{sen}(4\pi)}{4} - \frac{\text{sen}(6\pi)}{6}\right] - \left[\frac{\text{sen}(0)}{4} - \frac{\text{sen}(0)}{6}\right]\right\} = 0$$

Portanto, $p(x) = \text{sen}(x)$ *e* $q(x) = \text{sen}(5x)$ são ortogonais em $[0,\pi]$.

Um subconjunto A de V um espaço vetorial, é chamado de *ortogonal* se os seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que A é um conjunto *ortonormal* se for um conjunto ortogonal e se $||u|| = 1$, $\forall u \in A$. Estendendo esse conceito, dizemos que uma função $F(x)$ é normal em $[a,b]$ se,

$$\int_a^b F(x)^2 dx = 1 \tag{5.4}$$

Assim, um conjunto de funções ϕ_k, para $k = 1,2,3,...$, com as propriedades

$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_t(x)dx = 0, \quad \text{para } k \neq t$$

$$\int_a^b \phi_k(x)^2 dx = 1, \quad \text{para } k = 1,2,3,...$$

é chamado *ortogonal* e *ortonormal* respectivamente no intervalo [a,b] [21].

Exemplo 5.2.3: Mostre que quaisquer duas funções do conjunto

$$\{\text{sen}(x), \text{sen}(2x), \text{sen}(3x),..., \text{sen}(nx)\}$$

são ortogonais em $[-\pi,\pi]$.

Demonstração. Sejam $\text{sen}(mx)$ *e* $\text{sen}(nx)$, *com* $m,n \in \mathbb{N}$ *e* $m \neq n$, então,
Queremos verificar se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx)dx = 0$$

Substituindo a identidade 5.3, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} dx$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n}-\frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$\square$

Um vetor u qualquer pode ser expandido em um conjunto de vetores unitários ortogonais entre si, logo considerando a possibilidade de expandir uma função $F(x)$ em um conjunto de funções ortonormais. Temos,

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k(x) \quad a\leq x\leq b \tag{5.5}$$

essa série denominada de *série ortonormal* são generalizações das séries de Fourier.

5.3 Séries de Fourier

Chamamos de *Série Trigonométrica* uma série da forma:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos(x)+b_1\operatorname{sen}(x)+...+a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)+..., \tag{5.6}$$

(O primeiro termo é escrito na forma $\frac{a_0}{2}$ por conveniência para simplificar certas fórmulas que aparecem adiante.) Exemplo,

$$1+\frac{cos(x)}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}(x)}{1^2}+...+\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}+... \tag{5.7}$$

é uma Série Trigonométrica. Esta série converge para todo x, por comparação com a série:

$$1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+...$$

Suponha que uma Série Trigonométrica do tipo (5.6) converge para todo x e seja $f(x)$ sua soma. Logo, f possui a propriedade importante da periodicidade, com período 2π, ou seja:

$$f(x+2\pi)=f(x), \quad \textit{para todo } x \tag{5.8}$$

pois

$$f(x+2\pi) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x+2\pi) + b_1\,\text{sen}(x+2\pi) + ... + a_n\cos(nx+2\pi) +$$
$$b_n\,\text{sen}(nx+2\pi) + ...$$
$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\,\text{sen}(x) + ... + a_n\cos(nx)$$
$$+ b_n\,\text{sen}(nx) + ...$$
$$= f(x)$$

Podemos obter uma classe extensa de séries convergindo para funções periódicas ao variarmos os coeficientes em (5.6). Portanto é notável que essencialmente todas as *funções periódicas (período 2π)* podem ser obtidas desta maneira.

Essa afirmação matemática equivale a uma observação física comum. Se pensarmos em x como "tempo", então um termo $a_k\cos(kx)$ na série (5.6) pode ser explicado como uma função descrevendo uma oscilação senoidal, como a de uma mola ou de um pêndulo. Este movimento tem período $\dfrac{2\pi}{k}$ na unidade de tempo escolhida. De modo análogo o termo $b_k\,\text{sen}(kx)$ representa um movimento semelhante, de mesmo período (os máximos e mínimos ocorrem em tempos diferentes). No entanto os dois termos juntos representam uma oscilação senoidal geral de período $\dfrac{2\pi}{k}$. Esta oscilação completa k ciclos em um intervalo de tempo de 2π unidades. Então, com menção a este intervalo de tempo, dizemos que a oscilação tem *frequência* k [6].

Acrescentando termos como estes, $k = 1,2,3,...$, estamos harmonizando oscilações senoidais de diferentes frequências, mas todos com período 2π, de modo que a soma tem período 2π. Desse modo, a asserção matemática feita acima corresponde a afirmação física de que toda oscilação de período 2π é uma combinação de oscilações senoidais de frequências 1,2,3,....

Uma boa ilustração de uma situação física são as vibrações de um ponto numa corda de violino. Ao ativar a corda, ocorre um movimento oscilatório. Esse movimento é uma combinação de frequências 1 (tom[1] fundamental), 2 (oitava ou primeiro harmônico), 3 (segundo harmônico), e assim por diante. As frequências se referem ao número de ciclos num intervalo de tempo apropriado [13].

Seja a série trigonométrica (5.6) convergindo, em todo x, para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)) \tag{5.9}$$

Agora analisaremos os coeficientes $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$ relacionados a (f). Começando por a_0:

Demonstração.

Tomemos a série (5.9):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx))$$

[1] altura da nota

Integrando ambos os membros no intervalo de $[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right) dx$$

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi \cdot \frac{a_0}{2} + \left[a_n \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + b_n \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

□

Portanto o coeficiente a_0 é:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{5.10}$$

Continuando a análise dos coeficientes da série (5.6), temos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x) + ... + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) + ...$$

Demonstração.

Multiplicamos ambos os membros de (5.9) por $\cos(mx)$, $(m = 1,2,...)$ e integramos ambos os membros de $[-\pi,\pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(x) + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\operatorname{sen}(x) + ...$$

O primeiro termo à direita é 0. Para o segundo usamos a Identidade trigonométrica (5.3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m+1)x + \cos(m-1)x]dx = 0$$

desde que m $\neq 1$. Assim, seguindo as propriedades de ortogonalidade, achamos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0, \;\; para\, todos\, m,\, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Portanto, a integração termo a termo a direita dá zero para todos os termos exceto um e concluímos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(mx)dx = a_m\pi, \quad m = 1,2,...$$

Assim, temos que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \;\; n = 0,1,2... \tag{5.11}$$

□

E analogamente para b_n, temos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx, \;\; n = 1,2,... \tag{5.12}$$

Daí, uma definição fundamental da Série de Fourier: Seja f uma função em que são válidos os conceitos de integrais em (5.11) e (5.12). Então $a_0, a_1, b_1, ...$ são denominados *coeficientes de Fourier de f*, e a série trigonométrica (5.6) formada com seus coeficientes é chamada de *Série de Fourier de f:*

A *Série de Fourier de f* é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)) \tag{5.13}$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \;\; n = 0,1,2...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx, \quad n = 1{,}2{,}...$$

É interessante generalizarmos o período de integração, ou seja, vamos supor que f tenha período $T = 2L$:

Seja $g(u) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right)$, em que $g(u)$ tenha período 2π, logo:

$g(u+2\pi) = f\left(L\left(\frac{u+2\pi}{\pi}\right)\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) = g(u)$. Portanto $g(u)$ tem período 2π, aplicando os coeficiente de Fourier para g e fazendo mudança de variável temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lu}{\pi}\right)du$$

onde,

$$T = \frac{Lu}{\pi} \Longrightarrow u = \frac{T\pi}{L} \Longrightarrow du = \frac{\pi}{L}dt$$

$$u = -\pi \Longrightarrow u = -L$$
$$u = \pi \Longrightarrow u = L$$

então,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\frac{\pi}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos(nu)du = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\frac{\pi t}{L})\frac{\pi}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{L})dt$$

Analogamente para b_n

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi t}{L})dt$$

Portanto esses são os coeficientes da Série de Fourier para um período $2L$.

De maneira sintética, as Séries de Fourier representam de forma eficiente, exatamente ou aproximadamente, qualquer função periódica, sendo que a igualdade só acontece quando a função é seccionalmente diferenciável [6].

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua. Enunciaremos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f, a demonstração pode ser encontrada no livro [6] capítulo 3.

TEOREMA DE FOURIER. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função seccionalmente diferenciável e de período 2L. Então a série de Fourier da função f dada em* (5.13), *converge, em cada ponto x, para* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, *isto é,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{5.14}$$

Exemplo 5.3.1: Calcule a extensão periódica da função dada por $f(x) = x, \ \ para -\pi \leq x \leq \pi$ em Séries de Fourier:

Solução:

Calculando os coeficientes de Fourier, temos:

Como a função $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ é uma função ímpar, então o coeficiente a_0 que é integral de uma função ímpar, dará zero. Já o a_n é integral de um produto de funções, onde uma é impar e a outra é par, ou seja $f(x) = x$ e $f(x) = \cos(nx)$ respectivamente. Logo, esse produto é impar. Portanto a_n também é zero. Basta calcular o coeficiente b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)dx$$

Para integrar um produto de funções, faz-se necessário de uma técnica de integração, chamada de Integração por Partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Vamos determinar $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)dx$:

Tomando $f(x) = x \quad f'(x) = 1$

então, $g'(x) = \operatorname{sen}(nx) \ \ e \ g(x) = -\dfrac{\cos(nx)}{n}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) &= -x\frac{\cos(nx)}{n} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}dx \\
&= -x\frac{\cos(nx)}{n} \ |_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) \ |_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - \pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 \\
&= \frac{-2\pi}{n}\cos(n\pi)
\end{aligned}$$

Temos que $\cos(\pi) = -1$, logo $\cos(n\pi) = -1$ para n ímpar (porque $\pi, 3\pi, 5\pi,...$ representam giros completos no círculo unitário que deixam o ponto marcado no mesmo lugar) e $\cos(n\pi) = 1$ para n par. [22] Portanto

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-1)^{2n+1}\frac{-2\pi}{n} \quad \Longrightarrow \quad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Logo, a Série de Fourier de $f(x) = x$ é $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx)$

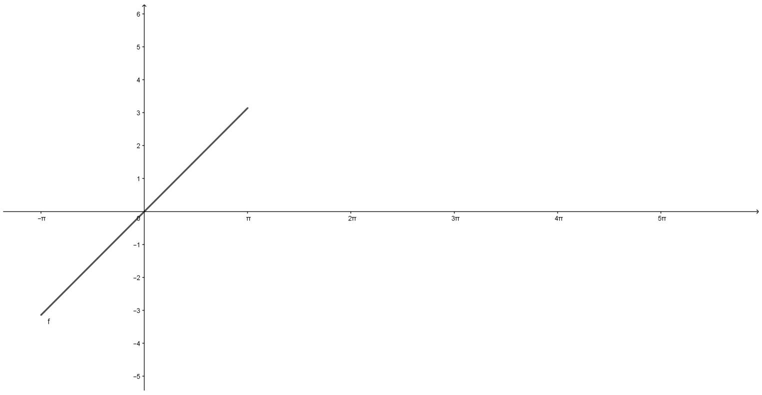


Figura 5.1: Gráfico da função $f(x) = x, \;\; -\pi \leq x \leq \pi$

.

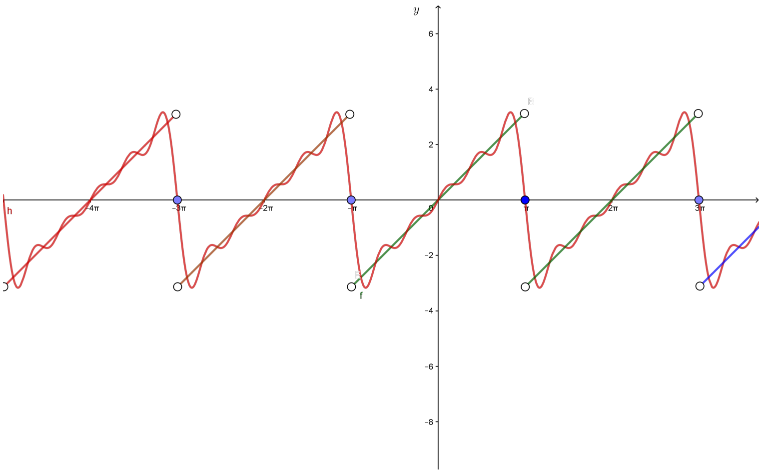


Figura 5.2: Série de fourier de $f(x)$ calculada até $n = 5$

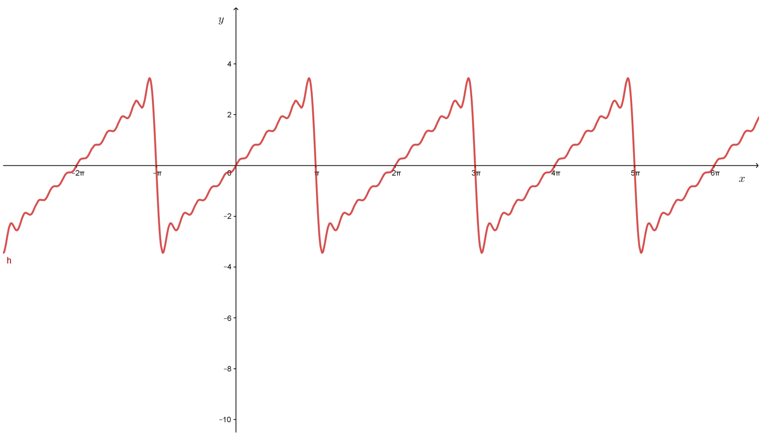


Figura 5.3: Série de fourier de $f(x)$ calculada até $n = 11$

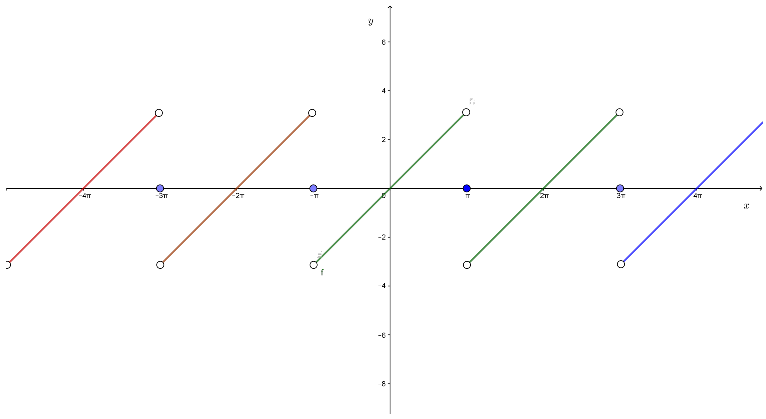


Figura 5.4: Série de fourier de $f(x)$

A Série de Fourier da função vai se aproximando de seu gráfico, na medida em que o número de seus termos vai aumentando, ou seja, o valor de n cresce.

Exemplo 5.3.2: Calcule a extensão periódica da função $f(x) = \begin{cases} 0, & se \ -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & se \ \ 0 < x \leq \pi \end{cases}$ em Séries de Fourier.

Calcule as quatro primeiras somas parciais da Série de Fourier da função.

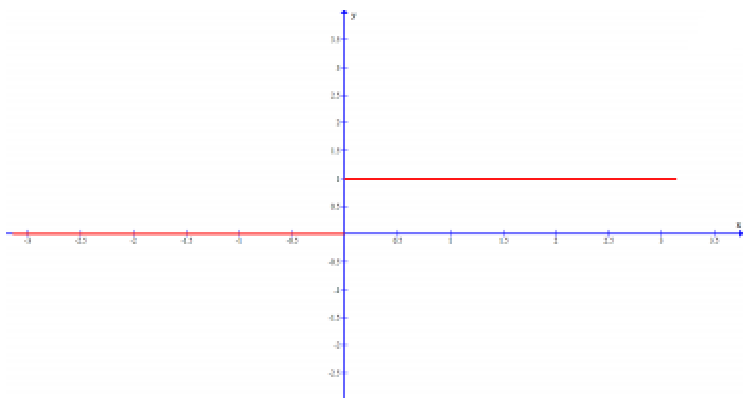


Figura 5.5: Grafico da função $f(x)$

Calculando os coeficientes da Série:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \implies a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx \implies a_0 = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cos(nx) \implies 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right] |_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\text{sen}(nx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\text{sen}(nx)$$

$= 0 + \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{-\cos(nx)}{n}\right] |_0^\pi = \dfrac{-1}{n\pi}\,[(-1)^n - 1]$, isto é, $b_n = 0$ para n par e $b_n = \dfrac{2}{n\pi}$ para n ímpar.

Portanto, depois de calculado os coeficientes, podemos encontrar a Série de Fourier:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\,\text{sen}((2n-1)x)$$

As quatro primeiras somas parciais são (o 4 primeiros termos da Série):

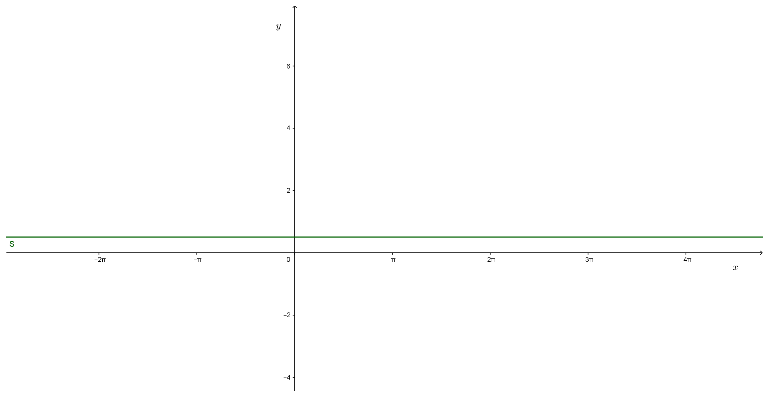


Figura 5.6: Soma parcial, $S_1 = \dfrac{1}{2}$

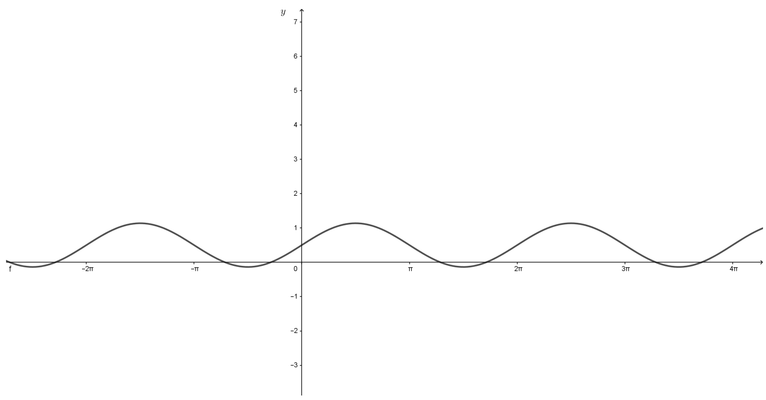


Figura 5.7: Soma parcial, $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\,\text{sen}(x)$

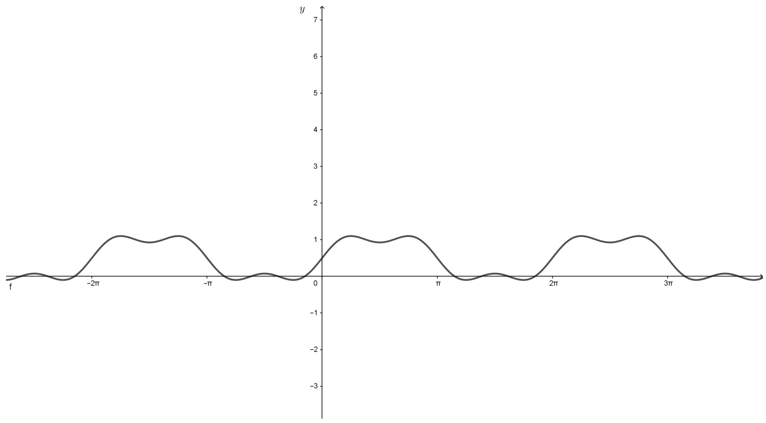


Figura 5.8: Soma parcial, $S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(x) + \dfrac{2}{3\pi}\,\mathrm{sen}(3\pi)$

6

Relação entre a Série de Fourier e a Teoria Musical

No campo da teoria musical, a comprovação da característica periódica do som estudada nas *séries harmônicas* associada à contribuição indireta de Fourier (1768 – 1830) para a música, auxiliaram na compreensão de fenômenos como a consonância, dissonância, o timbre, a afinação, dentre outros que por serem percebidos intuitivamente são pouco explorados matematicamente.

Fourier foi um forte influente na física com sua teoria analítica do calor (1822), na qual o pensador francês mostrou que a condução de tal energia em corpos sólidos poderia ser estudada em termos de séries matemáticas infinitas, as chamadas *Séries de Fourier*.

O princípio expresso por Fourier que qualquer forma periódica de vibração pode ser obtida pela soma infinita de vibrações simples, com frequências múltiplas da vibração fundamental, pode ser reenunciada do ponto de vista acústico-musical como:

> *Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido correspondente a um som musical pode ser sempre e de maneira única exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical [1, p.90].*

Portanto diversas dúvidas dos acústico-musicais foram interpretadas reunindo distintos conceitos matemático-musicais e o Princípio de Fourier, organizando uma estrutura capaz de vislumbrar diferentes fenômenos com lentes mais fortes. Como por exemplo, o porquê da relação entre razão de pequenos números inteiros e consonâncias. Sobre esse conceito, temos que as primeiras componentes, as mais audíveis na *Série Harmônica*, relaciona-se às frequências associadas aos primeiros termos da *Série de Fourier*, que indicam portanto, razões de pequenos números inteiros relacionadas às consonâncias pitagóricas, respondendo ao problema lançado na escola pitagórica ha 2500 anos.

Tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro, possuem a característica de vibrar não somente como um todo, mas múltiplos da frequência fundamental. Do ponto de vista matemático, essa série observada, contribuirá para construção da forma da vibração periódica que está relacionada com o timbre do som. Logo, a amplitude de cada harmônico caracteriza-se a fonte sonora [1].

A decomposição de uma nota em série de Fourier pode esclarecer alguns mistérios da harmonia musical, observados e estabelecidos a partir da prática, como regras até então desprovidas de justificativas evidentes. Por exemplo, para a polifonia a quatro vozes é orientado distâncias menores que uma oitava entre duas vozes consecutivas (soprano e contralto, por exemplo) a menos do tenor e baixo, que podem distinguir por intervalos superiores. Com a teoria de Fourier, tal problema mostra-se facilmente explicado pelo simples fato de que, a harmonia de vozes faz-se de uma repetição aproximada das distâncias entre as componentes da decomposição de uma nota em senoides, onde as consonâncias são os harmônicos mais próximos do som fundamental [1].

6.1 Uso do Software Geogebra na manipulação de uma nota musical por uma Série trigonométrica

O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. No estudo de funções com ele é possível plotar diferentes gráficos no mesmo plano, explorando suas características e semelhanças.

Buscando contextualizar o conteúdo estudado e uma aplicação direta, explora-se um recurso pouco conhecido do *software* GeoGebra: execução de sons através do gráfico de funções. Portanto através deste *software* vamos determinar a altura [1] de uma nota musical por meio de uma Série estudada nos tópicos anteriores.

Tomemos a Série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}(2\pi n f_1)$ sendo nf_1 a frequência de cada harmônico da série. Os termos k_n são tomados convenientemente, já que queremos verificar a altura de uma nota musical e k_n está ligado ao timbre, de modo que se tomasse a amplitude desses harmônicos atráves de um software que captasse o som instantâneo, teríamos a reprodução idêntica do instrumento musical captado.

Exemplo 6.1.1: Vamos verificar a nota $Lá_4$ de frequência $440Hz$.

Escreveremos a seguinte função série no comando de entrada do geogebra:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{100}{n} \operatorname{sen}(2\pi n.440.x) \right)$$

Forma de comando para a entrada do geogebra:

$$f(x) = soma(< expressão > , < variável > , < valor\, inicial >, < valor final >)$$

[1]Propriedade do som ser grave, médio ou agudo

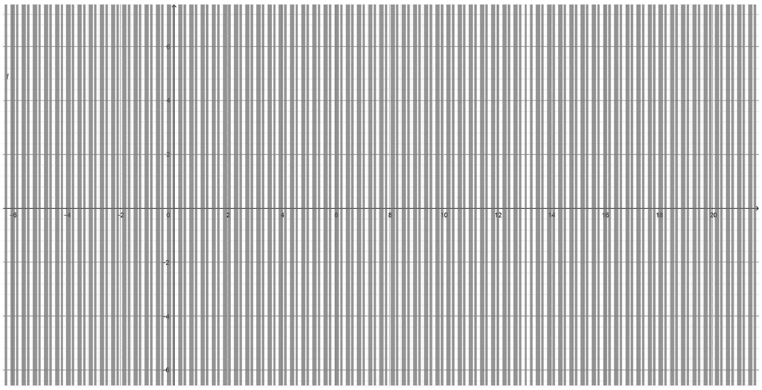


Figura 6.1: Gráfico da função série da nota $Lá_4$

Após escrever a função série, no comando de entrada digitamos:

TocarSom[<Função>,<Valor mínimo>, <Valor máximo>], em que cada item apresenta-se:

- **Função:** Insere-se neste campo o nome da função que se deseja produzir os sons (Ex.: $f(x), g(x), h(x)$,...);
- **Valor Mínimo:** Este campo pode ser entendido por tempo inicial, ou seja, em qual valor de x (que representa o tempo em segundos) o som será iniciado;
- **Valor Máximo:** Este campo pode ser entendido por tempo final, ou seja, em qual valor de x (que representa o tempo em segundos) o som será interrompido.

Para obtermos uma nota de altura diferente, basta alterarmos o valor da frequência na série. Por exemplo, vamos descrever a quinta nota de $Lá_4$ ou seja, $\frac{3}{2}$ da frequência fundamental que aqui é $Lá_4$. Portanto aplicando a ideia de Pitágoras, a quinta de $Lá_4$ é Mi_5.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{100}{n} \operatorname{sen}(2\pi n.660.x) \right)$$

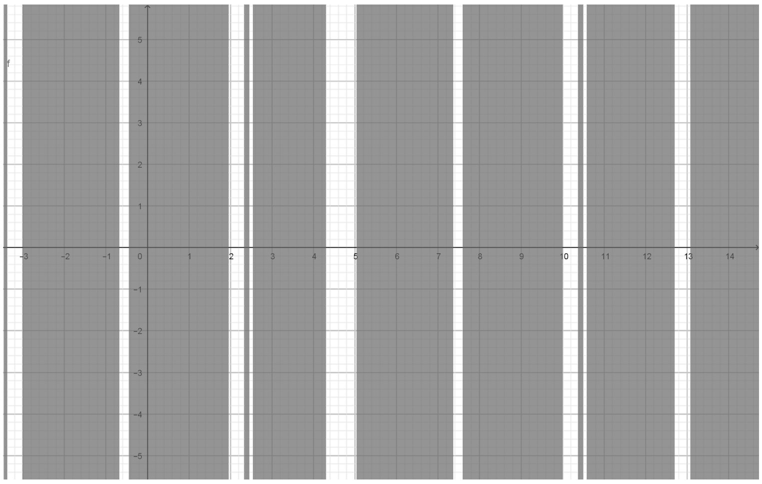


Figura 6.2: Gráfico da função série da nota Mi_5

Vale destacar que a série percorre com n natural variando até 30, percebe-se que quanto maior a quantidade de termos da série, melhores eram as aproximações de um som musical [19].

Ao modificarmos os coeficientes K_n da Série trigonométrica pode-se perceber a alteração no timbre. Se alterarmos o primeiro coeficiente k_1 alteramos também a intensidade do som, visto que o primeiro coeficiente está ligado a primeira nota da Série Harmônica. Portanto nota-se claramente que a amplitude se relaciona com a intensidade e à fonte sonora.

Exemplo 6.1.2: Vamos verificar o som da nota $Lá_4$ com a seguintes séries:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{100}{100^n} \operatorname{sen}(2\pi n.440.x) \right)$$

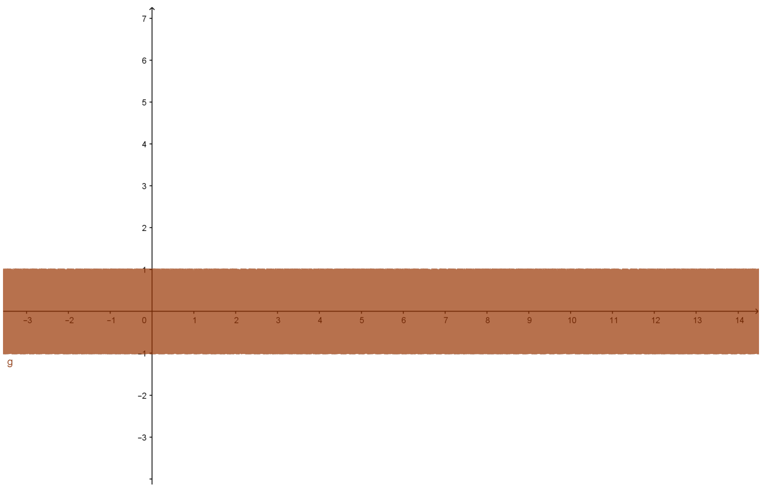


Figura 6.3: Gráfico da função série da nota $Lá_4$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{9} \left(\frac{100}{\log(9+n^2)} \operatorname{sen}(2\pi n.440.x) \right)$$

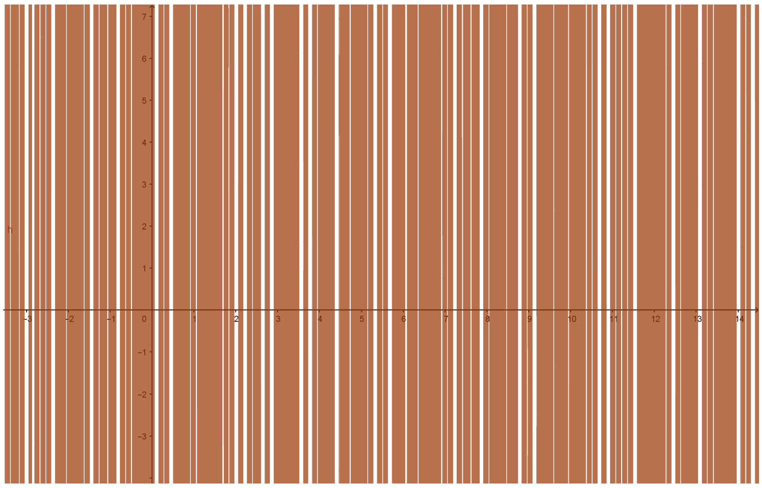


Figura 6.4: Gráfico da função série da nota $Lá_4$

Este tópico é uma ótima sugestão para atividade em sala de aula na educação básica. Visto que ao ensinarmos o conteúdo de funções trigonométricas, muitos alunos se indagam da importância ou a necessidade de se aprender tal conteúdo. Acreditam que é apenas para "passar" em um vestibular.

Dessa forma fica exaustiva a aula e não conseguimos uma absorção dos alunos quanto ao conteúdo. Portanto o professor pode programar uma aula prática, aplicando tais exemplos como também permitindo que os alunos façam a aplicação. Já que o Software Geogebra é gratuito e pode ser baixado nos celulares tanto com sistemas *Android* quanto *Ios*.

7 Considerações finais

A Matemática é uma ciência que mesmo com toda sua rigidez e exatidão nos apresenta belezas e mistérios. Uma ciência que se faz presente a cada momento do nosso dia-dia. A matemática não está somente aplicada em meio a cálculos, regras e demonstrações, mas também se faz presente em outras disciplinas, como a música, física, química, etc.

Ao percorrer sobre o processo histórico da relação matemática e música, é evidente a colaboração da escola pitagórica no desenvolvimento de conceitos tanto musicais quanto matemáticos. Consegue-se imaginar o fascínio de Pitágoras e seus discípulos ao conseguir dar significado lógico-matemático a cada som que se ouvia e relacioná-lo a números. É magnífico o legado deixado por Pitágoras e seus discípulos em diferentes campos do saber.

Com o decorrer da pesquisa diversas indagações puderam ser sanadas através de revisão bibliográfica e também experimentos como o monocórdio. Diversos conceitos que até então eram apenas processos intuitivos como a construção da escala musical, as consonâncias e dissonâncias passaram a ser melhor abrangidos. No aspecto da escala musical, a gama temperada contribuiu como um meio termo nas afinações de distintas tonalidades, de modo que se abdicaram de uma afinidade harmônica absoluta em detrimento de uma certa "impureza harmônica", equivalentemente tolerável em todas as tonalidades.

Por meio dos estudos da teoria de Fourier, foi possível compreender processos e fenômenos no campo da teoria musical. Com o uso do software foi possível confirmar que as séries de Fourier apresentam um ótimo grau de aproximação de uma onda sonora original. Quanto maior a quantidade de termos da série, melhores eram as aproximações, fato que comprova as propriedades de convergência.

É importante ressaltar que a Matemática não consegue explicar totalmente a Música. O intuito é que a partir dela, sejam criado parâmetros para o qual possa servir de suporte para a criação musical, algo fundamentalmente subjetivo.

O que apresentamos nessa dissertação são alternativas à aula tradicional, aquela em que se ensina e aprende de maneira monótona a séculos. Uma tentativa de encontrar outros métodos de abordagem de conteúdos da educação básica, utilizando de novos recursos, métodos, com a finalidade de tornar as aulas mais atrativas.

Neste trabalho apresentamos uma atividade em sala de aula a qual foi aplicada (ver apêndice A), como também sugerimos atividades prática para o ensino de funções (ver capítulo 6). Todavia não queremos aqui abolir ou fazer críticas severas aos métodos tradicionais de ensino, apenas sugerir que a abordagem de um conteúdo seja de diferentes formas e métodos para uma melhor absorção do mesmo.

A teoria musical abrange vários conceitos matemáticos, desde conteúdos da educação básica como as progressões geométricas na construção da escala temperada, ao mais complexo como cálculo diferencial e integral, o que pode ser explorado pelos professores mostrando aplicabilidade desses conceitos em nosso cotidiano.

Contudo, através deste trabalho, espera-se que professores e pesquisadores possam ser instigados a novas pesquisas, contribuindo com novas publicações e aprofundamento sobre esta relação matemática e música.

7.1 Trabalhos futuros

Após desenvolver um projeto de pesquisa, abre-se um leque de possibilidades para o estudo e aprofundamento do tema. Portanto deixo algumas sugestões de trabalhos futuros que poderão ser explorados e preencher possíveis ausências neste vasto campo de pesquisa matemática e música.

- As transformadas de Fourier no processamento do gráfico de frequência.
- Construção de um instrumento musical digital.
- Oficinas direcionadas para construção de um monocórdio.

A

Apêndice A

Este apêndice é uma atividade criada e aplicada para a construção de Escalas musicais com o uso do monocórdio.

A.1 Objetivos

- Perceber a relação entre as consonâncias pitagóricas.
- Compreender e escrever as escalas musicais de diferentes tonalidades a partir da escala fundamental(diatônica).
- Compreender a importância da escala temperada.
- Perceber a contribuição da matemática na teoria musical.

A.2 Público-alvo

Alunos da educação básica- Ensino Médio

A.3 Carga horária

3 horas-aula, distribuído entre apresentação dos conceitos da teoria musical, experimento com o monocórdio, software e avaliação da aprendizagem.

A.4 Materiais e equipamentos

- Monocórdio;
- fita métrica, ou treina;
- notebook e aparelho celulares com aplicativo software para visualizar a frequência das notas;

A.5 Descrição da atividade

Após apresentação de alguns conceitos básicos de teoria musical (definição de música, intervalo, tom/semitom,escala,timbre), o professor irá propor aos alunos para verificar a altura da nota do monocórdio (afinação em $Dó_3$ frequência de 130 hz) e a execução dos seguintes procedimentos:

- Medir o comprimento da corda entre os dois cavaletes. O som emitido será considerado frequência 1.
- Determinar as notas consonantes, que são a metade do comprimento da corda, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$.
- Obter a frequência da nota a partir do seu comprimento. Espera-se perceber que a frequência é inversamente proporcional ao comprimento.
- A partir do comprimento de $\frac{3}{4}$ da corda e percorrendo $\frac{2}{3}$ desse comprimento definir as demais notas da escala pitagórica.

  Tabela

Notas	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Fração	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Freq.(Hz)	130,00	146,25	164,53	173,34	195,00	219,37	246,79	260,00

- Tomar a metade do comprimento da corda e dividi-la em 12 partes igualmente espaçadas. Assim, temos uma oitava dividida em 12 partes iguais, aplicando progressão geométrica encontraremos a razão equivalente a $2^{\frac{1}{12}}$ que multiplicada pela frequência anterior temos a próxima nota (altura). Nessa etapa o professor menciona sobre a importância da escala temperada. E a partir da escala temperada escrever as escalas maiores.

A.6 Considereções e Resultados finais

Por meio da relação matemática/música, o professor poderá explorar diversos conteúdos como frações, progressões geométricas, funções trigonométricas, dentre outros. Este projeto é um bom caminho para interdisciplinaridade, como também uma interação professor/aluno e aluno/aluno, tornando a aula mais atraente.

Com a atividade proposta foi trabalhado aplicação de frações e progressões geométricas na teoria musical, o resultado foi muito satisfatório. Alunos interagiram e foi possível ver com os resultados que a maioria dos alunos compreenderam o conteúdos estudado.

B

Resultado da aplicação sala de aula

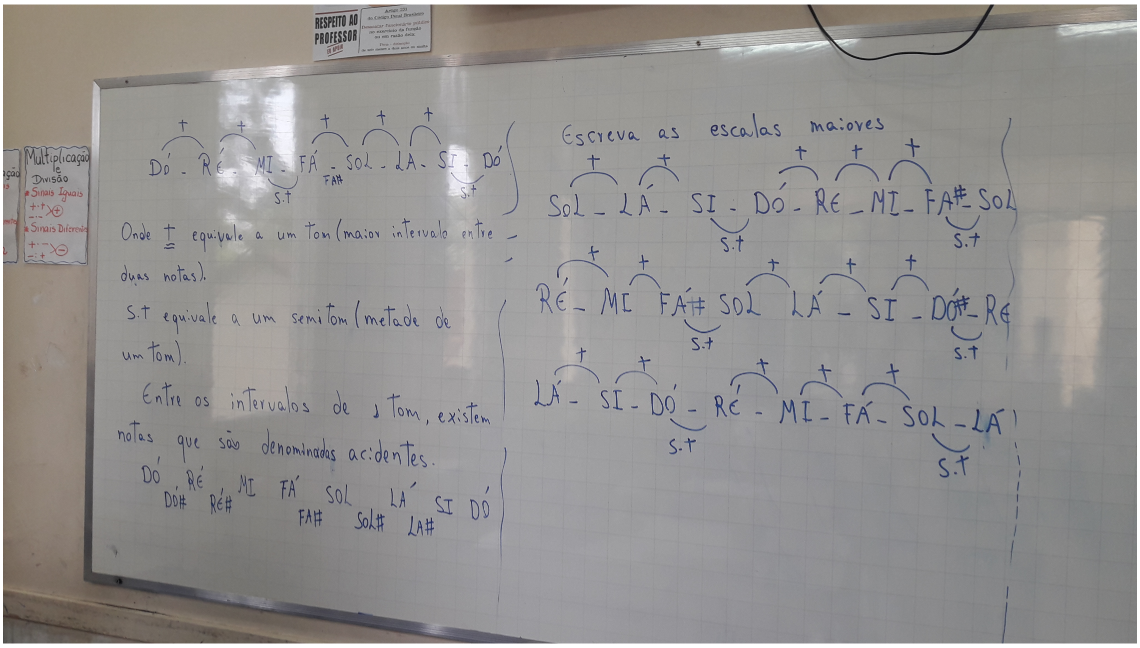


Figura B.1: Introdução a Teoria Musical

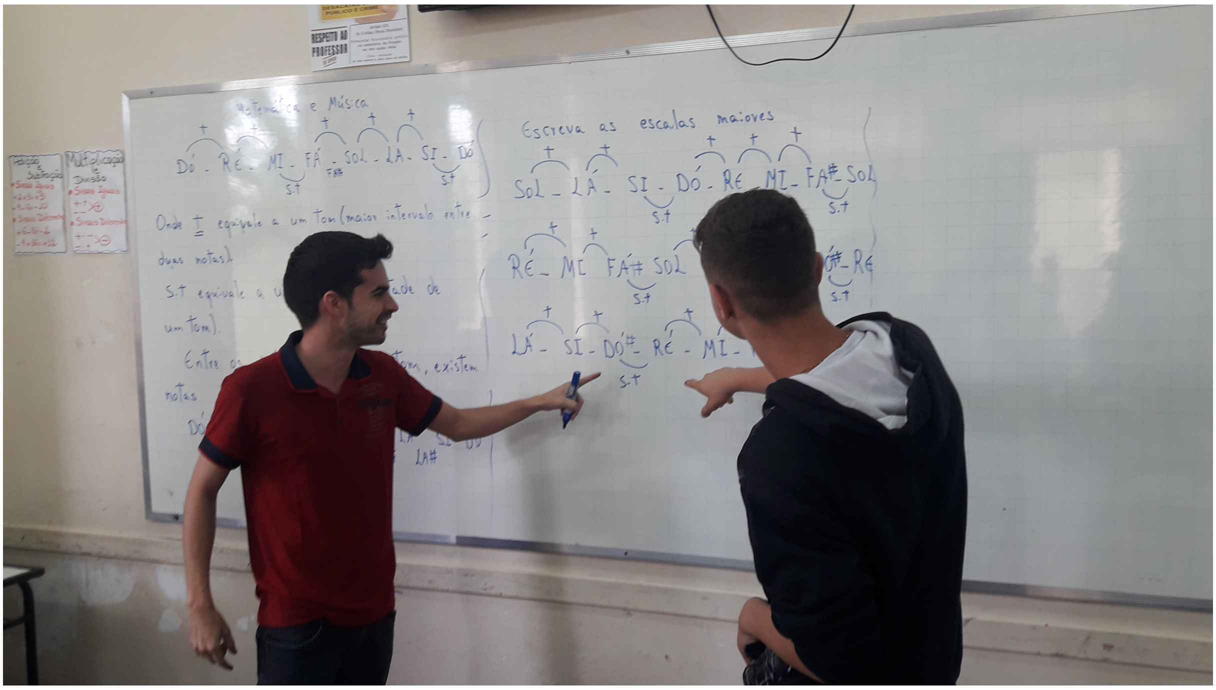


Figura B.2: Interação professor/aluno

Figura B.3: Explicação da Teoria Musical

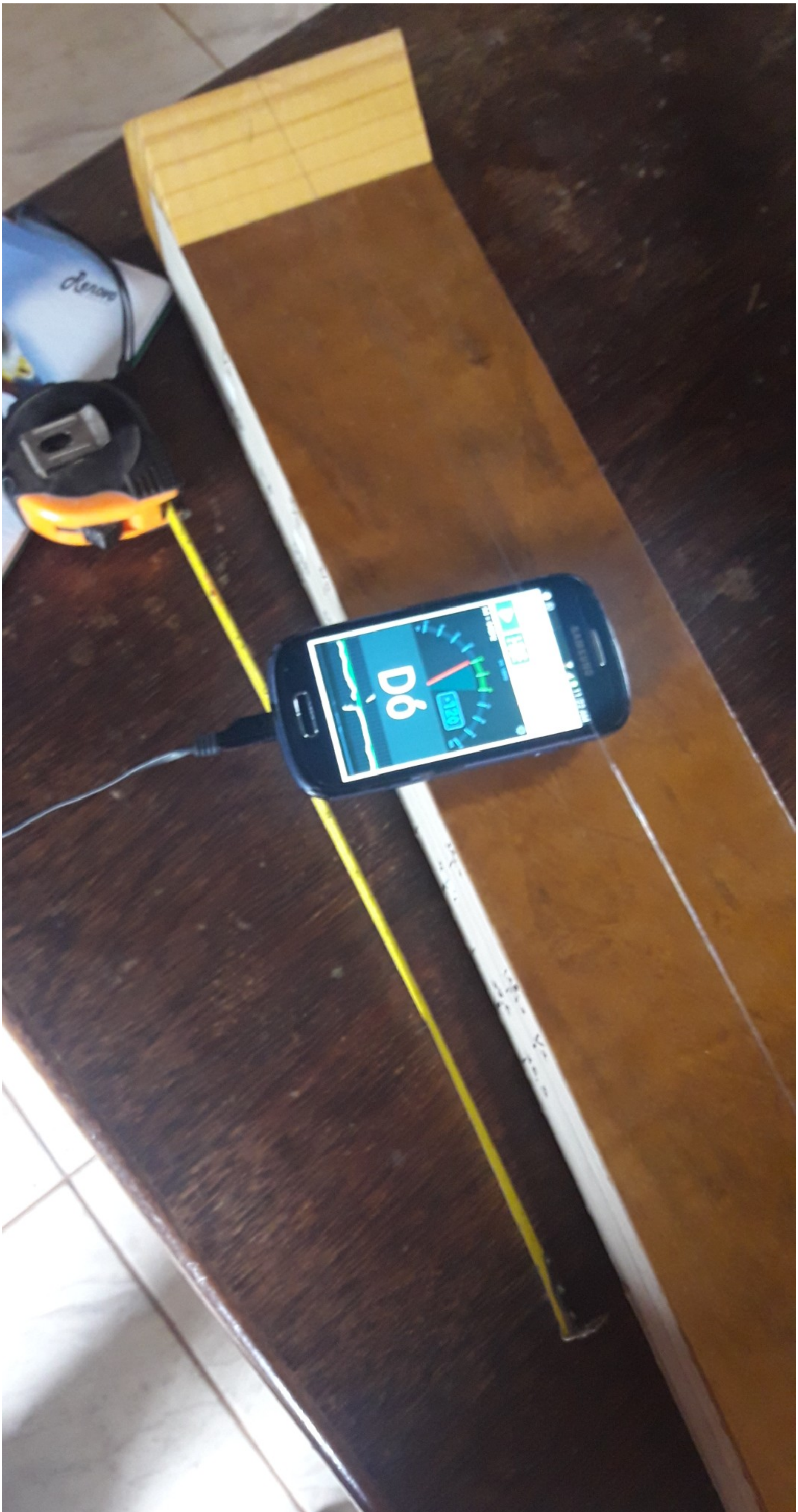

Dó

Figura B.5: Interação Alunos

Figura B.6: Intereção Alunos

Figura B.7: Intereção Alunos

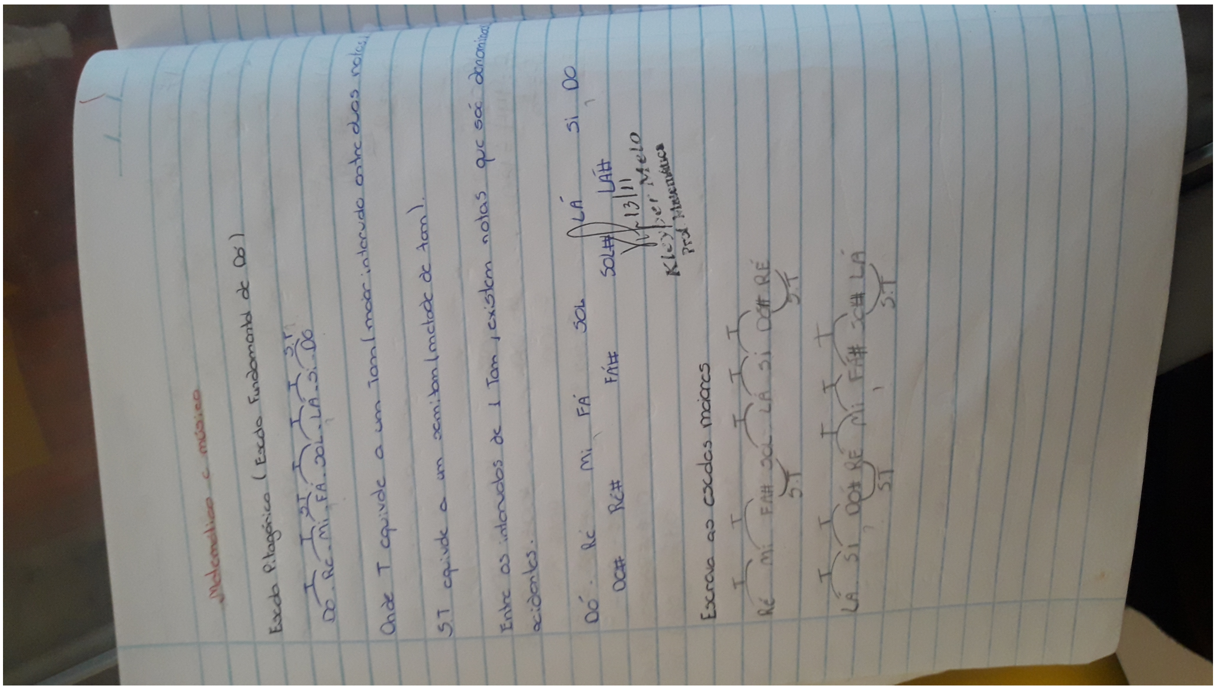


Figura B.8: Anotações dos Alunos

Bibliografia

[1] Abdounur, O. J. *Matemática e música.* transversais, 2003.

[2] ALMEIDA, L. X. et al. “Matemática e música: uma abordagem através do monocórdio de Pitágoras” (2018).

[3] Coelho, F. U. e Lourenco, M. L. *Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34.* Edusp, 2001.

[4] Cruz, A. M. L. “Matemática e música: compondo um cenário educacional com harmonia” (2013).

[5] Depizoli, C. A. “Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas”. Diss. de mestr. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.

[6] Figueiredo, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.

[7] Freire, R. D. “Relação entre figuras rıtmicas e valores numéricos na proporção entre andamentos musicais”. *XVI Congresso da Associação Nacional de Pesquisa e Pósgraduação em Música (ANPPOM), Brasılia–2006.* 2006.

[8] Gómez, J. J. D., Frensel, K. R. e Santos Crissaff, L. dos. *Geometria Analítica.* 2ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2017, p. 363.

[9] Hohenwarter, M. et al. *GeoGebra.* 2017. URL: http://www.geogebra.org (acesso em 8 de abr. de 2018).

[10] Hohenwarter, M. “GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene”. (In German.) Diss. de mestr. Paris Lodron University, Salzburg, Austria, fev. de 2002.

[11] JULIANI, J. P. “Matemática e música”. *São Carlos, SP* (2003).

[12] Kaplan, W. *Cálculo Avançado: Vol. 2.* Vol. 2. Editora Blucher, 1972.

[13] Kaplan, W. e Lewis, D. J. *Cálculo y álgebra lineal.* Rel. técn. 1973.

[14] Kilmer, A. D. “Os instrumentos musicais de Ur e a antiga música mesopotâmica”. *Expedition: A revista da Universidade da Pensilvânia* 40.2 (). Ed. por Pensilvânia, U. da, pp. 12–19.

[15] PEREIRA, M. D. C. “Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje” (2013).

[16] PRIOLLI, M. L. d. Q. “Princıpios Básicos da Música para a Juventude–2º. volume”. *Rio de Janeiro: Casa Oliveira de Músicas* (1986).

[17] PRIOLLI, M. L. “Princıpios Básicos da Música para a Juventude, vol. 1”. *Casa Oliveira* (1975).

[18] Serway, R. A. e Jewett, J. W. *Fısica: texto basado en cálculo.* Thomson, 2004.

[19] Silva, L. T. da, Groenwald, C. L. O. e Homa, A. I. R. “Um estudo sobre a execução de sons e criação de músicas no software GeoGebra”. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657* 6.2 (2017), pp. 25–45.

[20] Singh, S. *O último teorema de Fermat.* Editorial Norma, 1999.

[21] Spiegel, M. R. *Esboço da teoria de Schaum e problemas da análise de Fourier*. Ed. por McGraw-Hill, T.

[22] Stewart, J. "Cálculo, volume I". *Tradução: Antonio Carlos Moretti* (2006).

[23] Zanato, F. d. S. Z. "Matemática e Música: Relações entre as Séries e as Transformadas de Fourier e a Teoria Musical". *Sinop, MT* (2017).