



SANDRA LIEVEN

**TRIÂNGULO DE JACOBI**

Santo André, 2019





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**SANDRA LIEVEN**

**TRIÂNGULO DE JACOBI**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELA ALUNA SANDRA LIEVEN,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

**SANTO ANDRÉ, 2019**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lieven, Sandra  
Triângulo de Jacobi / Sandra Lieven. — 2019.

86 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2019.

1. Triângulo. 2. Geometria Euclidiana. 3. Pontos Notáveis. I. Silva, Márcio Fabiano da. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019. III. Título.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata, SANDRA LIEVEN realizada em 19 de Dezembro de 2019:

**Prof.(a) ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES**  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) BÁRBARA COROMINAS VALÉRIO**  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Prof.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).**

**Santo André/SP**

**10 de março de 2020**

**Assinatura do(a) autor(a):**

*Janetra Fierem*

**Assinatura do(a) orientador(a):**

*Márcio Fabiano da Silva*

---

Dedico este trabalho ao meu filho que aprende com a vivência diária, relaciona seus conhecimentos e brilha os olhos a cada descoberta. Também aos meus alunos e ex-alunos, evidenciando que o conhecimento não tem fim e que a busca por ele nos engrandece como pessoas.





---

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a minha família que acompanhou todo o processo desse trabalho, me apoiando e dando forças. Em especial, agradeço ao meu filho André e ao meu marido Edson que compreenderam a minha ausência e valorizaram a qualidade dos momentos que ficamos juntos.

Agradeço aos colegas do mestrado que deixaram nossas aulas e momentos de estudo sempre muito agradáveis e aos colegas de trabalho que sempre valorizaram o processo e incentivaram.

Agradeço ao meu orientador professor Doutor Márcio Fabiano da Silva que despertou meu interesse pela geometria triangular e me ensinou a estudar com profundidade e criteriosamente. Sou grata por sua dedicação e paciência.

Agradeço aos professores da UFABC que se dedicaram em melhorar nossa formação e plantaram em nós a vontade de crescer como profissionais da educação matemática, buscando sempre melhorar a educação básica.

Também agradeço ao professor Doutor Glenn Vickers, professor da Universidade de Sheffield, autor do artigo que inspirou nosso estudo. Agradeço a generosidade e a contribuição. Sua participação vai além da finalização desse trabalho, despertando o desejo de continuar a pesquisa e o trabalho acadêmico.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



---

*“O impossível existe até que alguém duvide dele e prove o contrário.”*

(Albert Einstein, *T*)



---

## RESUMO

---

Neste trabalho estudamos algumas propriedades do triângulo de Jacobi. Partindo dos pontos notáveis clássicos, vamos conhecer alguns outros pontos notáveis e abordar com maior profundidade o ponto de Jacobi. Conhecendo os trabalhos da geometria triangular de Napoleão, Fermat e Kiepert, poderemos reconhecer o triângulo de Jacobi como uma generalização de todos estes casos. Abordaremos também o triângulo de Jacobi recíproco e as coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi.

**Palavras-chave:** Triângulo, Geometria Euclidiana, Pontos Notáveis



---

## ABSTRACT

---

In this work we study some properties of Jacobi triangle. Starting with the classic notable points, we will look at some others and approach Jacobi point with a deeper understanding. Acknowledging the triangle geometry studies of Napoleon, Fermat and Kiepert, we will be able to recognize Jacobi triangle as a generalization of all of these cases. We will also explore the reciprocal Jacobi triangle and barycentric coordinates of the Jacobi point.

**Keywords:** Triangle, Euclidian Geometry, Notable Points





---

# CONTEÚDO

---

INTRODUÇÃO	3
1 PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO	5
1.1 Teorema de Ceva	5
1.2 Pontos Notáveis Clássicos	8
1.2.1 Incentro	8
1.2.2 Baricentro	11
1.2.3 Circuncentro	11
1.2.4 Ortocentro	12
1.2.5 Ponto de Gergonne	13
1.2.6 Ponto Simediano	14
1.2.7 Ponto de Nagel	14
1.2.8 Ponto Médio ou Mittenpunkt	15
1.2.9 Centro de Spieker	16
1.2.10 Circunferência de Nove Pontos	17
1.2.11 Ponto de Feuerbach	17
1.2.12 Pontos de Brocard	18
1.2.13 Ponto de Steiner	19
1.3 Recentes Pontos Notáveis	20
1.3.1 Ponto de Schiffler (1985)	20
1.3.2 Ponto Exeter (1986)	20
1.3.3 Ponto isoscelizador congruente (1989)	22
1.3.4 Centro de Congruência Yff (1987)	22
1.3.5 Ponto Isoperimétrico (1985)	24
1.3.6 Ponto de Apolônio (1987)	24
1.3.7 Centro de Morley	25
2 CASOS ESPECIAIS DO TEOREMA DE JACOBI	27
2.1 Casos Particulares do Teorema de Jacobi	27
2.1.1 Teorema de Napoleão	28
2.1.2 Ponto de Fermat	33

2.1.3	Teorema de Kiepert . . . . .	36
3	TRIÂNGULO DE JACOBI	39
3.1	Teorema de Jacobi . . . . .	41
3.2	O Teorema com Conjugados Isogonais . . . . .	45
3.3	Uma intersecção importante na construção de dois triângulos de Jacobi .	46
4	PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE JACOBI	51
4.1	Triângulos Recíprocos de Jacobi . . . . .	51
4.2	Hipérbole de Kiepert . . . . .	63
4.3	Caso de Congruência . . . . .	65
4.4	As Coordenadas Baricêntricas no Triângulo de Jacobi . . . . .	67
4.4.1	Coordenadas Baricêntricas dos vértices de um triângulo de Jacobi	72
4.4.2	Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Jacobi . . . . .	74
4.4.3	Coordenadas baricêntricas do triângulo de Jacobi construído no interior do triângulo inicial . . . . .	75
	CONCLUSÃO	77
A	APÊNDICE	79
	Bibliografia	85

---

## LISTA DE ABREVIATURAS E NOTAÇÕES

---

- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  significa que o triângulo  $\Delta ABC$  é semelhante ao triângulo  $\Delta DEF$  em relação à correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  entre seus vértices.
- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$  significa que o triângulo  $\Delta ABC$  é congruente ao triângulo  $\Delta DEF$  em relação à correspondência  $ABC \longleftrightarrow DEF$  entre seus vértices.
- $A - B - C$  significa que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , isto é,  $A, B$  e  $C$  são pontos distintos tais que  $AB + BC = AC$ .
- $R_{O,\alpha}(P)$  denota a rotação do ponto  $P$  de ângulo de medida  $\alpha$  ao redor do ponto  $O$ .
- $(ABC)$  denota a área (euclidiana) do triângulo  $\Delta ABC$ .



---

## INTRODUÇÃO

---

Na geometria, o triângulo é uma das figuras geométricas de maior destaque. Nota-se que para estudar diversos polígonos, estes são divididos em triângulos. Assim, a geometria do triângulo enriquece, enche-se de padrões e propriedades que já estimularam e continuam estimulando o estudo acadêmico.

Na educação básica estudamos os elementos, a classificação e algumas relações nos triângulos. Ao estudar as alturas, as medianas e as bissetrizes, mostramos aos alunos que cada trio dessas cevianas se cruzam em um único ponto. Assim, apresentamos os pontos notáveis dos triângulos. As descobertas dos pontos notáveis evoluíram de tal forma que mal se pode imaginar que existem mais de 30.000 pontos notáveis, descritos na enciclopédia de centros triangulares, citada na referência [10].

Este trabalho apresentará um triângulo ainda pouco explorado: o triângulo de Jacobi e seu ponto notável. Isso será feito através da construção de uma linha de conceitos e propriedades antes estudadas, mostrando que este é a generalização de outros trabalhos.

O capítulo 1 apresentará os principais pontos notáveis clássicos e algumas das últimas descobertas. Trará também o Teorema de Ceva, importante para a demonstração da concorrência e unicidade dos pontos notáveis.

No capítulo 2 analisaremos os casos particulares do Teorema de Jacobi. Iniciamos com o ponto de Napoleão, seguimos ao caso do ponto de Fermat, mostramos as particularidades do ponto de Kiepert até chegar em Jacobi. São abordadas as analogias entre as propriedades e relações de cada caso, chegando ao fato de que todos são casos particulares do Teorema de Jacobi.

Porém, é no capítulo 3 que apresentamos Carl Friedrich Andreas Jacobi, o professor de matemática nascido na Alemanha que dedicou parte do seu trabalho ao estudo da geometria triangular. Ainda serão apresentadas duas escritas do teorema e sua demonstração.

E, para finalizar, o capítulo 4 enriquece o trabalho com diferentes propriedades dos triângulos de Jacobi, apresentando os triângulos recíprocos de Jacobi; mostrando o

lugar geométrico dos pontos de Jacobi, no caso particular em que este é o ponto de Kiepert; abordando um caso de congruência entre o triângulo original e o triângulo de Jacobi; e, ainda, calculando as coordenadas baricêntricas dos vértices de um triângulo de Jacobi e do ponto de Jacobi.

Como principal objetivo, queremos oferecer um material que permita o aprofundamento dos conhecimentos dos professores da educação básica na geometria triangular, assim como o encorajamento para uso das demonstrações dos pontos notáveis clássicos e da exploração de novas construções de triângulos, como a do triângulo de Jacobi.

---

## PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

---

Na Geometria Euclidiana, duas retas que estão em um mesmo plano, não coincidentes nem paralelas, possuem um ponto único de intersecção entre elas. Já ao analisar a intersecção entre três ou mais retas, não é provável que esse ponto seja comum. Walser, [18], questiona a existência dessa intersecção e analisa cada caso buscando verificar se é coincidência ou propriedade dos triângulos. Foi na busca das justificativas dos encontros entre retas que novos pontos notáveis surgiram.

Estudiosos da geometria como Thales (624-546 a.C.), Pitágoras (570-510 a.C.), Euclides (300 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) não escreveram sobre as relações e os pontos notáveis que trataremos neste trabalho, mas foram precursores destes estudos. O livro *Os Elementos* de Euclides, escrito por volta de 300 a.C., já apresenta o incentro e o circuncentro, pontos notáveis clássicos ensinados hoje na educação básica, no estudo das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo.

Um resultado preliminar para a demonstração do Teorema de Jacobi e de muitos pontos notáveis é o Teorema de Ceva que tratamos a seguir.

### 1.1 TEOREMA DE CEVA

Giovanni Ceva (1647-1734), matemático italiano que estudou na Universidade de Pisa, publicou o livro "De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio" em 1678, no qual apresenta pela primeira vez o Teorema de Ceva e sua demonstração. A relação encontrada por Ceva nos será muito útil para provar a concorrência em um único ponto das retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ , citadas no Teorema 3.1.

**Teorema 1.1.** *Sejam  $L, M$  e  $N$  pontos, respectivamente, sobre as retas suportes  $\overleftrightarrow{BC} \setminus \{B, C\}$ ,  $\overleftrightarrow{AC} \setminus \{A, C\}$  e  $\overleftrightarrow{AB} \setminus \{A, B\}$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Então as retas suportes das cevianas<sup>1</sup>  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto  $P$ , se e somente se,  $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ .*

*Demonstração.* Daremos a demonstração do Teorema de Ceva para o caso em que  $L, M$  e  $N$  pertencem aos lados do triângulo  $\triangle ABC$  e não são vértices, como na Figura 1.1. Observamos que a demonstração deste resultado é a mesma para os outros casos.

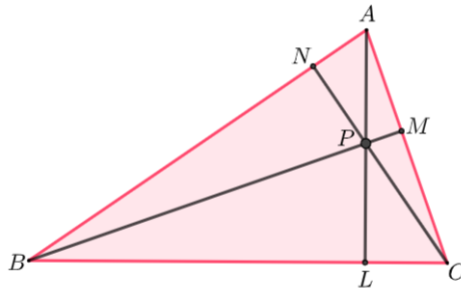


Figura 1.1: Triângulo  $\triangle ABC$ , cujas cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se no ponto  $P$ .

Iniciando a prova da igualdade  $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ , vamos considerar que as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto  $P$ .

Seja  $r$  a reta paralela ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$  que passa por  $A$ . Prolongando as cevianas  $\overline{CN}$  e  $\overline{BM}$  temos os pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente, como intersecções com a reta  $r$ , como ilustra a Figura 1.2.

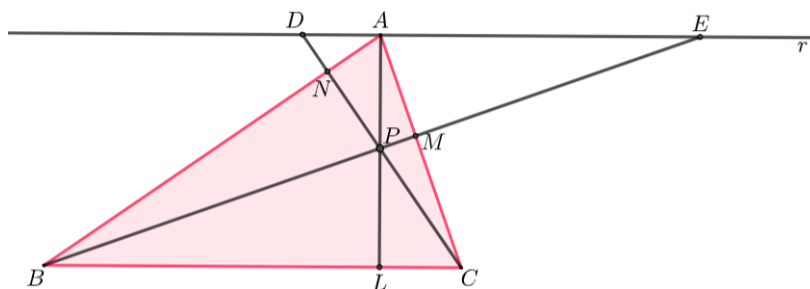


Figura 1.2: Por construção,  $r \parallel \overline{BC}$  e os pontos  $D$  e  $E$  são intersecções com a reta  $r$  decorrentes dos prolongamentos das cevianas  $\overline{CN}$  e  $\overline{BM}$ , respectivamente.

<sup>1</sup> A ceviana de um triângulo é um segmento qualquer que une um de seus vértices a um ponto sobre a reta suporte do lado oposto a tal vértice.



Analisando as semelhanças entre os triângulos formados, temos as relações abaixo:

- $\triangle DNA \sim \triangle CNB$ , pois como  $\overline{DE} // \overline{BC}$  então  $\angle DAN \cong \angle CBN$  e  $\angle ADN \cong \angle BCN$ , por serem ângulos alternos internos. Assim,

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AD}{BC}. \quad (1.1)$$

- $\triangle AME \sim \triangle CMB$ , pois  $\angle AEM \cong \angle CBM$  e  $\angle EAM \cong \angle BCM$  por serem ângulos alternos internos. Assim,

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE}. \quad (1.2)$$

- $\triangle AEP \sim \triangle LBP$ , pois  $\angle AEP \cong \angle LBP$  e  $\angle EAP \cong \angle BLP$  por serem ângulos alternos internos. Assim,

$$\frac{AE}{LB} = \frac{PA}{PL}. \quad (1.3)$$

- $\triangle DAP \sim \triangle CLP$ , pois  $\angle DAP \cong \angle CLP$  e  $\angle ADP \cong \angle LCP$  por serem ângulos alternos internos. Assim,

$$\frac{AP}{LP} = \frac{AD}{LC}. \quad (1.4)$$

As igualdades em (1.3) e (1.4) nos dão a nova relação

$$\frac{AE}{LB} = \frac{AD}{LC} \implies \frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD}. \quad (1.5)$$

Segue de (1.1), (1.2) e (1.5) que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{CB}{AE} = 1.$$

Portanto, se as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um único ponto, então  $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ .

Para provar a recíproca, considere  $P$  a intersecção das cevianas  $\overline{AL}$  e  $\overline{BM}$ , como ilustrado na Figura 1.3. Se a ceviana  $\overline{CN}$  não passa pelo ponto  $P$ , então pelo Teorema das Barras Transversais,  $\overrightarrow{CP}$  intersecta  $\overline{AB}$  num único ponto  $O$  com  $A - O - B$ .

Assim, os segmentos  $\overline{BM}$ ,  $\overline{AL}$  e  $\overline{CO}$  interceptam-se em  $P$ . Utilizando a implicação do Teorema de Ceva que acabamos de provar

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (1.6)$$

E, por hipótese

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (1.7)$$

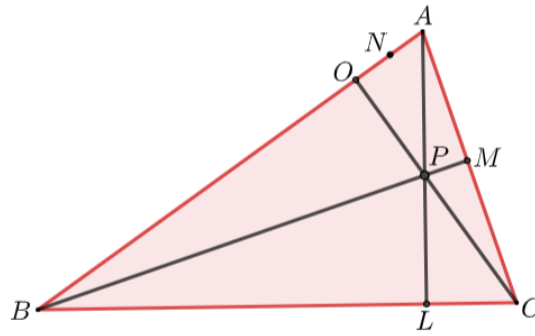


Figura 1.3:  $\{P\} = \overline{AL} \cap \overline{BM}$ .

Assim, pelas igualdades em (1.6) e (1.7), podemos concluir que  $\frac{AO+OB}{OB} = \frac{NA+NB}{NB}$ , isto é,  $\frac{AB}{OB} = \frac{AB}{NB}$ . Logo,  $OB = NB$ , donde  $O = N$ , pois  $O$  e  $N$  estão entre  $A$  e  $B$ .

Portanto, as cevianas  $\overline{NC}$ ,  $\overline{AL}$  e  $\overline{BM}$  são concorrentes em  $P$ . □

Passamos agora a duas seções que descrevem os pontos notáveis clássicos e algumas das recentes descobertas, como pode ser visto em [20].

## 1.2 PONTOS NOTÁVEIS CLÁSSICOS

Apresentaremos a seguir a descrição dos principais pontos notáveis clássicos, sendo os quatro primeiros os mais conhecidos por estarem presentes nos livros didáticos desde o ensino fundamental II. Não apresentaremos as demonstrações que garantem a existência e unicidade de todos os pontos, pois nosso foco está nos casos particulares e nas propriedades do Teorema de Jacobi. No entanto, pode-se utilizar o Teorema de Ceva (Teorema 1.1) para isso.

### 1.2.1 Incentro

O incentro ( $I$ ) de um triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes desse triângulo e também o centro da circunferência inscrita neste triângulo, como ilustrado na Figura 1.4.

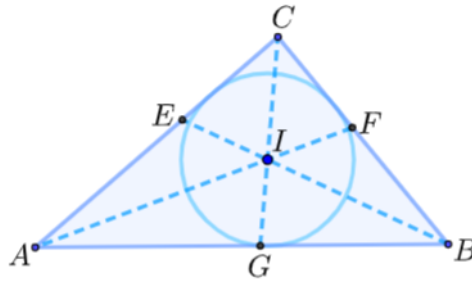


Figura 1.4: As semirretas  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{BE}$  e  $\overrightarrow{CG}$  são as bissetrizes do triângulo  $\triangle ABC$ .

Para a prova do encontro das bissetrizes de um triângulo qualquer, vamos utilizar o teorema das bissetrizes internas, similar ao apresentado em [12].

**Teorema 1.2.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo tal que  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ . Se  $P$  é o pé da bissetriz interna e  $Q$  é o pé da bissetriz externa relativas ao lado  $BC$ , como ilustrado na Figura 1.5, então*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BA}{AC}.$$

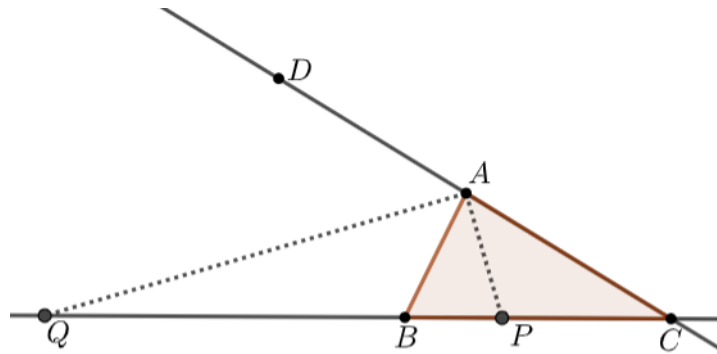


Figura 1.5: Teorema da bissetriz interna.

*Demonstração.* Dado o triângulo  $\triangle ABC$  e as bissetrizes  $\overrightarrow{AP}$ , bissetriz interna do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao ângulo  $\angle BAC$ , e  $\overrightarrow{AQ}$ , bissetriz externa do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao ângulo  $\angle BAD$ , tal que  $Q - B - P - C$ . Sendo  $m(\angle BAC) = \alpha$ ,  $S_{ABP}$ ,  $S_{ACP}$ ,  $S_{ABQ}$  e  $S_{ACQ}$  as áreas dos triângulos  $\triangle ABP$ ,  $\triangle ACP$ ,  $\triangle ABQ$ ,  $\triangle ACQ$ , respectivamente.

Sabemos que

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AP \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AB}{AC} \quad (1.8)$$

Mas também, sendo  $\overline{AH}$  a altura do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ , temos

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BP \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AH} = \frac{BP}{CP} \quad (1.9)$$

Por (1.8) e (1.9) podemos concluir que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}.$$

De forma análoga temos que

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ACQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AQ \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AQ \cdot \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi-\alpha}{2}\right)} = \frac{AB}{AC}, \quad (1.10)$$

pois  $\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi-\alpha}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$ .

Mas também,

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ACQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BQ \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot CQ \cdot AH} = \frac{BQ}{CQ} \quad (1.11)$$

Por (1.10) e (1.11) podemos concluir que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CQ}.$$

Portanto,  $\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BA}{AC}$ .

□

**Teorema 1.3.** *As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, que é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.*

*Demonstração.* Dado o triângulo  $\triangle ABC$  e as bissetrizes  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{BE}$  e  $\overrightarrow{CG}$ , com  $E, F, G$  tais que  $A - E - C$ ,  $B - F - C$  e  $A - G - B$ , como ilustra a Figura 1.4. Do teorema (1.5), temos que  $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF}$ . E, de forma análoga obtemos  $\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{AE}$  e  $\frac{AC}{BC} = \frac{AG}{BG}$ .

Logo,  $\frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AG}{BG} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$ .

Assim, segue do Teorema de Ceva (1.1) que  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CG}$  concorrem em um único ponto  $I$ , o incentro do triângulo  $\triangle ABC$ .

Como qualquer ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo então o ponto  $I$  é equidistante aos três lados do triângulo  $\triangle ABC$ , e, portanto, centro da circunferência inscrita ao triângulo. □

### 1.2.2 Baricentro

O baricentro ( $G$ ) de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas desse triângulo e também o centro de massa do plano triangular, como ilustrado na Figura 1.6.

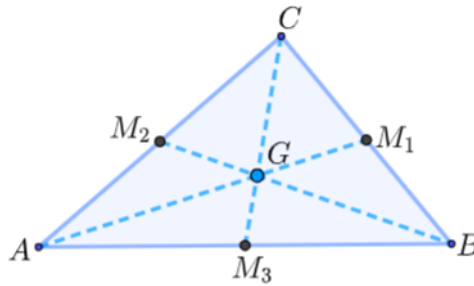


Figura 1.6:  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são os pontos médios dos lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

**Teorema 1.4.** *As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.*

*Demonstração.* Sejam  $\overline{AM_1}, \overline{BM_2}$  e  $\overline{CM_3}$  as medianas do triângulo  $\triangle ABC$ . Como  $AM_3 = M_3B$ ,  $BM_1 = M_1C$  e  $CM_2 = M_2A$  então

$$\frac{M_3A}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1.$$

Segue do Teorema de Ceva (1.1) que as medianas  $\overline{AM_1}, \overline{BM_2}$  e  $\overline{CM_3}$  cruzam-se num mesmo ponto  $G$ . □

### 1.2.3 Circuncentro

O circuncentro ( $O$ ) de um triângulo é o ponto de intersecção das mediatrizes desse triângulo e também o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, como ilustra a Figura 1.7.

**Teorema 1.5.** *As três mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, e, esse ponto é equidistante dos três vértices do triângulo.*

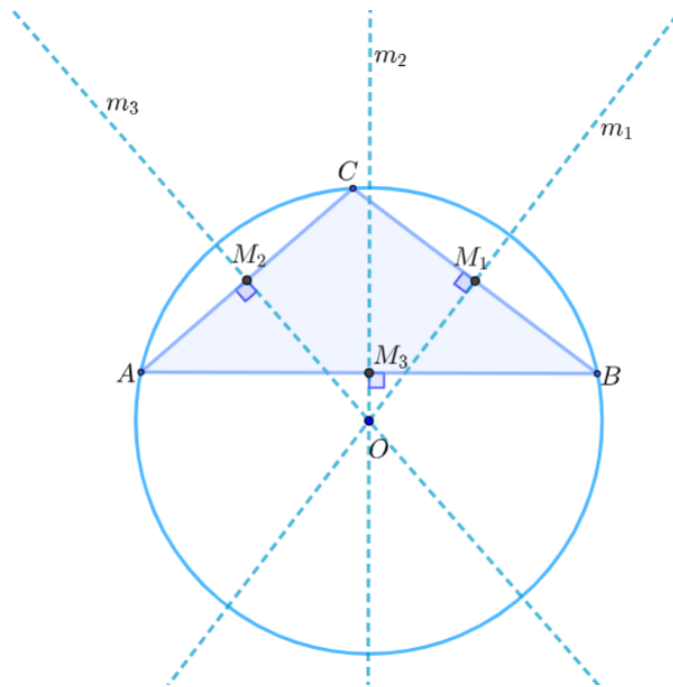


Figura 1.7:  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são os pontos médios dos lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente; e,  $m_1, m_2$  e  $m_3$  são as respectivas mediatrizes do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Sendo  $m_1, m_2$  e  $m_3$  as mediatrizes relativas aos lados  $\overline{BC}, \overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, do triângulo  $\triangle ABC$ , podemos afirmar que  $m_1$  e  $m_2$  interceptam-se em um ponto  $O$ , pois as mediatrizes de um triângulo não podem ser paralelas. Como  $O \in m_1$ , pela propriedade dos pontos pertencentes à mediatriz, podemos concluir que  $OB = OC$ . E, também, como  $O \in m_2$ , sabemos que  $OA = OB$ . Assim,  $OA = OC$  e, portanto,  $O \in m_3$ . Logo,  $O$  é o ponto de intersecção entre as mediatrizes e é equidistante de  $A, B$  e  $C$ .  $\square$

Vale ressaltar que as mediatrizes não são cevianas. Estas são retas que passam pelos pontos médios dos lados de um triângulo e são perpendiculares a eles.

#### 1.2.4 Ortocentro

O ortocentro ( $H$ ) de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas desse triângulo, como está ilustrado na Figura 1.8.

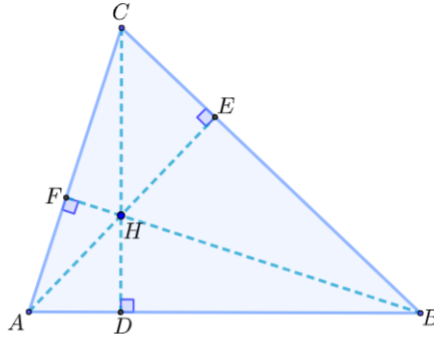


Figura 1.8:  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  são as alturas do triângulo  $\triangle ABC$ .

**Teorema 1.6.** *As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.*

*Demonstração.* Sejam  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  as alturas relativas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , respectivamente. Nota-se que

$$\triangle ACD \sim \triangle ABF \implies \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AB}. \quad (1.12)$$

$$\triangle BAE \sim \triangle BCD \implies \frac{BE}{BD} = \frac{AB}{BC}. \quad (1.13)$$

$$\triangle CBF \sim \triangle CAE \implies \frac{CF}{CE} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.14)$$

Logo, multiplicando (1.12), (1.13) e (1.14), temos

$$\frac{AD}{AF} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{CF}{CE} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$

Segue do Teorema de Ceva (1.1) que as alturas  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  cruzam-se num mesmo ponto  $H$ .  $\square$

### 1.2.5 Ponto de Gergonne

Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. Sejam  $\mathcal{C}$  a circunferência inscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de tangência de  $\mathcal{C}$  com  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. O ponto de Gergonne ( $G$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  é a intersecção entre  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$ , como ilustra a Figura 1.9. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [11] (p.25).

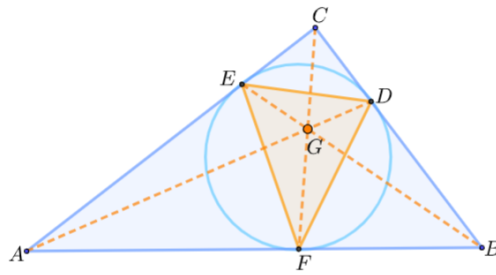


Figura 1.9: O triângulo  $\triangle DEF$  é chamado triângulo de Gergonne.

### 1.2.6 Ponto Simediano

Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. Sejam  $\overline{AM_1}$ ,  $\overline{BM_2}$ ,  $\overline{CM_3}$  as medianas do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AM'_1}$ ,  $\overline{BM'_2}$  e  $\overline{CM'_3}$  as simedianas do triângulo  $\triangle ABC$ , isto é,  $\overline{AM'_1}$  a reflexão de  $\overline{AM_1}$  em relação à bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ ,  $\overline{BM'_2}$  a reflexão de  $\overline{BM_2}$  em relação à bissetriz do ângulo  $\angle ABC$  e  $\overline{CM'_3}$  a reflexão de  $\overline{CM_3}$  em relação à bissetriz do ângulo  $\angle BCA$ . O ponto Simediano ( $S$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  é a intersecção de  $\overline{AM'_1}$ ,  $\overline{BM'_2}$  e  $\overline{CM'_3}$ , como ilustrado na Figura 1.10. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [11] (p.22).

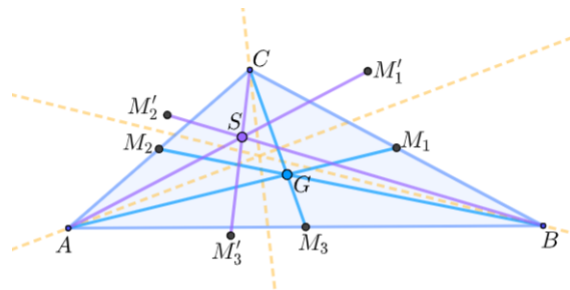


Figura 1.10:  $G$  é o baricentro do triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overline{AM'_1}$ ,  $\overline{BM'_2}$  e  $\overline{CM'_3}$  são as simedianas das medianas  $\overline{AM_1}$ ,  $\overline{BM_2}$  e  $\overline{CM_3}$ , respectivamente.

### 1.2.7 Ponto de Nagel

Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. Cada uma das três circunferências exinscritas ao triângulo  $\triangle ABC$  tangencia um lado deste triângulo e os prolongamentos dos outros dois lados. Cada um dos centros das circunferências exinscritas, chama-



dos de exincentros, pertence à intersecção de uma bissetriz interna de um ângulo do triângulo  $\triangle ABC$  com as bissetrizes (externas) dos ângulos externos formados nos outros dois vértices do triângulo. O ponto de Nagel ( $N$ ) do triângulo  $\triangle ABC$ , descoberto pelo matemático alemão Christian Heinrich von Nagel (1803–1882), é a intersecção entre  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BI}$  e  $\overline{CJ}$ , como está ilustrado na Figura 1.11. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [11] (p.27).

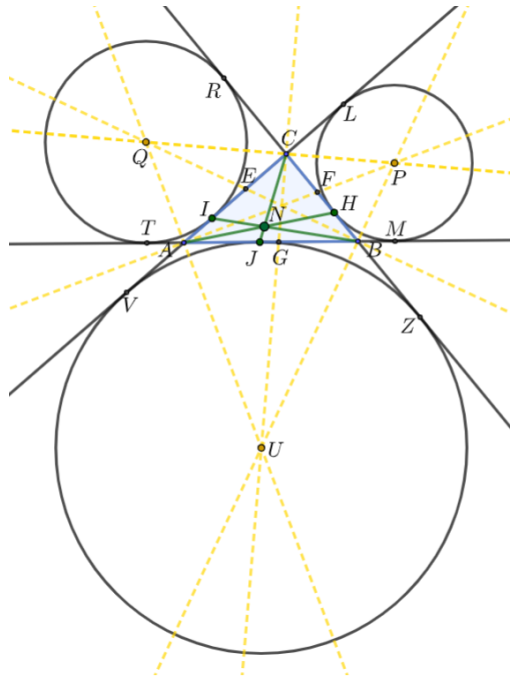


Figura 1.11: Os pontos  $H$ ,  $I$  e  $J$  são os pontos de tangência das circunferências exinscritas com os lados do triângulo  $\triangle ABC$ .

### 1.2.8 Ponto Médio ou Mittenpunkt

O Ponto Médio ou Mittenpunkt ( $M$ ) de um triângulo é a intersecção entre as três retas que conectam os exincentros do triângulo dado aos pontos médios de cada lado correspondente, como ilustra a Figura 1.12. A localização deste ponto notável, em coordenadas baricêntricas, pode ser encontrada em [19].

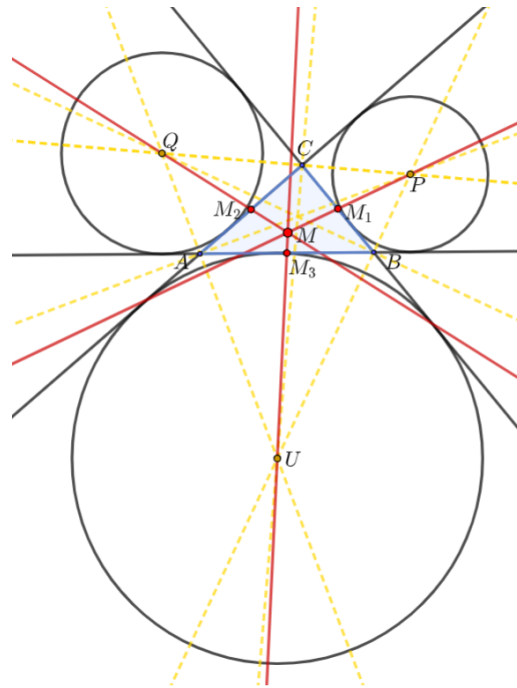


Figura 1.12:  $P, Q$  e  $R$  são os exincentros e  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ .

### 1.2.9 Centro de Spieker

Considere um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. O triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo  $\triangle ABC$  é chamado de triângulo médio do triângulo  $\triangle ABC$ . O Centro de Spieker ( $S$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  é o incentro do triângulo médio desse triângulo dado, como ilustra a Figura 1.13. Não é necessário demonstrar a existência do Centro de Spieker, já que no Teorema 1.3 demonstramos a existência do ponto de encontro entre bissetrizes de um triângulo.

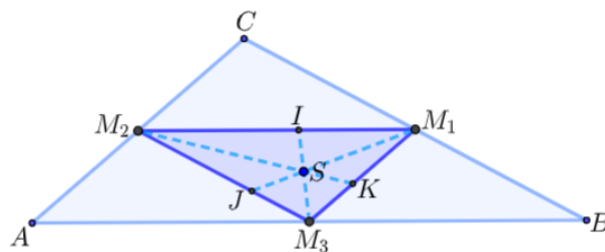


Figura 1.13:  $\overline{JM_1}, \overline{KM_2}$  e  $\overline{IM_3}$  são as bissetrizes do triângulo médio  $\triangle M_1M_2M_3$ .

### 1.2.10 Circunferência de Nove Pontos

Nesse caso, o ponto notável ( $D$ ) de um triângulo é o centro da circunferência que passa pelo ponto médio de cada lado desse triângulo, pelo pé de cada uma das suas alturas e pelo ponto médio entre o ortocentro e cada vértice, como está ilustrado na Figura 1.14. A demonstração da existência desta circunferência pode ser encontrada em [11] (p.19).

A circunferência de nove pontos é também conhecida como circunferência de Feuerbach, pois foi o matemático Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) quem publicou a circunferência de nove pontos e a demonstração de que esta tangencia a circunferência inscrita no triângulo. O ponto de tangência é conhecido como Ponto de Feuerbach e será apresentado a seguir. Este ponto é considerado uma das maiores descobertas da geometria moderna.

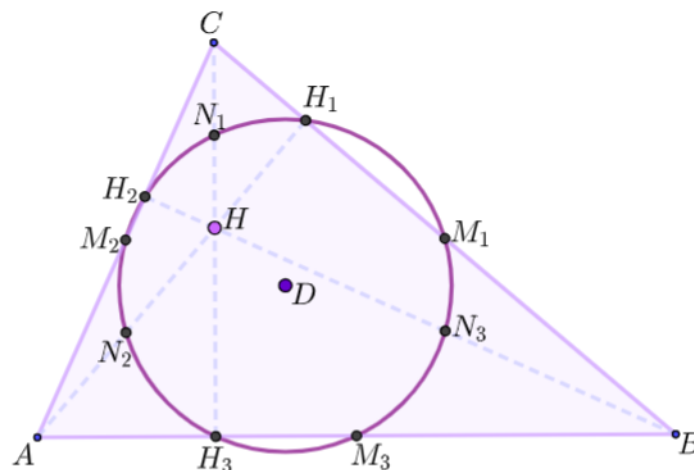


Figura 1.14:  $H_1, H_2$  e  $H_3$  são os pés das alturas e  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ . Ainda,  $N_1, N_2$  e  $N_3$  são os pontos médios entre o ortocentro  $H$  e os vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo.

### 1.2.11 Ponto de Feuerbach

O Ponto de Feuerbach ( $F$ ) de um triângulo é o ponto no qual a circunferência de nove pontos é tangente à circunferência inscrita neste triângulo, como ilustra a Figura

1.15. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [2] (p.117).

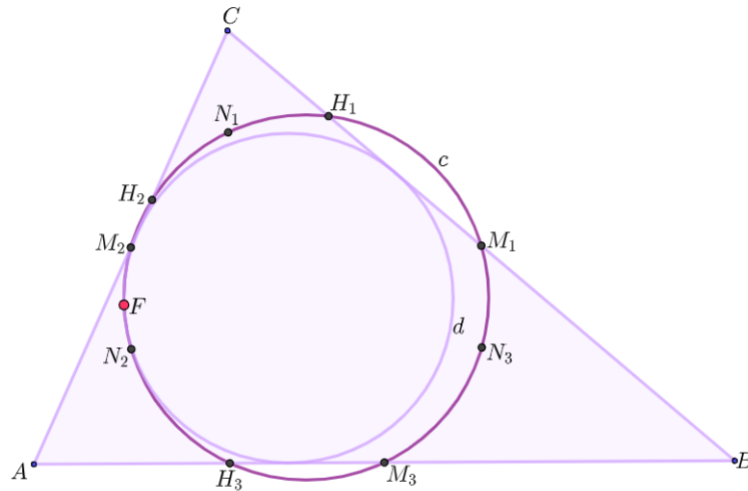


Figura 1.15: A curva  $c$  é a circunferência de nove pontos e a curva  $d$  é a circunferência inscrita no triângulo  $\triangle ABC$ .

### 1.2.12 Pontos de Brocard

Dado o triângulo  $\triangle ABC$  ordenado pelos vértices no sentido anti-horário, o primeiro e o segundo pontos de Brocard, respectivamente  $B_1$  e  $B_2$ , são os pontos tais que  $\angle B_1AB \cong \angle B_1BC \cong \angle B_1CA$  e  $\angle B_2AC \cong \angle B_2CB \cong \angle B_2BA$ , como ilustrado na Figura 1.16. Os ângulos  $\beta_1 = m(\angle B_1AB)$  e  $\beta_2 = m(\angle B_2AC)$  são chamados ângulos de Brocard. Os pontos de Brocard de um triângulo  $\triangle ABC$  são conjugados isogonais um do outro, ou seja,  $B_2$  pode ser obtido como sendo a intersecção das retas  $r, s$  e  $t$ , em que  $r$  é a imagem pela reflexão da reta  $AB_1$  em relação à reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ ,  $s$  é a imagem pela reflexão da reta  $BB_1$  em relação à reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle ABC$  e  $t$  é a imagem pela reflexão da reta  $CB_1$  em relação à reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle BCA$ . O capítulo XVI da referência [8], trás a construção, existência e propriedades dos pontos de Brocard.

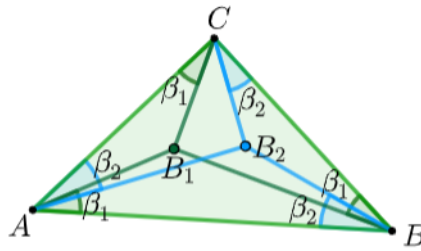


Figura 1.16:  $B_1$  e  $B_2$  são os pontos de Brocard do triângulo.

1.2.13 Ponto de Steiner

Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, sejam  $O$  seu circuncentro,  $S_i$  seu ponto simediano e  $\mathcal{C}$  a circunferência cujo diâmetro é  $OS_i$ . Sejam também  $\{A'\} = \mathcal{C} \cap m_1$ ,  $\{B'\} = \mathcal{C} \cap m_2$  e  $\{C'\} = \mathcal{C} \cap m_3$ , onde  $m_1, m_2, m_3$  são as mediatrizes de  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ , respectivamente. O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é chamado de triângulo de Brocard.

Sendo  $r$  a paralela a  $A'C'$  que passa por  $B$ ,  $s$  a paralela a  $B'C'$  que passa por  $A$  e  $t$  a paralela a  $A'B'$  que passa por  $C$ , o Ponto de Steiner ( $S$ ) é a intersecção entre  $r, s$  e  $t$ , como ilustra a Figura 1.17.

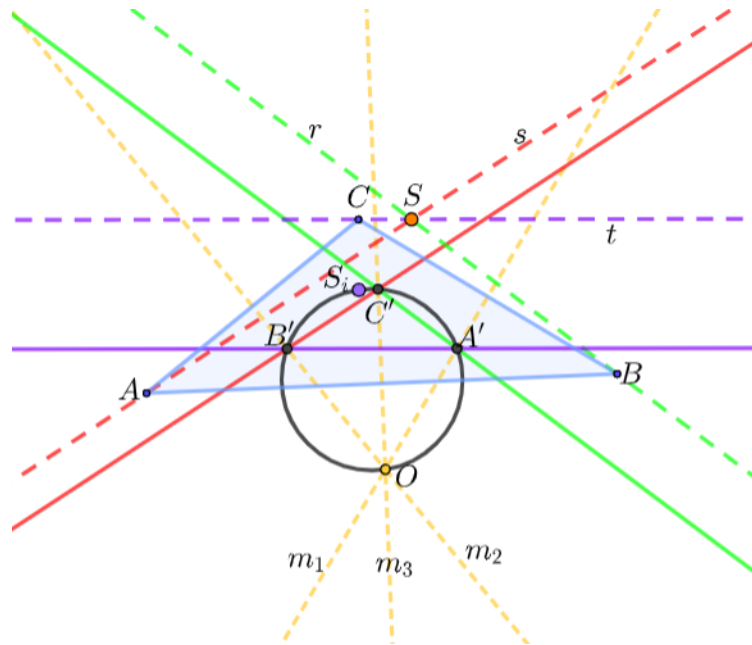


Figura 1.17:  $S$  é o ponto de Steiner e  $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{AS}$ ,  $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{BS}$  e  $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{CS}$ .

Entre os pontos notáveis clássicos, podemos incluir o Ponto de Fermat e o Ponto de Napoleão que serão tratados no próximo capítulo com maior profundidade.

### 1.3 RECENTES PONTOS NOTÁVEIS

É no século XIX que surge a maior parte dos trabalhos de pesquisa dos novos pontos notáveis e das relações nos triângulos. Como citado por Eves, [7], um grande número de artigos continua sendo produzido sobre as investigações dos triângulos: pontos, retas e círculos relacionados a eles. Entre os pesquisadores do assunto estão Gergonne, Nagel, Feuerbach, Brocard, Lemoine, McCay, Euler, Gauss, Fuhrmann, Spieker, Miquel, Steiner e outros. É na primeira metade do século XIX que é descoberta a circunferência de nove pontos e os pontos de Brocard, mas na segunda metade, principalmente na França, Alemanha e Inglaterra, que surgem os novos pontos notáveis.

Apresentaremos abaixo alguns dos mais recentes pontos notáveis, entre os 32.784 descritos na enciclopédia de centros triangulares, [10], assim como o ano de descoberta e uma breve descrição.

#### 1.3.1 Ponto de Schiffler (1985)

Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, seja  $I$  seu incentro. O ponto de Schiffler ( $S$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  é a intersecção entre as retas de Euler<sup>2</sup> dos triângulos  $\triangle BCI$ ,  $\triangle CAI$  e  $\triangle ABI$ . A reta de Euler do triângulo  $\triangle ABC$  também passa pelo ponto de Schiffler, como ilustra a Figura 1.18. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [6].

#### 1.3.2 Ponto Exeter (1986)

O nome deste ponto notável deve-se à sua descoberta ter sido feita em um workshop da área de computação na Phillips Exeter Academy, em 1986.

Sendo  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer, os prolongamentos de suas medianas  $\overline{AM_1}$ ,  $\overline{BM_2}$  e  $\overline{CM_3}$  interceptarão a circunferência circunscrita  $\mathcal{C}$  ao triângulo  $\triangle ABC$  nos pon-

<sup>2</sup> A Reta de Euler é a reta que passa pelo ortocentro, circuncentro e baricentro de um dado triângulo.

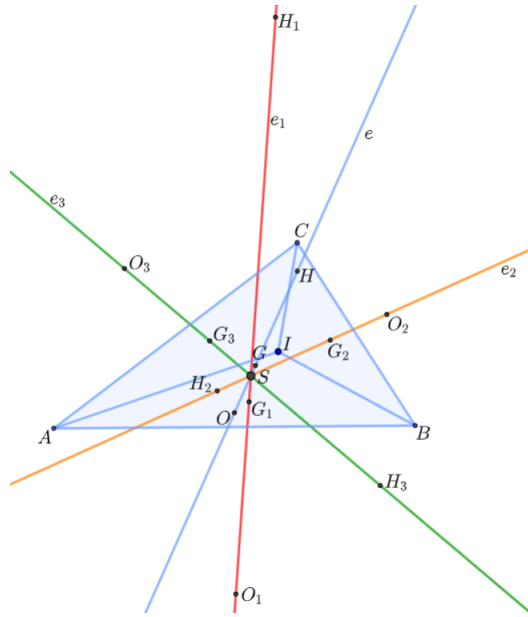


Figura 1.18:  $S$  é o ponto de Schiffler do triângulo  $\triangle ABC$  e  $e, e_1, e_2, e_3$  são as retas de Euler dos triângulos  $\triangle ABC, \triangle ABI, \triangle BCI, \triangle ACI$ , respectivamente.

tos  $A', B'$  e  $C'$ , respectivamente. Sejam  $t_1, t_2$  e  $t_3$  as retas tangentes a  $C$  que passam por  $B, C$  e  $A$ , respectivamente,  $\{D\} = t_1 \cap t_2, \{E\} = t_2 \cap t_3$  e  $\{F\} = t_3 \cap t_1$ . Desse modo, temos um novo triângulo formado  $\triangle DEF$ . Assim, a intersecção entre as semirretas  $\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{EB'}$  e  $\overrightarrow{FC'}$  é o ponto Exeter ( $X$ ) do triângulo  $\triangle ABC$ , como ilustrado na Figura 1.19.

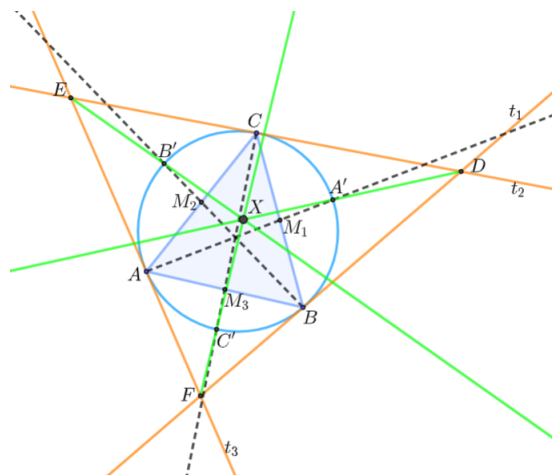


Figura 1.19:  $X$  é o Ponto Exeter e  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ .

1.3.3 Ponto isoscelizador congruente (1989)

O ponto isoscelizador congruente ( $I$ ) de um triângulo foi descoberto por Peter Yff. Um segmento isoscelizador de um ângulo  $\angle BAC$  em um triângulo  $\triangle ABC$ , por exemplo, é um segmento que tem pontos  $P_1 \in \overline{AB}$ ,  $Q_1 \in \overline{AC}$  tais que o triângulo  $\triangle AP_1Q_1$  seja isósceles. Para cada ângulo (interno) do triângulo  $\triangle ABC$ , construímos um segmento isoscelizador, de modo que sejam congruentes os três segmentos isoscelizadores obtidos  $\overline{P_1Q_1}$ ,  $\overline{P_2Q_2}$  e  $\overline{P_3Q_3}$ . O Ponto Isoscelizador Congruente ( $I$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  é a intersecção entre  $\overline{P_1Q_1}$ ,  $\overline{P_2Q_2}$  e  $\overline{P_3Q_3}$ , como ilustra a Figura 1.20. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [4].

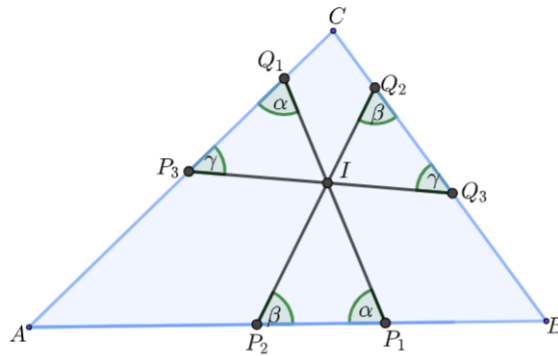


Figura 1.20: Os segmentos  $\overline{P_1Q_1}$ ,  $\overline{P_2Q_2}$  e  $\overline{P_3Q_3}$  são congruentes e os triângulos  $\triangle AP_1Q_1$ ,  $\triangle BP_2Q_2$  e  $\triangle CP_3Q_3$  são isósceles.

1.3.4 Centro de Congruência Yff (1987)

Em relação a um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, considere um segmento isoscelizador  $\overline{P_1Q_1}$  do ângulo  $\angle BAC$ , com  $P_1 \in \overline{AB}$  e  $Q_1 \in \overline{AC}$ , um segmento isoscelizador  $\overline{P_2Q_2}$  do ângulo  $\angle ABC$ , com  $P_2 \in \overline{BC}$  e  $Q_2 \in \overline{BA}$ , e um segmento isoscelizador  $\overline{P_3Q_3}$  do ângulo  $\angle ACB$ , com  $P_3 \in \overline{CA}$  e  $Q_3 \in \overline{CB}$ . Quando  $\overline{P_1Q_1}$ ,  $\overline{P_2Q_2}$  e  $\overline{P_3Q_3}$  interceptam-se dois a dois, sejam  $\{A'\} = \overline{P_2Q_2} \cap \overline{P_3Q_3}$ ,  $\{B'\} = \overline{P_1Q_1} \cap \overline{P_3Q_3}$  e  $\{C'\} = \overline{P_1Q_1} \cap \overline{P_2Q_2}$ . Existe um único conjunto de segmentos isoscelizadores  $\overline{P_1Q_1}$ ,  $\overline{P_2Q_2}$ ,  $\overline{P_3Q_3}$ , tal que os quatro triângulos  $\triangle A'P_2Q_3$ ,  $\triangle Q_1B'P_3$ ,  $\triangle P_1Q_2C'$ ,  $\triangle A'B'C'$  são congruentes, como ilustrado na Figura 1.21.



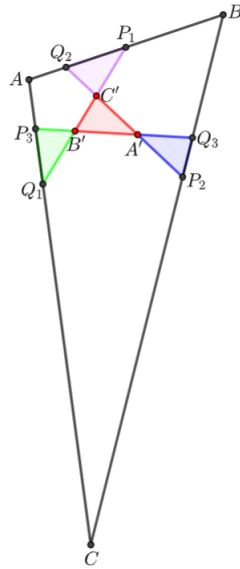


Figura 1.21: O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é o Triângulo Central Yff do triângulo  $\triangle ABC$ .

Neste caso, o triângulo  $\triangle A'B'C'$  é chamado o Triângulo Central Yff do triângulo  $\triangle ABC$ . Podemos deslocar paralelamente os lados do triângulo  $\triangle A'B'C'$  de modo que os triângulos  $\triangle A'P_2Q_3$ ,  $\triangle Q_1B'P_3$  e  $\triangle P_1Q_2C'$  ainda sejam congruentes entre si, até que o triângulo  $\triangle A'B'C'$  reduz-se a um ponto  $Y$ , chamado de Centro de Congruência Yff do triângulo  $\triangle ABC$ , como ilustra a Figura 1.22.

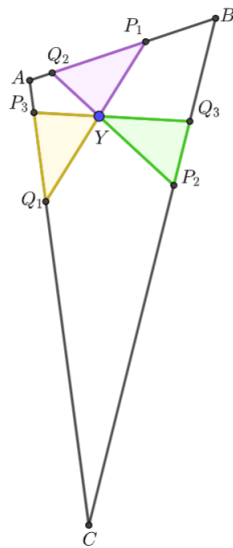


Figura 1.22: Os triângulos  $\triangle YP_2Q_3$ ,  $\triangle YP_1Q_2$  e  $\triangle YQ_1P_3$  são congruentes.

## 1.3.5 Ponto Isoperimétrico (1985)

O Ponto Isoperimétrico foi publicado por G.R. Veldkamp em um artigo no *American Mathematical Monthly* em 1985, mas em 1890 Emile Lemoine já estudava triângulos de mesmo perímetro. O ponto notável  $P$  de um triângulo  $\triangle ABC$  é aquele em que os triângulos formados pelo ponto  $P$  e pelos vértices  $A, B$  e  $C$  ( $\triangle PBC, \triangle PCA$  e  $\triangle PAB$ ) têm mesmo perímetro, ou seja, são isoperimétricos, como ilustrado na Figura 1.23. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [5].

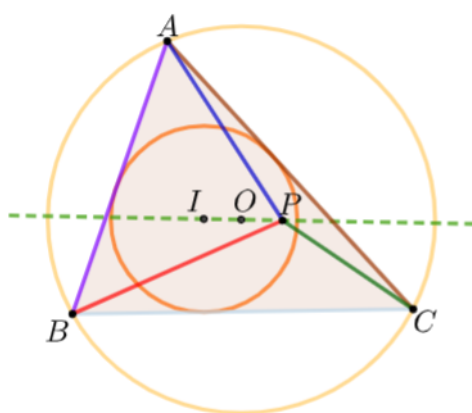


Figura 1.23: Os triângulos  $\triangle PBC, \triangle PCA$  e  $\triangle PAB$  possuem o mesmo perímetro.

## 1.3.6 Ponto de Apolônio (1987)

O problema de Apolônio já é conhecido há séculos, mas o ponto de Apolônio foi descoberto em 1987. O problema de Apolônio consiste em construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas em um plano, que é então chamada de Circunferência de Apolônio. Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, consideramos as circunferências exinscritas  $c_1, c_2$  e  $c_3$  relativas aos lados  $\overline{AC}, \overline{BC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Seja  $c_4$  a circunferência de Apolônio que tangencia  $c_1, c_2$  e  $c_3$ , e sejam  $E, D$  e  $F$  os respectivos pontos de tangência. Os segmentos  $\overline{AD}, \overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  cruzam-se em um único ponto  $N$ , Ponto de Apolônio, como ilustra a Figura 1.24.

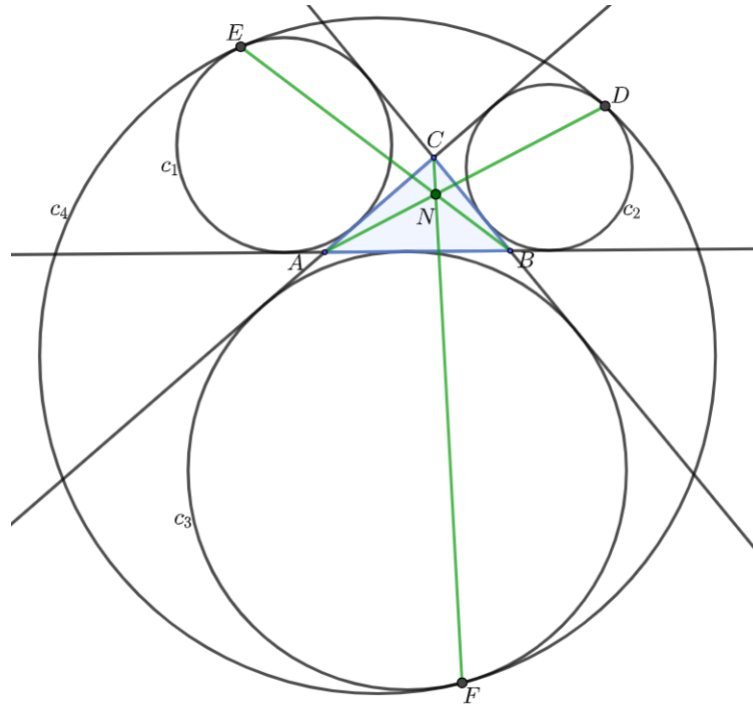


Figura 1.24:  $D$ ,  $E$  e  $F$  são os pontos de tangência do círculo de Apolônio com as circunferências exinscritas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

### 1.3.7 Centro de Morley

O Centro de Morley, conhecido como primeiro ponto de Morley, está relacionado com o teorema trissecor de Morley, descoberto por Frank Morley por volta de 1899. O triângulo cujos vértices são as interseções dos trissectores dos ângulos adjacentes de um triângulo  $\triangle ABC$ , é chamado de Triângulo de Morley do triângulo  $\triangle ABC$ . O teorema trissecor de Morley afirma que o triângulo de Morley de qualquer triângulo é sempre equilátero. O baricentro do triângulo de Morley é o Centro de Morley, como ilustrado na Figura 1.25. A demonstração da existência deste ponto notável pode ser encontrada em [2] (p.47).

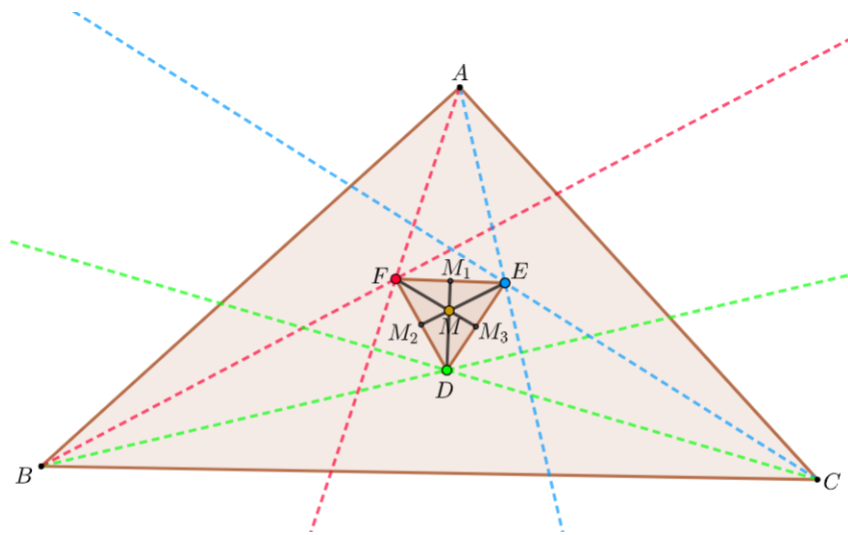


Figura 1.25:  $M$  é o centro de Morley do triângulo  $\triangle ABC$ .

---

## CASOS ESPECIAIS DO TEOREMA DE JACOBI

---

O presente capítulo apresentará uma série de casos particulares e teoremas relacionados aos Triângulos de Jacobi. Será possível observar uma sequência de descobertas sobre triângulos construídos a partir de um triângulo qualquer e, também, sobre pontos notáveis, que se relacionam aos Triângulos de Jacobi e a uma generalização de todos os casos estudados.

Abaixo é apresentado o Teorema de Jacobi, cuja demonstração será dada no próximo capítulo, como descrito em [15].

**Teorema 2.1.** *(Teorema de Jacobi) Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Construa os pontos  $A', B'$  e  $C'$  de maneira que  $\text{med}(\angle C'AB) = \text{med}(\angle B'AC) = \alpha$ ,  $\text{med}(\angle A'BC) = \text{med}(\angle C'BA) = \beta$  e  $\text{med}(\angle B'CA) = \text{med}(\angle A'CB) = \gamma$ , sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  ângulos quaisquer entre  $0$  e  $\pi$ . Esses pontos formam um triângulo de Jacobi para o  $\triangle ABC$  e as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes num ponto  $K$ , que é chamado de ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle ABC$ .*

### 2.1 CASOS PARTICULARES DO TEOREMA DE JACOBI

Um dos estudos que pode ser considerado um caso particular do Teorema de Jacobi é o Teorema de Napoleão, que consiste na construção de triângulos equiláteros sobre os lados de um triângulo qualquer. O Teorema de Napoleão pode ser visto como o caso particular do Teorema de Jacobi 2.1 para  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ . Passamos agora a conhecer um pouco mais sobre esse estudo.

## 2.1.1 Teorema de Napoleão

Napoleão Bonaparte (1769-1821) é conhecido por sua participação na história da França, mas foi um excelente aluno de matemática e destacou-se na Escola Militar de Paris. Na fase adulta tornou-se membro do Institut de France, uma prestigiada sociedade científica. O teorema que descreveremos e demonstraremos a seguir, o qual tem seu nome, foi publicado pela primeira vez pelo Dr. W. Rutherford em *The Ladies' Diary*, em 1825. Não é certo que Napoleão contribuiu com essa descoberta matemática.

**Teorema 2.2.** *Construa exteriormente triângulos equiláteros  $\triangle ACE$ ,  $\triangle BCD$  e  $\triangle ABF$  sobre os lados de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, como ilustrado na Figura 2.1. Sendo os pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  os centros dos triângulos  $\triangle ACE$ ,  $\triangle BCD$  e  $\triangle ABF$ , respectivamente, o triângulo  $\triangle GHI$  também é equilátero.*

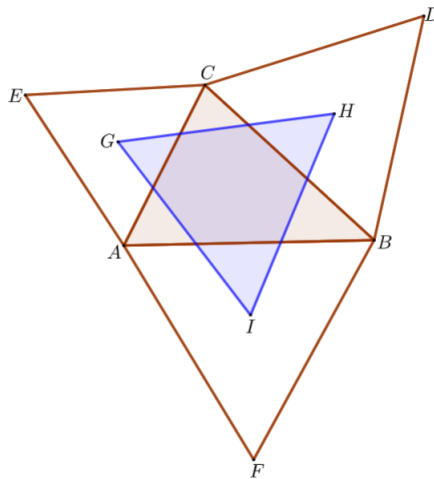


Figura 2.1: Os triângulos  $\triangle ACE$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ABF$  e  $\triangle GHI$  são equiláteros.

*Demonstração.* Para provar que o triângulo  $\triangle GHI$  é equilátero, provaremos que  $\overline{GH} \cong \overline{HI} \cong \overline{GI}$ .

Ao traçar os segmentos  $\overline{GC}$ ,  $\overline{GA}$ ,  $\overline{IA}$ ,  $\overline{IB}$ ,  $\overline{HB}$  e  $\overline{HC}$  teremos novos triângulos que ajudarão a mostrar a igualdade das medidas dos lados do triângulo  $\triangle GHI$ , como ilustra a Figura 2.2.

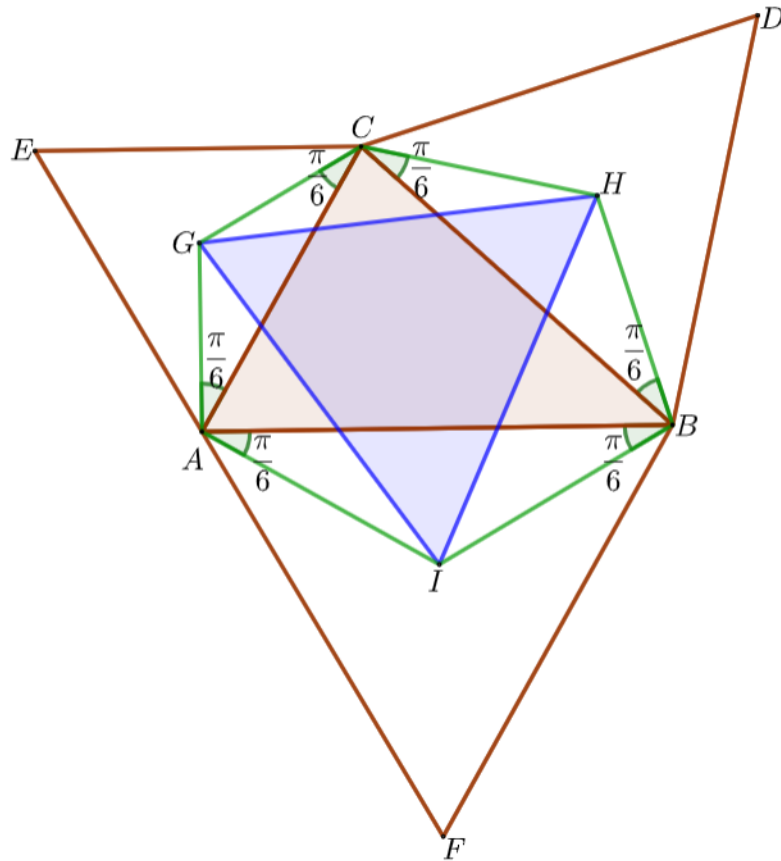


Figura 2.2: Os triângulos  $\triangle ACG$ ,  $\triangle BCH$  e  $\triangle ABI$  são isósceles.

Como, por construção, os triângulos  $\triangle EAC$  e  $\triangle BAF$  são equiláteros,  $\text{med}(\angle EAC) = \text{med}(\angle BAF) = \frac{\pi}{3}$ . Assim, no  $\triangle GIA$ , sabemos que  $\text{med}(\angle GAC) = \text{med}(\angle IAB) = \frac{\pi}{6}$ , pois os segmentos  $\overline{GA}$  e  $\overline{IA}$  pertencem às bissetrizes dos ângulos  $\angle EAC$  e  $\angle BAF$ .

Logo, pela lei dos cossenos aplicada no triângulo  $\triangle GIA$ :

$$GI^2 = GA^2 + AI^2 - 2 \cdot GA \cdot AI \cdot \cos\left(\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right).$$

Como G e I são centros dos  $\triangle EAC$  e  $\triangle BAF$ , respectivamente, podemos escrever  $GA = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{3}$  e, analogamente,  $AI = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$ .

Logo,

$$GI^2 = \frac{AC^2}{3} + \frac{AB^2}{3} - 2 \cdot \frac{AC\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{3} \cdot \cos\left(\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right) \implies$$

$$GI^2 = \frac{AC^2}{3} + \frac{AB^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\left(\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.1)$$

Como,

$$\begin{aligned} \cos\left(\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(\angle BAC) \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}(\angle BAC) \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ \cos\left(\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\cos(\angle BAC)}{2} - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1)

$$\begin{aligned} GI^2 &= \frac{AC^2}{3} + \frac{AB^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot AC \cdot AB \cdot \left(\frac{\cos(\angle BAC)}{2} - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}\right) \Rightarrow \\ 3GI^2 &= AC^2 + AB^2 - AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC) + \sqrt{3}AC \cdot AB \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Observando, agora, o triângulo  $\triangle ABC$  podemos encontrar as seguintes relações:

- Área do  $\triangle ABC$ :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC) \Rightarrow 2S_{ABC} = AC \cdot AB \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC). \quad (2.4)$$

- Pela lei dos cossenos no triângulo  $\triangle ABC$ :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC) \Rightarrow \\ \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} &= -AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto, substituindo (2.4) e (2.5) em (2.3) segue

$$\begin{aligned} 3GI^2 &= AC^2 + AB^2 + \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} + 2\sqrt{3}S_{ABC} \Rightarrow \\ 3GI^2 &= \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2) + 2\sqrt{3}S_{ABC}. \end{aligned}$$

De forma análoga, obteremos a seguir os mesmos resultados para  $3GH^2$  e  $3HI^2$ .

Para o lado  $\overline{GH}$ , sabemos que, por construção, os triângulos  $\triangle EAC$  e  $\triangle BCD$  são equiláteros,  $\operatorname{med}(\angle ECA) = \operatorname{med}(\angle BCD) = \frac{\pi}{3}$ . Assim, no  $\triangle CGH$ , sabemos que  $\operatorname{med}(\angle GCA) = \operatorname{med}(\angle HCB) = \frac{\pi}{6}$ , pois os segmentos  $\overline{GC}$  e  $\overline{CH}$  pertencem às bissetrizes dos ângulos  $\angle ECA$  e  $\angle DCB$ .

Assim, pela lei dos cossenos no triângulo  $\triangle CGH$ :

$$GH^2 = GC^2 + CH^2 - 2 \cdot GC \cdot CH \cdot \cos\left(\angle ACB + \frac{\pi}{3}\right).$$



Como G e H são centros dos  $\triangle EAC$  e  $\triangle DCB$ , respectivamente, podemos escrever  $GC = \frac{AC\sqrt{3}}{3}$  e  $CH = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$ .

Logo,

$$GH^2 = \frac{AC^2}{3} + \frac{BC^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\left(\angle ACB + \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.6)$$

Mas sabemos que

$$\cos\left(\angle ACB + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\angle ACB) \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin(\angle ACB) \cdot \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\angle ACB + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(\angle ACB)}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin(\angle ACB)}{2}. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6)

$$3GH^2 = AC^2 + BC^2 - AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB) + \sqrt{3}AC \cdot BC \cdot \sin(\angle ACB). \quad (2.8)$$

Observando, agora, o triângulo  $\triangle ABC$  podemos encontrar as seguintes relações:

- Área do  $\triangle ABC$ :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle ACB) \Rightarrow 2S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \sin(\angle ACB). \quad (2.9)$$

- Pela lei dos cossenos no triângulo  $\triangle ABC$ :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB) \Rightarrow$$

$$\frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2} = -AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB). \quad (2.10)$$

Portanto, substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8) segue

$$3GH^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2) + 2\sqrt{3}S_{ABC}.$$

E, também, para o segmento  $\overline{HI}$ , lado do triângulo  $\triangle HIB$ , sabemos que  $med(\angle HBC) = med(\angle IBA) = \frac{\pi}{6}$ , pois os segmentos  $\overline{HB}$  e  $\overline{BI}$  pertencem às bissetrizes dos ângulos  $\angle CBD$  e  $\angle ABF$ , respectivamente. Além disso,  $med(\angle CBD) = med(\angle ABF) = \frac{\pi}{3}$ , pois  $\triangle CBD$  e  $\triangle ABF$  são equiláteros.

Assim, pela lei dos cossenos no triângulo  $\triangle HIB$ :

$$HI^2 = HB^2 + BI^2 - 2 \cdot HB \cdot BI \cdot \cos\left(\angle ABC + \frac{\pi}{3}\right).$$

Como H e I são centros dos  $\triangle CBD$  e  $\triangle ABF$ , respectivamente, podemos escrever  $HB = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$  e  $BI = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$ .

Logo,

$$HI^2 = \frac{BC^2}{3} + \frac{AB^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot BC \cdot AB \cdot \cos\left(\angle ABC + \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.11)$$

Mas sabemos que

$$\begin{aligned} \cos\left(\angle ABC + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(\angle ABC) \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}(\angle ABC) \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ \cos\left(\angle ABC + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\cos(\angle ABC)}{2} - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\angle ABC)}{2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11)

$$3HI^2 = BC^2 + AB^2 - BC \cdot AB \cdot \cos(\angle ABC) + \sqrt{3}BC \cdot AB \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC). \quad (2.13)$$

Analisando o triângulo  $\triangle ABC$  podemos encontrar as seguintes relações:

- Área do  $\triangle ABC$ :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC) \Rightarrow 2S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC). \quad (2.14)$$

- Pela lei dos cossenos no triângulo  $\triangle ABC$ :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC) \Rightarrow \\ \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2} &= -AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13) segue

$$3HI^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2) + 2\sqrt{3}S_{ABC}.$$

Sendo assim, verificamos que os segmentos  $\overline{GH}$ ,  $\overline{HI}$  e  $\overline{GI}$  são congruentes. Logo, o triângulo  $\triangle GHI$ , cujos vértices são os pontos centrais dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo qualquer, também é equilátero.  $\square$

Outro caso que se relaciona com o Teorema de Jacobi 2.1 é o Ponto de Fermat. Como será visto na subseção seguinte, o ponto de Fermat de um triângulo  $\triangle ABC$  é o ponto de Jacobi do triângulo de Jacobi que coincide com o triângulo de Napoleão  $\triangle A'B'C'$ .

### 2.1.2 Ponto de Fermat

O problema de Fermat consiste em determinar o ponto que minimiza a soma de suas distâncias aos vértices de um triângulo dado. Este ponto é chamado de ponto de Fermat (ou Ponto de Torricelli) do triângulo dado. O problema foi proposto pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665) a Evangelista Torricelli (1608-1647), que o resolveu próximo ao ano de 1640.

Uma possível abordagem do problema de Fermat está proposta na Revista do Professor de Matemática [3]:

*Um professor sobrevive lecionando em três colégios. Qual é o melhor lugar para ele morar?*

No caso das medidas dos ângulos internos de um triângulo  $\triangle ABC$  serem menores que  $\frac{2\pi}{3}$ , o ponto de Fermat  $P$  do triângulo  $\triangle ABC$  está no interior do triângulo, como ilustra a Figura 2.3.

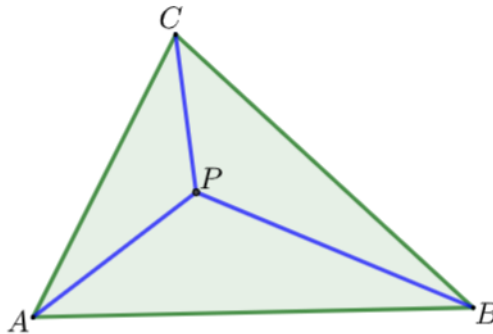


Figura 2.3:  $P$  é o Ponto de Fermat e  $AP + BP + CP$  é mínimo.

Vejamos como encontrar esse ponto  $P$ , interior à região triangular, em que  $d = AP + BP + CP$  é mínima:

Supomos conhecido tal ponto  $P$ . Rotacionando (para fora do triângulo  $\triangle ABC$ ) o triângulo  $\triangle APC$  em  $\frac{\pi}{3}$  sobre o ponto  $C$ , obtemos o triângulo  $\triangle B'P'C$ , como ilustrado na Figura 2.4.

Assim,  $\triangle APC \cong \triangle B'P'C$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{B'C}$ ,  $\overline{CP} \cong \overline{CP'}$  e  $\overline{AP} \cong \overline{B'P'}$ .



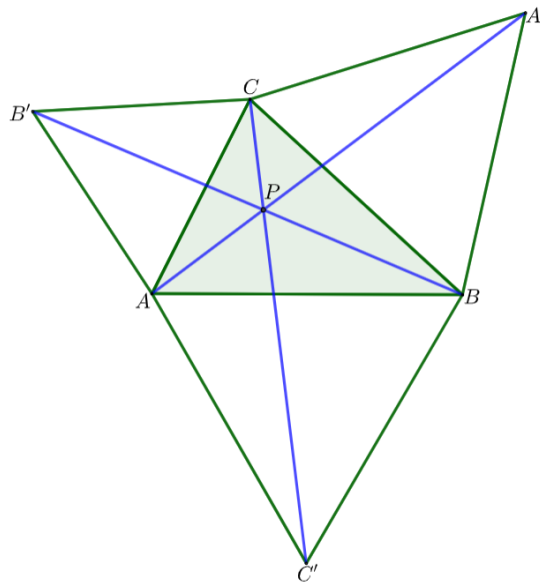


Figura 2.5: Os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  intersectam-se no ponto P, Ponto de Fermat.

ou igual a  $\frac{2\pi}{3}$ , sua soma com os ângulos adjacentes dos triângulos equiláteros construídos exteriormente será maior ou igual a  $\pi$ , de modo que P estará sobre um lado do triângulo  $\triangle ABC$ , como ilustrado na Figura 2.6, ou exteriormente ao triângulo  $\triangle ABC$ , como ilustrado na Figura 2.7.

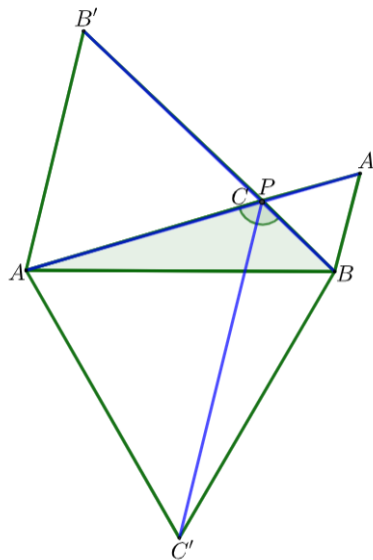


Figura 2.6: O ponto P de Fermat no triângulo obtuso com ângulo igual a  $\frac{2\pi}{3}$  ficará exatamente sobre seu vértice. No  $\triangle ABC$ , sobre o vértice C.

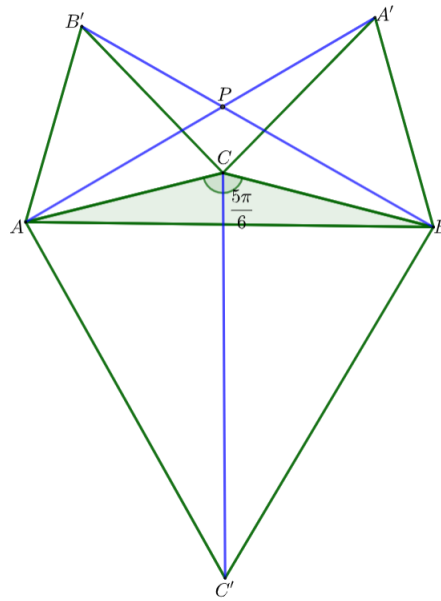


Figura 2.7: O ponto P de Fermat no triângulo obtuso com ângulo maior que  $\frac{2\pi}{3}$  ficará na região exterior do triângulo  $\triangle ABC$ .

Passamos ao último caso particular, que generaliza o Teorema de Napoleão, construindo triângulos isósceles semelhantes entre si sobre os lados de um triângulo qualquer.

### 2.1.3 Teorema de Kiepert

O matemático Ludwig Kiepert (1846-1934), foi professor em Hannover na Alemanha. Em seus estudos, mostrou que no Teorema de Napoleão (2.2) os triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo  $\triangle ABC$  podem ser substituídos por triângulos isósceles semelhantes, como ilustra a Figura 2.8.

**Teorema 2.3.** *Considere um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer. Sejam  $D, E$  e  $F$  vértices de triângulos isósceles construídos exteriormente sobre os lados  $\overline{AB}, \overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $\angle DAB \cong \angle DBA \cong \angle EBC \cong \angle ECB \cong \angle FCA \cong \angle FAC$ . Então os segmentos  $\overline{AE}, \overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  são concorrentes num ponto  $K$ , que é chamado de Ponto de Kiepert do triângulo  $\triangle ABC$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\{A'\} = \overline{AE} \cap \overline{BC}$ ,  $\{B'\} = \overline{BF} \cap \overline{AC}$  e  $\{C'\} = \overline{CD} \cap \overline{AB}$ . Para demonstrar que os segmentos  $\overline{AE}, \overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  são concorrentes num ponto  $K$ , utilizaremos

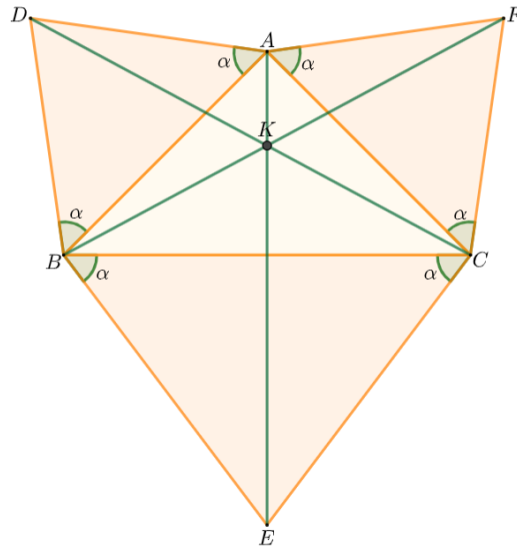


Figura 2.8: Os triângulos  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ACF$  e  $\triangle BCE$  são isósceles e semelhantes entre si.

o Teorema de Ceva (1.1). Assim, se no triângulo  $\triangle ABC$ ,  $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1$ , então os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são concorrentes, como ilustra a Figura 2.9.

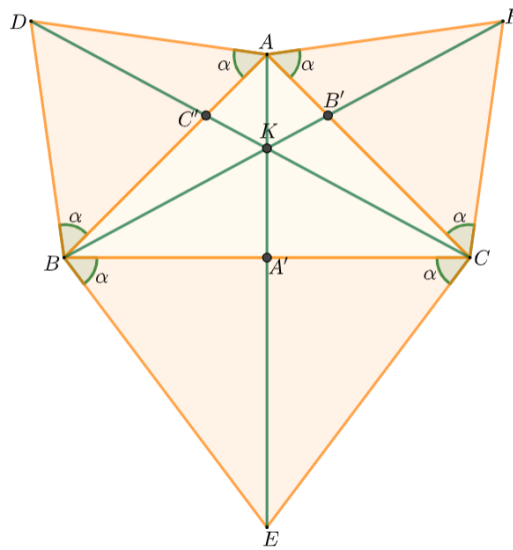


Figura 2.9:  $\{K\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'}$ .

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $\triangle AFB'$ , temos que

$$\frac{B'A}{\text{sen}(\angle AFB')} = \frac{B'F}{\text{sen}\alpha} \implies B'F = \frac{B'A \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\angle AFB')}. \quad (2.16)$$

E, no triângulo  $\triangle CFB'$  pela lei dos senos, temos que

$$\frac{B'C}{\text{sen}(\angle CFB')} = \frac{B'F}{\text{sen}\alpha} \implies B'F = \frac{B'C \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\angle CFB')}. \quad (2.17)$$

Então, pelas igualdades de  $B'F$  encontradas nos resultados em (2.16) e (2.17)

$$\frac{B'A \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\angle AFB')} = \frac{B'C \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\angle CFB')} \implies \frac{B'C}{B'A} = \frac{\text{sen}(\angle CFB')}{\text{sen}(\angle AFB')}. \quad (2.18)$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $\triangle CBF$  verificamos a igualdade abaixo:

$$\frac{BC}{\text{sen}(\angle CFB')} = \frac{BF}{\text{sen}(\angle ACB + \alpha)} \implies BF = \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}{\text{sen}(\angle CFB')}. \quad (2.19)$$

E pela lei dos senos no triângulo  $\triangle ABF$

$$\frac{AB}{\text{sen}(\angle AFB')} = \frac{BF}{\text{sen}(\angle BAC + \alpha)} \implies BF = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{\text{sen}(\angle AFB')}. \quad (2.20)$$

Então, pelas igualdades de  $BF$  encontradas nos resultados em (2.19) e (2.20)

$$\frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}{\text{sen}(\angle CFB')} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{\text{sen}(\angle AFB')} \implies \frac{\text{sen}(\angle AFB')}{\text{sen}(\angle CFB')} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}.$$

Utilizando o resultado dado em (2.18) podemos concluir que

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}. \quad (2.21)$$

De forma análoga, podemos mostrar que

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \alpha)} \text{ e } \frac{A'B}{A'C} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \alpha)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}.$$

Portanto,

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \alpha)} \cdot \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \alpha)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)} \cdot \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \alpha)}{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são concorrentes num ponto  $K$ . Como  $A - K - A' - E$ ,  $B - K - B' - F$  e  $C - K - C' - D$  então  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  são concorrentes em  $K$ .  $\square$



---

## TRIÂNGULO DE JACOBI

---

Carl Friedrich Andreas Jacobi nasceu em 2 de dezembro de 1795 em Crawinkel na Alemanha e faleceu em 28 de junho de 1855. Ele foi matemático e professor e dedicou boa parte do seu trabalho ao estudo da geometria triangular. Jacobi deixa a contribuição de 45 trabalhos publicados em 106 livros e/ou trabalhos acadêmicos em 4 línguas diferentes, como pode ser visto em [21]. Destacaremos abaixo alguns dos trabalhos que podem ser acessados gratuitamente nos links destacados nas imagens.

- *Commentatio geometrica de quadrangulis*, publicado em latim em 1837, tem como contracapa a Imagem 3.1.

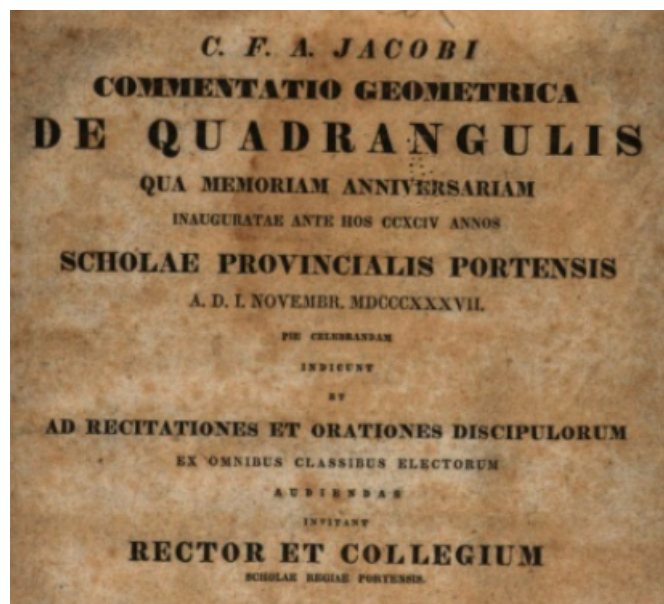


Figura 3.1: Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=chi.086591542&view=1up&seq=8>.

- Die Entfernungsorter geradliniger Dreiecke : eine geometrische Abhandlung - contracapa ilustrada na Figura 3.2. Trata-se de um ensaio geométrico sobre as distâncias nos triângulos retângulos, incluindo a este o relatório anual sobre seu trabalho como professor na escola estadual de Pforta.



Figura 3.2: Disponível em: <https://archive.org/details/dieussernentfer00jacogoog/page/n9>.

- De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, publicado em latim em 1825, tem como contracapa a Imagem 3.3.

Passamos a apresentar um dos trabalhos de Jacobi de relações e propriedades na construção de novos triângulos. Jacobi constrói um triângulo a partir de outro dado e encontra um ponto relacionado aos vértices dos dois triângulos que será chamado de Ponto de Jacobi. Tanto o teorema como o ponto de Jacobi podem ser relacionados ao estudo do capítulo anterior.

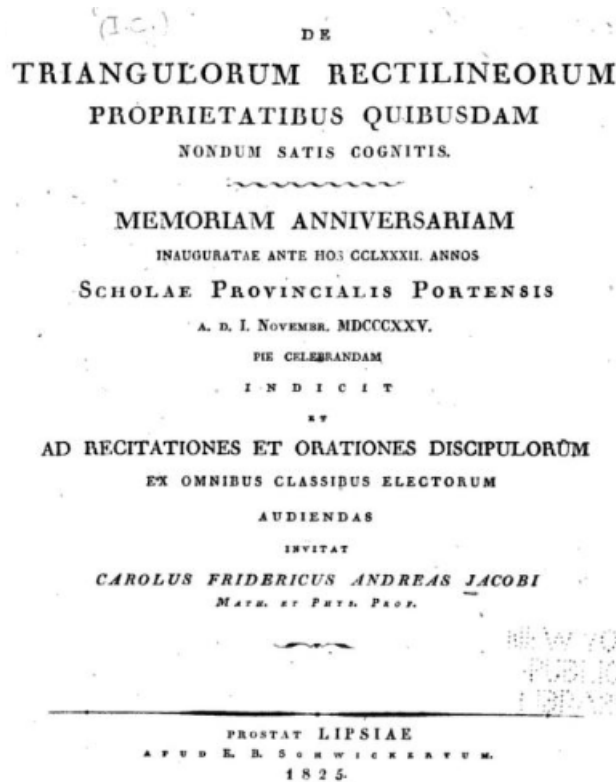


Figura 3.3: Disponível em: [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_8MRXAAAAYAAJ/page/n3](https://archive.org/details/bub_gb_8MRXAAAAYAAJ/page/n3).

### 3.1 TEOREMA DE JACOBI

Analisando os teoremas e pontos notáveis apresentados no capítulo 2, poderemos observar que o Teorema de Jacobi é uma generalização dos teoremas de Napoleão e Kiepert: no Teorema de Napoleão constroem-se triângulos equiláteros sobre os lados de um triângulo  $\triangle ABC$ , enquanto que no Teorema de Kiepert constroem-se triângulos isósceles semelhantes entre si; no Teorema de Jacobi constroem-se triângulos quaisquer, sendo que os ângulos dos novos triângulos que partem de um mesmo vértice são congruentes. O artigo *Reciprocal Jacobi Triangles and the McCay Cubic*, [15], foi a principal referência para escrever o Teorema de Jacobi e fazer sua demonstração.

**Teorema 3.1.** (Teorema de Jacobi) Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Construa os pontos  $A', B'$  e  $C'$  de maneira que  $\text{med}(\angle C'AB) = \text{med}(\angle CAB') = \alpha$ ,  $\text{med}(\angle A'BC) = \text{med}(\angle C'BA) = \beta$  e  $\text{med}(\angle B'CA) = \text{med}(\angle A'CB) = \gamma$ , sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  ângulos quaisquer entre  $0$  e  $\pi$ . O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é chamado de triângulo de Jacobi para o  $\triangle ABC$  e as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes num ponto  $K$ , que é chamado de Ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

*Demonstração.* Para demonstrar que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes aplicaremos o Teorema de Ceva (1.1), ao triângulo  $\triangle ABC$ , mostrando que  $\frac{BR}{RA} \cdot \frac{CP}{BP} \cdot \frac{AQ}{QC} = 1$ , como ilustra a Figura 3.4.

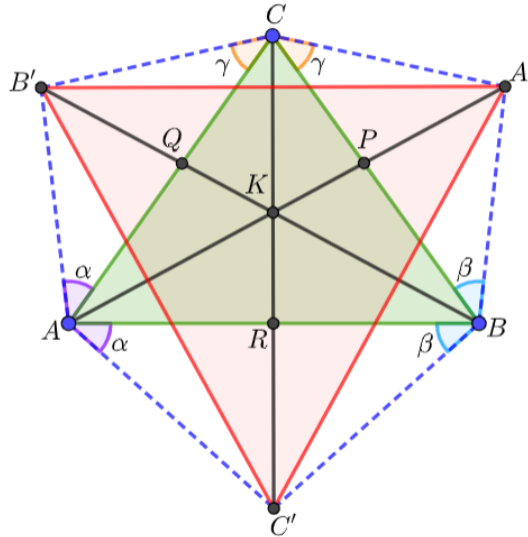


Figura 3.4: O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é um triângulo de Jacobi construído a partir do triângulo  $\triangle ABC$ .

Seja  $P$  o ponto de intersecção entre a reta  $\overleftrightarrow{AA'}$  e o segmento  $\overline{BC}$ ,  $Q$  o ponto de intersecção entre a reta  $\overleftrightarrow{BB'}$  e o segmento  $\overline{AC}$  e  $R$  o ponto de intersecção entre a reta  $\overleftrightarrow{CC'}$  e o segmento  $\overline{AB}$ .

No triângulo  $\triangle A'BP$ , ilustrado na Figura 3.5, pela lei dos senos, temos que

$$\frac{BP}{\text{sen}(\angle BA'P)} = \frac{A'P}{\text{sen}\beta} \implies A'P = \frac{BP \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}(\angle BA'P)}. \quad (3.1)$$

E, no triângulo  $\triangle A'CP$ , também ilustrado na Figura 3.5, pela lei dos senos, temos que

$$\frac{CP}{\text{sen}(\angle CA'P)} = \frac{A'P}{\text{sen}\gamma} \implies A'P = \frac{CP \cdot \text{sen}\gamma}{\text{sen}(\angle CA'P)}. \quad (3.2)$$

Então, pelas igualdades de  $A'P$  encontradas em (3.1) e (3.2)

$$\frac{BP \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}(\angle BA'P)} = \frac{CP \cdot \text{sen}\gamma}{\text{sen}(\angle CA'P)} \implies \frac{BP}{CP} = \frac{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle BA'P)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle CA'P)}. \quad (3.3)$$

De forma análoga, podemos afirmar que

$$\frac{BR}{RA} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle AB'R)} \quad \text{e} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle CC'Q)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle AC'Q)}. \quad (3.4)$$

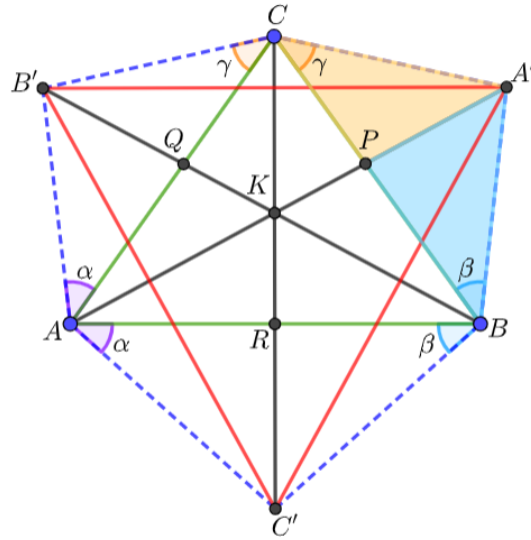


Figura 3.5: Destaque dos triângulos  $\triangle A'BP$  e  $\triangle A'CP$  e de suas relações.

Portanto,

$$\frac{BR}{RA} \cdot \frac{CP}{BP} \cdot \frac{AQ}{QC} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle AB'R)} \cdot \frac{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle CA'P)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle BA'P)} \cdot \frac{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle AC'Q)}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle CC'Q)} =$$

$$\frac{\text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}(\angle AB'R)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CA'P)}{\text{sen}(\angle BA'P)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle AC'Q)}{\text{sen}(\angle CC'Q)}. \tag{3.5}$$

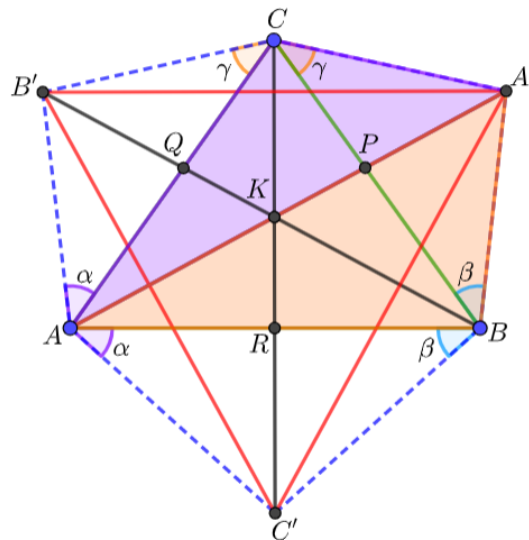


Figura 3.6: Destaque dos triângulos  $\triangle A'AC$  e  $\triangle A'AB$  e de suas relações.

Aplicando a lei dos senos ao triângulo  $\triangle AA'B$ , destacado na Figura 3.6, verificamos a igualdade abaixo:

$$\frac{AB}{\text{sen}(\angle BA'A)} = \frac{AA'}{\text{sen}(\angle ABC + \beta)} \implies AA' = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{\text{sen}(\angle BA'A)}. \quad (3.6)$$

E pela lei dos senos no triângulo  $\triangle AA'C$ , destacado na Figura 3.6, temos

$$\frac{AC}{\text{sen}(\angle CA'A)} = \frac{AA'}{\text{sen}(\angle ACB + \gamma)} \implies AA' = \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}{\text{sen}(\angle CA'A)}. \quad (3.7)$$

Então, pelas igualdades de  $AA'$  encontradas em (3.6) e (3.7)

$$\frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{\text{sen}(\angle BA'A)} = \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}{\text{sen}(\angle CA'A)} \implies \frac{\text{sen}(\angle BA'A)}{\text{sen}(\angle CA'A)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}.$$

Como  $\angle BA'A = \angle BA'P$  e  $\angle CA'A = \angle CA'P$ , então

$$\frac{\text{sen}(\angle BA'P)}{\text{sen}(\angle CA'P)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}. \quad (3.8)$$

De forma análoga, podemos mostrar que

$$\frac{\text{sen}(\angle BC'R)}{\text{sen}(\angle AC'R)} = \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)} \text{ e } \frac{\text{sen}(\angle AB'Q)}{\text{sen}(\angle CB'Q)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}. \quad (3.9)$$

Assim, por (3.5), (3.8) e (3.9),

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}(\angle AB'R)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CA'P)}{\text{sen}(\angle BA'P)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle AC'Q)}{\text{sen}(\angle CC'Q)} = \\ & \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)} \cdot \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)} \cdot \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)} = 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, os segmentos  $\overline{BQ}$ ,  $\overline{AP}$  e  $\overline{CR}$  são concorrentes num ponto  $K$ . E, como  $A - K - P - A'$ ,  $B - K - Q - B'$  e  $C - K - R - C'$  então  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes em  $K$ , que é o ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle A'B'C'$ .  $\square$

É necessário ressaltar que no caso em que os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são congruentes e de medida  $\frac{\pi}{2}$ , não é possível determinar os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Neste caso, não existe o triângulo de Jacobi.

A demonstração do Teorema de Jacobi foi feita para os triângulos construídos exteriormente ao triângulo  $\triangle ABC$ . Observamos que a construção pode ser feita, porém, no sentido oposto, como ilustra a Figura 3.7. Neste caso, os termos  $\text{sen}(\angle BAC + \alpha)$ ,  $\text{sen}(\angle ABC + \beta)$  e  $\text{sen}(\angle ACB + \gamma)$  são substituídos por  $\text{sen}(\angle BAC - \alpha)$ ,  $\text{sen}(\angle ABC - \beta)$  e  $\text{sen}(\angle ACB - \gamma)$ .  $\text{sen}(\angle BA'A) = \text{sen}(\angle BA'P)$  e  $\text{sen}(\angle CA'A) = \text{sen}(\angle CA'P)$ , pois são suplementares os ângulos  $\angle BA'A$  e  $\angle BA'P$ , assim como  $\angle CA'A$  e  $\angle CA'P$ . Com estas considerações, a demonstração segue de forma análoga.

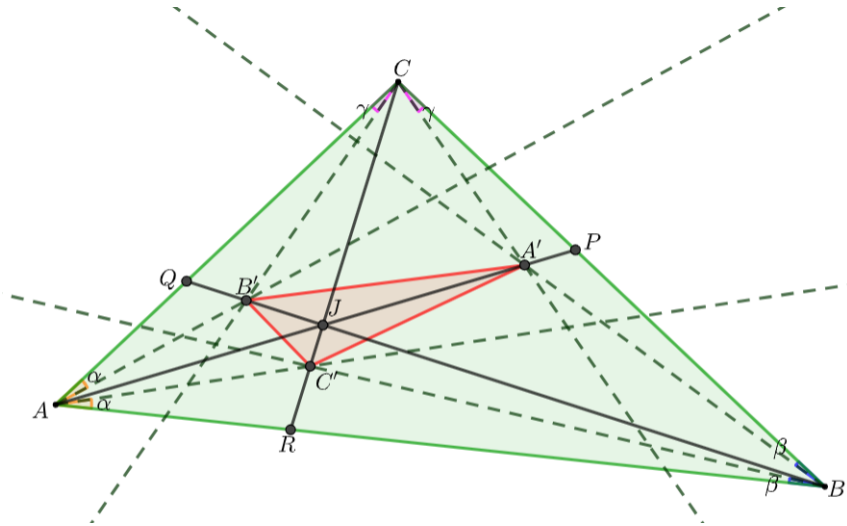


Figura 3.7: O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é um triângulo de Jacobi construído a partir do triângulo  $\triangle ABC$  e  $J$  é seu ponto de Jacobi.

### 3.2 O TEOREMA COM CONJUGADOS ISOGONAIS

Vimos que a construção do triângulo de Jacobi necessita de ângulos congruentes partindo do mesmo vértice. Portanto, é possível reescrever o Teorema de Jacobi utilizando os conceitos de retas isogonais. Para isso, lembramos a definição de retas isogonais, como na referência [14], que apareceu na Subseção 1.2.12 sobre os pontos de Brocard.

**Definição 3.2.** (Retas isogonais) Duas retas  $r$  e  $s$  são isogonais com relação ao ângulo  $\angle BAC$  se a reta  $r$  pode ser obtida através da reflexão da reta  $s$  sobre a bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ , como mostra a Figura 3.8.

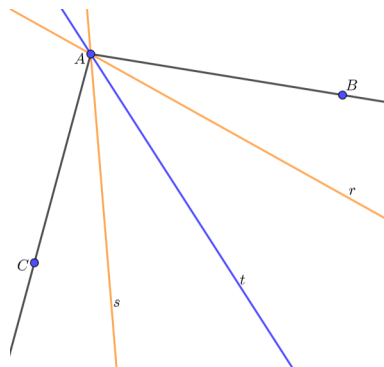


Figura 3.8: As retas  $r$  e  $s$  são isogonais com relação ao ângulo  $\angle BAC$  e a reta  $t$  é a reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ .

Assim, a construção clássica do ponto de Jacobi, dada no início desta seção, pode ser obtida se observarmos que as retas  $\overleftrightarrow{BA'}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$  são retas conjugadas isogonais em relação ao vértice B (isto é,  $\overleftrightarrow{BA'}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$  são simétricas pela reflexão em relação à reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle ABC$ , assim como  $\overleftrightarrow{CA'}$  e  $\overleftrightarrow{CB'}$ ,  $\overleftrightarrow{AB'}$  e  $\overleftrightarrow{AC'}$ ). Desse modo, o Teorema de Jacobi poderia assim ser enunciado:

**Teorema 3.3.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Construa os pontos  $A', B'$  e  $C'$  de maneira que as retas  $\overleftrightarrow{AB'}$  e  $\overleftrightarrow{AC'}$  são conjugadas isogonais em relação ao ângulo  $\angle BAC$ , as retas  $\overleftrightarrow{BA'}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$  são conjugadas isogonais em relação ao ângulo  $\angle ABC$ , e, as retas  $\overleftrightarrow{CA'}$  e  $\overleftrightarrow{CB'}$  são conjugadas isogonais em relação ao ângulo  $\angle ACB$ . O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é chamado de Triângulo de Jacobi do triângulo  $\triangle ABC$  e as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes num ponto  $K$ , que é chamado de Ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle A'B'C'$ .*

### 3.3 UMA INTERSECÇÃO IMPORTANTE NA CONSTRUÇÃO DE DOIS TRIÂNGULOS DE JACOBI

Nesta seção, construímos o triângulo de Jacobi  $\triangle A'B'C'$  de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, com  $A', B', C'$  no interior do triângulo  $\triangle ABC$ , e o triângulo de Jacobi  $\triangle A''B''C''$  do mesmo triângulo  $\triangle ABC$ , com  $A'', B'', C''$  no exterior do triângulo  $\triangle ABC$ , como está ilustrado na Figura 3.9.

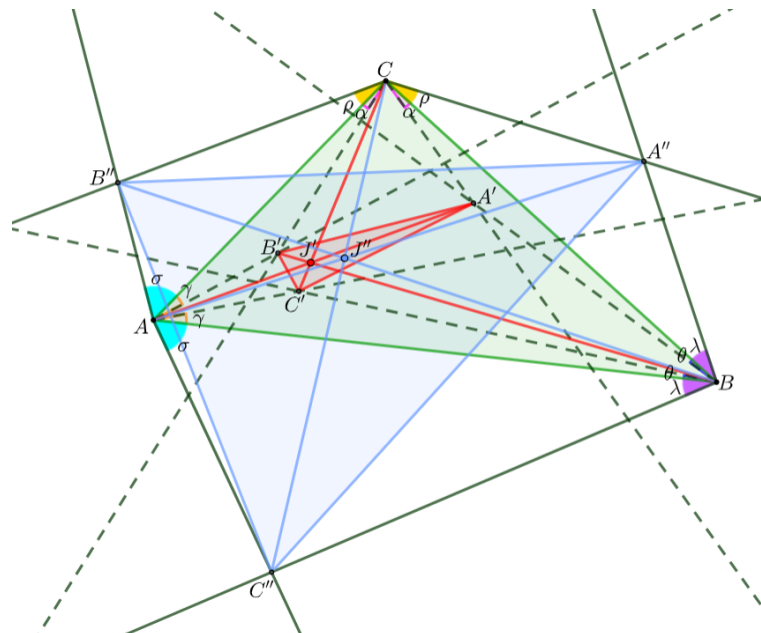


Figura 3.9: Os triângulos  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle A''B''C''$  são triângulos de Jacobi do triângulo  $\triangle ABC$ .



As intersecções  $\{J'\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'}$  e  $\{J''\} = \overline{AA''} \cap \overline{BB''} \cap \overline{CC''}$  são os pontos de Jacobi dos triângulos  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle A''B''C''$ , respectivamente.

Walser [18] apresenta a construção que passamos a fazer com os triângulos de Jacobi  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle A''B''C''$  como um caso especial do Teorema de Jacobi:

**Proposição 3.4.** *Ao traçar os segmentos  $\overline{A'A''}$ ,  $\overline{B'B''}$  e  $\overline{C'C''}$ , obtemos os pontos  $S, R$  e  $T$ , intersecções com os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Em relação ao triângulo  $\triangle RST$ ,  $\{J\} = \overline{AS} \cap \overline{BR} \cap \overline{CT}$ , como ilustrado na Figura 3.10.*

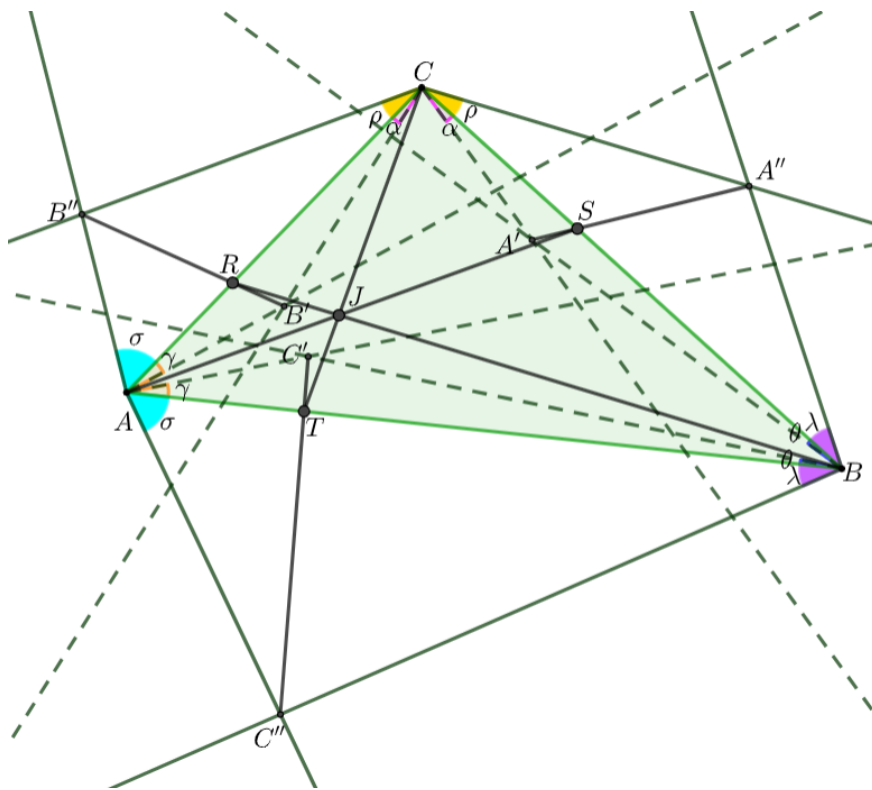


Figura 3.10: Os segmentos  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{CT}$  intersectam-se no ponto  $J$ .

*Demonstração.* Tomamos separadamente os pares de triângulos  $\triangle A'BC$  e  $\triangle A''BC$ ,  $\triangle AB''C$  e  $\triangle AB'C$ , e,  $\triangle ABC''$  e  $\triangle ABC'$ . A Figura 3.11 destaca os triângulos  $\triangle A'BC$  e  $\triangle A''BC$ , onde  $\overline{A'E}$  e  $\overline{A''D}$  são suas alturas, respectivamente, relativas ao lado  $\overline{BC}$ . Sendo  $\lambda, \theta, \alpha$  e  $\rho$  as medidas dos ângulos  $\angle A''BC$ ,  $\angle A'BC$ ,  $\angle A'CB$  e  $\angle A''CB$ , respectivamente, temos que

(a) no  $\triangle A''BD$ :

$$\tan \lambda = \frac{A''D}{BD} \implies A''D = BD \cdot \tan \lambda; \tag{3.10}$$

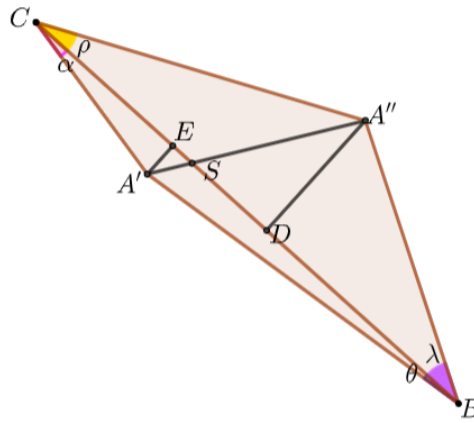


Figura 3.11:  $\overline{A'E}$  e  $\overline{A''D}$  são alturas dos triângulos  $\triangle A'BC$  e  $\triangle A''BC$ , respectivamente.

(b) no  $\triangle A''CD$ :

$$\tan \rho = \frac{A''D}{CD} \implies A''D = CD \cdot \tan \rho \implies A''D = (BC - BD) \cdot \tan \rho. \quad (3.11)$$

Da igualdade de  $A''D$  em (3.10) e (3.11) podemos concluir que

$$BD = \frac{BC \cdot \tan \rho}{\tan \lambda + \tan \rho} \quad (3.12)$$

e, (3.10) e (3.12) nos dá

$$A''D = \frac{BC \cdot \tan \lambda \cdot \tan \rho}{\tan \lambda + \tan \rho}. \quad (3.13)$$

De forma análoga podemos mostrar que

$$CE = \frac{BC \cdot \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \theta} \quad (3.14)$$

e

$$A'E = \frac{BC \cdot \tan \alpha \cdot \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \theta}. \quad (3.15)$$

Como  $\triangle A'ES \sim \triangle A''DS$ , temos que  $\frac{A'S}{A''S} = \frac{ES}{DS} = \frac{A'E}{A''D}$ , donde  $ES = \frac{A'E}{A''D} \cdot DS$ .

Assim, no caso em que  $C - E - S - D - B$ ,

$$\begin{aligned} \frac{CS}{BS} &= \frac{CE + ES}{BE - ES} = \frac{CE + \frac{A'E}{A''D} \cdot DS}{BE - \frac{A'E}{A''D} \cdot DS} = \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot DS}{BE \cdot A''D - A'E \cdot DS} = \\ &= \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot (CD - CS)}{BE \cdot A''D - A'E \cdot (BS - BD)} = \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot CD - A'E \cdot CS}{BE \cdot A''D + A'E \cdot BD - A'E \cdot BS} \end{aligned}$$

Sendo  $z = CE \cdot A''D + A'E \cdot CD$ ,  $w = BE \cdot A''D + A'E \cdot BD$  e  $t = A'E$ , mostramos que

$\frac{CS}{BS} = \frac{z-t \cdot CS}{w-t \cdot BS}$ . Logo, segue da igualdade de proporções que

$$\begin{aligned} \frac{CS}{BS} &= \frac{z}{w} = \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot CD}{BE \cdot A''D + A'E \cdot BD} = \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot (BC - BD)}{(BC - CE) \cdot A''D + A'E \cdot BD} = \\ &= \frac{BC \cdot A'E - BD \cdot A'E + CE \cdot A''D}{BC \cdot A''D + BD \cdot A'E - CE \cdot A''D}. \end{aligned}$$

A prova é análoga para o caso em que  $C - D - S - E - B$ . De fato, ainda vale que  $ES = \frac{A'E}{A''D} \cdot DS$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{CS}{BS} &= \frac{CE - ES}{BE + ES} = \frac{CE - \frac{A'E}{A''D} \cdot DS}{BE + \frac{A'E}{A''D} \cdot DS} = \frac{CE \cdot A''D - A'E \cdot DS}{BE \cdot A''D + A'E \cdot DS} = \\ &= \frac{CE \cdot A''D - A'E \cdot (CS - CD)}{BE \cdot A''D + A'E \cdot (BD - BS)} = \frac{CE \cdot A''D + A'E \cdot CD - A'E \cdot CS}{BE \cdot A''D + A'E \cdot BD - A'E \cdot BS'} \end{aligned}$$

como antes.

Logo, ao substituir na razão

$$\frac{CS}{BS} = \frac{BC \cdot A'E - BD \cdot A'E + CE \cdot A''D}{BC \cdot A''D + BD \cdot A'E - CE \cdot A''D}$$

os valores de  $BD$ ,  $A''D$ ,  $CE$  e  $A'E$  dados em (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15), respectivamente, encontraremos

$$\frac{CS}{BS} = \frac{\frac{BC^2 \cdot \tan \alpha \cdot \tan \theta}{\tan \alpha + \tan \theta} - \frac{BC^2 \cdot \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{(\tan \alpha + \tan \theta) \cdot (\tan \lambda + \tan \rho)} + \frac{BC^2 \cdot \tan \lambda \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{(\tan \alpha + \tan \theta) \cdot (\tan \lambda + \tan \rho)}}{\frac{BC^2 \cdot \tan \lambda \cdot \tan \rho}{\tan \lambda + \tan \rho} + \frac{BC^2 \cdot \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{(\tan \alpha + \tan \theta) \cdot (\tan \lambda + \tan \rho)} - \frac{BC^2 \cdot \tan \lambda \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{(\tan \alpha + \tan \theta) \cdot (\tan \lambda + \tan \rho)}} \implies$$

$$\frac{CS}{BS} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \lambda + \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho - \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho + \tan \lambda \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{\tan \lambda \cdot \tan \rho \cdot \tan \alpha + \tan \lambda \cdot \tan \rho \cdot \tan \theta + \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho - \tan \lambda \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho} \implies$$

$$\frac{CS}{BS} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \lambda + \tan \lambda \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho}{\tan \lambda \cdot \tan \rho \cdot \tan \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan \rho} \implies$$

$$\frac{CS}{BS} = \frac{\tan \theta \cdot \tan \lambda \cdot (\tan \alpha + \tan \rho)}{\tan \rho \cdot \tan \alpha \cdot (\tan \lambda + \tan \theta)}.$$

Analogamente,

$$\frac{BT}{AT} = \frac{\tan \gamma \cdot \tan \sigma \cdot (\tan \theta + \tan \lambda)}{\tan \theta \cdot \tan \lambda \cdot (\tan \gamma + \tan \sigma)}$$

e

$$\frac{AR}{CR} = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \rho \cdot (\tan \gamma + \tan \sigma)}{\tan \gamma \cdot \tan \sigma \cdot (\tan \alpha + \tan \rho)}.$$

Portanto,  $\frac{CS}{BS} \cdot \frac{BT}{AT} \cdot \frac{AR}{CR} = 1$ . Assim, pelo Teorema de Ceva (1.1) podemos concluir que os segmentos  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{CT}$  intersectam-se em um único ponto  $J$ .  $\square$

---

## PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE JACOBI

---

O capítulo que segue tem como objetivo mostrar algumas propriedades que decorrem do Teorema de Jacobi e da construção dos Triângulos de Jacobi. Primeiramente estudaremos os triângulos recíprocos de Jacobi e quais as condições necessárias para que eles existam. Em seguida, analisaremos o lugar geométrico dos pontos de Jacobi. Traremos uma condição para construir um triângulo de Jacobi congruente ao triângulo inicial e encontraremos as coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi e dos vértices do triângulo de Jacobi.

O estudo das propriedades dos triângulos de Jacobi serão propostos através das construções na parte exterior do triângulo inicial, com exceção para o tratamento das coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi.

### 4.1 TRIÂNGULOS RECÍPROCOS DE JACOBI

**Definição 4.1.** Considere um triângulo  $\triangle ABC$  e seja  $\triangle A'B'C'$  o triângulo de Jacobi associado ao triângulo  $\triangle ABC$  (com as convenções do Teorema de Jacobi (3.1), onde os ângulos de medidas  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são construídos sobre os vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente). Se existirem ângulos de medidas  $\alpha', \beta'$  e  $\gamma'$  construídos sobre os vértices  $A', B'$  e  $C'$  tais que o triângulo de Jacobi associado ao triângulo  $\triangle A'B'C'$  coincida com o triângulo  $\triangle ABC$ , dizemos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi, como ilustra a Figura 4.1.

Observamos que uma condição necessária e suficiente para que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  sejam triângulos recíprocos de Jacobi é  $\angle CA'B' \cong \angle C'A'B, \angle BC'A' \cong \angle B'C'A$  e  $\angle AB'C' \cong \angle A'B'C$ .

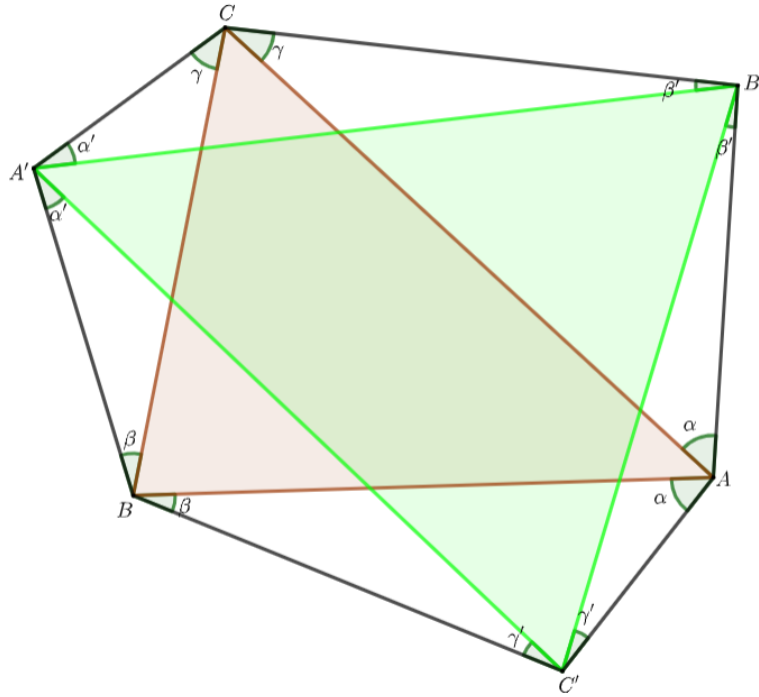


Figura 4.1:  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi. Na figura há seis pares de ângulos congruentes e os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são concorrentes.

A proposição apresentada a seguir, que também pode ser vista em [15], mostrará a condição necessária para que os triângulos sejam recíprocos.

**Proposição 4.2.** *Nas condições da Definição 4.1, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi se e somente se*

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  triângulos recíprocos de Jacobi, podemos analisar alguns triângulos dispostos na Figura 4.1, encontrando as seguintes relações:

No triângulo  $\triangle AB'C'$  temos que

$$\gamma' + \beta' + 2\alpha + m(\angle BAC) = \pi. \tag{4.1}$$

No triângulo  $\triangle BC'A'$  temos que

$$\gamma' + \alpha' + 2\beta + m(\angle ABC) = \pi. \tag{4.2}$$

No triângulo  $\triangle CA'B'$  temos que

$$\alpha' + \beta' + 2\gamma + m(\angle ACB) = \pi. \tag{4.3}$$

Somando as equações dadas em (4.1), (4.2) e (4.3), obtemos

$$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \underbrace{m(\angle BAC) + m(\angle ABC) + m(\angle ACB)}_{\pi} = 3 \cdot \pi \implies$$

$$2 \cdot [(\alpha' + \beta' + \gamma') + (\alpha + \beta + \gamma)] = 2 \cdot \pi \implies$$

$$(\alpha' + \beta' + \gamma') + (\alpha + \beta + \gamma) = \pi. \quad (4.4)$$

Assim, relacionando as equações (4.1) e (4.4)

$$\alpha' = \pi - \alpha - \beta - \gamma - \beta' - \gamma' \implies$$

$$\alpha' = \gamma' + \beta' + 2\alpha + m(\angle BAC) - \alpha - \beta - \gamma - \beta' - \gamma' \implies$$

$$\alpha' = m(\angle BAC) + \alpha - \beta - \gamma. \quad (4.5)$$

De forma análoga, utilizando as equações (4.2) e (4.4), obtemos

$$\beta' = \pi - \alpha - \beta - \gamma - \alpha' - \gamma' \implies$$

$$\beta' = \gamma' + \alpha' + 2\beta + m(\angle ABC) - \alpha - \beta - \gamma - \alpha' - \gamma' \implies$$

$$\beta' = m(\angle ABC) - \alpha + \beta - \gamma. \quad (4.6)$$

E, também, de (4.3) e (4.4), obtemos

$$\gamma' = \pi - \alpha - \beta - \gamma - \alpha' - \beta' \implies$$

$$\gamma' = \alpha' + \beta' + 2\gamma + m(\angle ACB) - \alpha - \beta - \gamma - \alpha' - \beta' \implies$$

$$\gamma' = m(\angle ACB) - \alpha - \beta + \gamma. \quad (4.7)$$

Ainda podemos relacionar outras equações que nos darão resultados úteis:

Do triângulo  $\triangle A'BC$  temos que  $m(\angle B'A'C') + 2\alpha' + \beta + \gamma = \pi$ . Substituindo  $\alpha'$  pela igualdade dada em (4.5), temos

$$m(\angle B'A'C') + 2 \cdot m(\angle BAC) + 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + \beta + \gamma = \pi \implies$$

$$m(\angle B'A'C') = \pi - 2 \cdot m(\angle BAC) - 2\alpha + \beta + \gamma. \quad (4.8)$$

Do triângulo  $\triangle AB'C$  temos que  $m(\angle A'B'C') + 2\beta' + \alpha + \gamma = \pi$ . Substituindo  $\beta'$ , pela igualdade dada em (4.6), temos

$$m(\angle A'B'C') + 2 \cdot m(\angle ABC) - 2\alpha + 2\beta - 2\gamma + \alpha + \gamma = \pi \implies$$

$$m(\angle A'B'C') = \pi - 2 \cdot m(\angle ABC) + \alpha - 2\beta + \gamma.$$

Do triângulo  $\triangle ABC'$  temos que  $m(\angle A'C'B') + 2\gamma' + \alpha + \beta = \pi$ . Substituindo  $\gamma'$ , pela igualdade dada em (4.7), temos

$$m(\angle A'C'B') + 2 \cdot m(\angle ACB) - 2\alpha - 2\beta + 2\gamma + \alpha + \beta = \pi \implies$$

$$m(\angle A'C'B') = \pi - 2 \cdot m(\angle ACB) + \alpha + \beta - 2\gamma.$$

Logo, pelas igualdades dadas em (4.5) e (4.8),  $(m(\angle B'A'C') + \alpha') + (m(\angle BAC) + \alpha) = \pi - 2 \cdot m(\angle BAC) - 2\alpha + \beta + \gamma + m(\angle BAC) + \alpha - \beta - \gamma + m(\angle BAC) + \alpha = \pi$ . De forma análoga, podemos obter  $(m(\angle A'B'C') + \beta') + (m(\angle ABC) + \beta) = \pi$  e  $(m(\angle A'C'B') + \gamma') + (m(\angle ACB) + \gamma) = \pi$ . Portanto, podemos observar que com os pontos  $A, B, C, A', B'$  e  $C'$  é possível formar vários quadriláteros cíclicos<sup>1</sup>, como o quadrilátero  $ABA'B'$ .

Podemos encontrar várias congruências entre ângulos formados pelos lados e pelas diagonais dos quadriláteros cíclicos, por serem ângulos inscritos a um mesmo arco de circunferência, como mostraremos a seguir e ilustrado na figura 4.2.

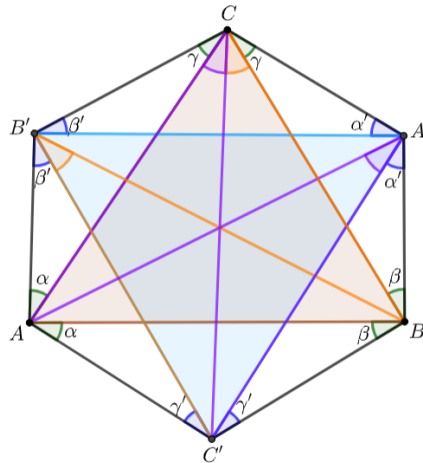


Figura 4.2:  $\angle AA'C' \cong \angle ACC'$  e  $\angle BB'C' \cong \angle BCC'$  pois são ângulos inscritos aos mesmos arcos  $\widehat{C'A}$  e  $\widehat{BC'}$ , respectivamente.

<sup>1</sup> Um quadrilátero cíclico (ou circunscritível) possui uma circunferência que passa por seus quatro vértices, sendo assim seus ângulos opostos suplementares.



Em relação ao quadrilátero cíclico  $ACA'C'$  temos que  $\angle AA'C' \cong \angle ACC'$ , pois estes são ângulos inscritos ao mesmo arco  $\widehat{C'A}$ . No quadrilátero cíclico  $ABA'B'$  podemos então relacionar os ângulos  $\alpha', \beta', \angle AA'C'$  e  $\angle BB'C'$ , pois são ângulos inscritos ao arco de circunferência  $\widehat{BA}$ . Logo,

$$\alpha' + m(\angle AA'C') = \beta' + m(\angle BB'C') \implies \alpha' + m(\angle ACC') = \beta' + m(\angle BB'C') \quad (4.9)$$

No quadrilátero cíclico  $BCB'C'$  obtemos

$$\gamma + m(\angle ACC') = \beta + m(\angle ABB'), \quad (4.10)$$

pois são ângulos inscritos ao arco de circunferência  $\widehat{B'C'}$ .

Sendo  $N$  o ponto de intersecção entre os segmentos  $\overline{B'C'}$  e  $\overline{AB}$ , temos no triângulo  $\triangle ANC'$  que

$$\alpha + \gamma' + m(\angle ANC') = \pi \implies m(\angle ANC') = \pi - \alpha - \gamma'.$$

Como  $\angle BNB'$  e  $\angle ANC'$  são ângulos opostos pelo vértice,

$$m(\angle BNB') = \pi - \alpha - \gamma'. \quad (4.11)$$

Com isso, no triângulo  $\triangle BB'N$  temos que

$$m(\angle ABB') + m(\angle BB'C') + m(\angle BNB') = \pi \implies$$

$$m(\angle ABB') + m(\angle BB'C') = \pi - m(\angle BNB').$$

Substituindo a medida do ângulo  $\angle BNB'$  encontrada em (4.11), temos

$$m(\angle ABB') + m(\angle BB'C') = \pi - (\pi - \alpha - \gamma') \implies$$

$$m(\angle ABB') + m(\angle BB'C') = \alpha + \gamma'. \quad (4.12)$$

Adicionando (4.9) e (4.10) obtemos:

$$2 \cdot m(\angle ACC') + \alpha' + \gamma = \beta' + \beta + m(\angle BB'C') + m(\angle ABB') \implies$$

$$2 \cdot m(\angle ACC') = \beta - \gamma - \alpha' + \beta' + m(\angle BB'C') + m(\angle ABB'),$$

e ao substituir (4.12), temos

$$2 \cdot m(\angle ACC') = \alpha + \beta - \gamma - \alpha' + \beta' + \gamma' \quad (4.13)$$

Ainda, no triângulo  $\triangle AB'C'$  temos que

$$\gamma' + \beta' + 2\alpha + m(\angle BAC) = \pi \implies$$

$$\gamma' + \beta' = \pi - m(\angle BAC) - 2\alpha \quad (4.14)$$

Logo, substituindo em (4.13) as relações encontradas em (4.14) e (4.5), concluímos

$$2 \cdot m(\angle ACC') = \alpha + \beta - \gamma - (m(\angle BAC) + \alpha - \beta - \gamma) + \pi - m(\angle BAC) - 2\alpha \implies$$

$$2 \cdot m(\angle ACC') = -2\alpha + 2\beta - 2m(\angle BAC) + \pi \implies$$

$$m(\angle ACC') = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha - m(\angle BAC).$$

Além disso, os ângulos  $\angle ACC'$  e  $\angle AA'C'$  têm a mesma medida, pois são ângulos inscritos do arco  $\widehat{AC'}$ , que pertence à circunferência circunscrita ao quadrilátero  $ACA'C'$ . Portanto,

$$m(\angle AA'C') = m(\angle ACC') = \frac{\pi}{2} + \beta - \alpha - m(\angle BAC).$$

E, de forma análoga, podemos obter as relações entre os ângulos a seguir:

$$m(\angle AA'B') = m(\angle ABB') = \frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha - m(\angle BAC),$$

$$m(\angle BB'A') = m(\angle BAA') = \frac{\pi}{2} + \gamma - \beta - m(\angle ABC),$$

$$m(\angle BB'C') = m(\angle BCC') = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta - m(\angle ABC),$$

$$m(\angle CC'B') = m(\angle CBB') = \frac{\pi}{2} + \alpha - \gamma - m(\angle ACB),$$

$$m(\angle CC'A') = m(\angle CAA') = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma - m(\angle ACB).$$

Sabendo que  $m(\angle CA'A) = \frac{\pi}{2} - \beta$  e  $m(\angle BA'A) = \frac{\pi}{2} - \gamma$  e utilizando a relação (3.8) encontrada no capítulo 3, na demonstração do Teorema de Jacobi, temos:

$$\frac{\text{sen}(\angle BA'A)}{\text{sen}(\angle CA'A)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}. \quad (4.15)$$

Mas também, pela lei dos senos, podemos relacionar AB e AC da seguinte forma:

$$\frac{AB}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{AC}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen}(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ABC)}.$$

E sabemos que  $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta$  e  $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \cos\gamma$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}(\angle BA'A)}{\text{sen}(\angle CA'A)} &= \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)} \implies \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = \frac{\text{sen}(\angle ACB) \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{\text{sen}(\angle ABC) \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)} \implies \\
&\frac{\text{sen}(\angle ACB + \gamma) \cdot \cos\gamma}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + \beta) \cdot \cos\beta}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \\
&\frac{\text{sen}(\angle ACB) \cdot \cos^2\gamma + \text{sen}\gamma \cdot \cos\gamma \cdot \cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \\
&= \frac{\text{sen}(\angle ABC) \cdot \cos^2\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \\
&\frac{2 \cdot \text{sen}(\angle ACB) \cdot \cos^2\gamma + 2 \cdot \text{sen}\gamma \cdot \cos\gamma \cdot \cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \\
&= \frac{2 \cdot \text{sen}(\angle ABC) \cdot \cos^2\beta + 2 \cdot \text{sen}\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \\
&\frac{2 \cdot \text{sen}(\angle ACB) \cdot \cos^2\gamma + \text{sen}(2\gamma) \cdot \cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \\
&= \frac{2 \cdot \text{sen}(\angle ABC) \cdot \cos^2\beta + \text{sen}(2\beta) \cdot \cos(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \\
&\frac{(2\cos^2\gamma - 1) \cdot \text{sen}(\angle ACB) + \text{sen}(\angle ACB) + \text{sen}(2\gamma) \cdot \cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \\
&= \frac{(2\cos^2\beta - 1) \cdot \text{sen}(\angle ABC) + \text{sen}(\angle ABC) + \text{sen}(2\beta) \cdot \cos(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \\
&\frac{\cos(2\gamma) \cdot \text{sen}(\angle ACB) + \text{sen}(2\gamma) \cdot \cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} + 1 = \\
&= \frac{\cos(2\beta) \cdot \text{sen}(\angle ABC) + \text{sen}(2\beta) \cdot \cos(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ABC)} + 1 \implies \\
&\frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\text{sen}(\angle AB'B)}{\text{sen}(\angle CB'B)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)} \implies \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

Agora, seja  $m(\angle CA'B') = \alpha'$ ,  $m(\angle BA'C') = \theta$ ,  $m(\angle AB'C') = \beta'$ ,  $m(\angle CB'A') = \phi$ ,  $m(\angle BC'A') = \gamma'$  e  $m(\angle AC'B') = \psi$ , como ilustra a Figura 4.3. Precisamos provar que  $\theta = \alpha'$ ,  $\phi = \beta'$

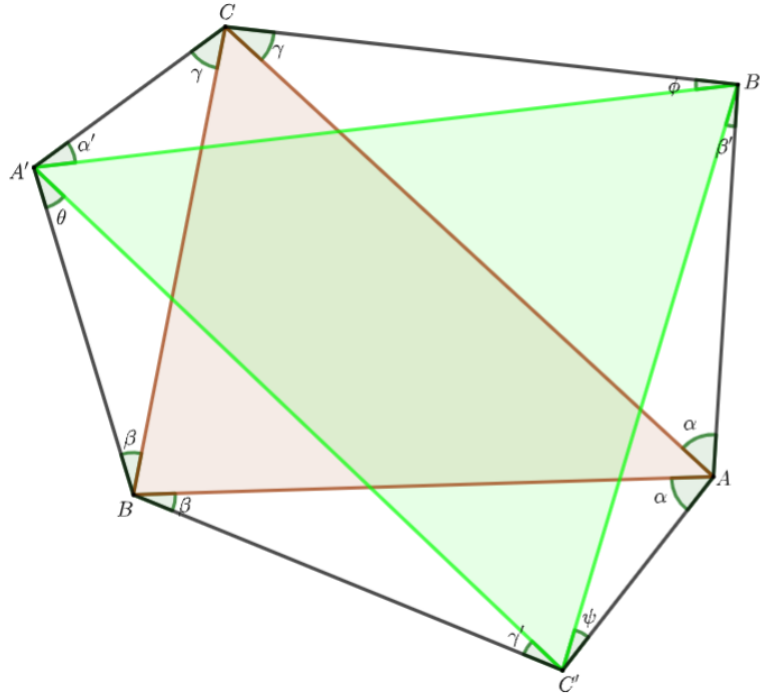


Figura 4.3: Para que os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  sejam triângulos recíprocos de Jacobi é necessário que  $\theta = \alpha'$ ,  $\phi = \beta'$  e  $\psi = \gamma'$ .

e  $\psi = \gamma'$ , se  $\frac{\text{sen}(\angle BAC+2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC+2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB+2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \mu$ , sendo  $\mu$  uma constante real.

Utilizando a lei dos senos no triângulo  $\Delta ABC'$ , temos

$$\frac{AC'}{\text{sen } \beta} = \frac{BC'}{\text{sen } \alpha} = \frac{AB}{\text{sen}(\pi - \alpha - \beta)}$$

Mas,  $\text{sen}(\pi - \alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + \beta)$ , pois  $\pi - \alpha - \beta$  e  $\alpha + \beta$  são ângulos suplementares, então

$$\frac{AC'}{\text{sen } \beta} = \frac{BC'}{\text{sen } \alpha} = \frac{AB}{\text{sen}(\alpha + \beta)}. \tag{4.16}$$

Utilizando a lei dos senos no triângulo  $\Delta AB'C'$ , temos

$$\frac{AC'}{\text{sen } \beta'} = \frac{AB'}{\text{sen } \psi} \tag{4.17}$$

Assim, de (4.16) temos que  $AC' = \frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$  e de (4.17) que  $AC' = \frac{AB' \cdot \text{sen } \beta'}{\text{sen } \psi}$ . Logo,

$$\frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{AB' \cdot \text{sen } \beta'}{\text{sen } \psi} \implies \frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\text{sen } \beta'} = \frac{AB'}{\text{sen } \psi}. \tag{4.18}$$

Ainda, no triângulo  $\Delta AB'C$ , temos

$$\frac{AC}{\text{sen}(\pi - \alpha - \gamma)} = \frac{AB'}{\text{sen } \gamma} = \frac{B'C}{\text{sen } \alpha} \implies AB' = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen}(\alpha + \gamma)}. \quad (4.19)$$

Logo, de (4.18) e (4.19), temos

$$\frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\text{sen } \beta'} = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen}(\alpha + \gamma)} \cdot \frac{1}{\text{sen } \psi}.$$

E, como, no triângulo  $\Delta AB'C'$ ,  $m(\angle BAC) + 2\alpha + \beta' + \psi = \pi$ , temos que  $\psi = \pi - m(\angle BAC) - 2\alpha - \beta'$ . Portanto,

$$\frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\text{sen } \beta'} = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC + 2\alpha + \beta')} \implies$$

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha + \beta')}{\text{sen } \beta'} = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} \implies$$

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha) \cdot \cos \beta' + \text{sen } \beta' \cdot \cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen } \beta'} = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} \implies$$

$$\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha) \cdot \cot \beta' + \cos(\angle BAC + 2\alpha) = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} \implies$$

$$\cot \beta' = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)} - \cot(\angle BAC + 2\alpha) \implies$$

$$\mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)} - \mu \cdot \cot(\angle BAC + 2\alpha).$$

Como, por hipótese,  $\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \mu$ , podemos reescrever  $\mu \cdot \cot \beta'$  como:

$$\mu \cdot \cot \beta' = \frac{AC \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC)} - \frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}. \quad (4.20)$$

Ainda, no triângulo  $\Delta ABC$ , pela lei dos senos

$$\frac{AB}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{AC}{\text{sen}(\angle ABC)} \implies \frac{AC}{AB} = \frac{\text{sen}(\angle ABC)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

E, como  $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) + m(\angle BAC) = \pi \implies m(\angle ABC) = \pi - m(\angle ACB) - m(\angle BAC)$ . Logo,  $\text{sen}(\angle ABC) = \text{sen}(\angle BAC + \angle ACB)$ . Então,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{sen}(\angle BAC + \angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \frac{\text{sen}(\angle BAC) \cdot \cos(\angle ACB) + \text{sen}(\angle ACB) \cdot \cos(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle ACB)} \Rightarrow$$

$$\frac{AC}{AB} = \text{sen}(\angle BAC) \cdot \cot(\angle ACB) + \cos(\angle BAC). \quad (4.21)$$

Logo, de (4.20) e (4.21), temos que  $\mu \cdot \cot \beta' =$

$$(\text{sen}(\angle BAC) \cdot \cot(\angle ACB) + \cos(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen} \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen} \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC)} - \frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \cot \beta' = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen} \gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen} \beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$$

Trabalhando separadamente com as relações na expressão  $-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$ , obtemos:

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{-\cos(\angle BAC) \cdot \cos 2\alpha + \text{sen}(\angle BAC) \cdot \text{sen} 2\alpha}{\text{sen}(\angle BAC)} \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = -\cot(\angle BAC) \cdot \cos 2\alpha + \text{sen} 2\alpha \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{1}{\text{sen} 2\alpha} \cdot (\text{sen}^2 2\alpha - \cot(\angle BAC) \cdot \cos 2\alpha \cdot \text{sen} 2\alpha) \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{1}{\text{sen} 2\alpha} \cdot \left(1 - \cos^2 2\alpha - \frac{\cos(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle BAC)} \cdot \cos 2\alpha \cdot \text{sen} 2\alpha\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{1}{\text{sen} 2\alpha} \cdot \left(1 - \cos 2\alpha \left(\cos 2\alpha + \text{sen} 2\alpha \cdot \frac{\cos(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle BAC)}\right)\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{1}{\text{sen} 2\alpha} \cdot \left(1 - \cos 2\alpha \left(\frac{\text{sen}(\angle BAC) \cdot \cos 2\alpha + \text{sen} 2\alpha \cdot \cos(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle BAC)}\right)\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{1}{\text{sen} 2\alpha} \cdot (1 - \cos 2\alpha \cdot \mu) \Rightarrow$$

$$-\frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\operatorname{sen}(\angle BAC)} = -\frac{(\mu \cdot \cos 2\alpha - 1)}{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Assim, retomando para a igualdade de  $\mu \cdot \cot \beta'$ , podemos concluir que

$$\mu \cdot \cot \beta' = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\alpha - 1)}{\operatorname{sen} 2\alpha}. \quad (4.22)$$

De forma análoga obtemos

$$\mu \cdot \cot \phi = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(\gamma + \beta)}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\gamma - 1)}{\operatorname{sen} 2\gamma}. \quad (4.23)$$

Se  $\alpha = \gamma$  então, por (4.22) e (4.23),  $\mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi \implies \beta' = \phi$ , pois  $\beta', \phi \in (0, \pi)$ .

Se  $\alpha \neq \gamma$  então seguimos a mostrar que  $\mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi$ . Por hipótese,

$$\mu = \frac{\operatorname{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\operatorname{sen}(\angle BAC)} = \frac{\operatorname{sen}(\angle BAC) \cdot \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos(\angle BAC)}{\operatorname{sen}(\angle BAC)} \implies$$

$$\mu = \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cot(\angle BAC) \implies$$

$$\cot(\angle BAC) = \frac{\mu}{\operatorname{sen} 2\alpha} - \cot 2\alpha. \quad (4.24)$$

Analogamente temos

$$\cot(\angle ACB) = \frac{\mu}{\operatorname{sen} 2\gamma} - \cot 2\gamma. \quad (4.25)$$

Logo, de (4.24) e (4.25) temos que

$$\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB) = \frac{\mu}{\operatorname{sen} 2\alpha} - \cot 2\alpha + \frac{\mu}{\operatorname{sen} 2\gamma} - \cot 2\gamma \implies$$

$$\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB) = \frac{\mu - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} + \frac{\mu - \cos 2\gamma}{\operatorname{sen} 2\gamma} \implies$$

$$\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB) = \frac{\mu \cdot (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\gamma) - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\gamma - \cos 2\gamma \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\gamma} \implies$$

$$\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB) = \frac{\mu \cdot (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\gamma) - \operatorname{sen}(2\alpha + 2\gamma)}{\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\gamma} \implies$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\gamma \cdot (\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB)) = \mu \cdot (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\gamma) - \operatorname{sen}(2\alpha + 2\gamma). \quad (4.26)$$

Supondo que  $\cot \beta' = \cot \phi \iff \mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi \iff$

$$\begin{aligned}
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } (\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\alpha - 1)}{\text{sen } 2\alpha} = \\
 & = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\gamma + \beta)}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\gamma - 1)}{\text{sen } 2\gamma} \iff \\
 & \frac{(\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC))}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} \cdot (\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\gamma + \beta) - \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } (\alpha + \beta)) = \\
 & = \frac{(\mu \cdot \cos 2\gamma - 1)}{\text{sen } 2\gamma} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\alpha - 1)}{\text{sen } 2\alpha} \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma \cdot \left( \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\gamma + \beta) - \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } (\alpha + \beta)}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} \right) = \\
 & = \mu(\cos 2\gamma \cdot \text{sen } 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma) - \text{sen } 2\alpha + \text{sen } 2\gamma \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma \cdot \\
 & \left( \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \gamma + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma \cdot \cos \beta - \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \gamma \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} \right) = \\
 & = \mu \cdot \text{sen } (2\alpha - 2\gamma) - 2 \cdot \text{sen } \left( \frac{2\alpha - 2\gamma}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{2\alpha + 2\gamma}{2} \right) \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma \cdot \frac{\text{sen } \beta \cdot (\text{sen } \alpha \cdot \cos \gamma - \text{sen } \gamma \cdot \cos \alpha)}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma)} = \\
 & = \mu \cdot \text{sen } (2\alpha - 2\gamma) - 2 \cdot \text{sen } (\alpha - \gamma) \cdot \cos(\alpha + \gamma) \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma \cdot \frac{\text{sen } (\alpha - \gamma)}{\text{sen } (\alpha + \gamma)} = \\
 & = \mu \cdot 2\text{sen } (\alpha - \gamma) \cdot \cos(\alpha - \gamma) - 2 \cdot \text{sen } (\alpha - \gamma) \cdot \cos(\alpha + \gamma).
 \end{aligned}$$

Como  $\text{sen } (\alpha - \gamma) \neq 0$ , pois  $\alpha \neq \gamma$  por hipótese, então

$$\begin{aligned}
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma = \\
 & = 2\mu \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma) \cdot \cos(\alpha - \gamma) - 2 \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma) \cdot \cos(\alpha + \gamma) \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma = 2\mu \cdot \text{sen } (\alpha + \gamma) \cdot \cos(\alpha - \gamma) - \text{sen } (2\alpha + 2\gamma) \\
 & \iff (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma = \\
 & = -\text{sen } (2\alpha + 2\gamma) + 2\mu \cdot (\text{sen } \alpha \cdot \cos \gamma + \text{sen } \gamma \cdot \cos \alpha) \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma) \iff \\
 & (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } 2\gamma = \\
 & = -\text{sen } (2\alpha + 2\gamma) + 2\mu \cdot (\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\text{sen }^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \cos \gamma \cdot \text{sen } \gamma \cdot (\text{sen }^2 \alpha + \cos^2 \alpha)) \iff
 \end{aligned}$$



$$(\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\gamma = -\operatorname{sen}(2\alpha + 2\gamma) + \mu \cdot (\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\gamma). \quad (4.27)$$

Pela igualdade das relações (4.26) e (4.27), podemos concluir que  $\cot \beta' = \cot \phi \implies \beta' = \phi$ , pois  $\beta', \phi \in (0, \pi)$ .

Assim, de forma análoga, também podemos concluir que  $\alpha' = \theta$  e  $\gamma' = \psi$ . Portanto, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi.  $\square$

## 4.2 HIPÉRBOLE DE KIEPERT

Na Subseção 2.1.3 que traz o Teorema de Kiepert, vimos que ao construir um triângulo de Jacobi cujos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são obtidos pela intersecção entre as retas conjugadas isogonais em relação aos ângulos  $\angle ABC$ ,  $\angle ACB$  e  $\angle BAC$ , sobre um mesmo ângulo  $\alpha$ , formaremos triângulos isósceles semelhantes sobre os lados do triângulo  $\triangle ABC$ , como ilustrado na Figura 2.9.

Ludwig Kiepert estudou o lugar geométrico dos pontos de intersecção entre os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ , podendo ser nomeado de Ponto de Kiepert ou Ponto de Jacobi nessa situação. Ao variar o ângulo  $\alpha \in [0, \pi]$ , o lugar geométrico dos pontos de Jacobi descreve uma hipérbole, como ilustra a Figura 4.4.

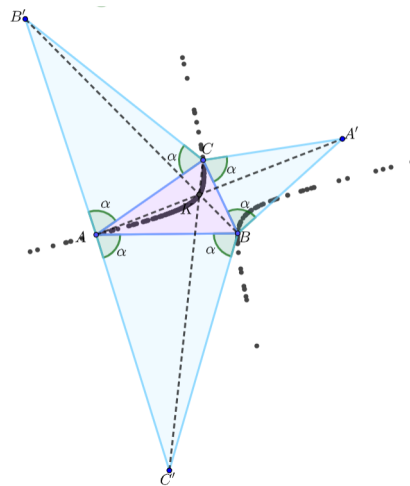


Figura 4.4: Hipérbole de Kiepert. Animação disponível em <https://www.geogebra.org/classic/scmnhkju>

A curva descrita pelo ponto  $K$  é conhecida como Hipérbole de Kiepert, a qual passa por pontos importantes do triângulo  $\triangle ABC$ , como mostra a Figura 4.5:

- (a) O Ponto de Fermat ( $F$ ) pertence à hipérbole, pois quando  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  temos a mesma construção vista na Subseção 2.1.2 (Figura 2.5), também um caso especial do Teorema de Jacobi;
- (b) O baricentro do triângulo  $\triangle ABC$  ( $G$ ) aparece na hipérbole quando  $\alpha \rightarrow 0$ ;
- (c) O ortocentro do triângulo  $\triangle ABC$  ( $H$ ) também pertence à hipérbole e é obtido quando  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ;
- (d) Os vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

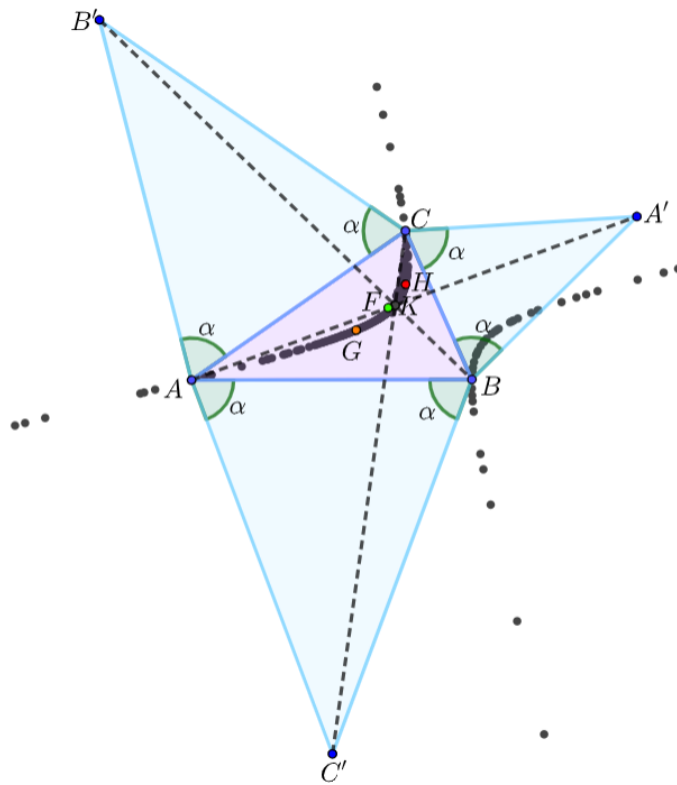


Figura 4.5: Pontos que pertencem à Hipérbole de Kiepert:  $F$  (ponto de Fermat),  $G$  (baricentro do  $\triangle ABC$ ),  $H$  (ortocentro do  $\triangle ABC$ ) e vértices  $A, B$  e  $C$  do  $\triangle ABC$ .

Na referência [17] é possível aprofundar este assunto, assim como conhecer a equação da Hipérbole de Kiepert. Também o artigo *Reciprocal Jacobi Triangles and the McCay Cubic*, [15], mostra que existe uma cúbica que é o lugar geométrico dos pontos de Jacobi quando temos triângulos recíprocos de Jacobi, chamada McCay Cubic.

4.3 CASO DE CONGRUÊNCIA

Ao construir o triângulo  $\triangle A'B'C'$  de Jacobi com relação ao triângulo  $\triangle ABC$ , é possível que estes triângulos sejam congruentes. Vickers, [16], mostra algumas condições necessárias para que as congruências existam. Abaixo destacaremos um dos casos e demonstraremos essas igualdades de medidas.

Seguiremos a nomenclatura utilizada no Teorema de Jacobi (3.1), onde  $m(\angle C'AB) = m(\angle B'AC) = \alpha$ ,  $m(\angle A'BC) = m(\angle C'BA) = \beta$ ,  $m(\angle B'CA) = m(\angle A'CB) = \gamma$ .

**Proposição 4.3.** *Dado um triângulo  $\triangle ABC$  acutângulo qualquer, construímos (externamente) o triângulo de Jacobi  $\triangle A'B'C'$  para o triângulo  $\triangle ABC$ , nas condições seguintes, como ilustra a Figura 4.6.*

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - m(\angle BAC), \beta = \frac{\pi}{2} - m(\angle ABC), \gamma = \frac{\pi}{2} - m(\angle ACB)$$

Nessa situação,  $K$ , ponto de Jacobi, é o circuncentro dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ .

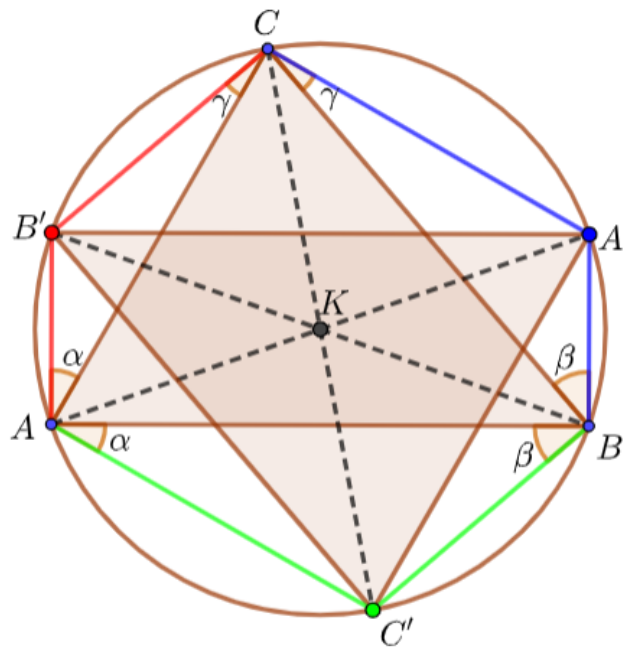


Figura 4.6:  $A, A', B, B', C$  e  $C'$  pertencem à circunferência de centro  $K$ .

*Demonstração.* No triângulo  $\triangle AB'C$ , temos que  $\alpha + \gamma + m(\angle AB'C) = \pi \implies m(\angle AB'C) = \pi - \alpha - \gamma$ . Como  $\alpha = \frac{\pi}{2} - m(\angle BAC)$  e  $\gamma = \frac{\pi}{2} - m(\angle ACB)$ , então  $m(\angle AB'C) = m(\angle BAC) + m(\angle ACB)$ .

Mas, sabemos que  $m(\angle BAC) + m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = \pi$ , então  $m(\angle AB'C) = \pi - m(\angle ABC)$ .

No quadrilátero  $AC'BC$ , temos que os ângulos opostos  $\angle ACB$  e  $\angle AC'B$  são suplementares. Assim, o quadrilátero  $AC'BC$  é circunscritível, isto é, existe uma circunferência  $\zeta$  que passa por  $A, C', B$  e  $C$ .

Analogamente, mostramos que  $m(\angle BA'C) = \pi - m(\angle BAC)$  e  $m(\angle AC'B) = \pi - m(\angle ACB)$ . Desse modo, os quadriláteros  $ABA'C$  e  $ABCB'$  são circunscritíveis. Como existe uma única circunferência que passa por  $A, B$  e  $C$ , concluímos que  $\zeta$  passa pelos pontos  $A, B, C, A', B'$  e  $C'$ .

Como  $m(\angle BAB') = \frac{\pi}{2} = m(\angle ABA')$ , temos que  $\overline{BB'}$  e  $\overline{AA'}$  são diâmetros de  $\zeta$ . Mas,  $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \{K\}$ . Portanto,  $K$  é o centro de  $\zeta$ , de modo que  $K$  é o circuncentro dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ .

Como podemos observar, os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são ângulos inscritos à circunferência circunscrita aos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ ,  $\zeta$ . Assim, temos as seguintes medidas para os arcos da circunferência:  $m(\widehat{CB'}) = m(\widehat{C'B}) = 2\alpha, m(\widehat{A'C}) = m(\widehat{AC'}) = 2\beta$  e  $m(\widehat{B'A}) = m(\widehat{BA'}) = 2\gamma$ .

Em relação aos triângulos  $\triangle A'B'B$  e  $\triangle ABB'$ , como na Figura 4.7, podemos concluir que  $m(\angle A'B'B) = m(\angle ABB')$  e  $m(\angle A'BB') = m(\angle AB'B)$ . Além disso, o lado  $\overline{BB'}$  é comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA), os triângulos  $\triangle A'B'B$  e  $\triangle ABB'$  são congruentes. Podemos assim afirmar que  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ .

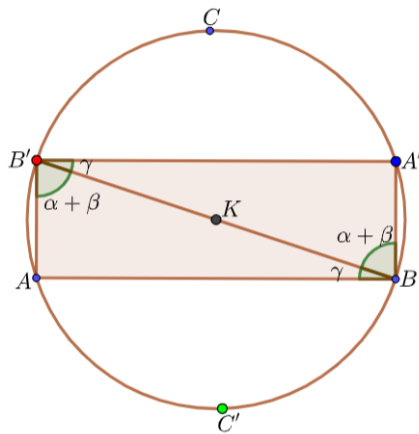


Figura 4.7: Pelo caso ALA,  $\triangle A'B'B \cong \triangle ABB'$ .

De forma análoga, pelo caso ângulo, lado, ângulo (ALA) os triângulos  $\triangle BC'B' \cong \triangle B'CB$  e  $\triangle AC'C \cong \triangle A'CC'$  implicando que  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ . Portanto, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

#### 4.4 AS COORDENADAS BARICÊNTRICAS NO TRIÂNGULO DE JACOBI

Ao construir um triângulo de Jacobi quatro pontos de grande importância são determinados: seus vértices e o ponto de Jacobi. Nesta seção, determinamos as coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi de um triângulo, de acordo com as referências [9] e [1].

**Definição 4.4.** (Coordenadas Baricêntricas) Sejam  $A, B$  e  $C$  os vértices de um triângulo  $\triangle ABC$  e  $P$  um ponto do plano de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Dizemos que  $u, v$  e  $w$  são as coordenadas baricêntricas de  $P$ , em relação ao triângulo  $\triangle ABC$ , se

$$P = (x, y) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Ou seja, o ponto  $P$  é a média ponderada dos vértices  $A, B$  e  $C$  com pesos  $u, v$  e  $w$ , respectivamente, onde  $u, v$  e  $w$  são números reais tais que  $u + v + w \neq 0$ . Sendo assim, o ponto  $P$  pode ser identificado através da notação:

$$P = (u : v : w).$$

**Definição 4.5.** Considere um triângulo  $\triangle ABC$  com vértices  $A, B$  e  $C$ . Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ . Dizemos que  $P_1 = P_2$  se, e somente se, existe um número real  $k \neq 0$  tal que  $u_2 = k.u_1, v_2 = k.v_1$  e  $w_2 = k.w_1$ .

É possível relacionar as coordenadas baricêntricas com as áreas formadas entre os pontos  $A, B, C$  e  $P$ . Para isso, vamos definir a área de um triângulo com sinal.

**Definição 4.6.** (Área de um triângulo com sinal) Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos distintos do plano e  $(ABC)$  a área (euclidiana) do triângulo  $\triangle ABC$ . Definimos a área com sinal do triângulo  $\triangle ABC$  como

$$S_{ABC} = \begin{cases} 0, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ são pontos colineares;} \\ +(ABC), & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido anti-horário;} \\ -(ABC) & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido horário.} \end{cases}$$

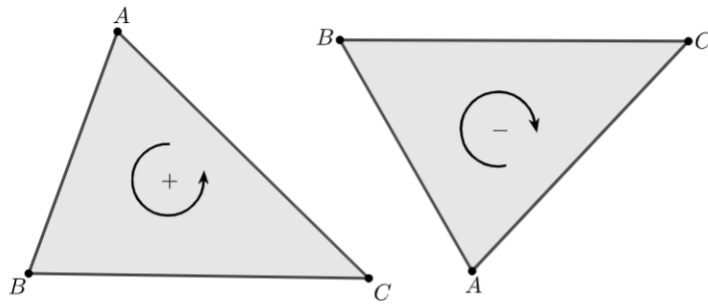


Figura 4.8: Sinais da área com sinal do triângulo  $\triangle ABC$ .

A Figura 4.8 ilustra o triângulo  $\triangle ABC$  cujos vértices  $A, B$  e  $C$  estão dispostos no sentido anti-horário e no sentido horário, gerando então a área com sinal do triângulo  $\triangle ABC$  positiva e negativa, respectivamente.

Dado um ponto  $P$  qualquer, podemos relacionar a área com sinal do triângulo  $\triangle ABC$  com as áreas com sinal dos triângulos  $\triangle ABP$ ,  $\triangle ACP$  e  $\triangle BCP$ , de sete maneiras diferentes, como ilustra a Figura 4.9.

Observamos que se o ponto  $P$  pertence a um dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ , por exemplo, se  $P \in \overline{AC}$  então  $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} + S_{BCP}$ , pois, neste caso,  $S_{APC} = 0$ .

Ao utilizar a Definição 4.6, podemos relacionar as áreas desses quatro triângulos de uma única maneira:

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} + S_{BCP}.$$

Assim, podemos resumir os sinais das áreas com sinal dos triângulos  $\triangle ABP$ ,  $\triangle APC$  e  $\triangle BCP$  de acordo com a região em que se encontra o ponto  $P$ , como ilustrado na Figura 4.10, onde estão representados os sinais das áreas na seguinte ordem:  $(S_{BCP} : S_{APC} : S_{ABP})$ .

Vamos, então, relacionar as coordenadas baricêntricas com as áreas com sinal. Observamos que se  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$ , a área com sinal do triângulo  $\triangle ABC$  é dada por

$$\mathbf{S}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a).$$

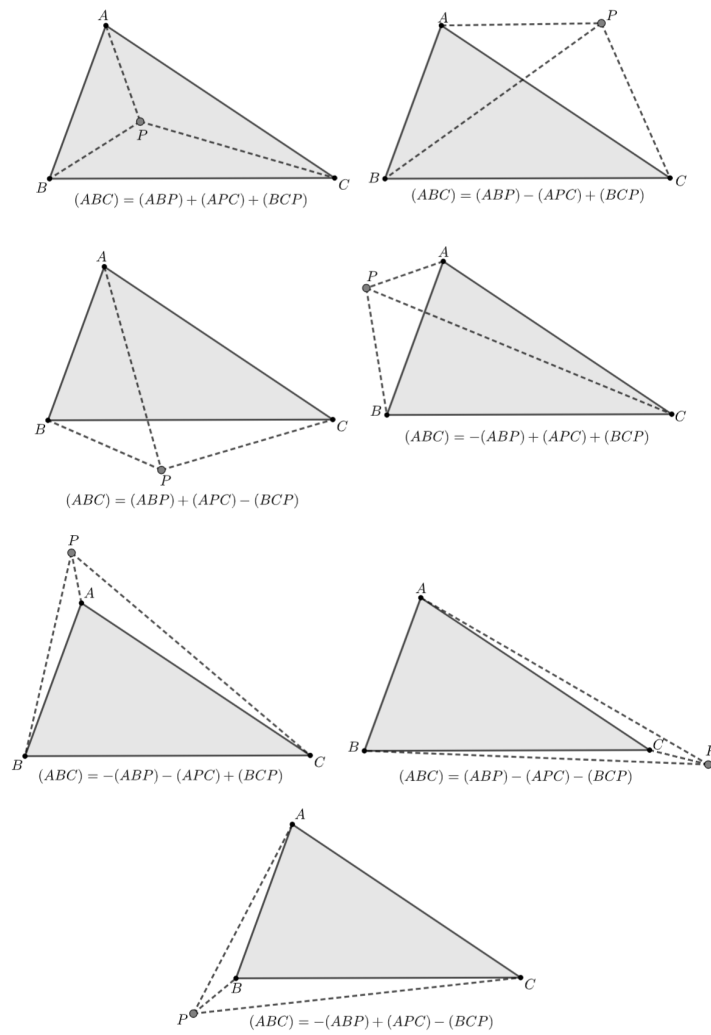


Figura 4.9: Em qualquer caso,  $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} + S_{BCP}$ .

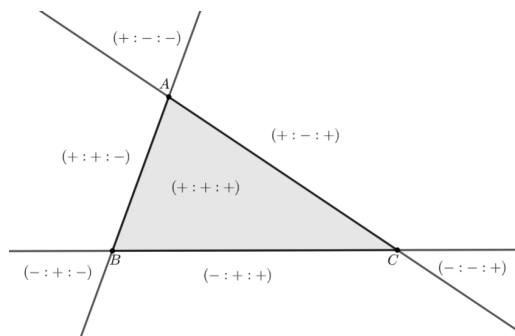


Figura 4.10: Sinais das sete regiões formadas pelas retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ .

**Proposição 4.7.** (Coordenadas baricêntricas e área com sinal) *Sejam  $A, B$  e  $C$  os vértices de um triângulo qualquer  $\triangle ABC$  e  $P$  um ponto qualquer do plano. As coordenadas baricêntricas do ponto  $P$  podem ser dadas por*

$$P = (S_{BCP} : S_{APC} : S_{ABP}),$$

*ou seja, as coordenadas baricêntricas de um ponto são proporcionais às áreas com sinal dos sub-triângulos que esse ponto  $P$  forma com os vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo  $\triangle ABC$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$  as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo  $\triangle ABC$  e  $P = (x_p, y_p)$  as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do plano. A igualdade que segue é verdadeira, pois as duas primeiras colunas são iguais:

$$\begin{vmatrix} x_p & x_p & y_p & 1 \\ x_a & x_a & y_a & 1 \\ x_b & x_b & y_b & 1 \\ x_c & x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando-se o teorema de Laplace à primeira coluna do determinante, obtemos

$$x_p \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} - x_a \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} + x_b \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} - x_c \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$x_p \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} - x_a \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} - x_b \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_a & y_a & 1 \end{vmatrix} - x_c \cdot \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$x_p \cdot (2 \cdot S_{ABC}) - x_a \cdot (2 \cdot S_{BCP}) - x_b \cdot (2 \cdot S_{APC}) - x_c \cdot (2 \cdot S_{ABP}) = 0 \implies$$

$$S_{ABC} \cdot x_p = S_{BCP} \cdot x_a + S_{APC} \cdot x_b + S_{ABP} \cdot x_c. \quad (4.28)$$

Analogamente, podemos obter uma equação que relacione as áreas com sinal e as ordenadas dos pontos  $P, A, B$  e  $C$ .



$$\begin{vmatrix} y_p & x_p & y_p & 1 \\ y_a & x_a & y_a & 1 \\ y_b & x_b & y_b & 1 \\ y_c & x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Consequentemente,

$$S_{ABC} \cdot y_p = S_{BCP} \cdot y_a + S_{APC} \cdot y_b + S_{ABP} \cdot y_c. \quad (4.29)$$

Logo, de (4.28) e (4.29) podemos concluir que

$$S_{ABC} \cdot P = S_{BCP} \cdot A + S_{APC} \cdot B + S_{ABP} \cdot C.$$

Como,  $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} + S_{BCP}$ , temos que

$$P = \frac{S_{BCP} \cdot A + S_{APC} \cdot B + S_{ABP} \cdot C}{S_{BCP} + S_{APC} + S_{ABP}},$$

ou seja,  $P$  é a média ponderada dos vértices  $A, B$  e  $C$  com pesos  $S_{BCP}, S_{APC}$  e  $S_{ABP}$ . Assim temos que  $P = (S_{BCP} : S_{APC} : S_{ABP})$ .  $\square$

Pela Proposição 4.7, podemos obter as coordenadas baricêntricas dos vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo  $\triangle ABC$ :

$$A = (S_{BCA} : S_{AAC} : S_{ABA}) \implies A = (S_{ABC} : 0 : 0) \cdot \frac{1}{S_{ABC}} (1 : 0 : 0).$$

$$B = (S_{BCB} : S_{ABC} : S_{ABB}) \implies B = (0 : S_{ABC} : 0) \cdot \frac{1}{S_{ABC}} (0 : 1 : 0).$$

$$C = (S_{BCC} : S_{ACC} : S_{ABC}) \implies C = (0 : 0 : S_{ABC}) \cdot \frac{1}{S_{ABC}} (0 : 0 : 1).$$

Assim,  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .

Podemos ainda escrever a equação de uma reta utilizando as coordenadas baricêntricas. Sabemos que a equação de uma reta no plano em coordenadas cartesianas é dada por  $ax + by + c = 0$ , onde  $a, b$  e  $c$  são números reais. Sendo um ponto  $P = (u : v : w)$  qualquer, em relação a um triângulo  $\triangle ABC$ , cujas coordenadas cartesianas dos vértices são  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$ , a equação da reta que passa por  $P$  em coordenadas baricêntricas é dada por

$$ru + sv + tw = 0,$$

onde  $r = ax_a + by_a + c$ ,  $s = ax_b + by_b + c$  e  $t = ax_c + by_c + c$ .

## 4.4.1 Coordenadas Baricêntricas dos vértices de um triângulo de Jacobi

Seguiremos a nomenclatura utilizada no Teorema de Jacobi (3.1), onde  $med(\angle C'AB) = med(\angle B'AC) = \alpha$ ,  $med(\angle A'BC) = med(\angle C'BA) = \beta$ ,  $med(\angle B'CA) = med(\angle A'CB) = \gamma$ . Sejam  $a, b$  e  $c$  às medidas dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ , respectivamente,  $S$  a área de um triângulo qualquer,  $\Delta$  a área do triângulo  $\triangle ABC$ ,

$$X = 2\Delta(\cot\alpha + \cot(\angle BAC)),$$

$$Y = 2\Delta(\cot\beta + \cot(\angle ABC)),$$

$$Z = 2\Delta(\cot\gamma + \cot(\angle ACB)).$$

Inicialmente encontraremos as coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo de Jacobi  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , como na Figura 3.4, sendo estes externos ao triângulo  $\triangle ABC$ . A determinação dessas coordenadas será feita através das áreas com sinal dos triângulos relacionados a cada ponto, como veremos abaixo.

$$A' = (x, y) = \left( \frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} : \frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}} \right)$$

Assim, nesta configuração,

(a)

$$\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot a \cdot A'B \cdot \text{sen}\beta}{\Delta} = -\frac{a \cdot A'B \cdot \text{sen}\beta}{2\Delta}$$

(b)

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot A'C \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}(\angle ACB)} = \frac{A'C \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{a \cdot \text{sen}(\angle ACB)}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $\triangle A'BC$ , temos as seguintes igualdades:

$$\frac{A'C}{\text{sen}\beta} = \frac{A'B}{\text{sen}\gamma} \implies A'C \cdot \text{sen}\gamma = A'B \cdot \text{sen}\beta \implies \quad (4.30)$$

$$A'C = \frac{A'B \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma} \quad (4.31)$$

$$A'B = \frac{A'C \cdot \text{sen}\gamma}{\text{sen}\beta}. \quad (4.32)$$

Logo, utilizando (4.31), temos

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} = \frac{A'B \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{a \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)}.$$

(c)

$$\frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot A'B \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}(\angle ABC)} = \frac{A'B \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{a \cdot \text{sen}(\angle ABC)}$$

Substituindo  $A'B$  encontrado em (4.32), temos

$$\frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}} = \frac{A'C \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{a \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle ABC)}.$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas de  $A'$  são

$$A' = \left( -\frac{a \cdot A'B \cdot \text{sen}\beta}{2\Delta} : \frac{A'B \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{a \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)} : \frac{A'C \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{a \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle ABC)} \right).$$

Multiplicando todas as coordenadas por  $\frac{2 \cdot a \cdot \Delta}{A'B \cdot \text{sen}\beta}$ , número real diferente de zero, temos

$$A' = \left( -a^2 : \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)} : \frac{2\Delta \cdot A'C \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{A'B \cdot \text{sen}^2\beta \cdot \text{sen}(\angle ABC)} \right).$$

Como visto em (4.30),  $A'C \cdot \text{sen}\gamma = A'B \cdot \text{sen}\beta$ . Logo,

$$A' = \left( -a^2 : \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)} : \frac{2\Delta \cdot \text{sen}(\beta + \angle ABC)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle ABC)} \right).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(\gamma + \angle ACB)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)} &= \frac{\text{sen}\gamma \cdot \cos(\angle ACB) + \text{sen}(\angle ACB) \cdot \cos\gamma}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle ACB)} = \\ &= \frac{\cos(\angle ACB)}{\text{sen}(\angle ACB)} + \frac{\cos\gamma}{\text{sen}\gamma} = \cot(\angle ACB) + \cot\gamma. \end{aligned} \quad (4.33)$$

E, de forma análoga,

$$\frac{\text{sen}(\beta + \angle ABC)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle ABC)} = \cot(\angle ABC) + \cot\beta. \quad (4.34)$$

Podemos concluir que

$$A' = (-a^2 : 2\Delta(\cot(\angle ACB) + \cot\gamma) : 2\Delta(\cot(\angle ABC) + \cot\beta)) = (-a^2 : Z : Y).$$

Analogamente obtemos as coordenadas baricêntricas de  $B'$  e  $C'$ :

$$B' = (2\Delta(\cot(\angle ACB) + \cot\gamma) : -b^2 : 2\Delta(\cot(\angle BAC) + \cot\alpha)) = (Z : -b^2 : X).$$

$$C' = (2\Delta(\cot(\angle ABC) + \cot\beta) : 2\Delta(\cot(\angle BAC) + \cot\alpha) : -c^2) = (Y : X : -c^2).$$

## 4.4.2 Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Jacobi

Seja  $K$  o ponto de Jacobi do triângulo de Jacobi  $\triangle A'B'C'$  associado ao triângulo  $\triangle ABC$ . Como provado no Teorema 3.1, o ponto  $K$  é a intersecção entre as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ .

**Proposição 4.8.** *As coordenadas baricêntricas  $(u : v : w)$  do ponto de Jacobi são  $K = (\frac{1}{X} : \frac{1}{Y} : \frac{1}{Z})$ .*

*Demonstração.* Sendo  $A = (x_a, y_a)$  e  $A' = (x'_a, y'_a)$ , a equação da reta  $\overleftrightarrow{AA'}$  utilizando coordenadas baricêntricas pode ser escrita como:

$$\overleftrightarrow{AA'} : ru + sv + tw = 0,$$

onde  $r = ax_a + bx_a + c$ ,  $s = ax_b + bx_b + c$  e  $t = ax_c + bx_c + c$ , sendo  $a, b$  e  $c$  números reais.

Como  $A = (1 : 0 : 0) \in \overleftrightarrow{AA'}$  então  $r \cdot 1 + s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 \implies r = 0$ . Assim, a equação da reta  $\overleftrightarrow{AA'}$  é  $sv + tw = 0$ .

Também sabemos que  $A' = (-a^2 : Z : Y) \in \overleftrightarrow{AA'}$ , então

$$sv + tw = 0 \implies sZ + tY = 0 \implies t = -\frac{sZ}{Y}.$$

Logo,  $\overleftrightarrow{AA'} : sv - \frac{sZ}{Y}w = 0$ . Sabendo que  $s \neq 0$  obtemos  $v = \frac{Zw}{Y}$ .

Assim,  $\overleftrightarrow{AA'} : (0 : \frac{Z}{Y}w : w) \stackrel{\cdot Y}{=} (0 : Zw : Yw) \stackrel{\cdot \frac{1}{w}}{=} (0 : Z : Y)$ .

Da mesma maneira podemos escrever a equação da reta  $\overleftrightarrow{BB'}$ , sendo  $B = (x_b, y_b)$  e  $B' = (x'_b, y'_b)$ :

$$\overleftrightarrow{BB'} : r'u + s'v + t'w = 0,$$

onde  $r' = a'x_a + b'x_a + c'$ ,  $s' = a'x_b + b'x_b + c'$  e  $t' = a'x_c + b'x_c + c'$ , sendo  $a', b'$  e  $c'$  números reais.

Como  $B = (0 : 1 : 0) \in \overleftrightarrow{BB'}$  então  $r' \cdot 0 + s' \cdot 1 + t' \cdot 0 = 0 \implies s' = 0$ . Assim, a equação da reta  $\overleftrightarrow{BB'}$  é  $r'u + t'w = 0$ .

Também sabemos que  $B' = (Z : -b^2 : X) \in \overleftrightarrow{BB'}$ , então

$$r'u + t'w = 0 \implies r'Z + t'X = 0 \implies t' = -\frac{r'Z}{X}.$$

Logo,  $\overleftrightarrow{BB'} : r'u - \frac{r'Z}{X}w = 0$ . Sabendo que  $r' \neq 0$  obtemos  $u = \frac{Zw}{X}$ .

Assim,  $\overleftrightarrow{BB'} : \left(\frac{Z}{X}w : 0 : w\right) \stackrel{X}{\equiv} (Zw : 0 : Xw) \stackrel{\frac{1}{w}}{\equiv} (Z : 0 : X)$ .

Sendo assim,  $K = (u : v : w)$ , com  $u = \frac{Zw}{X}$  e  $v = \frac{Zw}{Y}$ . Portanto,

$$K = (u : v : w) = \left(\frac{Zw}{X} : \frac{Zw}{Y} : w\right) \stackrel{\frac{1}{w}}{\equiv} \left(\frac{Z}{X} : \frac{Z}{Y} : 1\right) \stackrel{\frac{1}{Z}}{\equiv} \left(\frac{1}{X} : \frac{1}{Y} : \frac{1}{Z}\right).$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas do Ponto de Jacobi são  $K = \left(\frac{1}{X} : \frac{1}{Y} : \frac{1}{Z}\right)$ .  $\square$

#### 4.4.3 Coordenadas baricêntricas do triângulo de Jacobi construído no interior do triângulo inicial

Passamos a analisar as mudanças nas coordenadas dos vértices do triângulo de Jacobi e do ponto de Jacobi no caso em que o triângulo de Jacobi é construído na parte interna do triângulo inicial  $\triangle ABC$ , como ilustra a Figura 3.7.

Inicialmente encontraremos as coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo de Jacobi  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , sendo estes internos ao triângulo  $\triangle ABC$ . A determinação dessas coordenadas será feita através das áreas com sinal dos triângulos relacionados a cada ponto, como veremos abaixo.

$$A' = (x, y) = \left(\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} : \frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}}\right)$$

Assim, nesta configuração,

(a)

$$\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot A'B \cdot \text{sen}\beta}{\Delta} = \frac{a \cdot A'B \cdot \text{sen}\beta}{2\Delta}$$

(b)

$$S_{A'AB} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot A'B \cdot \text{sen}(\angle ABC - \beta)$$

(c)

$$S_{AA'C} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot A'C \cdot \text{sen}(\angle ACB - \gamma)$$

(d)

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot A'C \cdot \text{sen}(\angle ACB - \gamma)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}(\angle ACB)} = \frac{A'C \cdot \text{sen}(\angle ACB - \gamma)}{a \cdot \text{sen}(\angle ACB)}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $\triangle A'BC$  temos as seguintes igualdades:

$$\frac{A'C}{\text{sen}\beta} = \frac{A'B}{\text{sen}\gamma} \implies A'C \cdot \text{sen}\gamma = A'B \cdot \text{sen}\beta \implies \quad (4.35)$$

$$A'C = \frac{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}. \quad (4.36)$$

Logo, utilizando (4.36), temos

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} = \frac{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}(\angle ACB - \gamma)}{a \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\angle ACB)}.$$

$$\text{Mas, } \frac{\operatorname{sen}(\angle ACB - \gamma)}{\operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\angle ACB)} = \frac{\operatorname{sen}(\angle ACB) \cdot \cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos(\angle ACB)}{\operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\angle ACB)} = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} - \frac{\cos(\angle ACB)}{\operatorname{sen}(\angle ACB)} = \cot\gamma - \cot(\angle ACB).$$

Assim,

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{ABC}} = \frac{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta}{a} \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)).$$

Analogamente,

$$\frac{S_{A'AB}}{S_{ABC}} = \frac{A'C \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC - \beta)}{a \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC)} = \frac{A'C \cdot \operatorname{sen}\gamma}{a} \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC)).$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas de  $A'$  são

$$A' = \left( \frac{a \cdot A'B \cdot \operatorname{sen}\beta}{2\Delta} : \frac{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta}{a} \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)) : \frac{A'C \cdot \operatorname{sen}\gamma}{a} \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC)) \right).$$

Multiplicando todas as coordenadas por  $\frac{2 \cdot a \cdot \Delta}{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta}$ , obtemos

$$A' = \left( a^2 : 2\Delta \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)) : \frac{2\Delta \cdot A'C \cdot \operatorname{sen}\gamma}{A'B \cdot \operatorname{sen}\beta} \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC)) \right).$$

Como visto em (4.35),  $A'C \cdot \operatorname{sen}\gamma = A'B \cdot \operatorname{sen}\beta$ . Logo,

$$A' = (a^2 : 2\Delta \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)) : 2\Delta \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC))).$$

Considerando

$$X' = 2\Delta(\cot\alpha - \cot(\angle BAC)),$$

$$Y' = 2\Delta(\cot\beta - \cot(\angle ABC)),$$

$$Z' = 2\Delta(\cot\gamma - \cot(\angle ACB)),$$

podemos concluir que

$$A' = (a^2 : 2\Delta \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)) : 2\Delta \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC))) = (a^2 : Z' : Y').$$

Analogamente obtemos as coordenadas baricêntricas de  $B'$  e  $C'$ :

$$B' = (2\Delta \cdot (\cot\gamma - \cot(\angle ACB)) : b^2 : 2\Delta \cdot (\cot\alpha - \cot(\angle BAC))) = (Z' : b^2 : X').$$

$$C' = (2\Delta \cdot (\cot\beta - \cot(\angle ABC)) : 2\Delta \cdot (\cot\alpha - \cot(\angle BAC)) : c^2) = (Y' : X' : c^2).$$

Neste caso, as coordenadas baricêntricas do ponto de Jacobi  $K$  são obtidas de forma análoga ao que foi feito na Subseção 4.4.2:  $K = (\frac{1}{X'} : \frac{1}{Y'} : \frac{1}{Z'})$ .

---

## CONCLUSÃO

---

O trabalho apresentou o Triângulo de Jacobi e o ponto notável de Jacobi, uma das recentes descobertas da geometria triangular. Através do estudo dos pontos notáveis clássicos aos recentes, é possível perceber a quantidade de propriedades que surgem na relação destes pontos, ângulos, segmentos e triângulos formados.

Destacamos a profundidade do trabalho com os triângulos recíprocos de Jacobi, presentes no artigo *Reciprocal Jacobi Triangles and the McCay Cubic*, [15], mas cuja demonstração da volta da Proposição 4.2 não é apresentada. Em um trabalho em conjunto com o autor Glenn Vickers, apresentamos esta demonstração na Seção 4.1. Ainda assim, o trabalho deixa temas para serem explorados como as 19 congruências dos triângulos de Jacobi e a cúbica de McCay.

Através dos conceitos da trigonometria e da álgebra, foi possível abordar novas construções de triângulos, encontrar congruências, estudar os lugares geométricos dos pontos notáveis e apresentar coordenadas baricêntricas. Pela acessibilidade dos temas abordados, o trabalho pode ser utilizado para o aprofundamento da geometria plana, como também para explorar novas construções com os alunos da educação básica.

Valorizando a formação dos professores e o estudo contínuo que é devido para o desempenho de um trabalho de qualidade em sala de aula, os temas desta dissertação contribuem explorando a curiosidade de diferentes pontos notáveis, o uso do Teorema de Ceva como um meio claro e reduzido para demonstrar a existência de muitos destes pontos, além de cada um destes contribuir com diversas propriedades para a geometria.

Os pontos notáveis são conteúdo do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. Parte do trabalho do professor é motivar e valorizar o conhecimento. Assim, indicamos a apresentação de diferentes pontos notáveis e o trabalho de construção de alguns desses, seja no Geogebra<sup>1</sup> ou com o uso de régua e compasso, explorando os elementos

---

<sup>1</sup> O GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos.

e propriedades dos triângulos e despertando o olhar do aluno para a grandiosidade da matemática.



# A

---

## APÊNDICE

---

O trabalho trás duas importantes demonstrações para o tema trabalhado: a demonstração do Teorema de Jacobi 3.1 e da Proposição 4.2 dos Triângulos Recíprocos de Jacobi. Estas serão apresentadas abaixo de forma resumida, por serem longas demonstrações.

**Teorema A.1.** (Teorema de Jacobi) *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Construa os pontos  $A', B'$  e  $C'$  de maneira que  $\text{med}(\angle C'AB) = \text{med}(\angle B'AC) = \alpha$ ,  $\text{med}(\angle A'BC) = \text{med}(\angle C'BA) = \beta$  e  $\text{med}(\angle B'CA) = \text{med}(\angle A'CB) = \gamma$ , sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  ângulos quaisquer entre  $0$  e  $\pi$ . Esses pontos formam um triângulo de Jacobi para o  $\triangle ABC$  e as retas  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes num ponto  $K$ , que é chamado de ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle ABC$ .*

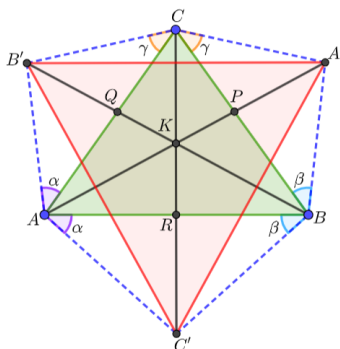


Figura A.1: O triângulo  $\triangle A'B'C'$  é um triângulo de Jacobi construído a partir do triângulo  $\triangle ABC$ .

*Demonstração.* Através das relações encontradas, podemos concluir:

$\triangle A'BP$	$A'P = \frac{BP \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}(\angle BA'P)}$	$\frac{BP}{CP} = \frac{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle BA'P)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle CA'P)}$	Analogamente,	$\frac{BR}{RA} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\angle AB'R)}$
$\triangle A'CP$	$A'P = \frac{CP \cdot \text{sen}\gamma}{\text{sen}(\angle CA'P)}$		$\frac{CQ}{QA} = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\angle CC'Q)}{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\angle AC'Q)}$	

$$\frac{BR}{RA} \cdot \frac{CP}{BP} \cdot \frac{AQ}{QC} = \frac{\text{sen}(\angle BB'R)}{\text{sen}(\angle AB'R)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CA'P)}{\text{sen}(\angle BA'P)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle AC'Q)}{\text{sen}(\angle CC'Q)}$$

$\triangle AA'B$	$AA' = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{\text{sen}(\angle BA'A)}$	$\frac{\text{sen}(\angle BA'P)}{\text{sen}(\angle CA'P)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}$	Analogamente,	$\frac{\text{sen}(\angle BC'R)}{\text{sen}(\angle AC'R)} = \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}$
$\triangle AA'C$	$AA' = \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}{\text{sen}(\angle CA'A)}$		$\frac{\text{sen}(\angle AB'Q)}{\text{sen}(\angle CB'Q)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}$	

$$\frac{BR}{RA} \cdot \frac{CP}{BP} \cdot \frac{AQ}{QC} = \frac{BC \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)}{AC \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)} \cdot \frac{AC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)}{AB \cdot \text{sen}(\angle ABC + \beta)} \cdot \frac{AB \cdot \text{sen}(\angle BAC + \alpha)}{BC \cdot \text{sen}(\angle ACB + \gamma)} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva,  $\overleftrightarrow{BB'}$ ,  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes em  $K$ , que é o ponto de Jacobi do triângulo  $\triangle ABC$ . □

**Definição A.2.** Considere um triângulo  $\triangle ABC$  e seja  $\triangle A'B'C'$  o triângulo de Jacobi associado ao triângulo  $\triangle ABC$  (com as convenções do Teorema de Jacobi (A.1), onde os ângulos de medidas  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são construídos sobre os vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente). Se existirem ângulos de medidas  $\alpha', \beta'$  e  $\gamma'$  construídos sobre os vértices  $A', B'$  e  $C'$  tais que o triângulo de Jacobi associado ao triângulo  $\triangle A'B'C'$  coincida com o triângulo  $\triangle ABC$ , dizemos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi, como ilustra a Figura A.2.

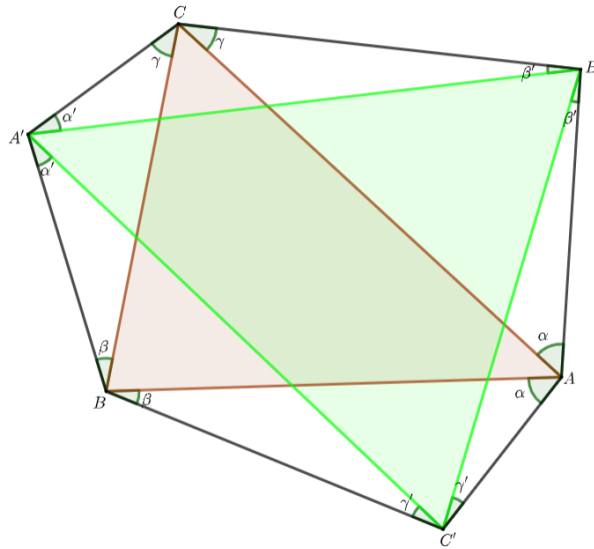
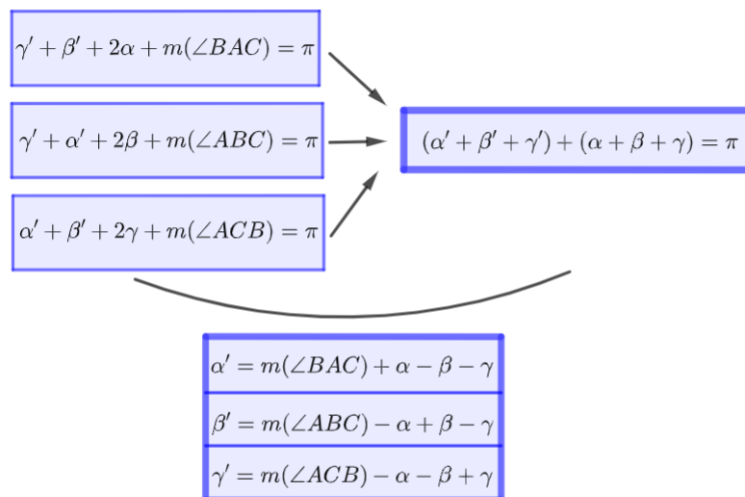


Figura A.2:  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi. Na figura há seis pares de ângulos congruentes e os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  são concorrentes.

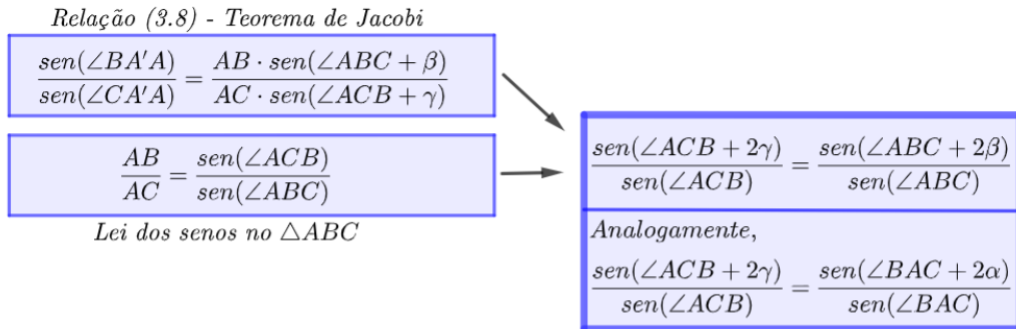
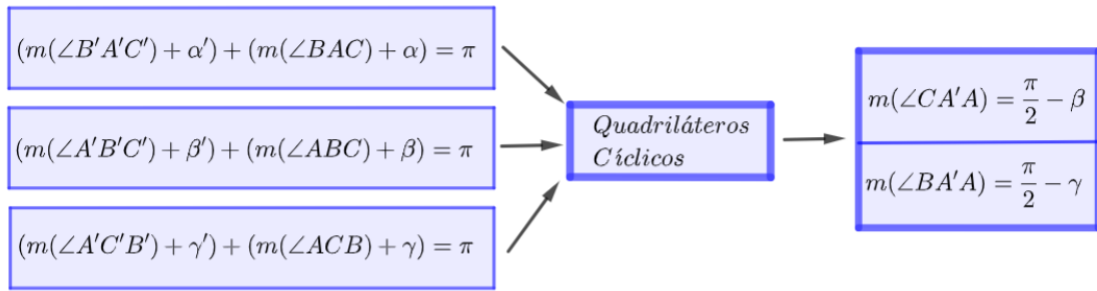
**Proposição A.3.** Nas condições da Definição A.2, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi se e somente se

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

*Demonstração.* Dos triângulos  $\triangle AB'C'$ ,  $\triangle BC'A'$  e  $\triangle CA'B'$ , temos:



Das relações obtidas pela soma dos ângulos internos dos triângulos  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle AB'C$  e  $\triangle ABC'$  e dos valores encontrados de  $\alpha'$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$ , temos:



Assim, podemos concluir que

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)}.$$

Agora, seja  $m(\angle CA'B') = \alpha'$ ,  $m(\angle BA'C') = \theta$ ,  $m(\angle AB'C') = \beta'$ ,  $m(\angle CB'A') = \phi$ ,  $m(\angle BC'A') = \gamma'$  e  $m(\angle AC'B') = \psi$ , como ilustra a Figura A.3. Precisamos provar que  $\theta = \alpha'$ ,  $\phi = \beta'$  e  $\psi = \gamma'$ , se  $\frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)} = \frac{\text{sen}(\angle ABC + 2\beta)}{\text{sen}(\angle ABC)} = \frac{\text{sen}(\angle ACB + 2\gamma)}{\text{sen}(\angle ACB)} = \mu$ , sendo  $\mu$  uma constante real.

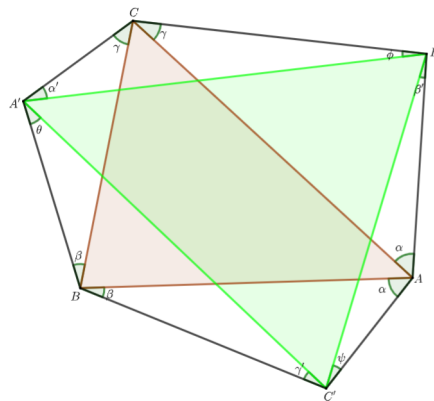


Figura A.3: Para que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  sejam triângulos recíprocos de Jacobi é necessário que  $\theta = \alpha'$ ,  $\phi = \beta'$  e  $\psi = \gamma'$ .

*Lei dos senos*

$$\frac{AC'}{\text{sen}\beta} = \frac{BC'}{\text{sen}\alpha} = \frac{AB}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{AC'}{\text{sen}\beta'} = \frac{AB'}{\text{sen}\psi}$$

$$\frac{AB \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\text{sen}\beta'} = \frac{AC \cdot \text{sen}\gamma}{\text{sen}(\alpha + \gamma)} \cdot \frac{1}{\text{sen}\psi}$$

$$m(\angle BAC) + 2\alpha + \beta' + \psi = \pi$$

$$\mu \cdot \cot\beta' = \frac{AC \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{AB \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma) \cdot \text{sen}(\angle BAC)} - \frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$$

$$\text{sen}(\angle ABC) = \text{sen}(\angle BAC + \angle ACB)$$

$$\mu \cdot \cot\beta' = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{\cos(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$$

*Relações trigonométricas*

$$\mu \cdot \cot\beta' = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\alpha - 1)}{\text{sen} 2\alpha}$$

Analogamente,

$$\mu \cdot \cot\phi = (\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\gamma + \beta)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)} - \frac{(\mu \cdot \cos 2\gamma - 1)}{\text{sen} 2\gamma}$$

Se  $\alpha = \gamma$  então, por (4.22) e (4.23),  $\mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi \implies \beta' = \phi$ , pois  $\beta', \phi \in (0, \pi)$ .  
 Se  $\alpha \neq \gamma$  então seguimos a mostrar que  $\mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi$ .

$$\mu = \frac{\text{sen}(\angle BAC + 2\alpha)}{\text{sen}(\angle BAC)}$$

$$\cot(\angle BAC) = \frac{\mu}{\text{sen} 2\alpha} - \cot 2\alpha$$

Analogamente,

$$\cot(\angle ACB) = \frac{\mu}{\text{sen} 2\gamma} - \cot 2\gamma$$

$$\text{sen} 2\alpha \cdot \text{sen} 2\gamma \cdot (\cot(\angle BAC) + \cot(\angle ACB)) = \mu \cdot (\text{sen} 2\alpha + \text{sen} 2\gamma) - \text{sen}(2\alpha + 2\gamma)$$

Supondo que  $\cot \beta' = \cot \phi \iff \mu \cdot \cot \beta' = \mu \cdot \cot \phi$ :

$$(\cot(\angle ACB) + \cot(\angle BAC)) \cdot \text{sen} 2\alpha \cdot \text{sen} 2\gamma = -\text{sen}(2\alpha + 2\gamma) + \mu \cdot (\text{sen} 2\alpha + \text{sen} 2\gamma)$$

$$\cot \beta' = \cot \phi \implies \beta' = \phi$$

Analogamente,

$$\alpha' = \theta$$

$$\gamma' = \psi$$

Portanto, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são triângulos recíprocos de Jacobi.  $\square$

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] BORTOLOSSI, H.J.; FIGUEIREDO, J.O. *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo*. Universidade Federal Fluminense - V Bienal da SBM, 2010.
- [2] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S.L. *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, 1967.
- [3] COSTA, S., SEBASTIANI, E. *O Problema de Minimizar Redes de Comunicação*. Revista do Professor de Matemática, Nº 16, SBM. (Disponível gratuitamente no site da RPM)
- [4] DANNEELS, E. *A Simple Construction of the Congruent Isoscelizers Point*. Forum Geometricorum 4, 2004.
- [5] DERGIADES, N. *The Soddy Circles*. Forum Geometricorum 7, 2007.
- [6] EMELYANOV, L.; EMELYANOV, T. *A Note on the Schiffler Point*. Forum Geometricorum 3, 2003.
- [7] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora Unicamp, 2004.
- [8] JOHNSON, R.A. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, 2007.
- [9] KAPITANOVAS, R. *Coordenadas Baricêntricas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André/SP, 2013.
- [10] KIMBERLING'S, C. *Encyclopedia of Triangle Centers*. Disponível em <<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart17.html>>, acesso em 05/07/2019.
- [11] MAGALHÃES, E.J.S. *Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2013.
- [12] MUNIZ NETO, A.C. *Geometria*. Coleção PROFMAT - SBM, Rio de Janeiro, 2013.

- [13] POSAMENTIER, A.S., LEHMANN, I. *The Secrets of Triangles: a mathematical journey*. Prometheus Books, 2012.
- [14] SINGHAL, N. *Isogonal Conjugates*. Artigo disponível em academia.edu, 2016.
- [15] VICKERS, G.T. *Reciprocal Jacobi Triangles and the McCay Cubic*. Forum Geometricorum 15, 2015.
- [16] VICKERS, G.T. *The 19 Congruent Jacobi Triangles*. Forum Geometricorum 16, 2016.
- [17] VOLENEC, V.; KOLAR-BEGOVIĆ, Z.; KOLAR-SUPER, R. *Kiepert Hyperbola in an Isotropic Plane*. MATEMATIČKE ZNANOSTI 22, 2018.
- [18] WALSER, H. *99 Points of Intersection: Examples - Pictures - Proofs*. Mathematical Association of America, 2006.
- [19] YIU, P. *The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry*. Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, USA. Paper disponível <<http://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20071/data/material/barycentricpaper.pdf>>, acesso em 24/02/2020.
- [20] *Triangle Center*. Artigo disponível em <[https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle\\_center](https://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_center)>, acesso em 05/07/2019.
- [21] *Jacobi, Carl Friedr. Andr (Carl Friedrich Andreas) 1795-1855*. WorldCat Identities. <<http://www.worldcat.org/identities/lccn-n87119567/>>, acesso em 10/07/2019.