UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DAVID LIMA NASCIMENTO

CONSTRUÇÃO DE GEOMETRIAS:
UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA

CATALÃO
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

David Lima Nascimento

3. Título do trabalho

Construção de Geometrias: uma abordagem axiomática

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Marcio Roberto Rocha Ribeiro**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/05/2020, às 15:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **DAVID LIMA NASCIMENTO**, **Discente**, em 13/05/2020, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1324280** e o código CRC **D538D262**.

DAVID LIMA NASCIMENTO

CONSTRUÇÃO DE GEOMETRIAS:
UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof.º Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Coorientador: Prof.º Dr. Paulo Roberto Bergamaschi

CATALÃO
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Nascimento, David Lima
CONSTRUÇÃO DE GEOMETRIAS [manuscrito] : UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA / David Lima Nascimento. - 2020.
C, 100 f.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro; co orientador Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2020.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Axiomas. 2. Geometrias. 3. Modelos. I. Ribeiro, Márcio Roberto Rocha , orient. II. Título.

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **11** da sessão de Defesa de Dissertação de **David Lima Nascimento** que confere o título de Mestre(a) em **Matemática.**

Em 15 de maio de 2020, às 14h22 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores **Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (IMTec) (orientador) à distância pelo RNP, Dr. Paulo Roberto Bergamaschi (IMTec) (coorientador) à distância pelo RNP, Dr. Flávio Raimundo de Souza (IFG) à distância pelo RNP e Dr. Donald Mark Santee (IMTec) à distância pelo RNP** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Sistema de webconferência da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), procederem a avaliação da Dissertação intitulada *"Construção de Geometrias: uma abordagem axiomática"*, de autoria de **David Lima Nascimento**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da "UFG-RC/UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 40 min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada: **(x) Aprovada** ou **( ) Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16h40 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Márcio Roberto Rocha Ribeiro, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Obs. "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Donald Mark Santee, Professor do Magistério Superior**, em 15/05/2020, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Marcio Roberto Rocha Ribeiro, Professor do Magistério Superior**, em 15/05/2020, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Paulo Roberto Bergamaschi, Professor do Magistério Superior**, em 15/05/2020, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO RAIMUNDO DE SOUZA, Usuário Externo**, em 15/05/2020, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **DAVID LIMA NASCIMENTO, Discente**, em 15/05/2020, às 16:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1326610** e o código CRC **E2C8F53B**.

“À Isabelle”.

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida e por todas as oportunidades concedidas.

À minha família no qual se sustenta toda minha base.

Ao meu querido professor Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro pela orientação e particularmente, por ter me ajudado no momento mais difícil dessa jornada.

A todos os professores que marcaram a minha vida.

Em especial, ao meu Amado mestre Henrique Semensato Holgado pela parceria nesta jornada de aproximadamente 50.000 km de estrada durante as viagens realizadas Brasília – Catalão.

À CAPES pelo suporte financeiro concedido.

RESUMO

Na educação básica o ensino de Geometria Plana tem se mostrado frágil no que tange às reflexões e indagações sobre a construção da geometria: como nasce uma geometria? Ou ainda, como construir geometria partindo do nada? Indagações sobre alguns fundamentos de geometria são fundamentais para compreender como se constrói Matemática. Contudo, acaba sendo uma tarefa nada simples encontrar formas de abordagens, na educação básica, que propicie essas reflexões, uma vez que a Geometria apresentada aos discentes é exposta como uma verdade absoluta. É nesse sentido, que o objetivo do presente trabalho é abordar um processo de construção de Geometria, através da inserção dos axiomas um de cada vez e analisando as suas consequências nessa geometria. Resgatar essa estrutura e organizá-la de forma a propiciar ao professor da educação básica uma ferramenta que possa subsidiá-lo na construção de um conhecimento mais sólido no que tange a sua formação em geometria é o objetivo central deste trabalho. Para isso, recorre-se à noção de modelos em uma geometria, no qual é dado significado a essa construção, visando propiciar ao professor uma ferramenta que possa subsidiá-lo nas reflexões e indagações a respeito da construção da Geometria Plana.

Palavras-chave: Axiomas. Geometrias. Modelos.

ABSTRACT

In basic education or in the teaching of geometry, it is shown that there are no reflexions and questions about the construction of geometry: How is geometry born? Or, how to build geometry from nothing? Inquiries about some fundamentals of geometry are fundamental to understanding how mathematics is built. However, it turns out to be a simple task to find ways of approach in basic education that provides these reflexions, since geometry returns to students and is exposed as an absolute truth. It is in this sense, that the present work approaches a process of geometry construction, through the insertion of axioms at a time and is analyzed as its consequences in this geometry. To do so, recover the notion of models in a geometry, which will be attributed to this construction, indicated by the teacher as a tool that can subsidize the reflexions and questions about the construction of plane geometry.

Keywords: Axioms. Geometry. Models.

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A História da Matemática pode ser dividida em quatro períodos: dos primórdios das civilizações até meados do século V A.C., onde a Matemática se resume a estipulação e determinação de regras deduzidas de observações e com viés prático imediatista. Do século IV A.C. até o século XVII da nossa era, temos o segundo período, que vai desde a introdução da ideia de demonstração de afirmações, por Tales, da cidade de Mileto e constitui o período das grandezas constantes. O terceiro período, das grandezas variáveis, começa no século XVII com a Geometria Analítica e o Cálculo Integral e vai até a evolução da Álgebra, provocada principalmente pelo trabalho do jovem matemático francês Evariste Galois (1811-1832) que, de fato, marca o fim do terceiro período e início do quarto e atual estágio de desenvolvimento da Matemática.

É, portanto, no segundo período da História da Matemática que nasce uma forma diferente de se pensar a Matemática, surge a necessidade de se provar as afirmações que acreditavam-se verdadeiras. Segundo Russel:

> Os antigos geômetras gregos, ao passar das regras empíricas da topografia egípcia para as proposições gerais pelas quais essas regras puderam ser consideradas justificáveis, e delas para os axiomas e postulados de Euclides, estavam fazendo filosofia matemática. (Russel, 2007, p.11)

Contudo, para se provar uma afirmação matemática utiliza-se de outras afirmações, e estas devem ter sido provadas anteriormente. Ocorre que para provar estas afirmações é necessário utilizar-se de outras que também precisariam ter sido provadas de antemão, e dessa forma é-se levado a um processo regressivo infinito do qual uma questão emerge irremediavelmente: onde começa a Matemática? É nesse contexto que faz-se necessário, para iniciar a construção da Matemática, assumir algumas afirmações que, por sua simplicidade, podem e precisam ser assumidas como verdadeiras e inquestionáveis. Estas afirmações são denominadas axiomas ou postulados.

Foi Euclides, sec. III A.C., que escreveu *Os Elementos*, uma obra constituída de 13 volumes cujo objetivo era sistematizar os conhecimentos matemáticos daquela época, de forma axiomática (postulacional), ou seja, a partir de afirmações iniciais explicitamente enunciadas, tomadas como verdadeiras e inquestionáveis, construir um discurso lógico através de uma sequência de deduções rigorosas. Segundo Eves (2011, p.115), “Esse processo, o chamado método postulacional, tornou-se a verdadeira essência da matemática moderna [...].

Sem dúvida uma das maiores contribuições dos gregos primitivos foi o desenvolvimento desse método de raciocínio postulacional".

No sentido evidenciado, este material produzido por Euclides serviu como primeiro passo para a construção do que conhecemos por matemática moderna. Durante séculos, ao reexaminarem a obra de Euclides houve um consenso que alguns pontos de partida eram questionáveis no campo axiomático. Coube aos estudiosos da Matemática no século XIX preencherem lacunas e corrigirem algumas imperfeições formais deixadas por seus antecedentes, com destaque a David Hilbert através da sua famosa obra *Grunglagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria)*.

Nesta obra, Hilbert elenca três elementos indefiníveis: ponto, reta e plano. Esses três elementos são a base de toda a Geometria. Para a modernização da Geometria, formulou vinte axiomas que permitiram manipular esses três elementos indefiníveis tornando os fundamentos da geometria inatacáveis. Esses axiomas foram divididos em cinco grupos: Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axiomas das Paralelas e Axiomas de Continuidade. Neste estudo, é adotada uma variação dos postulados propostos em 1932 pelo matemático americano George David Birkhoff (1884-1944). Esse matemático propôs uma abordagem diferente à axiomatização da geometria sintética de Hilbert. Birkhoff desenvolveu um sistema de axiomas que permite o uso dos números reais como ferramenta de medição. Em outras palavras, ele formalizou as noções de que se pode medir comprimentos e ângulos usando régua e transferidor. Uma vantagem dessa abordagem é a diminuição do número de axiomas em relação aos axiomas de Hilbert.

Resgatar essa estrutura e organizá-la de forma a propiciar ao professor da Educação Básica uma ferramenta que possa subsidiá-lo na construção de um conhecimento mais sólido no que tange a sua formação em Geometria é o objetivo central deste trabalho. Neste sentido, partindo do nada, pretende-se construir, de forma gradual, uma geometria, entendendo-se por geometria, de forma genérica, um sistema axiomático cujos termos primitivos são o ponto e a reta, tendo como relação primitiva uma relação de incidência de ponto à reta.

No segundo capítulo são apresentados os conceitos preliminares para a construção da geometria. Essas ideias norteiam todo o trabalho e é através dessas considerações que se torna possível compreender, de um ponto de vista filosófico, o objetivo desta dissertação. Neste capítulo constam as definições de termos primordiais que comumente são desconsiderados no ensino da Geometria da Educação Básica. Por exemplo, o que é uma **teoria** do ponto de vista da Matemática?

No terceiro capítulo dá-se início à construção da geometria de maneira investigativa, ou seja, questionando os três primeiros axiomas que pertencem ao grupo de incidência. Para isso, usa-se uma representação para geometria conhecida como **modelo**. É importante destacar que essa dissertação é toda baseada nessa ideia que consiste em usar modelos para discutir sobre a geometria em curso e definir os próximos passos a serem tomados, por exemplo, a inserção de novos axiomas.

No quarto capítulo são introduzidos os axiomas de paralelismo. A finalidade é questionar a existência de um objeto previamente definido usando apenas os axiomas elaborados no capítulo anterior. Outro objetivo é provar certas ideias relativas à geometria finita, ou seja, uma geometria no qual reta possui uma quantidade finita de pontos. Finalmente, esse capítulo mostra a independência desses axiomas.

No quinto capítulo propõe-se a inserção de um axioma conhecido como **Axioma da Régua**. O objetivo é que a geometria construída possa garantir que uma reta possua uma quantidade infinita de pontos pertencentes a ela. Também, é apresentado o **Modelo Cartesiano**, provando nele algumas proposições e inserindo novas definições.

No sexto capítulo são tratadas situações delicadas que surgiram no período mais recente da história da Matemática. Circunstâncias provocadas principalmente pelo matemático Moritz Pasch (1843-1930) que levaram a inserção do **Axioma da Separação do Plano**. O objetivo é mostrar que a geometria proposta por Euclides possuía certas hipóteses tácitas. A ideia é apresentar um modelo em que surjam certas "anormalidades". A fim de eliminá-las propõe-se a inclusão desse novo axioma.

No sétimo capítulo analisam-se questões referentes a ângulos. E diferente das principais referências sobre o tema, o **Axioma sobre Medida de Ângulo**, como é comumente chamado, é tratado nessa dissertação como um teorema. Essa abordagem é mais coerente com o objetivo do trabalho, apesar de que uma demonstração para esse teorema mostra-se longe dos objetivos propostos, uma vez que o conhecimento necessário para seu entendimento vai além das expectativas propostas.

No oitavo capítulo encerra-se a jornada apresentando o **Axioma de Congruência de Triângulos**, que nesse trabalho é o último a ser apresentado.

Há algumas questões que pululam o pensamento matemático e que, por vezes, durante a formação acadêmica são colocadas à parte, como que guardadas em um canto para uma futura abordagem em "momento oportuno" o qual nem sempre chega. Questões como as que envolvem o nascimento de uma *geometria*: como construir uma *geometria*? Qual é o ponto de partida para a *construção de uma geometria*? E o que são *pontos e retas*, objetos que frequentemente manipulamos numa geometria? Como construí-los? Mais ainda, o que é uma *geometria*? Todas estas questões e tantas outras, que à primeira vista se mostram um tanto simplórias, não são tão simples de se responder. Elas estão interligadas a um questionamento mais geral e que tem um profundo viés filosófico, a saber, o que se refere à *construção* da própria Matemática, e esta construção pode revelar uma compreensão mais profunda e sólida dos fundamentos da Geometria e, portanto, da própria Matemática.

Organizar um material textual que tenha um viés didático e que possa trazer esta abordagem referente à construção da Matemática pode ser uma boa forma de se oportunizar ao professor da Educação Básica uma ferramenta que o subsidie na construção de um conhecimento mais sólido no que tange a sua formação em Geometria, e que o desperte aos questionamentos mais fundamentais na construção da Geometria e, consequentemente, da própria Matemática.

É de suma importância destacar a existência de outros trabalhos no programa PROFMAT relacionados com este tema. São eles: Silva (2015), Perez (2015), Dario (2014), Presmic (2014), Silva (2015), Azevedo (2013), Sassi (2013), Rocha (2013), Costa (2016) e Da Silva (2017). Os trabalhos referenciados tratam em sua maioria de Geometria Não-Euclidiana. Entretanto, o presente trabalho busca um olhar mais profundo e filosófico na ideia da construção de geometria, seja Geometria Euclidiana ou Não-Euclidiana. Por fim, este projeto está fortemente inspirado e norteado pelas ideias contidas em notas de aula do saudoso professor Genésio Lima dos Reis, escritas para um curso de Fundamentos de Geometria e é também uma forma de homenageá-lo pela carreira brilhante que exerceu.

2 CONHECIMENTOS PRELIMINARES

A Matemática possui características peculiares de atemporalidade, universalidade e de independência de qualquer contexto cultural. Mesmo após muitos anos, ela permanece única, diferente de outros campos de estudos, como por exemplo, a física, que já não é mais a mesma desde a sua origem com os gregos. Essas características decorrem de sua natureza dedutiva que progride de maneira ordenada e lógica, a partir de uma construção teórica.

2.1 TEORIA

O que é uma teoria? Segundo o Dicionário Aurélio

> Teoria vem do grego “theoría”, ação de contemplar, examinar. Do ponto de vista filosófico teoria é o conjunto de conhecimentos não ingênuos que apresentam graus diversos de sistematização e credibilidade, e que se propõem explicar, elucidar, interpretar ou unificar um dado domínio de fenômenos ou de acontecimentos que se oferecem à atividade prática. Do ponto de vista lógico, teoria é o sistema de proposições em que não se encontram proposições contraditórias, nem nos axiomas, nem nos teoremas que deles se deduzem. (FERREIRA; 2009)

A ideia de teoria se difere entre matemáticos e outros cientistas do conhecimento. Isto ocorre pela natureza da construção de uma teoria em seus territórios. Nas ciências, em geral, uma teoria é elaborada a partir de observações e a construção de hipóteses que são testadas em um determinado sistema. Segundo Hawking e Mlodinow:

> Uma teoria será boa se satisfizer duas exigências. Ela deve descrever com exatidão uma grande classe de observações com base em um modelo que contenha somente poucos elementos arbitrários e deve fazer previsões bem definidas sobre resultados de observações futuras (HAWKING; MLODINOW, 2008, p.16).

Por exemplo, todas as vezes que se solta um objeto das mãos observa-se sua queda no chão. Dessa observação pode-se construir uma teoria sobre queda dos corpos. Em seguida, utilizá-la para prever futuras observações.

Em contrapartida, na Matemática, uma teoria é construída intrinsecamente, ou seja, a partir de determinadas afirmações consideradas verdadeiras sem que haja a necessidade de justificá-las, que relacionadas com certos objetos, denominados objetos primitivos, dão início a uma cadeia lógico-dedutiva de pensamentos cujo objetivo é provar novas afirmações. Tem-se como exemplo de teoria matemática a Análise. Análise é o ramo da Matemática que lida com conceitos introduzidos pelo Cálculo Diferencial e Integral, medidas, limites, séries infinitas e funções analíticas. Quando se estuda Análise é de praxe tomar como ponto de partida uma lista de vários fatos elementares a respeito dos números reais. Esses fatos levam à conclusão que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo. Essa lista de fatos é chamada de axiomas. Nessa teoria não houve a necessidade de definir o que é um número real. Para que a cadeia de definições de objetos de uma teoria não seja infinita ou cíclica é inevitável que se concorde em adotar alguns objetos sem definição.

2.2 OBJETOS PRIMITIVOS

Os ***objetos primitivos*** ou ***noções primitivas*** são conceitos adotados sem a necessidade de defini-los. Eles podem ser chamados também de objetos não-definidos. Por exemplo, na teoria matemática dos números naturais os objetos primitivos são “número natural” e a relação “sucessor” entre esses números. Em contra partida, existe na teoria matemática objetos definidos. A definição de um objeto é o enunciado das propriedades caracterizadora do objeto. Essas propriedades devem ser exclusivas do objeto que se pretende definir, para evitar possíveis ambiguidades. Usa-se a palavra objeto para designar noções, termos e conceitos. Um exemplo de objeto definido é o máximo divisor comum entre dois números naturais. Nota-se pelo nome dado ao objeto que se trata de um número que representa o maior divisor simultâneo desses dois números dados.

2.3 PROPOSIÇÕES MATEMÁTICA

Segundo Cegalla (2008, p.319), frase “é todo enunciado capaz de transmitir, a quem nos ouve ou lê, tudo o que pensamos, queremos ou sentimos”. Frases que enunciam um juízo acerca de alguma coisa é uma frase declarativa. Em Matemática, essas frases declarativas são chamadas de ***proposição*** ou afirmação, e devem satisfazer a duas condições, a saber:

1) Princípio do terceiro excluído: uma proposição é falsa ou verdadeira não havendo uma terceira opção.
2) Princípio da não contradição: uma proposição ou é verdadeira ou falsa, não ambas.

É importante salientar que na Matemática muitas dessas frases são representadas através de símbolos matemáticos. O enunciado de uma afirmação consiste de duas partes denominadas: as hipóteses e a tese. As ***hipóteses*** são as afirmações admitidas como verdadeiras e a ***tese*** é a afirmação que se deseja provar como verdadeira. Por exemplo, tem-se na teoria da Análise uma relação de desigualdade, "menor que", que satisfaz uma proposição denominada propriedade transitiva que afirma para todos os números reais x, y e z:

Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$; para $x < y$ leia-se "x menor que y".

Neste caso, as hipóteses admitidas como verdadeiras são a existência de números reais x, y e z tais que $x < y$ e $y < z$ e o que se deseja provar é que $x < z$, a tese.

A cadeia lógico-dedutiva que permite comprovar certa afirmação ocorre através de um processo chamado prova ou demonstração.

2.4 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Segundo Morais Filho (2016, p.42), "uma ***demonstração*** matemática é um processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, admitindo-se a sentença P, deduz-se, por argumentação, a sentença Q. Ou ainda, uma demonstração garante que a sentença Q ocorre todas às vezes em que P ocorrer". Portanto, uma demonstração é uma sequência de afirmações, acompanhadas de suas justificativas, que conduzem a tese. Por exemplo, a proposição: A soma de dois números pares resulta em um número par.

Hipótese: a e b são números pares.

Tese: $a + b$ é par.

Demonstração: Tem-se por hipótese que a e b são números pares, ou seja, existem x e y naturais tais que $a = 2x$ e $b = 2y$. Logo, $a + b = 2x + 2y = 2(x + y)$. Portanto, $a + b$ é um número par. Está provada a demonstração.

As afirmações demonstráveis são chamadas de teoremas, proposições, lemas ou corolários. Dá-se o nome ***teorema*** quando tal afirmação é mais relevante para a teoria, do contrário, será chamada de ***proposição***. São denominados ***lemas*** afirmações usadas para provar outra afirmação, ou seja, um lema é um teorema auxiliar ou preparatório. Os ***corolários*** são afirmações obtidas decorrentes de outra afirmação recém-provada.

A justificativa de cada afirmação que aparece em uma demonstração é feita de afirmações que foram estabelecidas anteriormente. Assim, demonstrar uma afirmação é mostrar que ela decorre logicamente de outras afirmações já estabelecidas anteriormente. Mas, estendendo esse processo descendentemente pode-se deparar em dois caminhos:

1) Ou, chega-se em um círculo vicioso onde a hipótese usada para demonstrar uma determinada tese pode ser demonstrada desde que use como hipótese a tese em questão. Um exemplo é quando usa-se o princípio da boa ordenação para demonstrar o princípio de indução matemática ou, de modo contrário, usa-se o princípio de indução matemática para demonstrar o princípio da boa ordenação.

2) Ou, não se para nunca: uma afirmação pede uma anterior que, por sua vez, pede uma que a antecede, que por sua vez, pede outra anterior e assim, entra-se num processo de recorrência infinito, em que não se teria um ponto de partida, uma afirmação inicial.

Portanto, para início de uma teoria matemática devem-se aceitar certas afirmações sem precisar prová-las. Essas afirmações, que geralmente são mais simples, são verdades evidentes denominadas ***Axiomas*** ou ***Postulados***.

2.5 AXIOMAS OU POSTULADOS

Para entender o que é um axioma imagina-se um pai tentando ensinar seu filho a jogar xadrez. Ele começará apresentando o tabuleiro 8x8, em seguida as peças e seus respectivos movimentos para em seguida mostrar ao seu filho como posicionar as peças no tabuleiro. Porém, como toda criança curiosa, o filho questiona por que esse tabuleiro é 8x8 e não um tabuleiro 10x10(por achar este último mais simétrico)? Ou ainda, por que o cavalo é movimentado em L e não em C? O pai responde simplesmente porque esta é a regra do jogo e se alguma dessas regras for alterada, o jogo resultante não seria o jogo de xadrez. Note que ao ensinar o jogo de xadrez não se descreve o que é um cavalo. O importante são as regras do jogo, isto é, a maneira de como este cavalo se movimenta, a sua posição inicial no tabuleiro, a forma de capturar o adversário, e etc. As regras do jogo são chamadas de axiomas.

Um ***axioma*** é uma afirmação aceita sem demonstração. Por exemplo, os axiomas que dão início a teoria dos números naturais são chamados de Axiomas de Peano, em homenagem ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Um desses axiomas diz que dois números que tem o mesmo sucessor são iguais, em outras palavras, dois números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. Uma verdade óbvia aceita sem nenhuma contestação.

2.6 SISTEMA AXIOMÁTICO

Chama-se ***sistema axiomático*** o conjunto formado por finitos axiomas, objetos primitivos e de determinadas regras de inferência, usadas para deduzir certas afirmações e definir objetos.

2.7 GEOMETRIA

De forma genérica, denomina-se ***Geometria*** um sistema axiomático constituído de todos os termos que nele seja definido e de todos os teoremas e proposições que se possa deduzir com os axiomas nele admitidos. Uma primeira geometria é construída no Capítulo 3.

2.8 MODELO PARA UMA GEOMETRIA

Um ***modelo*** para uma geometria é uma representação de seus termos e relações primitivos por outros objetos e relações matemáticos que satisfaçam os axiomas nela admitidos. Os modelos são ferramentas importantes para a apresentação de exemplos e contraexemplos numa geometria, e são utilizados para apresentar com eficácia teorias matemáticas.

Segundo Eves (2011, p.657), “obtém-se um modelo de um conjunto de axiomas sempre que puder atribuir significados aos conceitos primitivos do conjunto de maneira tal que os axiomas se convertam em afirmações verdadeiras sobre os significados atribuídos”. Decorre dessa discussão uma importante propriedade envolvendo modelos, que é destacada a seguir.

Propriedade Fundamental dos Modelos (PFM). Qualquer teorema que se pode provar com um grupo específico de axiomas é válido em qualquer modelo que satisfaça os mesmos axiomas.

Segundo Greenberg afirma que

> A principal propriedade de qualquer modelo de um sistema de axioma é que todos os teoremas do sistema são declarações corretas no modelo. Isso ocorre porque as consequências lógicas das declarações corretas estão corretas. (Por definição de "modelo", os axiomas são afirmações corretas quando interpretados em modelos; os teoremas são consequências lógicas dos axiomas). (Greenberg, 1994, p. 52).

Um conjunto de axiomas além de ser significante e bem definido, devem possuir três propriedades fundamentais: Suficiência, Consistência e Independência. Para ser suficiente tudo que é usado na teoria deve estar contido nos axiomas não podendo haver hipóteses tácitas. Embora Euclides, assim como outros matemáticos gregos, em sua obra tivesse o mérito de construir há cerca de 300 anos antes de Cristo uma matemática fundada em um sistema axiomático, esse sistema não era suficiente. De fato, em sua primeira proposição ele afirma que dois arcos de círculos têm ponto em comum. Tal afirmação não foi deduzida e nem listada como axioma no início de sua obra, consequentemente, essa afirmação foi inserida tacitamente por Euclides. Isso não diminui o feito realizado por Euclides, embora ficasse constatado séculos mais tarde que várias outras hipóteses tácitas foram feitas em sua obra. Para a época, essa maneira de enxergar a Matemática se tornou um marco na história. Herdou-se dos gregos o método dedutivo, consequentemente, a Geometria passou por um processo natural de amadurecimento de ideias que anos mais tarde levou David Hilbert (1862-1943), em seu livro *Grundlagen der Geometrie*, a apresentar um conjunto completo de axiomas que tornava o sistema axiomático suficiente para a Geometria.

Para ser consistente, um sistema não pode deduzir dois teoremas contraditórios a partir dos axiomas. Segundo Aaboe (2013, p.57), “Os Axiomas de Euclides são tão consistentes quanto a aritmética, pois podemos construir um modelo aritmético que os satisfaz. Este modelo é chamado de geometria analítica”.

Por último, para um sistema de axiomas ser independente nenhum dos axiomas deve ser consequência dos outros. Esta independência está relacionada à inquietação dos matemáticos na busca pela precisão e formalização, pois um axioma não deve ser deduzido através de outros axiomas, senão este passaria ao posto de teorema.

Ao criar um sistema axiomático é imprescindível que seus axiomas sejam suficientes e consistentes, todavia, caso os axiomas desse sistema não sejam independentes entre si, isso não acarreta nenhum problema sério. O irônico é que das três propriedades de um sistema axiomático, a independência é a que possui menos impacto sobre a validez lógica de uma teoria e foi a propriedade que mais preocupou os matemáticos durante muito tempo.

Em consonância com as ideias expostas, no capítulo seguinte é iniciada a construção de uma geometria plana pelo método axiomático.

3 OS PRIMEIROS AXIOMAS

Este capítulo dá início à construção de uma geometria plana. Nele são introduzidos os primeiros objetos da geometria, os objetos primitivos, ponto e reta. Também são introduzidos os primeiros axiomas.

3.1 INICIANDO UMA GEOMETRIA: PONTO E RETA

Para iniciar a construção de uma geometria plana é necessário apresentar um primeiro objeto com o qual se trabalhar. Esse objeto é o **ponto**, que por ser o primeiro da geometria não é definido. De fato, para se definir um objeto é necessário utilizar-se de outro objeto já conhecido, o que não é possível, pois ainda não há nenhum outro objeto definido. Assim, um ponto é um objeto aceito sem definição, isto é, um ***objeto primitivo***. Além do ponto é razoável introduzir mais um objeto primitivo: a **reta**, que também não pode ser definida utilizando apenas o objeto primitivo que se tem até o momento, a saber, o ponto. A escolha desses dois primeiros objetos primitivos é de cunho particular. Eves afirma que

> Hilbert, por exemplo, estruturou sua geometria sobre conceitos primitivos de *ponto*, *reta*, *plano*, *estar entre* e sobre 21 postulados; já para Pieri os conceitos primitivos são dois, o de *ponto* e o de *movimento* e são 20 postulados; Veblen partiu do conceito primitivo de *ponto* e *ordem* e de um conjunto de 16 postulados; Huntington tomou como primitivos os conceitos de *esfera* e *inclusão* e admitiu 23 postulados. (Eves, 2011, p. 657).

Para estabelecer uma relação entre estes dois objetos primitivos, ponto e reta, é introduzida uma ***relação primitiva***, isto é, que também não pode ser definida, exatamente por não existirem na geometria objetos que permita uma definição. A relação primitiva entre ponto e reta é a relação **pertence a**. Assim, para relacionar ponto e reta diz-se: ponto "pertence à" reta ou ponto "não pertence a" reta. Esta relação é denominada relação de **incidência**. Essa estrutura de objetos e relações primitivas é uma versão alterada do matemático Birkhoff.

Utilizar o verbo "pertencer" assim como os substantivos "ponto" e "reta" de maneira intuitiva é inviável na construção de uma geometria axiomática, pois essa geometria não apresentaria a precisão necessária para possuir a propriedade da consistência. Logo, é necessário que todos os termos sejam fundamentados de maneira não empírica. Assim, a existência dos axiomas é imprescindível.

Os axiomas dão as primeiras propriedades desses objetos primitivos e estabelecem a forma como se deve trabalhar com eles. Nada pode ser afirmado sobre esses objetos que não seja decorrente dos axiomas.

O grupo dos três primeiros axiomas é denominado de ***Axiomas de Incidência***. Para enunciá-los é necessário pensar nas relações que se deseja obter entre os objetos primitivos ponto e reta. Uma relação razoável é que uma reta tenha ponto pertencente a ela e ponto que não pertença a ela que, claramente, não pode ser provada. Assim, tal relação colocada na forma de uma afirmação é um axioma, a qual é apresentada a seguir como o primeiro axioma de incidência:

Axioma 1. Qualquer que seja a reta, existe ponto que pertence a ela e existe ponto que não pertence a ela.

O que é possível construir apenas com esse axioma? A princípio nada. De fato, o Axioma 1 afirma que caso exista uma reta, então existe ponto pertencente a ela e ponto não pertencente a ela. Trata-se de uma afirmação condicional, em que a hipótese é a existência de uma reta. Escrevendo o Axioma 1 de modo condicional, tem-se:

Hipótese: r é uma reta qualquer.

Tese: Existem pontos P e Q tais que $P \in r$ e $Q \notin r$. (Para $P \in r$, leia-se "P pertence à reta r" e para $Q \notin r$, leia-se "Q não pertence à reta r").

No entanto, na construção de uma geometria axiomática toda afirmação deve ser consequência dos axiomas ou ser um axioma. Não há garantias da existência de uma reta. De fato, considerando uma geometria em que vale apenas o primeiro axioma, pode-se criar um modelo com uma quantidade finita de pontos no qual não exista reta. Lembre-se que construir um modelo constitui dar significados aos objetos primitivos e suas relações primitivas. Neste sentido é geralmente convencionado representar pontos por letras maiúsculas do alfabeto latim. Por exemplo, um par de pontos A e B. E uma reta é representada pelo conjunto formado por essas letras. Por exemplo, a reta $\{A, B\}$ na qual pertencem os pontos A e B. Baseado nessa representação para pontos e retas pode-se criar um modelo com três pontos A, B, C e sem nenhuma reta, como no Modelo 1 a seguir.

Modelo 1. Pontos: A, B e C; e retas: não possui.

Esse é, de fato, um modelo para a geometria que admite apenas o Axioma 1. Mas o raciocínio para essa verificação é delicado devido a ausência de retas. Se o Axioma 1 não fosse satisfeito, dever-se-ia encontrar uma reta que não possua ponto pertencente a ela ou que não possua ponto não pertencente a ela. Como não existe reta nesse modelo é impossível encontrá-la. Logo, o Modelo 1 é, de fato, um modelo para essa geometria. De modo geral, quando a hipótese não está presente, a tese não tem que ser verificada, logo a afirmação não é contrariada e nesse caso, diz-se que a afirmação é válida por **vacuidade**. No modelo apresentado não há reta, então a hipótese do Axioma 1 não está presente, logo a tese não precisa ser verificada e diz-se que o axioma é válido por vacuidade. Vacuidade é um termo derivado da palavra vácuo.

A seguir é apresentado outro modelo em que além de pontos tem-se também a existência de retas.

Modelo 2. Pontos: A, B e C; e retas: $\{A\}, \{B\}, \{C\}$.

Nota-se que esse modelo satisfaz o axioma dado. De fato, para cada reta existe ponto que pertence e ponto que não pertence a ela.

Nesse modelo toda reta possui exatamente um ponto. Então, pode-se afirmar que toda reta possui pelo menos um ponto? A resposta é sim. De fato, se temos um modelo é porque ele satisfaz o Axioma 1, isto é, se temos uma reta neste modelo então tem que ter ponto nela, e portanto, pelo menos um. Em contrapartida, pode-se afirmar que toda reta possui exatamente um único ponto? Ou ainda, pode-se comprovar a existência de pontos e retas?

Pode-se considerar um modelo que satisfaz essa geometria e de modo que não possua ponto nem reta. Note que esse modelo é válido por vacuidade. Então, não se pode afirmar nada nesse modelo. Ele é chamado de modelo vazio.

Algumas vezes é possível se deparar com uma afirmação a qual não se consegue provar utilizando os axiomas e resultados da geometria. Então, uma pergunta surge: por que não se consegue provar? É por inabilidade ou impotência de quem está tentado elaborar a prova e não consegue (outra pessoa mais habilitada poderia chegar à prova) ou é porque a afirmação de fato não pode ser provada apenas com os axiomas e resultados até ali presentes na geometria (isto é, trata-se de uma afirmação impossível de se provar na geometria que se tem, e ninguém jamais poderia prová-la?). Nesta situação os modelos são os instrumentos utilizados para provar que é impossível provar a afirmação para a geometria dada. Greenberg afirma o seguinte

> Suponha que tenhamos uma declaração no sistema formal, mas ainda não saibamos se é um teorema, ou seja, ainda não sabemos se isso pode ser provado. Podemos ver nossos modelos e ver se a afirmação está correta nos modelos. Se pudermos encontrar um modelo em que a declaração interpretada falhe, podemos ter certeza de que nenhuma prova é possível. (Greenberg, 1994, p. 53).

De acordo com o ***Princípio Fundamental dos Modelos***, qualquer teorema que se pode provar com um grupo específico de axiomas é válido em qualquer modelo que satisfaça esse grupo de axiomas. No modelo vazio qualquer declaração é impossível de ser provada. Faz-se necessário a inserção de um novo axioma. Esse axioma deve servir para evitar que o modelo vazio satisfaça a lista de axiomas. Deseja-se uma relação de existência de retas, ou de pontos. Embora a hipótese do Axioma 1 faz menção a reta , ele não garante a existência desse objeto, fato que se observa no modelo vazio. Assim, se quer a existência de reta, isto deve ser declarado com a criação de um novo axioma, tem-se, então, o segundo axioma:

Axioma 2. Existe pelo menos uma reta.

Note que o modelo vazio não satisfaz a geometria em que valem os dois axiomas enunciados.

Numa geometria onde valem os dois axiomas enunciados até o momento é possível provar que existem pelo menos dois pontos distintos.

Proposição 1. Existem pelo menos dois pontos distintos.

Demonstração: Pelo Axioma 2 tem-se que existe uma reta r qualquer. O Axioma 1 afirma que existe um ponto P pertencente a reta r e um ponto Q não pertencente a reta r. Portanto, P e Q são dois pontos distintos quaisquer dessa geometria. Está provada a proposição.

3.2 OS TRÊS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

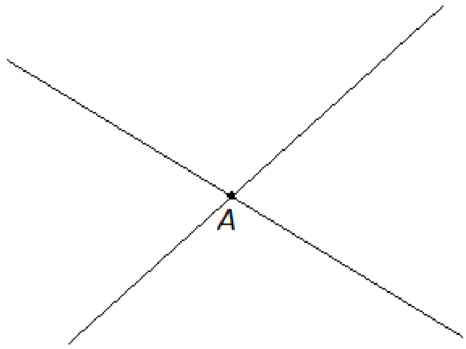
O princípio lógico do terceiro excluído afirma que uma proposição é verdadeira ou é falsa, não ambos. Portanto, duas retas se intersectam ou não se intersectam. De fato, essas duas afirmações são complementares no sentido lógico. Mas, o que seria duas retas se intersectarem? Segue uma definição a respeito do tema.

Definição 1. Duas retas se **intersectam** quando possuem, pelo menos, um ponto em comum.

Definir um termo não garante necessariamente a sua existência. Apesar de bastante intuitiva em geometria a ideia de existirem retas que se intersectam, deve-se garantir esse fato através de uma demonstração, ou refutá-lo. Neste caso, apenas com os axiomas existente até o momento, não é possível provar a existência de retas que se intersectam. Dito de forma mais precisa, considerando a geometria em que valem apenas os dois axiomas de incidência, é impossível provar a existência de retas que se intersectam. De fato, basta apresentar um modelo para esta geometria no qual não existam essas retas. O Modelo 2 apresentado satisfaz os dois axiomas, porém duas retas quaisquer neste modelo não possuem pontos em comum e, portanto, em decorrência da Propriedade Fundamental de Modelo, nesta geometria, não é possível garantir a existência de retas que se intersectam.

Obter a garantia de retas que se intersectam poderia ser feita através da criação de um novo axioma. Entretanto, os axiomas devem ser verdades aceitas de maneira evidente, o que não é o caso. De fato, pode se questionar: há quantos pontos em comum entre duas retas que se intersectam? Nada garante que é apenas um ponto, a não ser a intuição geométrica reproduzida na Figura 1, em que se tomou a liberdade de traçar reta como uma linha, de modo que, claramente, apresenta vários (na verdade, infinitos) pontos, fato que os axiomas atuais não se tem garantido.

Figura 1 – Retas que se Intersectam



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

No estudo da Geometria é comum fazer uso de desenhos. Os desenhos são instrumentos de ajuda à intuição. Porém, eles jamais devem servir como demonstração de alguma afirmação. Os desenhos são utilizados apenas como uma representação gráfica intuitiva das ideias de ponto e reta, eles não podem provar afirmações uma vez que são uma e apenas uma das muitas possíveis formas de se representar graficamente os objetos não-definidos, ponto e reta. De fato, não há definição para ponto e reta, então suas representações gráficas poderiam ser apresentadas de diversas formas. As representações gráficas de ponto e reta apresentadas neste trabalho são tais como as da Geometria Euclidiana, às quais os estudantes estão habituados desde o início de seus estudos, conforme figura 1. Contudo, fica o alerta, estas representações gráficas são utilizadas apenas com objetivo didático, numa tentativa de auxiliar o leitor a acompanhar o pensamento e raciocínio em voga, nunca para a demonstração de uma afirmação.

A Figura 1 mostra intuitivamente que duas retas que se intersectam possuem apenas um ponto em comum, mas esse fato deve ser provado. Analogamente, o caso da prova da existência de retas que se intersectam. Entretanto, não é possível provar essas duas afirmações apenas com os dois axiomas apresentados até aqui! De fato, segue um modelo para essa geometria em que a intersecção de duas retas possui exatamente dois pontos em comum.

Modelo 3. Pontos: A, B, C e D e Retas: $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}$ e $\{B, C, D\}$.

Esse modelo satisfaz os dois axiomas de incidência. De fato, evidentemente existe pelo menos uma reta, então o Axioma 2 é satisfeito. E qualquer que seja a reta existe ponto que pertence a ela e ponto que não pertence a ela, satisfazendo, assim, também o Axioma 1.

Não por coincidência que em seu primeiro postulado, Euclides, resolve esses dois problemas (a existência de retas que se intersectam e que essa intersecção resulta em apenas em um ponto em comum) de maneira brilhante. Segundo Bicudo (2009), “Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto”. Esse axioma é bastante evidente e de fácil aceitação. É acrescentada à lista de axiomas uma versão moderna desse postulado.

Axioma 3. Dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e somente uma reta que os contém.

Uma verificação simples mostra que os modelos 1, 2 e 3 não satisfazem a essa geometria caracterizada pelos axiomas 1, 2 e 3. De fato, os modelos 1 e 2 têm dois pontos que não definem uma reta, contrariando o Axioma 3 e no Modelo 3, o Axioma 3 não é satisfeito pois dois pontos distintos não define uma única reta.

A partir do momento em que os três axiomas foram apresentados pôde-se fazer uma reflexão sobre como a geometria axiomática passou a ser dialogada entre os matemáticos. Eves aponta que

> Desde a década de 1950, aproximadamente, vem se fazendo várias tentativas de escrever textos de geometria em nível de ensino médio a partir de bases postulacionais, com a preocupação de um desenvolvimento rigoroso. Nesses casos, em geral, tem-se adotado ou o conjunto de postulados de Hilbert ou o de Birkhoff (muitas vezes com alterações). (Eves, 2011, p.657).

Nota-se, infelizmente, que os livros didáticos do ensino básico ainda não alcançaram o nível axiomático eficiente e por muitas vezes um conceito geométrico é muito mais profundo do que os apresentados na Educação Básica. Essa abordagem faz com que o estudo de geometria não sofra a reflexão exigida em sua construção e passe a ser uma reprodução de conceitos meramente mecânicos.

Ao avaliar os axiomas apresentados se percebe que os processos das construções geométricas são feitos de forma investigativa onde a cada instante um conceito pode ser redefinido a ponto de servir de base para uma próxima etapa da construção. O que está sendo apresentado é apenas uma maneira, de muitas outras, de se construir Geometria. Neste estudo, como já dito, foi adotado uma variação dos axiomas propostos pelo matemático George David Birkhoff (1884-1944), mas poderia ao invés disso ter escolhido outros axiomas ou até mesmo criar um novo ponto de partida para a construção da Geometria. Por exemplo, pode-se trocar o

Axioma 2 por outra versão que afirma: Existe pelo menos dois pontos distintos. Essa troca permitiria um caminho diferente para a construção de geometrias, porém neste caso específico, ambas as geometrias seriam equivalentes.

O cuidado que se deve ter na lista de axiomas é que eles devem ser independentes, ou seja, nenhum dos axiomas pode decorrer dos outros.

3.3 A INDEPENDÊNCIA DOS AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

Para mostrar que um Axioma p qualquer é independente dos demais, basta exibir um modelo que satisfaça todos os axiomas exceto o Axioma p. De fato, se o Axioma p fosse provado a partir dos demais axiomas, então o Axioma p se tornaria um teorema e seria válido em qualquer modelo que satisfizesse aqueles axiomas.

3.3.1 Independência do Axioma 1

Para provar que o Axioma 1 é independente, considere a geometria em que valem os Axiomas 2 e 3. O modelo seguinte é um modelo para esta geometria que não satisfaz o Axioma 1:

Modelo 4. Pontos: A, B e C e reta: $\{A, B, C\}$.

Note que o Modelo 4 satisfaz o Axioma 2, pois existe pelo menos uma reta e o Axioma 3, pois dois pontos definem uma única reta. Porém, o Axioma 1 não é satisfeito. De fato, não há ponto fora da reta dada. Portanto, o Axioma 1 é independente dos demais axiomas.

3.3.2 Independência do Axioma 2

Para provar que o Axioma 2 é independente, considere a geometria no qual valem os Axiomas 1 e 3. O modelo seguinte é um modelo para esta geometria que não satisfaz o Axioma 2:

Modelo 5. Ponto: A e reta: nenhuma reta.

Neste caso, os Axiomas 1 e 3 são satisfeitos por vacuidade, enquanto que o Axioma 2 não é satisfeito já que não existe uma reta.

3.3.3 Independência do Axioma 3

Para provar que o Axioma 3 é independente dos demais, considere a geometria em que valem os Axiomas 1 e 2. O Modelo 2, apresentado na seção 3.1, é um modelo para esta geometria que não satisfaz os Axioma 3.

Portanto, conclui-se que os três axiomas de incidência são independentes.

3.4 ALGUMAS PROPOSIÇÕES

Neste ponto em que foi construído um sistema axiomático que contém os objetos não definidos: ponto e reta; a relação de incidência: pertence a; e três axiomas, pode-se provar algumas afirmações, dentre elas os dois questionamentos feitos anteriormente:

- A existência de retas que se intersectam.
- Em caso afirmativo da existência dessas retas, haveriam quantos pontos em comum entre duas retas que se intersectam?

Definição 2. A geometria em que valem os três axiomas de incidência é denominada ***Geometria de Incidência***.

Definição 3. Três ou mais pontos são ***colineares*** quando todos eles pertencem a uma mesma reta. Do contrário, diz-se que eles são ***não colineares***.

Definição 4. ***Plano*** é o conjunto de todos os pontos.

As afirmações que seguem são todas em relação à Geometria de Incidência:

Proposição 2. Existem pelo menos três pontos distintos e não colineares.

Demonstração: Sejam A e B dois pontos distintos (Proposição 1). Considere uma reta r que passa por A e B (Axioma 3). Seja C um ponto não pertencente à reta r (Axioma 1) e, consequentemente, C é distinto e não colinear a A e B. Logo, A, B e C são três pontos distintos e não colineares. Está provada a proposição.

Proposição 3. Existem pelo menos três retas distintas.

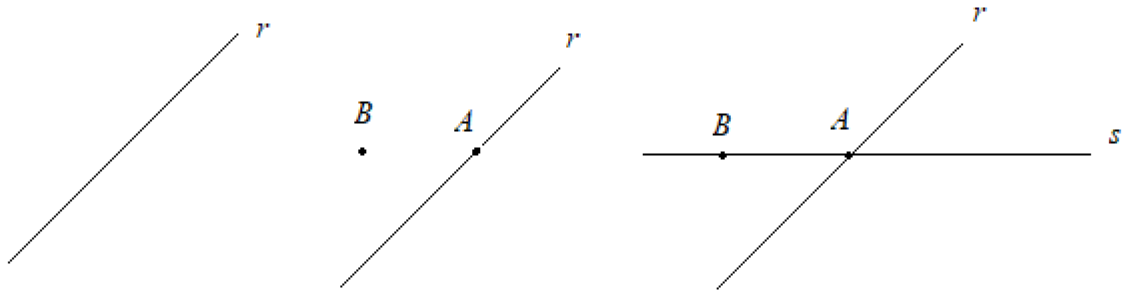
Demonstração: Sejam A, B e C três pontos distintos e não colineares (Proposição 2). Decorre do Axioma 3 que existe uma reta r determinada pelos pontos A e B, outra reta s determinada pelos pontos A e C e, finalmente, uma terceira reta t determinada pelos pontos B e C. As retas r, s e t são distintas. De fato, se as retas r e s fossem iguais, então *os* pontos A, B e C estariam em r e, portanto, seriam colineares o que é uma contradição. Analogamente, não se pode ter $r = t$ ou $s = t$. Está provada a proposição.

Proposição 4. Retas que se intersectam existem.

Demonstração: Seja r uma reta (Axioma 2). Seja A ponto em r e seja B ponto fora de r (Axioma 1). Seja s a reta determinada por A e B (Axioma 3). As retas r e s são retas que se intersectam, pois tem o ponto A em comum. Está provada a proposição.

A Figura 2 exibe um esboço dos três passos da demonstração. Nunca é demais lembrar que o desenho não é uma demonstração, contudo, ele pode ajudar a compreender a ideia que está sendo desenvolvida.

Figura 2 – Retas que se Intersectam Existem



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Proposição 5. Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Demonstração: Sejam, por hipótese, r e s duas retas distintas. Suponha por absurdo, que a interseção destas duas retas contenha pelo menos dois pontos em comum, a saber: A e *B.* Assim, A e B determinam duas retas distintas r e s, o que contraria o Axioma 3. Portanto, a interseção de r e s é vazia ou contém apenas um ponto. Está provada a proposição.

Proposição 6. Qualquer que seja o ponto A, existem pelo menos duas retas distintas que passam por ele.

Demonstração: Dado um ponto A, a Proposição 2 garante a existência de outro ponto B distinto de A. Seja r a reta determinada pelos pontos A e B (Axioma 3). Seja C um ponto não pertencente à reta r (Axioma 1). Tem-se, analogamente, a reta s determinada pelos pontos A e C (Axioma 3). As retas r e s são distintas já que o ponto C está em s, mas não em r. Logo, pelo ponto A qualquer existem pelo menos duas retas que passam por ele. Está provada a proposição.

Nota-se que a geometria que se tem até o momento, a Geometria de Incidência, decorrente do sistema axiomático dado pelos três axiomas de incidência, é bastante restritiva. De fato, nesta geometria é impossível provar certas afirmações elementares que se almejam serem verdadeiras, como: cada reta possui pelo menos dois pontos distintos. Para provar que é impossível provar esta afirmação é necessário apresentar um modelo que satisfaz os axiomas e que contradiz a afirmação. Esse modelo é apresentado a seguir.

Modelo 6. Pontos: $A, B\ e\ C$; retas: $\{A\}, \{A, B\}, \{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

Tem-se que este modelo satisfaz os três axiomas de incidência. De fato, para toda reta existe ponto que pertence e ponto que não pertence a ela, satisfazendo o Axioma 1. Tem-se pelo menos uma reta, de fato, existem quatro retas, portanto o Axioma 2 está satisfeito. E por último, dado dois pontos quaisquer esses pontos definem uma única reta, satisfazendo o Axioma 3. Assim, este é um modelo da Geometria de Incidência. Note que a reta $\{A\}$ desse modelo possui apenas um ponto. Então, a geometria de incidência admite modelo onde há retas com um único ponto. De acordo com o ***Princípio Fundamental dos Modelos***, isto significa dizer que na Geometria de Incidência é impossível provar que qualquer reta possui pelo menos dois pontos.

Outra afirmação básica é: existem pelo menos quatro pontos distintos. Esta é outra afirmação impossível de ser provada na Geometria de Incidência. De fato, se esta afirmação fosse verdadeira nesta geometria, seguiria do ***Princípio Fundamental dos Modelos*** que todos os modelos desta geometria teriam que possuir pelo menos quatro pontos distintos, contudo isto não ocorre no Modelo 6.

Outras duas situações que se pode refletir:

1. Se por um ponto qualquer passam exatamente m retas, então por qualquer outro ponto passará também exatamente a mesma quantidade de retas?
2. Se uma reta qualquer possui k pontos, então todas as retas também possuirão a mesma quantidade de pontos.

A Geometria de Incidência é incapaz de responder a esses dois questionamentos. De fato, o Modelo 6 apresenta o ponto A em que passam três retas distintas, o ponto B pelo qual passam apenas as retas $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$ e o ponto C no qual passam as duas retas distintas $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, mostrando a incapacidade de demonstrar que toda reta possui exatamente a mesma quantidade de pontos. Analogamente, o mesmo modelo apresenta uma reta com uma quantidade diferente de pontos em relação a outras retas, consequentemente, impossibilita a demonstração da segunda reflexão, no qual, retas deve possuir a mesma quantidade de pontos.

Conclui-se que a geometria até aqui construída apenas com esses três axiomas é insuficiente para adentrar em questões geométricas mais profundas, necessitando de outros axiomas. No capítulo a seguir é introduzida uma nova definição, a de retas paralelas e é abordada a importância dessa ideia para o desenvolvimento de uma nova geometria.

4 OS AXIOMAS DE PARALELISMO

Filosoficamente o interesse nos axiomas de paralelismo ocorreu pelo fato de não serem verdades evidentes como os demais axiomas. O próprio Euclides, em *Os Elementos*, protela o uso do seu axioma das paralelas o mais tarde possível, usando-o a partir da Proposição 29. Esses axiomas atraíram muitos matemáticos que suspeitavam da possibilidade desses axiomas serem deduzidos através dos axiomas anteriores, colocando-os assim na categoria de proposições. No final, o que se provou foi a existência de novas geometrias com a ausência dos axiomas de paralelismo ou com a novas versões desses axiomas.

Mas afinal, o que são retas paralelas? A Geometria de Incidência é capaz de provar a existência dessas retas? Este capítulo pretende responder a essas e outras questões referentes às retas paralelas.

4.1 RETAS PARALELAS

Definição 5. Duas retas são **paralelas** se não têm ponto em comum, ou seja, se elas não se intersectam.

A condição necessária para a existência de retas paralelas na Geometria de Incidência é dessas retas existirem em todo modelo para essa geometria, ou de modo contrapositivo, é não haver um modelo que satisfaça os três axiomas de incidência no qual não tenham retas paralelas. Caso exista um modelo na Geometria de Incidência que não admita retas paralelas, então, pelo Princípio Fundamental dos Modelos, tem-se a impossibilidade de provar a existências dessas retas nessa geometria. A seguir, é exposto um modelo da Geometria de Incidência que não admite retas paralelas:

Modelo 7. Pontos: A, B e C e retas: $\{A, B\}, \{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

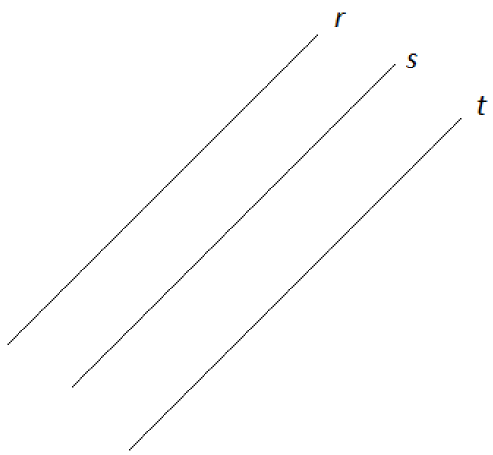
Esse modelo satisfaz os três Axiomas de Incidência. De fato, para qualquer reta existe ponto pertencente e ponto não pertencente a ela, satisfazendo o Axioma 1. Existe pelo menos uma reta, satisfazendo o Axioma 2. Dois pontos determinam uma única reta, satisfazendo o Axioma 3. Logo, é um modelo para a Geometria de Incidência.

A interseção entre duas retas quaisquer desse modelo é um conjunto não vazio, ou seja, sempre há pontos em comum. Portanto, não é possível afirmar a existência de retas paralelas usando apenas os Axiomas de Incidência. Para que elas existam, tem-se que declarar isto através de um novo axioma. Mas, a experiência aconselha a tomar um enunciado mais informativo do que apenas a afirmação de que retas paralelas existem. Trata-se de paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta: Se r é uma reta e P é um ponto fora de r, então existe uma reta paralela a r por P. Além disso, é desejável que, cada reta admita uma paralela a ela. Para isto a seguir introduz-se um novo axioma:

Axioma 4. Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P não pertencente a r, existe pelo menos uma reta paralela a r que passa por P. (Existência).

Uma questão relevante sobre retas paralelas é se possuem a propriedade transitiva, ou seja, dadas as retas r, s e t tais que r é paralela a s e s é paralela a t, isto implica em r paralela a t, como representado intuitivamente na Figura 3?

Figura 3 – Propriedade Transitiva entre Retas Paralelas



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A resposta para essa pergunta é: Na geometria formada pelos quatro axiomas visto até aqui não vale tal propriedade! De fato, pode-se apresentar um modelo que satisfaz os três Axiomas de Incidência e o novo axioma das paralelas no qual não vale a propriedade transitiva entre retas paralelas. Por exemplo, o Modelo 8 a seguir.

Modelo 8. Pontos: A, B, C, D, E e

Retas: $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\},\{C,D\},\{C,E\},\{D,E\}$.

O Modelo 8 satisfaz os três Axiomas de Incidência e o Axioma 4 de paralelismo. De fato, nota-se que para toda reta existe ponto pertencente a ela e ponto não pertencente a ela. O Axioma 2 é satisfeito, pois existe pelo menos uma reta. O Axioma 3 é satisfeito, pois as retas nesse modelo são compostas exclusivamente de dois pontos distintos, de modo que dois pontos definem uma única reta. Por último, o Axioma 4 é satisfeito nesse modelo, já que a Tabela 1 mostra que para qualquer que seja a reta e qualquer que seja o ponto fora dela existe uma reta passando por esse ponto com a propriedade de ser paralela a essa reta dada.

Tabela 1 – Visualização de Retas Paralelas a uma Reta Dada e um Ponto Fora Dela

Retas	***Ponto fora***	***Reta paralela***	***Ponto fora***	***Reta paralela***	***Ponto fora***	***Reta paralela***
$\{A,B\}$	C	$\{C,D\}, \{C,E\}$	D	$\{C,D\}, \{D,E\}$	E	$\{C,E\}, \{D,E\}$
$\{A,C\}$	B	$\{B,D\}, \{B,E\}$	D	$\{B,D\}, \{D,E\}$	E	$\{B,E\},\{D,E\}$
$\{A,D\}$	B	$\{B,C\}, \{B,E\}$	C	$\{B,C\}, \{C,E\}$	E	$\{B,E\}, \{C,E\}$
$\{A,E\}$	B	$\{B,C\}, \{B,D\}$	C	$\{B,C\}, \{C,D\}$	D	$\{B,D\}, \{C,D\}$
$\{B,C\}$	A	$\{A,D\}, \{A,E\}$	D	$\{A,D\}, \{D,E\}$	E	$\{A,E\}, \{D,E\}$
$\{B,D\}$	A	$\{A,C\}, \{A,E\}$	C	$\{A,C\}, \{C,E\}$	E	$\{A,E\}, \{C,E\}$
$\{B,E\}$	A	$\{A,C\}, \{A,D\}$	C	$\{A,C\}, \{C,D\}$	D	$\{A,D\}, \{C,D\}$
$\{C,D\}$	A	$\{A,B\}, \{A,E\}$	B	$\{A,B\}, \{B,E\}$	E	$\{A,E\}, \{B,E\}$
$\{C,E\}$	A	$\{A,B\}, \{A,D\}$	B	$\{A,B\}, \{B,D\}$	D	$\{A,D\}, \{B,D\}$
$\{D,E\}$	A	$\{A,B\}, \{A,C\}$	B	$\{A,B\}, \{B,C\}$	C	$\{A,C\}, \{B,C\}$

Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

O Modelo 8 é um contraexemplo que mostra que a propriedade transitiva das paralelas não vale nessa geometria. De fato, tem-se que a reta $\{A,B\}$ é paralela a reta $\{C,D\}$ e $\{C,D\}$ é paralela a $\{A,E\}$, entretanto, $\{A,B\}$ e $\{A,E\}$ não são paralelas, já que elas tem o ponto A em comum.

Nota-se, no Modelo 8, que por um ponto fora de uma reta qualquer existe pelo menos uma reta paralela à reta dada. Observe que dados a reta $\{A,B\}$ e o ponto C fora dessa reta, existem mais de uma reta passando por C que são paralelas à reta $\{A, B\}$, são elas: $\{C, D\}$ e $\{C, E\}$. Isto quer dizer que a geometria que se tem até o momento permite que por um ponto fora de uma reta dada passe mais de uma reta paralela a ela. Este fato fere uma noção intuitiva de paralelismo de retas, que é passada aos estudantes desde o Ensino Básico: "por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada". Para lidar com esta situação existem dois caminhos: o primeiro é o de manter esta noção intuitiva, e impor a existência de uma única paralela a uma reta por um ponto fora dela. O segundo é retirar a noção intuitiva. Para manter a noção intuitiva é, então, necessário inserir um novo axioma, que deve garantir a unicidade de paralelas. É este caminho que neste momento é escolhido. Contudo, posteriormente, na Seção 8.4, é apresentada uma ideia de uma geometria onde a noção intuitiva da unicidade de paralelas não existe.

Axioma 5. Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P não pertencente a r, existe no máximo uma reta paralela a r passando por P. (Unicidade).

Com a inserção desse novo axioma nota-se que o Modelo 8 não satisfaz a essa nova geometria que consiste dos cinco axiomas, pois, como se viu, por cada ponto fora de cada reta desse modelo, existe mais de uma reta paralela a ela que passa pelo ponto. Como consequência da inserção do Axioma 5 tem-se a possibilidade de provar a propriedade transitiva das paralelas e outras proposições. Consideram-se como premissas os axiomas de 1 a 5 e suas consequências.

4.2 ALGUMAS PROPOSIÇÕES

Proposição 7. Sejam r, s, t retas quaisquer. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t. (Transitividade)

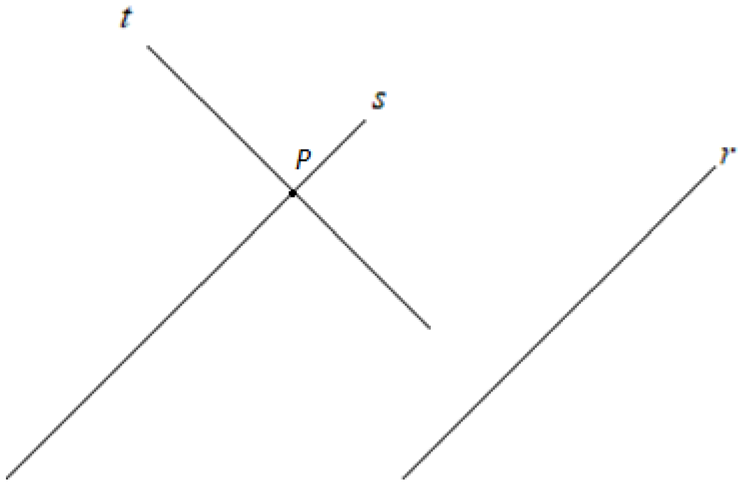
Demonstração: Por hipótese tem-se que as retas r e t são paralelas à reta s. Suponha por absurdo que a reta r não seja paralela à reta t. Segue que r e t se intersectam em um ponto P. Como r é paralela a s e P pertence a r tem-se que P não pertence à reta s. Assim, pelo ponto P fora de s passam duas paralelas r e t à reta s, o que contradiz o Axioma 5. Logo, r e t são paralelas. Está provada a proposição.

Em seguida é demostrado um importante lema, conhecido como Lema da Transversal, que auxilia para a demonstração de algumas proposições na sequência.

Lema 1. Sejam r e s retas paralelas. Se uma reta t intersecta s, então t intersecta r também. (Transversal).

Demonstração: Suponha por redução ao absurdo que t não intersecta r, a Figura 4 ilustra intuitivamente essa suposição. Logo t seria paralela a r (Definição 5). Porém, por hipótese tem-se que a reta t intersecta a reta s em um ponto P qualquer. Note que P não está em r. Portanto, pelo ponto P existem duas retas paralelas a reta r o que é um absurdo, pois contraria o Axioma 5. Logo, a reta t intersecta a reta r. Está provado o lema.

Figura 4 – Lema da Transversal



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Até o momento tem-se provada a existência de apenas três pontos, conforme Proposição 2. E agora, com a inclusão dos novos axiomas, faz-se necessário retomar a questão: quantos pontos tem uma geometria que satisfaz todos os axiomas que se tem até o momento?

Proposição 8. Existem pelo menos quatro pontos distintos.

Demonstração: Sejam três pontos distintos e não colineares A, B e C, (Proposição 2). Considere as retas r e s, determinadas pelos pontos A e B, A e C, respectivamente (Axioma 3). Seja t uma reta paralela a r que passa por C e u uma reta paralela a s que passa por B, ambas garantidas pelo Axioma 4. A reta u intersecta r no ponto B, segue do Lema 1 que u

intersecta t, em um ponto D. Tem-se que D é distinto dos pontos A, B e C. De fato, como a reta u intersecta r no ponto B, o ponto D não pode coincidir com ponto A, pois isto acarretaria que as retas u e r tivessem dois pontos em comum, o que é um absurdo. Como t é paralela a r passando por C e tem-se que D pertence à reta t, portanto D tem que ser distinto de B. Analogamente, D tem que ser distinto de C. Portanto, existem quatro pontos distintos. Está provada a proposição.

A Proposição 8 garante que numa geometria onde valem todos os cinco axiomas que se tem até o momento, existem, no mínimo quatro pontos. Portanto, qualquer modelo que satisfaça os cinco axiomas deve ter no mínimo quatro pontos. O corolário que segue vai garantir a existência de pelo menos seis retas.

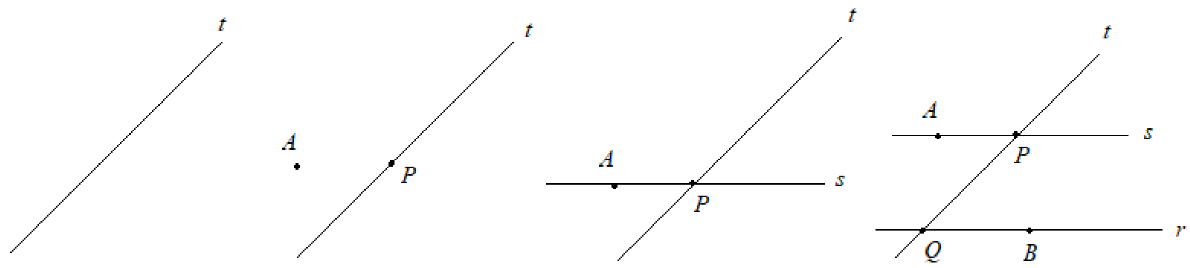
Corolário 1. Existem pelo menos seis retas.

Demonstração: Decorre da Proposição 8, que se tem quatro pontos distintos: A, B, C, D. Esses quatro pontos, dois a dois distintos, determinam seis retas, a saber: a reta r determinada pelos pontos A e B, a reta s determinada pelos pontos A e C, a reta t determinada pelos pontos A e D, a reta u determinada pelos pontos B e C, a reta v determinada pelos pontos B e D, a reta w determinada pelos pontos C e D. Essas retas são distintas, (Axioma 3). Está provado o corolário.

Proposição 9. Cada reta possui pelo menos dois pontos.

Demonstração: A Figura 5 pode ser usada para acompanhar intuitivamente essa demonstração. Seja t uma reta qualquer (Axioma 2). Seja P um ponto pertencente à reta t e A um ponto não pertencente à reta t (Axioma 1). Seja s a reta determinada pelos pontos A e P (Axioma 3). Seja B um ponto não pertencente à reta s (Axioma 1). Se B pertence à reta t, t tem dois pontos, P e B, e nada mais se tem a provar. Caso contrário, seja r uma reta paralela a reta s que passa pelo ponto B (Axioma 4). Tem-se que a reta t intersecta a reta r em um ponto denotado por Q (Lema 1). Os pontos P e Q são distintos, pois do contrário, as retas r e s teriam um ponto em comum o que contrariaria o fato delas serem paralelas. Conclui-se que a reta t possui pelo menos dois pontos. Está provada a proposição.

Figura 5 – Cada Reta Possui pelo Menos Dois Pontos



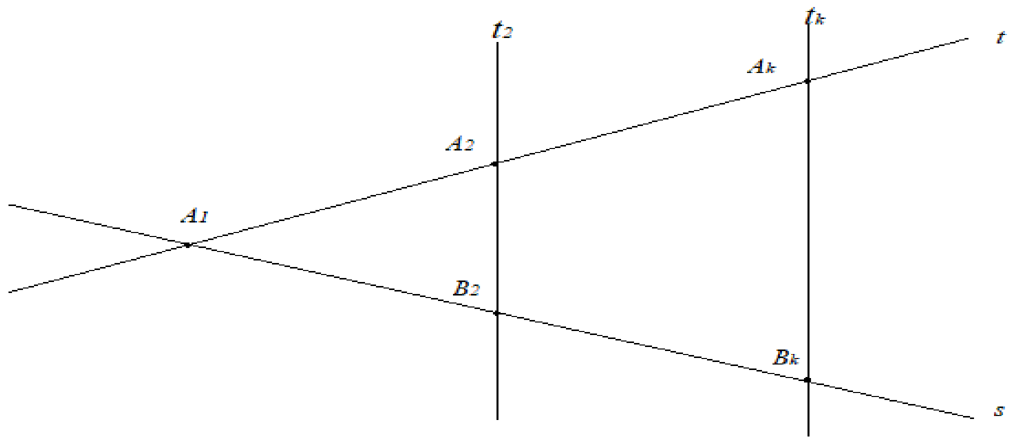
Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A introdução dos Axiomas de Paralelismo na Geometria de Incidência promove uma certa organização simétrica na geometria obtida. É o que revela os dois resultados seguintes.

Teorema 1. Se uma reta r possui exatamente k pontos, então qualquer reta s possui exatamente k pontos.

Demonstração: Com relação às posições relativas entre as retas r e s tem-se dois casos a considerar: s intersecta r e s é paralela a r. Inicia-se a análise com o primeiro caso (Figura 6). Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k$ os pontos pertencentes à r tal que A_1 também pertença à reta s (por hipótese as retas r e s se intersectam havendo, pela Proposição 5, um único ponto em comum). Tem-se por meio da Proposição 9 outro ponto na reta s, representado por B_2. Seja t_2 a reta determinada pelos pontos A_2 e B_2 (Axioma 3). Considere as retas $t_3, t_4, \dots, t_k$ retas paralelas à reta t_2 passando pelos pontos $A_3, A_4, \dots, A_k$, respectivamente (Axioma 4). Decorre da transitividade de retas paralelas, Proposição 7, que essas retas são paralelas entre si. De fato, dadas as retas t_i e t_j com $i \neq j$, e $i, j \in \{3,4,5, \dots, k\}$ tem-se que t_i é paralela a t_2, que por sua vez, é paralela à t_j. Segue da transitividade que t_i é paralela a t_j. As retas $t_3, t_4, \dots, t_k$ por serem paralelas entre si devem cortar a reta s em pontos denotados por $B_3, B_4, \dots, B_k$ respectivamente (Lema 1). Observe que os pontos B_j são distintos. De fato, pois do contrário se $B_j = B_i,\ j \neq i$, as retas t_i e t_j teriam um ponto B_j em comum o que seria um absurdo, pois as retas $t_3, t_4, \dots, t_k$ são paralelas entre si. Assim, tem-se que a reta s possui k pontos. Basta mostrar que são apenas esses k pontos. Para tal, suponha por redução ao absurdo que existe um ponto C em s, distinto dos pontos B_j, $j = 1,2,3, \dots, k$. Seja t uma reta paralela a t_2 passando por C (Axioma 4). Pelo Lema 1, t corta a reta r num ponto D distinto dos pontos A_j, pois do contrário infringiria o Axioma 5, da unicidade das paralelas. Mas isso é um absurdo, pois por hipótese a reta r não possui $k+1$ pontos. Logo, a reta s não pode possuir um ponto C distinto dos B_j pontos. Portanto, a reta s possui exatamente k pontos.

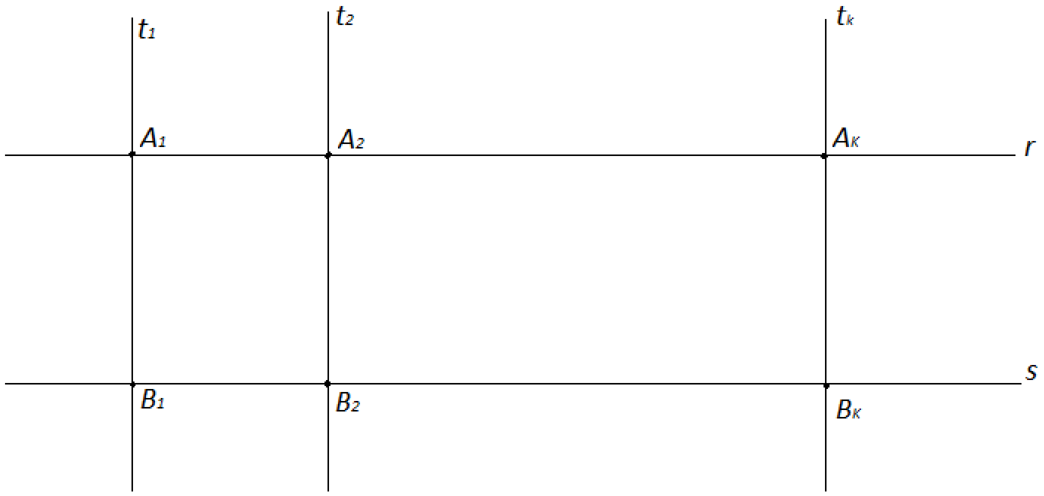
Figura 6 – Retas t e s Concorrentes



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Analisa-se o segundo caso no qual as retas r e s são paralelas (Figura 7). Seja B_1 um ponto da reta s (Axioma 1). Seja t_1 a reta determinada por A_1 e B_1 (Axioma 3). Seja t_2 a reta paralela a t_1 que passa pelo ponto A_2. Agora a demonstração continua como no primeiro caso. Está provado o teorema.

Figura 7 – Retas r e s Paralelas

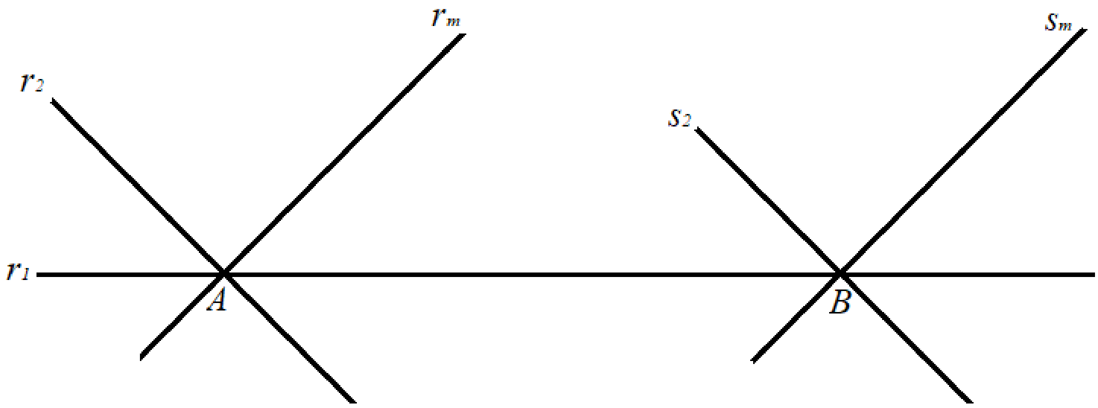


Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Teorema 2. Se por um ponto A passam exatamente m retas, então por outro ponto B qualquer também passam exatamente m retas (Figura 8).

Demonstração: Sejam $r_1, r_2, \dots, r_m$ as retas que passam pelo ponto A. Suponha que r_1 é a reta que também passa pelo ponto B (Axioma 3). Sejam $s_2, s_3, \dots, s_m$ as retas paralelas a $r_2, \dots, r_m$, que, respectivamente, passa pelo ponto B (Axioma 4). Pelo Axioma 5, tem-se que as retas s_j são distintas duas as duas. De fato, se duas delas coincidissem, a saber, $s_j = s_i$, então pelo ponto A se teria duas retas $r_i \; e \; r_j$ paralelas a uma mesma reta o que é absurdo. Logo, as retas s_j são distintas duas a duas. Portanto, pelo ponto B passam pelo menos m retas distintas. Basta mostrar que não podem passar mais do que m retas pelo ponto B. Suponha, por redução ao absurdo, que exista uma reta s diferente das retas s_j que passe pelo ponto B. Tome uma reta paralela a s passando pelo ponto A que não poderia coincidir com nenhuma das retas r_j, pois do contrário infligiria o Axioma 5, causando o mesmo absurdo mostrado anteriormente em relação a unicidade das paralelas. Desta forma, tem-se uma quantidade de $m + 1$ retas passando pelo ponto A o que é uma contradição. Logo, existem exatamente m retas passando pelo ponto B. Está provado o teorema.

Figura 8 – Quantidade de Retas que passam por um Determinado Ponto



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Não é demasiado relembrar o fato de que, neste trabalho, as figuras são utilizadas apenas como uma representação intuitiva. Elas não provam afirmações uma vez que são uma e apenas uma das muitas possíveis formas de representar objetos não definidos como ponto e reta, como já dito anteriormente.

4.3 INDEPÊNDENCIA ENTRE OS CINCO AXIOMAS

Uma das três exigências que os axiomas devem possuir é a independência, isto é, nenhum axioma pode ser uma consequência dos outros. Com a inserção de dois novos axiomas de paralelismo nota-se que o Axioma 1 é parcialmente dependente dos outros axiomas. De fato, uma parte do Axioma 1 pode ser deduzida a partir dos outros axiomas. Para isto, basta separar o Axioma 1 em duas partes. Relembrando o Axioma 1 afirma: Qualquer que seja a reta, existe ponto que pertence a ela e existe ponto que não pertence a ela. Reescrevendo o axioma da seguinte maneira:

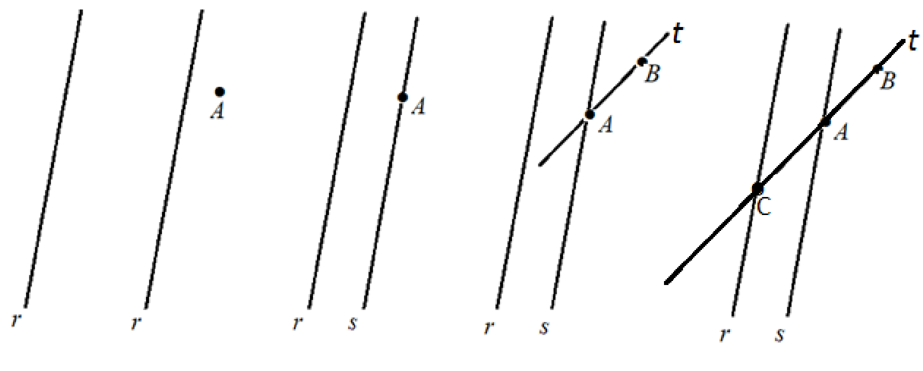
Hipótese: r é uma reta qualquer.

Tese : (a) Existe P que pertence a reta r.

(b) Existe Q que não pertence a reta r.

Deste modo, prova-se usando os Axiomas 1(b), Axioma 2, Axioma 3, Axioma 4 e Axioma 5 há existência de ponto na reta que é a parte (a) da tese do Axioma 1 (Figura 9). De fato, tem-se uma reta qualquer r (Axioma 2). Seja um ponto A que não pertence à reta r garantida pela parte (b) do Axioma 1. Em seguida, constrói-se a reta s paralela a reta r que pertence o ponto A (Axioma 4). Novamente, aplicando a parte (b) da tese do Axioma 1 toma-se o ponto B que não pertence à reta s. Se B pertence à reta r, nada mais a demonstrar. Caso contrário, depois, aplica-se o Axioma 3 e constrói-se uma reta t que passa pelos pontos A e B. Finalmente, aplica-se o Lema 1 para garantir que a reta t intersecta a reta r no ponto C. Portanto, existe um ponto C na reta r. Está provada a dependência do item (a) do Axioma 1 em relação aos outros axiomas.

Figura 9 – Dependência do Item (a) em Relação aos Demais Axiomas



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Portanto, o Axioma 1 de incidência pode ser substituído por:

Axioma 1. Qualquer que seja a reta, existe ponto que não pertence a ela.

Agora, pode-se mostrar a independência desses axiomas:

4.3.1 Independência do Axioma 1

Para provar a independência do Axioma 1, basta mostrar um modelo que satisfaz os outros quatro axiomas mas não satisfaz o Axioma 1. O modelo apresentado é o mesmo da Seção 3.3.1, Modelo 4, no qual foi provada a independência entre os Axiomas de Incidência. Bastando provar que esse modelo satisfaz os axiomas das paralelas. De fato, os axiomas 4 e 5 são satisfeitos pois a hipótese não está presente, por não existir ponto fora da reta. Portanto, a tese não pode ser contrariada. (Vacuidade).

4.3.2 Independência do Axioma 2

Em relação à independência do Axioma 2, pode-se utilizar o mesmo modelo da Seção 3.3.2, Modelo 5. Neste caso, os outros quatro axiomas são satisfeitos por vacuidade.

4.3.3 Independência do Axioma 3

Para provar que o Axioma 3 é independente dos demais quatro axiomas, considere o Modelo 2, já apresentado na seção 3.1: Pontos: A, B e C e retas: $\{A\}, \{B\}, \{C\}$.

Já foi provado que esse axioma é independente dos outros dois axiomas de incidência. Em relação ao Axioma 4, observa-se para todo ponto fora de qualquer reta existe uma reta paralela a reta dada, satisfazendo esse axioma. Note-se que essa reta paralela que passa pelo ponto dado é única, o que satisfaz o Axioma 5 da unicidade das paralelas. Portanto, o Axioma 3 é independente dos demais axiomas.

4.3.4 Independência do Axioma 4

O modelo que satisfaz os quatro axiomas, mas não satisfaz o Axioma 4 é o apresentado no início deste capítulo, Modelo 7: Pontos: A, B e C e retas: $\{A, B\}, \{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

Nota-se que os três axiomas de incidência são satisfeitos. O Axioma 5 é satisfeito, pois nesse modelo não há retas paralelas. Observe a sutileza no enunciado do Axioma 5: a existência de no máximo uma reta paralela passando pelo ponto fora da reta dada, o que quer dizer que ou não tem paralela ou tem uma apenas. Ou seja, não havendo paralela, ele está satisfeito.

4.3.5 Independência do Axioma 5

Para provar a independência do Axioma 5 em relação aos demais axiomas, considere o modelo 9:

Modelo 9. Pontos: A, B, C e retas: $\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}$.

Qualquer que seja a reta existe ponto fora dela, satisfazendo o Axioma 1. Analogamente, existe pelo menos uma reta, satisfazendo o Axioma 2. Dois pontos definem uma única reta, logo, o Axioma 3 está satisfeito. Por último, o Axioma 4 é satisfeito, pois, para toda reta e todo ponto fora dela, é possível encontrar pelo menos uma reta paralela à reta dada que passa por esse ponto. Mas o Axioma 5 não é satisfeito. De fato, para contra exemplo, considere a reta $\{A\}$ e o ponto B não pertencente a ela. Note que por B passam duas paralelas à reta $\{A\}$, a saber: $\{B, C\}$ e $\{B\}$, infringindo o Axioma 5. Portanto, o Axioma 5 é independente dos demais quatro axiomas.

Um importante comentário pode ser feito em relação à validade do Axioma 3 no Modelo 9. Alguém pode indagar, equivocadamente, que as retas $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$ não satisfazem o Axioma 3, pois possuem um único ponto. Ora, a exigência do Axioma 3 é que a cada par de pontos distintos, exista uma única reta que os contém. Isso é satisfeito, já que para o par A e B, há a única reta $\{A, B\}$ que os contém; para o par A e C, há a única reta $\{A, C\}$ que os contém e para o par B e C, há a única reta $\{B, C\}$ que os contém, esgotando todas as possibilidades de se tomar pares de pontos nesse modelo.

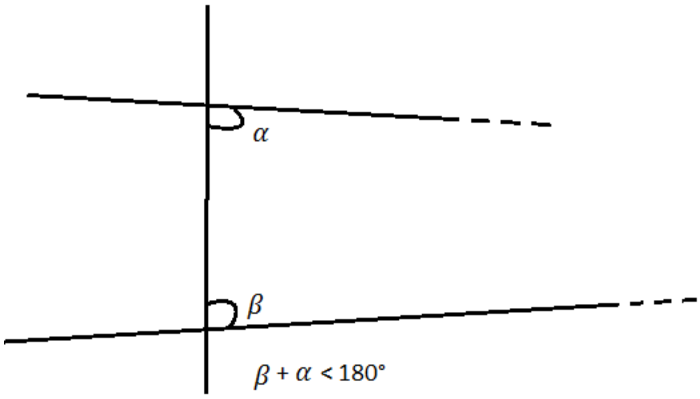
Esses cinco independentes axiomas e suas consequências formam uma geometria. Essa geometria é distinta da geometria criada por Euclides, estudada nos colégios, denominada Geometria Euclidiana. De fato, existem várias geometrias distintas dependendo do conjunto de axiomas fixados.

Uma das características que diferenciam essas duas geometrias pode ser notada através do quinto Postulado de Euclides, no qual, ele prolonga retas ilimitadamente. Essa ideia não pode ser sustentada pelos axiomas construídos até o momento, no sentido que eles não garantem que retas sejam ilimitadas, uma vez que permitem modelos em que as retas admitem uma quantidade finita de pontos. De fato, é possível apresentar modelos em que cada reta possui dois pontos ou três pontos. Isto impede que se possa provar que retas tenham infinitos pontos. Contudo, é desejável que as retas de uma geometria tenham uma quantidade infinita de pontos e o motivo para isto, juntamente com a forma de se obter retas infinitas, é o que é apresentado no capítulo seguinte.

5 O AXIOMA DA RÉGUA

Segundo Bicudo (2009, p.98) na tradução da obra *Os Elementos*, o quinto postulado é enunciado da seguinte forma: “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontra-se no lado no qual estão os menores do que dois retos”.

Figura 10 – Retas Cortadas por uma Transversal



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Observe-se o termo “ilimitadamente” exige que as retas em questão possam se prolongar o tanto que for necessário para se encontrarem (Figura 10). A noção por trás desse postulado é a de infinito. Para se prologar uma reta ilimitadamente é necessário que a mesma possua infinitos pontos. Todavia, apenas com os axiomas inseridos até agora não se pode garantir a existência de retas infinitas. De fato, o modelo exibido no Corolário 1 possui apenas quatro pontos e seis retas, no qual cada reta possui apenas dois pontos, e o mesmo satisfaz todos os cinco axiomas. Portanto, para que cada reta possua infinitos pontos deve-se declarar isto na forma de axioma.

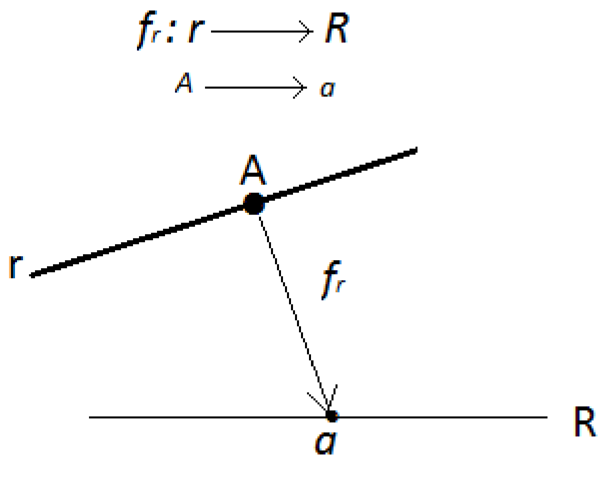
A escolha do axioma deve priorizar a sua manipulação matemática. Não se pode apenas enunciar: “uma reta possui infinitos pontos”, pois a introdução de um novo axioma deve permitir a descoberta de novas definições e ideias para essa geometria. Para a inserção do novo axioma deve-se inserir a linguagem de conjuntos, devida esta ser a mais adequada quando se trabalha com objetos infinitos. Quase tudo que se trata sobre teoria de conjuntos decorre dos esforços de grandes matemáticos como Cantor, Dedekind entre outros. Eves assinala que

> A teoria dos conjuntos, criada por Georg Cantor perto do final do século XIX, logo despertou um interesse generalizado muito grande e praticamente não há hoje nenhum campo da matemática que não tenha recebido seu impacto. As noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos (Eves, 2011, p. 659).

Fica a cargo do leitor a busca desse estudo sobre conjuntos. Aos leitores interessados recomenda-se a leitura dos capítulos I, II e III de Lima (2014).

A construção da ideia de retas com infinitos pontos tem inspiração e relação com o conceito de conjuntos infinitos. Uma reta é relacionada com um conjunto infinito. Porém, como Cantor já revelou, existem conjuntos infinitos de diferentes cardinalidades. É adotada para a reta a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), pois se deseja que as retas sejam contínuas e o conjunto dos números reais possui a cardinalidade do *continuum*. Isso é feito via um axioma, que impõe a condição de que cada reta se relaciona necessariamente com o conjunto dos números reais de forma bijetiva. Mais especificamente, o próximo axioma garante para cada reta r da geometria a existência de uma função bijetora $f_r: r \to \mathbb{R}$ que a cada ponto A de r associa o número real $a = f_r(A)$. Uma ideia esquematizada da ação de tal função é dada na Figura 11.

Figura 11 – Função que Relaciona um Ponto de uma Reta r a um Número Real



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Um conceito importante para a geometria, herdado do conjunto dos números reais, é o de distância entre dois pontos. Afinal, a palavra geometria tem como significado original “medida da terra”. O surgimento da geometria se deu pela necessidade de calcular certas medidas relacionadas às distâncias. Quando se pensa em distância entre dois objetos, o que se tem em mente é um número real não-negativo. Assim, a distância entre dois objetos pode ser vista como um número associado aos dois objetos. Isto remete à ideia de uma função que a cada par de objetos associa um número real não-negativo.

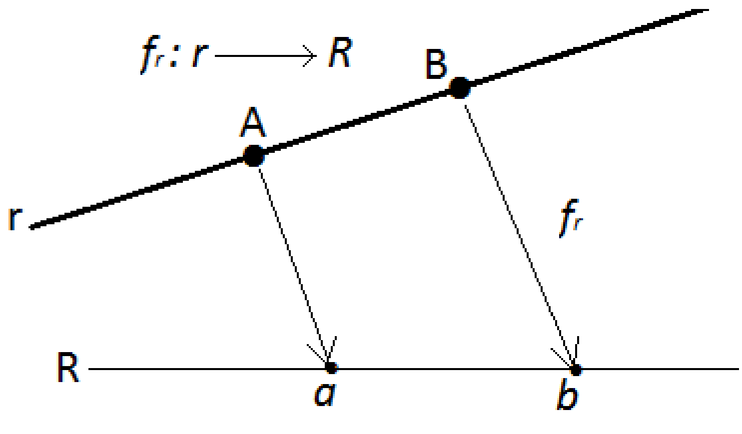
Em geometria, é desejável calcular distâncias entre dois pontos. Então, surgem questões do tipo: dados dois pontos A e B o que seria a distância entre eles? Como calcular a distância entre eles? Para uma resposta, é necessário olhar primeiramente para o conjunto dos números reais e observar ideia de distância nesse conjunto. É sabido que a distância entre dois números reais a e b é dada por $|a - b|$.

Esta noção de distância entre números reais, juntamente com a já mencionada ideia de função bijetora f_r entre retas e números reais, possibilita definir distância entre dois pontos numa geometria. De fato, dados quaisquer dois pontos A e B numa geometria, existe uma reta r que os contém, se a esta reta for possível associar uma função bijetora $f_r: r \to \mathbb{R}$, então, também é possível definir uma distância entre os pontos A e B da seguinte forma:

$$d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)| = |a - b|.$$

Esta noção de distância está esquematizada na figura 12.

Figura 12 – Distância entre Dois Pontos



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Contudo, em relação à geometria presente, com apenas cinco axiomas, nada se pode afirmar sobre a ideia de distância entre dois pontos.

Incorporando as ideias de reta infinita através de um olhar direcionado à teoria de conjuntos e o conceito de distância entre dois pontos anuncia-se o Axioma da Régua. Este axioma produz o efeito de “colar” uma “régua enumerada” em cada reta dada, possibilitando calcular distância entre dois pontos quaisquer da geometria. Por este motivo ele é conhecido como Axioma da Régua.

5.1 AXIOMA DA RÉGUA E O MODELO CARTESIANO

Axioma 6 (da régua). Existe uma função $d: \wp x \wp \to \mathbb{R}$ e, para cada reta r, existe uma função bijetora $f_r: r \to \mathbb{R}$, associada com d por $d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)|$, quaisquer que sejam os pontos A e B de r. [Aqui, $\wp$ representa o conjunto de todos os pontos.]

A função d é denominada *função distância* e o número real $d(A,B)$ é a *distância* entre os pontos A e B. A função f_r é um *sistema de coordenadas* para a reta r e o número $f_r(A)$ é a *coordenada* do ponto A dada pelo sistema de coordenadas f_r.

A princípio esse axioma parece não ter relação nenhuma com o objetivo de retas possuírem infinitos pontos, pois ele apenas afirma que existe um sistema de coordenadas denotado por f_r para qualquer reta r associado a uma função d que se denomina distância. No entanto, nenhum dos modelos apresentados até o momento com um número finito de pontos em cada reta satisfaz esse novo axioma. De fato, se cada reta possui um número finito de pontos tem-se que é impossível construir uma bijeção entre a reta e o conjunto dos números reais, devido a impossibilidade de bijeção entre um conjunto finito e o conjunto dos números reais. Portanto, a partir da introdução deste novo axioma, cada reta dessa nova geometria possui, necessariamente, infinitos pontos.

Um modelo que satisfaz os seis axiomas apresentados até o momento é agora exibido, o ***Modelo Cartesiano***.

Modelo 10. **(Modelo Cartesiano)** Nesse modelo o ponto é representado através de um par ordenado de números reais (x, y). A reta é representada pelo conjunto de pontos (x, y) que satisfaz uma equação do primeiro grau $ax + by + c = 0$. Esta equação pode ser escrita de outra forma: caso a reta seja vertical ela pode ser representada, simplesmente, por $x = k$, sendo k o valor da abscissa do ponto em que a reta cota o eixo x; caso a reta seja horizontal ou inclinada, ela é representada por $y = mx + b$. A relação de incidência é definida por: um ponto pertence à reta se as suas coordenadas (x, y) satisfazem a equação da reta.

Exemplo 1. Seja a reta r dada por $y = 2x - 1$ e os pontos $A(3,5)$, $B(-1,-3)$ e $C(2,7)$. Tem-se que A pertence à reta r, pois $5 = 2.(3) - 1$ e C não pertence à reta r, pois $7 \neq 2.(2) - 1$.

Para satisfazer as exigências do Axioma 6, o Modelo Cartesiano deve possuir uma função distância e uma função que represente um sistema de coordenadas. Para a função distância toma-se a fórmula dada na definição 6.

Definição 6. A **distância cartesiana** entre dois pontos quaisquer A e B é dada por $d_c(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, Sendo $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. (Usa-se d_c para indicar que se trata da distância cartesiana).

Considere o exemplo 1. A distância cartesiana entre os pontos A e B será:

$$d_c(A,B) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ .$$

Definição 7. O **sistema de coordenadas cartesiano** f_r para cada reta r dada no modelo cartesiano é assim definido:

(a) Se a reta r é vertical, dada por $x = k$, para cada ponto (k, y) de r tem-se a função: $f_r(k,y) = y$.

(b) Se a reta r é não vertical, dada por $y = mx + b$, para cada ponto (x, y) de r tem-se a função :

$$f_r(x,y) = x\sqrt{1+m^2}.$$

Ainda considerando o Exemplo 1 para a reta r e os pontos A e B tem-se, $f_r\ (A)\ = f_r(3,5) = 3\sqrt{1+2^2} = 3\sqrt{5}$ e $f_r(B) = f_r(-1,-3) = -1\sqrt{1+2^2} = -\sqrt{5}$. Logo,

$$d(A,B) = 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - \left(-\sqrt{5}\right) = |f_r(A) - \ f_r(B)|.$$

É evidente que o exemplo acima mostra que nos pontos A e B o sistema de coordenadas satisfaz a igualdade com a função distância. Entretanto, isso não basta para provar que o Modelo Cartesiano satisfaz o axioma da régua, pois se deve mostrar que para quaisquer pontos A e B existe essa igualdade, além disso, se deve mostrar que a função do sistema de coordenadas é bijetiva e finalmente, deve-se provar que o Modelo Cartesiano satisfaz os outros cinco axiomas.

Para verificar o Axioma 1 de incidência, tem-se que analisar os dois casos possíveis. Primeiramente, para a reta vertical $x = k$, tem-se o ponto $(k + 1{,}0)$ não pertencente a essa reta. Em seguida, para a reta não vertical $y = mx + k$, tem-se o ponto $(0, k + 1)$ não pertencente a reta. Portanto, o Axioma 1 que afirma que existe ponto fora de uma reta qualquer está satisfeito.

Para verificar o Axioma 2 se tem a reta vertical que passa pela origem, ou seja, $x = 0$ e, portanto o Axioma 2 é satisfeito.

Para verificar o Axioma 3 considere dois pontos quaisquer $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Se $x_1 = x_2$, existe a reta vertical $x = x_1$, única, que os contém. Se $x_1 \neq x_2$, então existe a reta $y = mx + k$, única, que os contém, sendo $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $k = y_1 - mx_1$. De fato, suponha que essa reta não é única. Tem-se, outra reta, $y = m'x + k'$ que contém os pontos A e B. Assim:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + k \\ y_1 = m'x_1 + k' \end{cases} \text{e} \begin{cases} y_2 = mx_2 + k \\ y_2 = m'x_2 + k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_1 + k = m'x_1 + k' \\ mx_2 + k = m'x_2 + k' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(x_2 - x_1) = m'(x_2 - x_1) \overset{x_1 \neq x_2}{\Longleftrightarrow} m = m'.$$

Se $m = m'$, então $k = y - mx = y - m'x = k'$.

Logo, é única a reta que contém os pontos A e B. Portanto, o Axioma 3 em que cada par de pontos define uma única reta e é satisfeito.

Para a verificação do Axioma 4 seja r uma reta qualquer e P um ponto não pertencente a reta r. Se r é vertical, $x = k$ e $P = (a, y)$, tal que $a \neq k$, então existe a reta s vertical, $x = a$, que é paralela a reta r e que passa pelo ponto P. Se r é não vertical, $y = mx + k$ e $P = (a, b)$, existe uma reta s, $y = mx + k_1$, sendo $k_1 = b - ma$, que é reta paralela a r, pois possuem o mesmo coeficiente angular e passa pelo ponto P. Portanto, o Axioma 4 é satisfeito.

As retas paralelas construídas no parágrafo anterior são únicas. De fato, no caso de vertical, qualquer reta s' que passa pelo ponto $P = (a, y)$ tem a equação $x = a$ e, assim é a mesma reta s, garantindo a unicidade. No caso de não vertical, suponha que exista outra reta paralela a r que passa pelo ponto $P = (a, b)$ denotada por s'. Essa reta possui o mesmo coeficiente angular m, assim a sua equação é dada por $y = mx + k_2$. Como ela passa pelo ponto $P = (a, b)$, tem-se

$$b = ma + k_2 \Leftrightarrow k_2 = b - ma.$$

Logo $k_1 = k_2$. E, portanto, é única a reta paralela à reta r que passa por P sendo assim, o Axioma 5 satisfeito.

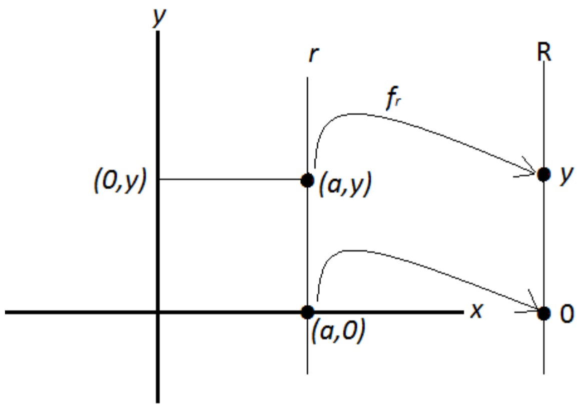
Por último, verifica-se o Axioma 6. São utilizadas as definições 10 e 11 sobre distância e sistemas de coordenadas cartesianas.

Primeiro Caso: se a reta r é vertical $(x = k)$ (Figura 13). Para quaisquer pontos $A = (k, y_1)$ e $B = (k, y_2)$ de r tem-se a função $f_r(k, y) = y$ como sistema de coordenadas. É obvio que $f_r: r \to \mathbb{R}$ é bijetora. Note que:

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(k, y_1) - f_r(k, y_2)| = |y_1 - y_2| = \sqrt{(k-k)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d_c(A, B)$$

satisfaz a igualdade do Axioma 6.

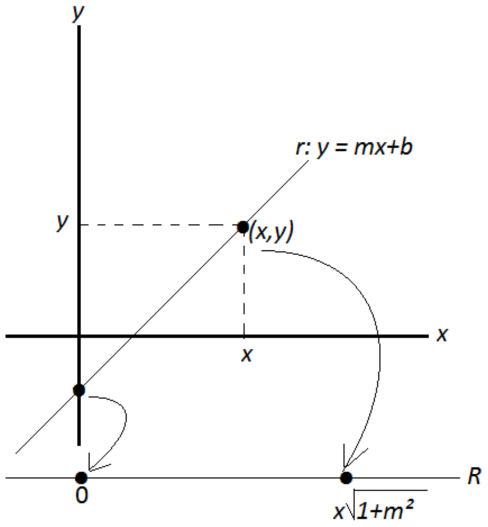
Figura 13 – Primeiro Caso em que a Reta é Vertical



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Segundo Caso: em que a reta r é não-vertical (Figura 14), de equação $y = mx + b$, tem-se a função $f_r(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}$ como sistema de coordenadas. Note que para dois pontos quaisquer $A = (x_1, mx_1 + b)$ e $B = (x_2, mx_2 + b)$ em r, deve-se ter: $d_c(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (mx_1 + b - mx_2 - b)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$ $=$ $= |x_1 - x_2|\sqrt{1 + m^2} = \left|x_1\sqrt{1 + m^2} - x_2\sqrt{1 + m^2}\right| = |f_r(A) - f_r(B)|$, satisfazendo o igualdade do Axioma 6. Resta mostrar que $f_r: r \to \mathbb{R}$ é bijetora. Suponha que $f_r(x_1, y_1) = f_r(x_2, y_2)$. Então $x_1\sqrt{1+m^2} = x_2\sqrt{1+m^2}$, donde $x_1 = x_2$ e $y_1 = mx_1 + b = mx_2 + b = y_2$. Portanto, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e f_r é injetora. Para provar que f_r é sobrejetora basta notar que para todo número real z dado, quer-se determinar um ponto (x, y) em r tal que $f_r(x, y) = x\sqrt{1+m^2} = z$. Basta fazer: $x = \frac{z}{\sqrt{1+m^2}}$ e $y = \left(\frac{mz}{\sqrt{1+m^2}}\right) + b$. Portanto f_r é bijetora. Assim, o Axioma 6 está satisfeito.

Figura 14 – Segundo Caso em que a Reta é Não-Vertical



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Portanto, o Modelo Cartesiano satisfaz os seis axiomas.

Com a inclusão do Axioma da Régua a geometria construída a partir desses seis axiomas e suas consequências, permite explorar novas ideias e conceitos. Por exemplo, é possível definir ***circunferência***, uma vez que para a sua definição basta o conceito de distância que já se tem. O mesmo não ocorre com a definição de ***triângulo***, pois se precisa, *a priori*, da definição de ***segmento***. Este, por último, necessita de uma relação de ponto ***"está entre"*** dois pontos. Essa ideia é bastante sutil, muitos autores abordam-na como axioma, por exemplo em Barbosa (2012).

5.2 DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES

Proposição 10. Para quaisquer pontos A e B, $d(A,B) \geq 0$. E $d(A,B) = 0$ se, e somente se $A = B$, isto é, se, e somente se A e B forem na verdade o mesmo ponto.

Demonstração: Seja A e B dois pontos quaisquer não necessariamente distintos. Seja r uma reta que passa por esses dois pontos (Axioma 3). Seja f_r uma função sistema de coordenadas para a reta r (Axioma 6). Pelo Axioma 6 sabe-se $d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)|$. Isto implica que $d(A,B) \geq 0$. Suponha-se que A e B sejam na verdade o mesmo ponto. Então suas coordenadas $f_r(A)$ e $f_r(B)$ são o mesmo número real, então $d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)| = 0$. Agora, suponha-se que A e B não sejam o mesmo ponto. Como esses pontos estão em uma relação biunívoca com os números reais, então as coordenadas $f_r(A)$ e $f_r(B)$ não são o mesmo número real. Então, a diferença $|f_r(A) - f_r(B)|$ não é zero e, portanto, $d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)| \neq 0$. Os dois passos anteriores implicam que $d(A,B) = 0$ se, e somente se $A = B$. Está provada a proposição.

Proposição 11. Para quaisquer pontos A e B, $d(A,B) = d(B,A)$, ou seja, a função distância é simétrica.

Demonstração: Seja A e B dois pontos quaisquer. Seja r uma reta que passa por esses dois pontos (Axioma 3). Seja f_r uma função coordenada para a reta r (Axioma 6). Tem-se:

$$d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(B) - f_r(A)| = d(B,A).$$

E está provada a proposição.

Definição 8. Uma **circunferência** de centro C e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos P tais que $d(P,C) = r$. O ponto Q está no interior se $d(Q,C) < r$; está no exterior se $d(Q,C) > r$. Em linguagem simbólica matemática:

$$Circ(C,r) = \{P \in \wp; d(P,C) = r\}.$$

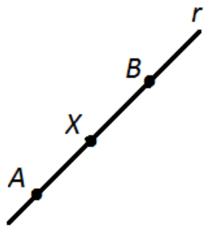
Definição 9. Diz-se que um ponto X **está entre** os pontos A e B (X distinto de A e B) se:

(1) A, Be X incidem na mesma reta, ou seja, são pontos colineares.

(2) $d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)$.

Usa-se a notação $A * X * B$, para indicar que X está entre A e B.

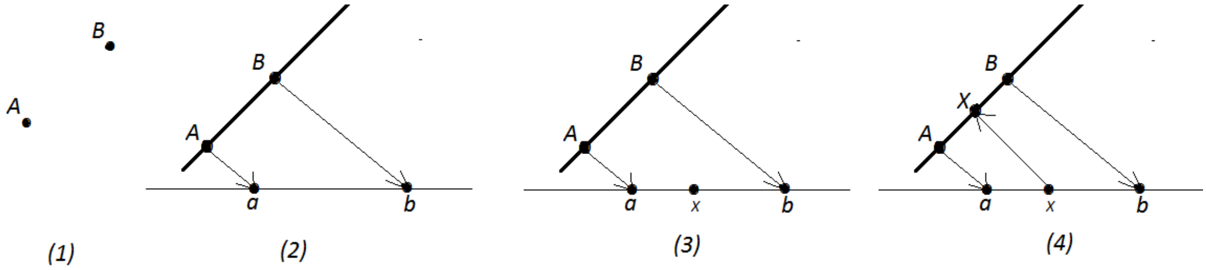
Figura 15 – Ponto X entre os Pontos A e B



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Uma definição por si só não garante a existência do objeto definido. Precisa-se garantir os passos de uma construção de modo que dado dois pontos quaisquer A e B exista um ponto X entre A e B.

Figura 16 – Passos da Construção de um Ponto X entre A e B



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A Figura 16 indica os passos da construção de um ponto X entre A e B.

(1) Começa-se com os dois pontos A e B.

(2) Toma-se a reta r que passa por A e B e, em $\mathbb{R}$, toma-se os números a e b, que são as coordenadas dos pontos A e B em relação a um sistema de coordenadas f_r de r em $\mathbb{R}$, ou seja, $f_r(A) = a$ e $f_r(B) = b$.

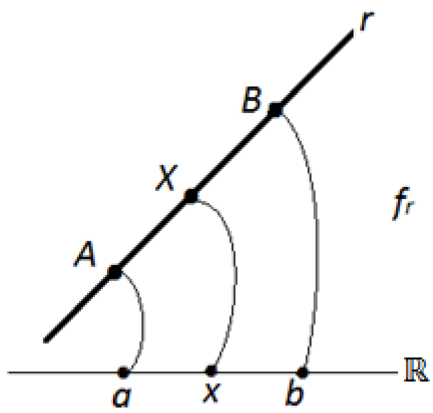
(3) Toma-se um número real x entre os números a e b (esta é uma propriedade dos números reais; x pode ser, por exemplo, $\frac{(a+b)}{2}$).

(4) Toma-se o ponto X da reta r, que é o ponto que é levado em x por f_r.

A questão que se coloca é: o ponto X está entre A e B? Sim; isto decorre da Proposição 12, a seguir.

Proposição 12. Seja r a reta que contém os pontos A, B e X e seja f_r uma bijeção entre r e $\mathbb{R}$ associada à distância d. Sejam $x = f_r(X)$, $a = f_r(A)$ e $b = f_r(B)$. Então, X está entre A e B se e somente se x está entre a e b.

Figura 17 – Proposição 12



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Demonstração:

Nota-se que para os números reais x, a e b, a relação x está entre a e b significa $a < x < b$ ou $b < x < a$. Observe que, x está entre a e b se, e somente se, $|a - x| + |x - b| = |a - b|$. A afirmação anterior é uma propriedade dos números reais cuja demonstração foge do escopo desse trabalho. Os leitores interessados podem encontrar a demonstração em Lima (2014), na página 48.

O “Se, e somente se” do enunciado da proposição significa que se está diante de dois teoremas, cujas hipóteses e tese são:

(1) Hipótese: Xestá entre A e B; Tese: x está entre a e b.

(2) Hipótese: x está entre a e b*;* Tese: Xestá entre A e B.

Demonstração de (1). Observa-se, pelo Axioma de Régua, que estando A, B e X na reta r tem-se:

$d(A, X) = |a - x|$, $d(X, B) = |x - b|$ e $d(A, B) = |a - b|$

Agora, partindo da hipótese de que X está entre A e B, então, $d(A, X)$+ $d(X, B)$ = $d(A, B)$. Substituindo os valores, tem-se:

$|a - x|$+$|x - b|$ = $|a - b|$ (*).

Desta igualdade decorre que x está entre a e b.

Demonstração de (2). Da hipótese (x está entre a e b) decorre a igualdade acima (*) e, desta última, resulta que $d(A, X)$+ $d(X, B)$ = $d(A, B)$. Logo, X está entre A e B.

Definição 10. Dado dois pontos A e B, chama-se **segmento $\boldsymbol{AB}$** o conjunto formado pelos pontos entre A e B, incluindo os pontos A e B. Em notação matemática:

$$seg(AB) = \{A, B\} \cup \{X; A * X * B\}.$$

Definição 11. Dado três pontos não colineares A, B e C, **triângulo $\boldsymbol{ABC}$** é o conjunto formado pelos pontos que estão nos segmentos AB, AC e BC. Em notação matemática:

$$\Delta ABC = seg(AB) \cup seg(AC) \cup seg(BC).$$

Definição 12. Chama-se **Ponto médio** de um segmento AB a um ponto M deste segmento, tal que $d(A, M) = d(M, B)$.

Com a Definição 12, é necessário mostrar que o objeto definido existe. Isto é feito através da consequência direta da Proposição 12. Por isso, é enunciado na forma de corolário a seguir:

Corolário 2. Um segmento tem exatamente um ponto médio.

Demonstração:

(Existência): Sejam a e b coordenadas das extremidades do segmento AB. Considere o número real $c = \left(\frac{a+b}{2}\right)$. Pelo Axioma 6, existe um ponto C da reta que tem c por coordenada. Como:

$$AC = |a - c| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

$$CB = |c - b| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

Conclui-se que $AC = CB$. Como o número real $c = \left(\frac{a+b}{2}\right)$ está entre a e b, segue-se da Proposição 12 que C está entre A e B. Logo, C é ponto médio de AB.

(Unicidade): Seja C como obtido na prova da existência e seja C' outro ponto do segmento AB, tal que $AC' = BC'$. Sejam a, b e c' as respectivas coordenadas dos pontos A, B e C'. Então, tem-se:

$$c' - a = b - c', \text{ no caso em que } a < c' < b,$$
$$a - c' = c' - b, \text{ no caso em que } b < c' < a.$$

Em ambos os casos a conclusão é que

$$c' = \left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Assim, $c' = c$ e, portanto, pelo Axioma 6, $C = C'$. E está provada a unicidade do ponto médio.

5.3 A INDEPENDÊNCIA DO AXIOMA DA RÉGUA

Para provar a independência do Axioma da Régua em relação aos demais cinco axiomas apresentados, basta exibir um modelo no qual valem todos os axiomas, exceto o Axioma da Régua. Trata-se de um modelo de geometria com uma quantidade finita de pontos, por exemplo, o modelo com os pontos: A, B, C, D e retas : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$. De fato, consta na Tabela 2 que para toda reta existe ponto que pertence a ela e ponto que não pertence a ela, satisfazendo o Axioma 1.

Tabela 2 – Modelo Satisfazendo Axioma 1

Retas	Ponto Pertencente	Ponto não Pertencente
$\{A, B\}$	A	C
$\{A, C\}$	A	B
$\{A, D\}$	A	B
$\{B, C\}$	B	A
$\{B, D\}$	B	A
$\{C, D\}$	C	A

Para o Axioma 2 a verificação é imediata. Na Tabela 3 verifica-se que o Axioma 3 no qual dois pontos distintos determinam uma única reta também é satisfeito.

Tabela 3 – Modelo Satisfazendo Axioma 3

Dois Pontos Distintos	Reta
A, B	$\{A, B\}$
A, C	$\{A, C\}$
A, D	$\{A, D\}$
B, C	$\{B, C\}$
B, D	$\{B, D\}$
C, D	$\{C, D\}$

Por fim, na Tabela 4 tem-se a verificação dos dois axiomas das paralelas. Nota-se que para toda reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a ela passando por este ponto.

Tabela 4 – Modelo Satisfazendo Axioma 4

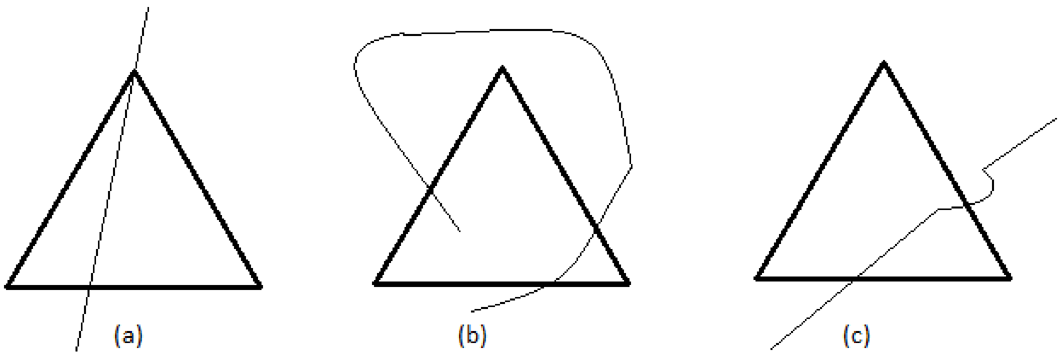
Retas	***Ponto Fora***	***Reta Paralela***	***Ponto Fora***	***Reta Paralela***
$\{A, B\}$	C	$\{C, D\}$	D	$\{C, D\}$
$\{A, C\}$	B	$\{B, D\}$	D	$\{B, D\}$
$\{A, D\}$	B	$\{B, C\}$	C	$\{B, C\}$
$\{B, C\}$	A	$\{A, D\}$	D	$\{A, D\}$
$\{B, D\}$	A	$\{A, C\}$	C	$\{A, C\}$
$\{C, D\}$	A	$\{A, B\}$	B	$\{A, B\}$

Por ser finito, consequentemente, esse modelo não satisfaz o Axioma da Régua. Portanto, o Axioma da Régua é independente dos demais axiomas.

6 O AXIOMA DA SEPARAÇÃO DO PLANO

Segundo Eves (2011, p.655) "Euclides assumiu tacitamente, ao demonstrar a Proposição I21, que se uma reta fura um triângulo num de seus vértices, então ela, se prolongada suficientemente, intercepta também o lado oposto". A Figura 18 (a) ilustra essa ideia que é razoavelmente fácil de ser aceita pela intuição.

Figura 18 – Reta Cortando um Triângulo



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Desse fato, remete-se a reflexão: a geometria de Euclides estava preservando a propriedade da suficiência em fazer tal afirmação sem prová-la?

Analogamente, usando apenas os seis axiomas apresentados nos capítulos anteriores, pode-se obter um modelo no qual uma reta corte os três lados de um triângulo, (Figura 18 b), sem passar pelos vértices? Ou ainda, pode uma reta cortar apenas um lado de um triângulo, (Figura 18 c), que não seja um dos vértices, e não cortar nenhum dos outros dois lados?

A resposta para esses questionamentos está intimamente relacionada à ideia da possibilidade do plano ser separado por uma reta qualquer em duas partes disjuntas. Isto é feito sem o uso dos desenhos como recurso, pois como já salientado anteriormente, todas as construções devem ser feitas de maneira axiomática com o uso da lógica.

Neste capítulo é introduzido um modelo para a geometria composta pelos seis axiomas o qual ajuda a responder essas indagações. Na medida em que isso ocorre, é proposta a inclusão de um novo axioma, uma vez que a ocorrência dos casos da Figura 18 (b) e (c) não são razoáveis na geometria que está sendo construída nesta dissertação.

6.1 O MODELO BIZARRO

Nesse modelo ponto e reta são representados como no Modelo Cartesiano, logo os axiomas de incidência e paralelismo estão satisfeitos. Para atender o Axioma da Régua começa-se definindo o sistema de coordenadas a seguir.

Definição 13. **O Sistema de Coordenadas Bizarro** f_r para cada reta r dada no Modelo Bizarro é assim definido:

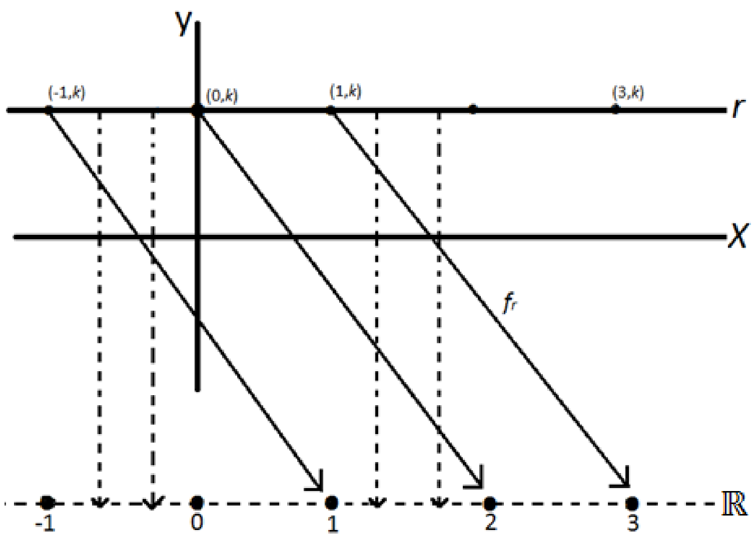
(a) Se a reta r é vertical $(x = k)$. Para cada ponto (k, y) de$r$ tem-se a função: $f_r(k, y) = y$.

(b) Se a reta r é não vertical e não horizontal $(y = mx + b,\ m \neq 0)$. Para cada ponto (x, y) de r tem-se a função : $f_r(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}$.

(c) Se a reta r é horizontal $(y = k)$. Para cada ponto (x, k) de r tem-se a função $f_r(x, k) = x + 2$, se x é inteiro e $f_r(x, k) = x$, se x é não-inteiro.

A Figura 19 ilustra o Sistema de Coordenadas do Modelo Bizarro para uma reta r: $y = k$, horizontal, indicando as coordenadas de alguns pontos dessa reta r. Note que o objeto reta não difere daquele do modelo cartesiano, a diferença ocorre na obtenção da coordenada do ponto da reta, no caso da reta horizontal.

Figura 19 – Exemplo de uma Reta Horizontal no Modelo Bizarro e de Coordenadas de alguns pontos dessa reta.



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

As bijeções do Modelo Bizarro diferem das do Modelo Cartesiano apenas para as retas horizontais. Consequentemente, as distâncias entre dois pontos quaisquer A e B é a mesma da Distância Cartesiana, exceto para os pontos $A = (x_1, k)$ e $B = (x_2, k)$ da reta r horizontal. Neste caso a distância $d_B(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|$ é a expressão d_B em função de x_1 e x_2 abordada na Definição 14 a seguir:

Definição 14. **A Distância Horizontal Bizarra** entre dois pontos $A = (x_1, k)$ e $B = (x_2, k)$ é dada por:

(a) $d_B(A, B) = |x_1 - x_2|$, se x_1 e x_2 são ambos inteiros ou ambos não-inteiros;
(b) $d_B(A, B) = |x_1 - x_2 + 2|$, se x_1 é inteiro e x_2 é não-inteiro;
(c) $d_B(A, B) = |x_1 - x_2 - 2|$, se x_1 é não-inteiro e x_2 é inteiro.

É agora provado para retas horizontais que o Modelo Bizarro satisfaz o Axioma 6. Começa-se pela injetividade do sistema de coordenadas representado pela função f_r. Se $f_r(x_1, k) = f_r(x_2, k)$, então tem-se os seguintes casos a considerar:

(a) $f_r(x_1, k)$ *e* $f_r(x_2, k)$ são números inteiros, consequentemente x_1 e x_2 são inteiros tais que $x_1 + 2 = x_2 + 2$. Assim, $x_1 = x_2$ e, portanto $(x_1, k) = (x_2, k)$.
(b) $f_r(x_1, k)$ *e* $f_r(x_2, k)$ não são números inteiros, então x_1 e x_2 não são inteiros tais que $x_1 = x_2$ e, portanto $(x_1, k) = (x_2, k)$.

Em seguida, se tem a sobrejetividade do sistema de coordenadas representada pela função f_r. Seja z um número real.

(a) Se z é inteiro, toma-se o ponto $(z - 2, k)$. Tem-se que $f_r(z - 2, k) = (z - 2) + 2 = z$.
(b) Se z é não inteiro, toma-se o ponto (z, k). Tem-se que $f_r(z, k) = z$.

Portanto, a função f_r que representa o sistema de coordenadas no caso da reta r horizontal é bijetora. Falta provar que $d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|$. De fato, segue os quatro possíveis casos para dois pontos quaisquer $A = (x_1, k)$ e $B = (x_2, k)$:

(a) Para $d_B(A,B) = |x_1 - x_2|$, se x_1 e x_2 são ambos inteiros, tem-se :

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(x_1,k) - f_r(x_2,k)| = |x_1 + 2 - (x_2 + 2)| = |x_1 + 2 - x_2 - 2|$$
$$= |x_1 - x_2| = d_B(A,B);$$

(b) Para $d_B(A,B) = |x_1 - x_2|$, se x_1 e x_2 são ambos não-inteiros, tem-se :

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(x_1,k) - f_r(x_2,k)| = |x_1 - x_2| = d_B(A,B);$$

(c) Para $d_B(A,B) = |x_1 - x_2 + 2|$, se x_1 é inteiro e x_2 é não-inteiro, tem-se:

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(x_1,k) - f_r(x_2,k)| = |(x_1 + 2) - x_2| = |x_1 - x_2 + 2| = d_B(A,B);$$

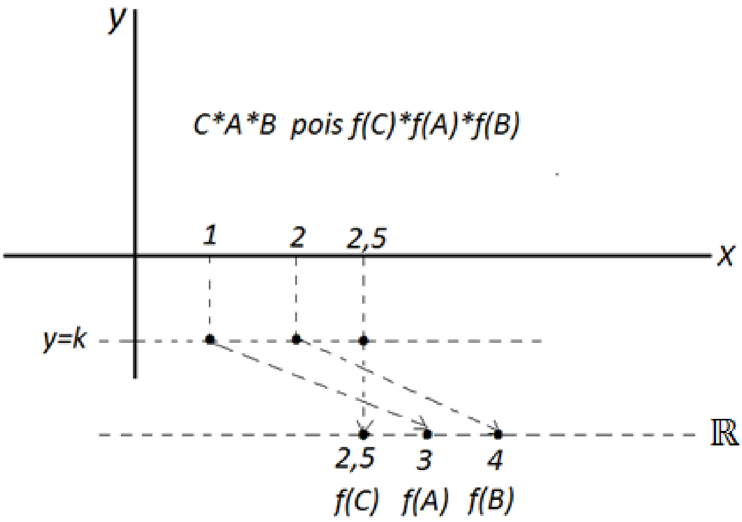
(d) $d_B(A,B) = |x_1 - x_2 - 2|$, se x_1 é não-inteiro e x_2 é inteiro, tem-se:

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(x_1,k) - f_r(x_2,k)| = |x_1 - (x_2 + 2)| = |x_1 - x_2 - 2| = d_B(A,B).$$

Portanto, o Modelo Bizarro cumpre com a igualdade $d(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)|$ e, consequentemente, satisfaz o Axioma 6. A seguir são exemplificados alguns segmentos nesse modelo.

Exemplo 2. Da maneira que foram definidas as bijeções e distâncias, a diferença entre os segmentos no Modelo Bizarro e Cartesiano só ocorrem para segmentos horizontais. Considere os pontos $A = (1,k), B = (2,k)$ e $C = (2{,}5;k)$ pertencente a reta horizontal $y = k$. Tem-se, surpreendentemente, que A está entre os pontos B e C (Figura 20). De fato, pelo sistema de coordenadas definido no modelo Bizarro tem-se $f_r(A) = 3$, $f_r(B) = 4$ e $f_r(C) = 2{,}5$. Portanto, $f_r(C) < f_r(A) < f_r(B)$ e pela Proposição 12, $C * A * B$.

Figura 20 – Ponto *A* Encontra-se entre os Pontos *C* e *B*



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Agora, é descrito o segmento BC (Figura 21):

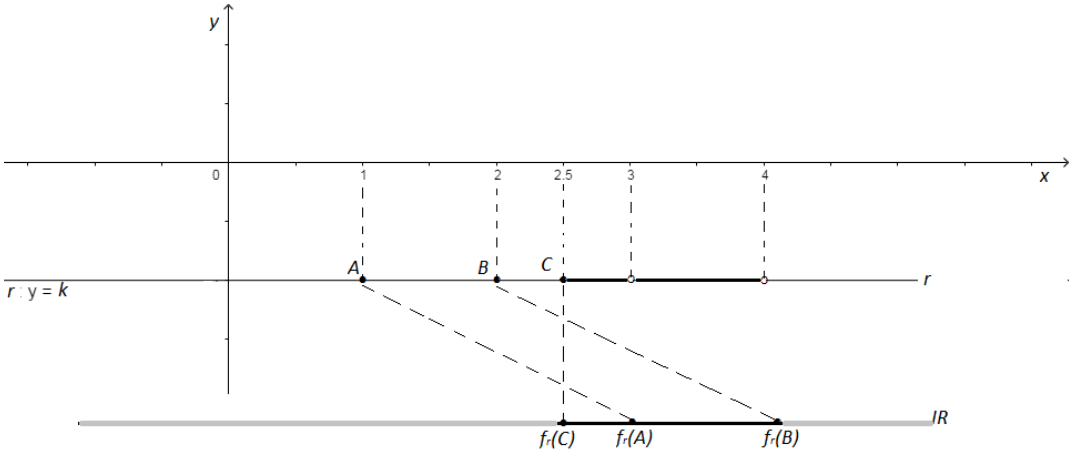
$$\begin{aligned} seg(BC) &= \{B,C\} \cup \{X; B * X * C\} \\ &= \{B,C\} \cup \{X = (x,k);\ f_r(B) * f_r(X) * f_r(C)\} \\ &= \{B,C\} \cup \{X = (x,k);\ f_r(C) < f_r(X) < f_r(B)\} \\ &= \{B,C\} \cup \{X = (x,k);\ 2{,}5 < f_r(X) < 4\}. \end{aligned}$$

Nesta etapa se faz necessário separar em dois casos:

(a) Para x inteiro, tem-se $f_r(X) = x + 2$, donde:
$2{,}5 < f_r(X) < 4 \Rightarrow 2{,}5 < x + 2 < 4 \Rightarrow 2{,}5 - 2 < x < 4 - 2 \Rightarrow 0{,}5 < x < 2$
$\Rightarrow x = 1$. Logo, para x inteiro, $\{X = (x,k); 2{,}5 < f_r(X) < 4\} = \{(1,k)\} = \{A\}$.

(b) Para x não-inteiro, tem-se $f_r(X) = x$, donde:
$\{X = (x,k); 2{,}5 < f_r(X) < 4\} = \{X = (x,k); 2{,}5 < x < 4,\ x \text{ não} - \text{inteiro}\}$.
Portanto, $seg(BC) = \{B,C\} \cup \{X = (x,k); 2{,}5 < x < 4,\ x \text{ não} - \text{inteiro}\} \cup \{A\}$.

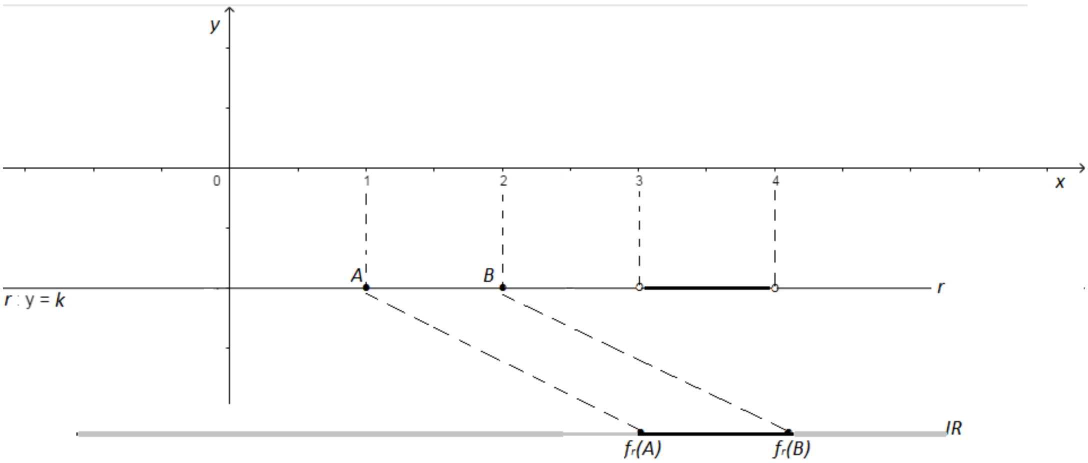
Figura 21 – Segmento *BC*



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

De maneira análoga, obtém-se o segmento AB e AC (Figura 22 e 23, respectivamente): $seg(AB) = \{A, B\} \cup \{X = (x, k); 3 < x < 4\}$.

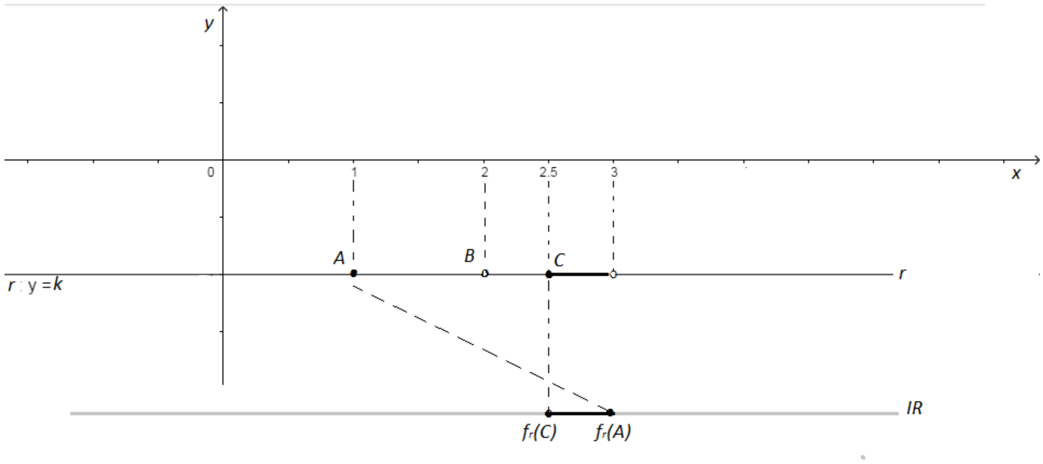
Figura 22 – Segmento *AB*



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

$seg(AC) = \{A, C\} \cup \{X = (x, k); 2{,}5 < x < 3\}$.

Figura 23 – Segmento *AC*



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

6.2 SEPARAÇÃO DO PLANO

A seguir é apresentada uma definição de reta que separa o plano (Figura 24).

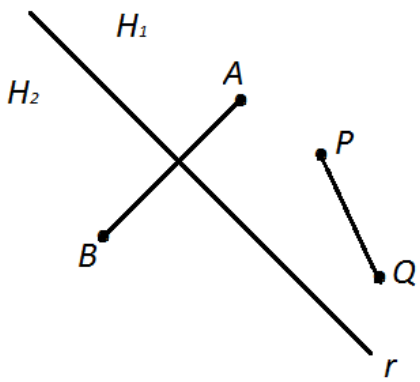
Definição 15. Diz-se que uma reta r **separa o plano** $\wp$ se existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 tais que:

i) $H_1 \cup H_2 = \wp - r$;

ii) H_1e H_2 são convexos (H_1 convexo significa : P e Q pontos em H_1 implica que $seg(PQ)$ está contido em H_1);

iii) $A \in H_1$e $B \in H_2$ se, somente se, $seg(AB)$ intersecta a reta r.

Figura 24 – Reta *r* que Separa um Plano



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

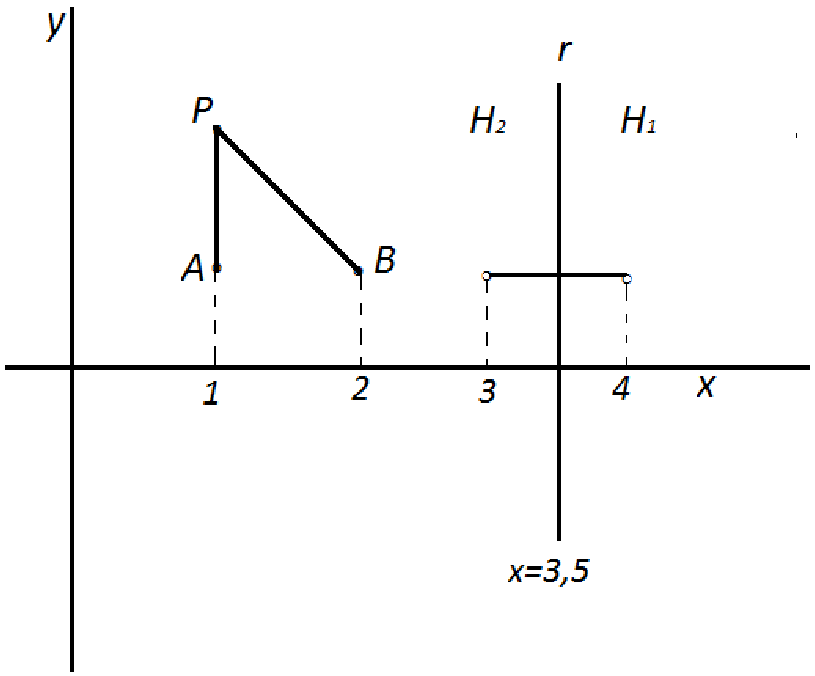
Os conjuntos H_1 e H_2 são denominados semiplanos determinados pela reta r. Se dois pontos estão no mesmo semiplano diz-se que estão do mesmo lado da reta r. Se estiverem em semiplanos distintos diz-se que estão em lados opostos de r.

É possível provar que toda reta separa o plano? Intuitivamente essa afirmação parece aceitável se for considerado o Modelo Cartesiano no qual é baseada a maioria das experiências em geometria. De fato, usando geometria analítica é possível provar que toda reta separa o plano.

Porém, no Modelo Bizarro nem toda reta separa o plano. O que é surpreendente nisto é que a definição de reta no Modelo Bizarro é a mesma que no Modelo Cartesiano. Entretanto, o conceito de separação do plano por uma reta depende também do conceito de segmento que pode ser diferente entre os modelos mencionados. A seguir é apresentado um contraexemplo de reta que não separa o plano (Figura 25).

Exemplo 3. Considere a reta vertical r de equação $x = 3{,}5$. Se r separasse o plano, então às escolhas naturais para os conjuntos H_1 e H_2 são: $H_1 = \{(x, y); x > 3{,}5\}$ e $H_2 = \{(x, y); x < 3{,}5\}$.

Figura 25 – Contraexemplo



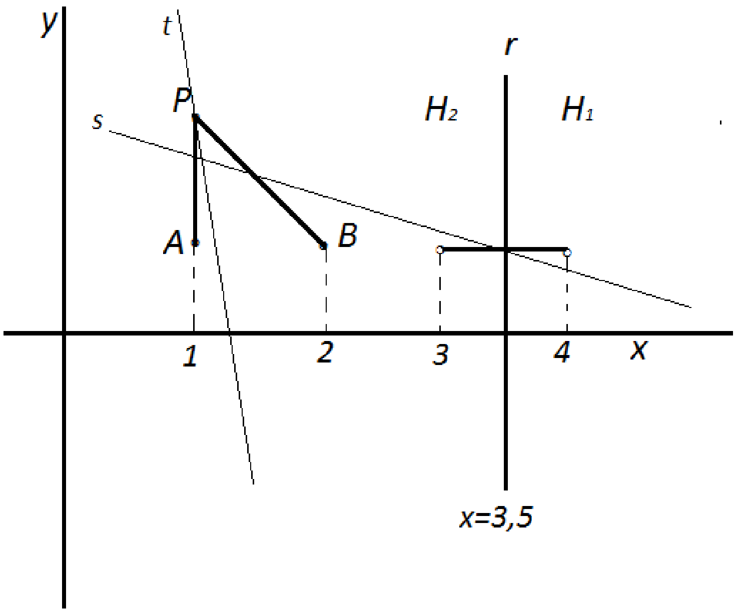
Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Como mostra a Figura 25, os pontos $A = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $B = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ estão numa reta horizontal, ambos em H_2. Entretanto, o segmento AB corta r, deixando de satisfazer a parte (ii) da Definição 15. Isto significa que a reta r não separa o plano? Não! Significa apenas que os conjuntos H_1 e H_2 escolhidos não são adequados. Mas poderia haver outros conjuntos H_1 e H_2 que satisfizessem as propriedades de separação do plano. Para provar que r não separa o plano tem-se que mostrar que não existem subconjuntos H_1 e H_2 com as propriedades desejadas.

Por absurdo, suponha que existem subconjuntos H_1 e H_2 com as propriedades desejadas. Não se sabe como são os conjuntos H_1 e H_2, mas com certeza não são aqueles indicados na Figura 25. Como o segmento AB corta r, então pela Definição 15 parte (iii) os pontos A e B estão em lados opostos. Suponha, sem perda de generalidade, $A \in H_1$ e $B \in H_2$. Seja $P = (1,1)$. Como o segmento PA não corta r, P e A estão em H_1. Então, P e B estão em lados opostos. Isto acarreta que o segmento PB corta a reta r, o que é um absurdo. Portanto, não existem subconjuntos H_1 e H_2 que satisfaçam as propriedades de separação do plano.

Deste modo, os axiomas anteriores não garantem que qualquer reta separa o plano. Consequentemente, a geometria construída até o presente momento permite a ocorrência dos dois casos em que se pode obter um modelo no qual uma reta corte os três lados de um triângulo sem passar pelos vértices e que uma reta corta apenas um lado de um triângulo sem ser pelo vértice, e não corte nenhum dos outros dois lados, respectivamente, ilustrados na Figura 18 (b) e (c). Outro fato importante é que a afirmação feita por Euclides no início desse capítulo, representada pela figura 18(a), não pode ser aceita, uma vez que no Modelo Bizarro é possível uma reta passar pelo vértice de um triângulo e não cortar nenhum dos outros lados. A Figura 26 ilustra duas retas, s e t, que cortam o triângulo APB das maneiras citadas.

Figura 26 – Retas *s* e *t* cortando o triângulo APB



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A fim de continuar na construção de uma geometria no qual se busca eliminar situações anômalas discutidas no Modelo Bizarro é acrescentado um novo axioma.

Axioma 7.(Axioma da Separação do Plano) Toda reta separa o plano.

6.3 A INDEPENDÊNCIA DO AXIOMA DA SEPARAÇÃO DO PLANO

O Axioma 7 é independente dos demais axiomas. De fato, o Modelo Bizarro satisfaz todos os axiomas exceto o Axioma 7. Isso acarreta na independência do Axioma 7.

6.4 DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES

Proposição 13. Seja r uma reta que separa o plano. Sejam A e B pontos que estão em lados oposto de r. Então:

(a) Se P e A estão do mesmo lado de r, então P e B estão em lados opostos de r.

(b) Se Q e A estão em lados opostos de r, então Q e B estão do mesmo lado de r.

Demonstração: Suponha que A está em H_1, então B está em H_2. Se P e A estão do mesmo lado de r, então P está em H_1. Logo P e B estão em lados opostos de r, provando o item (a). Agora, partido da hipótese (b) tem-se que Q está em H_2. Portanto Q e B estão do mesmo lado de r, provando o item (b).

A seguir é provada uma proposição que é conhecida como Teorema de Pasch, em referência ao matemático Moritz Pasch (1843-1930).

Proposição 14. Se uma reta corta o interior de um lado de um triângulo sem passar pelos vértices, então ela terá que cortar um dos outros dois lados.

Demonstração: Por hipótese, r é uma reta que corta o lado AC do triângulo ABC, sem passar por A e nem por C. Deseja-se provar que r corta um dos outros dois lados do triângulo. Suponha, sem perda de generalidade, que r não corta o lado AB. Como o segmento AC corta r, sem passar por A e nem por C, tem-se que os pontos A e C estão em lados opostos de r. Como AB não corta r, A e B estão do mesmo lado de r. Pela Proposição 13, tem-se que B e C estão em lados opostos de r. Consequentemente, se tem que r corta o lado BC.

Definição 16. Seja ABC um triângulo. Seja H_{AB}^{C} o semiplano determinado pela reta AB e que contenha o ponto C Seja H_{AC}^{B} o semiplano determinado pela reta AC e que contenha o ponto B e seja H_{BC}^{A} o semiplano determinado pela reta BC e que contenha o ponto A. Denomina-se **interior do triângulo** ABC a interseção destes três semiplanos: H_{AB}^{C}, H_{AC}^{B} e H_{BC}^{A}.

Tem sentido o conceito de interior de triângulo no Modelo Bizarro? A resposta é negativa, pois esse conceito é definido como interseções de semiplanos, e não existe semiplanos no Modelo Bizarro. A Figura 25 exibe um triângulo nesse modelo, o triângulo APB. O que é o interior do triângulo da figura? Não tem sentido responder tal pergunta. Esse fato decorre da ausência do Axioma 7 conhecido como Axioma de Separação do Plano.

No capítulo seguinte é relacionado esse axioma com a definição de interior de ângulo e sua medida, em seguida. Em seguida, correlacionando esses temas é discutida a introdução de um novo axioma sobre ângulos.

7 O TEOREMA SOBRE MEDIDA DE ÂNGULO

No início da obra de Euclides, no Livro I, são elaboradas 23 definições. A Definição 8 desse livro diz o que é um ângulo, segundo o autor: “ Ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta”. Note que, essa definição depende do conceito de ***inclinação*** no qual não foi definido *a priori* e consequentemente, leva-se a possíveis problemas de semântica. Deste modo, busca-se redefinir o conceito de ***ângulo***. Neste capítulo, além dessa busca, verifica-se que todo ângulo deve possuir uma ***medida***. Esse fato está atrelado a um teorema denominado **Teorema do Transferidor**. Também se propõe exemplificar o conceito de ângulo em um modelo diferente do usual cartesiano, conhecido como **Modelo de Moulton**. Essa abordagem é adotada por dois motivos: o primeiro é a discussão sobre a existência e unicidade de retas perpendiculares e a segunda é que esse modelo dá uma motivação para a inserção de um novo axioma. Essa ideia é usada no próximo capítulo.

7.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Para se definir a medida de um ângulo se faz necessário algumas definições preliminares. Busca-se encontrar a precisão para conceitos de semirreta, ângulo, interior de um ângulo para, enfim, se chegar à ideia de medida de ângulo.

Definição 17. A **semirreta** de origem A que passa por B é o conjunto $S_{AB} = seg(AB) \cup \{X; A * B * X\}$.

Definição 18. **Ângulo** é o conjunto formado pelos pontos que estão em duas semirretas de mesma origem: sendo A, B e C não colineares, $B\hat{A}C = S_{AB} \cup S_{AC}$. O ponto A é o *vértice* do ângulo, as semirretas S_{AB} e S_{AC} são os lados do ângulo.

Dados três pontos não colineares, no que segue é exemplificado a construção de um ângulo no Modelo Bizarro. O objetivo dessa construção é notar que nem o interior de um ângulo nem sua medida é possível de serem definidas nesse modelo. Uma vez que essas ideias decorrem do Axioma de Separação do Plano.

Exemplo 4. No Modelo Bizarro, considerando os pontos $A = (0{,}5\,,1)$, $B = (0{,}1)$ e $C = (0{,}2)$, é construído o ângulo $B\hat{A}C$. Primeiramente, é representada graficamente a semirreta de origem A que passa pelo ponto B. Note que essa semirreta possui seus pontos contidos na reta horizontal r de equação $y = 1$, para qual uma bijeção é dada por $f_r(x, 1) = x$, se x não é inteiro e $f_x(x, 1) = x + 2$, se x é inteiro.

Tem-se $f_r(A) = f_r\left(\frac{1}{2}\,,1\right) = 0{,}5$ e $f_r(B) = f_r(0{,}1) = 2$. Os pontos $X = (x, 1)$ tais que $A * X * B$ devem satisfazer a condição $0{,}5 < f_r(x, 1) < 2$.

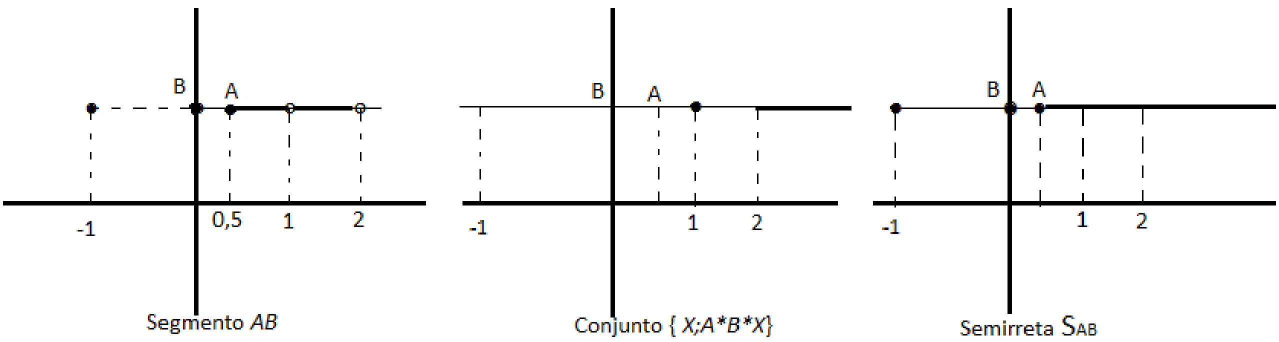
(a) No caso em que x não é inteiro, deve-se ter $0{,}5 < x < 2$, o que inclui todos os números entre 0,5 e 2, exceto o inteiro 1.

(b) No caso em que x é inteiro, deve-se ter $0{,}5 < x + 2 < 2$ ou $-1{,}5 < x < 0$ o que implica $x = -1$. Os pontos $X = (x, 1)$ são os pontos de r cujas abcissas são estas.

Juntando a estes pontos, os pontos A e B tem-se o segmento AB, destacado na Figura 27 à esquerda, que é parte da semirreta S_{AB}.

Resta agora, para completar a semirreta, representar o conjunto $\{X; A * B * X\}$. Deve-se ter $0{,}5 < 2 < f_r(x, 1)$, cuja solução exige a análise de dois casos. Para x não inteiro, tem-se $0{,}5 < 2 < x$, o que dá todos os números não inteiros maiores que 2. Para x inteiro tem-se $0{,}5 < 2 < x + 2$, o que dá todos os números inteiros maiores que 0. Os pontos X de r correspondentes ao conjunto $\{X; A * B * X\}$ estão representados no gráfico do meio da Figura 27. A semirreta completa, que reúne os dois conjuntos, que é a semirreta S_{AB} está representada à direta da mesma figura.

Figura 27 – Construção de Semirreta no Modelo Bizarro

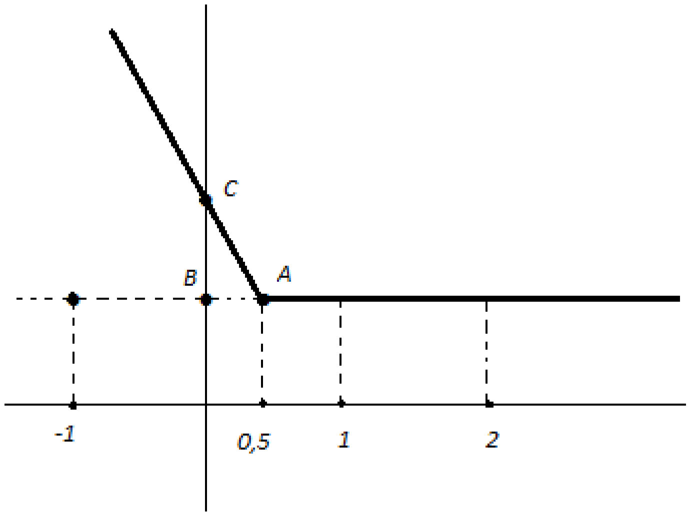


Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Agora tome o ponto $C = (0,2)$. A Figura 28 representa o ângulo $B\hat{A}C$. O lado AB deste ângulo é a semirreta já representada na Figura 27. O lado AC é mesmo que a semirreta Cartesiana S_{AC}, pois AC não é horizontal.

.

Figura 28 – Representação do Ângulo BÂC no Modelo Bizarro



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Observa-se que no Modelo Bizarro as coisas não são tão intuitivas. Por exemplo, o que seria o interior do ângulo $B\hat{A}C$? A seguir é definido o interior de um ângulo qualquer.

Definição 19. O **interior do ângulo** $B\hat{A}C$ é a interseção dos semiplanos H_{AB}^{C} e H_{AC}^{B}.

Consequentemente, não tem sentindo interior de ângulo no Modelo Bizarro. De fato, o conceito de interior de ângulo só faz sentindo caso esteja presente o Axioma de Separação do Plano. No Capítulo 6 mostrou-se que o Modelo Bizarro não satisfaz esse axioma.

Outro conceito fundamental que não faz sentido no Modelo Bizarro é o de medida de ângulo. Pelo mesmo motivo que anteriormente, para essa ideia se faz necessário o conceito de semiplano e de interior de ângulo, ambos dependentes do Axioma de Separação do Plano. A seguir é definida a medida de um ângulo.

Definição 20. Uma **medida de ângulo** em graus é uma função m que a cada ângulo α faz corresponder um número $m(\alpha)$, com as seguintes propriedades:

(i) $0 < m(\alpha) < 180$;

(ii) Dada uma semirreta S_{AB}, seja H um dos semiplanos determinados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ (reta determinada pelos pontos A e B), então dado um número a entre 0 e 180, existe exatamente uma semirreta S_{AC}, sendo $C \in H$, tal que $m(B\hat{A}C) = a$;

(iii) Se M está no interior do ângulo $B\hat{A}C$, então $m(B\hat{A}M) + m(M\hat{A}C) = m(B\hat{A}C)$.

É importante salientar que uma definição por si só não garante a existência do objeto definido. Assim, ainda não há garantia da existência de medida de um ângulo. É necessário provar usando apenas os axiomas enunciados que todo ângulo possui uma medida. Esse teorema é conhecido como **Teorema do Transferidor**. A demonstração desse teorema requer conhecimentos que vão além dos objetivos apresentados nesse trabalho. Na maioria das vezes, o Teorema do Transferidor é apresentado aos leitores como Axioma. Essa atitude é reproduzida em textos clássicos como, por exemplo, os livros de Barbosa (2016) e Martin (1982). Esse costume apesar de infringir a propriedade da independência dos axiomas, uma vez que não se possui um modelo que satisfaça os sete axiomas apresentados até o momento e que contrarie a afirmação sobre a existência de medida de ângulo justificando a inserção dessa afirmação como axioma, é justificado para que o leitor atinja ideias mais pertinentes no seu primeiro estudo da axiomatização da geometria em detrimento de peculiaridades menos relevantes. A seguir enuncia-se o Teorema do Transferidor. A demonstração completa desse teorema encontra-se no livro *Fundations of geometry* dos autores Karol Borsuk e Wanda Szmielew.

7.2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Nesta seção são discutidos alguns teoremas e definições sobre a geometria construída até o momento, no qual se contempla os sete axiomas.

Teorema 3.(Teorema do Transferidor) Existe medida de ângulo.

Definição 21. Dois ângulos são ditos **suplementares** se a soma de suas medidas é 180º.

Definição 22. Um ângulo cuja medida é 90º é chamado **ângulo reto**.

Definição 23. Duas retas r e s são **retas perpendiculares** se a união de r e s contém um ângulo reto.

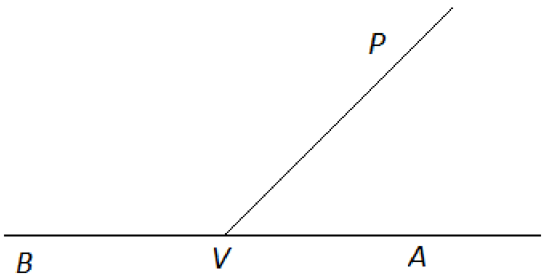
Proposição 15. Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Barbosa (2011, p.40).

Proposição 16. Sejam A, V e B três pontos tais que $A * V * B$. Se P está fora da reta AB, então $m(A\hat{V}P) + m(P\hat{V}B) = 180°$. Reciprocamente, se A e B são pontos que estão em lados opostos da reta VP e $m(A\hat{V}P) + m(P\hat{V}B) = 180°$, então $A * V * B$.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Greenberg (1994, p.122).

Figura 29 – Ilustração da Proposição 16



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

O próximo teorema determina a existência de uma única reta perpendicular a uma reta dada e um ponto pertencente a ela.

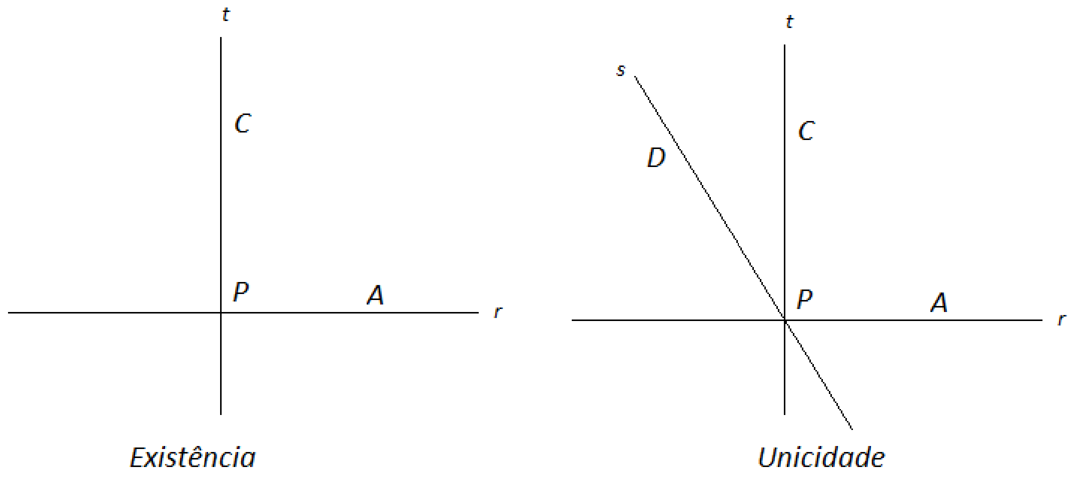
Teorema 4. Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

Demonstração:

- Existência: Basta aplicar a propriedade (ii) da Definição 20 sobre medida de ângulo. Dada uma reta r e um ponto P pertencente a r, considere a semirreta S_{PA}, sendo A um ponto de r. Seja C um ponto pertencente a um dos semiplanos H determinados pela reta r, (Axioma 7), tal que a medida do ângulo $C\hat{P}A$ seja reto, ou seja, $m(C\hat{P}A) = 90º$. Isto é possível porque o número 90 está entre 0 e 180. Como o ângulo $C\hat{P}A$ é reto, a reta t determinada pelos pontos C e P é perpendicular a reta r (Figura 30).

- Unicidade: Seja s uma reta perpendicular a r, passando pelo ponto P. Seja D um ponto da reta s e situado em H. Então o ângulo $D\hat{P}A$ é reto. Logo, a semirreta S_{PD} coincide com a semirreta S_{PC}, pela unicidade da semirreta enunciada na propriedade do item (ii) da Definição 20 (Figura 30).

Figura 30 – Ilustração do Teorema 4



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

O seguinte questionamento surge naturalmente: é possível garantir, com os axiomas presentes até o momento, a existência e a unicidade de uma reta perpendicular a uma reta r por um ponto fora de r? A resposta é não. Para exemplificar, introduz-se um novo modelo que também serve de motivação para o acréscimo de mais um axioma no próximo capítulo.

7.3 MODELO DE MOULTON

No Modelo de Moulton, um ponto é como no Modelo Cartesiano; retas verticais ($x = a$), retas horizontais e inclinadas com declividade negativa ($y = mx + k$, com $m \leq 0$) também são como no Modelo Cartesiano. Já as retas com declividades positivas são substituídas por "retas quebradas", ou seja, quando $m > 0$, uma reta é dada por:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}mx + k, se\ x \geq 0 \\ mx + k, se\ x < 0 \end{cases}.$$

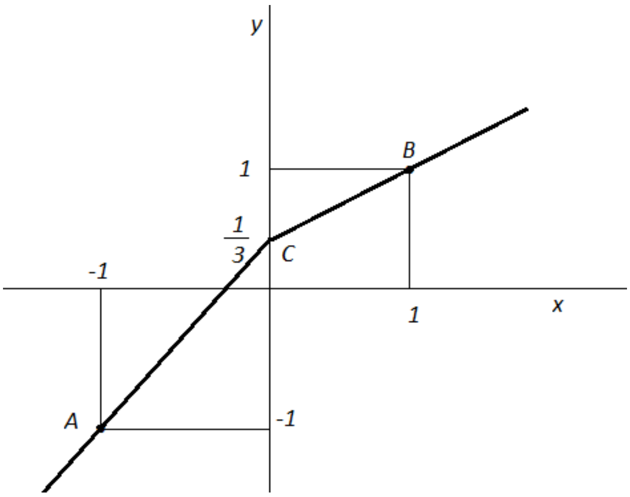
A seguir, tem-se um exemplo de reta no Modelo de Moulton.

Exemplo 5 Determinar a reta de Moulton que passa pelos pontos $A = (-1,-1)$ e $B = (1,1)$. Neste caso, a declividade m é positiva. Para determinar m e k substitui-se as coordenadas de A e B nas equações $y = mx + k$ e $y = \frac{1}{2}mx + k$, respectivamente, por ser a abscissa de A negativa e a de B positiva. Obtém-se $\begin{cases} -1 = -m + k \\ 1 = \frac{1}{2}m + k \end{cases}$.

A solução desse sistema é $m = \frac{4}{3}$ e $k = \frac{1}{3}$. A equação da reta de Moulton que passa por A e B é: $y = \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\text{ , se } x < 0 \\ \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\text{ , se } x \geq 0 \end{cases}$

A Figura 31 mostra a reta que passa pelos pontos $A = (-1,-1)$ e $B = (1,1)$ no Modelo de Moulton.

Figura 31 – Reta no Modelo de Moulton



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A seguir, através de um exemplo, é mostrado como se calcula a medida de um ângulo no Modelo de Moulton.

Para se medir, no Modelo de Moulton, o ângulo $A\hat{V}B$ mede-se um ângulo cartesiano $A'\hat{V}B'$ que se constrói a partir do ângulo $A\hat{V}B$ da maneira descrita abaixo.

A medida de Moulton, $m_M(A\hat{V}B)$, de um ângulo de Moulton $A\hat{V}B$, de vértice V, é a medida cartesiana, $m_C(A'\hat{V}B')$, de um outro ângulo cartesiano $A'\hat{V}B'$: $m_M(A\hat{V}B) = m_C(A'\hat{V}B')$. O ângulo $A'\hat{V}B'$ é obtido a partir do ângulo $A\hat{V}B$ segundo as regras descritas abaixo.

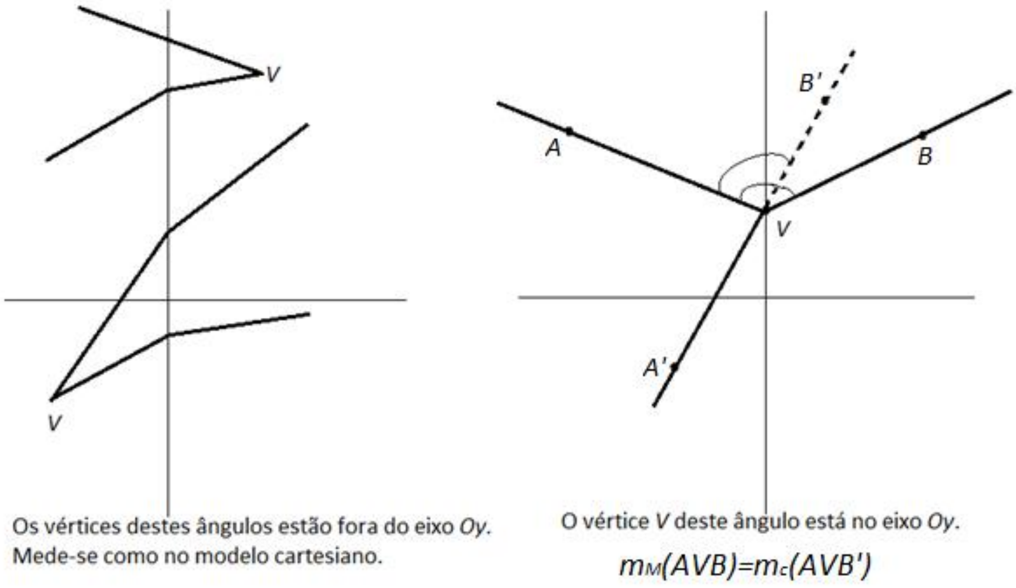
(1) Caso: O vértice V está fora do eixo Oy. Neste caso, tomam-se os pontos A' e B' nos lados VA e VB, respectivamente, do mesmo lado do eixo Oy em que está o ponto V.

(2) Caso: O vértice V está no eixo Oy.

   (a) Se os lados do ângulo estão à esquerda do eixo Oy, tomam-se A' e B' em VA e VB, respectivamente.

   (b) Para os lados do ângulo que ficam à direita do eixo Oy, tomam-se A' e/ou B' no prolongamento cartesiano, para à direita do eixo Oy, da parte das retas VA e/ou VB. A Figura 32 exemplifica uma possibilidade.

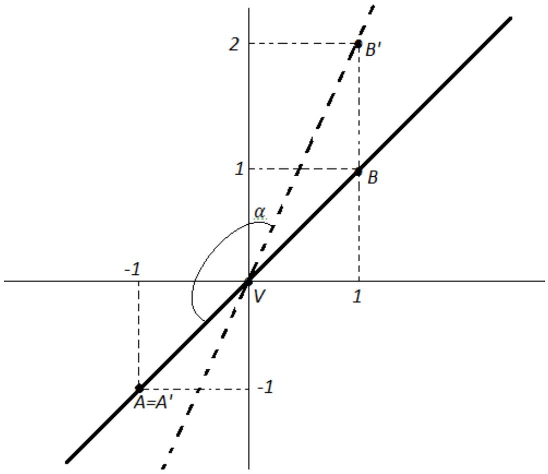
Figura 32 – Casos de Formação de Ângulo de Moulton



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Exemplo 6 Encontre a medida $m_M(A\hat{V}B)$ do ângulo de Moulton $A\hat{V}B$ (Figura 33), sendo $V = (0,0)$, $A = (-1,-1)$ e $B = (1,1)$.

Figura 33 – Ângulo de Moulton $A\hat{V}B$



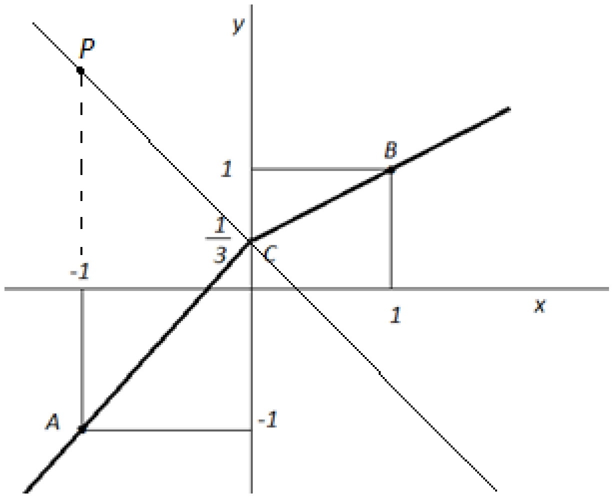
Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

O vértice V está sobre o eixo Oy. O lado VA está à esquerda de Oy, pode-se tomar, então, $A' = A$. O lado VB está à direita de Oy, toma-se B' no prolongamento cartesiano da parte da reta VB que está à esquerda de Oy. Na figura, foi tomado $B' = (1,2)$. Basta agora medir o ângulo cartesiano $A'\hat{V}B'$. Tem-se $m_C\left(A'\hat{V}B'\right) = 45° + 90° + 26{,}5° = 161{,}5°$, aproximadamente, pois 26,5° é uma medida aproximada do ângulo α indicado na figura, (a tangente desse ângulo α é $\frac{1}{2}$). Portanto, $m_M\left(A\hat{V}B\right) = m_C\left(A'\hat{V}B'\right) = 161{,}5°$ (aproximadamente).

Agora que se tem uma noção de como medir ângulos nesse modelo, pode-se mostrar, por meio de exemplos e contraexemplos, que apenas com os sete axiomas é impossível garantir a existência e a unicidade de retas perpendiculares a uma reta dada por um ponto fora dela. Usando a reta do Exemplo 5 mostra-se, no Modelo de Moulton, as possibilidades de existir nenhuma, uma e duas perpendiculares à reta dada passando por um ponto fora dela.

(1) ***Caso em que existe uma perpendicular a um ponto fora de r*** (Figura 34): Considere o ponto $P = \left(-1, \frac{13}{12}\right)$. Esse ponto pertence à equação $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$, que é perpendicular à reta $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ no ponto C. Tem-se que $m_M\left(A\hat{C}P\right) = m_C\left(A\hat{C}P\right) = 90°$, pois os lados do ângulo estão à esquerda do eixo Oy. Portanto, a reta PC é perpendicular à reta r.

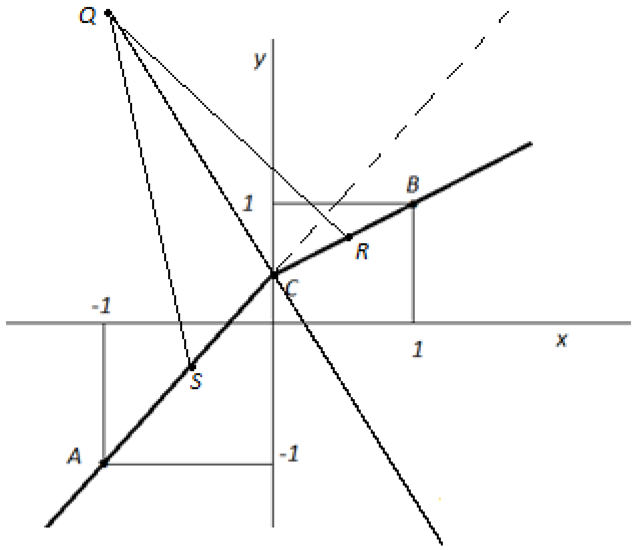
Figura 34 – Caso que Existe uma Perpendicular a um Ponto Fora de r



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

(2) ***Caso em que não existe perpendicular a um ponto fora de*** r (Figura 35): Tome um ponto $Q = \left(-1, \frac{11}{6}\right)$ e considere a reta QC cuja equação é dada pela relação $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ perpendicular cartesianamente à reta $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ que corresponde a reta de Moulton r, para valores de $x \geq 0$. Tem-se que o ângulo cartesiano $B\hat{C}Q$ é reto. Consequentemente o ângulo de Moulton $B\hat{C}Q$ não é reto. De fato, para se medir esse ângulo deve-se substituir o lado CB pela semirreta $S_{CB'}$ que é o prolongamento, à direita do eixo Oy. Tome $B' = \left(1, \frac{5}{3}\right)$. Então $m_M\left(B\hat{C}Q\right) = m_C\left(B'\hat{C}Q\right) < 90°$. Portanto QC não é perpendicular a r, segundo Moulton. Na verdade não existe nenhuma reta perpendicular a r que passa por Q. De fato, como foi visto QC não é perpendicular a r segundo Moulton. Agora, se ligar o ponto Q a um ponto qualquer R pertencente a r, à direta de C, tem-se que QR não é perpendicular cartesianamente a CB, pois só existe uma reta cartesiana perpendicular a CB e está é QC. Logo, a medida de Moulton do ângulo $B\hat{R}Q$ é a mesma medida cartesiana deste ângulo, portanto não é reto. Analogamente, se ligar Q a um ponto S de r, à esquerda de C, tem-se que QS não é perpendicular à reta r. Portanto, não existe perpendicular a reta r que passe pelo ponto Q.

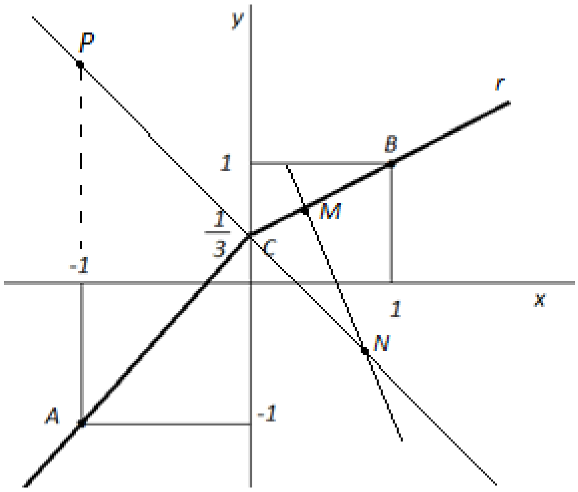
Figura 35 – Caso que não Existe Perpendicular a um Ponto Fora de r



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

(3) ***Caso em que existem duas perpendiculares a um ponto fora de r*** (Figura 36): Tome N um ponto no quarto quadrante que pertence a reta PC do caso (1) que como se viu é perpendicular à reta r. Por N traça-se uma perpendicular cartesiana MN à reta r, sendo M um ponto à direita de C. Esta reta é perpendicular a r, segundo Moulton também. Portanto, no modelo de Moulton, existem duas retas perpendiculares a r por N.

Figura 36 – Caso que Existem Duas Perpendiculares a um Ponto Fora de r



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Conclui-se da discussão que não se pode afirmar, apenas com os axiomas inseridos até o momento, a existência e unicidade de retas perpendiculares.

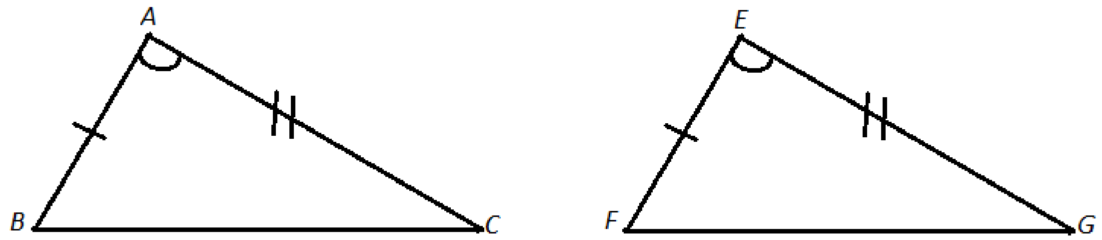
Por último, é preciso verificar que o Modelo de Moulton satisfaz os sete axiomas da geometria desenvolvida até o momento. Se interessar ao leitor essa verificação é feita na referência (MARTIN, 1975).

No próximo capítulo é apresentado um novo axioma que acarreta diretamente na discussão feita sobre retas perpendiculares a uma dada reta por um ponto fora dado.

8 O AXIOMA DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Segundo Bicudo (2009, p.101) em sua tradução de *Os Elementos*, de Euclides, especificamente a Proposição 4 do Volume I afirma o que hoje é denominado o primeiro caso de congruência de triângulos. Essa proposição possui como hipótese dado dois triângulos quaisquer, ΔABC e ΔEFG, são tais que $AB = EF, \hat{A} = \hat{E}$ e $AC = EG$. E quer-se provar que os triângulos ΔABC e ΔEFG são congruentes.

Figura 37 – Triângulos Congruentes



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Na demonstração, Euclides desloca o triângulo ΔABC sobre o triângulo ΔEFG de modo que o ponto A coincida com o ponto E e a semirreta S_{AB} com a semirreta S_{EF}. Como o ângulo $\hat{A}$ é igual ao ângulo $\hat{E}$, a semirreta S_{AC} coincide com a semirreta S_{EG}. Como $AB = EF$ e

$AC = EG$, o ponto B coincide com F e o ponto C com G. Logo $BC = FG$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais a $\hat{F}$ e $\hat{G}$, respectivamente. Com isto, fica provado que os dois triângulos são congruentes.

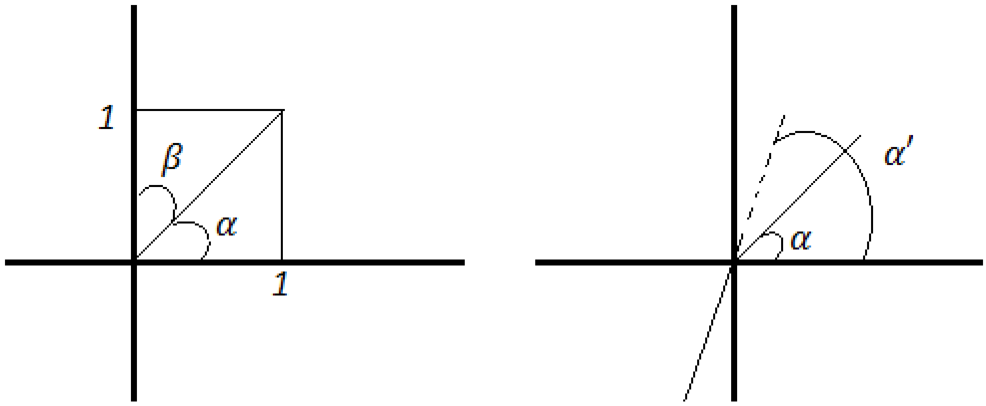
Essa demonstração contém um erro: o conceito de ***movimento*** não foi introduzido por Euclides e também não há nada que garanta que ao movimentar o triângulo ele não se deforme. Segundo Barbosa (2016, p.122) "Euclides utilizou-se de muitas hipóteses que não constavam, sob nenhuma forma, nem das ***noções comuns***, nem dos ***postulados***. Esta omissão é considerada pelos geômetras como um dos mais graves defeitos do livro *Os Elementos*". Na verdade o que se verificou é na impossibilidade de provar esta proposição só com os axiomas de Euclides.

Este capítulo analisa a congruência de triângulos. É mostrado que a solução encontrada para sanar esse descuido apontado foi adotar este caso de congruência como axioma.

8.1 DISCUSSÃO INICIAL

Definição 24. Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são **congruentes** se existe uma correspondência f entre os vértices do primeiro e os vértices do segundo, ou seja, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$, tal que os ângulos correspondentes e os lados correspondentes são iguais.

Figura 38 – Triângulos Não Congruentes no Modelo de Moulton



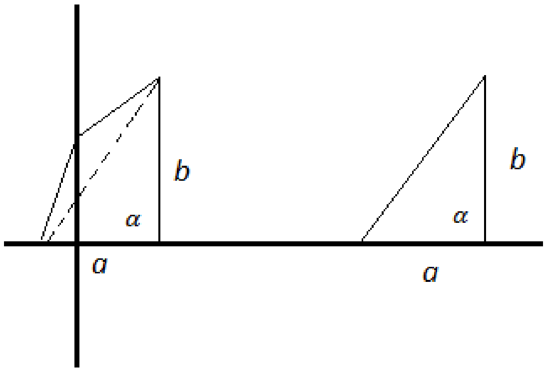
Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Observe a Figura 38, tem-se dois triângulos retângulos no Modelo de Moulton, cujos catetos medem 1 e hipotenusa mede $\sqrt{2}$. Além disso, é evidente que os dois possuem ângulos de 45º e 90º, acarretando que cinco dos seis elementos desses triângulos são congruentes. Isto basta para concluir que os triângulos são iguais? A resposta é não. De fato, se considerar apenas os sete axiomas até o presente momento e analisar essas situação sob a ótica do Modelo de Moulton, nota-se que os ângulos do vértice $(0,0)$ têm medidas de Moulton diferentes. A medida de Moulton do ângulo α é a medida cartesiana do ângulo α', sendo $tg\alpha' = 2$ ($\alpha' = 63{,}4°$ aproximadamente), enquanto que a medida de Moulton de β é igual a $90° - \alpha = 26{,}6°$ aproximadamente. Portanto, os dois triângulos formados pela diagonal do quadrado não são iguais.

Tem-se um modelo em que dois triângulos têm cinco elementos fundamentais (três lados e dois ângulos) de um, iguais a cinco elementos fundamentais do outro, mas os triângulos não são congruentes. Esse modelo se opõe ao Modelo Cartesiano que estamos acostumados e os seus casos de congruências.

Com os axiomas atuais é ***impossível*** provar o primeiro caso de congruência, aquele no qual Euclides afirma ter provado. Basta mostrar um contra exemplo de dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ em que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e a medida do ângulo A é igual à medida do ângulo A' não acarreta a igualdade $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$. Considere a Figura 39.Têm-se dois triângulos retângulos no Modelo de Moulton com catetos respectivamente iguais e ângulo entre eles reto, porém as hipotenusas são diferentes.

Figura 39 – Triângulos que não Satisfazem o Caso L.A.L



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Uma vez que é impossível provar o primeiro caso de congruência de triângulos, tem-se duas possibilidades: adotar um axioma que permita prová-lo ou adotá-lo como axioma. A experiência mostrou que a segunda opção é a melhor.

8.2 AXIOMA DE CONGRUÊNCIA ENTRE DOIS TRIÂNGULOS.

Axioma 8 Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\hat{A} = \widehat{A'}$, então o triângulo ΔABC é **congruente** ao triângulo $\Delta A'B'C'$.

Tem-se que o Modelo de Moulton não satisfaz o Axioma de Congruência de Triângulos. Já o modelo Cartesiano sim. Os casos de congruências de triângulos, comumente estudados no Ensino Fundamental, podem ser demonstrados a partir desse axioma. Essas demonstrações não são feitas aqui e podem ser encontradas em qualquer livro de Geometria Plana, contudo, é importante salientar que nessas demonstrações não se usam os axiomas de paralelismo.

8.3 TEOREMAS

De posse dos oito axiomas pode-se mostrar que essa geometria resolve o problema do capítulo anterior em relação à existência e unicidade de reta perpendicular a uma reta dada e um ponto fora dela. Antes se deve apresentar uma definição e demonstrar o lema que se segue.

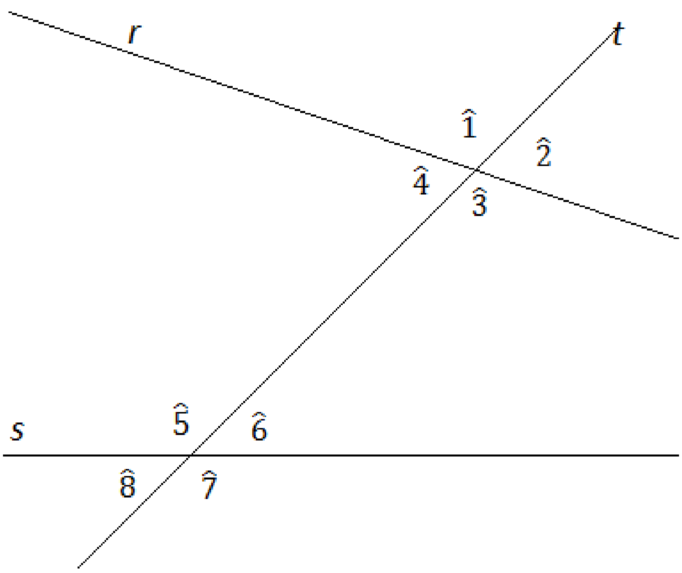
Definição 25 Sejam r e s duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com r e s, ou seja, transversal a elas. Dos oito ângulos determinados por essas retas indicados na Figura 40, chamam-se ângulos:

- Alternos$\begin{cases} Alternos\ internos: \hat{3}\ e\ \hat{5}\ , \hat{4}\ e\ \hat{6} \\ Alternos\ externos: \hat{1}\ e\ \hat{7}\ , \hat{2}\ e\ \hat{8} \end{cases}$

- Colaterais$\begin{cases} Colaterais\ internos: \hat{3}\ e\ \hat{6}\ , \hat{4}\ e\ \hat{5} \\ Colaterais\ externos: \hat{1}\ e\ \hat{8}\ , \hat{2}\ e\ \hat{7} \end{cases}$

- Correspondentes$\{\hat{1}\ e\ \hat{5}\ , \hat{2}\ e\ \hat{6}\ , \hat{3}\ e\ \hat{7}\ , \hat{4}\ e\ \hat{8}\}$

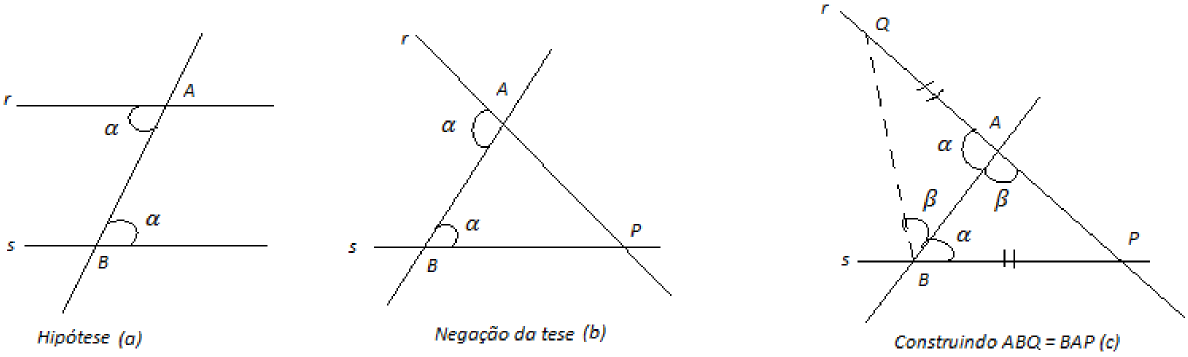
Figura 40 – Ângulos Alternos, Colaterais e Correspondentes



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Lema 2 Se duas retas são cortadas por outra reta fazendo ângulos alternos internos (ou ângulos correspondentes) iguais, então elas são paralelas.

Figura 41 – Retas Cortadas por uma Transversal são Paralelas

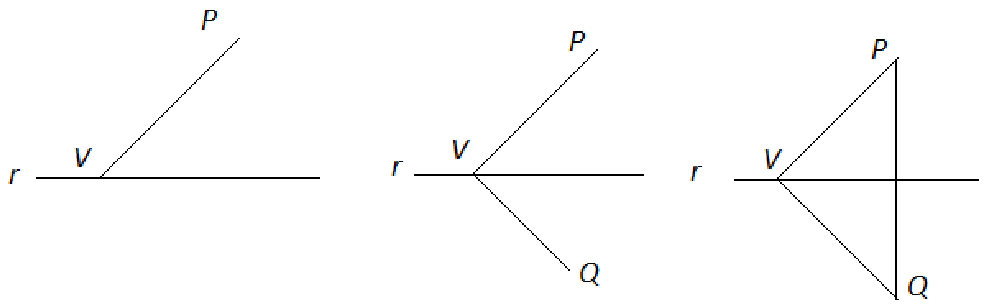


Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Demonstração: Se as retas r e s forem coincidentes não há mais nada a fazer. Portanto, suponha que as retas r e s sejam distintas. Na Figura 41 destaca-se a hipótese, em que os ângulos alternos internos são iguais, com medida α. A tese é que r é paralela a s. A demonstração é feita por redução ao absurdo, sendo a negação da tese indicada na segunda Figura 41 (b): as retas r e s se intersectam no ponto P. Constrói-se o triângulo ABQ para ser congruente ao triângulo BAP, pelo caso de congruência lado, ângulo e lado (Axioma 8). A construção é feita tomando-se Q na reta PA, sendo $QA = PB$ e $Q * A * P$. O caso de congruência do Axioma 8 se aplica porque o lado $AB = BA$ (lado comum), $AQ = BP$ (por construção) e os ângulos formados por esses lados são iguais (por hipótese). Da congruência dos triângulos, destacam-se os dois ângulos iguais a β, como mostra a figura 41(c). No vértice A, vê-se que $\alpha + \beta = 180°$. Olhando agora para o vértice B, conclui-se que o ponto Q tem que estar na reta BP (Proposição 16). Sendo assim, as duas retas r e s tem dois pontos em comum, Q e P, devendo ser coincidentes, Axioma 3. O que contraria a hipótese de que elas são distintas. Logo, a tese de que elas são paralelas é verdadeira como se queria demonstrar.

Teorema 5. Por um ponto P fora de uma reta r, existe uma, e somente uma, perpendicular à reta r.

Figura 42 – Construção de uma Reta Perpendicular



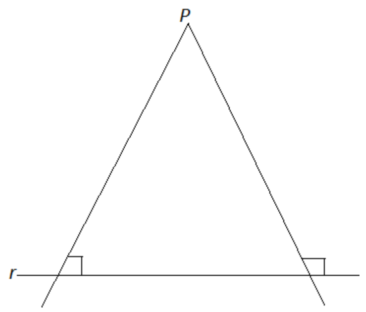
Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Demonstração:

(1) Existência**:** As três figuras acima ilustram as construções feitas para chegar a uma reta PQ perpendicular à r. Seja uma reta r e um ponto P fora de r. Por P traça-se uma reta que corta r num ponto V. Se PV for perpendicular à reta r, já se tem a perpendicular. Se não for perpendicular, traça-se a semirreta S_{VQ} de modo que faça com a reta r um ângulo igual a que a semirreta S_{VP} faz com r. Aqui está se usando a propriedade (ii) da Definição 20 de medida de ângulo. Além disso, o ponto Q pode ser tomado de modo que $VP = VQ$. Os dois triângulos da última figura são congruentes pelo caso de congruência do Axioma 8: lado, ângulo e lado (L.A.L). Logo, os dois ângulos com vértice na interseção de r com PQ são iguais e, como a soma deles é 180°, cada um mede 90º. Portanto, PQ é perpendicular à reta r, como queria demonstrar.

(2) Unicidade: Por redução ao absurdo, suponha que existam duas retas perpendiculares a r por P, como mostra a Figura 43. Esta situação contraria o Lema 2, cuja demonstração é feita sem o uso dos Axiomas de Paralelismo. Portanto, não podem existir duas retas perpendiculares a r por P.

Figura 43 – Unicidade de retas Perpendiculares



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

A geometria que consiste nesses oito axiomas trás novamente o seguinte questionamento: são esses axiomas independentes entre si? A resposta é negativa. De fato, é possível provar o Axioma 4 que afirma a existência de paralelas a partir dos sete demais axiomas abordados durante essa dissertação.

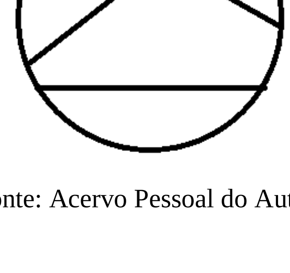
Teorema 6. Por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma paralela à reta.

Demonstração: Dada uma reta r qualquer e um ponto P não pertencente à reta r tem-se, pelo teorema da perpendicular por um ponto fora da reta, uma reta t perpendicular à reta r que passa por P. Por outro lado, pelo Teorema 4, existe uma reta s perpendicular à reta t passando por P. Pelo Lema 2, a reta s é paralela a reta r como se queria demonstrar.

Portanto, o conjunto dos sete axiomas tem força suficiente para provar o Axioma de Existência das Paralelas. Para correção dessa situação têm-se dois caminhos, ou escolher um novo axioma para substituir o Axioma da Congruência de Triângulos de modo que esse novo axioma não tenha força para provar o axioma de existência das paralelas, ou manter o axioma de congruência e retirar o Axioma da Existência das Paralelas da lista de axiomas. É tomada a segunda alternativa. Assim, o Axioma 4 é rebaixado ao posto de teorema, isto é, o Axioma 4 deixa de existir. Ele se tornou agora o Teorema 6.

Em relação ao segundo axioma das paralelas que diz respeito à unicidade, ele se mantém uma vez que ele não pode ser provado a partir dos demais axiomas. De fato, para provar isto basta exibir um modelo que satisfaz todos os axiomas, exceto o da unicidade das paralelas. Esse modelo é conhecido com Modelo de Klein. Esse modelo é aplicado tomando no modelo cartesiano uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Um ponto nesse modelo é um ponto cartesiano no interior da circunferência. Uma reta é uma corda da circunferência, sem extremos.

Figura 44 – A não Unicidade das Paralelas no Modelo de Klein



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

O mais intrigante nesse modelo é que ele satisfaz todos os axiomas, inclusive o Axioma 6 (Axioma da Régua). A demonstração encontra-se em (MARTIN,1975).

Portanto, os axiomas que formam a geometria estudada nessa dissertação são:

Axioma 1. Qualquer que seja a reta, existe ponto que não pertence a ela.

Axioma 2. Existe pelo menos uma reta.

Axioma 3. Dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e somente uma reta que os contém.

Axioma 5. Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P não pertencente a r, existe no máximo uma reta paralela a r passando por P. (Unicidade).

Axioma 6. Existe uma função $d: \wp x \wp \rightarrow \mathbb{R}$ e, para cada reta r, existe uma função bijetora $f_r: r \rightarrow \mathbb{R}$, associada com d por $d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|$, quaisquer que sejam os pontos A e B de r. [Aqui, $\wp$ representa o conjunto de todos os pontos.](Axioma da Régua).

Axioma 7. Toda reta separa o plano.

Axioma 8 Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\hat{A} = \widehat{A'}$, então o triângulo ΔABC é **congruente** ao triângulo $\Delta A'B'C'$.

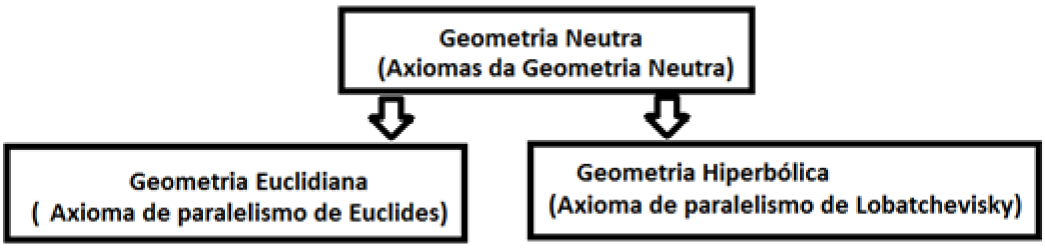
Nota-se que o Axioma 4, que se refere a existência de retas paralelas, não mais pertence ao grupo de axiomas, pois ele foi provado a partir dos demais axiomas e passou ao posto de teorema. Além disso, o Axioma 5 que se refere a unicidade das paralelas é independente dos demais axiomas. O que acontece caso não se considere o Axioma 5 na base de axiomas de nossa geometria ? Caso o grupo de axiomas seja formado com apenas o seis axiomas, com a retirada do Axioma 5, além de desconsiderar todos os resultados provados nesse trabalho que dependem desse axioma, acarreta-se em outra geometria conhecida como **Geometria Neutra** ou **Absoluta**. O próximo tópico discorre a respeito dessa geometria.

8.4 GEOMETRIA NEUTRA OU ABSOLUTA

Na Geometria Neutra são válidos todos os axiomas, exceto o axioma da unicidade de retas paralelas. Estudar geometria a partir da ótica da Geometria Neutra é bastante interessante, primeiramente por questões históricas, tendo em vista que o quinto postulado de Euclides foi discutido durante séculos até se chegar à conclusão que era impossível prová-lo. Até o próprio Euclides protela o máximo possível o uso desse axioma eu seu tratado. Outro motivo é por questões didáticas, uma vez que o estudo da Geometria Neutra esclarece o papel do Axioma da Unicidade das Paralelas, vendo quais teoremas não dependem dele. Isso permite evitar muitas armadilhas e ver muita mais claramente a estrutura lógica do sistema axiomático. Por exemplo, é costume usar na Geometria Plana a recíproca do Lema 2 "**Se duas retas são paralelas, então seus ângulos alternos internos (ou correspondentes) são iguais**." Isto não é verdade quando se trata de geometria Neutra e, portanto não pode ser usado como afirmação.

A Geometria Neutra serve como ponto de partida para a bifurcação entre as geometrias plana e hiperbólica. Essa bifurcação decorre da possibilidade de dois axiomas de paralelismo: o axioma de Euclides que se caracteriza pela unicidade das paralelas e o ***axioma de Lobatchevsky*** no qual podem existir mais de uma paralela a uma reta, por um ponto fora dela, que é a negação do Axioma de Euclides.

Figura 45 – Ramificação da Geometria Neutra



Fonte: Acervo Pessoal do Autor.

Durante muitos séculos os grandes matemáticos duvidaram da existência de outras geometrias além da Euclidiana. Isto ocorrera devido ao fato deles acreditarem que apenas a Geometria Euclidiana era consistente e que a qualquer momento haveria uma incoerência lógica nas outras geometrias. Essa falta de fé na consistência de outras geometrias é justificável através da ausência do poder intuitivo causado no estudo dessas geometrias, pois nem sempre era possível representar de maneira clara entes simples como: retas ou triângulos, Garbi afirma o seguinte

> Infelizmente, para quem está começando a estudar geometrias não-Euclidianas, suas representações sobre uma folha de papel introduz distorções inevitáveis: as retas, por exemplo, ora são desenhadas como retas euclidianas, ora são desenhadas como linhas curvas. Isso provoca um choque no leitor, uma vez que ele, com razão, acha que todas as retas, dentro de uma mesma geometria, devem ser iguais. (Garbi, 2007, p. 353)

Esse problema foi resolvido graças à evolução das ideias iniciais de matemáticos como Girolamo Saccheri, Johann Lambert e Adrien-Marie Legendre que analisavam outras possibilidades para o 5º Postulado de Euclides, o das paralelas, na busca de uma suposta prova o que promoveria esse postulado a teorema. O passo seguinte foi encontrado pelos matemáticos János Bolyai, Nicolai Lobachevshy e Carl F. Gauss, que, independentemente, consideraram a possibilidade de novas geometrias com os resultados obtidos pelos matemáticos anteriormente citados. O passo final foi dado pelo matemático Eugênio Beltrami que conseguiu provar que se a Geometria Euclidiana é consistente então a Geometria Hiperbólica também o é, em outras palavras, Beltrami provou, indiretamente, que é impossível deduzir o Postulado das Paralelas de Euclides a partir dos outros postulados tornando-o independente.

A Geometria Hiperbólica é a composição de todos os Axiomas da Geometria Neutra adicionado o Axioma de Paralelismo de Lobatchevsky. Nela não existem retângulos, triângulos semelhantes que não sejam congruentes. Outro fato interessante é que nessa geometria retas paralelas não são necessariamente equidistantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Antes dos gregos, a geometria se resumia a estipular e determinar regras deduzidas de observações com viés prático imediatista. Com a introdução das ideias de Tales sobre a necessidade de se provar afirmações matemáticas através de demonstrações, o estudo desta ciência se tornou cada vez mais reflexivo e filosófico. Essa abordagem da Matemática progrediu culminando na criação das geometrias não-euclidianas. No caminho para a contemporaneidade, esses aspectos foram se dissolvendo e tornando-se cada vez mais distanciados dos currículos das escolas do Ensino Básico.

Essa pesquisa bibliográfica contempla a abordagem da Geometria de forma construtiva, por entender que este método leva o professor do Ensino Básico à reflexão das principais ideias que fundamentam a construção da própria matemática como ciência.

O ensino da Geometria não deve ser proposto de maneira integralmente axiomática no que tange a Educação Básica, porém, é de responsabilidade do professor sempre saber mais do que ensina. Nesse contexto, há sempre aquele aluno mais inclinado à Matemática que movido pela curiosidade interpela o professor com questões de caráter compatível a dessa dissertação. O papel do professor é sempre estar pronto para essas situações.

Faz-se necessário reconhecer que há um longo caminho a se trilhar na busca de ferramentas que visem propiciar ao professor de Matemática e ao discente conhecimentos matemáticos, ou uma via para a construção de conhecimentos matemáticos, que sejam vigorosamente questionadores de verdades que se querem “absolutas” (no sentido de verdades que seriam inquestionáveis, prontas e acabadas, simplesmente por terem sidos enunciadas em algum livro de Matemática em determinado momento da história). Este trabalho busca avançar algum passo neste caminho.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 177 p. (ISBN 978-85-85818-95-1). Tradução de: João Bosco Pitombeira.

AZEVEDO, Rodrigo dos Anjos. **Modelo de inserção das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica**. 2013. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Ufjf, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27025>. Acesso em: 20 fev. 2020.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 259 p. (ISBN 978-85-8337-106-9).

BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides: Tradução e introdução de Irineu Bicudo**. São Paulo: Unesp, 2009. 593 p. (ISBN 978-85-7139-935-8). Tradução Irineu Bicudo.

BORSUK, Karol; SZMIELEW, Wanda. **Foundations Of Geometry: Euclidean and Bolyai-Lobachevskian Geometry**. 2. ed. University Of Warsaw, Poland: North- Holland Amsterdan, 1960. 452 p.

CEGALLA, Domingos Paschoal. **Novíssima Gramática da língua portuguesa**. 48. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2008. 693 p. (ISBN 978-85-04-01411-2).

COSTA, Valéria. **Abordagens no Ensino das Geometrias**. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Profmat, Matemática, UNIFAP, Macapá, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=92539 > . Acesso em: 21 fev. 2020.

DARIO, Douglas Francisco. **Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica no ensino médio**. 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Utfpr, Pato Branco, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=394>. Acesso em: 20 fev. 2020.

DA SILVA, José Pedro A. **As Geometrias Euclidiana e Não- Euclidianas**. 2017. 46 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Profmat, Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94813> . Acesso em: 21 fev. 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. 848 p. (ISBN 85-268-0657-2). Tradução de: Hygino H. Domingues.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa: Conforme a nova ortografia**. 4. ed. Rio de Janeiro: Positivo - Livros, 2009. 2120 p. (8538528254).

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and Non-Eucllidean Geometries: Development and History**. 3. ed. Califórnia: W.h. Freeman & Company, 1994. 483 p. (ISBN 0-7167-2446-4).

HAWKING, Stephen; MLODINOW, Leonard. **Uma nova história do tempo.** Rio de Janeiro: Pocket Ouro, 2008. (ISBN 978-8). Tradução Vera de Paula Assis.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise: Volume 1**. 14. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2014. 432 p. (ISBN 978-85-244-0118-3).

MARTIN, George E.. **The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.** Albany, New York, U.S.A: Springer, 1975. 511 p. (ISBN - 978-1-4612-5727-1).

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um convite à Matemática: Fundamentos-lógicos, com Técnicas de Demonstração**, Notas Históricas e Curiosidades.. 3. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2016. 310 p. (9788583370703).

PEREZ, Carlos Martinez. **Fundamentos da Geometria Hiperbólica**. 2015. 76 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Unesp, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=256>. Acesso em: 20 fev. 2020.

PRESMIC, Jorge de Góes. **Geometrias não euclidianas**. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Unb, Brasília, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=798>. Acesso em: 20 fev. 2020.

ROCHA, Rogério Batista da. **Geometrias Não-Euclidianas: Proposta de Abordagem Aplicável ao Ensino Básico**. 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Profmat, Matemática, UFBA, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=47592 >. Acesso em: 20 fev. 2020.

RUSSEL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática.** 2 Ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2009. 181 p.

SASSI JUNIOR, Carlos Alberto. **Geometria Não Euclidiana**. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Universidade Federal do Abc, Santo André, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=29322>. Acesso em: 20 fev. 2020.

SILVA, Adriane Renófio da. **Aspectos da Geometria Neutra**. 2015. 51 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Unesp, Rio Claro Sp, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=20>. Acesso em: 20 fev. 2019.

SILVA, Welder Dan. **Um introdução à Geometria Esférica**. 2015. 47 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Matemática, Unesp, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1552>. Acesso em: 20 fev. 2020.

VIEIRA, Juniano Vergna. **Os Quadriláteros de Saccheri e o Surgimento da Geometria Hiperbólica**. 2018. 85 f. Dissertação (Mestrado) – Curso Profmat, Matemática, UFES, Vitória, 2018. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=83318 >. Acesso em: 21 fev. 2020.