



JULIANA LOPES RESENDE MORATORI

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Santo André, 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

JULIANA LOPES RESENDE MORATORI

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA JULIANA LOPES RESENDE MORATORI,
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

SANTO ANDRÉ, 2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Moratori, Juliana Lopes Resende
Funções Exponenciais e Logarítmicas / Juliana Lopes Resende Moratori. —
2019.

136 fls. : il.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2019.

1. Funções exponenciais. 2. Funções logarítmicas. 3. número e. I. Boero,
Ana Carolina. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT, 2019. III. Título.

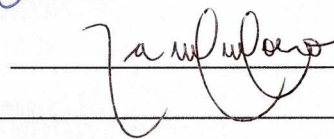
Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André, 07 de fevereiro de 2020.

Assinatura do(a) autor(a):



Assinatura do(a) orientador(a):





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata, JULIANA LOPES RESENDE realizada em 11 de Novembro 2019:

Prof.(a) Dr.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) Dr.(a) GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) Dr.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) Dr.(a) RENATO ALESSANDRO MARTINS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) Dr.(a) ANA CAROLINA BOERO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Dedico este trabalho à minha mãe Joaquina, ao meu esposo Erik, à minha filha Estela e aos amigos do Instituto de Ensino Platão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Joaquina e Ângelo, pela oportunidade que me foi dada, pelos valores em mim construídos, por uma vida de amor, carinho, respeito e dedicação incondicionais. Pelo apoio infinito e pela confiança extrema. Por me fazerem sentir uma imensa admiração, gratidão e amor.

Ao meu maravilhoso marido, Erik, por tantas parcerias, pela paciência durante este trajeto, por cuidar do nosso tesouro durante esta fase tão intensa, por estar do meu lado, me ajudando na formatação do trabalho, ou me fazendo rir no desespero das madrugadas em claro, ou me ensinado a construir uma casa, literalmente. Por me aceitar como sou. Mas, principalmente, por ser meu amigo e por me mostrar o quanto a Vida pode nos surpreender com o amor.

À minha tão amada filha Estela, e seu brilho único, pela oportunidade de sentir o amor incondicional e por trazer para esta existência uma felicidade inexplicável, que se renova a cada olhar, a cada sorriso. Por me acompanhar à faculdade, desde a barriga, e se comportar muito bem, mesmo sendo apenas uma bebê. Por fazer me sentir plena e mãe.

À Dra. Ana Carolina Boero, a "Prôzinha", que a cada reunião me surpreendia com uma postura além da humana, com a excelência no real sentido da palavra docente, por ser única, em todos os sentidos. Agradeço pela paciência, pelo carinho, pela confiança, por ser mais do que incrível, por não me deixar desistir, por acolher a Estela com alegria e, acima de tudo, porque ganhei uma amiga, uma irmã. Aprendi muito mais do que a Matemática em si, aprendi a exercer a empatia, a agradecer e a perseverar.

Aos meus parceiros de PROFMAT, em especial os queridos Marilda e Raphael, pelas tantas horas de convivência, pela relação que construímos, por estarmos juntos e nos apoiando, por me receberem sempre de braços abertos, por acompanharem e incentivarem todos meus processos evolutivos (mestrado, casamento, gravidez, mudança de cidade) nesses anos.

Aos meus caros professores da UFABC, pessoas magníficas, docentes exemplares e dedicados, seres incomuns: Ana Carolina Boero (mais uma vez, maravilhosa!), Rafael

de Mattos Grisi, Maurício Firmino Silva Lima, Jair Donadelli Júnior, Daniel Miranda Machado, Sinuê Dayan Barbero Lodovici e Marcus Antônio Mendonça Marrocos. Sem medir esforços, vocês foram responsáveis por um grande crescimento cultural, profissional e pessoal.

Às minhas queridas irmãs, Denise e Lilian, pelo suporte, incentivo, pelo imenso amor, pela oportunidade da convivência, por fazerem de cada encontro único. Por estarem presentes em todos os momentos. E aos respectivos cunhados, Danilo e Mailson, que considero como irmãos. Aos meus sobrinhos amados: Marina, Diego, Carolina, Bernardo e Luiza, que levantaram questionamentos interessantíssimos sobre este trabalho.

À minha sogra, Aurea, que realmente me adotou e que cuidou com muito carinho da Estelinha, enquanto me debruçava sobre a dissertação. Aos meus cunhados, Daves e Marilene, que acompanharam todo o processo.

Aos meus avós, Josefa e Federico (*in memorian*), pela infinita dedicação, pela presença diária na infância, por serem exemplos de força, dignidade e carinho e, principalmente, por nos ensinar esses valores.

À minha amiga Daniela, por torcer por mim, e mesmo com poucos momentos compartilhados ultimamente, por sentir que está sempre perto, já que a distância nunca foi obstáculo para nossa amizade.

Aos meus Amigos da Essânia e Compos Sui. Em Sorocaba, por viverem esse mestrado comigo a partir do momento em que me mudei para esta cidade fantástica. Por serem suporte, por se mostrarem disponíveis e pela torcida, sempre. Em São Bernardo e São Paulo, porque a ideia de iniciar esse curso teve força com esse grupo e por um Objetivo comum.

Aos meus alunos, todos eles, por serem meu laboratório contínuo de troca de conhecimentos, carinho e respeito.

À Dalila e à Teca, que na reta final me proporcionaram todas as condições para que o encerramento fosse tranquilo.

Aos queridos Amigos Domingos e Marta, por me fazerem entrar em contato comigo mesma e com a Verdade, por me mostrarem, na prática, todos os Princípios, da Amizade à Humildade, passando, é claro, pela Fidelidade, Responsabilidade, Paciência e Fortaleza.

Ao Dr. Celso Charuri (*in memorian*), por ser o Mestre.

Por fim, gostaria de salientar que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

"Mesmo quando tudo parece desabar, cabe a mim decidir entre rir ou chorar, ir ou ficar, desistir ou lutar; porque descobri, no caminho incerto da vida, que o mais importante é o decidir."

(Cora Coralina)

RESUMO

Iniciamos este trabalho pelo desenvolvimento histórico e motivações que promoveram a evolução dos cálculos pertinentes às funções exponenciais e logarítmicas. Abordamos definições e propriedades com formalidade e as funções foram caracterizadas e organizadas de maneira lógica. Definimos o número e , destacando que a função logarítmica nesta base se manifesta com naturalidade em variadas situações cotidianas. O formato adotado possibilita a construção gráfica e a modelagem de fenômenos através da definição e estudo de suas características. Para tanto, realizamos a modelagem de alguns problemas para os quais sugerimos um tratamento interdisciplinar, com o intuito de tornar o conteúdo interessante e até lúdico para os discentes, como a desintegração radioativa do carbono-14, utilização da Escala Richter, aplicações financeiras a juros compostos e resfriamento de corpos. Apresentamos, no encerramento, as tabelas de logaritmos nas bases e e decimal, e sua utilização no cálculo de expressões numéricas, além de teoremas consideráveis no desenvolvimento das demonstrações realizadas.

Palavras-chave: funções exponenciais, funções logarítmicas, número e .

ABSTRACT

We began this work by historical development and motivations that promoted the evolution of calculations pertinent to exponential and logarithmic functions. We formally approach definitions and properties and the functions have been characterized and organized in a logical manner. We define the number e , noting that the logarithmic function on this basis manifests itself naturally in various everyday situations. The adopted format enables the graphic construction and modeling of phenomena through the definition and study of their characteristics. To this end, we model some problems for which we suggest an interdisciplinary approach to make the content interesting and even ludic for students, such as radio-14 carbon disintegration, use of the Richter Scale, interest rate financial applications. compounds and body cooling. At the end, we present the e and decimal logarithm tables and their use in the calculation of numerical expressions, as well as considerable theorems in the development of the proofs.

Keywords: exponential functions, logarithmic functions, number e .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	John Napier.	4
Figura 2	Michael Stifel.	6
Figura 3	Leonhard Paul Euler.	10
Figura 4	Folha de rosto das primeiras publicações relativas a logaritmos: <i>Mirifici logarithmorum canonis descriptio</i> , <i>Mirifici logarithmorum canonis constructio</i> (da esquerda para a direita), ambos de Napier.	11
Figura 5	Ossos de Napier.	12
Figura 6	Henry Briggs e <i>Tabulae</i> , de Vlacq.	12
Figura 7	Joost Bürgi.	13
Figura 8	Bonaventura Cavalieri (à esquerda) e Johannes Kepler (à direita).	13
Figura 9	Régua de logaritmos com duas escalas e seu inventor, William Oughtred.	14
Figura 10	Régua de cálculo.	14
Figura 11	Obtenção de paralelogramo e triângulos a partir de um retân- gulo qualquer.	15
Figura 12	Obtenção da hipérbole através de secção cônica.	16
Figura 13	Quadratura da hipérbole.	17
Figura 14	René Descartes (à esquerda) e Pierre de Fermat (à direita). . . .	17
Figura 15	O método de Fermat: aproximação da área sob uma curva do tipo $y = x^n$, através de uma série de retângulos.	18
Figura 16	Grégoire de Saint-Vincent.	18
Figura 17	O método de Fermat aplicado à hipérbole.	19
Figura 18	Sequência de racionais r_n convergente para x	42
Figura 19	Gráfico de funções exponenciais, para $a > 1$	50

Figura 20	Gráfico de funções exponenciais, para $0 < a < 1$	51
Figura 21	Gráfico de funções exponenciais e logarítmicas, para $a > 1$	53
Figura 22	Gráfico de funções exponenciais e logarítmicas, para $0 < a < 1$	54
Figura 23	\mathbb{R} dividido em intervalos justapostos de comprimento c	64
Figura 24	Função L : b pertencente ao intervalo $[L(a_0), L(a_0 + 1)[$	66
Figura 25	Intervalo $[a_0, a_0 + 1]$ dividido em dez partes iguais.	66
Figura 26	Correspondentes aos extremos dos dez intervalos criados pela função L	67
Figura 27	Intervalo $[\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ dividido em dez partes iguais.	67
Figura 28	Correspondentes aos extremos dos dez intervalos criados pela função L	68
Figura 29	Relação entre $b, L(x)$ e $L(\alpha)$, supondo $L(\alpha) < b$	69
Figura 30	Relação entre $b, L(x)$ e $L(\alpha)$, supondo $L(\alpha) > b$	69
Figura 31	Localização de $L(b)$ e $M(b)$ em \mathbb{R}^+ , dividido em intervalos justapostos de comprimento c	71
Figura 32	Ramo positivo da Hipérbole de Apolônio: $y = \frac{1}{x}$	73
Figura 33	A região sombreada é a faixa de hipérbole H_a^b	74
Figura 34	A área hachurada corresponde ao polígono retangular inscrito na faixa H_a^b	75
Figura 35	Uma aproximação para a área de H_1^2	76
Figura 36	Uma melhor aproximação para a área de H_1^2	77
Figura 37	As áreas sombreadas são iguais.	78
Figura 38	A soma das áreas sombreadas nos intervalos $[m, n]$ e $[mk, nk]$ são iguais.	79
Figura 39	Neste caso, Área (H_a^a) = 0, pois sua representação corresponde a um segmento de reta.	80
Figura 40	Neste caso, Área (H_a^b) = -Área(H_b^a), pois $0 < b < a$	80
Figura 41	$\ln x$: área orientada sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, x]$ do eixo das abscissas.	83

Figura 42	Gráfico da função \ln	84
Figura 43	Área(H_1^e) = $\ln e = 1$	84
Figura 44	Área(H_1^{1+x}) = $\ln(1+x)$	85
Figura 45	Áreas dos retângulos ABCD e AEFD.	85
Figura 46	Formação do carbono-14.	92
Figura 47	Esquema de entrada e saída de água clorada da piscina.	97
Figura 48	Representação da distribuição das principais placas tectônicas.	102
Figura 49	A evolução da deriva continental terrestre.	103
Figura 50	Distribuição de terremotos no planeta: regiões de maior incidência de tremores correspondem ao encontro de placas tectônicas.	104
Figura 51	Representação de uma falha geológica.	104
Figura 52	Epicentro e hipocentro de um terremoto.	105
Figura 53	Charles Francis Richter e Beno Gutenberg.	106
Figura 54	Sismograma: registro de um sismógrafo.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Potências de 2, estabelecendo uma relação entre uma progressão aritmética (1ª linha) e uma progressão geométrica (2ª linha). . .	6
Tabela 2	Tabela do primeiro livro de Napier.	8
Tabela 3	Primeira tabela de Napier.	9
Tabela 4	Segunda tabela de Napier.	9
Tabela 5	Terceira tabela de Napier.	10
Tabela 6	Características dos retângulos obtidos na Figura 17, aplicando o método de Fermat.	19
Tabela 7	Montante de um capital unitário, rendendo por um período anual, em diferentes composições.	88
Tabela 8	Nomenclatura das notas musicais por Guido d'Arezzo.	110
Tabela 9	Frequência das notas musicais.	111
Tabela 10	Logaritmos naturais de 1 a 10,09	119
Tabela 11	Logaritmos decimais de 1 a 9,99	123

CONTEÚDO

Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxiii
Introdução	1
1 UM POUCO DE HISTÓRIA	3
1.1 A invenção dos logaritmos	3
1.2 Quadratura da hipérbole	14
2 FUNÇÕES EXPONENCIAIS	21
2.1 Potências com expoente racional	22
2.1.1 A função exponencial nos racionais	36
2.2 Potências com expoente real	40
2.3 A função exponencial	47
2.3.1 Propriedades das funções exponenciais	47
2.3.2 A função logarítmica	51
2.3.3 Caracterização da função exponencial	54
2.3.4 Funções de tipo exponencial	56
3 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS	59
3.1 Definição e primeiras propriedades	59
3.2 Outras propriedades das funções logarítmicas	62
3.3 Relação entre duas funções logarítmicas: mudança de base	70
3.4 Um exemplo de função logarítmica: área de uma faixa de hipérbole	72
3.4.1 O número e	84
3.4.2 A função exponencial	88
4 APLICAÇÕES	91
4.1 Carbono-14	92
4.2 Concentração de cloro na piscina	96
4.3 Perda de temperatura para o meio ou resfriamento de um corpo	99
4.4 Juros contínuos	100
4.5 Escala Richter	102
4.6 Escala musical temperada	109
4.7 Outras aplicações	112

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
A	TABELAS DE LOGARITMOS	117
A.1	Tabelas de logaritmos naturais	117
A.2	Tabelas de logaritmos decimais	122
B	CÁLCULO DE UMA EXPRESSÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DE TABELA DE LOGARITMOS	127
B.1	Característica e mantissa	127
B.2	Cálculo de uma expressão numérica	128
C	NÚMEROS REAIS	131
C.1	Teorema dos Intervalos Encaixantes	131
C.2	Desigualdade de Bernoulli	132
C.3	Teorema da Boa Ordenação	133
C.4	Propriedade Arquimediana	133
	Bibliografia	135

INTRODUÇÃO

Buscando materiais para a preparação de uma aula com bases sólidas em funções exponenciais e logarítmicas, surgiu a motivação desse trabalho.

Os materiais e livros utilizados pelos estudantes dos Ensinos Fundamental II e Médio que foram analisados continham basicamente a mesma sequência de abordagem (funções exponenciais e suas propriedades seguidas por funções logarítmicas e suas propriedades), algo sobre aplicações e absoluta ausência do ensino de modelagem dessas funções. A caracterização de cada uma delas não é explicitada, o discente não tem ideia alguma de quando modelar uma função afim ou uma função logarítmica, pois não sabe a caracterização, a essência de cada uma delas, e, ainda menos, diferenciá-las.

Certamente, o docente toma como base de criação de sua aula o material utilizado pelo aluno e, ainda mais, em alguns casos foi exatamente a metodologia pela qual estruturou seus conceitos e certezas sobre o assunto. Esses aspectos originam uma aula superficial, o insucesso da aprendizagem de modelagem matemática e, conseqüentemente, uma lacuna gigantesca sendo arrastada para o Ensino Superior.

Passando pela experiência acima descrita, tomamos como objetivo criar um material de suporte ao professor para a base de preparação do curso de funções exponenciais e logarítmicas para o Ensino Médio, que aborda desde a história da inserção dos conceitos no universo matemático até as principais características dessas funções, exemplos de modelagem e sugestões de abordagens em sala de aula.

No primeiro capítulo, apresentamos a evolução histórica das exponenciais e dos logaritmos. Em seguida, nos Capítulos 2 e 3, apresentamos as funções exponenciais e logarítmicas: definição, propriedades, conseqüências e devidas demonstrações, essenciais na absorção efetiva do conhecimento, além da construção geométrica da função logaritmo natural.

No Capítulo 4, apresentamos aplicações, a modelagem de problemas, que é o objetivo principal dos estudos das funções abordadas. Sugiro que essas aplicações sejam base para aulas interdisciplinares, que levam o aluno ao melhor entendimento e prática, já que são parte do cotidiano.

No Capítulo 5, realizamos as considerações finais.

Apresentamos, por fim, no Apêndice, as tabelas de logaritmos, cálculos realizados com a utilização destas e resultados sobre os números reais.

Este trabalho visa, portanto, o enriquecimento do conhecimento do docente, para que haja segurança e brilhantismo na preparação e gestão de aulas sobre o tema.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Como citado em [3], até o início da década de 80, os logaritmos (cujas tabelas eram consultadas regularmente, sofrendo poucas alterações desde 1624) eram utilizados frequentemente como ferramenta para cálculos de expressões numéricas, a fim de agilizar sua solução, isto é, realizar somas e subtrações, ao invés de multiplicações e divisões. A partir de então, as calculadoras de bolso se tornaram mais comuns e acessíveis, tornando antiquado o uso contínuo das tabelas de logaritmos. No Apêndice B, vamos exemplificar o cálculo da seguinte expressão nos moldes de resolução da década de 70:

$$x = \sqrt[5]{\frac{453,2^8}{24,7 \cdot 0,0503}}$$

De maneira diferente da normalmente utilizada em sala de aula, a história da matemática apresenta a invenção dos logaritmos e a formalização de sua simbologia como evento anterior à representação das exponenciais. Ainda assim, o uso das exponenciais e logaritmos nos leva aos babilônios, que criaram tabelas para cálculos de juros compostos na base sexagesimal, mas apenas para problemas pontuais, segundo [3].

1.1 A INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

O início formalizado da jornada dos logaritmos tem como responsável John Napier (ver Figura 1), nascido em 1550, na Escócia.



Figura 1: John Napier.

Napier não era matemático e foi enviado à Universidade de St. Andrews, aos treze anos, com interesses em Teologia. Era ativista religioso e chegou a escrever um livro atacando a Igreja Católica, já que era protestante. Planejou engenhos mecânicos e até chegou a construir alguns relacionados à agricultura, pois era dono de terras. Projetou artefatos militares, também área de seu interesse, colocando sua genialidade em questões práticas de guerra, para a defesa de sua terra natal à luz dos tempos perigosos. Ele concebeu uma carruagem blindada que protegeria seus motoristas, permitindo que a artilharia fosse disparada em todas as direções, além de um espelho que pudesse queimar um navio à distância e um dispositivo que pudesse navegar debaixo d'água. Portanto, pode-se afirmar que Napier era o pai visionário do tanque, do raio da morte e do submarino, já que não temos informações da concretização destes na época. Sem sombra de dúvida, seu nome será recordado não pelos feitos religiosos ou planos bélicos, e sim pelos logaritmos, que revolucionariam sua época.

A importância de sua descoberta fica atrás apenas, em importância para a história fundamental da ciência britânica, do *Principia Mathematica*, de Isaac Newton. Os logaritmos forneceram atalhos, substituindo tediosas multiplicações e divisões por adições e subtrações, que são operações mais simples. Essa não foi uma descoberta acidental: foi criada com o intuito de facilitar o trabalho dos cientistas, já que os esforços necessários para realizar cálculos longos tornava o desenvolvimento maçante e muito mais propenso a erros. A obra de Napier é uma invenção original e detalhada, sem qualquer menção a trabalhos anteriores, uma publicação de 57 páginas em latim, com 90 páginas adicionais de tabelas.

Como Napier era entendido de trigonometria e, assim, das *fórmulas de prostaférese*, é provável que a ideia de Napier tenha se originado destas. Foram criadas por Johannes Werner (1468-1522) e utilizadas por Tycho Brahe (1546-1601), Clavius (1538-1612) e

Bürgi (1552-1632). Sua primeira citação ocorre em uma publicação datada de 1588, na obra *Fundamentum Astronomicum*, de Nicolas Rimerus. Elas consistem no cálculo de expressões trigonométricas, substituindo produtos por somas ou diferenças dessas expressões, facilitando, assim, sua conclusão. São elas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) &= 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} y \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2 \cdot \cos x \cdot \cos y \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y.\end{aligned}$$

Como seria possível efetuar cálculos de expressões numéricas através de relações trigonométricas? Vejamos um exemplo a seguir.

Problema 1. Queremos determinar o produto $0,7044 \cdot (-0,3233)$, utilizando $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y$.

Solução. Inicialmente, verifica-se o número $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 0,7044$.

Pelas tabelas trigonométricas de antigamente, encontramos $x \approx 2,36$.

Agora, vamos encontrar $y \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} y = -0,3233$. Assim, $y \approx 1,9$.

Fazemos

$$0,7044 \cdot (-0,3233) = \operatorname{sen}(2,36) \cdot \cos(1,9) = \frac{\operatorname{sen}(4,26) + \operatorname{sen}(0,46)}{2}.$$

Pelo cálculo dos senos, segue que

$$\frac{\operatorname{sen}(4,26) + \operatorname{sen}(0,46)}{2} \approx \frac{-0,899405 + 0,443948}{2} = \frac{-0,455457}{2} = -0,2277285.$$

Na atualidade, o resultado é rápida e facilmente obtido por intermédio de simples calculadoras.

Para a realização deste tipo de cálculo, as fórmulas de Prostaferese ainda se mostram limitadas: são realizadas operações com apenas dois valores (denominados, nas fórmulas, por x e y). Para obter resultados envolvendo uma quantidade maior de valores, esse processo sofreria inúmeras repetições, sem a possibilidade de uma conclusão mais direta. De forma relevante, isso já justificaria o esforço de Napier na criação dos logaritmos, por realizar um trabalho hercúleo durante o desenvolvimento de expressões simples.

Uma outra suposição se refere aos termos de uma *progressão geométrica*, uma sequência de proporção fixa entre termos consecutivos. A relação de soma e subtração de expoentes nas operações de produto e divisão de potência de mesma base foi trazida à luz por Michael Stifel (1487-1567) na obra *Arithmetica Integra*, publicada em 1544 (ver Figura 2).



Figura 2: Michael Stifel.

Uma sequência do tipo $1, q, q^2, q^3, \dots, q^n$ é uma progressão geométrica, que tem em seus expoentes o desenvolvimento de uma progressão aritmética. Stifel tomou o seguinte exemplo:

Tabela 1: Potências de 2, estabelecendo uma relação entre uma progressão aritmética (1ª linha) e uma progressão geométrica (2ª linha).

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

A Tabela 1 apresenta, na primeira linha, uma progressão aritmética de razão $r = 1$ que são expoentes de potências de base 2, representadas na segunda linha, por uma progressão geométrica.

Stifel percebeu que o produto de termos da progressão geométrica (segunda linha) correspondia a uma potência cujo expoente poderia ser obtido através da uma adição dos termos correspondentes na progressão aritmética (primeira linha).

Verificaremos como isso ocorre na prática.

Vamos determinar o produto entre 2048 e $\frac{1}{4}$, por exemplo. Na tabela, os números da primeira linha que correspondem a esses valores são 11 e -2 . Realizando a soma destes valores, chegamos a 9. Procurando, agora, este valor na primeira linha, constatamos

que seu correspondente na segunda linha é 512, ou seja, $2^9 = 512$, que é o resultado do produto $2048 \cdot \frac{1}{4}$.

Para cálculo de quociente, realizamos uma subtração. Logo, para determinar o quociente entre 256 e 1024, por exemplo, tomamos os correspondentes desses termos na primeira linha, 8 e 10, respectivamente. Realizando a subtração $8 - 10 = -2$ e buscando este valor na primeira linha, determinamos seu correspondente na segunda linha, $\frac{1}{4}$. Logo, $\frac{256}{1024} = \frac{1}{4}$.

Para finalizar estes cálculos, iremos em busca do resultado de 16^3 . Ao verificarmos a tabela, percebemos que localizando 16 na segunda linha, temos como seu correspondente, na primeira linha, o número 4. Então, multiplicamos esse valor por 3, expoente de 16 na operação que queremos realizar, e obtemos 12 como resposta. Procurando o número cujo expoente é 12, chegamos a 4096. Veja:

$$16^3 = (2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12} = 4096.$$

O problema realmente se deu ao tentar compreender este princípio para números que não aparecem na progressão, de tal forma que fosse possível determinar uma sequência de expoentes que permita completar as lacunas existentes entre os termos da progressão geométrica. Porém, Stifel não conhecia as frações decimais (bastante utilizadas a partir do século XVI). Sendo assim, não pôde realizar os cálculos necessários à conclusão do projeto, formulou essas ideias com base em números inteiros, mas não deu continuidade ou extensão. Isso coube a Napier, que tinha como objetivo escrever qualquer número racional no formato de potência com base fixada. A partir daí, multiplicações, divisões e potências desses números se tornariam, respectivamente, somas, subtrações e produtos de seus expoentes.

De forma a preencher os grandes espaços entre os inteiros, Napier optou por adotar como base um número suficientemente pequeno, que possibilitasse um crescimento adequado para solucionar essa problemática, ou seja, suas potências cresceriam (ou decresceriam) bem lentamente, de forma que as lacunas na tabela ficam sendo mínimas.

Na época, era comum multiplicar ou dividir o raio de um círculo unitário em 10000000 ou 10^7 partes na trigonometria. Provavelmente por esse motivo, ele optou por 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$ e se dedicou por 20 anos (1594-1614) para encontrar os termos sucessivos de sua progressão.

Em seu primeiro livro, encontramos tabelas distintas para cada ângulo, com valores dos senos e dos logaritmos destes, para cada minuto somado àquele ângulo, em ordem

crescente. Esta tabela era apresentada conjuntamente com a tabela referente a outro ângulo, com os minutos listados em ordem decrescente (ao contrário da primeira tabela). Nesta segunda tabela, a coluna cujo título era “Diferença” apresentava a diferença entre as duas colunas “Logaritmo”. Por exemplo:

Tabela 2: Tabela do primeiro livro de Napier.

20° + minutos	Seno	Logaritmo	Diferença	Logaritmo	Seno	69° + minutos
0	3.420.201	10.728.852	10.106.827	622.025	9.396.926	60
1	3.422.934	10.720.865	10.097.781	623.084	9.395.931	59
...
30	3.502.075	10.492.295	9.838.076	654.219	9.366.722	30
...

Vale lembrar que os valores trigonométricos adotados por Napier eram calculados utilizando como base um ciclo trigonométrico de raio 10^7 . Sendo assim, os senos, cossenos e tangentes aqui considerados seriam iguais aos utilizados atualmente multiplicados por 10000, como citado em [17].

Importante notar que, de início, Napier não criou uma tabela de logaritmos de números inteiros, mas sim de logaritmos de senos. Deste fato, nasce a impressão de que seu objetivo era direcionado aos estudiosos que fariam uso contínuo delas. Posteriormente, ele se preocupou em explicar aos demais leitores que sua construção é válida e adequada.

Todo inteiro compreendido entre 0 e 10^7 pode ser considerado como um seno, na visão de Napier, já que, como dito anteriormente, seus valores correspondem aos adotados atualmente (valores entre 0 e 1) multiplicados por 10^7 . Para explicar e justificar como gerou as tabelas no segundo livro, ele considera que, para cada “número natural”, está gerando um “número artificial” correspondente, o logaritmo deste número.

Sendo assim, ele construiu basicamente três tabelas:

- 1^a. Possuía 101 elementos, obedecendo a sequência: $10^7; 10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) \approx 9.999.999; 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 \approx 9.999.998; \dots; 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100} \approx 9.999.900$, ou seja, cada termo era obtido subtraindo-se do termo anterior a sua 10^7 parte.

Tabela 3: Primeira tabela de Napier.

Termo	Aproximação	Posição na tabela
10^7	10.000.000	1
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})$	9.999.999	2
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2$	9.999.998	3
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3$	9.999.997	4
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^4$	9.999.996	5
\vdots	\vdots	\vdots
$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100}$	9.999.900	101

- 2^a. Tomou como fator multiplicativo a razão entre o último e o primeiro elemento da tabela anterior, isto é, $\frac{9.999.990}{10.000.000} \approx 0,99999 = 1 - 10^{-5}$. Reiniciou o processo anterior, partindo de 10^7 . Esta tabela possuía 51 elementos, sendo o último $10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{50} \approx 9.995.001$.

Tabela 4: Segunda tabela de Napier.

Termo	Aproximação	Posição na tabela
10^7	10.000.000	1
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})$	9.999.900	2
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^2$	9.999.800	3
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^3$	9.999.700	4
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^4$	9.999.600	5
\vdots	\vdots	\vdots
$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{50}$	9.995.001	51

- 3^a. Possuía 21 elementos, seguindo a proporção $\frac{9.995.001}{10.000.000}$, tendo como último elemento $10^7 \cdot 0,9995^{20} \approx 9.900.473$.

Tabela 5: Terceira tabela de Napier.

Termo	Aproximação	Posição na tabela
10^7	10.000.000	1
$10^7 \cdot 0,9995$	9.995.000	2
$10^7 \cdot 0,9995^2$	9.990.002	3
$10^7 \cdot 0,9995^3$	9.985.007	4
$10^7 \cdot 0,9995^4$	9.980.015	5
\vdots	\vdots	\vdots
$10^7 \cdot 0,9995^{20}$	9.900.473	21

Finalmente, de cada elemento de sua última tabela, criou mais sessenta e oito, seguindo a proporção $\frac{9.900.473}{10.000.000}$, tendo como último elemento $9.900.473 \cdot 0,99^{68} \simeq 4.998.609$, praticamente a metade do número original.

O expoente recebeu, inicialmente, o nome de *número artificial* e, em seguida *logaritmo*, que significa número proporcional ou “número da razão”, pois, do grego, temos *logos* (ou razão) e *arithmos* (ou números). Isso porque, em uma progressão geométrica, a razão entre um termo e o sucessor é sempre a mesma, denominada razão da PG.

A definição de logaritmo de Napier era:

Dado um número $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, temos que L é o logaritmo (neperiano) de N .

Esta definição difere da moderna, remetida a 1728, por Leonhard Euler (Figura 3):

Se $N = b^L$, $b > 0$, $b \neq 1$, b fixo, L é o logaritmo (de base b) de N .

Tomando $L = 0$, para Napier, $N = 10^7$. Já para Euler, $N = 1$.

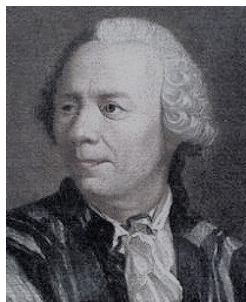


Figura 3: Leonhard Paul Euler.

As regras básicas de operações com logaritmos que temos hoje não são válidas para as definições de Napier. Mas a escolha de sua base, como descrito, nos levou a descobrir o número e , através da ideia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

O número e surge da tentativa de formar logaritmos a partir de uma série geométrica de razão ligeiramente maior que 1, segundo [14], levando à expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, onde n é um número muito grande. E, à medida que n vai aumentando, a expressão vai se aproximando de e . Essa situação é representada pelo limite acima apresentado.

Napier publicou, em 1614, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos) e, em 1619, foi publicado, postumamente, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos) por seu filho Robert; as folhas de rosto estão na Figura 4. Foi reconhecido universalmente e, rapidamente, a utilização dos logaritmos foi difundida.



Figura 4: Folha de rosto das primeiras publicações relativas a logaritmos: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (da esquerda para a direita), ambos de Napier.

Outras de suas realizações em matemática incluem notação decimal para frações e o conceito de números negativos.

Antes de sua morte, três anos após a publicação de seus logaritmos, Napier inventou outro adendo ao cálculo que o coloca na linha do tempo de máquinas e computadores de cálculo. Ele construiu varas de marfim com números inteiros, de maneira tão engenhosa que, colocadas lado a lado, era possível realizar rapidamente somas, quocientes, produtos, raízes quadradas e cubos. Com esse dispositivo não se era mais necessário, portanto, decorar as tabuadas, sendo essa invenção conhecida posteriormente como Os-

os de Napier (Figura 5). Johannes Kepler os utilizou em cálculos de órbitas planetárias, e a ideia rodou o mundo, sendo adotados até na China.



Figura 5: Ossos de Napier.

Henry Briggs (1561-1631), ao encontrar Napier, propôs algumas modificações, como a inserção da base 10, com o objetivo de facilitar os cálculos, utilizando uma base exata e de manipulação simples. Com o consentimento do inventor, Briggs recalculou os valores para inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 e publicou, em 1624, o *Arithmetica Logarithmica*, com precisão de 14 casas decimais. Adriaan Vlacq (1600-1667) calculou o intervalo faltante.

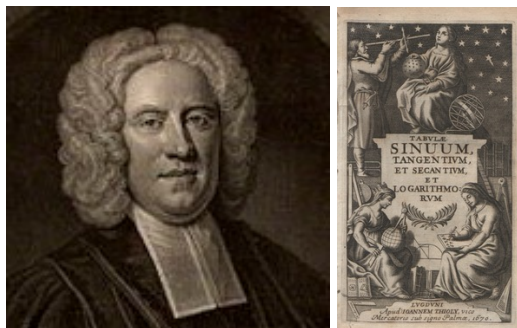


Figura 6: Henry Briggs e *Tabulae*, de Vlacq.

Foi apenas na comemoração do tricentenário dos logaritmos que, na Inglaterra, os logaritmos foram recalculados com 20 casas decimais. Esse trabalho foi finalizado em 1949.

Joost Bürgi (1552-1632), suíço, fabricante de relógios, seis anos antes de Napier se entregar ao ideal logarítmico, já tinha iniciado algo relacionado ao mesmo trabalho. Ele também criou tabelas de logaritmos, porém, diferentemente de Napier, Bürgi utilizou

em sua proporção o número $1 + 10^{-4}$. Então, seus logaritmos cresciam à medida em que os números aumentavam. Elaborou uma tabela de antilogaritmos. Como sua publicação data de 1620, perdeu sua oportunidade de reconhecimento pela invenção de logaritmos.



Figura 7: Joost Bürgi.

É certo que o mundo se encantou com os logaritmos: Edward Wright (1560-1615) traduziu a *Descriptio* para o inglês, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) expandiu a ideia pela Itália e Johannes Kepler (1571-1630), pela Alemanha; Xue Fengzuo (1600-1680) escreveu um tratado na China em 1653.



Figura 8: Bonaventura Cavalieri (à esquerda) e Johannes Kepler (à direita).

Surgiu, então, a necessidade de um instrumento mecânico que auxiliasse o cálculo com logaritmos. Em 1620, Edmund Gunter (1581-1626) construiu um modelo primitivo de régua, aperfeiçoado por William Oughtred (1574-1660), com duas escalas logarítmicas que se moviam, uma em relação à outra.

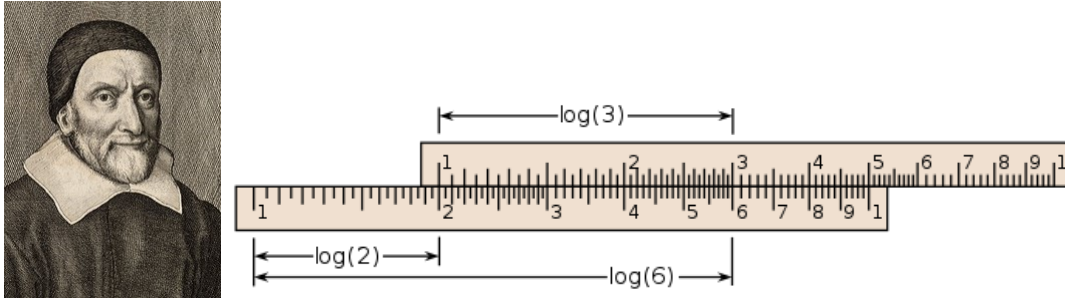


Figura 9: Régua de logaritmos com duas escalas e seu inventor, William Oughtred.

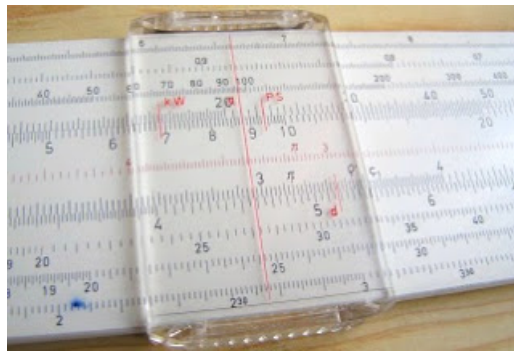


Figura 10: Régua de cálculo.

As régua foram utilizadas em ampla escala até o advento das calculadoras, em 1970. Após este fenômeno, o cálculo de logaritmos ficou em plano secundário, enquanto as funções logarítmicas ganharam cada vez mais espaço na modelagem de fenômenos.

1.2 QUADRATURA DA HIPÉRBOLE

Quando nos referimos à palavra *quadratura* de alguma figura plana, estamos, na verdade, querendo expressar sua área em termos de unidades de área que são quadrados, ou até mesmo encontrar uma figura equivalente, a partir da qual seja possível realizar essa quantificação.

Como realizaríamos a quadratura de um retângulo de lados que medem x e y , por exemplo?

A área desse retângulo seria expressa pelo produto xy . Um quadrado equivalente teria seu lado medindo l , de modo que $l = \sqrt{xy}$, já que sua área seria expressa por $l^2 = (\sqrt{xy})^2 = xy$, numericamente igual à área do retângulo.

Assim sendo, qualquer retângulo (a), paralelogramo (b) ou triângulo (c) poderia ter sua quadratura definida, já que, através de simples construções, essas forma poderiam ser obtidas a partir do retângulo de lados x e y inicialmente citado, como mostra a Figura 11. Consequentemente, poderíamos encontrar a quadratura de qualquer polígono, já que estes podem ser subdivididos em triângulos.

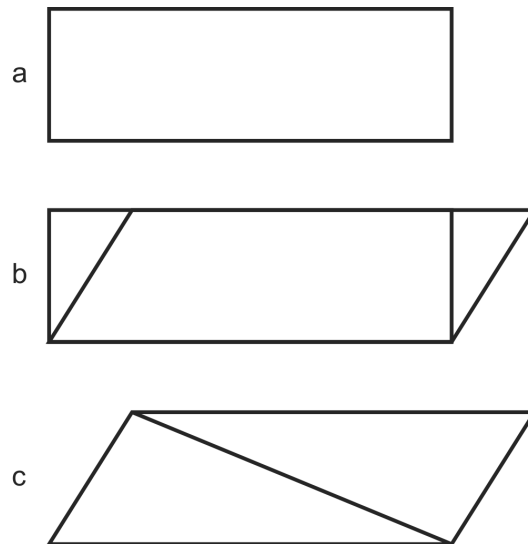


Figura 11: Obtenção de paralelogramo e triângulos a partir de um retângulo qualquer.

Dos gregos até o século XVI, houve evoluções nas ideias de quadratura, pois com a introdução de processos infinitos na matemática, o problema da quadratura se transformou em algo puramente computacional, ou seja, a construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária, desde que fosse possível demonstrar que tal construção poderia ser feita.

Porém algumas formas não cederam às frustradas tentativas de quadratura e dentre elas, estava uma curva obtida por um corte realizado em dois cones idênticos unidos por seus vértices. A hipérbole (do grego "excesso, exagero"), como secção cônica, é obtida, portanto, pela intersecção de um cone de duas folhas (também conhecido como *cone elíptico*) com um plano que não passa pelo vértice do cone e intersecta as duas folhas, como é mostrado na Figura 12.

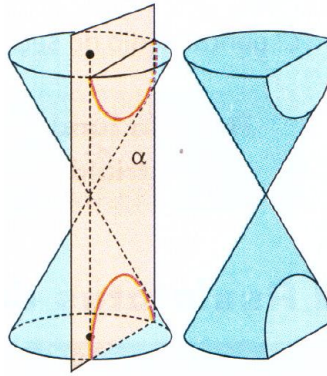


Figura 12: Obtenção da hipérbole através de secção cônica.

Arquimedes tentou, sem sucesso, encontrar a quadratura da hipérbole. Utilizou uma metodologia conhecida por *método da exaustão*, que consistia em dividir a figura em uma série de triângulos cujas áreas diminuía em progressão geométrica, e encaixá-los de tal forma que estes exauririam a área em questão. Quantificava, ao fim, a área total através da soma das áreas dos triângulos (utilizando a soma de progressões geométricas) e poderia usar cada vez mais triângulos, com o objetivo de que o valor obtido estivesse cada vez mais próximo do valor real da área. Obteve sucesso na quadratura da parábola, realizando a divisão de um setor parabólico nos termos acima mencionados, mas foi incapaz de concretizar, com sucesso, a quadratura da hipérbole.

No início do século XVII, foi desenvolvido por Cavalieri e seus contemporâneos um método que consistia em imaginar uma figura plana como uma série de faixas demasiadamente estreitas, tanto quanto se queira, as quais nomearam "indivisíveis". Nessa ideia, a espessura ínfima das faixas promovia um melhor preenchimento da figura. Calculava-se a área da figura com base na área dessas faixas que a compunham. Foi denominado *método dos indivisíveis*, mas não visualizava, com sutileza, as nuances da ideia de um número infinito de faixas. Porém, por alguma razão, funcionava para alguns cálculos. Isso reavivou a esperança de obter a quadratura da hipérbole.

Mas o que quer dizer “quadratura da hipérbole”, se ela é uma curva que vai ao infinito?

Considere a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, especificamente seu ramo positivo. Considere dois pontos sobre o eixo x , $x = 1$ e $x = t$, sendo t uma escolha arbitrária (ver Figura 13). Encontrar a quadratura da hipérbole equivale a exprimir a área abaixo demarcada como uma função de t .

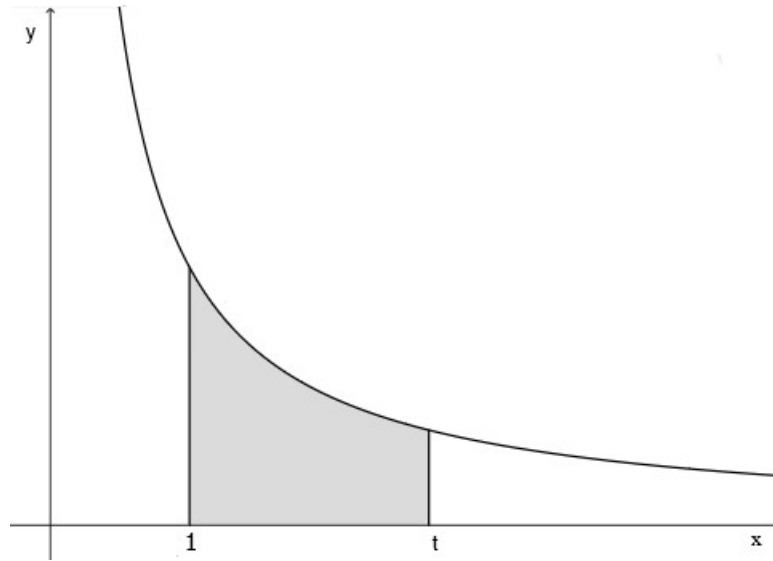


Figura 13: Quadratura da hipérbole.

Descartes e Fermat realizaram tentativas. Descartes trouxe a ideia de representação de curvas através de uma propriedade de seus pontos, isto é, a possibilidade de relacionar as variáveis através de uma equação, além, é claro, do próprio sistema cartesiano.



Figura 14: René Descartes (à esquerda) e Pierre de Fermat (à direita).

Fermat tentou um método de aproximação da área sob o gráfico de $y = x^n$, sendo n natural, através de uma série de retângulos, cujas bases formavam uma progressão geométrica (ver Figura 15). Teve sucesso para todos os casos, exceto para a hipérbole de Apolônio, ou seja, para $y = \frac{1}{x}$.

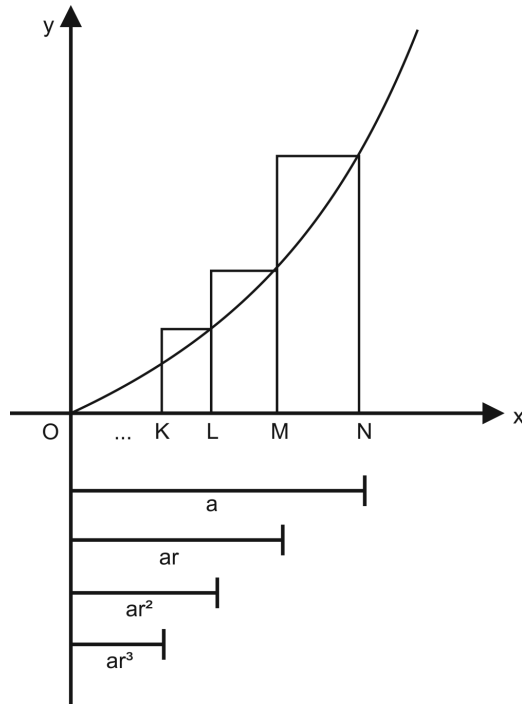


Figura 15: O método de Fermat: aproximação da área sob uma curva do tipo $y = x^n$, através de uma série de retângulos.

Foi um contemporâneo de Fermat que resolveu esse enigma: Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), um belga, jesuíta, que dedicou boa parte de sua vida às quadraturas.



Figura 16: Grégoire de Saint-Vincent.

Ele percebeu que, para determinar a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, se utilizasse a aproximação através de retângulos criada por Fermat, todos eles possuiriam a mesma área.

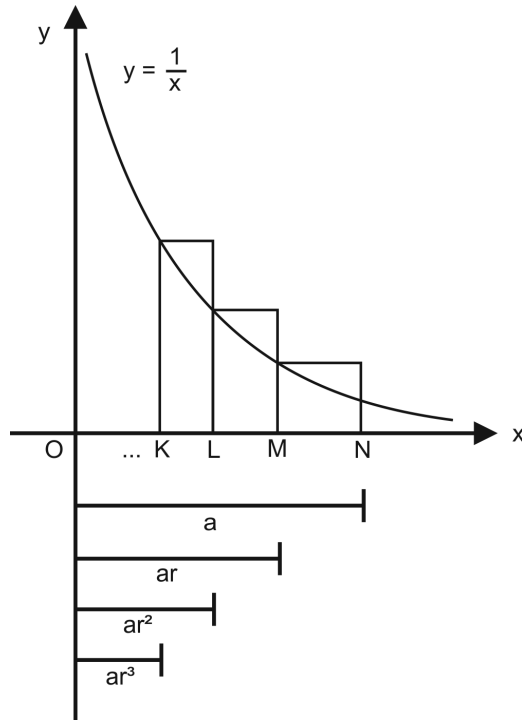


Figura 17: O método de Fermat aplicado à hipérbole.

Pela Figura 17, em relação aos retângulos, começando por N, vemos que:

Tabela 6: Características dos retângulos obtidos na Figura 17, aplicando o método de Fermat.

Base	Largura	Altura	Área
<i>MN</i>	$a - ar = a(1 - r)$	$(ar)^{-1} = \frac{1}{ar}$	$a(1 - r) \cdot \frac{1}{ar} = \frac{1 - r}{r}$
<i>LM</i>	$ar - ar^2 = ar(1 - r)$	$(ar^2)^{-1} = \frac{1}{ar^2}$	$ar(1 - r) \cdot \frac{1}{ar^2} = \frac{1 - r}{r}$
<i>KL</i>	$ar^2 - ar^3 = ar^2(1 - r)$	$(ar^3)^{-1} = \frac{1}{ar^3}$	$ar^2(1 - r) \cdot \frac{1}{ar^3} = \frac{1 - r}{r}$
⋮	⋮	⋮	⋮

Em relação ao eixo x , conforme há um distanciamento do 0 (ar^3, ar^2, ar, a), como a área de cada retângulo é igual, o aumento de área é constante em relação a cada intervalo adicionado ($1 - r, 2(1 - r), 3(1 - r), 4(1 - r)$). É interessante verificar que a primeira sequência (distância do 0) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{r}$, enquanto a

área sob a curva relativa ao intervalo que representa essa distância cresce em progressão aritmética de razão $\frac{1-r}{r}$. Isso quer dizer que a relação entre a distância e a área é logarítmica; ou seja, tomando por $A(t)$ a área sob o ramo de hipérbole positivo, partindo de um ponto de referência fixo até um variante $x = t$, escrevemos: $A(t) = \log t$. Até o presente momento, os logaritmos eram pura e simplesmente uma ferramenta aceleradora de cálculos e, a partir daí, originou-se a função logarítmica.

Muitos conceitos evoluíram com a chegada de Newton, Leibniz e, por intermédio destes, do Cálculo Diferencial e Integral.

Para aprofundar mais os conceitos históricos sobre exponenciais e logaritmos, citamos [11], [10], [15], [13], dos quais fizemos uma mistura que resultou neste capítulo.

Veremos um pouco mais sobre a relação entre logaritmos e a área sob a hipérbole no Capítulo 3.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos iniciar nosso trabalho fazendo a "rota tradicional", isto é, definindo função logarítmica a partir da exponencial. No capítulo seguinte, faremos o caminho contrário. Fica, então, a cargo do docente qual apresentação seria mais adequada para a turma e/ou curso a ser trabalhado.

Para que estudar funções exponenciais?

No ensino básico, a primeira função apresentada ao aluno é a função afim. Esta função tem por característica que o acréscimo $f(x+h) - f(x)$ acarretado por f quando se varia de x para $x+h$ depende apenas do valor h acrescentado a x , mas não do valor de x . Portanto, se tomarmos uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$, e verificarmos o acréscimo sofrido quando passamos de x para $x+h$, teremos

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - (ax + b) = ah.$$

Note que o acréscimo obtido foi ah , independente de x . Isso seria coerente, por exemplo, se modelássemos o pagamento de uma corrida de táxi em função do número de quilômetros percorridos. Considere que dois passageiros, em carros distintos, porém com o mesmo sistema de cobrança, tivessem percorrido uma quilometragem diferente até um instante t , e, a partir de então, a cada m quilômetros percorridos por eles, seria acrescido um mesmo valor a ao pagamento devido, independente do total percorrido anteriormente. Isto é, se a partir dali eles percorrerem a mesma quilometragem, o acréscimo no pagamento da corrida será o mesmo, proporcional ao número de quilômetros acrescentados a partir do instante t .

Percebemos uma tendência dos alunos a modelar todo e qualquer problema a partir da função afim, sem nem mesmo avaliar se essa importante característica, isto é, que o acréscimo no valor de f é proporcional ao acréscimo no valor de x e depende

exclusivamente do acréscimo a x . Cabe ao docente portanto, realizar essa conscientização, apresentar situações que não possam ser representadas por uma função afim, de tal forma que o discente perceba a necessidade de buscar um outro instrumento matemático que se adeque à nova situação.

As funções exponenciais são alguns desses instrumentos essenciais para a modelagem de alguns fenômenos cuja variação relativa é constante e que, a partir de outras funções, por exemplo da função afim, não seriam adequadamente representados. O cálculo do montante relativo a um capital investido a juros contínuos, durante um determinado tempo, com taxa de juros estabelecida é um dos fenômenos que requer a utilização das exponenciais para sua modelagem. Se pensarmos neste evento como representado por uma função afim seria incoerente, já que cada quantidade m de tempo decorrido do instante t da aplicação não seria acrescentado ao montante o mesmo valor de juros, já que o valor investido aumenta a cada instante. Nesta situação, teríamos que o juros, o acréscimo na função, é uma porcentagem do capital investido, isto é, proporcional ao valor da grandeza no momento inicial.

Apresentaremos a seguir o embasamento das funções exponenciais na nossa metodologia: potências com expoente real, com base em [12]. Iniciaremos por potências de expoentes naturais, ampliaremos o conceito para expoentes inteiros e racionais, considerando a base positiva. Caso a mesma fosse negativa, teríamos uma série de restrições, principalmente no caso de raízes com índice par, tornando nosso estudo inviável.

Potências com expoente irracional fogem da abordagem convencional realizada até o encerramento do ensino básico, mas, certamente, de modo intuitivo, é possível apresentar essa ideia ao aluno, sem muitas formalizações. Porém é de extrema importância que este seja um assunto bem absorvido pelo docente, para que este possa apresentar em aula o domínio da função exponencial como o conjunto dos números reais.

2.1 POTÊNCIAS COM EXPOENTE RACIONAL

Iniciaremos esta seção, partindo da definição de potência com expoente natural e ampliando-a até a abrangência real.

Seja a um número real positivo. Vamos definir as potências a^n , para $n \in \mathbb{N}$, por recursão:

$$a^1 = a$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a, \quad \forall n \geq 1.$$

Note que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}},$$

isto é, a^n é o produto de n fatores iguais a a .

Um primeiro contato com potências se dá experimentando a definição acima, onde a é denominado base e n expoente, que corresponde ao número de repetições que a base aparece como fator desse produto.

Para darmos sequência às demais definições, validaremos a denominada *propriedade fundamental* para potências com expoente natural, que será demonstrada a seguir.

Proposição 2.1. *Seja a um número real positivo. Então $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \forall m, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam a um número real positivo e $m \in \mathbb{N}$ escolhidos arbitrariamente. Demonstremos a propriedade por indução sobre n .

Para $n = 1$ a propriedade é válida, pois, pela definição, $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$.

Supondo que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, temos:

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, vale que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como m e a são arbitrários, temos que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \forall a \in \mathbb{R}^+$ e $\forall m, n \in \mathbb{N}$. \square

Feita a demonstração de forma adequada, podemos reforçar o conceito da *propriedade fundamental* segundo a ideia a seguir.

Se

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \quad \text{e} \quad a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}}$$

então

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ fatores}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, se no primeiro membro da igualdade temos o produto de um número m de fatores a por um número n de fatores a , teremos um total de $m + n$ fatores a , exatamente o que ocorre no segundo membro da igualdade.

A seguir, apresentaremos as demais propriedades válidas para potências de expoente natural, devidamente demonstradas, em sua maioria pelo Princípio da Indução Finita.

Propriedades 2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Valem:*

$$(1) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n.$$

$$(2) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(3) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(4) (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Demonstração. (1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n.$

De $m > n$, segue que $m - n > 0$. Tome $m = m + 0 = m + (n + (-n)) = (m - n) + n$.

Assim, pela propriedade fundamental, temos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$(2) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Fixemos $a, b \in \mathbb{R}^+$, escolhidos arbitrariamente. Demonstraremos por indução em n .

Para $n = 1$, fazemos: $(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$.

Suponha $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Segue, pela propriedade fundamental, que

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b)^1.$$

Por hipótese,

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b)^1 = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

Logo, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$(3) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Para demonstrar por indução em n , fixamos $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Para $n = 1$, vale a propriedade, pois $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$.

Supondo $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ verdadeira, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Portanto, vale $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$(4) (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Tome $a \in \mathbb{R}^+$ e $m \in \mathbb{N}$, escolhidos de forma arbitrária. Mostraremos, por indução em n , que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, temos, por definição $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$.

Supondo que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, então

$$(a^m)^{(n+1)} = (a^m)^n \cdot (a^m)^1 = a^{m \cdot n} \cdot a^m.$$

Logo,

$$(a^m)^{(n+1)} = a^{m \cdot n + m} = a^{m \cdot (n+1)}.$$

Portanto, vale $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pela arbitrariedade de m e a , temos que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ e $\forall a \in \mathbb{R}^+$. □

Vamos ampliar nosso horizonte, expandindo o expoente para qualquer número inteiro, sem tornar inválida a propriedade fundamental.

Para a^0 , sem contrariar tal propriedade, temos: $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1$. Logo, $a^0 = 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Esta é a única definição possível que preserva a propriedade fundamental. Veja:

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}.$$

Logo,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Generalizando, temos:

Definição 2.3. Sejam $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Se $n = 0$, então $a^0 = 1$.

Agora, verifiquemos a validade das seguintes propriedades:

Propriedades 2.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então:*

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$(2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$(3) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(5) (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Demonstração. Sabemos que as propriedades acima são válidas para m e n naturais. Vamos estendê-las para o campo dos inteiros, complementando as demonstrações anteriormente realizadas.

Para tanto, nos casos que envolvem $m, n \in \mathbb{Z}$, dividiremos a demonstração em quatro casos, a saber:

- $m > 0$ e $n > 0$, ou seja, $m, n \in \mathbb{N}$, todos demonstrados no último bloco de propriedades, em sua maioria por indução.
- $m \leq 0$ e $n \leq 0$.
- $m > 0$ e $n \leq 0$.
- $m \leq 0$ e $n > 0$.

Consideraremos fixo $a \in \mathbb{R}^+$ e apresentaremos caso a caso.

Nos demais casos, fixe $b \in \mathbb{R}^+$.

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

- $m > 0$ e $n > 0$.

Este caso foi provado quando tratamos de expoentes naturais.

- $m \leq 0$ e $n \leq 0$.

Utilizando a definição de expoente inteiro e negativo, fazemos

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}}.$$

Agora, como $-n \geq 0$, $-m \geq 0$ e $-(m+n) \geq 0$, são válidas as propriedades demonstradas para os naturais. Logo,

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

- $m > 0$ e $n \leq 0$.

Este caso ainda subdivide-se em $m+n > 0$ e $m+n \leq 0$.

Para $m+n > 0$, temos, pela definição de potências de expoentes inteiros, que

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}}.$$

Como $-n \geq 0$, são válidas as propriedades demonstradas para os naturais.

Logo,

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Para $m+n \leq 0$, temos

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^{-n}}{a^m}} = \frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

- $m \leq 0$ e $n > 0$.

Este caso é análogo ao imediatamente anterior.

$$(2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

- $m > 0$ e $n > 0$.

A validade deste caso foi provada quando tratamos de expoentes naturais.

- $m \leq 0$ e $n \leq 0$.

Utilizando a definição de expoente inteiro e negativo, fazemos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{\frac{1}{a^{-n}}}.$$

Como $-n \geq 0$ e $-m \geq 0$, são válidas as propriedades demonstradas para os naturais.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{\frac{1}{a^{-n}}} = \frac{1}{\frac{a^{-m}}{a^{-n}}} = \frac{1}{a^{-m-(-n)}} = \frac{1}{a^{-m+n}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n}.$$

- $m > 0$ e $n \leq 0$.

Da definição de potências de expoente inteiro e negativo, segue que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^{-n}}} = a^m \cdot a^{-n}.$$

Como $-n \geq 0$, vale a propriedade fundamental para expoentes naturais.

Logo,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}.$$

- $m \leq 0$ e $n > 0$.

Pela definição de potências de expoente inteiro negativo, temos que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{a^n} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^n}.$$

Note que $-m \geq 0$, portanto, utilizaremos as propriedades demonstradas para potências cujo expoente é natural. Logo,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^n} = \frac{1}{a^{-m+n}} = a^{m-n}.$$

$$(3) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Trataremos este caso para expoentes positivos e negativos.

Para $n > 0$, demonstramos a propriedade para expoentes naturais.

Então, suponha $n \leq 0$.

Sabemos, pela definição de potência de expoente inteiro e negativo, que:

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}}.$$

Logo, sendo $-n \geq 0$, valem as propriedades das potências com expoentes naturais e segue que

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n.$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Para $n > 0$, a validade está demonstrada.

Portanto, suponha $n \leq 0$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{-n}} = a^n \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^{-n}}} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(5) (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

- $m > 0$ e $n > 0$.

Este caso foi provado quando tratamos de potências com expoente natural.

- $m \leq 0$ e $n \leq 0$.

Utilizando a definição de expoente inteiro e negativo, fazemos

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}} \right)^{-n}}.$$

Como $-n \geq 0$ e $-m \geq 0$, utilizaremos as propriedades demonstradas para expoentes naturais. Segue que

$$(a^m)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}} \right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{a} \right)^{-m} \right)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} \right)^{mn}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}} \right)^{mn} = a^{mn}.$$

- $m > 0$ e $n \leq 0$.

Fazemos

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}},$$

utilizando a definição de expoente inteiro e negativo. Como $-n \geq 0$ e valem as propriedades demonstradas para as potências de expoentes naturais, e segue que

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn},$$

- $m \leq 0$ e $n > 0$.

Pela definição de potências de expoentes inteiros e negativos, temos que

$$(a^m)^n = \left[\frac{1}{(a^{-m})} \right]^n.$$

Como $-m > 0$, das propriedades demonstradas para os expoente naturais, segue que

$$(a^m)^n = \left[\frac{1}{(a^{-m})} \right]^n = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}.$$

Como tratamos por arbitrários a e b , temos que todas as propriedades são válidas $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ e $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. □

Chegamos em um ponto delicado da nossa teoria: a radiciação. Aprendemos que esta operação consiste na inversão da operação potência, ou seja, realizar uma radiciação, dados $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, é determinar o valor $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $b^n = a$.

Adentraremos, para algumas situações, na discussão de números irracionais. Como trataremos desse tema com maior cautela na próxima seção, apresentaremos apenas uma proposição e mostraremos a validade das propriedades para operações com raiz n -ésima.

Proposição 2.5. Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, existe um único $b \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$b^n = a.$$

Denotamos por b a raiz n -ésima de a , cuja notação é

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

Os termos envolvidos nesta operação recebem a seguinte nomenclatura: a é o radicando, n é o índice do radical e b , como já dito, a raiz n -ésima de a .

Corolário 2.6. Da Proposição 2.5, segue que

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Vejamos algumas propriedades para operações com raiz n -ésima.

Propriedades 2.7. Para $a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}$, temos:

$$(1) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

$$(2) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$(3) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$(4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(5) \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}.$$

Demonstração. Para uma demonstração mais sucinta, fixemos $a, b \in \mathbb{R}^+$, escolhidos arbitrariamente.

$$(1) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

Considere $x = \sqrt[n]{a^m}$. Temos que

$$x^{n \cdot p} = (\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = (a^m)^p = a^{m \cdot p}.$$

Assim, $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = x = \sqrt[n]{a^m}$.

$$(2) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Faça $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Logo,

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Portanto, $x = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

$$(3) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Tome $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Elevando a igualdade a n , temos

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Logo, $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

$$(4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Fixe n e tome $m \geq 0$. Mostraremos a validade por indução sobre m .

Para $m = 0$, $(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$.

Supondo que $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, temos:

$$(\sqrt[n]{a})^{m+1} = (\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{a})^1 = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m \cdot a} = \sqrt[n]{a^{m+1}}.$$

Para $m < 0$, temos:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(5) \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}.$$

Considerando $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$, fazemos

$$x^p = \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \right)^p = \sqrt[n]{a}.$$

Elevando os membros da igualdade a n , temos que

$$(x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n, \text{ ou seja, } x^{pn} = a.$$

Se $x^{pn} = a$, então $\sqrt[pn]{a} = x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$.

Como, no início, escolhemos a e b arbitrariamente, temos que todas as propriedades são válidas $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z}$ e $\forall n, p \in \mathbb{N}$. \square

Continuaremos nossa rota de ampliação na abrangência de expoentes para uma potência de base real. Seguimos, agora, para o campo dos racionais.

O que ocorre com a^r , se $r = \frac{p}{q}$, sendo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$? Para que a validade de $(a^m)^n = a^{mn}$ se mantenha, devemos ter que

$$(a^r)^q = (a^{\frac{p}{q}})^q = a^p.$$

Por definição, a^r é a raiz q -ésima de a^p , ou seja, é o único número real positivo cuja q -ésima potência equivale a a^p .

Portanto, escrevemos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Observação 2.1.1. *Aqui, é importante chamar a atenção ao seguinte fato: para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$. Nessas condições, vale que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$.*

Definição 2.8. Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Considerando a Observação 2.1.1, temos que:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Reiterando, se $a > 0$, então $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$.

Mostraremos a validade das propriedades de potências de expoentes racionais enunciadas a seguir.

Propriedades 2.9. *Considere $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Então:*

$$(1) a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}.$$

$$(2) \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}.$$

$$(3) (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}.$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

$$(5) (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}.$$

Demonstração. Nos itens que seguem, utilizaremos que

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{e} \quad a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r},$$

segundo a Definição 2.8 e fixaremos a e b , tais que $a, b \in \mathbb{R}^+$, escolhidos de maneira arbitrária. Em seguida, para o desenvolvimento de cada demonstração, utilizaremos as propriedades das operações com raízes n -ésimas.

$$(1) \quad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}.$$

Temos que

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r}.$$

Logo,

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}.$$

$$(2) \quad \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}.$$

Por definição,

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}}.$$

Assim,

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{\frac{a^{ps}}{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}.$$

$$(3) \quad (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}.$$

Segue, pela definição, que

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p}.$$

Então,

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}.$$

$$(4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

Temos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}.$$

De fato,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

$$(5) \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}.$$

Partindo da definição e utilizando as propriedades das raízes, segue que

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{pr}{q}}\right)} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}.$$

Escolhemos a e b de maneira arbitrária, portanto, as propriedades aqui demonstradas, se verificam $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ e $\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. \square

Veremos, a seguir, que em qualquer intervalo positivo da reta real encontramos uma potência de expoente racional. Para tanto, necessitamos de uma pequena noção de limite e monotonicidade de seqüências cujos termos são potências de expoentes naturais.

Como a seqüência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, com a real positivo se comporta quando n tende a infinito?

Uma seqüência de termo geral $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$ tem seu comportamento definido pelo valor de a . Vejamos:

- i. Se $a = 1$, a seqüência será constante igual a 1 e, portanto, limitada.
- ii. Se $0 < a < 1$, multiplicamos os membros da desigualdade por a^n : $0 < a^{n+1} < a^n$. Temos assim, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o termo subsequente a um determinado termo sempre será menor do que este. Logo, para $0 < a < 1$, a seqüência é decrescente e limitada.
- iii. Se $a > 1$, escrevemos $a = 1 + d$, com $d \in \mathbb{R}^+$. Pela desigualdade de Bernoulli (Teorema C.2), $a^n = (1 + d)^n > 1 + nd$. E, para cada $b \in \mathbb{R}$, tomando $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{b-1}{d}$, teremos:

$$a^n > 1 + \frac{b-1}{d} \cdot d \Rightarrow a^n > b.$$

E multiplicando os membros da desigualdade $a > 1$ por a^n , temos que $a^{n+1} > a^n$.

Logo, concluímos que a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para $a > 1$, é crescente e ilimitada.

Utilizaremos esses conceitos na demonstração do lema a seguir.

Lema 2.10. *Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Em todo intervalo contido em $]0, +\infty[$, existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Tome um intervalo $]\alpha, \beta[$, onde $0 < \alpha < \beta$, arbitrariamente. Vamos provar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in]\alpha, \beta[$. Para tanto, trataremos quatro casos separadamente:

1º Caso: $a > 1$ e $\alpha > 1$;

2º Caso: $a > 1$ e $0 < \alpha < 1$;

3º Caso: $0 < a < 1$ e $\alpha > 1$;

4º Caso: $0 < a < 1$ e $0 < \alpha < 1$.

Provaremos o **1º Caso**, os demais saem analogamente.

Vimos há pouco que a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, quando $a > 1$.

Assim, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < a^m$, já que β não é limitante superior de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ilimitada).

Como $\beta - \alpha > 0$ e $a^m > 0$, temos que $\frac{\beta - \alpha}{a^m} > 0$ e, somando 1 a cada membro, $1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m} > 1$.

Temos também que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m}\right)^n$.

Desta última desigualdade, e tomado $a > 1$, vem que

$$1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m}\right)^n.$$

Elevando os membros da desigualdade a $\frac{1}{n}$, temos:

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m}.$$

Subtraindo 1 de cada membro,

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^m}$$

e, multiplicando ambos os membros por a^m , temos:

$$0 < a^m(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Agora, tome um $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{k}{n} \leq m$. Então,

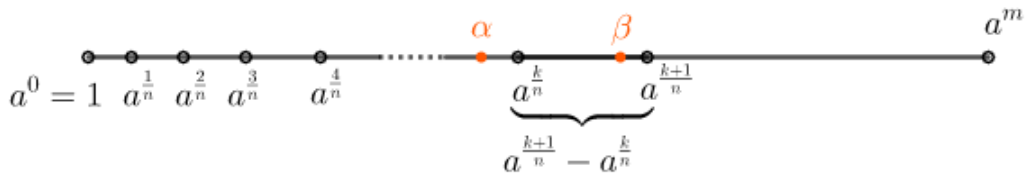
$$0 < a^{\frac{k}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a^m(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, vale:

$$\begin{aligned} 0 < a^{\frac{k}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) &< \beta - \alpha, \text{ ou seja,} \\ 0 < a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} &< \beta - \alpha. \end{aligned}$$

De acordo com a desigualdade acima, o comprimento do intervalo $]\alpha, \beta[$, tomado inicialmente, é maior que o comprimento do intervalo $]a^{\frac{k}{n}}, a^{\frac{k+1}{n}}[$.

Como $\alpha > 1$ e $\beta < a^m$, temos que $]\alpha, \beta[\subseteq]1, a^m[$.



Se α pertence a um intervalo $]a^{\frac{k}{n}}, a^{\frac{k+1}{n}}[$, $k \in \mathbb{N}$, e o comprimento $\beta - \alpha$ supera o comprimento desse intervalo, β não pertencerá ao mesmo intervalo que α , ou seja, $\alpha < a^{\frac{k+1}{n}} < \beta$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Isso quer dizer que sempre haverá uma potência de a com expoente racional inserido no intervalo $]\alpha, \beta[$. Para demonstrar os outros casos, utilize que $\alpha < a^t < \beta < 1$ equivale a $1 < \frac{1}{\beta} < a^{-t} < \frac{1}{\alpha}$. \square

Este lema mostra, portanto, que as potências a^r , onde $r \in \mathbb{Q}$, estão espalhadas por toda parte em \mathbb{R}^+ .

2.1.1 A função exponencial nos racionais

Iremos definir, agora, a função exponencial com domínio racional.

Definição 2.11. Dado $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, definimos função exponencial de base a a função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que associa cada x racional com o número real a^x .

Discutiremos, em breve, o comportamento monotônico desta função em relação aos valores de a .

Para isso, relembremos alguns conceitos relativos a monotonicidade.

O que significa dizer que determinada sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona? Certamente, o leitor deve se lembrar sobre algo acerca disso. Muitas vezes, quando alunos, escutam perguntas como: o que ocorrerá com a^x se aumentarmos, gradativamente, o valor de x ?

Veremos, primeiro, os conceitos fundamentais do tema.

A caracterização da monotonicidade se dá em quatro casos. Em todos eles, considere $n \in \mathbb{N}$.

1º) (a_n) é crescente (ou estritamente crescente) quando fixado um termo qualquer, com exceção do primeiro, temos que o termo antecessor é menor do que o valor fixado. Ou seja,

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

Podemos, também, representar por

$$a_n < a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

2º) (a_n) é não-decrescente se, ao fixarmos um termo qualquer, com exceção do primeiro, temos que o termo antecessor é menor ou igual ao valor fixado. Ou seja,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

Ou, simplesmente,

$$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

3º) (a_n) é decrescente (ou estritamente decrescente) quando fixado um termo qualquer, com exceção do primeiro, temos que o termo antecessor é maior do que o valor fixado. Ou seja,

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

Podemos indicar por

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

4º) (a_n) é não-crescente se, ao fixarmos um termo qualquer, com exceção do primeiro, temos que o termo antecessor é maior ou igual ao valor fixado. Ou seja,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

Ou, simplesmente,

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Agora, devemos analisar como a função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$, já definida por $f(x) = a^x$ se comporta segundo a monotonicidade. Pensaremos nela inicialmente como uma sequência de potências de base a cujos expoentes são os termos de uma sequência de números naturais e complementaremos esta ideia até atingirmos expoentes racionais. Será que ela reflete a monotonicidade dessa sequência dada por seus expoentes? Na verdade, adiantamos que isso será verificado levando em conta o intervalo em que a está inserido. Pela definição, a deve ser real, positivo e diferente de 1. Sendo assim, a pode estar inserido no intervalo $]0, 1[$ ou no intervalo $]1, +\infty[$, isto é, $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

Inicialmente, apresentaremos alguns lemas e, a seguir, enunciaremos e demonstraremos a monotonicidade da função exponencial de domínio racional.

Nossa primeira verificação será para expoentes inteiros.

Lema 2.12. *Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos: $a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0$.*

Demonstração. Inicialmente, verificaremos a validade de $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$ para n natural, por indução em n .

Para $n = 1$, temos $a^1 = a > 1$.

Suponha que $a^n > 1$.

Logo, tem-se que

$$a > 1 \Rightarrow a^n \cdot a > a^n \cdot 1 \Rightarrow a^{n+1} > a^n > 1 \Rightarrow a^{n+1} > 1.$$

Agora, verificaremos a validade de $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$ por redução ao absurdo.

Suponha, agora, por absurdo, que $n \leq 0$, isto é, $-n \geq 0$.

Para $n = 0$, temos $a^0 = 1$. E, pelo que já provamos, $-n > 0$ implica $a^{-n} > 1$.

Portanto,

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1.$$

Seja a^n positivo, multipliquemos os membros da desigualdade, sem alterar seu sinal

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq 1 \cdot a^n \Rightarrow a^0 = 1 \geq a^n,$$

contrariando a hipótese $a^n > 1$: absurdo.

Portanto, $n > 0$. □

Completaremos a ideia desse lema, ampliando o conjunto dos expoentes para racional.

Lema 2.13. *Considere $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$. Temos que:*

$$a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0.$$

Demonstração. Vamos realizar essa demonstração em duas partes.

Primeiro, mostraremos $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$, e, em seguida, a recíproca.

Tome $r = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$.

Temos que se $(a^{\frac{1}{n}})^n = a > 1$ e $n > 0$, pelo Lema 2.13, então $a^{\frac{1}{n}} > 1$. E, utilizando o mesmo princípio, como $m > 0$, temos que $(a^{\frac{1}{n}})^m > 1$. Veja

$$(a^{\frac{1}{n}})^m > 1 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Como $r = \frac{m}{n}$, temos:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Agora, verificaremos a recíproca: $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$. Tome $r = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Segue que

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

Supondo $n > 0$ e considerando $a^{\frac{1}{n}} > 1$ (demonstrado acima), pelo Lema 2.12, temos

$$a^{\frac{1}{n}} > 1 \text{ e } (a^{\frac{1}{n}})^m > 1 \Rightarrow m > 0.$$

Se $n > 0$ e $m > 0$, então

$$r = \frac{m}{n} > 0.$$

Agora, suponha $n < 0$ que equivale a $-n > 0$ e, novamente pelo Lema 2.12, vem

$$a^{-\frac{1}{n}} > 1 \text{ e } (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{-\frac{1}{n}})^{-m} > 1 \Rightarrow -m > 0, \text{ isto é, } m < 0$$

Logo, se $n < 0$ e $m < 0$, então $r = \frac{m}{n} > 0$. □

Estabeleceremos uma relação entre a monotonicidade de uma sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e a monotonicidade da sequência (a^{r_n}) .

Lema 2.14. *Seja $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$. Temos que*

$$a^s > a^r \Leftrightarrow s > r.$$

Demonstração. Multiplicando a desigualdade $a^s > a^r$ por $a^{-r} > 0$, temos

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > a^0 = 1.$$

Pelo Lema 2.13, segue que

$$a^s > a^r \text{ se, e somente se, } s - r > 0.$$

Portanto, $a^s > a^r \Leftrightarrow s > r$. □

Posto isso, verificaremos a monotonicidade da função que dá nome a esta subseção.

Proposição 2.15. *Dado $a \in \mathbb{R}^+$, a função $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(r) = a^r$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.*

Demonstração. O Lema 2.14 nos garante que para quaisquer $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, tais que $r_1 > r_2$, temos que $a^{r_1} > a^{r_2}$, quando $a > 1$, sendo a recíproca verdadeira. Isso quer dizer que, para $a > 1$, f é crescente.

Resta-nos verificar o que ocorre com f quando $0 < a < 1$.

Considere, novamente, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ quaisquer, tais que $r_1 > r_2$, ou seja $-r_1 < -r_2$. De $0 < a < 1$, vem que $a^{-1} > 1$.

Do Lema 2.14, vem

$$(a^{-1})^{-r_1} < (a^{-1})^{-r_2},$$

ou seja,

$$a^{(-1) \cdot (-r_1)} < a^{(-1) \cdot (-r_2)}.$$

Logo,

$$a^{r_1} < a^{r_2}.$$

Como r_1 e r_2 foram escolhidos de forma arbitrária, temos que dados $a \in \mathbb{R}^+$, $a < 1$ e $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 > r_2 \Leftrightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$. É decrescente.

Portanto, quando $a > 1$, f é crescente e quando $0 < a < 1$, a função f é decrescente. □

Utilizaremos a ideia de monotonicidade na próxima seção.

2.2 POTÊNCIAS COM EXPOENTE REAL

A evolução das potências de base real e expoentes naturais para as potências de base real e expoentes racionais foi cuidadosamente enunciada e demonstrada na seção anterior, porém de uma maneira tranquila e com naturalidade.

Vimos que as potências de expoentes racionais estão espalhadas por toda a extensão de \mathbb{R}^+ , porém, ainda existem lacunas que tais expoentes não conseguem preencher.

Para concluir essa evolução até as potências de expoentes reais, precisamos tratar das potências com expoentes irracionais, preencher, devidamente, as lacunas existentes e nos apropriar dos conhecimentos e propriedades válidas para todo o conjunto real.

Vejamos as seguintes definições.

Definição 2.16. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e L um número real. Dizemos que L é o limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou, ainda, que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para L , se para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

Para indicar que L é o limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, utilizamos a notação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Definição 2.17. Sejam $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}^+$. Definimos

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n},$$

onde $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona de racionais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$.

Mas qual o motivo de definirmos a potência de expoente irracional como o limite de uma sequência de potências de expoente racional? Intuitivamente, como chegamos a esta conclusão?

Iniciaremos com um exemplo e seguiremos, a partir daí, de uma maneira mais formal.

Durante nossa trajetória escolar, nos deparamos diversas vezes com $\sqrt{3}$, por exemplo. Nosso conhecimento, ao final do Ensino Médio, concluía que este número era irracional e, para tanto, equivalia a uma dízima não periódica, isto é, não poderia ser representado pela divisão de dois números inteiros, sendo o divisor não nulo.

E, muitas vezes, uma interessante característica dos elementos desse conjunto, do $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, não chega ao nosso raciocínio: uma tentativa de aproximação através de valores conhecidos: os racionais.

Vamos em busca de valores decimais (e, portanto, racionais) cujos quadrados se aproximem mais e mais de 3, isto é, valores que se aproximem, portanto, de $\sqrt{3}$.

Temos que $1,7^2 = 2,89 < 3$ e $1,8^2 = 3,24 > 3$, portanto,

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8.$$

Sendo assim, vamos nos aproximar de $\sqrt{3}$ com mais uma casa decimal. E mais uma. E mais uma. Como a seguir:

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74, \text{ pois } 1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733, \text{ pois } 1,732^2 = 2,999824 < 3 < 1,733^2 = 3,003289$$

$$\begin{aligned}
 1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321, \text{ pois } 1,7320^2 = 2,999824 < 3 < 1,7321^2 = 3,0001741 \\
 1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206, \text{ pois } 1,73205^2 = 2,9999972025 < 3 < 1,73206^2 = 3,0000318416 \\
 1,732050 < \sqrt{3} < 1,732051, \text{ pois } 1,73205^2 = 2,9999972025 < 3 < 1,733^2 = 3,000000666601 \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Conseguimos perceber que, a cada passagem, há uma maior aproximação do valor buscado ($\sqrt{3}$) nos dois sentidos, pelos dois extremos da desigualdade, ou seja, a sequência de racionais à esquerda é crescente e a sequência de racionais à direita é decrescente. Logo, podemos formalizar a ideia acima da seguinte maneira:

Tome um x irracional.

Sabemos que existe uma sequência de racionais que se aproximará cada vez mais do valor irracional x , sendo que $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n < \dots < x$ (ver Figura 18).

Também seria possível encontrar uma sequência decrescente ou qualquer outra caracterizada como monótona, a ideia seria análoga e usa apenas a densidade dos racionais nos reais.

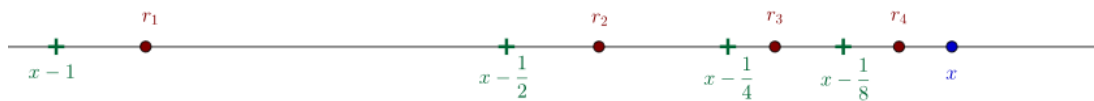


Figura 18: Sequência de racionais r_n convergente para x .

Agora, veremos a monotonicidade de uma sequência cujos expoentes são irracionais.

Proposição 2.18. *Seja $a > 0$. Se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de racionais monótona, então, $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ também é monótona.*

Podemos verificar essa proposição pela Proposição 2.15. Logo, temos que $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona.

Vamos em busca da convergência de $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$, para isso, provaremos que $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Proposição 2.19. *Seja $a > 0$. Se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de racionais limitada, então $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada.*

Demonstração. Dizer que a sequência r_n é limitada significa que existem $A, B \in \mathbb{R}^+$ tais que $A \leq r_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, pela Proposição 2.15, verificamos que se $A \leq r_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$, então $a^A \leq a^{r_n} \leq a^B$, se $a > 1$. Para $0 < a < 1$, se $A \leq r_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$, então $a^A \geq a^{r_n} \geq a^B$.

Logo, se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de racionais limitada, então $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada, $\forall a \in \mathbb{R}^+$. \square

Posto isso, em [5], no Capítulo 3, está adequadamente provado o seguinte teorema.

Teorema 2.20. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente, isto é, converge para algum número real L .*

Definição 2.21. Seja $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}^+$. Definimos

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n},$$

onde $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona limitada de racionais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$.

Para finalizar nossa definição, precisamos verificar a existência de uma possível ambiguidade: se duas sequências monótonas limitadas de números racionais convergem para x irracional, essas sequências tomadas como expoente de um a real irão convergir (ambas) para a^x ?

Em outras palavras, devemos provar a proposição a seguir. Mas antes disso, segue um lema que se faz necessário para o desenvolvimento da demonstração.

Lema 2.22. *Se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números racionais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$.*

Podemos ver a demonstração deste lema em [16].

E vamos à proposição.

Proposição 2.23. *Se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências monótonas de números racionais, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$.*

Demonstração. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

Do Lema 2.22, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(r_n - s_n)} = 1.$$

Mas

$$a^{r_n} = a^{r_n+(s_n-s_n)} = a^{(r_n-s_n)+s_n} = a^{r_n-s_n} \cdot a^{s_n}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(r_n-s_n)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$. □

Com isso mostramos que realmente podemos definir

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \text{ tal que } (r_n) \text{ é uma sequência monótona de racionais com } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

Sendo assim, formalizamos a definição de potência de expoente real.

As propriedades a seguir já foram devidamente demonstradas para potências de expoente racional. Então, apenas complementaremos a demonstração supondo expoentes irracionais e, assim, estará demonstrada para expoentes reais, em sua totalidade.

Propriedades 2.24. *Se a é um número real positivo, tal que $a \neq 1$, e $x, y \in \mathbb{R}$, então:*

(1) $a^x > 0$.

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(4) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(5) Se $a > 1$ então $a^x < 1$ para $x < 0$ e $a^x > 1$ para $x > 0$.

Se $0 < a < 1$ então $a^x > 1$ para $x < 0$ e $a^x < 1$ para $x > 0$.

(6) Se $x < y$, então:

(a) $a^x < a^y$, quando $a > 1$;

(b) $a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$.

Demonstração. Para os itens a seguir, considere $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, as sequências monótonas de racionais (r_n) e (s_n) tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = y$ e pela Definição 2.17,

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \text{ e } a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

(1) Suponha $a > 1$ para fixar as ideias.

Tome (r_n) , uma sequência de racionais crescente tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

Então, a^{r_n} é uma sequência crescente de termos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Logo, $a^x > 0$.

$$(2) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Por definição,

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

Sabemos que o produto dos limites de duas sequências reais equivale ao limite do produto desses valores. Logo,

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}).$$

Agora, pela propriedade de potências de expoente racional, temos

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + s_n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n + s_n = x + y$ e tratando-se de sequências monótonas (ambas crescentes ou ambas decrescentes), segue que

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + s_n} = a^{x+y}.$$

$$(3) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Por definição,

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}}.$$

Sabemos que o quociente dos limites de duas sequências reais equivale ao limite do quociente desses valores. Logo,

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} \right).$$

Pela propriedade de potências de expoente racional, segue que

$$\frac{a^x}{a^y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n - s_n = x - y$ e tratando-se de sequências monótonas, temos que

$$\frac{a^x}{a^y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n} = a^{x-y}.$$

(4) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Deixaremos esta demonstração a cargo do leitor.

(5) Se $a > 1$ então $a^x < 1$ para $x < 0$ e $a^x > 1$ para $x > 0$.

Se $0 < a < 1$ então $a^x > 1$ para $x < 0$ e $a^x < 1$ para $x > 0$.

Suponha $a > 1$. Tome $x < 0$ e (r_n) , uma sequência de racionais crescente tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

Note que $r_n < r, \forall n \in \mathbb{N}$, onde $r \in \mathbb{Q}$, tal que $0 < x < 1$.

Então,

$$a^{r_n} < a^r < a^0, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo Lema 2.14.

Logo,

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} < a^r < a^0 = 1.$$

Os demais casos saem de forma análoga.

(6) Se $x < y$, então:

(a) $a^x < a^y$, quando $a > 1$;

(b) $a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$. Se $x < y$, temos que $x - y < 0$.

Suponha $a > 1$.

Então, pela propriedade anterior, temos que $a^{x-y} < 1$.

Multiplicando a desigualdade por a^y , temos

$$a^x < a^y.$$

O outro caso é concluído analogamente.

□

Seguiremos para a próxima seção, tendo definido as potências de números reais, afim de caracterizar a função exponencial no domínio dos reais.

2.3 A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Como dissemos no início deste capítulo, a função exponencial modela alguns fenômenos que são incapazes de serem descritos por outro tipo de função. Definiremos com rigor, verificaremos suas principais características, demonstraremos sua caracterização e apresentaremos e caracterizaremos as funções de tipo exponencial.

Definição 2.25. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é denominada *função exponencial de base a* .

2.3.1 Propriedades das funções exponenciais

Podemos dizer, pela própria definição, que a função exponencial satisfaz todas as propriedades para potências de expoente real, citadas e demonstradas na seção anterior.

É importante ressaltar três delas, já que serão imprescindíveis para a futura caracterização. Como já foram demonstradas, iremos apenas citá-las aqui, como segue.

A função exponencial, dada pela Definição 2.25, tem as seguintes propriedades para quaisquer x e y reais:

- (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
- (2) $a^1 = a$.
- (3) É crescente para $a > 1$, isto é, $x < y \Rightarrow a^x < a^y$. É decrescente para $0 < a < 1$, ou seja, $x < y \Rightarrow a^y < a^x$.

A primeira propriedade nos diz que a função exponencial transforma somas em produtos.

Veremos mais propriedades das funções exponenciais e, de posse delas, esboçaremos seu gráfico. Começaremos pela injetividade da função.

Teorema 2.26. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é injetiva.

Demonstração. Uma função f é denominada injetiva se tomados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Suponha, primeiramente, $x_1 < x_2$. Temos que:

- (a) Se $a > 1$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- (b) Se $0 < a < 1$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Agora, tome $x_1 > x_2$. Temos que:

- (a) Se $a > 1$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$.
 (b) Se $0 < a < 1$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$

Independentemente do caso, se $x_1 \neq x_2$, então $a^{x_1} \neq a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. □

Demonstraremos, a seguir, a sobrejetividade da função exponencial.

Teorema 2.27. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Demonstração. Dizer que a função exponencial é sobrejetiva quer dizer que todo número real positivo é uma potência de a , isto é, $\forall b \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = b$.

Usando o Lema 2.10, garantimos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $a^{r_n} \in \left] b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right[$. Assim, $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$ e, portanto, vale que $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{r_n} = b$.

Vamos supor $a > 1$. O caso $0 < a < 1$ se desenvolve de forma análoga.

Escolhemos as potências de a^{r_n} de forma que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b.$$

Pelo Lema 2.10, existe s racional tal que $a^s > b$.

Teremos, então,

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b < a^s.$$

Como $a > 1$, segue que

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s.$$

Podemos, portanto, afirmar que a sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada superiormente por s .

Pelo axioma da completeza de \mathbb{R} , temos que $a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{r_n} = b$. Portanto, f é sobrejetiva. □

Corolário 2.28. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$ é bijetiva.*

Teorema 2.29. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) < \alpha, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tome o intervalo $]\alpha, \alpha + 1[$.

Do Lema 2.10, segue que $\exists r \in \mathbb{Q}$, tal que $f(x) = f(r) = a^r \in]\alpha, \alpha + 1[$. Absurdo, pois consideramos α limitante superior de f .

Logo, $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente. \square

Agora, mostraremos sua continuidade. Antes, definiremos continuidade de uma função.

Definição 2.30. Uma função f é contínua num ponto a de seu domínio quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. A função f é dita contínua quando f é contínua em cada ponto de seu domínio.

Para isso, veremos, antes, um lema dizendo que quando um determinado expoente x tende a zero, a potência x -ésima de $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ tende a 1.

Lema 2.31. $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1, a \neq 1$.

Demonstração. Vamos supor $a > 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$, tal que se $|x - 0| < \delta$ então $|a^x - a^0| < \varepsilon$.

Como $a^0 = 1$, isto é equivalente a encontrar $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então $|a^x - 1| < \varepsilon$.

Pela desigualdade de Bernoulli (Teorema C.2), temos

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon.$$

Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{a - 1}{\varepsilon}$, obtemos $a < 1 + n\varepsilon$.

E, por Bernoulli, $a < (1 + \varepsilon)^n$ o que implica $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Até aqui, temos que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Considerando um δ tal que $0 < \delta < \frac{1}{n}$, temos que $1 < a^\delta < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ e a^δ estará tão próximo de 1 quanto quisermos.

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. \square

Visto isso, passemos ao teorema.

Teorema 2.32. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é contínua.

Demonstração. Dizer que f é contínua significa dizer que f é contínua em todos os pontos do seu domínio. Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, o que garante que f é contínua em x_0 . Como x_0 é arbitrário, teremos que f é contínua.

Note que $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ é equivalente a $\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0$.

Mas

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0+(x-x_0)} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1).$$

Mas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0} \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0}(1 - 1) = 0.$$

Note que usamos o Lema 2.31 na penúltima passagem. Isto encerra a demonstração. \square

Tendo em vista as propriedades demonstradas, a representação cartesiana de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, apresenta as seguintes características:

- (1) O gráfico se encontra integralmente acima do eixo das abscissas ($y > 0$), vimos que $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nas propriedades de potências de expoente real;
- (2) Se $a > 1$, representará uma função crescente, ao passo que, se $0 < a < 1$, representará uma função decrescente;
- (3) A função corta o eixo y no ponto de ordenada 1 ($a^0 = 1, \forall a > 0$ e $a \neq 1$);

Sendo assim, terá os aspectos de um dos gráficos a seguir (Figuras 19 e 20):

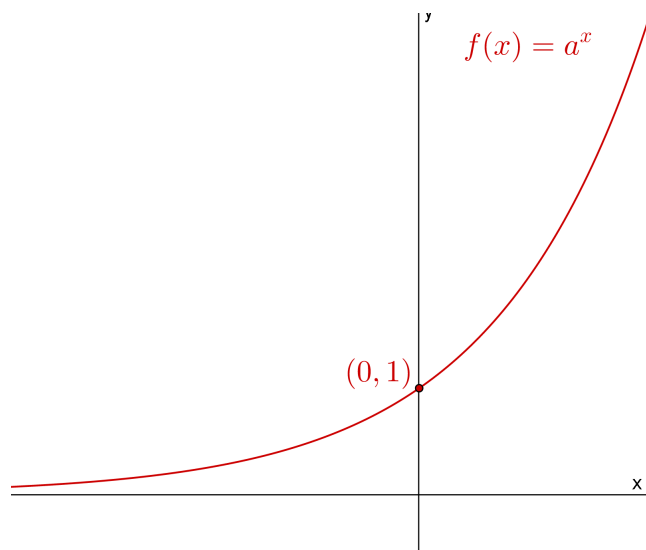


Figura 19: Gráfico de funções exponenciais, para $a > 1$.

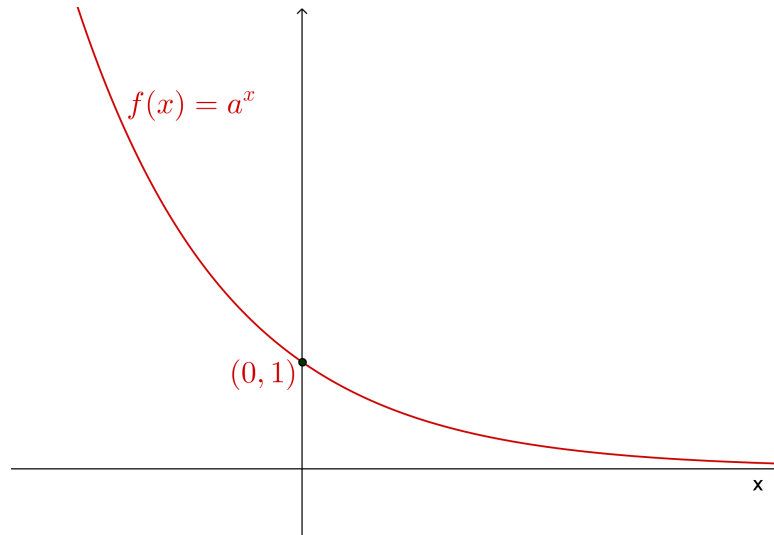


Figura 20: Gráfico de funções exponenciais, para $0 < a < 1$.

2.3.2 A função logarítmica

Segundo o Corolário 2.28, vimos que a função exponencial é bijetiva, logo, concluímos que admite inversa.

Dizer que uma função $g : A \rightarrow B$ é a *inversa* da função $f : B \rightarrow A$ significa que $g(y) = x$, onde x é tal que $f(x) = y$, para qualquer $x \in B$ e $y \in A$. Denotamos por $g(x) = f^{-1}(x)$ e $f(x) = g^{-1}(x)$.

Definição 2.33. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, nomeia-se *logaritmo de b na base a* o expoente x a que elevamos a para que a potência obtida resulte em b , ou seja, $a^x = b$, sendo $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

Definimos

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

onde a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x , o logaritmo propriamente dito.

E então, segue a definição da inversa da função exponencial.

Definição 2.34. Seja $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$ admite inversa $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \log_a x$.

Corolário 2.35. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$. Por definição de função inversa, temos que*

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a (a^x) = x.$$

Da relação fundamental dada por $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, segue

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

De fato, se $b = \log_a x$ e $c = \log_a y$, então $a^b = x$ e $a^c = y$. Logo,

$$xy = a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \text{ isto é, } \log_a(xy) = b + c = \log_a x + \log_a y.$$

Esta propriedade nos diz que a função logarítmica transforma produtos em somas.

Outra característica da função logarítmica de base a é que esta é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Vamos analisar este fato.

Proposição 2.36. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log_a x$. Temos:*

- (1) *Se $a > 1$, então g é crescente.*
- (2) *Se $0 < a < 1$, então g é decrescente.*

Demonstração. Vamos iniciar pela prova de (1).

Seja $a > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, tais que $x_1 < x_2$.

Sabemos que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Logo,

$$y_1 = \log_a x_1 \Leftrightarrow x_1 = a^{y_1} \text{ e } y_2 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_2 = a^{y_2}.$$

Como $x_1 < x_2$, então $a^{y_1} < a^{y_2}$.

Segundo o Lema 2.14, sendo $a > 1$, temos que se $a^{y_1} < a^{y_2} \Rightarrow y_1 < y_2$, ou seja, $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

A prova de (2) segue de modo análogo a que realizamos. □

De modo geral, a inversa de uma função crescente é crescente, e a inversa de uma função decrescente é decrescente.

Como $a^0 = 1$, segue que $\log_a 1 = 0$. E só números reais positivos possuem logaritmo real, já que $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Para encerrarmos esta seção, levantamos a seguinte questão: será que existe uma relação entre o gráfico dessas duas funções?

Para responder a essa pergunta, temos que lembrar que um ponto P' do plano é simétrico de um ponto $P = (x, y), P \in \mathbb{R}^2$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$), se, e somente se, $P' = (y, x)$. Sendo assim, os gráficos de duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$, tais que $g = f^{-1}$, são simétricos em relação a $y = x$.

Isso quer dizer que, ao esboçarmos o gráfico da função f em um papel translúcido e girá-lo no espaço, em torno da reta $y = x$, obtemos o gráfico da função g .

Constatamos, na prática (veja nas Figuras 21 e 22):

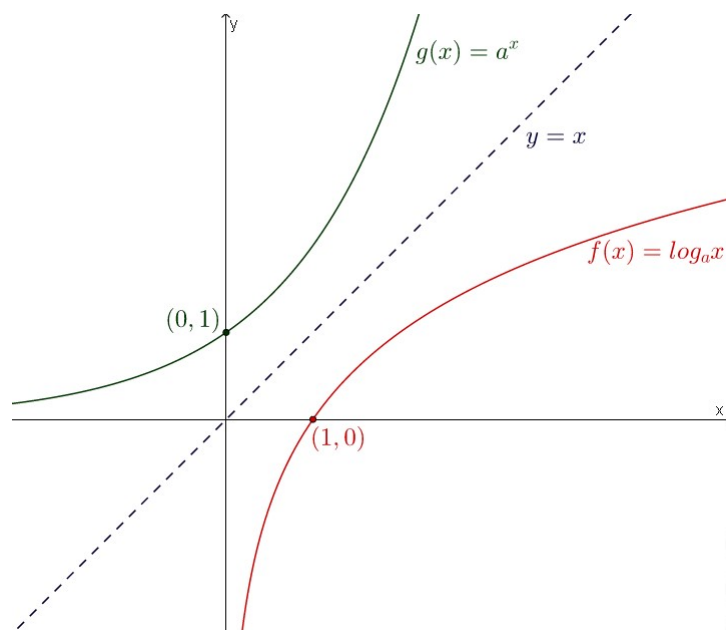


Figura 21: Gráfico de funções exponenciais e logarítmicas, para $a > 1$.

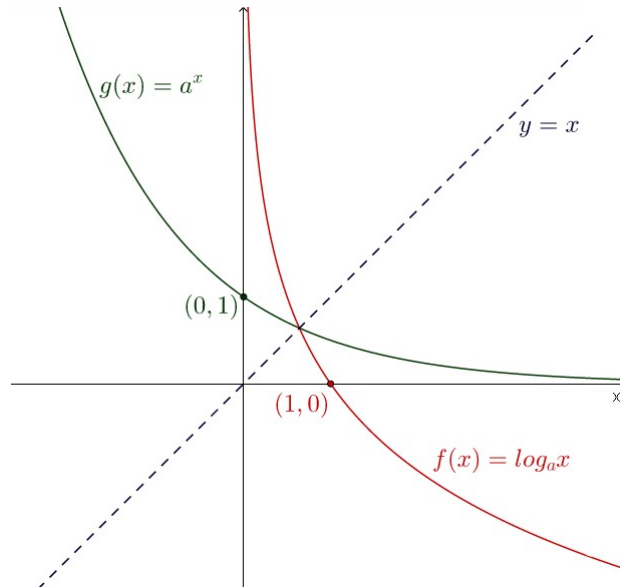


Figura 22: Gráfico de funções exponenciais e logarítmicas, para $0 < a < 1$.

Finalizamos, assim, a apresentação da função logarítmica a partir da exponencial e convidamos o leitor a acompanhar o processo contrário no próximo capítulo, onde detalharemos melhor a função logarítmica.

2.3.3 Caracterização da função exponencial

Teorema 2.37. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- (3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vamos, inicialmente, provar a implicação (1) \Rightarrow (2).

Tomando um racional $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $m = nr$. Logo,

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

e então $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Se $f(1) = a$, temos que

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Suponha, agora, f crescente. Sendo assim, $f(0) < f(1)$. Como $f(0) = 1$, temos

$$1 < a.$$

Analogamente, caso supuséssemos f decrescente, $f(0) > f(1) > 0$ e então $0 < a < 1$.

Por absurdo, vamos admitir a existência de um x_0 real tal que $f(x_0) \neq a^{x_0}$, considerando $f(x_0) < a^{x_0}$ (poderíamos supor $f(x_0) > a^{x_0}$, que seria tratado de forma análoga).

Assim, pelo Lema 2.10, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $f(x_0) < a^r < a^{x_0}$, o que equivale a $f(x_0) < f(r) < a^{x_0}$. Para f crescente, temos que $f(x_0) < f(r)$ implica $r > x_0$. Mas, $a^r < a^{x_0}$, e como $a > 1$, temos $r < x_0$: contradição. Concluimos a implicação (1) \Rightarrow (2).

Verificando a implicação (2) \Rightarrow (3):

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Temos que

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

Verificando a implicação (3) \Rightarrow (1), ou seja, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ implica $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$.

Iniciaremos por indução em n .

Seja $x \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$, é válida, pois $f(1 \cdot x) = f(x) = f(x)^1$.

Suponha que $f(nx) = f(x)^n$. Temos que:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = f(x)^n \cdot f(x) = f(x)^{n+1}.$$

Do Princípio da Indução Finita, segue que $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Temos de (3) que $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) = f(0)^2$. Como $f(0) > 0$, devemos ter $f(0) = 1$.

Logo, $f(0 \cdot x) = 1 = f(x)^0$.

Por fim, se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $-n \in \mathbb{N}$, então:

$$1 = f(0) = f(nx + (-nx)) = f(nx) \cdot f(-nx) \Rightarrow f(nx) = \frac{1}{f(-nx)}.$$

Logo,

$$f(nx) = \frac{1}{f(-nx)} = \frac{1}{f(x)^{-n}} = f(x)^n.$$

Portanto, (3) \Rightarrow (1).

Logo, (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). □

2.3.4 Funções de tipo exponencial

Definição 2.38. Sejam $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ e $b \in \mathbb{R}^+$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = b \cdot a^x$ é denominada *função de tipo exponencial*.

Uma função de tipo exponencial transforma progressões aritméticas em progressões geométricas. Vale lembrar que a recíproca também é válida para funções crescentes ou decrescentes. Vejamos.

Tome a progressão aritmética

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots),$$

de razão r , isto é, $x_{n+1} - x_n = r$.

Aplicando a função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ a cada termo desta sequência, temos

$$(ba^{x_1}, ba^{x_2}, ba^{x_3}, \dots, ba^{x_n}, \dots).$$

De $x_{n+1} - x_n = r$, segue que $x_{n+1} = x_n + r$.

Portanto, o termo geral da sequência acima pode ser escrito como

$$ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+r} = ba^{x_n} \cdot a^r.$$

Note que um determinado termo desta última sequência, exceto pelo primeiro termo, é obtido a partir do produto de seu antecessor por a^r . Ou seja, é uma progressão geométrica cuja razão é a^r .

Assim, caracterizamos a função de tipo exponencial como se segue.

Teorema 2.39 (Teorema da caracterização das funções de tipo exponencial - Primeiro teorema). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:*

(1) *f é monótona injetiva.*

(2) $\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+h)}{f(x)} - 1$ depende apenas de h , mas não de x , $\forall h, x \in \mathbb{R}$.

Assim, se $f(0) = b$ e $\frac{f(1)}{f(0)} = a$, temos que $f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$, isto é, f é de tipo exponencial.

Demonstração. Seja $b = f(0)$.

Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. Note que g é monótona injetiva.

Tome $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$.

Para $x = 0$, temos:

$$g(0) = \frac{f(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1$$

e

$$\varphi(h) = \frac{g(0+h)}{g(0)} = \frac{g(h)}{1} = g(h), \text{ ou seja, } \varphi(h) = g(h).$$

Então, de $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$, segue que

$$g(x+h) = \varphi(h) \cdot g(x) \text{ e, portanto, } g(x+h) = g(h) \cdot g(x),$$

ou seja,

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $g(x) = a^x$.

Sendo assim, $f(x) = b \cdot a^x$. □

Segundo Elon, em [6], se você tomasse um capital b e o empregasse a uma determinada taxa i de juros por um tempo s e, no momento exato do vencimento desta aplicação, você reaplicasse o montante obtido por mais um tempo, igual a t , o valor final seria exatamente o mesmo de uma aplicação realizada com o mesmo capital b , a taxa i , mas durante o tempo $s + t$.

T tecnicamente falando, a caracterização a seguir se torna explanada ao perceber que $b = b \cdot a^0 = f(b, 0)$. Isto é, b é o valor inicial da grandeza $f(b, t)$ no instante $t = 0$, t é o instante decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b, 0)$ para o valor de $f(b, t)$. Logo, iniciar com o valor b e transcorrer um tempo $s + t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b, s)$ e deixar transcorrer o tempo t .

Teorema 2.40 (Teorema da caracterização das funções de tipo exponencial - Segundo teorema). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:*

(1) $f(b, t)$ é linear em b e é monótona injetiva em t .

(2) $f(b, s + t) = f(f(b, s), t)$.

Então, $f(b, t) = b \cdot a^t$, onde $a = f(1, 1)$.

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $\varphi(t) = f(1, t)$. Note que φ é monótona injetiva e

$$\varphi(s + t) = f(1, s + t) = f(f(1, s), t),$$

por (1) e (2). Como $f(1, s) = 1 \cdot f(1, s)$, segue que

$$\varphi(s + t) = f(f(1, s), t) = f(1, s) \cdot f(1, t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t).$$

Então, pelo Teorema 2.37, φ é uma função exponencial, isto é, $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1, 1)$.

Portanto,

$$f(b, t) = b \cdot f(1, t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t.$$

□

O corolário a seguir é relevante na contextualização de aulas acerca de progressões, de acordo com [4] e [7].

Corolário 2.41. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots, y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Encerramos este capítulo, tendo nele inseridos os principais conceitos e características relativas às funções exponenciais e como a partir destas definimos as funções logarítmicas. O processo inverso, ou seja, a obtenção das funções exponenciais a partir das funções logarítmicas se encontra no próximo capítulo.

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Neste capítulo, desenvolveremos definição, consequências e principais teoremas que envolvem as funções exponencial e logarítmica, iniciando pelo conceito de função logarítmica. Se este conteúdo estiver muito bem sedimentado no docente, para o discente nascerá um mundo lógico e suas bases estarão sobre fundamentações lógicas e não apenas relativas a memorizações efêmeras. Vamos, de início, retomar a caracterização da função logarítmica e, partindo dela, definir a função exponencial.

E qual seria a importância, a real vantagem de utilizar a função logarítmica? Pelo Capítulo 1, concluímos que a ideia de logaritmo nasceu segundo uma necessidade de agilizar operações, tornando-as mais simples. No caso da função logarítmica, o objetivo era buscar a transformação de um produto em uma soma. Mas, em determinado momento, com a utilização das calculadoras, tornou-se até demodê apelar ao uso das tábuas logarítmicas continuamente.

Porém, muitos problemas são modelados através de funções logarítmicas e sua resolução é de máxima importância para a sociedade e o meio científico. Pois bem, essa será nossa motivação: reconhecer e modelar problemáticas que envolvem logaritmos. Vamos, portanto, aprofundar nossos conhecimentos sobre esta função.

3.1 DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Algumas das propriedades da função logarítmica foram demonstradas no Capítulo 2, quando definimos esta função como inversa da função exponencial. Agora, trataremos delas, segundo a definição dada nesta seção.

Definição 3.1. Uma função $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função logarítmica se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (1) L é uma função crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, ou decrescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) > L(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
- (2) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Verifiquemos algumas propriedades de uma função logarítmica, a partir da Definição 3.1.

Propriedade 3.2. $L(1) = 0$.

De fato,

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1). \text{ Logo, } L(1) = 0.$$

Propriedade 3.3. Considerando L crescente, se $y > 1$ então $L(y) > 0$. Se $0 < x < 1$, $L(x) < 0$. Para L decrescente, se $y > 1$ então $L(y) < 0$ e se $0 < x < 1$, $L(x) > 0$.

Considerando o caso de L ser crescente, temos:

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow L(x) < L(1) < L(y) \Rightarrow L(x) < 0 < L(y).$$

Já, para L decrescente, temos:

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow L(x) > L(1) > L(y) \Rightarrow L(y) < 0 < L(x).$$

Propriedade 3.4. $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

De fato,

$$0 = L(1) = L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right). \text{ Portanto, } L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Propriedade 3.5. $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Com efeito,

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) + (-L(y)) = L(x) - L(y).$$

Outra propriedade da qual usufruiremos em breve é:

Propriedade 3.6. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$, $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Vamos segmentar esta demonstração, analisando os conjuntos numéricos.

Primeiro, devemos nos lembrar de que uma das condições que caracteriza uma função logarítmica, utilizando-se do produto de dois fatores, também pode ser utilizada para a multiplicação de uma quantidade finita qualquer de fatores.

Queremos provar que

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n)$$

é válida para n fatores (n natural) e para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Verificaremos este fato pelo Princípio da Indução Finita.

Para $n = 1$, temos $L(x_1) = L(x_1)$.

Suponha verdadeira, para algum $k \in \mathbb{N}$, a igualdade

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_k).$$

Somando $L(x_{k+1})$ aos dois membros da igualdade, temos:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) + L(x_{k+1}) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_k) + L(x_{k+1}).$$

Por definição,

$$L((x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) \cdot (x_{k+1})) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_k) + L(x_{k+1}).$$

Logo,

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1}) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_k) + L(x_{k+1}).$$

Portanto, $L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$,

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = L(x) + L(x) + \dots + L(x) = n \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

é verdadeira, ou seja, a propriedade em questão vale quando $r = n$ é um número natural.

Quando $r = 0$, temos que $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$, já que $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Verifiquemos para os inteiros negativos.

Tomemos, para tanto, $r = -n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $x^n \cdot x^{-n} = 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Daí, segue que, ao aplicarmos a função logarítmica para os dois membros, teremos:

$$0 = L(1) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n}) = n \cdot L(x) + L(x^{-n}).$$

Logo,

$$L(x^{-n}) = -n \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Finalmente, consideremos $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, temos que

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Logo,

$$q \cdot L(x^r) = L((x^r)^q) = L(x^p) = p \cdot L(x).$$

Portanto,

$$L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) = r \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

3.2 OUTRAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Até aqui, apresentamos propriedades importantes para efetuar cálculos e simplificações dentro da ideia de função logarítmica.

Certamente, após internalizar essas informações, nos ocorre uma indagação: mas como seria, então, o gráfico de tal função? Como tornar plausível essa visualização?

Para construir tal representação gráfica, precisamos avaliar limites, injetividade, sobrejetividade da função etc. Vamos a algumas dessas verificações.

Proposição 3.7. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.*

Demonstração. Vamos, inicialmente, mostrar que a função não é limitada superiormente, isto é, mostraremos que para cada $\beta \in \mathbb{R}$, existe algum $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$.

Segundo a Propriedade Arquimediana (Teorema C.4), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\beta}{L(2)}$.

Logo, $n \cdot L(2) > \beta$ e, portanto, $L(2^n) > \beta$.

Tomando $x = 2^n$, temos que $L(x) > \beta$. Logo, L não é limitada superiormente.

Mostraremos, a seguir, que L também não é limitada inferiormente. Esta afirmação equivale dizer que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(y) < \alpha$.

Já que a função é ilimitada superiormente, podemos afirmar que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$, ou seja, tal que $-L(x) < \alpha$.

Como $-L(x) = L\left(\frac{1}{x}\right)$, temos que

$$L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x) < \alpha.$$

Portanto, se consideramos $y = \frac{1}{x}$, concluímos que L é ilimitada inferiormente. \square

Proposição 3.8. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $x \neq y \Rightarrow L(x) \neq L(y)$.*

Demonstração. Tomando dois valores distintos do domínio de L , x e y , temos que $x > y$ ou $x < y$.

Se admitirmos o fato de L ser crescente, temos que $L(x) < L(y)$ para o segundo caso. Analogamente, no primeiro caso segue que $L(x) > L(y)$.

Caso supuséssemos L decrescente, teríamos $L(x) > L(y)$ para o segundo caso e $L(x) < L(y)$ para o primeiro. Em qualquer um deles, $L(x) \neq L(y)$. \square

Para provar a sobrejetividade de uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ iniciaremos pelo lema a seguir, mostrando que todo intervalo real aberto $I =]u, v[$ contém pelo menos um valor $L(x)$, isto é, um elemento da imagem de L .

Lema 3.9. *Seja $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Temos que:*

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, u < v, \exists x \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } u < L(x) < v.$$

Demonstração. Considerando L crescente, como $2 > 1$, então $L(2) > L(1) = 0$. Temos também que $v - u > 0$. Podemos afirmar que existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{L(2)}{v - u}$$

pela Propriedade Arquimediana (ver Apêndice C, Teorema C.4).

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\frac{v-u}{n} > 0$, obtemos:

$$v - u > \frac{L(2)}{n}.$$

Seja $c = \frac{L(2)}{n}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, temos:

$$m \cdot c = m \cdot \frac{L(2)}{n} = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L\left(2^{\frac{m}{n}}\right).$$

Dividindo \mathbb{R} em intervalos justapostos de comprimento c , temos que existe algum $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \cdot c$ pertence ao intervalo $]u, v[$, já que o comprimento deste intervalo é maior que c (ver Figura 23).

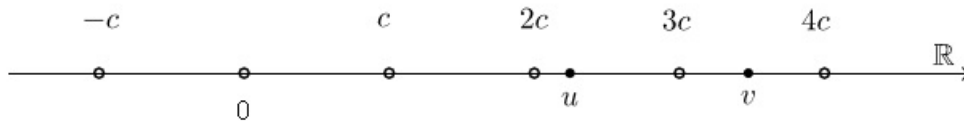


Figura 23: \mathbb{R} dividido em intervalos justapostos de comprimento c .

Fazendo $x = 2^{\frac{m}{n}}$, concluímos $L(x) = m \cdot c \in]u, v[$, isto é, $u < L(x) < v$.

Para L decrescente, bastaria considerar que como $\frac{1}{2} < 1$, então $L\left(\frac{1}{2}\right) > L(1) = 0$. Sendo $v - u > 0$, podemos afirmar que existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{L\left(\frac{1}{2}\right)}{v - u}.$$

Ao multiplicarmos ambos os membros da desigualdade por $\frac{v-u}{n} > 0$, obtemos

$$v - u > \frac{L\left(\frac{1}{2}\right)}{n}.$$

Tome $c = \frac{L\left(\frac{1}{2}\right)}{n}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, temos que

$$m \cdot c = m \cdot \frac{L\left(\frac{1}{2}\right)}{n} = \frac{m}{n} \cdot L\left(\frac{1}{2}\right) = L\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}}\right).$$

Como na situação anterior (para L crescente), dividindo \mathbb{R} em intervalos justapostos de comprimento c , temos que existe algum $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \cdot c$ pertence ao intervalo $]u, v[$, já que o comprimento deste intervalo é maior que c (Figura 23).

Finalmente, fazendo $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}}$, concluímos $L(x) = m \cdot c \in]u, v[$, isto é, $u < L(x) < v$. □

Observação 3.2.1. Considere o fato de que todo número real α admite uma representação decimal.

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definimos, agora $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \forall n \geq 0$.

Note que $\alpha_n \leq \alpha$ e $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}, \forall n \geq 0$.

Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x < \alpha$, tome n suficientemente grande tal que $\frac{1}{10^n} < \alpha - x$. Então

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Logo, $-\alpha_n < -x$, ou seja $x < \alpha_n$.

Portanto, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x < \alpha$, então existe $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n$.

Teorema 3.10. Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, isto é, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) = y$.

Demonstração. Seja $b \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(\alpha) = b$, através da composição da representação decimal de α .

Como L é ilimitada superiormente e supondo que seja crescente, pela Propriedade Arquimediana (ver Apêndice C, Teorema C.4), $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $L(k) > b$.

Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$, isto é, $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$. Da minimalidade, temos que $b \geq L(a_0)$ (ver Figura 24).

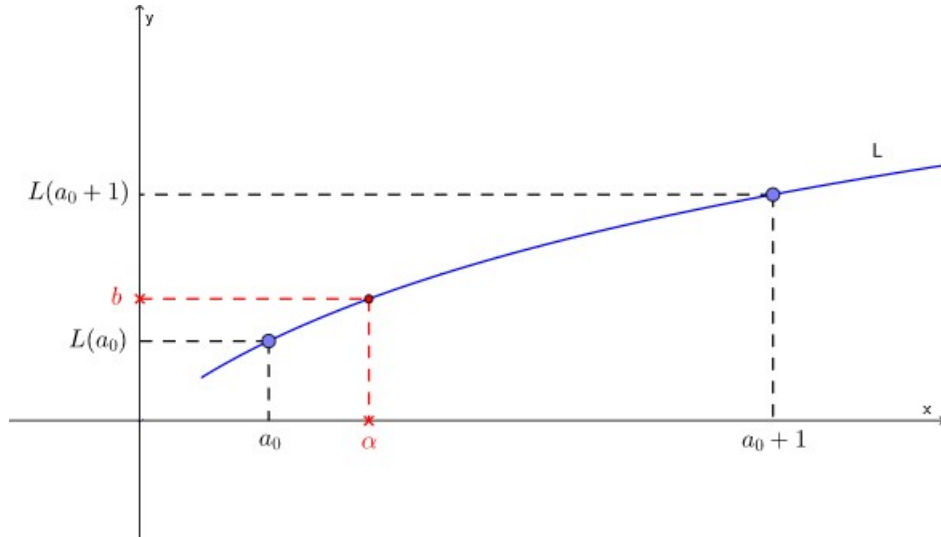


Figura 24: Função L : b pertencente ao intervalo $[L(a_0), L(a_0 + 1)[$.

Considere os números: $a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1$, extremos dos intervalos obtidos a partir da divisão do intervalo $[a_0, a_0 + 1[$ em dez partes de mesmo comprimento (ver Figura 25).

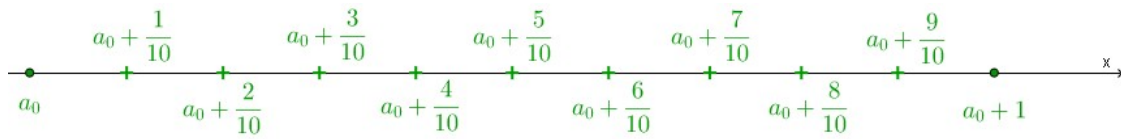


Figura 25: Intervalo $[a_0, a_0 + 1]$ dividido em dez partes iguais.

Como L é crescente e $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, deve existir $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, tal que $L(a_0 + \frac{a_1}{10}) \leq b < L(a_0 + \frac{a_1 + 1}{10})$ (ver Figura 26).

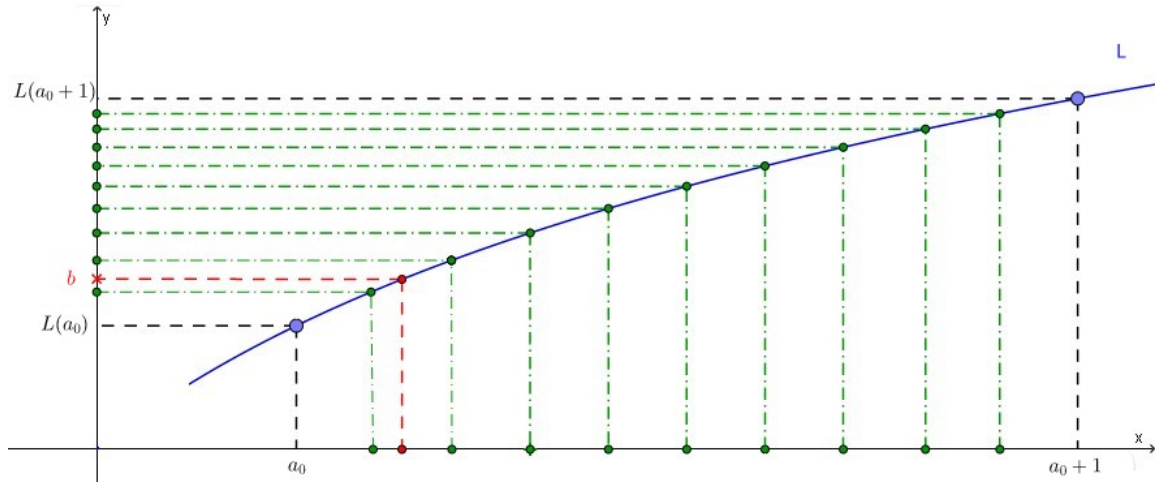


Figura 26: Correspondentes aos extremos dos dez intervalos criados pela função L .

Seja $\alpha_1 = a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$.

Temos que $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10})$.

Repetindo o processo, ou seja, dividindo o intervalo $[\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ em dez partes de mesmo comprimento, consideremos os números $\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$, extremos dos intervalos criados (ver Figura 27).

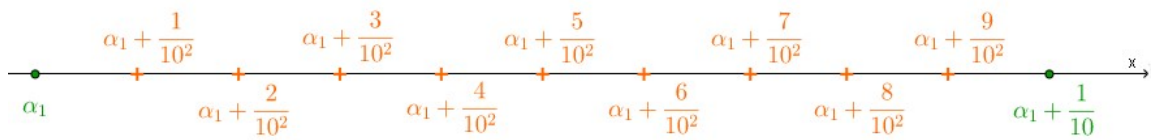


Figura 27: Intervalo $[\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ dividido em dez partes iguais.

Como L é crescente e $L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10})$, deve existir $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, tal que $L(\alpha_1 + \frac{a_2}{10^2}) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{a_2+1}{10^2})$ (ver Figura 28).

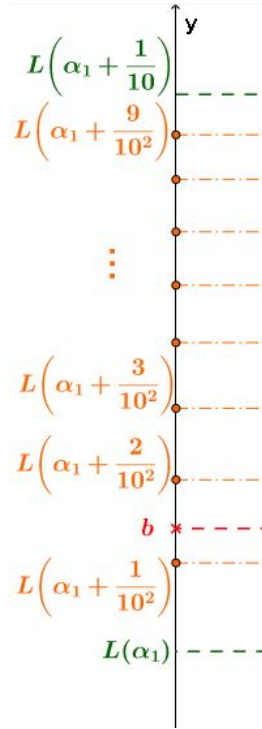


Figura 28: Correspondentes aos extremos dos dez intervalos criados pela função L .

Fazendo $\alpha_2 = a_0, a_1 a_2 = \alpha_1 + \frac{a_2}{10^2} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$, temos que $L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + \frac{1}{10^2})$.

Repetindo o processo, encontramos $\alpha_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall n \in \mathbb{N}$, tais que

$$L(\alpha_n) \leq b < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right), \tag{3.1}$$

onde $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$.

Seja $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, ou seja, o único número real dado pela representação decimal cujos truncamentos são iguais a α_n . Logo,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Afirmamos que $L(\alpha) = b$.

De fato, se $L(\alpha) < b$, do Lema 3.9, segue que $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$L(\alpha) < L(x) < b. \tag{3.2}$$

Como L é crescente, $\alpha < x$ (ver Figura 29).

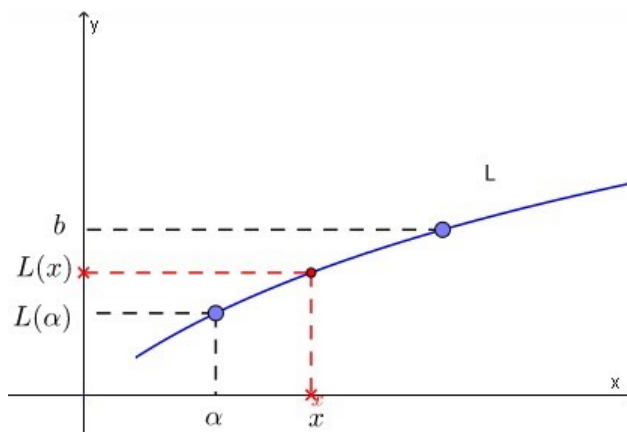


Figura 29: Relação entre b , $L(x)$ e $L(\alpha)$, supondo $L(\alpha) < b$.

Podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$, ou seja, $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$.

Logo,

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x.$$

Como L é crescente, temos que

$$L(x) > L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) > b,$$

por 3.1. Levando em conta 3.2, obtemos um absurdo.

Analogamente, se $L(\alpha) > b$, do Lema 3.9, segue que $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha). \quad (3.3)$$

Como L é crescente, $x < \alpha$ (ver figura 30).

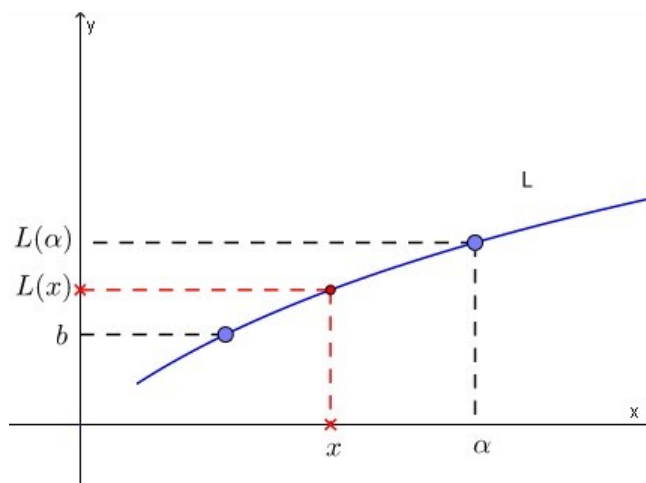


Figura 30: Relação entre b , $L(x)$ e $L(\alpha)$, supondo $L(\alpha) > b$.

Logo, $x < \alpha_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 3.2.1. Portanto, $L(x) < L(\alpha_n) \leq b$, por 3.1. Absurdo com 3.3.

Para estabelecer relações entre as grandezas b e $L(a)$, temos três alternativas: $L(a) < b$ ou $L(a) = b$ ou $L(a) > b$. Pelas conclusões acima, descartamos $L(a) < b$ e $L(a) > b$. Portanto, $L(a) = b$. O caso em que L é decrescente é tratado de maneira análoga. \square

Corolário 3.11. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva, já que é injetiva e sobrejetiva.*

Sendo bijetiva, a função L admite inversa.

3.3 RELAÇÃO ENTRE DUAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS: MUDANÇA DE BASE

Dada uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sendo esta bijetiva, podemos dizer que existe um único número $a > 0$, tal que $L(a) = 1$.

Este número a é denominado a *base* do sistema de logaritmos L . Neste caso, escrevemos $L = \log_a$.

Para estabelecermos uma relação entre dois sistemas de logaritmos de bases distintas, enunciaremos e demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante c tal que $M(x) = c \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. De início, provaremos que se existe $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$, então $L(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Seja $r \in \mathbb{Q}$. Sabe-se que $L(a^r) = r \cdot L(a)$ e $M(a^r) = r \cdot M(a)$. Logo, se $L(a) = M(a)$ então $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$.

Suponhamos, por absurdo, que para um determinado $b > 0$, tenhamos $L(b) \neq M(b)$. Isto nos abre duas possibilidades: $L(b) < M(b)$ ou $L(b) > M(b)$.

Suponhamos $L(b) < M(b)$. O outro caso é tratado de maneira análoga.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$n > \frac{L(a)}{M(b) - L(b)},$$

ou seja, tal que

$$M(b) - L(b) > \frac{L(a)}{n} = L(a^{\frac{1}{n}})$$

e façamos $c = L(a^{\frac{1}{n}})$.

Os múltiplos naturais de c dividem \mathbb{R}^+ em intervalos justapostos de comprimento c .

Como o comprimento do intervalo $]L(b), M(b)[$ é maior que c , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot c \in]L(b), M(b)[$, isto é, $L(b) < m \cdot c < M(b)$ (ver Figura 31).

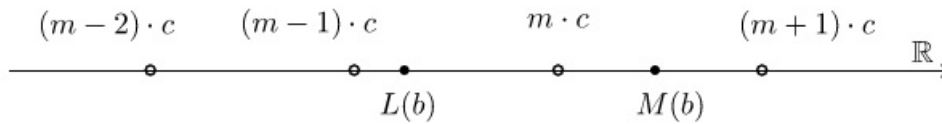


Figura 31: Localização de $L(b)$ e $M(b)$ em \mathbb{R}^+ , dividido em intervalos justapostos de comprimento c .

Mas

$$mc = mL(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}).$$

Logo,

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Considerando L uma função crescente, da primeira desigualdade vem que $b < a^{\frac{m}{n}}$. Como M também é crescente, da segunda desigualdade segue que $a^{\frac{m}{n}} < b$. Contradição.

Caso L fosse decrescente, da primeira desigualdade viria que $b > a^{\frac{m}{n}}$. M também seria decrescente, e, da segunda desigualdade teríamos $a^{\frac{m}{n}} > b$, ou seja, a mesma contradição.

Dessa contradição, segue que $L(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Vamos agora tratar do caso geral. Considere L e M funções logarítmicas quaisquer. Se ambas são crescentes e $L(1) = M(1) = 0$, temos que $L(2) > L(1) = 0$ e $M(2) > M(1) = 0$, já que $2 > 1$. Façamos $c = \frac{M(2)}{L(2)}$ e consideremos a função $N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $N(x) = c \cdot L(x)$. Note que N também é uma função logarítmica.

Temos que

$$N(2) = c \cdot L(2) = \frac{M(2)}{L(2)} \cdot L(2) = M(2).$$

Da primeira parte segue que, como $N(2) = M(2)$, $N(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$. Como $N(x) = c \cdot L(x)$, temos que $M(x) = c \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Considerando, agora, L e M funções logarítmicas decrescentes e $L(1) = M(1) = 0$, temos que $L\left(\frac{1}{2}\right) > L(1) = 0$ e $M\left(\frac{1}{2}\right) > M(1) = 0$, já que $\frac{1}{2} < 1$.

Façamos $c = \frac{M\left(\frac{1}{2}\right)}{L\left(\frac{1}{2}\right)}$ e tomemos a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $N(x) = c \cdot L(x)$.

Temos que

$$N\left(\frac{1}{2}\right) = c \cdot L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{M\left(\frac{1}{2}\right)}{L\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot L\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right).$$

Da primeira parte segue que, como $N\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right)$, então $N(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$. Como $N(x) = c \cdot L(x)$, temos que $M(x) = c \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$. \square

Logo, se L e M são funções logarítmicas de bases a e b respectivamente, temos $L(a) = M(b) = 1$. Ainda, pelo teorema visto, existe uma constante c tal que

$$M(x) = c \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Se tomarmos $x = a$, teremos $M(a) = c \cdot L(a)$. Como $L(a) = 1$ temos que $M(a) = c$.

Logo,

$$M(x) = M(a) \cdot L(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Sendo assim, podemos utilizar a relação acima para efetuar qualquer mudança de base de logaritmo.

Podemos reescrevê-la no formato $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$, que é comumente utilizado no Ensino Médio.

3.4 UM EXEMPLO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA: ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLÉ

Mas será que uma função logarítmica realmente existe? Qual sua origem?

Voltando no tempo, vamos tomar um problema que Arquimedes tentou, sem sucesso, resolver: a quadratura da hipérbole. Com contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat, a quadratura da hipérbole de Apolônio, $y = \frac{1}{x}$ só foi finalmente concluída por Gregorius de Saint-Vincent, como visto no Capítulo 1. Vamos seguir um percurso similar ao dele e desvendar, geometricamente, qual a relação deste problema com os logaritmos.

Para tanto, nosso objetivo é descobrir a área sob um ramo positivo da hipérbole, limitada por um intervalo $[a, b]$ do eixo das abscissas. Faremos isso passo a passo.

Vamos considerar no sistema cartesiano os pontos de coordenadas x (abscissa) e y (ordenada), escritos na forma (x, y) , do ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ (função que leva cada valor real positivo ao seu inverso, como vemos na Figura 32).

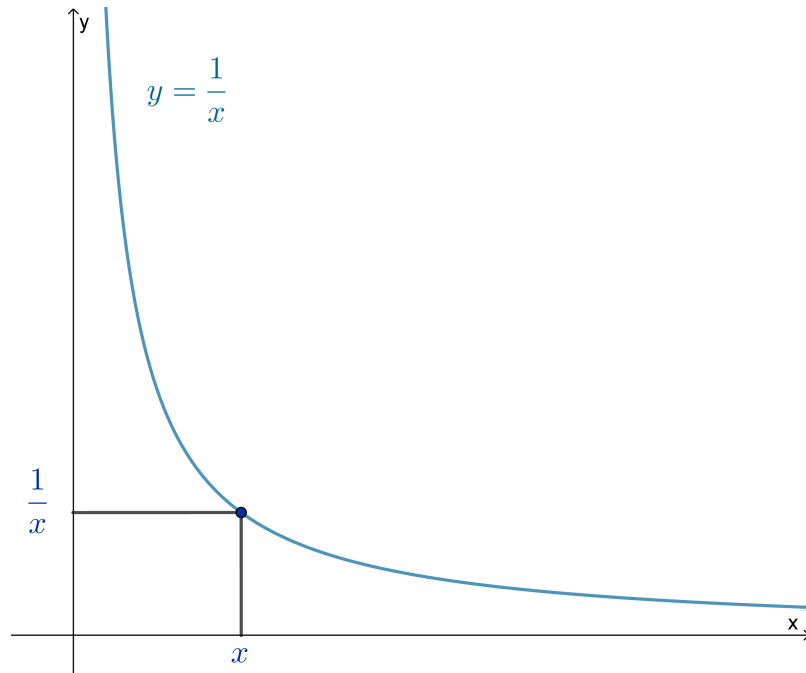


Figura 32: Ramo positivo da Hipérbole de Apolônio: $y = \frac{1}{x}$.

Chamamos de H o conjunto de pontos pertencentes a este ramo de hipérbole, ou seja:

$$H = \left\{ (x, y) : x > 0 \text{ e } y = \frac{1}{x} \right\}.$$

Nomearemos H_a^b a faixa de hipérbole determinada pelo intervalo $[a, b]$, isto é, a região do plano limitada pelo eixo Ox , pela hipérbole H e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a < b$ (ver Figura 33).

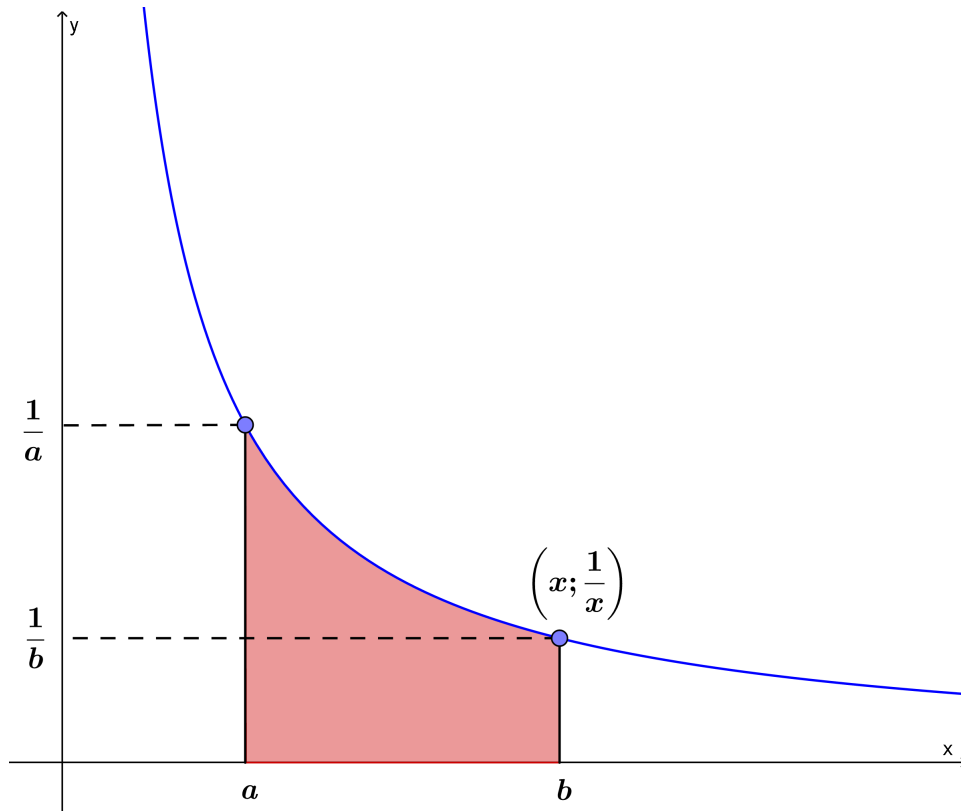


Figura 33: A região sombreada é a faixa de hipérbole H_a^b .

Os valores para as abscissas dos pontos na região hachurada são $a \leq x \leq b$ e para as ordenadas, temos $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Definimos

$$H_a^b = \left\{ (x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Como calcular a área da região H_a^b ?

Para calcular a área da região considerada, utilizaremos a "retangularização", ou seja, "criaremos" retângulos cujos vértices serão: dois pontos do eixo Ox (extremos de um intervalo $[c, d]$ considerado), um ponto da hipérbole cuja abscissa é igual a d , isto é, a altura do retângulo será igual a $\frac{1}{d}$; e, por fim, o ponto $(c, \frac{1}{d})$. Portanto, os retângulos estarão situados sob o ramo da hipérbole no intervalo designado, como mostra a Figura 34, cada um deles sendo denominado por *retângulo inscrito na faixa H_a^b* .

Unidos, formam o que chamaremos de *polígono retangular inscrito na faixa H_a^b* .

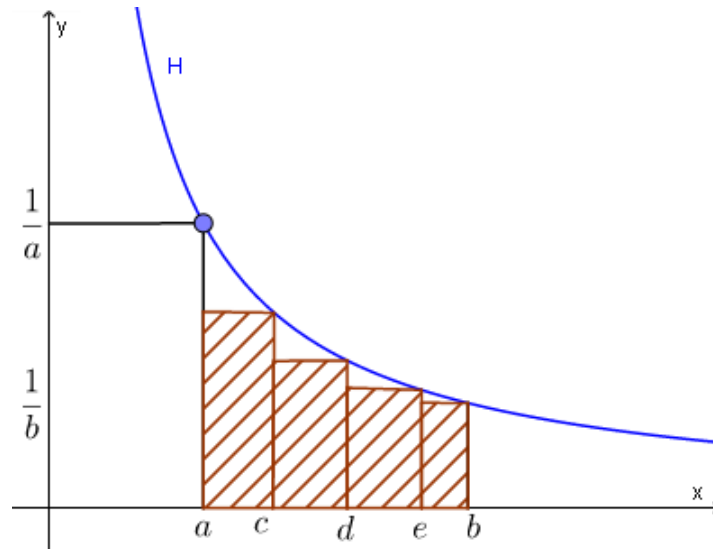


Figura 34: A área hachurada corresponde ao polígono retangular inscrito na faixa H_a^b .

Portanto a área deste polígono retangular será a soma das áreas de cada retângulo, parte integrante do mesmo.

A área da faixa H_a^b a ser calculada será tão fiel quanto maior for o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$, chamados subintervalos, e quanto menor for o comprimento destes.

Verificaremos esta informação com o exemplo a seguir.

Vamos calcular aproximações da área de H_1^2 . Iremos dividi-la, primeiramente, em quatro intervalos de mesmo comprimento e realizar o cálculo da área. Em seguida, a divisão será em dez intervalos. Veremos o comparativo dos resultados.

Representaremos por R_j^i a área do retângulo inscrito na faixa de hipérbole com base apoiada no subintervalo $[i, j]$, medindo $j - i$ e altura $\frac{1}{j}$.

O primeiro caso é mostrado na Figura 35:

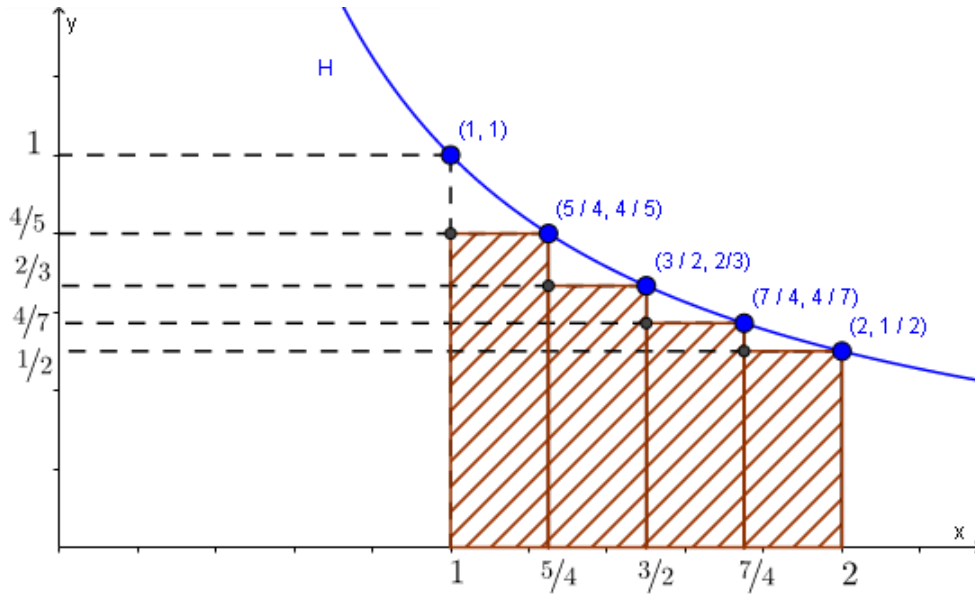


Figura 35: Uma aproximação para a área de H_1^2 .

Realizando o cálculo da área de cada retângulo, encontramos:

$$R_{\frac{5}{4}}^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$R_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$R_{\frac{7}{4}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$R_2^{\frac{7}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

A área do polígono retangular inscrito é

$$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{168 + 140 + 120 + 105}{840} = \frac{533}{840} \approx 0,63454.$$

Agora, calcularemos a área dividindo o intervalo $[1, 2]$ em 10 intervalos de mesmo comprimento, conforme a Figura 36:

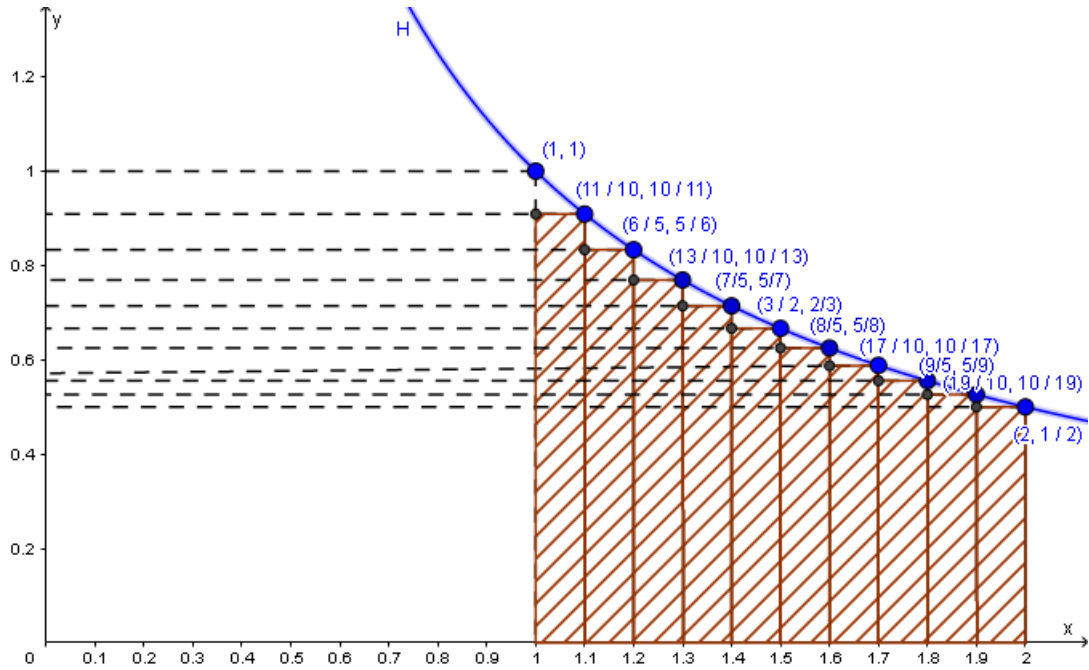


Figura 36: Uma melhor aproximação para a área de H_1^2 .

$$R_{\frac{11}{10}}^1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{1}{11}.$$

$$R_{\frac{3}{5}}^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{16}.$$

$$R_{\frac{6}{5}}^{\frac{11}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{12}.$$

$$R_{\frac{8}{10}}^{\frac{8}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{17} = \frac{1}{17}.$$

$$R_{\frac{6}{5}}^{\frac{13}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{13} = \frac{1}{13}.$$

$$R_{\frac{17}{10}}^{\frac{17}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{18}.$$

$$R_{\frac{7}{5}}^{\frac{13}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{14}.$$

$$R_{\frac{9}{10}}^{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{19} = \frac{1}{19}.$$

$$R_{\frac{7}{5}}^{\frac{7}{5}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15}.$$

$$R_{\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$$

Assim, a área deste polígono retangular inscrito será

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{21162960 + 19399380 + 17907120 + 16628040 + 15519504 + 14549535 + 13693680 + \\ &\quad + 12932920 + 12252240 + 11639628}{232792560} \\ &= \frac{155685007}{232792560} \approx 0,66877. \end{aligned}$$

A ideia é dividir em n intervalos, calcular a área do polígono e fazer n tender ao infinito. Por fim, calcular esse limite.

Concluimos, portanto:

$H_b^a \geq$ Área de qualquer polígono retangular inscrito.

A seguir, o fato mais importante acerca das áreas das faixas de hipérbole.

Proposição 3.13 (Propriedade Fundamental). $\forall k \in \mathbb{R}^+$, a área da faixa H_b^a equivale à área da faixa H_{bk}^{ak} .

Demonstração. Considere um retângulo inscrito, cuja base é o intervalo $[m, n]$ do eixo das abscissas. Sua base medirá $(n - m)$ e a medida de sua altura será igual a $\frac{1}{n}$. Logo, o cálculo da área deste retângulo se dá por:

$$(n - m) \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Agora, dado um outro retângulo inscrito, cuja base é o intervalo $[mk, nk]$ do eixo das abscissas, de base medindo $(nk - mk)$ e altura, $\frac{1}{nk}$; temos, como cálculo de sua área:

$$(nk - mk) \cdot \frac{1}{nk} = \frac{(n - m) \cdot k}{nk} = \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

De fato, as áreas dos retângulos de bases $[m, n]$ e $[mk, nk]$ são iguais, como vemos na Figura 37.

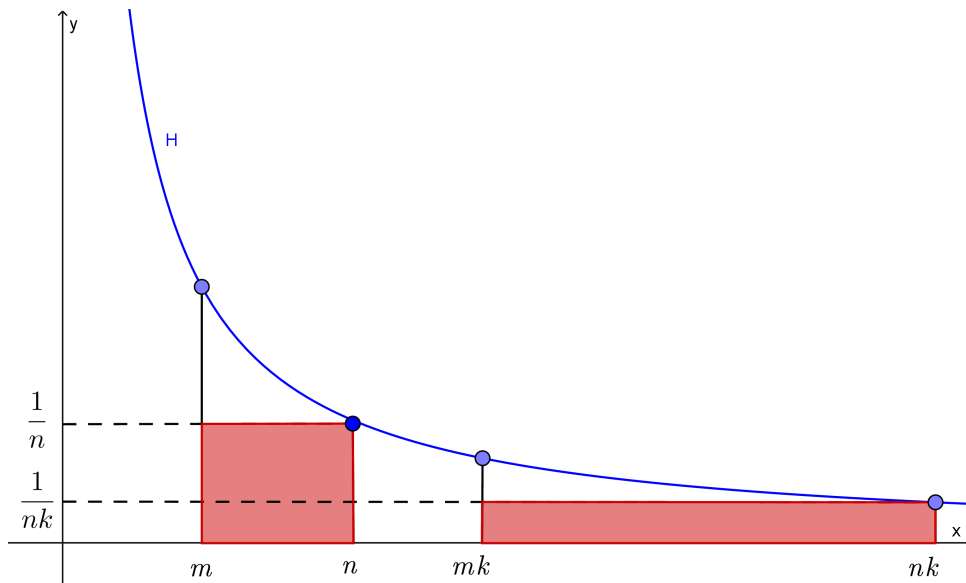


Figura 37: As áreas sombreadas são iguais.

Considerando, agora, um polígono regular P inscrito em H_a^b e multiplicando por k as abscissas de cada ponto extremo dos subintervalos de $[a, b]$, obteremos subintervalos de $[ak, bk]$, e assim um polígono retangular Q inscrito em H_{ak}^{bk} . A área de cada retângulo integrante do polígono P possuem a mesma área de seu retângulo correspondente em Q e, portanto, as áreas de P e Q são iguais (ver Figura 38).

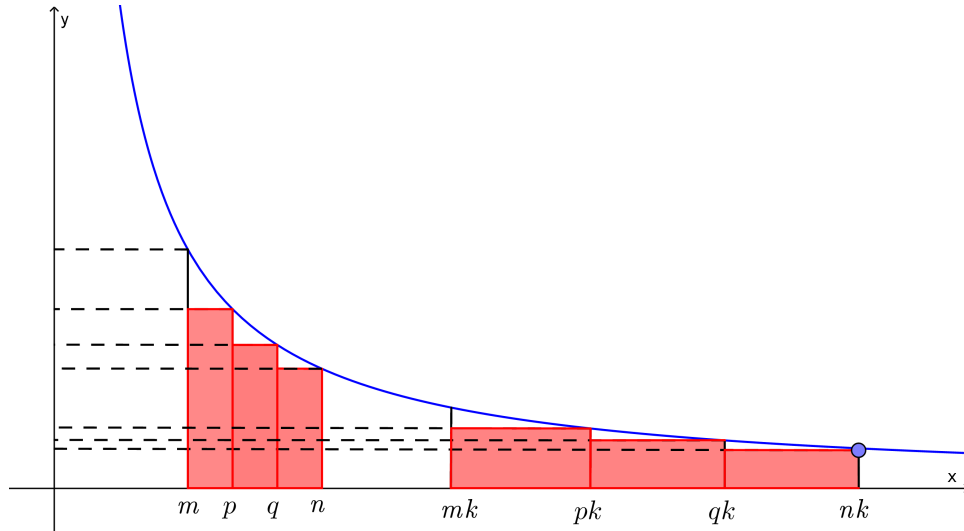


Figura 38: A soma das áreas sombreadas nos intervalos $[m, n]$ e $[mk, nk]$ são iguais.

Para cada polígono retangular inscrito em H_a^b , existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. De forma análoga, ao dividirmos as abscissas por k , para cada polígono retangular R' inscrito em H_{ak}^{bk} , existe outro R , de mesma área, inscrito em H_a^b . O fato é que, como as áreas das faixas nas quais estão inscritos os polígonos P e Q são numericamente representadas por números de mesmas aproximações inferiores, elas são iguais. \square

Através dessa ideia, podemos escrever qualquer faixa em um formato restrito: H_1^c . Por exemplo, tomando $c = \frac{b}{a}$, temos:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{b/a}) = \text{Área}(H_1^c).$$

Podemos escrever a área de uma faixa como uma soma:

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_a^c) + \text{Área}(H_c^b),$$

para $a < c < b$.

Como as áreas são ordenadas, temos que

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a),$$

para que a igualdade seja válida em todos os casos, apesar de que o fato de considerar áreas negativas e nulas contraria todos os ideais de padrão de área conquistados até então.

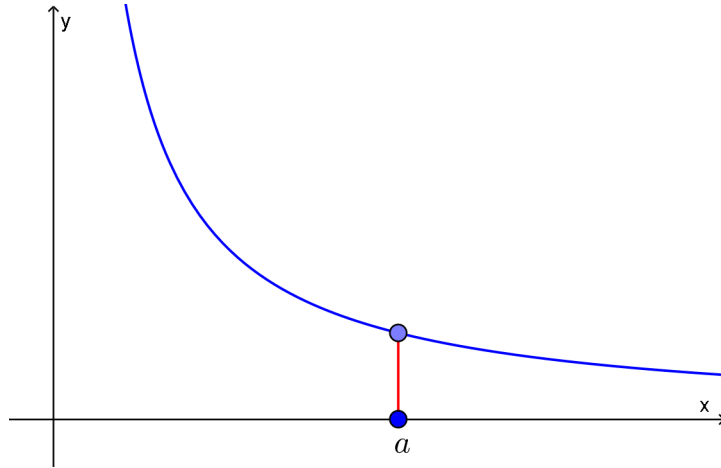


Figura 39: Neste caso, $\text{Área}(H_a^a) = 0$, pois sua representação corresponde a um segmento de reta.

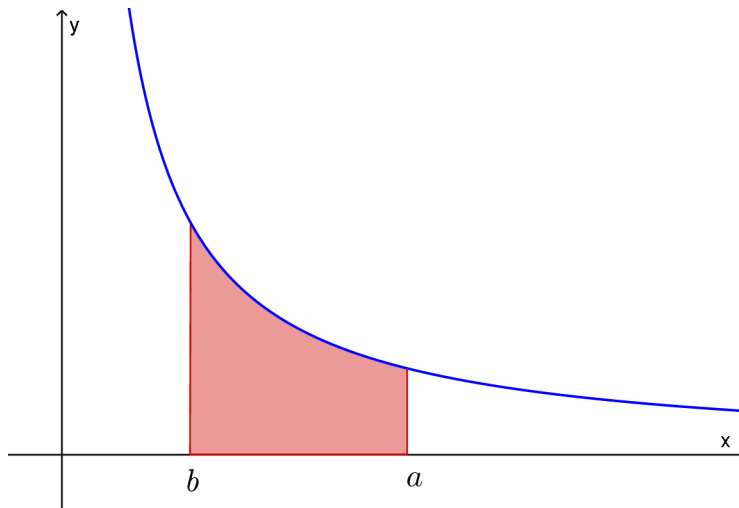


Figura 40: Neste caso, $\text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$, pois $0 < b < a$.

Note que

$$\text{Área}(H_1^{ab}) = \text{Área}(H_1^b) + \text{Área}(H_b^{ab}) = \text{Área}(H_1^b) + \text{Área}(H_1^a),$$

quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Vamos, agora, definir uma função f que associa, a cada $x > 1$, a área(H_1^x). Utilizando a consequência acima, temos que

$$f(ab) = f(a) + f(b), \text{ para todo } a > 1 \text{ e } b > 1.$$

Seria possível estender o domínio desta função para o intervalo $]0, \infty[$? Caso a resposta seja positiva, deve haver uma função g com o domínio desejado que coincida com f em $]1, \infty[$, preservando a propriedade acima até mesmo em $]0, 1[$.

Vamos em busca dessa função g , que deve, para tanto, satisfazer a propriedade fundamental. Considere $g(1) = 0$.

Se $0 < a < 1$, temos que $\frac{1}{a} > 1$. Logo,

$$\text{Área}(H_1^{\frac{1}{a}}) = \text{Área}(H_{1 \cdot a}^{\frac{1}{a}}) = \text{Área}(H_a^1).$$

Portanto,

$$0 = g(1) = g\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = g(a) + g\left(\frac{1}{a}\right).$$

Como f e g são equivalentes para $x > 1$,

$$0 = g(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = g(a) + \text{Área}(H_1^{\frac{1}{a}}) = g(a) + \text{Área}(H_a^1).$$

Então, $g(a) = -\text{Área}(H_a^1)$, para $0 < a < 1$.

Vamos, portanto, tentar definir a função g a partir das nossas observações:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \text{Área}(H_1^x), & \text{se } x > 1; \\ 0, & \text{se } x = 1; \\ -\text{Área}(H_x^1), & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Dividiremos em três casos a verificação da validade de $g(ab) = g(a) + g(b)$, para $a, b \in \mathbb{R}^+$:

1º Caso: $a > 1, b > 1$.

Neste caso, g coincide com f e, portanto, vale $g(ab) = g(a) + g(b)$.

2º Caso: $0 < a < b < 1$.

Multiplicando os membros da desigualdade acima por a , temos que $a \cdot b < a$.

Logo,

$$\text{Área}(H_{ab}^1) = \text{Área}(H_{ab}^a) + \text{Área}(H_a^1) = \text{Área}(H_b^1) + \text{Área}(H_a^1).$$

Ou seja,

$$-\text{Área} \left(H_{ab}^1 \right) = -\text{Área} \left(H_b^1 \right) - \text{Área} \left(H_a^1 \right) \text{ e portanto } g(ab) = g(a) + g(b).$$

3º Caso: $0 < a < 1 < b$.

Multiplicando as desigualdades acima por a e por b , temos, respectivamente, $0 < a^2 < a < ab$ e $0 < ab < b < b^2$. Intersectando, vem: $0 < a^2 < a < ab < b < b^2$.

Logo, $ab > 1$ ou $ab < 1$. Subdividimos:

(a) $0 < a < 1 < ab < b$.

Logo,

$$\text{Área} \left(H_1^b \right) = \text{Área} \left(H_1^{ab} \right) + \text{Área} \left(H_{ab}^b \right) = \text{Área} \left(H_1^{ab} \right) + \text{Área} \left(H_a^1 \right).$$

Portanto,

$$\text{Área} \left(H_1^{ab} \right) = \text{Área} \left(H_1^b \right) - \text{Área} \left(H_a^1 \right) \Rightarrow g(ab) = g(a) + g(b).$$

(b) $0 < a < ab < 1 < b$.

Logo,

$$\text{Área} \left(H_a^1 \right) = \text{Área} \left(H_a^{ab} \right) + \text{Área} \left(H_{ab}^1 \right) = \text{Área} \left(H_1^b \right) - \text{Área} \left(H_1^{ab} \right).$$

Portanto,

$$\text{Área} \left(H_1^{ab} \right) = -\text{Área} \left(H_a^1 \right) + \text{Área} \left(H_1^b \right) \Rightarrow g(ab) = g(a) + g(b).$$

Portanto $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g(ab) = g(a) + g(b), \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ e g é crescente. Ou seja, g é uma função logarítmica.

No que segue, g será denotada por \ln .

Definição 3.14. A função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\ln(x) = \begin{cases} \text{Área} \left(H_1^x \right), & \text{se } x > 1; \\ 0, & \text{se } x = 1; \\ -\text{Área} \left(H_x^1 \right), & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ou seja, a função $\ln x$ corresponde à área orientada sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, x]$ do eixo das abscissas, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, como vemos na Figura 41.

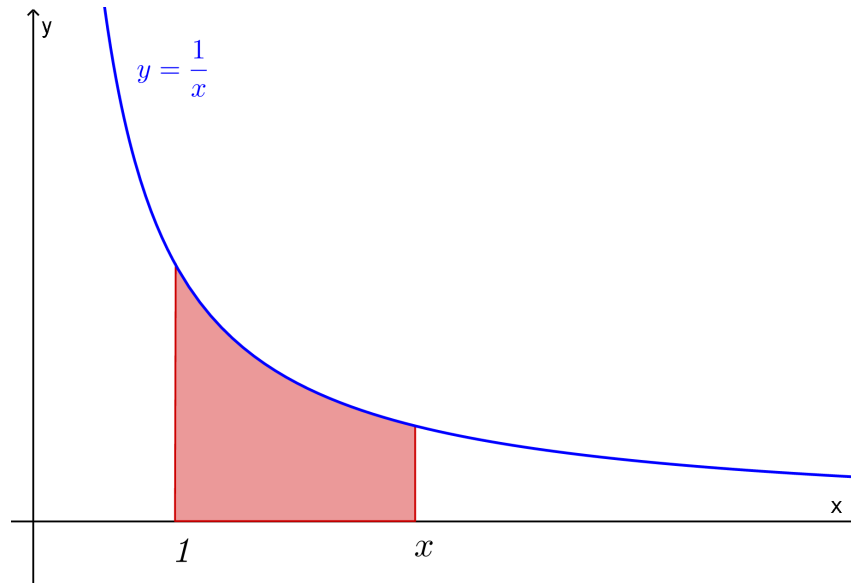


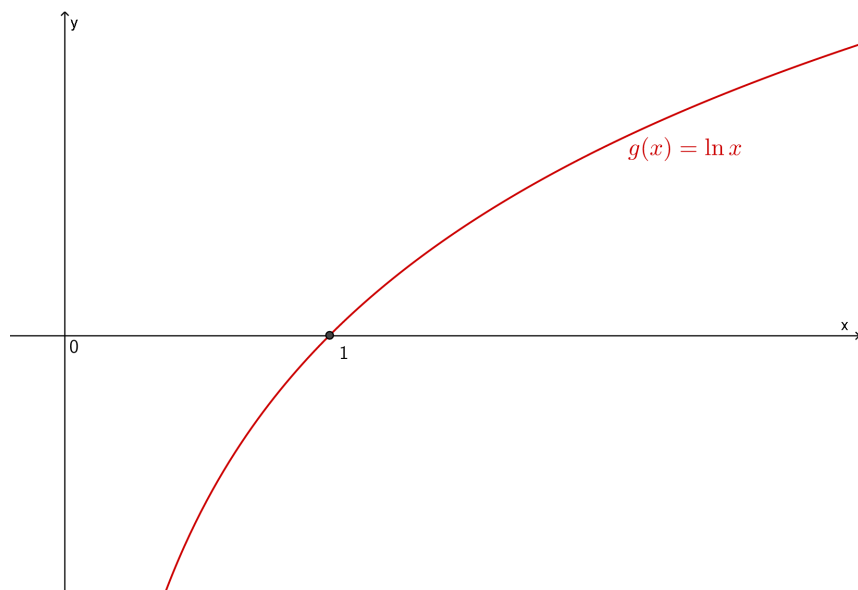
Figura 41: $\ln x$: área orientada sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, x]$ do eixo das abscissas.

Sendo assim, concluímos:

- $\ln x > 0$, se $x > 1$.
- $\ln x = 0$, se $x = 1$.
- $\ln x < 0$, se $0 < x < 1$.

Sendo uma função logarítmica, $\ln x$ satisfaz todas as propriedades enunciadas nas Seções 3.1 e 3.2.

Pelas características de uma função logarítmica, temos que o gráfico de $\ln x$ é dado pela Figura 42:

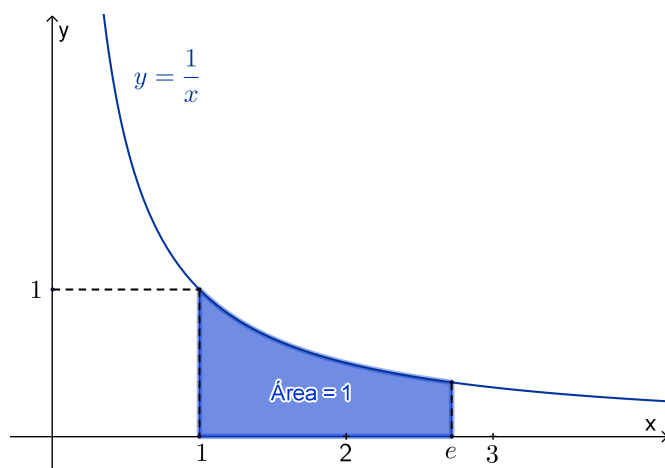
Figura 42: Gráfico da função \ln .

Falaremos um pouco mais sobre o número e na próxima subseção.

3.4.1 O número e

Definição 3.15. O número e é o único número real positivo x tal que $\ln x = 1$.

Ou seja, e é o único número real positivo tal que $\text{Área}(H_1^e) = 1$, como representado na Figura 43.

Figura 43: $\text{Área}(H_1^e) = \ln e = 1$.

É possível mostrar que e é um número irracional e pode ser aproximado por 2,718281828459045.

Vejam a validade da igualdade citada no Capítulo 1, sobre o valor de e .

Proposição 3.16. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Demonstração. Considere a Figura 44, dada a seguir:

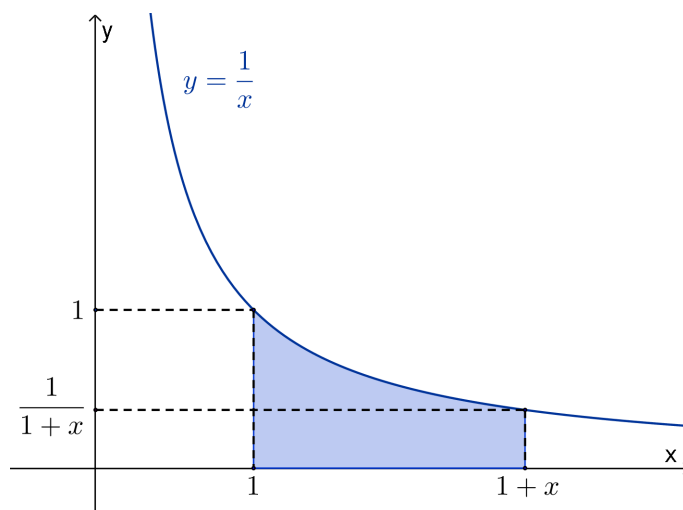


Figura 44: Área(H_1^{1+x}) = $\ln(1+x)$.

O valor da área sombreada está entre a área do retângulo menor e a área do retângulo maior, delimitados na Figura 45, a seguir.

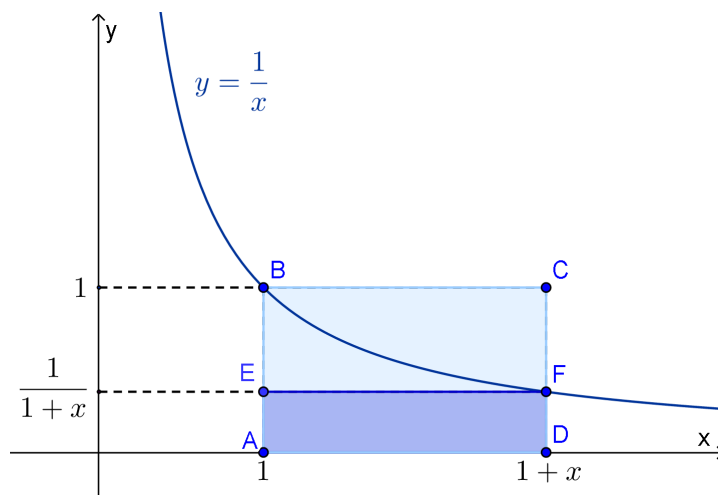


Figura 45: Áreas dos retângulos ABCD e AEFD.

O retângulo menor, AEFD, tem base medindo x e altura medindo $\frac{1}{1+x}$, portanto, sua área é dada por

$$A_1 = x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

O retângulo maior, ABCD, tem base medindo x e altura medindo 1, portanto, sua área é dada por

$$A_2 = x \cdot 1 = x.$$

A área (H_1^{1+x}) é dada por $A_3 = \ln(1+x)$.

Temos que

$$A_1 < A_3 < A_2.$$

Logo, comparando as áreas, obtemos

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo as desigualdades por x , temos:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$, temos:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}+1} < \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} < 1,$$

ou seja,

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Logo,

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo n tender ao infinito, $\frac{n}{n+1}$ converge para 1; portanto, $e^{\frac{n}{n+1}}$ converge para e . Pelo Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche, segundo [5]), temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Mas há algo no número e que nos intriga: uma relevância relativa a esse número por nós incompreendida. Qual a sua importância?

Na modelagem de situações em que o crescimento ou decréscimo de uma grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante, o número e

aparece de forma natural, inevitável e insubstituível. No Capítulo 4 veremos algumas situações.

Vejamos, agora, um exemplo retirado de [8].

Suponha, de início, que você empreste a alguém a quantia de 1 real a juros de 100% ao ano.

Passado um ano, essa pessoa lhe pagaria 2 reais: 1 real que lhe foi emprestado e 1 real de juros. Seria essa uma situação justa? Não. O correto e justo seria que lhe devolvessem e reais. Veremos o porquê a seguir.

Se o pagamento fosse efetuado seis meses após a contração da dívida, o valor devolvido seria de $1 + \frac{1}{2}$ reais. Como o dinheiro permaneceu com o devedor, à mesma taxa de 100% anual, o valor a ser pago seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

O que equivaleria a 2,25 reais, ainda assim, injusto.

Dividindo o ano em n períodos iguais, sendo n um número qualquer, o dinheiro a ser devolvido após o primeiro período de $\frac{1}{n}$ de ano seria $1 + \frac{1}{n}$ reais, passado mais um período a esse equivalente, o valor a ser pago seria igual a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ reais. Seguindo esta ideia, passados os n períodos, isto é, ao final de 1 ano, o valor a ser devolvido seria $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Na Tabela 7, dada a seguir, calculamos o valor M a ser devolvido conforme o número n estipulado.

Tabela 7: Montante de um capital unitário, rendendo por um período anual, em diferentes composições.

n	M
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Sendo assim, como podemos seguir esse modelo para todo n , justo seria se o valor devolvido fosse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ reais.}$$

3.4.2 A função exponencial

Como a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$ é logarítmica, pelo Corolário 3.11, sabemos que ela é bijetiva e, portanto, admite inversa.

Vamos em busca dessa inversa, a qual por hora, denotaremos por $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Isto significa que $\exp(y) = x$, onde $x \in \mathbb{R}^+$ é o único número tal que

$$\ln(x) = y. \quad (3.4)$$

Como $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$, vale

$$\ln(\exp(x) \cdot \exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y. \quad (3.5)$$

Mas, por 3.4, $\exp(x + y)$ é o único real $a > 0$ tal que

$$\ln a = x + y.$$

Disto e de 3.5 segue que

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Portanto,

- \exp é monótona injetiva (pois é inversa de uma função logarítmica);
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Definição 3.17. Definimos $e^x = \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Outras bases

Seja k uma constante positiva.

Considere dois pontos de abscissa a e b pertencentes ao eixo x . Denominaremos $H(k)_a^b$ a faixa da hipérbole $y = \frac{k}{x}$ limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Para $k = 1$, temos que $H(1)_a^b = H_a^b$.

Analisando um retângulo inscrito na faixa H_a^b , cuja base é $[c, d]$, um subintervalo de $[a, b]$, temos que sua altura é igual a $\frac{1}{d}$ e, conseqüentemente, sua área igual a $R_c^d = \frac{|d - c|}{d}$.

Um retângulo de mesma base inscrito na faixa $H(k)_a^b$, tem altura igual a $\frac{k}{d}$ e, portanto, sua área é igual $R(k)_c^d = k \cdot \frac{|d - c|}{d}$. Sendo assim, a área desse último é igual a k vezes a área do primeiro.

Em todo subintervalo de $[a, b]$, estão determinados dois polígonos retangulares: um inscrito na faixa H_a^b e outro, na faixa $H(k)_a^b$. Pelo raciocínio anterior, temos que a área do segundo é igual a k vezes a área do primeiro.

Daí, segue que

$$\text{Área de } H(k)_a^b = k \cdot \text{Área de } H_a^b.$$

Fixado $k > 0$, definimos

$$\log x = \text{Área de } H(k)_1^x,$$

para cada $x > 0$.

Pela conclusão anterior, segue que

$$\log x = k \cdot \ln x.$$

Esse novo sistema de logaritmos possui base a , onde a é tal que $\log_a a = 1$, sendo denotado por $\log_a x$. Assim, a base a caracteriza-se por $k \cdot \ln a = 1$, isto é

$$k = \frac{1}{\ln a} \text{ ou, ainda, } a = e^{\frac{1}{k}}.$$

Pela definição dada, a área da faixa da hipérbole $y = \frac{1}{x \ln a}$ compreendida entre 1 e x é dada por $\log_a x$ ou, simplesmente,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \text{ sendo } a > 1 \text{ e } \log_a a = 1.$$

Usamos esta relação para definir $\log_a(x)$ quando $0 < a < 1$.

Note que, para cada $a > 0$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Assim como fizemos anteriormente, utilizamos a inversa de \log_a para definir a função exponencial de base a , $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $\exp_a(y) = x$, onde x é tal que $y = \log_a(x)$.

Como $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, temos que $y \cdot \ln a = \ln x$.

Com base nisso, definimos:

Definição 3.18. Sejam $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \cdot \ln a$.

APLICAÇÕES

As propostas pedagógicas oficiais pesquisadas e relacionadas ao estudo de funções exponenciais e logarítmicas enfatizam a importância da compreensão e aplicação destes conteúdos em situações cotidianas.¹ Para isso, é importante que o aluno aprenda a modelar problemas de forma que perceba que alguns deles são perfeitamente representados por essas funções. Vale lembrar que as funções exponenciais representam fenômenos nos quais um pequeno aumento no valor da variável independente provoca um acentuado aumento na variável dependente e as funções logarítmicas, fenômenos em que um grande aumento na variável independente produz um pequeno aumento na variável dependente.

O objetivo deste capítulo é analisar e iniciar a modelagem de fenômenos através de funções exponenciais e logarítmicas. Abordaremos alguns fenômenos que têm seu comportamento fielmente representado por funções exponenciais e logarítmicas, suas modelagens e alguns comentários considerados relevantes na escolha da função que os descreve.

1 A BNCC (Base Nacional Comum Curricular), segundo [2], é um documento normativo para as redes de ensino, tanto pública, quanto particular, que atua como referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para o ensino básico. Tem como objetivo assegurar o desenvolvimento de competências gerais e específicas de cada disciplina nos estudantes. Na Matemática, destacamos algumas habilidades a serem trabalhadas que se relacionam com o tema do nosso trabalho: resolver e elaborar problemas com funções exponenciais e logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, matemática financeira, entre outros; analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais de cada função.

4.1 CARBONO-14

Os átomos de uma substância ou elemento químico denominado radioativo passam por um processo natural ou artificial de desintegração, emitindo radiações, as quais têm a propriedade de impressionar placas fotográficas, ionizar gases, produzir fluorescência e atravessar corpos opacos à luz. As radiações emitidas pelas substâncias radioativas são principalmente partículas alfa, partículas beta e raios gama. Lançadas essas partículas, sua massa original se reduz, aumentando, conseqüentemente, a massa de uma substância originada, já não considerada radioativa. Essa perda de partículas se dá pela instabilidade de seus núcleos. A radioatividade foi observada pela primeira vez pelo francês Henri Becquerel, em 1896, enquanto trabalhava em materiais fosforescentes.

A quantidade de massa desintegrada de um dado elemento radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo em um dado momento. Denotamos por α a constante de proporcionalidade obtida através de experimentos, sendo que cada elemento radioativo possui uma particular constante de desintegração α .

O *carbono-14*, representado por C^{14} , também conhecido por *radiocarbono*, é um isótopo radioativo natural do elemento carbono, recebendo esta numeração porque apresenta número de massa 14 (6 prótons e 8 nêutrons). Este isótopo apresenta dois nêutrons a mais no seu núcleo que o isótopo estável carbono-12. Ele é formado na estratosfera terrestre, quando nêutrons de raios cósmicos bombardeiam o nitrogênio-14 presente nessas camadas superiores da atmosfera, conforme Figura 46:

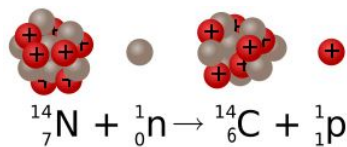


Figura 46: Formação do carbono-14.

O carbono-14 entra no ciclo natural do carbono, pois é reagente com oxigênio do ar, e forma o gás carbônico (CO_2), que é incorporado por todos os seres vegetais e animais. Os vegetais, durante a fotossíntese, absorvem o gás carbônico formado pelo carbono-14. Já os humanos e animais herbívoros, alimentando-se dessas plantas, incorporam o carbono-14, acontecendo o mesmo com os carnívoros, que se alimentam dos animais herbívoros. Resultado: o carbono-14 é assimilado por todos os seres vivos, de todos os níveis tróficos.

A quantidade de carbono-14 presente na atmosfera é constante, sendo igual a cerca de 14 dpm/g (desintegrações por minuto por grama), já que a velocidade com que esse elemento é formado é igual à da sua desintegração.

Os seres vivos absorvem o carbono-14 ao longo de toda a sua vida, e assim, sua concentração vai aumentando até que se estabelece o equilíbrio acima mencionado e a quantidade, em massa, de carbono-14 se torna igual à presente na atmosfera. Em cada espécie, a taxa desse isótopo também se mantém constante. No entanto, quando o organismo morre, o carbono-14 tem sua absorção interrompida e, a partir daí, passa apenas pelo processo de desintegração contínua. Este é o motivo pelo qual torna-se possível determinar a idade de um fóssil ou objeto muito antigo, pela comparação da quantidade do elemento dessas antigas amostras com a quantidade existente em organismos correlatos, na atualidade. Esse cálculo é realizado utilizando-se a informação sobre a meia-vida do carbono-14: 5500 anos, segundo [8].

Seja M_0 a massa inicial do elemento quando iniciada a observação, $M(t)$ a quantidade remanescente do elemento decorrido um período t do instante inicial de observação e α a constante de desintegração relacionada ao elemento estudado (sendo, no caso do carbono-14, $\alpha = \frac{\ln 2}{5500}$), temos:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Mas como chegamos a esta conclusão?

A desintegração radioativa se encaixa no modelo exponencial pelo seguinte fato. No caso do carbono-14, vamos supor que, inicialmente, assim que o organismo morre, possui uma massa n mg de carbono-14. Durante o período de 5500 anos ele perderá $\frac{n}{2}$ mg. No próximo período de 5500 anos ele perderá $\frac{n}{4}$ mg. E no período seguinte a esse, $\frac{n}{8}$ mg. Isto é, a cada período de 5500 anos, não há perda de uma massa fixa de carbono-14: o corpo perde metade da massa que foi eliminada no período anterior, ou ainda, metade da massa restante ao final do período anterior. Mas, em todos os períodos, sem exceção, a perda equivale a 50% da massa que iniciou o período vigente. Ou seja, a variação relativa da massa de carbono-14 é constante, o que explica a escolha da função exponencial como representante do fenômeno.

Vamos à modelagem do fenômeno.

Analisando a massa de carbono-14 no instante inicial, após o período de uma meia vida e decorrido o período de duas meias-vidas, temos, respectivamente:

- $M(0) = M_0$;

- $M(5500) = M_0 \cdot \frac{1}{2}$;
- $M(11000) = (M_0 \cdot \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^2$.

A cada 5500 (anos) somados a t , a massa $M(t)$ fica multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Analisando por número de ciclos de meia-vida, reescrevemos:

- $M(0) = M(0 \cdot 5500) = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^0$;
- $M(5500) = M(1 \cdot 5500) = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^1$;
- $M(11000) = M(2 \cdot 5500) = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^2$.

Tomando a evolução da desintegração do carbono-14 ou de qualquer elemento radioativo, a massa $M(t)$ é o resultado da desintegração da massa M_0 (massa no instante $t = 0$) tendo decorrido o tempo t , isto é, $M(M_0, t)$. A quantidade de matéria que se desintegra de um corpo em um dado momento é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de desintegração denotada por α indica que a variação relativa é a mesma no momento inicial ou num determinado instante s .

Temos que $M(M(M_0, s), t) = M(M_0, s + t)$, ou ainda, se observarmos a desintegração do elemento após um instante s e realizarmos uma nova observação decorrido um tempo t , imediatamente posterior a s , teríamos o mesmo resultado do que uma única observação da desintegração após o instante $s + t$. Pelo Teorema 2.40, temos que

$$M(t) = M(M_0, t) = M_0 \cdot a^t,$$

sendo $a = M(1, 1)$.

Modelando o fenômeno por uma função exponencial e tomando por t o período equivalente à meia-vida do elemento, neste caso 5500 anos ($t = m \cdot 5500$, $m \in \mathbb{R}^+$), generalizamos:

$$M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}}.$$

Realizando uma mudança para a base e no fator que multiplica a massa inicial do elemento, ou seja, em $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}}$:

$$\begin{aligned} x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}} &\Rightarrow x = (2^{-1})^{\frac{t}{5500}} \Rightarrow \ln x = \ln(2^{-\frac{t}{5500}}) \\ &\Rightarrow \ln x = -\frac{t}{5500} \cdot \ln 2 \Rightarrow x = e^{-\frac{\ln 2}{5500} \cdot t}. \end{aligned}$$

Retornando à função:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5500} \cdot t}.$$

Fazendo $\alpha = \frac{\ln 2}{5500}$, obtemos:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}. \quad (4.1)$$

Para qualquer outro elemento desintegrante, a alteração na função se dará em α (constante de desintegração, como já citado), de acordo com a meia vida do elemento. Para uma meia vida de n anos ($n \in \mathbb{R}^+$), $\alpha = \frac{\ln 2}{n}$.

Segue um exemplo histórico que utilizou a datação do carbono-14 para a determinação de um documento de grande influência em descobertas e já foi utilizado em diversas questões de avaliações, para diferentes finalidades.

Em 1947, um pastor chamado Mohamed Adh-Dhib perdeu uma cabra, que fugiu subindo um conjunto de rochas escarpadas, na região montanhosa e árida de Hirbet Qumran, no deserto da Judeia, onde, para uma parcela considerável dos pesquisadores, foi habitação de um grupo que poderia ser identificado como os essênios. Após procurar a cabra, sem êxito, Adh-Dhib sentou-se para descansar e acabou descobrindo uma caverna estreita de onde, no dia seguinte, com a ajuda de um amigo, retirou um conjunto de pergaminhos, alguns em estado fragmentário, de vasos longos e cilíndricos, que continham escritos bíblicos.

Willard Libby, que recebeu o prêmio Nobel da Química em 1960, comprovou, usando a datação do carbono-14, que esses pergaminhos não só continham fragmentos de quase todos os livros do Velho Testamento, mas datavam da época de Cristo, e são conhecidos hoje como Manuscritos do Mar Morto. Libby constatou, nos pergaminhos, a atividade do isótopo radioativo em 11 dpm/g. Utilizando a expressão (4.1), substituindo M_0 por 14 dpm/g (a mesma encontrada na atmosfera), $M(t)$ por 11 dpm/g e fazendo $\alpha = \frac{\ln 2}{5500}$, temos:

$$\begin{aligned} 11 &= 14 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5500} \cdot t} \Rightarrow \frac{11}{14} = e^{-\frac{\ln 2}{5500} \cdot t} \Rightarrow \ln\left(\frac{11}{14}\right) = \ln e^{-\frac{\ln 2}{5500} \cdot t} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{11}{14}\right) &= -\frac{\ln 2}{5500} \cdot t \cdot \ln e \Rightarrow \ln 1,1 - \ln 1,4 = -\frac{\ln 2}{5500} \cdot t \cdot 1. \end{aligned}$$

Pela Tabela 10 de logaritmos naturais do Apêndice A, temos:

$$\begin{aligned} 0,0953 - 0,3365 &= -\frac{0,6931}{5500} \cdot t \\ -0,2412 \cdot 5500 &= -0,6931 \cdot t \\ t &\approx 1914. \end{aligned}$$

Ficou provado, então, que os manuscritos encontrados datam, realmente, da época em que viveu Cristo. Atualmente, os manuscritos encontrados em Qumran estão guardados no Santuário do Livro, uma ala do Museu de Israel, em Jerusalém.

Outra questão que envolve datação através do carbono-14 é a idade do Sudário de Turim, manto de linho que tem marcas que constituem uma imagem correspondente a de um ser humano que sofreu um processo de crucificação. Alguns acreditam que seja o lençol que recobriu o corpo de Jesus, após sua crucificação e morte. A peça sofreu muitas intempéries até se fixar na Catedral de Turim, na Itália, desde o século XIV. Com marcas de líquidos e bordas chamuscadas, após ser retirado de um local incendiado, o tecido intriga pesquisadores que, ao analisarem amostras do tecido, constataram não datar da época de Jesus, mas não afirmam isto com certeza, já que as amostras podem ter sido adulteradas pelos incidentes sofridos.

4.2 CONCENTRAÇÃO DE CLORO NA PISCINA

Vamos utilizar aqui um exemplo estudado em [8].

Problema 2. Uma piscina tem capacidade para $100m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900g de cloro na piscina.

- (a) Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?
- (b) E após meia hora da aplicação?
- (c) E após t horas?

Normalmente, a resposta do primeiro item é dada imediatamente pelo interlocutor, porém de forma errônea. Tomando a situação como expressa por uma função afim, o raciocínio primeiro diz que se, em uma hora, um décimo do cloro adicionado é eliminado, o processo de eliminação será completado em 10h. O pressuposto assumido é o seguinte: a eliminação do cloro se dá a uma taxa constante.

A modelagem deste fenômeno não é feita por uma função afim, em que a variação da grandeza em cada intervalo de uma hora é sempre a mesma. Portanto, a linha de raciocínio a ser seguida é bem diferente. "Discretizando" o problema, vamos imaginar

que em um dado instante é acrescentada água limpa na piscina. Esta se mistura à água clorada e, assim, a concentração de cloro é alterada antes da saída de uma nova quantidade de água clorada.

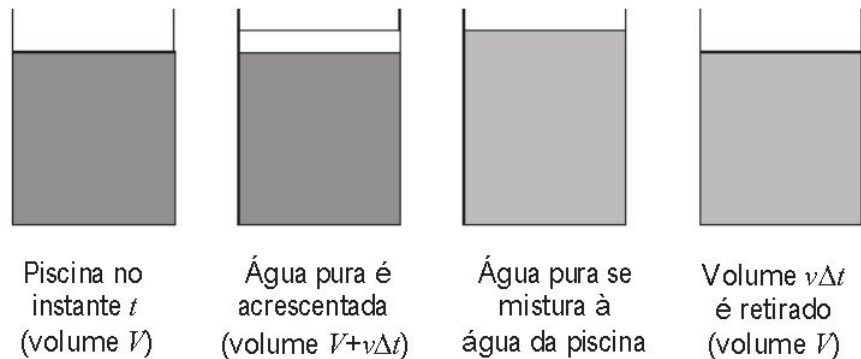


Figura 47: Esquema de entrada e saída de água clorada da piscina.

Vamos detalhar esse raciocínio, analisando os quatro estágios da Figura 47 segundo a quantidade de cloro, a qual denotaremos por $C(t)$:

- (1) A massa de cloro está distribuída de forma homogênea no volume V de água.
- (2) Ingresso de uma quantidade $q = v\Delta t$ de água pura na piscina, onde v é a vazão.
- (3) A massa de cloro existente não é alterada, porém sua concentração muda, já que o volume em que está diluída passa de V para $V + v\Delta t$, criando-se uma nova mistura homogênea, de concentração menor que a inicial.
- (4) O volume V inicial é restabelecido após a saída de uma quantidade $q = v\Delta t$ da nova mistura. A quantidade de cloro que restou na piscina é proporcional ao volume restante, como mostrado a seguir.

No terceiro estágio, ainda temos uma massa $C(t)$ de cloro para um volume $V + v\Delta t$ de mistura. No quarto estágio, o volume volta a ser V e a massa de cloro passa a ser dada por

$$C(t + \Delta t) = C(t) \frac{V}{V + v\Delta t},$$

restando na piscina uma porcentagem da mistura inicial $\left(\frac{V}{V+v\Delta t}\right)$, que é constante para cada intervalo de comprimento Δt .

Percebemos daí uma proporcionalidade entre o cloro vazado e o cloro que permanece na piscina.

A variação de cloro é dada por:

$$C(t + \Delta t) - C(t) = C(t) \frac{V}{V + v\Delta t} - C(t) = \frac{C(t)V - C(t)V - C(t)v\Delta t}{V + v\Delta t} = -C(t) \frac{v\Delta t}{V + v\Delta t}$$

e, portanto, é proporcional à quantidade de cloro existente no início do intervalo. Dividindo esta expressão por $C(t)$, determinamos a variação relativa:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{C(t)} = \frac{-C(t) \frac{v\Delta t}{V + v\Delta t}}{C(t)} = -\frac{v\Delta t}{V + v\Delta t},$$

que é constante e independe de t , dependendo apenas de Δt .

Pelas informações do problema, $C(0) = 1000$, $C(t)$ dado em gramas. Isto é, no início do problema ($t=0$), havia 1 kg = 1000g de cloro. Após uma hora ($t=1$), a massa remanescente é de 900g ($C(1) = 900$).

Dado este fato e que $C(t)$ é decrescente, pelo Teorema 2.39, temos que C é de tipo exponencial, ou seja, $C(t) = ba^t$, sendo $b = C(0) = 1000$ e $a = \frac{C(1)}{C(0)} = \frac{900}{1000} = 0,9$. Logo, para t em horas, temos:

$$C(t) = 1000 \cdot 0,9^t.$$

Sendo assim, vamos à resolução do Problema 2 enunciado no início desta seção.

Solução.

(a) A quantidade de cloro restante na piscina após 10 horas de sua colocação é dada por:

$$C(10) = 1000 \cdot 0,9^{10} = 1000 \cdot 0,3486784401 \approx 348,7.$$

Teremos, portanto, ao final de 10 horas, aproximadamente 348,7 gramas de cloro.

(b) Após meia hora de aplicação, $t = 0,5$ e, portanto,

$$C(0,5) = 1000 \cdot 0,9^{0,5} = 1000 \cdot \sqrt{0,9} = 1000 \cdot 0,948683 \approx 948,7.$$

Isto é, após meia hora da aplicação, a quantidade de cloro fica reduzida a aproximadamente 948,7 gramas.

(c) Após t horas, o representante da quantidade de cloro é a própria função:

$$C(t) = 1000 \cdot 0,9^t.$$

4.3 PERDA DE TEMPERATURA PARA O MEIO OU RESFRIAMENTO DE UM CORPO

Considere um fenômeno que ocorre em um meio de temperatura constante, isto é, que possui massa suficiente para não sofrer variação de temperatura quando nele é inserido um corpo com temperatura superior.

A *lei de resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições, "a quantidade de calor que flui de um corpo com temperatura mais alta para outro com temperatura mais baixa varia conforme a diferença de temperatura".

Em outras palavras, a diferença de temperatura entre o corpo inserido e o meio que o acolhe, denotada por T , diminui com uma taxa de variação proporcional a ela mesma.

Sendo $T(t)$ a diferença de temperatura entre o corpo inserido e o meio de inserção num instante t qualquer e T_0 a diferença de temperatura inicial, isto é, a diferença entre a temperatura constante do meio e a temperatura do corpo no início do experimento ($t = 0$), temos:

$$T(t) = T_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

onde α é uma constante relativa ao material que constitui a superfície do corpo estudado.

Este raciocínio resolveria o problema a seguir.

Problema 3. Foi encontrado, às 6h, em uma esquina da Zona Norte, o corpo de um homem aparentando 35 anos. No inquérito, há relatos de sons de tiros às 2h e às 5h daquele mesmo dia. A polícia conseguiu encontrar os autores dos disparos dos dois eventos, mas precisa determinar qual deles foi o responsável pelo óbito do rapaz. Qual o horário de sua morte?

Solução. A temperatura do corpo no instante em que foi encontrado, às 6h, era de 30°C e, às 8h, de 23°C. A temperatura ambiente se manteve constante em 20°C. Com essas informações, determinaremos o valor da constante α . Tomaremos $t = 0$ como o instante em que o corpo foi encontrado, isto é, às 6h. Então: $T_0 = 30 - 20 = 10$. Se, após t minutos, a diferença da temperatura entre o corpo e o ambiente é dada por

$$T(t) = 10 \cdot e^{-\alpha t},$$

decorridas duas horas, ou 120 minutos, temos:

$$23 - 20 = T(120) = 10 \cdot e^{-\alpha \cdot 120} \Rightarrow 3 = 10 \cdot e^{-120\alpha} \Rightarrow \frac{3}{10} = e^{-120\alpha}.$$

Calculando o logaritmo natural em cada membro da equação, obtemos

$$\ln\left(\frac{3}{10}\right) = \ln e^{-120\alpha}, \text{ ou seja, } \ln 3 - \ln 10 = -120\alpha \cdot \ln e.$$

Logo,

$$1,0986 - 2,3026 = -120\alpha \text{ e, portanto, } \alpha = 0,01003.$$

Agora, utilizando o fato de que a temperatura normal de um corpo humano vivo gira em torno de 37°C , vamos descobrir o instante t da morte do rapaz. Temos que:

$$17 = 37 - 20 = T(t) = 10 \cdot e^{-0,01003t}$$

e, portanto,

$$1,7 = e^{-0,01003t}.$$

Tomando, mais uma vez, a Tabela 11 de logaritmos decimais, do Apêndice A, obtemos:

$$\ln 1,7 = -0,01003t \cdot \ln e, \text{ ou seja, } 0,5306 = -0,01003t.$$

Logo,

$$t = -52,9.$$

Isso quer dizer que o rapaz veio a óbito praticamente 53 minutos antes de $t = 0$, isto é, às 6h. Portanto, deve ser preso por homicídio o autor dos disparos realizados às 5h.

Uma observação importante é que, caso o objetivo seja calcular o aquecimento de um objeto frio em um ambiente de maior temperatura, ao invés do resfriamento deste corpo, basta alterar o sinal do expoente. Logo, a lei vale em ambos os casos.

4.4 JUROS CONTÍNUOS

Um capital C , quando empregado a juros compostos, sofre uma variação um tanto interessante. A cada período de tempo, o cálculo dos juros é referente ao capital do período imediatamente anterior. Por exemplo: se o capital C for aplicado a uma taxa de $i\%$ ao mês, após um mês, C rende juros de $C \cdot i$, formando um montante equivalente a $C + Ci = C(1 + i)$. Este, se aplicado por mais um mês, à mesma taxa, irá gerar um novo montante $C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$.

Por este raciocínio, concluímos que, decorridos t meses, do capital C , aplicados os juros respectivos ao período, resultará um valor igual a $C(1 + i)^t$.

Se tentarmos capitalizar C por um período inferior a um mês, tomamos uma fração desse período, digamos $\frac{1}{n}$ de mês e taxa de juros de $\frac{i}{n}\%$ a cada novo período. Sendo assim, após decorrido um tempo igual a $\frac{t}{n}$, teremos um montante de $C \left(1 + \frac{i}{n}\right)$. Após mais um intervalo de tempo equivalente, teremos $C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2$. Continuando o processo, ao final de um mês, o montante será $C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$, o que, automaticamente, renderia mais do que a capitalização inicialmente citada, isto é, seria superior a $C(1 + i)$.

Realizando uma capitalização contínua, instantânea, faríamos o número n de períodos tender ao infinito. Assim, o montante, ao final de um mês, seria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = C \cdot e^i.$$

Isto é, podemos fazer o capital final, em função de t meses, pela função:

$$C(t) = C \cdot e^{it}.$$

Vejamos um exemplo.

Problema 4. Fixado um capital, empregando-o a juros contínuos de 15% ao mês, qual o tempo necessário para que esse capital triplique?

Solução. Supondo C o capital inicial, temos $i = \frac{15}{100} = 0,15$ e precisamos determinar o valor t tal que o capital final seja equivalente a $3C$, isto é, tal que

$$3C = C(t) = C \cdot e^{0,15t}, \text{ ou seja, } 3 = e^{0,15t}.$$

Disto segue que

$$\ln 3 = \ln e^{0,15t} = 0,15t.$$

Como $\ln 3 = 1,0986$, obtemos:

$$0,15t = 1,0986, \text{ ou seja, } t = 7,324.$$

Isto é, em praticamente 7 meses e 10 dias, teríamos nosso capital triplicado, independentemente do valor deste.

Pode-se aplicar esta modelagem nos casos de perdas contínuas, isto é, ao invés de um ganho de $i\%$ ao final de determinado período, tem-se um prejuízo de $i\%$, no mesmo prazo, tendo-se iniciado com um capital C . Neste caso, calculamos o capital final, após t períodos, pela função

$$C(t) = C \cdot e^{-it}.$$

4.5 ESCALA RICHTER

A crosta terrestre é formada por placas tectônicas também conhecidas por litosféricas (blocos rochosos semirrígidos, fragmentos da crosta que ficam à deriva sobre a camada de rocha fundida do manto). Existem placas principais (as maiores) e várias menores que estas. Dentre as principais, temos: Placa do Pacífico, Placa de Nazca, Placa Sul-Americana, Placa Norte-Americana, Placa Africana, Placa Antártica, Placa Indo-Australiana, Placa Euroasiática Ocidental, Placa Euroasiática Oriental e Placa das Filipinas.

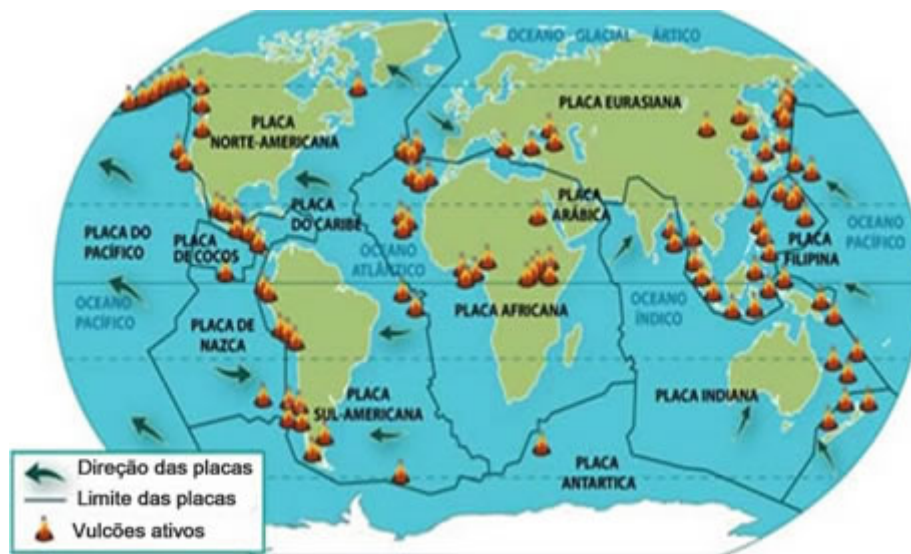


Figura 48: Representação da distribuição das principais placas tectônicas.

Em 1913, o geólogo e meteorologista alemão Alfred Wegener afirmou que os continentes, separados por oceanos na atualidade, formavam um único bloco no passado, denominado Pangeia (do grego "Terra Única"), e que, à medida que foram ocorrendo deslocamentos de placas tectônicas, o terreno deste supercontinente começou a se separar, lentamente. Este movimento foi denominado deriva continental.



Figura 49: A evolução da deriva continental terrestre.

Essa teoria foi corroborada por sua sucessora, a Teoria das Placas Tectônicas, que parte do princípio de que as placas que abrangem os continentes e o fundo oceânico movimentam-se sobre o magma, impulsionadas por forças vindas do interior da Terra, aproximando-se (movimento convergente) ou distanciando-se umas das outras (movimento divergente).

Esses deslocamentos das placas ocorrem devido às altas temperaturas existentes no interior da Terra. O intenso calor provoca a movimentação circular do manto em correntes de convecção, transferindo calor do núcleo (camada mais interna da Terra) para as camadas mais externas, movimentando, assim, as placas. Os tipos de deslocamentos são: laterais, de afastamento e de colisão. Apesar de lentos, são responsáveis por diversas transformações e fenômenos que ocorrem na crosta terrestre, como a formação de montanhas e vulcões, terremotos e aglutinação ou separação dos continentes.

Terremoto, sismo ou *abalo sísmico* é a movimentação de um terreno, de maneira abrupta, . É um fenômeno natural e pode ser provocado por alguns fatores, dentre eles: falhas geológicas, atividade vulcânica, e, de forma mais frequente, pelo deslocamento de placas tectônicas distintas.

Além da colisão de placas tectônicas, há a subducção das placas, isto é, uma se infiltra debaixo da outra, de acordo com a Teoria das Placas Tectônicas. Normalmente, a de maior peso se subduz sob a de menor peso, devido à sua maior espessura interna. As áreas de encontro das placas são os locais com maior incidência de terremotos.

Veja a distribuição dos terremotos no planeta, na Figura 50:

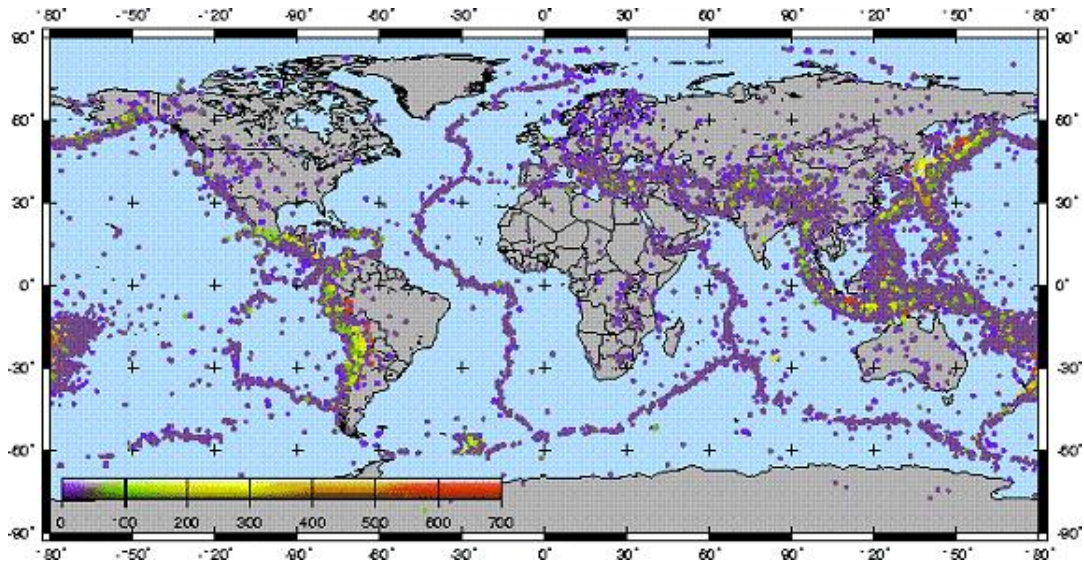


Figura 50: Distribuição de terremotos no planeta: regiões de maior incidência de tremores correspondem ao encontro de placas tectônicas.

As rochas comportam-se de forma semelhantes a corpos elásticos e podem acumular deformações quando comprimidas ou tracionadas. Se esses esforços ultrapassarem o limite de resistência da rocha, ela se rompe ao longo de um plano de fratura, novo ou pré-existente, chamado *falha*. Ou seja, as falhas geológicas são formadas pelo rompimento das rochas, decorrente da força do contato entre essas placas, quando esta é mais forte do que a resistência rochosa. As falhas provocam a acomodação dos blocos rochosos provocando, assim, os terremotos.



Figura 51: Representação de uma falha geológica.

Normalmente, a movimentação na fratura não causa maiores danos, mas sim as vibrações (ondas elásticas) que se propagam a partir da fratura. Esta, muitas vezes, nem atinge a superfície, mas as vibrações originadas são tão fortes a ponto de causar grandes estragos.

Terremoto, sismo ou *abalo sísmico* é a movimentação de um terreno, de maneira abrupta, pela vibração supracitada. É um fenômeno natural e pode ser provocado por alguns fatores, dentre eles: falhas geológicas, atividade vulcânica, e, de forma mais frequente, pelo deslocamento de placas tectônicas distintas.

O hipocentro (localizado no interior da Terra) é a região onde ocorre o encontro entre as placas tectônicas e o epicentro é o ponto da superfície terrestre exatamente acima do hipocentro. As consequências podem ser sentidas a quilômetros de distância, dependendo da proximidade da superfície onde ocorreu a colisão (hipocentro) e da magnitude do terremoto.

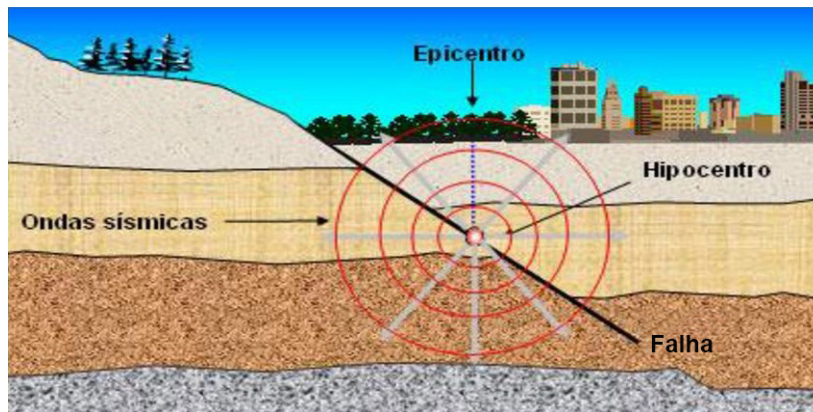


Figura 52: Epicentro e hipocentro de um terremoto.

A medida quantitativa que expressa o tamanho do terremoto é denominada *magnitude*. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco do terremoto e com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos (instrumento que detecta, amplia e registra as vibrações da Terra, sejam elas provocadas por processos naturais ou pelo homem).

A escala Richter estabelece uma relação entre magnitude e energia liberada por um abalo sísmico, e associa um valor numérico ao seu potencial destrutivo. Ela foi criada pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg (ver Figura 53), em 1935, que eram membros do California Institute of Technology (Caltech). Eles utilizavam o sismógrafo de torção Wood-Anderson para estudar sismos próximos ao instituto, mais

especificamente os da região sul, e colheram informações relacionadas a ondas sísmicas advindas de sismos com epicentro na Califórnia, de diferentes magnitudes, dentre outras características, e inventaram um sistema para quantificar as magnitudes dessas ondas, de ocorrências locais.



Figura 53: Charles Francis Richter e Beno Gutenberg.

A modelagem foi baseada em uma extensa escala logarítmica, já que o objetivo era abranger desde microtemores até grandes terremotos. Porém, estudos geológicos estabeleceram limites de resistência para as rochas, limitando, portanto, a escala, que pelos dados locais estava graduada de 0,0 a 9,0.

Com o passar do tempo e com a abrangência global, detectou-se sismos tanto de magnitudes negativas, quanto de magnitudes superiores a 9,0. Mas qual a relação entre esses valores e a força do terremoto? O que influencia nesse fenômeno?

Bom, dizer que um abalo sísmico é de magnitude quatro, por exemplo, é o mesmo que dizer que este é 10 vezes mais forte que um de magnitude três, 100 vezes mais forte que um de magnitude dois e 10 vezes mais ameno do que um de magnitude cinco.

Os agentes influentes na determinação da magnitude segundo a Escala Richter são: distância do hipocentro, ao tempo de manifestação de um tremor e a sua amplitude.

A magnitude é única para cada sismo, porém a intensidade das ondas sísmicas diminui em função da distância e das características das rochas atingidas pelas ondas, das linhas de falha e de outros acidentes tectônicos presentes no seu trajeto. Isto quer dizer que apesar de cada terremoto ter magnitude única, seus efeitos são os mais variados (dependendo da distância, das condições dos terrenos e das edificações, por exemplo).

No estudo de um abalo sísmico, qual a relação entre seu número da escala Richter, sua sensibilidade (isto é, se humanos podem sentir o tremor), frequência e consequências?

Segundo [1], temos as seguintes classificações:

- 1,0 a 1,9: eventos detectados somente por sismógrafos, ocorrem diversas vezes durante o dia, devido à movimentação constante da crosta terrestre.
- 2,0 a 2,9: tremores sentidos por poucas pessoas, que acontecem em média 800 mil vezes durante o ano.
- 3,0 a 3,9: neste estágio, o terremoto já é sentido pela maioria das pessoas, tendo uma frequência média de 20 mil por ano.
- 4,0 a 4,9: já temos danos físicos a edifícios neste estágio, principalmente a vidros e vidraças, sendo medidos aproximadamente 2800 por ano.
- 5,0 a 5,9: aqui já temos queda de mobiliário e alguns danos estruturais; a frequência não ultrapassa mil ocorrências por ano.
- 6,0 a 6,9: o dano à crosta terrestre passa a ser visível com aberturas de fendas e queda de edifícios; aproximadamente 185 desses tremores ocorrem por ano.
- 7,0 a 7,9: os tremores vão danificar estruturas como pontes e barragens; ocorrem em média 14 desses tremores por ano.
- acima de 8,0 pontos: esses são os terremotos de grande magnitude, que causam grandes desastres e muitos danos estruturais a edifícios. Por sorte, esse eventos são raros, ocorrendo a cada cinco anos, em média.

Em 22 de maio de 1960, no Chile, foi registrada a ocorrência do terremoto que atingiu o maior valor (de 9,5) na escala Richter.

A escala Richter, porém, não apresenta maiores informações sobre problemas e medições relacionados a sismos. Para realizar uma avaliação de intensidade sísmica, por exemplo, recorreremos à escala de Mercalli, medida em graus.

Há, também a MMS, abreviação de Escala de Magnitude de Momento, que quantifica a magnitude dos sismos quanto à energia liberada e que praticamente substituiu a Escala de Richter para estudos nesse aspecto. Esta foi criada por Thomas Hanks e Hiroo Kanamori, em 1979, sendo uma escala logarítmica de base decimal e que, ao contrário da Escala Richter, é edificada sobre os princípios propagação das ondas sísmicas, não sendo saturada nas altas magnitudes e apresentando valores similares para sismos de intensidade média (magnitudes entre 3,0 e 7,0).

A escala de magnitude local ou M_L (outra denominação da escala Richter) tem por objetivo atribuir um número para quantificar o nível de energia liberada por um tremor. Pode ser obtida calculando o logaritmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo (torção de Wood-Anderson). A magnitude local (M_L) é dada pelo logaritmo da razão entre a amplitude máxima medida no sismógrafo (A) e uma amplitude de referência (A_0), isto é:

$$M_L = \log \left(\frac{A}{A_0} \right) = \log A - \log(A_0).$$

E o que explica a modelagem do fenômeno ser realizada através de uma função logarítmica?

Justamente para cobrir o enorme leque de magnitudes dos sismos, já que o aumento de uma unidade na escala representa um aumento de dez vezes na amplitude das ondas medidas e um aumento de praticamente 30 vezes na energia liberada.

Daí, vem uma outra fórmula conhecida para cálculo de magnitude de um terremoto na escala Richter:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0},$$

onde E é a energia liberada no terremoto em kWh e E_0 é uma constante que vale $7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

Para modelar o fenômeno, inicialmente, a ideia de Richter foi retirada da leitura de um sismograma.

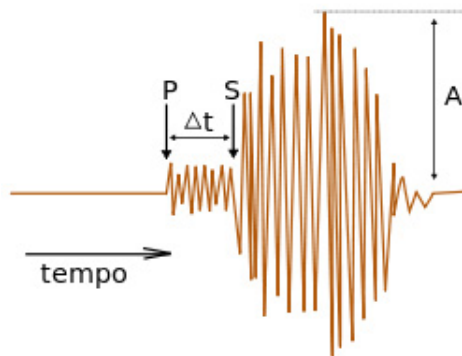


Figura 54: Sismograma: registro de um sismógrafo.

Pela imagem de um sismograma (Figura 54), em um local situado a 100 km do epicentro de um tremor, podemos obter as seguintes medidas:

- M : a magnitude do tremor
- A : a amplitude, medida em milímetros
- Δt : o intervalo de tempo entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P), medido em segundos.

A partir dessas informações, Richter propôs

$$M = \log A + 3 \cdot \log(8\Delta t) - 2,92.$$

Mesmo com tantas medições e classificações, ainda não é possível prever terremotos, mas o fato de conhecê-los mais a fundo, definir locais de maior ocorrência e mensurar seus efeitos é o rumo que a ciência tem tomado para conseguir essa façanha.

4.6 ESCALA MUSICAL TEMPERADA

Em muitos momentos históricos, percebemos um esforço por parte do homem na tentativa de estabelecer uma relação entre matemática e música, tendo início na Antiguidade. Os primeiros registros são gregos, nos quais os pitagóricos idealizaram uma interação entre intervalos musicais e razões geométricas.

O quadrivium matemático (em latim: *quadrivium*, de quatro e via: caminho, ou seja os "quatro caminhos") era o nome dado ao conjunto de quatro matérias ensinadas nas universidades helênicas na fase inicial do percurso educativo. Era formado por aritmética, geometria, astronomia e música. Acreditava-se que a música era mais importante que a própria literatura quando o assunto era educação.

Pitágoras, utilizando-se do monocórdio, fez vibrar a corda solta e, ao pressionar determinado ponto da corda, percebeu que a vibração emitida correspondia a uma quarta acima daquela emitida pela corda inteira. Esse ponto localizava-se a $\frac{3}{4}$ da extremidade.

Ao pressionar o ponto correspondente à metade da corda, percebeu que a nota era a mesma da original, porém uma oitava acima. E tocando a corda no ponto correspondente a $\frac{2}{3}$ do comprimento total, o som emitido era correspondente à quinta acima. Percebeu, enfim, que tensionando a corda em determinado ponto, reduzia seu tamanho e aumentava sua frequência, o que explica a produção de diferentes sons.

Experimentou mais intervalos, porém aqueles que mais lhe agradaram os ouvidos foram $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$; considerava que os números 1, 2, 3 e 4 criavam a harmonia, toda a perfeição.

Através desses experimentos, foi criado, pelos pitagóricos, um sistema musical que foi por muito tempo a base da música ocidental. E dividindo a corda original em uma proporção x , a frequência a que a nota é levada equivale à frequência da corda solta dividida por x . Isto é, a frequência obtida ao dividirmos a corda na proporção $\frac{3}{4}$ corresponde a $\frac{4}{3}$ da frequência original.

Porém os intervalos de sua escala não eram sempre os mesmos, o que impossibilitava a transposição das notas para outras tonalidades, mas a harmonia dos sons foi responsável por sua hegemonia durante anos.

Começando a partir do som da nota fá, após uma quinta é obtido o som da nota dó, que, somado uma quinta, torna-se a nota sol, e de quinta em quinta temos as demais notas: ré, seguido de lá, mi e si. E dessa forma foi criada a sequência de notas musicais: fá-dó-sol-ré-lá-mi-si.

Na escala mais conhecida, com sete sons (dó, ré, mi, fá, sol, lá e si), a ordenação dos sons é matemática.

Os países anglófonos utilizam letras para a nomenclatura das alturas musicais. As letras A, B, C, D, E, F e G são utilizadas para as alturas musicais lá, si, dó, ré, mi, fá e sol, respectivamente.

A nomenclatura das notas, como conhecemos atualmente, foi de responsabilidade do italiano Guido d'Arezzo (955-1050), por um sistema chamado *solmização*. Seis das sílabas foram tiradas das primeiras seis linhas do texto de um hino a São João Baptista, escrito por Paolo Diacono, em que cada frase era cantada um grau acima na escala.

Tabela 8: Nomenclatura das notas musicais por Guido d'Arezzo.

Versos	Nota	Nomenclatura
Ut queant laxis	Ut	C
Resonare fibris	Ré	D
Mira gestorum	Mi	E
Famuli tuorum	Fá	F
Solve polluti	Sol	G
Labii reatum	Lá	A
Sancte Iohannes	Si	B

A tradução dos versos é "para que os teus servos possam cantar as maravilhas dos teus atos admiráveis, absolve as faltas dos seus lábios impuros, São João"(ver Tabela 8).

Mais tarde, *ut* foi substituído por *do*, sugestão feita por Giovanni Battista Doni, um músico italiano que achava a sílaba incômoda para o solfejo, e foi adicionada a sílaba *si*, como abreviação de "Sante Iohannes" ("São João").

A escala temperada (ou cromática), criada entre o final do século XVII e início do século XVIII, dividia a escala musical em doze sons, agradáveis de se ouvir, mas no lugar de frações de frações, a divisão era realizada por intermédio dos logaritmos. As 12 notas dessa escala estão na sequência: dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si e equivalem aos logaritmos na base 2 de $2^{\frac{k}{12}}$, k inteiro, e pertencente ao intervalo $[0, 11]$.

A seguir, na Tabela 9, apresentamos os nomes das notas musicais da escala temperada e suas respectivas frequências, em Hertz (Hz).

Tabela 9: Frequência das notas musicais.

Nota	Escala temperada	Frequência (Hz)
dó	2^0	262
dó#	$2^{\frac{1}{12}}$	277
ré	$2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}$	294
ré#	$2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}$	311
mi	$2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$	330
fá	$2^{\frac{5}{12}}$	349
fá#	$2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}$	370
sol	$2^{\frac{7}{12}}$	392
sol#	$2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}}$	415
lá	$2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}$	440
lá#	$2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}}$	466
si	$2^{\frac{11}{12}}$	494
dó (escala acima)	$2^{\frac{12}{12}} = 2^1$	523

Considerando a frequência f de cada nota medida em intervalos musicais de oitavas acima de uma certa nota musical tomada como referência, em relação a altura a do som emitido por uma nota, temos

$$a = \log_2 f.$$

Portanto, os logaritmos também modelam a música.

4.7 OUTRAS APLICAÇÕES

Ainda é possível a realização da modelagem de outros fenômenos conhecidos utilizando exponenciais e logaritmos, alguns retirados de [9]. Dentre eles, podemos citar:

- Cálculo da intensidade luminosa;
- Cálculo do potencial hidrogeniônico (pH);
- Determinação do IDH e do PIB;
- Crescimento populacional;
- Intensidade da corrente em um circuito elétrico;
- Estabelecer curva de aprendizagem;
- Determinar altitude de uma localidade;
- Determinar intensidade sonora;
- Cálculo da pressão atmosférica;
- Cálculo do percentual de gordura de um organismo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após alguns anos experimentando a docência na rede pública e particular de ensino e presenciando a dificuldade de alunos e professores em abordar o tema funções exponenciais e logarítmicas de uma forma serena e, principalmente, em promover aprendizagem e aproveitamento satisfatórios, nasceu a motivação deste trabalho.

Os materiais didáticos usados na rede pública e os diversos sistemas de ensino utilizados em escolas particulares tratam de funções logarítmicas e exponenciais como uma série de propriedades e características que são memorizadas e até aplicadas, porém em âmbito técnico de repetição, sem se preocupar com a fundamentação e caracterização dessas funções.

Esse material visa proporcionar suporte ao docente na preparação das aulas relativas ao tema, para alunos das séries finais do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio como um todo.

Trazendo toda a evolução do cálculo de potências, desde expoentes naturais até expoentes reais, o intuito foi mostrar, formalmente, de maneira coesa, o comportamento de tais potências cujos expoentes irão compor o domínio da função exponencial. A completeza dos reais não é de abordagem simples, porém se faz totalmente necessária para desenvolver tal ideia.

A exposição para o aluno não necessita de tanta formalidade, porém deve manter a mesma coerência com que foi abordada neste estudo. Muitas vezes, enquanto docentes, subestimamos nossos alunos quando se trata da compreensão de conceitos mais complexos da disciplina. Mas, através de exemplos, contextualizações e interdisciplinaridade inseridos no processo de aprendizagem, o processo, ainda que necessite de embasamento pesado, se dá de maneira natural.

Como exemplo, temos que o Problema 2 foi colocado para uma turma de 9º ano como justificativa da existência de fenômenos que não podem ser modelados através de funções afins e quadráticas. A turma chegou à característica responsável pela escolha da função exponencial na modelagem do fenômeno, naturalmente.

Então, seguramente, este será um instrumento de real ajuda para a absorção do conteúdo, aprendizagem lúdica, além de incentivar o docente a inserir a modelagem de fenômenos, que é a essência da compreensão acerca da utilização e importância das funções abordadas, e deixar de lado uma postura impositiva de memorização de fórmulas que, ao final do processo, se perde e não promove a análise crítica e racional das diversas situações que o cotidiano venha a apresentar ao discente.

Outro objetivo que buscamos atingir é o de definir uma função logarítmica como a inversa da exponencial e vice-versa, enfatizando a caracterização das funções neste processo. Mostrar que, independentemente da escolha do ponto de partida, desenvolvemos com sucesso a definição das duas funções tema, além de propriedades, características e representação gráfica.

Uma situação também comum e que nos causa certo desconforto é o fato de o aluno ser apresentado ao número e , na maioria das vezes, no Ensino Superior, criando uma relação de antipatia com o mesmo. Sabemos que seria totalmente possível a inserção desse irracional através da modelagem de fenômenos como os apresentados no Capítulo 4, ou mesmo pelo conceito de área sob a hipérbole, com contextualização histórica, e talvez até por meio de juros contínuos, usando uma metodologia que tornará o assunto prazeroso e não assustador. É estranho o número π ser familiar ao discente enquanto o número e lhe causa certo incômodo, e percebemos, então, que essa resistência ao número e não se deve à sua circunstância irracional.

Estabelecer relações entre progressões aritméticas e geométricas através da função do tipo exponencial, por exemplo, leva o aluno a compreender que a Matemática e suas partições não são desconexas. Os exemplos tratados, como a desintegração radioativa, a escala Richter e a própria música, foram abordados com o intuito de mostrar a conexão da Matemática com outras disciplinas. Apresentar ao aluno o enredo e o desenvolvimento histórico permite a criação de links e a justificativa da existência de determinado conteúdo ou operação.

Em resumo, o objetivo deste estudo é proporcionar a visão plena e agradável em relação às funções exponenciais e logarítmicas, partindo da segurança do professor por ter a conceituação correta e completa do assunto, além de dar leveza e utilidade ao que,

nos dias atuais, é tratado de forma banal em materiais de uso contínuo e reconhecer a Matemática como a ciência da compreensão, interpretação e quantificação de situações vitais.



TABELAS DE LOGARITMOS

As tabelas de logaritmos, como já mencionado, foram de extrema importância - e digamos até imprescindíveis - para cálculos envolvendo grandezas hercúleas ou ínfimas. Já foram material básico de sala de aula para alunos de Ensino Médio (antigo Colegial ou 2º Grau), consultadas quase que diariamente para efetivação de cálculos em virtude da resolução de problemas propostos.

Nos dias atuais, com o advento das calculadoras científicas na década de 1980, as tabelas passaram a aparecer com menor frequência nos livros e materiais de uso contínuo.

Para solucionar problemas propostos no Capítulo 4 e no Apêndice B, foram utilizadas as tabelas a seguir. Essas tabelas apresentam valores relativos a quatro casas decimais, tanto para a determinação de logaritmos naturais, quanto para logaritmos comuns (ou decimais).

A.1 TABELAS DE LOGARITMOS NATURAIS

Recordamos que os logaritmos naturais ou neperianos são logaritmos de base igual a e , número irracional cujo valor aproximado é 2,71828, e são usualmente representados por \log_e ou \ln .

A Tabela 10, dada a seguir, apresenta os logaritmos naturais de 1,00 a 10,09, com intervalos de 0,01, trazendo resultados com quatro algarismos decimais exatos, como

em [6]. Caso o número do qual se queira obter o logaritmo natural não estiver presente na tabela, podemos obtê-lo utilizando

$$\ln(mn) = \ln m + \ln n$$

e os valores a seguir da função logaritmo natural, obtidos usando a propriedade $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$ e $\ln 10 = 2,3026$, retirado da tabela desta seção.

$$\begin{aligned}\ln(10^{-1}) &= -1 \cdot \ln 10 = -1 \cdot 2,3026 = -2,3026 \\ \ln(10^{-2}) &= -2 \cdot \ln 10 = -2 \cdot 2,3026 = -4,6052 \\ \ln(10^{-3}) &= -3 \cdot \ln 10 = -3 \cdot 2,3026 = -6,078 \\ \ln(10^{-4}) &= -4 \cdot \ln 10 = -4 \cdot 2,3026 = -9,2103 \\ \ln(10^{-5}) &= -5 \cdot \ln 10 = -5 \cdot 2,3026 = -11,5129\end{aligned}$$

Exemplo A.1. Para calcular $\ln 0,0452$, como este não pertence ao intervalo contemplado pela tabela (1,00 a 10,09), fazemos:

$$\ln 0,0452 = \ln(4,52 \cdot 10^{-2}) = \ln 4,52 + \ln(10^{-2}) = 1,5063 + (-4,6052) = -3,0989.$$

Tabela 10: Logaritmos naturais de 1 a 10,09

N.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,00	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,10	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,20	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,30	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,40	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,50	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,60	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,70	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,80	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,90	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,00	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,10	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,20	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,30	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,40	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,50	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,60	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,70	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,80	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,90	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,00	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,10	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,20	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,30	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,40	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,50	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,60	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,70	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,80	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,90	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,00	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,10	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,20	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,30	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,40	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,50	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,60	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,70	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,80	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,90	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074

continua na próxima página

N.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
5,00	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,10	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,20	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,30	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,40	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,50	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,60	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,70	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,80	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,90	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,00	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,10	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,20	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,30	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,40	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,50	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,60	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,70	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,80	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,90	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,00	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,10	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,20	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,30	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,40	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,50	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,60	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,70	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,80	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,90	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,00	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,10	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,20	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,30	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,40	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,50	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,60	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,70	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,80	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,90	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961

continua na próxima página

N.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
9,00	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,10	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,20	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,30	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,40	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,50	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,60	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,70	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,80	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,90	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016
10,00	2,3026	2,3036	2,3046	2,3056	2,3066	2,3076	2,3086	2,3096	2,3106	2,3115

A.2 TABELAS DE LOGARITMOS DECIMAIS

Logaritmos decimais ou comuns são logaritmos de base igual a 10 e são usualmente representados por \log_{10} ou, simplesmente, \log .

A Tabela 11, dada a seguir, apresenta as mantissas dos logaritmos decimais de 1,00 a 9,99, com quatro algarismos decimais exatos.

Tabela 11: Logaritmos decimais de 1 a 9,99

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1,10	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1,20	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1,30	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1,40	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1,50	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1,60	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1,70	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1,80	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1,90	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2,00	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2,10	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2,20	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2,30	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2,40	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2,50	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2,60	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2,70	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2,80	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2,90	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3,00	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3,10	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3,20	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3,30	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3,40	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3,50	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3,60	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3,70	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3,80	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3,90	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

continua na próxima página

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,00	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4,10	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4,20	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4,30	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4,40	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4,50	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4,60	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4,70	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4,80	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4,90	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5,00	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5,10	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5,20	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5,30	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5,40	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
5,50	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5,60	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5,70	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5,80	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5,90	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6,00	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6,10	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6,20	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6,30	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6,40	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6,50	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6,60	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6,70	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6,80	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6,90	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445

continua na próxima página

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,00	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7,10	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7,20	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7,30	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7,40	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7,50	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7,60	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7,70	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7,80	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7,90	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8,00	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8,10	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8,20	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8,30	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8,40	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8,50	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8,60	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8,70	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8,80	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8,90	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9,00	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9,10	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9,20	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9,30	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9,40	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9,50	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9,60	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9,70	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9,80	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9,90	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

B

CÁLCULO DE UMA EXPRESSÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DE TABELA DE LOGARITMOS

Considere

$$x = \sqrt[3]{\frac{453,2^8}{24,7^{14} \cdot 0,0503}}.$$

Para calcular tal expressão, consultaremos a Tabela 11 de logaritmos decimais do Apêndice A e utilizaremos as propriedades dos logaritmos (devidamente demonstradas no Capítulo 3), enunciadas abaixo.

Propriedade B.1. *Seja $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$, então:*

(a) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b.$

(b) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$

(c) $\log(a^x) = x \cdot \log a.$

Neste apêndice, representaremos por \log o logaritmo de base decimal, ao invés do usual \log_{10} .

B.1 CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Se $x \in \mathbb{R}^+$, podemos escrever

$$x = a \cdot 10^n, \text{ onde } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo,

- $49831 = 4,9831 \cdot 10^4$.
- $23,7 = 2,37 \cdot 10^1$.
- $0,0023 = 2,3 \cdot 10^{-3}$.

De $x = a \cdot 10^n$ segue que

$$\log x = \log a + \log(10^n) = \log a + n.$$

Nessas condições, denominamos $\log a$ a *mantissa* de $\log x$ e n a *característica* de $\log x$. Como $1 \leq a < 10$, temos que $0 \leq \log a < 1$.

Para calcular $\log x$ por meio de uma tabela de logaritmos, basta procurar o valor de sua mantissa na tabela e somá-lo à sua característica. Por exemplo, para calcular o logaritmo de 13,5 e de 0,135, fazemos

$$13,5 = 1,35 \cdot 10^1 \text{ e } 0,135 = 1,35 \cdot 10^{-1}, \text{ sendo } \log 1,35 \in [0, 1[.$$

Tomamos a Tabela 11 de logaritmos decimais de 1,00 a 9,99 e cruzamos a linha 1,3 com a coluna 5, formando 1,35. Neste caso, o valor encontrado é 1303, que deve ser interpretado como o número decimal 0,1303. Para calcular os logaritmos dos números citados, fazemos:

$$\log 13,5 = 0,1303 + 1 = 1,1303.$$

$$\log 0,135 = 0,1303 - 1 = -0,8697.$$

Note que, como a mantissa é o logaritmo decimal de um a tal que $1 \leq a < 10$, as tabelas de logaritmos decimais só precisam abranger este intervalo.

B.2 CÁLCULO DE UMA EXPRESSÃO NUMÉRICA

Voltemos, portanto, à expressão

$$x = \sqrt[3]{\frac{453,2^8}{24,7^{14} \cdot 0,0503}} = \left(\frac{453,2^8}{24,7^{14} \cdot 0,0503} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Calculando o logaritmo decimal de ambos os membros da equação, temos:

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot \log \left(\frac{453,2^8}{24,7^{14} \cdot 0,0503} \right) = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot \log 453,2 - 14 \cdot \log 24,7 - \log 0,0503).$$

Encontrando a característica e utilizando a Tabela 11 para obter o valor da mantissa, temos:

x	$\log x$
453,2	$2 + 0,6561 = 2,6561$
24,7	$1 + 0,3927 = 1,3927$
0,0503	$-2 + 0,7016 = -1,2984$

Substituindo os valores da tabela acima na expressão anterior, obtemos

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot 2,6561 - 14 \cdot 1,3927 + 1,2984) = 1,0165.$$

Sendo assim,

$$x = 10^{1,0165} = 10^{0,0165+1} = 10^{0,0165} \cdot 10^1$$

Para encontrar o antilogaritmo do número 0,0165 (isto é, a potência $10^{0,0165}$), procuramos a mantissa 0165 na Tabela 11, que corresponderá à linha 1,0 e coluna 0,04. Logo,

$$x = 1,04 \cdot 10^1 = 10,4.$$

Realizando esse mesmo cálculo utilizando uma calculadora científica, obtemos

$$10,399152801248349021015619348212,$$

uma ótima aproximação. Para um resultado mais exato, deve-se consultar uma tábua logarítmica com maior quantidade de dígitos para a mantissa.

NÚMEROS REAIS

C.1 TEOREMA DOS INTERVALOS ENCAIXANTES

Teorema C.1. *Seja $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de intervalos tais que $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots$, ou seja, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, denotados intervalos encaixantes. Então, a intersecção de todos os intervalos não é vazia, isto é, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demonstração. De acordo com a definição de intervalo, segue que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ dos números reais a_n que são as extremidades esquerdas de cada intervalo, temos que o conjunto A é não vazio e limitado superiormente, pois para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m+n$ e, portanto, $a_n \leq a_{m+n}$. Temos também que $m \leq m+n$, então $b_{m+n} \leq b_m$. Concluimos que

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m, \text{ logo, } a_n \leq b_m, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo axioma da completeza dos reais, $\exists \alpha$ tal que $\alpha = \sup A$, pois A é não vazio e limitado superiormente.

Portanto, $a_n \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sendo b_n cota superior de A , temos que $\alpha \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, para cada n , vale $a_n \leq \alpha \leq b_n$, o que mostra que

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Além disso, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, podemos ver facilmente que α será o único número real pertencente à intersecção. \square

Para provar que o conjunto dos números reais satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes, usamos o fato de que \mathbb{R} satisfaz o axioma do supremo. Ocorre que a propriedade dos intervalos encaixantes e o axioma do supremo são equivalentes. Isto é, se um corpo ordenado satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes, então ele satisfaz a propriedade que "todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem um supremo".

C.2 DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Teorema C.2. *Vale a desigualdade $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$, tal que $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -1$, e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para demonstrarmos tal desigualdade, utilizaremos indução sobre n . Pelo PIF, temos

Para $n = 1$, tem-se

$$(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x \Rightarrow 1 + x \geq 1 + x,$$

o que claramente é verdadeiro.

Suponhamos verdadeira a desigualdade para $n = k$, e $k \in \mathbb{N}$, isto é

$$(1 + x)^k \geq 1 + k \cdot x.$$

Como $x \geq -1$, temos que $1 + x \geq 0$. Então, multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $(1 + x)$, teremos:

$$\begin{aligned} (1 + x)^k(1 + x) &\geq (1 + kx)(1 + x) \\ &= 1 + kx + x + kx^2 \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x. \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade é válida para $n = k + 1$.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

C.3 TEOREMA DA BOA ORDENAÇÃO

Teorema C.3. *Todo subconjunto não vazio de \mathbb{N} possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja S um subconjunto não vazio de \mathbb{N} e o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x, \forall x \in S\}$.

Se $1 \in S$, então este será o menor elemento de S . Caso contrário, $1 \in M$.

Como $S \neq \emptyset$, $\exists s \in S$. Então, $s + 1 \notin M$, pelo fato de $s + 1$ ser maior que s .

Logo, $M \neq \mathbb{N}$.

Como $1 \in M$ e $M \neq \mathbb{N}$, deve existir algum $m \in M$ tal que $m + 1 \notin M$, caso contrário, pelo Princípio de Indução, $M = \mathbb{N}$.

Afirmamos que m é o menor elemento de S . Como $m \in M$, então $m \leq x, \forall x \in S$.

Resta apenas provarmos que $m \in S$. Suponhamos, por absurdo, que $m \notin S$. Então $m < x, \forall x \in S$. Pela proposição anterior, teríamos $m + 1 \leq x, \forall x \in S$, onde $m + 1 \in M$, o que contradiz a escolha de m .

Portanto $m \in S$. □

C.4 PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA

Teorema C.4. *As seguintes propriedades no corpo dos \mathbb{R} são equivalentes:*

- (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente;
- (2) dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;
- (3) para cada $a \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração. • (1) \Rightarrow (2)

Sendo $a > 0$, por (1), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$.

Ou seja,

$$n \cdot a > b.$$

- (2) \Rightarrow (3)

Em (2), fazemos $b = 1$, obtemos $n \cdot a > 1$, isto é, $\frac{1}{n} < a$.

Logo,

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

- (3) \Rightarrow (1)

Para todo $a \leq 0$, existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $a < 1$. Se $a > 0$ então $\frac{1}{a} > 0$. Por (3), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{a}$.

Portanto,

$$n > a.$$

Isto é, \mathbb{N} é ilimitado superiormente em \mathbb{R} .

□

No Capítulo 2, utilizamos para algumas demonstrações as propriedades de limites, cujas demonstrações podem ser encontradas no Capítulo 3 de [5], realizadas com maestria.

BIBLIOGRAFIA

- [1] <https://www.infoescola.com/geografia/escala-richter/>, Acessado em 14 de setembro de 2019.
- [2] Ministério da Educação, *Base Nacional Comum Curricular*, <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>, Acessado em 02 de agosto de 2019.
- [3] MAOR Eli, *e: a história de um número*, 5^a ed., Record, Rio de Janeiro - São Paulo, 2008, ISBN 9788501058478.
- [4] LIMA Elon Lages, *Números e Funções Reais*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013, ISBN 9788585818814.
- [5] LIMA Elon Lages, *Análise Real-vol 1*, 12^a ed., 2014, ISBN 9788524400483.
- [6] LIMA Elon Lages, *Logaritmos*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2016, ISBN 97883583370826.
- [7] LIMA Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar P., WAGNER Eduardo e MORGADO Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 44, 2000.
- [8] LIMA Elon Lages, CARVALHO Paulo Cezar Pinto, WAGNER Eduardo e MORGADO Augusto César, *Temas e problemas*, 3^a ed., Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 2010.
- [9] LIMA Elon Lages et al., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- [10] KLEIN Felix, *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*, vol. 1, Courier Corporation, 2004.
- [11] CAJORI Florian, *History of the exponential and logarithmic concepts*, The American Mathematical Monthly **20** (1913), n^o 2, 35–47.
- [12] IEZZI Gelson, DOLCE Osvaldo e MURAKAMI Carlos, *Fundamentos de Matemática Elementar- vol. 2*, 9^a ed., Atual, 2004.

- [13] CARSLAW Horatio Scott, *The discovery of logarithms by Napier*, The Mathematical Gazette **8** (1915), nº 117, 76–84.
- [14] STEWART Ian, *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*, Zahar, 2014.
- [15] HENDERSON J, *The methods of construction of the earliest tables of logarithms*, The Mathematical Gazette **15** (1930), nº 210, 250–256.
- [16] MELO Maria Eulalia de Moraes et al., *Números reais*, Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (2013).
- [17] ROQUE Tatiana e DE CARVALHO João Bosco Pitombeira, *Tópicos de história da matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.