UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

DIEGO DE JESUS MEDEIROS

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Vitória

2017

DIEGO DE JESUS MEDEIROS

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

Vitória
2017

DIEGO DE JESUS MEDEIROS

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a Obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Vitória,

BANCA EXAMINADORA

_______ _--_______________

Dedico este trabalho aos meus pais Joel e Izaltina, aos meus irmãos Diogo e Rodrygo, e à minha esposa Thainan que sempre me incentivam e nunca medem esforços para o alcance de meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e pela Matemática que nos foram presenteadas.

Agradeço a paciência, presteza e intelecto dedicados nesse trabalho pelo Prof. Domingos Sávio Valério Silva.

Agradeço ao amigo Leonardo Gomes no apoio moral e pedagógico e à amiga Sandi Mendes na produção desse trabalho.

E por fim, agradeço a SBM - Sociedade Brasileira de Matemática e à UFES - Universidade Federal do Espírito Santo pelo curso oferecido em Rede Nacional.

A Evolução é a Lei da Vida, o Número é a Lei do Universo, a Unidade é a Lei de Deus. (Pitágoras)

RESUMO

Este trabalho consta de uma parte da biografia de Pitágoras e sua Escola Pitagórica. Mostra uma seleção de conceitos iniciais básicos para o bom entendimento e que se relacionam com as provas diversas do Teorema de Pitágoras que se apresentam logo em sequência. Usa-se no início de algumas provas do teorema de Pitágoras uma pequena biografia relacionada para criar uma introdução do assunto com contexto histórico. O objetivo principal desse trabalho é oferecer um apoio aos professores de Matemática do Ensino Básico na apresentação de diferentes estratégias para a prova de um mesmo teorema, usando a Geometria relacionada à Álgebra. Ao final deste trabalho se relatam algumas aplicações e curiosidades envolvendo o Teorema de Pitágoras.

Palavras-chave: Pitágoras. Estratégias. Biografia.

ABSTRACT

This work consists of a part of the biography of Pythagoras and his Pythagorean School. It shows a selection of some initial concepts for the good understanding and that relate to the diverse proofs of the Pythagorean Theorem that are presented in sequence. At the beginning of some of Pythagoras's theorem, a small biography is used to create an introduction of the subject with historical context. The main objective of this work is to offer support to teachers of Basic Mathematics in the presentation of different strategies for the proof of the same theorem, using Geometry related to Algebra. At the end of this paper we report some applications and curiosities involving the Pythagorean Theorem.

Keywords: Pythagoras. Strategies. Academic work.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Alguns dos grandes problemas enfrentados nos dias de hoje na busca de um ensino público de qualidade, são a falta de uma formação de qualidade, condições precárias de trabalho, políticas púbicas nem sempre efetivas e falhas na aplicação pedagógica. Tomamos a iniciativa de usar nesse trabalho algumas demonstrações do teorema de Pitágoras com o intuito de trazer questionamentos, reflexões para o desenvolvimento de novas práticas pedagógicas que ajudem a melhorar essa busca.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, traz nos conceitos e procedimentos de Espaço e forma o uso do teorema de Pitágoras no preparo do aluno com objetivos a utilizar diversas fontes de informações e recursos tecnológicos para adquirir conhecimento e também construí-lo, que venha a questionar a realidade, formular problemas e resolvê-los com uso do pensamento lógico, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise crítica escolhendo procedimentos e verificando sua adequação. Justificando o uso nesse trabalho de experimentos como desenhos, materiais concretos que darão base às discussões em sala de aula para construções formais e demonstrações matemáticas. Nos PCNs temos: "Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem ver a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos."

Ciente da necessidade de um conhecimento prévio, vamos propor antes do trabalho em si, uma relação de conteúdos para uma construção significativa. A diversidade ali apresentada tem a preocupação de dar base e de desenvolver no aluno o raciocínio dedutivo lógico.

O trabalho foi elaborado de uma forma que o aluno tenha gosto pela Matemática, ao vê-la sendo desenvolvida de diversas formas, trabalhando vários pontos de vistas chegando sempre no mesmo final que é a demonstração do teorema de Pitágoras.

2. PITÁGORAS: UM BREVE HISTÓRICO

Pitágoras (569 – 480 a.C.) nascido na ilha de Samos, próximo de Mileto onde nasceu Tales 50 anos antes, foi um grande filósofo e matemático. Em seu século, foi uma das figuras mais influentes e ao mesmo tempo uma das personagens mais misteriosas e cercadas de mitos da Matemática. Por não existirem trabalhos seus como evidência, muitas são as referências sobre suas produções, como Philolaus de Króton (470 – 390 a.C.), Platão (427 – 399 a.C.), Aristóteles (384 – 322 a.C.) e Proclus (420 – 485 d.C.), tornando-o assim difícil para historiadores separar o mito, as lendas e os fatos reais. Por esse motivo, as aulas envolvendo esse teorema tornam-se momentos excelentes para angariar atenção em sala de aula destacando os fatos e as incertezas históricas, facilitando a aproximação da Matemática com Filosofia, História e Geografia.

De todas as referências, o que é certo é o desenvolvimento que Pitágoras trouxe para o entendimento lógico numérico, sendo responsável por fazer os números deixarem de ser apenas para contagem, cálculos simples passando a serem apreciados por suas características, suas propriedades, suas relações e seus padrões. Desta forma, iniciou-se o entendimento que os números existem mesmo fora do mundo palpável.

Seu desenvolvimento matemático se inicia em viagens pelo mundo antigo. Algumas referências trazem passagens de Pitágoras pela Índia e pela Inglaterra, mas as maiores contribuições vieram de suas passagens pelo Egito e pelo contato com os babilônios, passagens essas onde teve oportunidade de ser instruído por Ferekid, Anaksimander e Tales, filósofos de grande reputação. Percebeu em suas viagens, que apesar do avanço alcançado, muitos cálculos eram realizados como receitas, algo que a ser seguido sem questionamentos, pois sendo o resultado certo era naquela época irrelevante o questionamento e Pitágoras percebeu que esses cálculos estavam carecendo de um exame da lógica presente.

Passou aproximadamente duas décadas nessas viagens assimilando todo conhecimento adquirido, e retornou a Samos com o propósito de reunir em uma escola pessoas que possuíam em comum o estudo filosófico e o estudo matemático, algo que acabara de adquirir com a percepção da Matemática como ciência questionadora e não apenas uma ferramenta. Em seu retorno, para a criação dessa escola esperava encontrar diversos estudantes interessados no mesmo propósito, porém sua cidade, diferentemente de quando havia saído para seus estudos, estava dominada pelo tirano Polícrates, conhecido por ser intolerante e avesso a mudanças.

Chegou a ser convidado por Polícrates a fazer parte de sua corte, porém, percebendo suas intenções de controlá-lo, Pitágoras procurou abrigo em uma região remota de Samos para continuação de seus estudos. Esse afastamento deu início ao embrião do que viria a ser a famosa Escola da Sociedade ou Irmandade Pitagórica. Primeiramente montou o que chamaria de Semicírculo de Pitágoras, que tinha além da continuação e desenvolvimento dos estudos, uma ideia de reorganização social bem fora dos padrões da época.

Diz a lenda que esse embrião recebeu seu primeiro aluno de uma forma inusitada, sendo seduzido a frequentar as aulas iniciais na condição de receber 3 ébolos (moeda local) por cada aula. Com o passar do tempo, Pitágoras percebeu que a obrigação de frequência desse aluno se transformou em entusiasmo por conhecimento, onde Pitágoras teve a ideia de fingir não ter mais como pagar e com isso o curso interromperia o curso, cessando o andamento dos ensinamentos. O aprendiz rejeitou a situação e solicitou que continuassem as aulas sem necessidade de pagamento. Esse mesmo estudante é tido como quem teria sugerido que atletas devessem comer carne para a melhora da constituição física. Sua identidade é desconhecida, porém há sugestões de que também se chamasse Pitágoras e que foi o único aluno dessa escola proveniente de Samos.

As ideias sobre a reforma social fizeram Pitágoras acabar com o Semicírculo, tendo que sair de Samos com sua mãe e seu único discípulo para Crotona, região onde se encontra hoje no Sul da Itália, mas que na época pertencia à Grécia. Nessa nova morada conheceu Milo, o homem mais rico da região e que era um grande campeão olímpico.

Milo além de atleta apreciava a Filosofia e a Matemática, algo que facilitou seu entendimento em receber Pitágoras. Essa aliança entre a maior força física da época com o grande sábio, deu origem à nova organização, a Irmandade Pitagórica. Bem maior que a primeira ordem feita em Samos, foi composta aproximadamente por 600 seguidores, com capacidade de compreender os ensinamentos ali passados por Pitágoras e com capacidade de contribuir com novas ideias e demonstrações. Algo interessante dessa Irmandade é que para entrar o postulante deveria doar todas as suas posses e se em algum momento decidisse sair receberia o dobro daquilo que doou e ainda teria uma lápide com seu nome estampado em sua memória.

Muitas contribuições são atribuídas aos Pitagóricos, como o Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, a fundamentação científica da música, a descoberta de grandezas incomensuráveis, a construção dos sólidos regulares (figuras cósmicas), a teoria das proporcionais (teoria das médias), diversas classificações dos números (paridade, amigos, perfeitos, deficientes, abundantes, primos e compostos), atribuição dos números figurados (triangulares, oblongos, quadrangulares, pentagonais dentre outros), a divisão de segmentos em média e extrema razão, a obtenção dos ternos pitagóricos e a esfericidade da Terra. Uma atribuição interessante direta ao mestre Pitágoras é a criação da palavra filósofo, dada em um encontro de Pitágoras com o príncipe Leon de Pilos, enquanto assistiam as olimpíadas da época. Ao ser questionado por Leon para que se autodescrevesse Pitágoras respondeu: "Eu sou um filósofo", e emendando explicou ao príncipe o significado da diferente e nova palavra, como trecho retirado do livro O último teorema de Fermat, [16] SIGH, 1998.

"*A vida príncipe Leon, pode muito ser comparada a estes jogos. Na imensa multidão aqui reunida alguns vieram à procura de lucros, outros foram trazidos pelas esperanças e ambições da fama e da glória. Mas entre eles existem uns poucos que vieram para observar e entender tudo que se passa aqui. Como a vida acontece a mesma coisa. Alguns são influenciados pela busca de riqueza, enquanto outros são dominados pela febre do poder e da dominação. Mas os melhores entre os homens se dedicam a descoberta do significado e do propósito da vida. Eles tentam descobrir os segredos da natureza. Este tipo de homem eu chamo de filósofo, pois embora nenhum homem seja completamente sábio, em todos os assuntos, ele pode amar a sabedoria como a chave para os segredos da natureza.* "

Muitas descobertas e aspirações da Escola Pitagórica eram publicados, porém seus detalhes permaneciam entre os Pitagóricos, e isso era guardado em forma de juramento pela Irmandade da mesma forma que eram as descobertas matemáticas. Há referências de que um membro da Irmandade tendo sido afogado por ter quebrado tal juramento ao publicar a descoberta do Dodecaedro, construído a partir de doze pentágonos regulares.

Toda essa prática somada a rituais religiosos centrada nos números explica parte de todo o mito criado sobre Pitágoras e a Irmandade. Essa religiosidade se dava, pois acreditavam que se descobrissem as relações entre os números, descobririam os segredos espirituais do universo. Uma de suas buscas por caracterização de números, deu origem a percepção dos números perfeitos que foram aperfeiçoados mais a frente, aproximadamente dois séculos, por Euclides em sua obra. A relação entre os números e a natureza fascinava Pitágoras e sua Irmandade, e compreender essa relação era sua busca.

Uma das primeiras relações descobertas foi da harmonia musical e harmonia numérica contada por Lamblicus, estudioso do século IV, em *"Pythagoreanism"*. Anterior à descoberta de Pitágoras, os tocadores de lira de quatro cordas percebiam que era harmonioso ao tocarem certas notas juntas e o som fosse agradável, porém não entendiam porque algumas notas juntas eram harmoniosas e outras não. Além disso não possuíam nenhum tipo de aparelho ou utensílio para afinar seus instrumentos a não ser puramente seus ouvidos.

Ao se debruçar em seus estudos no intuito de entender a relação harmônica da música, descobriu a relação entre ela e a matemática. Iniciou sua pesquisa golpeando martelos ao mesmo tempo e após analisando os que geravam sons harmoniosos, percebendo uma relação simples entre esses martelos e suas massas. Martelos que tinham as massas como frações umas das outras geravam sons harmônicos, da mesma forma nos quais suas massas não gozassem dessa característica geravam ruídos. Essa foi a primeira descoberta relacionando leis matemáticas com leis da natureza, nesse caso Física.

Já a descoberta da relação matemática foco desse trabalho, o teorema que leva o nome de Pitágoras, fornece uma equação verdadeira para todos os triângulos retângulos. O ângulo reto define uma perpendicular, e esta define as dimensões do espaço onde vivemos, isto é, define a própria estrutura do mundo tridimensional. Uma importante menção é a de que essa relação já era usada por babilônios, egípcios e chineses mil anos antes que Pitágoras, porém os mesmos não tinham a noção do porquê isso ocorria, motivando o nome do teorema para Pitágoras por ter sido o primeiro a prová-lo matematicamente.

Como sua vida, a morte de Pitágoras também é envolvida em lendas, com diferentes versões. Numa delas as doutrinas filosóficas e políticas de Pitágoras já influenciavam Crotona, outras cidades gregas e o sul da Itália, levando a dominação política dessas áreas, algo que gerou próximo do ano de 500 a.C. uma revolta popular violenta, chegando até a sede da Irmandade a qual foi cercada e incendiada. Poucos foram os sobreviventes. Após sua morte seus ideais políticos se perderam, muitos de seus discípulos foram para outras regiões da Grécia, dando continuidade com suas descobertas matemáticas e filosóficas que permanecem até os dias de hoje.

3. CONCEITOS BÁSICOS

3.1 RAZÃO E PROPORÇÃO

A razão entre duas grandezas *a* e *b*, com $b \neq 0$, é o quociente entre *a* e *b* que pode ser indicado por $\frac{a}{b}$ ou por uma outra fração equivalente a essa. Chamamos o numerador da razão de duas grandezas de antecedente e o denominador de consequente.

A proporção é a igualdade de duas razões: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, onde o número k é chamado de constante da proporção. Chamamos os termos *a* e *d* de extremos e aos termos *b* e *c* chamamos de meios da proporção. Dizemos que os números *a, b, c* e *d* todos diferentes de zero, formam nesta ordem, uma proporção se, e somente se, a razão $\frac{a}{b}$ for igual à razão $\frac{c}{d}$. Neste caso, dizemos também que "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*".

Propriedades das proporções:

Propriedade 1: Em qualquer proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, isto é, dadas duas razões em proporção $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com *b* e *d* $\neq 0$, temos que $a.d = b.c$.

DEMONSTRAÇÃO

Tendo a proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplicando em cada lado da igualdade por $b.d$, obtemos, $\frac{a}{b}.bd = \frac{c}{d}.bd$. Que é o mesmo que $a.d = b.c$, provando assim a propriedade.

Propriedade 2: Em toda proporção, a soma (ou a diferença) dos antecedentes (numeradores) está para a soma (ou a diferença) dos consequentes (denominadores), assim como cada antecedente está para o consequente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Isso acontece pois,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a.(b+d) = b.(a+c) \Leftrightarrow ab + ad = ba + b \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Assim, $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$. E de modo análogo, temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

3.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção usamos o material de Geometria Básica, módulo 2 da Fundação CECIERJ ([6] FERREIRA, 2007) como referência.

Utilizaremos letras maiúsculas *A, B, C, ...* para designar pontos e letras minúsculas *a, b, c, ...* para designar retas.

DEFINIÇÃO

O conjunto constituído por dois pontos *A* e *B* e por todos os pontos que se encontram entre *A* e *B* é chamado segmento *AB.* Representaremos a medida do segmento *AB* por $\overline{AB}$.

DEFINIÇÃO

Dois triângulos são denominados congruentes quando três ângulos e três lados de um triângulo são ordenadamente congruentes aos três ângulos e aos três lados do outro triângulo.

A indicação fica como na figura 6, com os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.

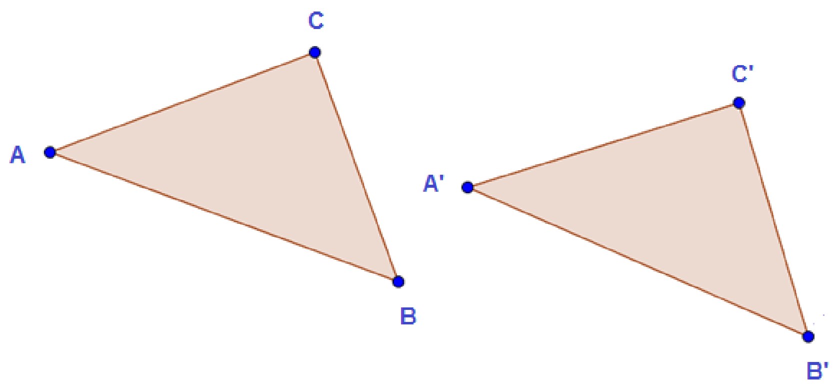


Figura 1: Congruência de triângulos (1)

Escrevemos $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$ para denotar que os triângulos ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ são congruentes. Isto é, o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'* se forem satisfeitas as seguintes condições:

Lado AB congruente ao lado $A'B'$, lado BC congruente ao lado $B'C'$, lado AC congruente ao lado $A'C'$, ângulo $A\hat{B}C$ congruente ao ângulo $A'\hat{B}'C'$, ângulo $B\hat{C}A$ congruente ao ângulo $B'\hat{C}'A'$ e ângulo $C\hat{A}B$ congruente ao ângulo $C'\hat{A}'B'$. Essa configuração também denotará a ordem de correspondência dos ângulos congruentes tão quanto para os lados congruentes.

É interessante observar que em dois triângulos congruentes, são também congruentes entre si:

a) os lados opostos a ângulos congruentes,

b) os ângulos opostos a lados congruentes.

Existem 4 casos de Congruência de triângulos, isto é, existem 4 conjuntos de condições a serem observadas para confirmar que dois triângulos sejam congruentes, onde o 1º caso é considerado um postulado.

1º Caso: LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos possuírem ordenadamente congruentes dois lados e se os ângulos compreendidos entre esses dois lados são congruentes, então esses triângulos são congruentes.

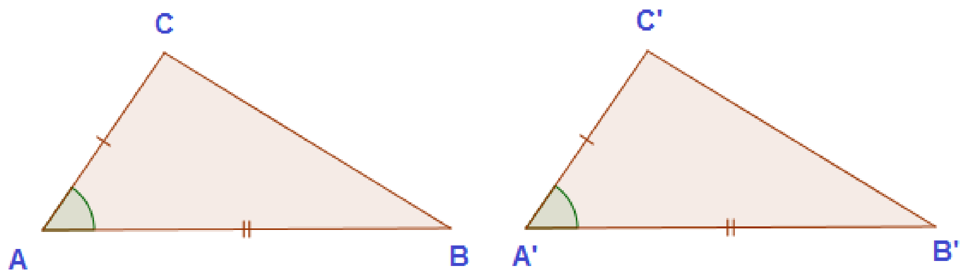


Figura 2: Congruência de triângulos (2)

Com esse 1º caso podemos provar o teorema do ângulo externo.

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Todo ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

DEMONSTRAÇÃO

Para a demonstração desse teorema temos inicialmente um triângulo *ABC*. Nesse, prolongamos o lado *CA* definindo a semirreta $\overrightarrow{CA}$ e marcamos um ponto D de modo que *A* esteja entre *C* e *D*. Marcamos em seguida o ponto médio *E* do segmento *AB* e um segmento *CF* que passe por *E*, de tal forma que o segmento *CE* seja congruente ao segmento *AF*. Após, traçamos o segmento *AF* como vemos na figura 3. Queremos provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$.

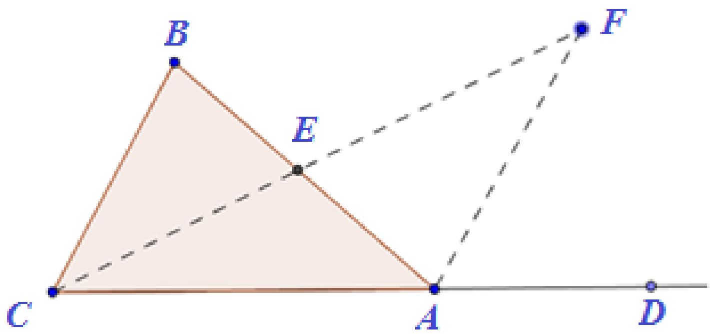


Figura 3: Teorema do ângulo externo (1)

Como $BE \equiv AE, B\hat{E}C \equiv A\hat{E}F$ (pois são opostos pelo vértice) e $CE \equiv EF$, os triângulos BEC e AEF são congruentes, pelo caso LAL. Por consequência $\hat{B} \equiv E\hat{A}F$, mas como o segmento *AF* divide o ângulo $B\hat{A}D$ então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$, fazendo com que $\hat{B} < B\hat{A}D$.

Analogamente, tomando o ponto médio M de *CA* traçamos o segmento *BG* passando por M tal que $BM \equiv MG$.

Daí os triângulos BMC e AMG são congruentes pelo caso LAL.

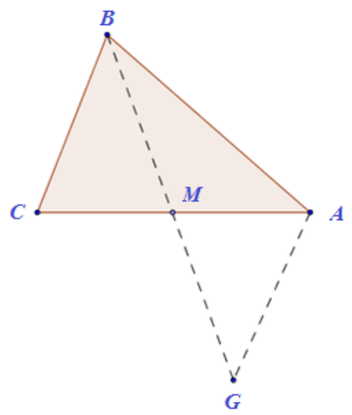


Figura 4: Teorema do ângulo externo (2)

Consequentemente, $\hat{C} \equiv M\hat{A}G$. Como a semirreta $\overrightarrow{GA}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$, concluímos que $\hat{C} < B\hat{A}D$.

2º Caso: ALA (ângulo, lado, ângulo)

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

DEMONSTRAÇÃO

Iniciamos com dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* tais que o lado AB seja congruente ao lado $A'B'$, ângulo $\hat{A}$ congruente ao ângulo $\hat{A}'$ e ângulo $\hat{B}$ congruente ao ângulo $\hat{B}'$.

Pelo caso LAL, para mostrar a congruência desses triângulos nos basta mostrar a congruência entre os lados AC e $A'C'$.

Por absurdo, vamos considerar que $\overline{AC} > \overline{A'C'}$ ou $\overline{AC} < \overline{A'C'}$.

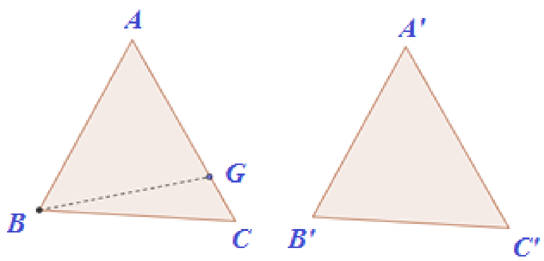


Figura 5: Congruência de triângulos (3)

Sendo inicialmente $\overline{AC} > \overline{A'C'}$, então existirá um ponto *G*, pertencente ao lado AC tal que $\overline{AG} \equiv \overline{A'C'}$.

Daí, como $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Segue pelo caso LAL, que os triângulos *ABG* e *A'B'C'* serão congruentes, fazendo com que o ângulo $A\hat{B}G$ seja congruente ao ângulo $A'\hat{B}'C'$ o que é absurdo. Pois, como o ponto *G* pertence ao lado $\overline{AC}$, o ângulo $A\hat{B}G$ é menor que o ângulo $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$. Sem perdas, para $\overline{AC} < \overline{A'C'}$ a demonstração é análoga. Logo $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e daí $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

3º Caso: LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos possuem os três pares de lados correspondentes congruentes então os triângulos são também congruentes.

DEMONSTRAÇÃO

Iniciamos com dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* tais que o lado AB seja congruente ao lado $A'B'$, lado BC congruente ao lado $B'C'$ e lado AC congruente ao lado $A'C'$.

Fica definido o semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ que não possui o ponto *A*. Marcamos um ponto *D* tal que o segmento BD seja congruente ao lado $A'B'$ e o ângulo entre a semirreta BD e a semirreta $\overrightarrow{BC}$ seja congruente ao ângulo $A'\hat{B}'C'$, conforme esquema da figura 6.

Como, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $C\hat{B}D \equiv A'\hat{B}'C'$ e $\overline{BD} \equiv \overline{A'B'}$, segue pelo caso LAL que os triângulos *DBC* e *A'B'C'* são congruentes.

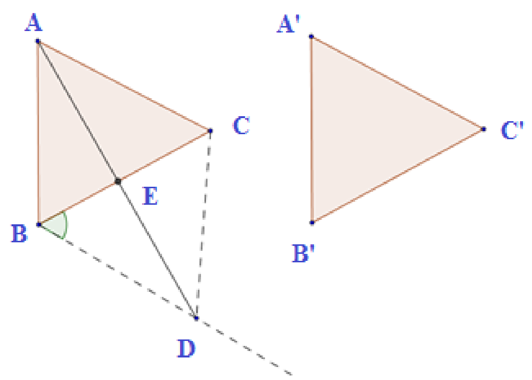


Figura 6: Congruência de triângulos (4)

É de fácil observação que os triângulos *BDA* e *CAD* são isósceles, tendo ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{D}A$ congruentes e também congruentes os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$. Ao analisar que: $B\hat{A}C = B\hat{A}D + C\hat{A}D \equiv B\hat{D}A + C\hat{D}A = B\hat{D}C$, e usando o caso LAL de congruência tem-se que os triângulos *ABC* e *DBC* são congruentes, sendo assim $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

4º Caso: LAAo (lado, ângulo, ângulo)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto também a esse lado, então eles são congruentes.

DEMONSTRAÇÃO

Iniciamos com os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, com lado BC congruente ao lado $B'C'$, e ângulos congruentes $\hat{A}$ e $\hat{A}'$, $\hat{B}$ e $\hat{B}'$.

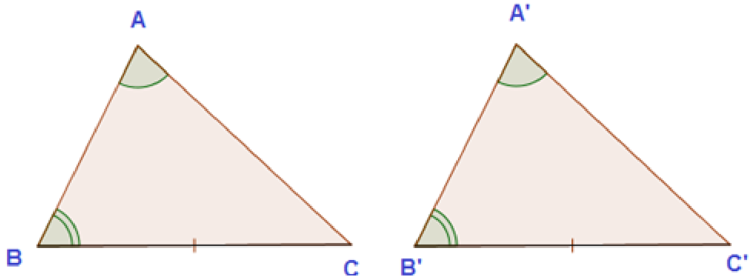


Figura 7: Congruência de triângulos (5)

Vamos sobrepor os dois triângulos de forma que o lado $B'C'$ recaia sobre BC, os quais são correspondentes. Isso nos fará com que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ também se coincidam. Por absurdo vamos supor a existência de um ponto *D* no lado AB ocupando a nova posição do vértice A', conforme a figura 8.

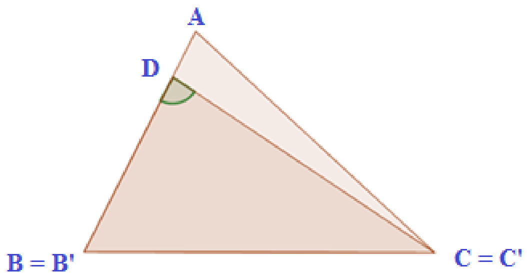


Figura 8: Congruência de triângulos (6)

Isso acarretaria que o ângulo $B\hat{D}C$ externo em relação ao triângulo *CDA* seria maior que o ângulo $\hat{A}$ do triângulo *ABC*. Por outro lado, o ponto *D* estando no prolongamento, o ângulo $\hat{A}$ seria maior que o ângulo $B\hat{D}C$. Essas duas constatações acarretariam um absurdo, pois o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{A}'$ que é o mesmo ângulo $B\hat{D}C$. Sendo assim o ponto *D* coincide com o ponto *A*, o que faz com que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* sejam congruentes.

3.3 PARALELISMO

DEFINIÇÃO

Duas retas de um plano são ditas paralelas quando não possuem ponto em comum.

AXIOMA DAS PARALELAS

Por um ponto não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à reta r.

Ao cortar duas retas paralelas por uma reta transversal formam-se oito ângulos, como na figura 9, sendo que os ângulos $\psi, \mu, \varepsilon, \lambda$ são ângulos internos e os ângulos $\alpha, \beta, \pi, \gamma$ são externos. São atribuídas as seguintes denominações:

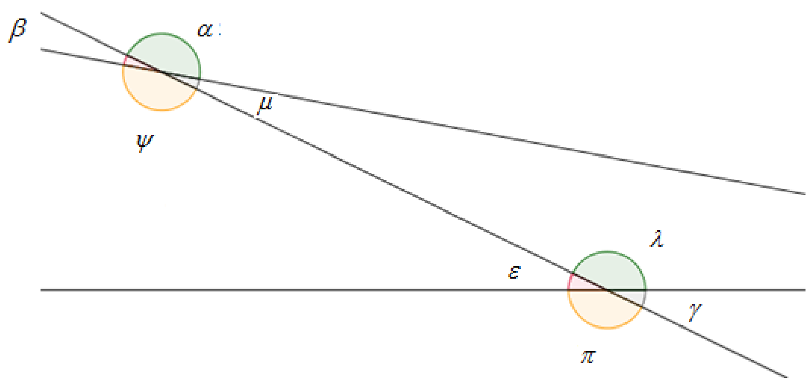


Figura 9: Ângulos entre retas

Ângulos correspondentes: α e λ, μ e γ, ψ e π, β e ε.

Ângulos alternos internos: ψ e λ, μ e ε.

Ângulos alternos externos: β e γ, α e π.

Ângulos colaterais internos: ψ e ε, μ e λ.

Ângulos colaterais externos: α e γ, β e π.

TEOREMA 1

Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t, nos pontos A e B respectivamente. Se α e β são ângulos alternos internos congruentes, então as retas r e s são paralelas.

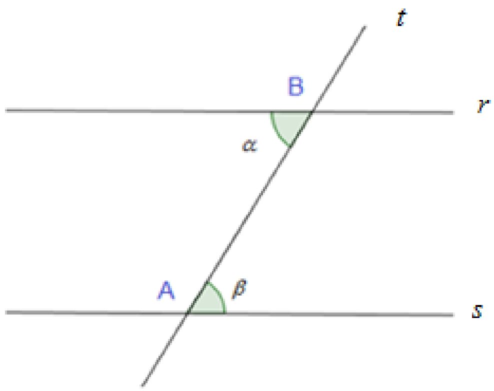


Figura 10: Terorema 1 (1)

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que as retas r e s se cruzem em um ponto *C*, formando assim o triângulo *BCA* do qual α é um ângulo externo, sendo β um ângulo interno não adjacente a ele, como na Figura 11. Pelo que vimos no Teorema do Ângulo Externo, é certo que $\alpha > \beta$, o que contradiz a hipótese. Portanto, teremos as retas r e s paralelas.

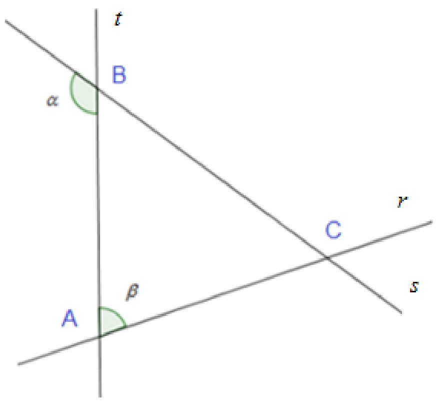


Figura 11: Terorema 1 (2)

TEOREMA 2

Se as retas r e s forem interceptadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos correspondentes sejam congruentes, então r e s são necessariamente retas paralelas.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos supor, por absurdo que r e s se interceptem em um ponto *P*. Sendo *A* e *B* os pontos de interseção das retas r e s com a reta t respectivamente, definindo assim o triângulo *ABP*. Temos dois ângulos α e β , correspondentes e congruentes por hipótese, como na figura 12.

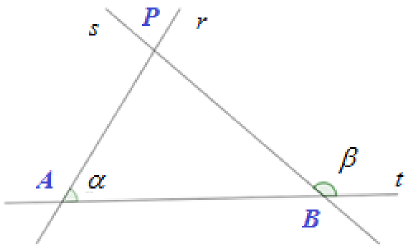


Figura 12: Teorema 2

Analisando agora o triângulo *ABP*, temos o seu ângulo α interno e o ângulo β externo e pelo teorema do ângulo externo $\alpha < \beta$, o que contradiz a hipótese de que α e β são congruentes. Logo temos que as retas r e s são paralelas.

TEOREMA 3

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então seus ângulos correspondentes são congruentes.

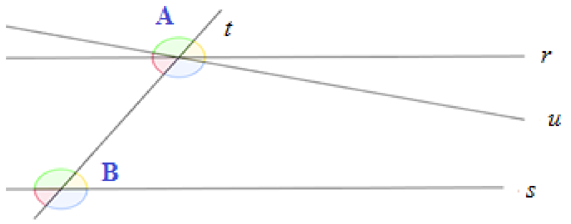


Figura 13: Teorema 3

DEMONSTRAÇÃO

Sejam r e s retas paralelas e t uma reta transversal que corta r e s em A e B respectivamente. Vamos propor uma reta u transversal que passa pelo ponto A, onde formam--se quatro ângulos congruentes aos correspondentes formados pela reta s e a transversal t como vemos na figura 13. Usando o teorema 2, as retas r e u são paralelas. Como o ponto A pertence às retas r e u, elas são coincidentes. Agora temos que os ângulos formados pelo cruzamento das retas t e r são congruentes aos correspondentes formados pelo cruzamento das retas s e t. Com isso também temos o Teorema das Paralelas.

TEOREMA DAS PARALELAS

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então seus ângulos alternos internos são congruentes.

DEMONSTRAÇÃO

Usando o teorema 3, dadas duas retas paralelas r e s, dois ângulos correspondentes C e D são congruentes, sendo um interno e outro externo. Sem perdas tomando C como externo, o ângulo oposto pelo vértice de C será interno e alterno de D, logo será também congruente ao ângulo C.

3.4 ÁREA DE FIGURAS PLANAS ELEMENTARES

Nesta seção usamos as demonstrações do excelente livro Medidas e Forma em Geometria ([7] LIMA, 1997) como referência.

3.4.1 Área do quadrado

Demonstraremos que todo quadrado de lado medindo n tem área igual a n^2.

Essa demonstração será base para as demonstrações de outras figuras elementares e convencionaremos como unidade de área um quadrado unitário (quadrado com lado medindo uma unidade de comprimento). Daí, todo quadrado com lado medindo 1 unidade de comprimento, terá área igual a 1.

Um quadrado Q com lados medindo o número inteiro n, pode ser decomposto por paralelas aos lados, tanto verticalmente quanto horizontalmente formando n^2 quadrados, todos com área unitária. Logo o quadrado Q tem a área igual a n^2. (Veja na figura 14 com $n = 8$).

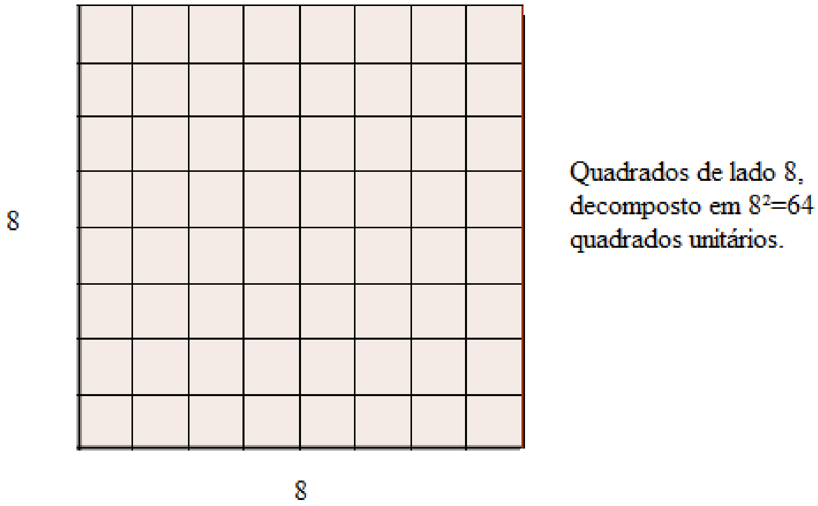


Figura 14: Área do quadrado (1)

Se um quadrado Q tem lado medindo $\frac{1}{n}$, decompomos o quadrado unitário, mediante paralelas aos seus lados em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q (veja figura 15 com $n = 4$). Daí, temos que

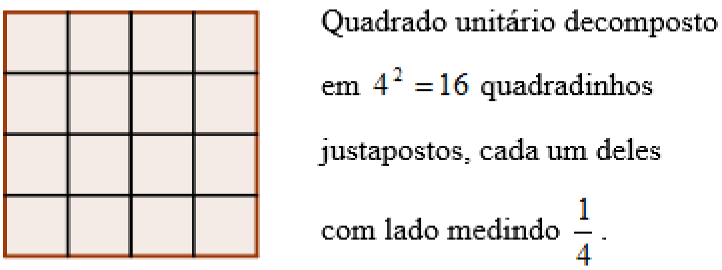


Figura 15: Área do quadrado (2)

$$n^2 . (\text{Área de } Q) = 1.$$

Assim,

$$\text{Área de } Q = \frac{1}{n^2}.$$

Para um quadrado Q com lado medindo um número racional $\frac{m}{n}$, decompomos cada lado de Q em m segmentos, cada um medindo $\frac{1}{n}$. Em seguida, traçamos paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão e obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um com lado medindo $\frac{1}{n}$ de comprimento, como vemos na figura 16 com $m = 3$ e $n = 2$.

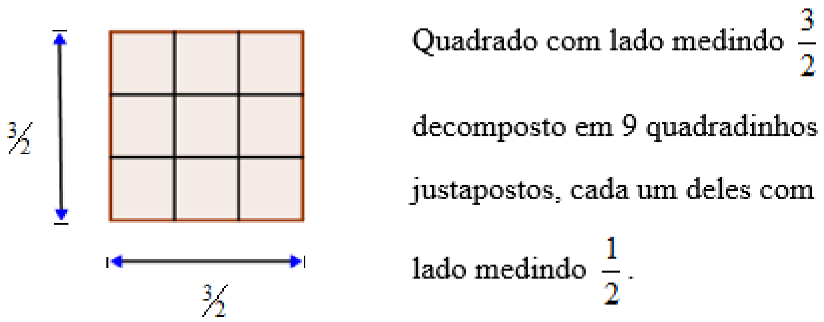


Figura 16: Área do quadrado (3)

Como a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$, temos que:

$$\text{Área de } Q = m^2.\frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Portanto,

$$\text{Área de } Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Provaremos agora que a área do quadrado com lado n, sendo n irracional, também é n^2. Iniciaremos com um modo indireto, dados a, b, c como na figura 17, qualquer que seja o número $b < n^2$, provaremos que b é menor que a área de Q. Em seguida, dado qualquer número $c > n^2$, provaremos que c é maior que a área de Q. Isto nos dará que a área do quadrado Q não será um número b menor, nem mesmo um número c maior do que n^2. Por fim, teremos que a área do quadrado Q é igual a n^2.

Na figura 17, podemos observar quadrados com lados horizontais e verticais e quadrados com lados inclinados. Qualquer que seja a unidade de comprimento adotada tem-se que a medida do lado, de pelo menos um dos dois tipos de quadrados, será irracional, isso pelo teorema de Pitágoras, provado de diferentes formas nesse trabalho.

Seja b um número tal que $b < n^2$. Tomamos um número racional r, de modo que $b < r^2 < n^2$. Para isto, basta tomar r como sendo uma aproximação de n por falta, com erro menor que $n - \sqrt{b}$. Então, $n - r < n - \sqrt{b}$ e daí $\sqrt{b} < r < n$.

Logo, $b < r^2 < n^2$.

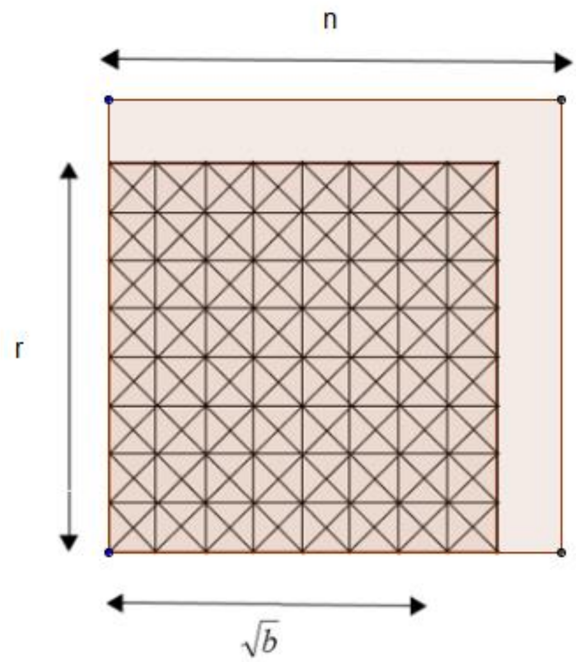


Figura 17: Área do quadrado (4)

Deste modo, temos um quadrado de lado r contido no quadrado Q (maior) de lado n, com isso, $r^2 <$ área do quadrado Q.

Isso ocorre, pois, contido no quadrado Q temos um outro quadrado Q' de lado r e sua área é igual a r^2. Por estar contido no quadrado Q, a área do quadrado $Q' <$ área do quadrado Q. Sendo assim, $r^2 <$ área do quadrado Q. Porém, $b < r^2$. Então, $b <$ área do quadrado Q. Podemos afirmar que para qualquer que seja o número real b, menor que n^2, teremos b menor que a área do quadrado Q. Por outro lado, de forma análoga se prova que qualquer que seja o número real c, maior que n^2, c é maior que a área de Q. Logo, não podendo a área do quadrado Q ser nem maior nem menor que n^2, por exclusão a área do quadrado Q deve ser igual a n^2.

3.4.2 Área do retângulo

Dado um retângulo de altura medindo a e base medindo b, tem-se que sua área é igual a $a.b$.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos um quadrado Q de lado medindo $a+b$ decomposto em quatro figuras usando paralelas aos seus lados como a figura 18. Essas figuras são um quadrado de lado a com área a^2, um quadrado de lado b com área b^2 e dois retângulos congruentes com dois lados medindo a e outros dois medindo b que denotamos suas áreas por R.

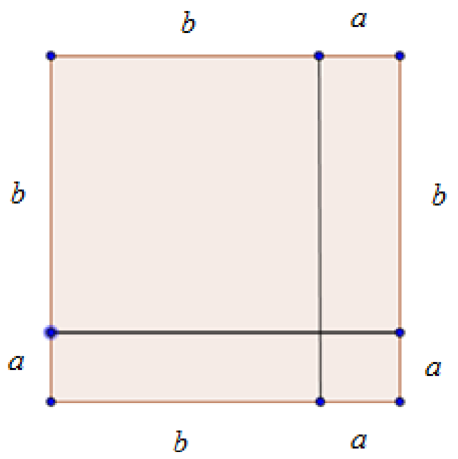


Figura 18: Área do retângulo

Como já provamos antes, a área do quadrado Q é $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + 2.a.b + b^2$. Por outro lado, ao calcular a área do quadrado Q pela soma das áreas decompostas temos que área do quadrado $Q = a^2 + b^2 + 2.R$. Ao igualar as duas equações, vemos que:

$$a^2 + 2.a.b + b^2 = \text{Área do quadrado } Q = a^2 + b^2 + 2.R$$

$$2.a.b = 2.R$$

$$a.b = R.$$

3.4.3 Área do paralelogramo

Dado um paralelogramo de altura medindo a e base medindo b, tem-se que sua área é igual a $a.b$.

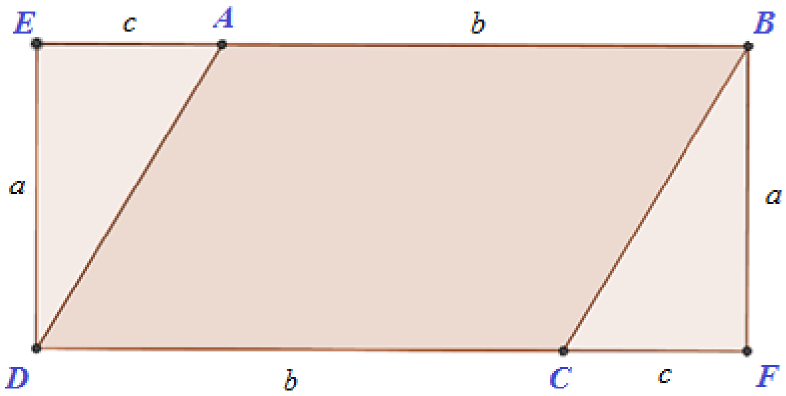


Figura 19: Área do paralelogramo (1)

DEMONSTRAÇÃO

Iniciaremos propondo um paralelogramo *ABCD* com base *DC* medindo b e altura *BF* medindo a, interior ao retângulo *EBFD* de altura a e base $b+c$, conforme figura 19.

Notamos que os dois triângulos *ADE* e *CBF* juntos formam um retângulo de base c e altura a, com área $a.c$. A área do retângulo *EBFD* é dada por $(b+c).a = a.b + a.c$. Ao retirar a área desses dois triângulos, $a.c$, da área do retângulo *EBFD* nos restará tão somente a área do paralelogramo, que será $a.b$. Logo, a área do paralelogramo *ABCD* é dada por $a.b$, onde a é sua altura e b sua base.

3.4.4 Área do triângulo

Dado um triângulo de altura medindo a e base medindo b, teremos sua área igual a $\frac{a.b}{2}$.

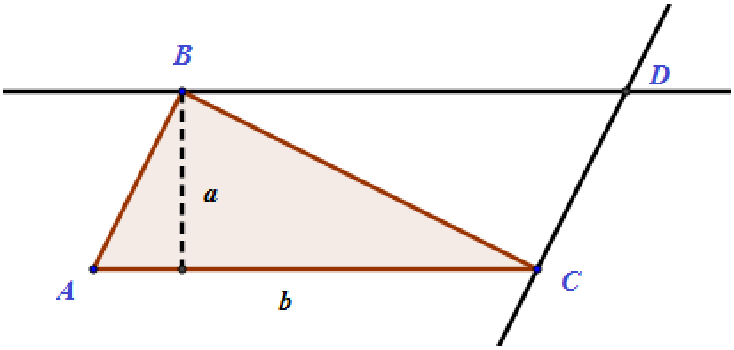


Figura 20: Área do paralelogramo (2)

DEMONSTRAÇÃO

Vejamos o triângulo ABC da figura 20, com base b sendo um lado do triângulo e altura a, o segmento perpendicular que liga essa base AC ao vértice oposto *B*, à essa base. Em seguida definimos um ponto D que é a interseção entre a reta paralela ao lado AC que passa pelo ponto B e a reta paralela ao lado AB que passa pelo ponto C. Fica formado assim o paralelogramo $ABDC$ de área $a.b$.

Podemos observar que, o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{D}$, pois são ângulos opostos de um paralelogramo e os ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}A$ são congruentes pelo teorema das paralelas, logo os triângulos ABC e DCB são congruentes. Com isso temos que:

$$\text{Área do paralelogramo } ABDC = \text{área do } \Delta ABC + \text{área do } \Delta DCB$$

$$a.b = 2.(\text{área do } \Delta ABC) \Rightarrow \text{Área do } \Delta ABC = \frac{a.b}{2}.$$

3.5 TEOREMA DE TALES

DEFINIÇÃO

Dois segmentos *AB* e *CD* são comensuráveis se houver um segmento *EF* tal que $\overline{AB} = m.\overline{EF}$ e $\overline{CD} = n.\overline{EF}$, com *m* e *n* números inteiros positivos. Se não existirem *m* e *n* que satisfaçam essa situação dizemos que *AB* e *CD* são segmentos incomensuráveis.

TEOREMA DE TALES

Se três retas paralelas *r*, *s* e *t* são cortadas por duas transversais *m* e *n* nos pontos *A*, *B* e *C* e nos pontos *A'*, *B'* e *C'*, respectivamente, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

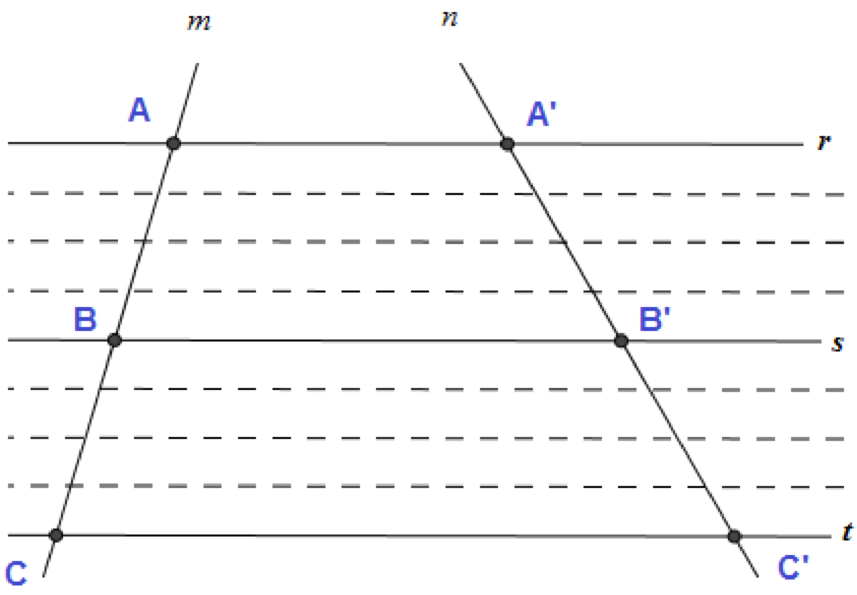


Figura 21: Teorema de Tales (1)

DEMONSTRAÇÃO

Vamos usar os segmentos AB e BC da reta m e considerá-los comensuráveis. Então existe um segmento *u* submúltiplo tanto de AB quanto de BC. Com isso teremos *p* e *q*, inteiros positivos, tais que $\overline{AB} = p.u$ e $\overline{BC} = q.u$ formando a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p.u}{q.u} = \frac{p}{q}$.

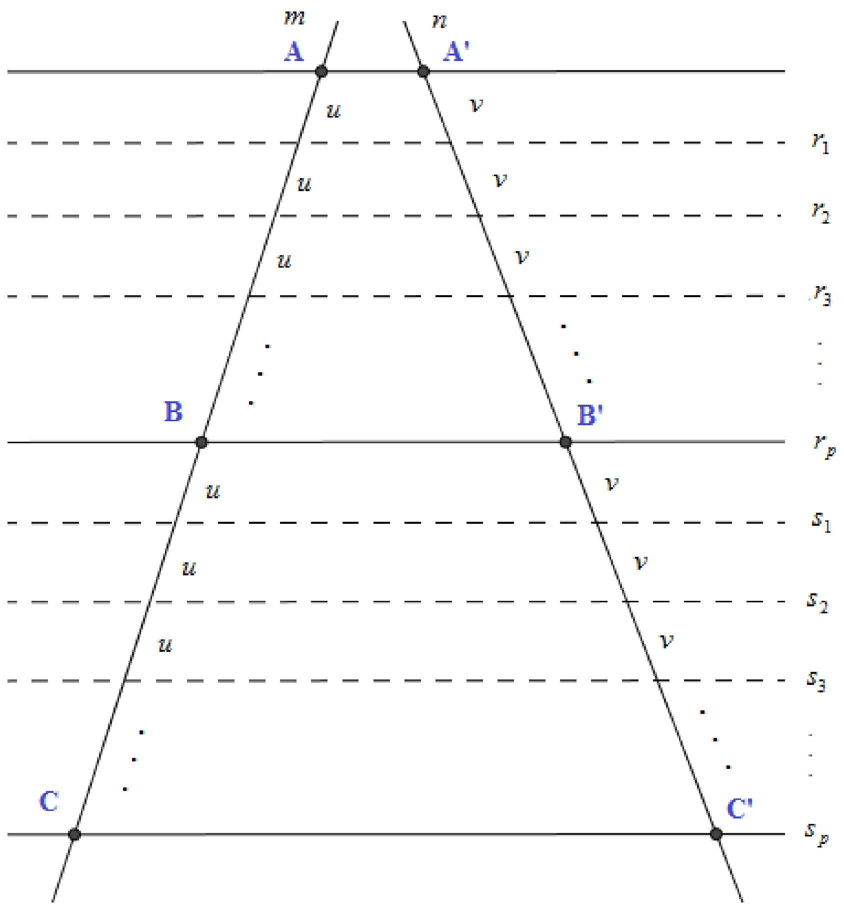


Figura 22: Teorema de Tales (2)

Assim podemos considerar que a reta m é interceptada por retas paralelas $r_1, r_2, r_{3,} ...r_p$ e $s_1, s_2, s_{3,} ...s_q$ de tal forma que tenhamos na reta m $p + q$ segmentos congruentes a u, como vemos na figura 22. Dessa forma, na reta n, os segmentos $A'B'$ e $B'C'$ são divididos, respectivamente, em p e q partes, que medem cada um deles v, de tal forma que $\overline{A'B'} = p.v$ e $\overline{B'C'} = q.v$. E analogamente podemos montar a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{p.v}{q.v} = \frac{p}{q}$. Com isso temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ provando assim o teorema de Tales (no caso em que $AB \; e \; BC$ são comensuráveis).

Encontramos uma demonstração completa desse teorema na Coleção Professor de Matemática, no volume 2 dos Tópicos de Matemática Elementar ([4] MUNIZ NETO, 2013).

3.6 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

DEFINIÇÃO

Dois triângulos são ditos semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes sejam proporcionais.

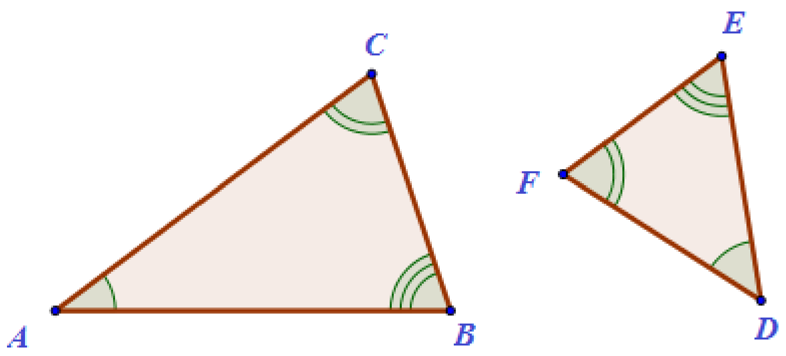


Figura 23: Semelhança de triângulos

Na figura 23 os triângulos *ABC* e *DEF*, são semelhantes com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$. Neste caso, $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$ e existe $k > 0$ tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{DE}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{EF}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{DF}}} = k$. Esse número k é chamado a razão de semelhança entre os triângulos *ABC* e *DEF*. Usamos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ para representar que os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes.

Como acontece com a congruência de triângulos, a semelhança também pode ser garantida entre triângulos a partir de características mínimas, organizadas também como casos.

Caso: AAA ou AA_o (ângulo, ângulo, ângulo)

Este é conhecido como o segundo caso de semelhança de triângulos, nos diz que se dois triângulos *ABC* e *DEF* possuírem os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ congruentes e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ também congruentes então esses triângulos são semelhantes.

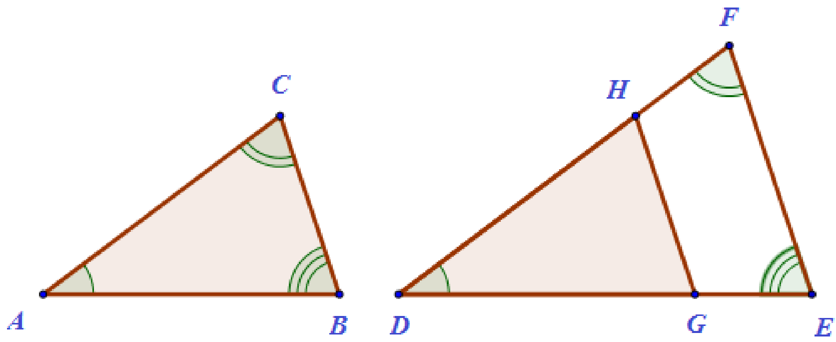


Figura 24: Semelhança de triângulos - Caso AA

DEMONSTRAÇÃO

Iniciaremos pela verificação de que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ são também congruentes, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º e por $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$.

Para isto, marcamos o ponto G pertencente ao segmento DE tal que o segmento DG seja congruente ao lado AB. Após marcaremos o ponto H tal que o segmento GH seja paralelo ao lado EF. Essa construção nos traz que os triângulos ABC e DGH sejam congruentes pelo caso ALA de congruência, obrigando ao lado AB congruente ao lado DG e lado AC congruente ao lado DH. Pelo teorema de Tales, como o segmento GH é paralelo ao segmento EF e corta as retas DE e DF, então existe a seguinte proporção de segmentos: $\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}}$. Ao verificar que $\overline{AB} = \overline{DG}$ e $\overline{AC} = \overline{DH}$, e substituindo na igualdade anterior temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Usando as mesmas táticas podemos provar também que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, fazendo assim com que os triângulos ABC e DEF sejam semelhantes, pois é verdadeiro que sendo $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ então $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = r$, onde r é a constante de proporção.

Na hipótese inicial com segmento GH paralelo ao lado AB e usando os mesmos raciocínios teremos também que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = r.$$

Caso: LAL (lado, ângulo, lado)

Conhecido como primeiro caso de semelhança e nos diz que se houver dois triângulos *ABC* e *DEF*, com o ângulo $\hat{A}$ congruente ao ângulo $\hat{D}$ e a proporção dos lados: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, verdadeira então esses triângulos são semelhantes.

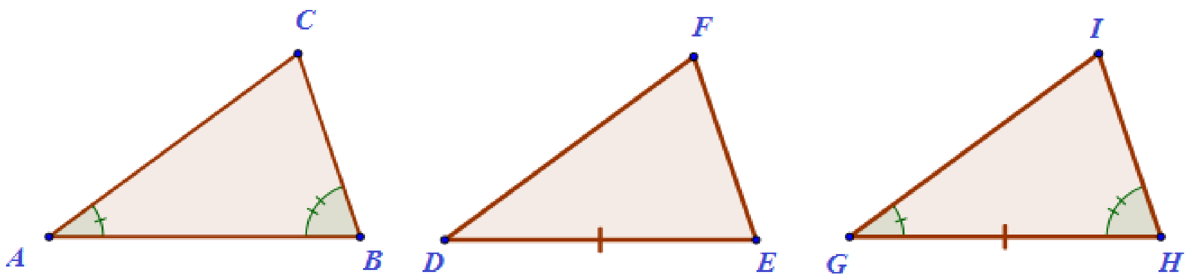


Figura 25: Semelhança de triângulos - Caso LAL

DEMONSTRAÇÃO

Isso ocorrerá pois se houver um terceiro triângulo *GHI* com lado GH congruente ao lado DE, $\hat{G} = \hat{A}$ e $\hat{H} = \hat{B}$, pelo caso AAA de semelhança de triângulos ele será semelhante ao triângulo ABC ($\Delta ABC \sim \Delta GHI$). Isso faz com que os lados correspondentes sejam proporcionais, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}$; pela igualdade anterior de lado GH congruente ao lado DE, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}$ e pela hipótese inicial que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, tem-se $\frac{\overline{AC}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. Logo, o lado GI é congruente ao lado DF.

Como $DF \equiv GI$, $\hat{D} \equiv \hat{A} \equiv \hat{G}$ e $DE \equiv GH$, segue pelo caso LAL de congruência de triângulos que $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ e sendo $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Caso: LLL (lado, lado, lado)

Dado como terceiro caso de semelhança de triângulos, nos garante que havendo dois triângulos *ABC* e *DEF*, tais que, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k$ então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

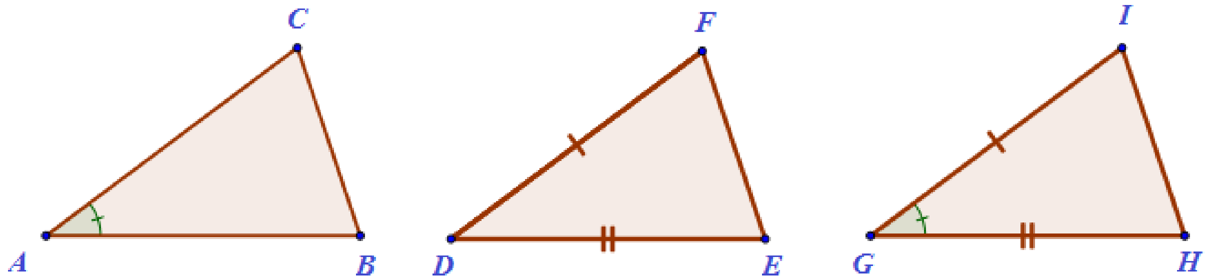


Figura 26: Semelhança de triângulos - Caso LLL

DEMONSTRAÇÃO

Para isso construiremos um novo triângulo *GHI* com $\hat{G} \equiv \hat{A}$, lado GH congruente ao lado DE e lado GI congruente ao lado DF.

Usando essas igualdades e as proporcionais da hipótese, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GI}}$ e ao atentar que $\hat{G} \equiv \hat{A}$ será verdadeiro que $\Delta ABC \sim \Delta GHI$, pelo caso LAL, formando assim a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$.

Como por hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, e por construção $\overline{DE} \equiv \overline{GH}$, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

Ao comparar essa última igualdade com $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$ teremos então que lado HI é congruente ao lado EF.

Ao verificar que $\overline{DE} \equiv \overline{GH}$, $\overline{DF} \equiv \overline{GI}$ e $\overline{EF} \equiv \overline{HI}$, temos $\Delta DEF \equiv \Delta GHI$ pelo caso LLL de congruência de triângulos.

Assim, como $\Delta DEF \equiv \Delta GHI$ e $\Delta ABC \sim \Delta GHI$, segue que, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

3.7 RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Seja *ABC* um triângulo retângulo, com ângulo reto em *A*, catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, hipotenusa $\overline{BC} = a$, altura referente ao ângulo reto $\overline{AH} = h$, projeção ortogonal de *c* sobre *BC* sendo $\overline{BH} = m$ e projeção ortogonal de *b* sobre *BC* sendo $\overline{CH} = n$. Esse ponto *H* é o ponto conhecido como pé da altura relativa à hipotenusa e temos as seguintes relações métricas:

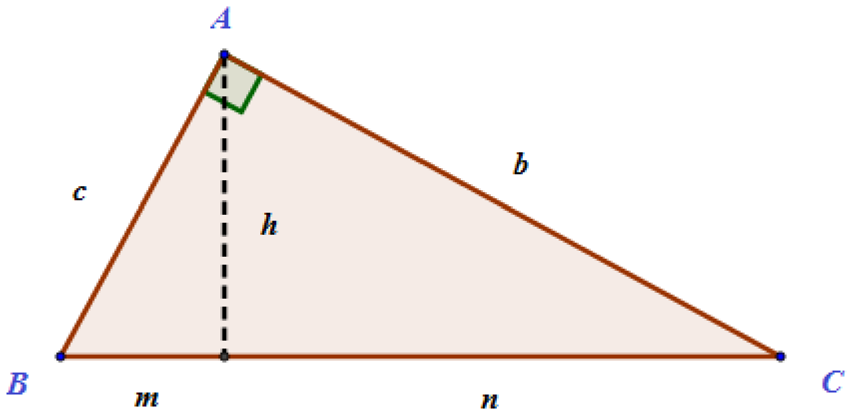


Figura 27: Relações métricas nos triângulos retângulos

(a) $a.h = b.c$.

(b) $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

(d) $h^2 = m.n$.

DEMONSTRAÇÃO

Inicialmente podemos observar que a hipotenusa $\overline{BC} = a = m + n$. Partimos agora para as provas das relações (a) e (b).

Temos que os ângulos $B\hat{A}C \equiv A\hat{H}C$ e $H\hat{C}A \equiv B\hat{C}A$ o que nos possibilita afirmar que os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes pelo caso AA_o de semelhança de triângulos, com os ângulos correspondentes $B\hat{A}C \leftrightarrow A\hat{H}C$, $A\hat{B}C \leftrightarrow C\hat{A}H$ e $\hat{C} \leftrightarrow \hat{C}$. Com isso vamos dispor das seguintes proporções:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = r \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b} = r.$$

Usando particularmente a igualdade $\frac{c}{h} = \frac{a}{b}$, temos que $a.h = b.c$, e ao usar a igualdade $\frac{b}{n} = \frac{a}{b}$ temos que $b^2 = a.n$. Da mesma forma, usando que os triângulos *ABC* e *AHB*, são semelhantes é possível provar a segunda parte da relação $c^2 = a.m$.

Para provar a relação (c), basta somar membro a membro as duas relações resultantes (b):

$$b^2 + c^2 = a.n + a.m \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 .$$

E para a prova da relação (d) basta multiplicar as relações de (b) membro a membro:

$$b^2.c^2 = a.n.a.m \Rightarrow (b.c)^2 = a^2.m.n .$$

Mas já foi provado que $a.h = b.c$, então:

$$(b.c)^2 = a^2.m.n \Rightarrow (a.h)^2 = a^2.m.n \Rightarrow a^2.h^2 = a^2.m.n \Rightarrow h^2 = m.n .$$

3.8 TEOREMA DAS CORDAS

Se uma reta passa pelo ponto *P* e corta uma circunferência nos pontos *A* e *B*, o produto $\overline{PA}\,.\,\overline{PB}$ é constante.

DEMONSTRAÇÃO

Dividiremos a prova em dois casos:

1º Caso: Ponto *P* interior à circunferência

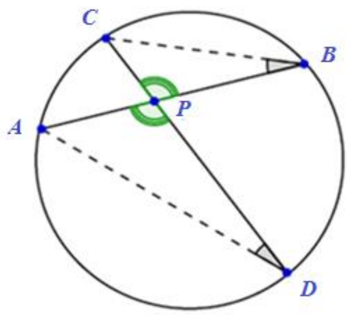


Figura 28: Teorema das cordas - 1º caso

Na circunferência a corda *AB* passa pelo ponto *P*, com *CD* sendo outra corda da mesma circunferência que também passa pelo ponto *P*.

Os triângulos *PAD* e *PCB* são semelhantes pelo caso AA$_o$, pois os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes por serem inscritos na circunferência com arco *AC* e os ângulos $A\hat{P}D$ e $C\hat{P}D$ também são congruentes por serem opostos pelo vértice. Logo a proporção $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ é verdadeira, com $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$ sendo assim o produto $\overline{PA}\,.\,\overline{PB}$ é constante. Pois, do mesmo modo, se A_1B_1 é outra corda da circunferência que também passa por *P*, teremos $\overline{PA_1}.\overline{PB_1} = \overline{PC}.\overline{PD}$.

2º Caso: Ponto *P* exterior à circunferência

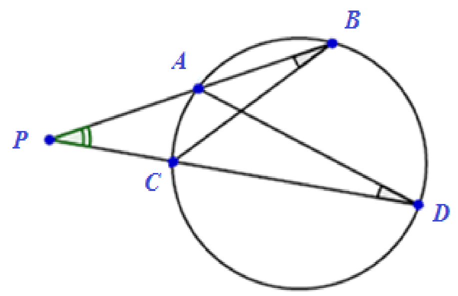


Figura 29: Teorema das cordas - 2º caso

Na circunferência uma reta passa pelo ponto *P* e corta essa circunferência nos pontos *A* e *B*. Traçamos uma outra reta que também passe pelo ponto *P* e que corte essa circunferência pelos pontos *C* e *D*.

Verificamos que os triângulos *PAD* e *PCB* são semelhantes pelo caso AA$_o$, pois ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes por serem inscritos na circunferência com o mesmo arco *AC* e o ângulo $\hat{P}$ pertence aos dois triângulos. Logo a proporção $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ é verdadeira, com $\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PC}\,.\,\overline{PD}$. Sendo assim o produto $\overline{PA}\,.\,\overline{PB}$ é constante.

3.9 FÓRMULA DE HERON

Essa conhecida forma de calcular a área *S* de um triângulo *ABC* de lados a, b e c será demonstrada com apoio de uma publicação de 2001 da revista “The College Mathematics Journal” ([10] NELSEN, 2001). A dita fórmula nos traz que a área *S* de um triângulo *ABC* qualquer é dada por: $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo *ABC*.

Antes da demonstração da Fórmula de Heron demonstraremos dois lemas.

Lema 1. A área S de um triângulo é igual ao produto da medida do raio da sua circunferência inscrita pela medida do seu semiperímetro.

DEMONSTRAÇÃO

Seja ABC um triângulo qualquer. Decompondo o triângulo ABC em três outros triângulos em que suas bases são: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ com alturas iguais ao raio r da circunferência inscrita no triângulo *ABC* (veja figura 30), obtemos:

$$S = \frac{r.(x+y)}{2} + \frac{r.(y+z)}{2} + \frac{r.(x+z)}{2} = \frac{r}{2}.(2x+2y+2z) = r.(x+y+z) = p.r\ .$$

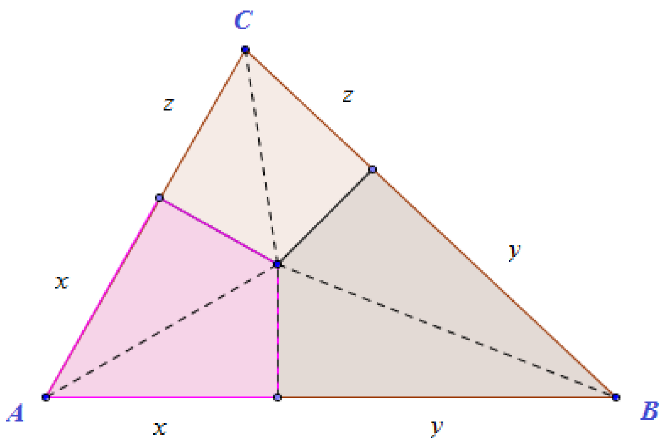


Figura 30: Fórmula de Heron - Lema 1

Lema 2. Se α, β e γ são três ângulos positivos tais que $\alpha+\beta+\gamma = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$, então $tg\alpha.tg\beta + tg\beta.tg\gamma + tg\alpha.tg\gamma = 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Dado um retângulo *ABCD*, com um dos lados medindo 1 unidade de comprimento e ângulo interno $\hat{D} = \alpha+\beta+\gamma = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$, formamos quatro triângulos retângulos internos ao retângulo *ABCD*, conforme a figura 31.

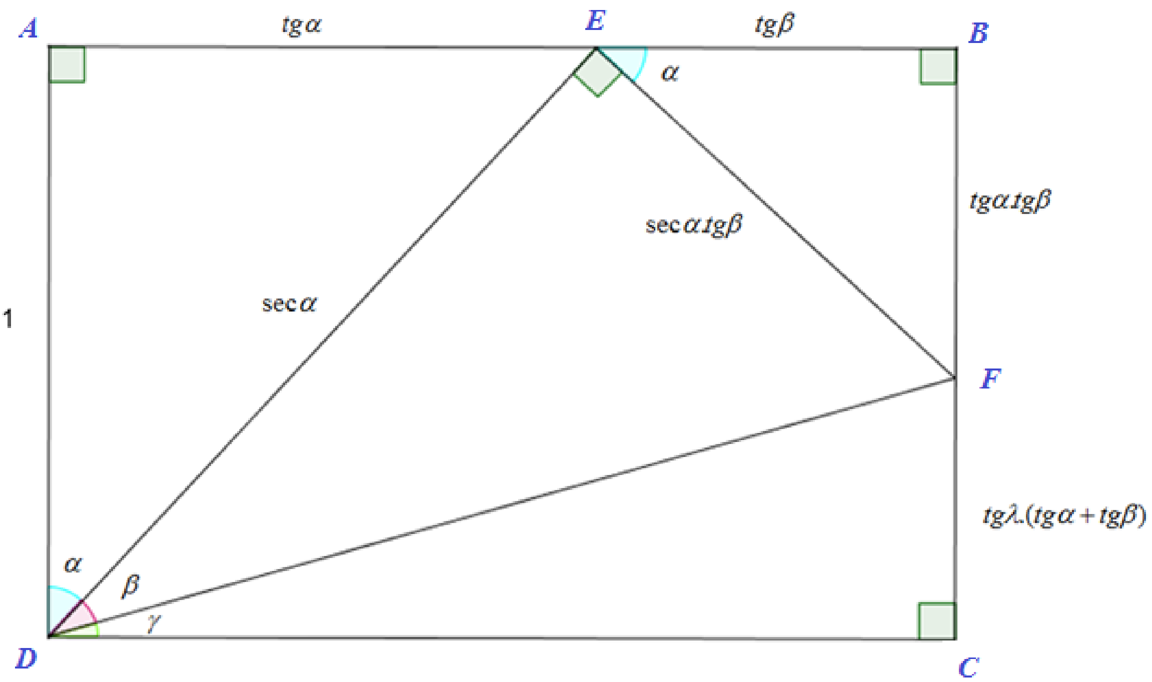


Figura 31: Fórmula de Heron - Lema 2

Utilizando algumas relações trigonométricas temos que:

Ao analisar o triângulo *ADE*,

$$tg\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\overline{AE}}{1} \Rightarrow \overline{AE} = tg\alpha.$$

E também que:

$$sen\alpha = \frac{tg\alpha}{\overline{ED}} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{tg\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Verificamos também que os triângulos *ADE* e *BEF* são semelhantes pelo caso AA_o de semelhança de triângulos, isso ocorre, pois, ao somar os ângulos internos do triângulo *ADE* temos $\alpha + 90° + A\hat{E}D = 180°$ e ao analisar a meia volta temos que $A\hat{E}D + 90° + F\hat{E}B = 180°$.

Ao igualar as duas equações temos $\alpha = F\hat{E}B$, logo os triângulos *ADE* e *BEF* são semelhantes.

Agora pelo triângulo *DEF* temos que:

$$tg\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} \Rightarrow tg\beta = \frac{\overline{EF}}{\sec\alpha} \Rightarrow \overline{EF} = \sec\alpha . tg\beta\,.$$

E também pelo triângulo *EFB* temos que:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{EB}}{\overline{EF}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{EB}}{\sec\alpha.tg\beta} \Rightarrow \overline{EB} = \cos\alpha.\sec\alpha.tg\beta \Rightarrow \overline{EB} = tg\beta \text{ e}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{EB}} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\overline{BF}}{tg\beta} \Rightarrow \overline{BF} = tg\alpha.tg\beta.$$

Com esses resultados podemos observar que $\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = tg\alpha + tg\beta$ e ao analisarmos o triângulo *CDF* temos que:

$$tg\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} \Rightarrow tg\gamma = \frac{\overline{CF}}{tg\alpha + tg\beta} \Rightarrow \overline{CF} = tg\gamma.(tg\alpha + tg\beta).$$

Agora, como:

$$1 = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = tg\alpha.tg\beta + tg\gamma.(tg\alpha + tg\beta) = tg\alpha.tg\beta + tg\gamma.tg\alpha + tg\gamma.tg\beta.$$

Isto prova o lema 2.

FÓRMULA DE HERON

A área *S* de um triângulo qualquer *ABC* de lados *a*, *b* e *c*, é dada por:

$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo *ABC*.

DEMONSTRAÇÃO

Iniciaremos a demonstração a partir do triângulo *ABC*, nas figuras 32 e 33.

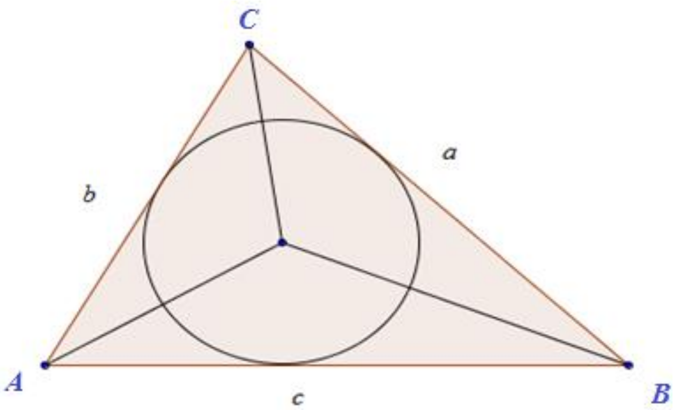


Figura 32: Fórmula de Heron (1)

Traçamos a circunferência inscrita no triângulo *ABC* e parte das bissetrizes internas que liga os vértices ao centro da circunferência inscrita, conforme figura 32.

Na figura 33 representamos também na circunferência inscrita, os raios nos pontos de tangência e subdivisões dos lados no triângulo *ABC*. Formando assim, dois a dois triângulos retângulos congruentes.

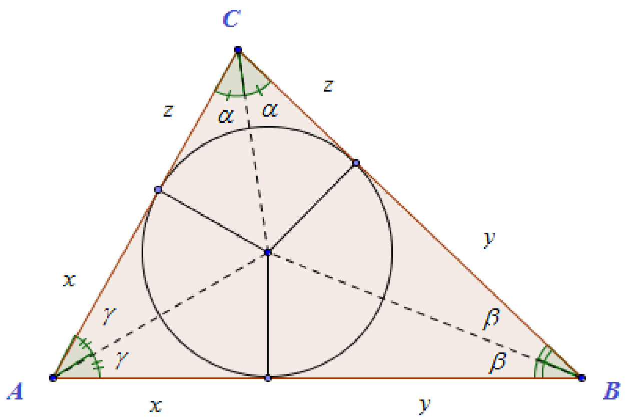


Figura 33: Fórmula de Heron (2)

É fácil perceber que o semiperímetro, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, do triângulo *ABC* satisfaz as seguintes relações:

$$p = x + y + z = x + a = y + b = z + c$$

e

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

Pelo Lema 2,

$$tg\alpha.tg\beta + tg\beta.tg\gamma + tg\alpha.tg\gamma = 1.$$

Logo,

$$\frac{r}{z}.\frac{r}{y} + \frac{r}{y}.\frac{r}{z} + \frac{r}{z}.\frac{r}{x} = 1.$$

Daí,

$$\frac{r^2.(x+y+z)}{x.y.z} = \frac{r^2.p}{x.y.z} = \frac{S^2}{p.(x.y.z)} = 1.$$

Então,

$$S^2 = p.(x.y.z)\ .$$

Comparando com a figura 30 e as relações deduzidas temos que:

$$x = p - a, y = p - b, z = p - c\ .$$

Ao analisar essas igualdades temos que:

$$S = \sqrt{p.(x.y.z)} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}\ .$$

4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

4.1 DEMONSTRAÇÃO USANDO COMPARAÇÃO SIMPLES DE ÁREAS

Essa é uma das demonstrações mais simples e conhecidas do teorema de Pitágoras, pode ser usada em sala de aula com materiais concretos de fácil aquisição e requer um conhecimento prévio de congruência de triângulos. Essas características possibilitam sua apresentação às turmas do 8º ano do Ensino Fundamental em diante.

Usamos nessa seção o livro The history of mathematics - An introduction ([3] BURTON, 2011) como referência.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos um triângulo retângulo com hipotenusa a e seus catetos b e c. Construímos a partir deste um quadrado com seu lado medindo $b+c$, conforme as figuras a seguir.

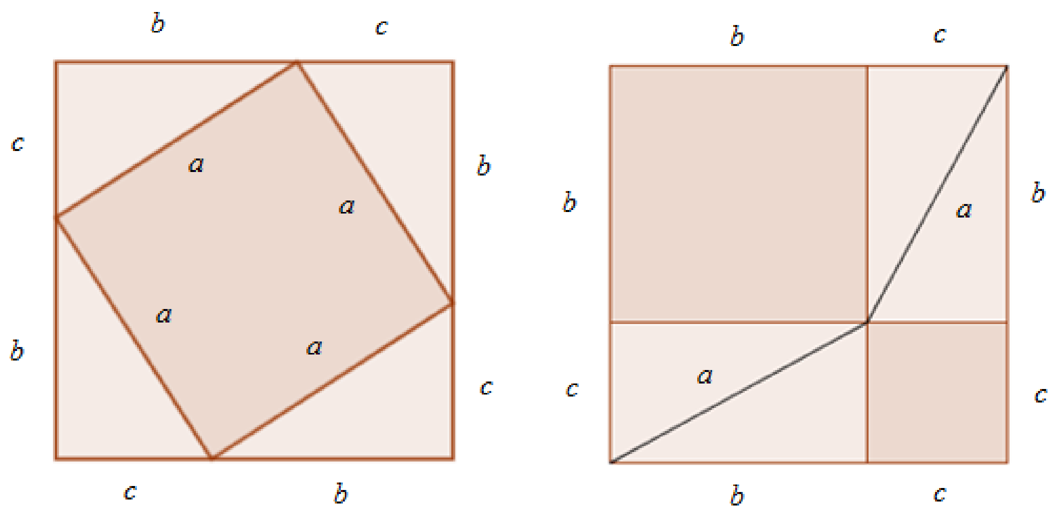


Figura 34: Demonstração do teorema de Pitágoras usando comparação de áreas

Os quatro triângulos retângulos mais claros do quadrado de lado $b+c$, da figura da esquerda, são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos. Ao reorganizar os triângulos retângulos mais claros montamos a figura da direita. Podemos verificar que a nova figura produzida é também um quadrado de lado $b+c$, logo tem a mesma área da figura anterior. Essa igualdade de áreas faz com que a área mais escura da figura da esquerda, que é um quadrado de lado *a*, seja igual a área mais escura da figura da direita, formada por dois quadrados um de lado *b* e outro de lado *c*. Teremos assim que $a^2 = b^2 + c^2$, provando o teorema de Pitágoras.

4.2 DEMONSTRAÇÃO USANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Esse método é muito utilizado nas demonstrações de sala aula do Ensino Fundamental pois usa os conhecimentos de semelhança de triângulos e utiliza também as relações métricas no triângulo retângulo. Por essas condicionantes sua apresentação é indicada às turmas a partir do 9º ano do Ensino Fundamental.

DEMONSTRAÇÃO

Esse método já foi provado com mais detalhes no capítulo 3 quando falamos sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Utilizamos um triângulo *ABC*, com ângulo reto em *A*, tendo seus lados medindo a, b e c como vemos na figura 35. Ao traçar sua altura h em relação a esse vértice *A* teremos dois triângulos retângulos *AHB* e *AHC* que serão semelhantes ao triângulo *ABC*, pelo caso AA_o de semelhança.

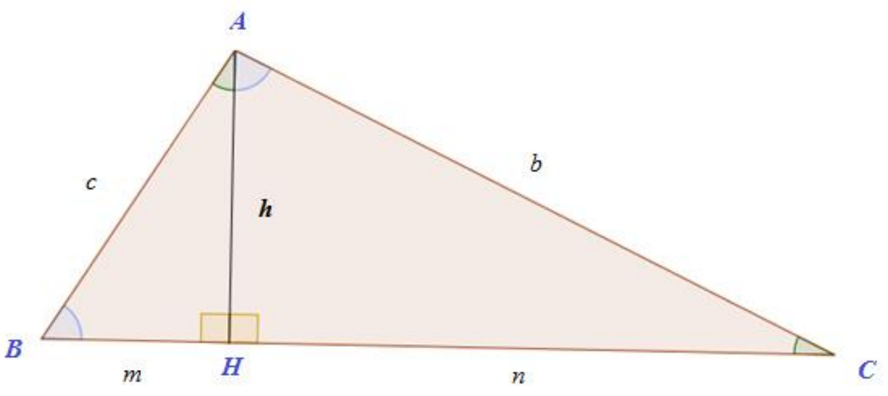


Figura 35: Demonstração do teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos

Pela proporção da semelhança dos triângulos *AHC* e *ABC* podemos verificar que $b^2 = a.n$ e analogamente usando os triângulos *AHB* e *ABC* teremos que $c^2 = a.m$. Ao montar um sistema e ao adicionar as duas equações, temos que:

$$\begin{cases} b^2 = a.n \\ c^2 = a.m \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = a.n + a.m = a.\underbrace{(m+n)}_{a} = a.a = a^2 .$$

Trazendo assim a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ e provando o teorema.

4.3 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

Henry Perigal Jr, até sua meia idade trabalhava como corretor de ações e era um amante da Matemática quando se tornou bibliotecário de um amigo próximo. Seus estudos e curiosidade o tornaram pesquisador de Astronomia e da Matemática. Em 1873 publicou sua interessante demonstração do teorema de Pitágoras, utilizando a técnica da dissecação, nesse caso de quadrados construídos sobre os catetos e hipotenusa.

Usamos como referência para essa demonstração o livro The Pithagorean Proposition ([8] LOOMIS, 1940).

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos um triângulo retângulo *ABC*, retângulo em *A*. Sobre o cateto AB construímos um quadrado. Nesse mesmo quadrado traçamos dois segmentos internos perpendiculares tais que o ponto de interseção seja o centro do quadrado e um desses segmentos perpendiculares seja paralelo à hipotenusa BC, conforme a figura 36.

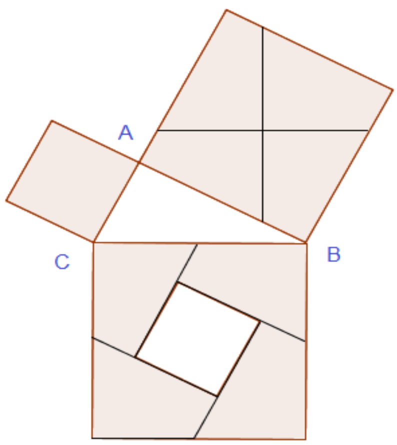


Figura 36: Demonstração de Perigal (1)

Os quadriláteros dissecados sobre o cateto AB são todos congruentes e possuem dois ângulos retos opostos. Vemos que o paralelismo entre a hipotenusa BC e um dos segmentos que passa no centro do quadrado dissecado garante que a figura branca obtida no centro do quadrado construído sob a hipotenusa BC seja um quadrado congruente ao quadrado construído sobre o cateto AC e isso prova o teorema. E isso realmente ocorre, pois, sendo O o centro do quadrado $ABEG$, encontrado pela interseção das diagonais AE e BG, temos $\overline{OE} \equiv \overline{OG} \equiv \overline{OA} \equiv \overline{OB}$, conforme a figura 37.

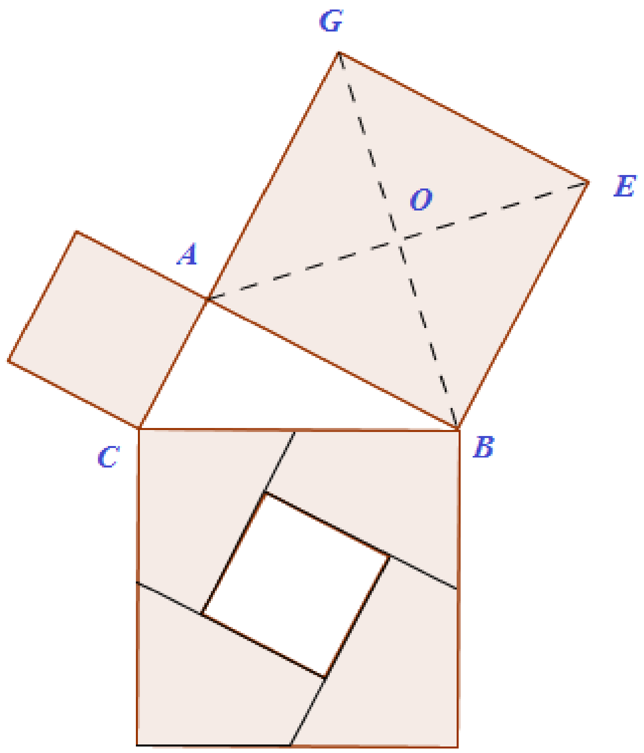


Figura 37: Demonstração de Perigal (2)

Usando o teorema das retas paralelas observamos que $F\hat{I}B \equiv H\hat{D}E \equiv I\hat{F}G \equiv A\hat{H}D$ e $F\hat{I}A \equiv B\hat{D}H \equiv E\hat{F}I \equiv G\hat{H}D$. E pelo caso LAA_o de congruência de triângulos temos que $\Delta GFO \equiv \Delta EDO \equiv \Delta BIO \equiv \Delta AHO$ e $\Delta HOG \equiv \Delta FOE \equiv \Delta DOB \equiv \Delta IOA$ confirmando assim que os quadriláteros *GFOH*, *EDOF*, *BIOD* e *AHOI* são congruentes entre si.

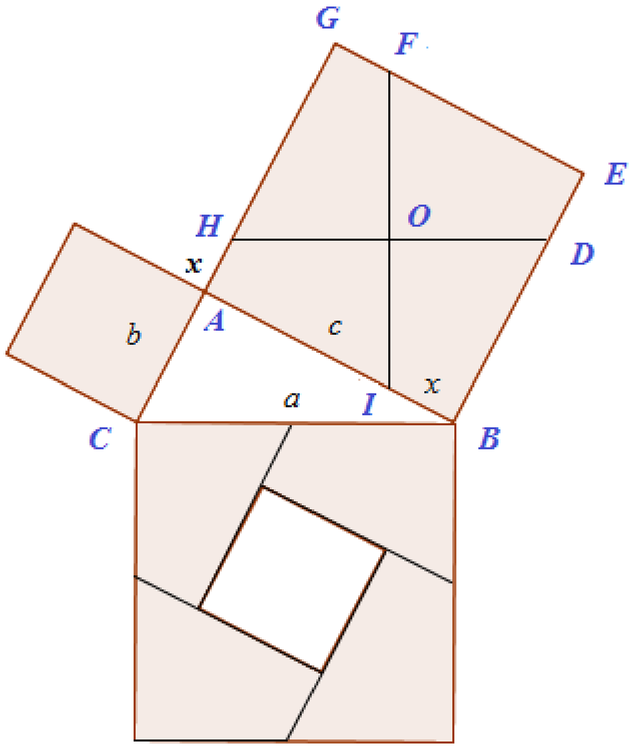


Figura 38: Demonstração de Perigal (3)

Ao encaixar esses quadriláteros no quadrado sob a hipotenusa $BC = a$, conforme a figura 39 e com $AC = b$, $AB = c$, $AH = x$, e o paralelogramo *CHDB* que:

$$\overline{CA} + \overline{AH} = \overline{BD}\text{, daí temos que } b + x = c \Rightarrow x = c - b.$$

Também temos que dado *y* lado do quadrilátero branco interior ao quadrado maior de lado *a*, temos que:

$$y + x = c \Rightarrow y = c - x = c - (c - b) = b.$$

Daí, esse quadrilátero branco citado tem lado *b*, sendo assim congruente ao segmento CA. E também pelo encaixe, os ângulos internos são retos, logo essa figura é congruente ao quadrado construído sobre o cateto AC. Então, $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, o que prova o teorema de Pitágoras.

4.4 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

Euclides de Alexandria, filósofo e matemático grego, conhecido como o “Pai da Geometria” produziu por volta de 300 a.C. a grande obra prima “Os elementos”, uma coleção de 13 livros repletos de axiomas e demonstrações que fundamentam a Geometria plana e espacial, os Números, a teoria das proporções e a Incomensurabilidade. Na proposição 47 do livro I dessa coleção existe o seguinte enunciado:

Em um triângulo retângulo *ABC*, com ângulo reto em *A*, tem-se: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, isto é, o teorema de Pitágoras.

Nessa seção, usamos como referência, o livro The Pithagorean Proposition ([8] LOOMIS, 1940).

DEMONSTRAÇÃO

Consideraremos três quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e uma perpendicular partindo do vértice do ângulo reto até um dos lados do quadrado construído sobre a hipotenusa, conforme a figura 39.

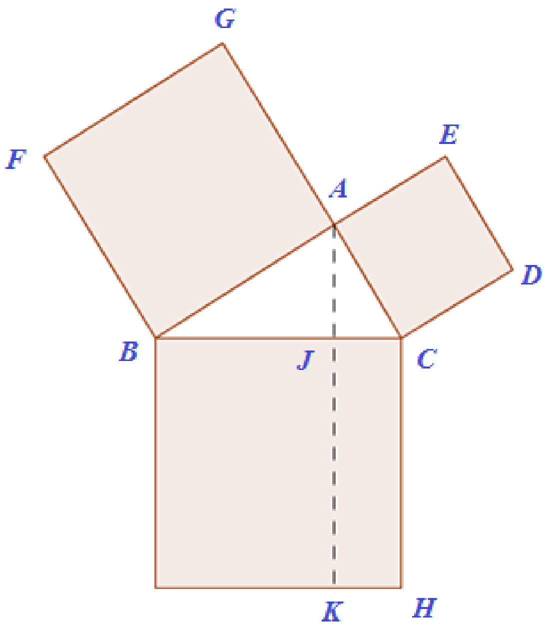


Figura 39: Demonstração de Euclides (1)

Provando que a área do quadrado maior sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados menores teremos o teorema de Pitágoras.

Para isso, traçamos dois novos segmentos auxiliares, AH e BD, produzindo assim dois triângulos congruentes *AHC* e *BDC*, pelo caso LAL (lado *AC* congruente à CD, ângulo $B\hat{C}D$ congruente ao ângulo $H\hat{C}A$ e lado BC congruente ao lado CH).

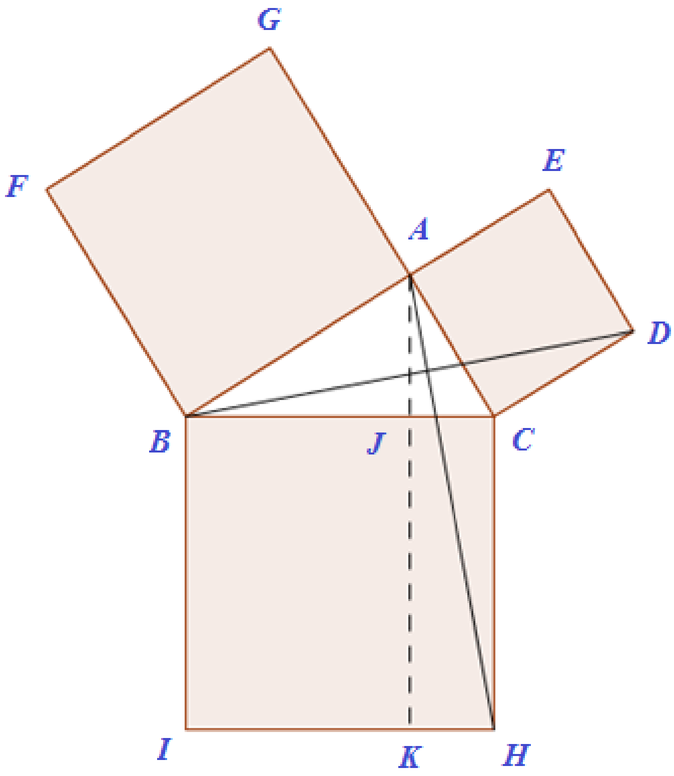


Figura 40: Demonstração de Euclides (2)

Podemos ver que o triângulo *ACH* tem sua área sendo a metade da área do retângulo *JKHC*, pois possuem uma mesma base (lado CH) e mesma altura referente a essa base. Analogamente verificamos que a área do triângulo *DCB* é a metade da área do quadrado *ACDE* com a base CD e altura sendo o lado AC. Usando a congruência citada anteriormente, temos que as áreas dos triângulos *ACH* e *DCB* são iguais e fazendo com que as áreas dos quadriláteros *JKHC* e *ACDE* também sejam iguais, pois é o dobro da área dos triângulos *ACH* e *DCB*. Da mesma forma os quadriláteros *JKIB* e *ABFG* possuem a mesma área. Sendo o quadrilátero *BIHC* composto pelos quadriláteros *BIKJ* e *JKHC* temos que a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores, provando assim o teorema.

4.5 DEMONSTRAÇÃO DE LEONARDO DA VINCI

Leonardo de Ser Piero da Vinci, mais conhecido por Leonardo da Vinci é uma das maiores figuras do renascentismo por suas diversificadas produções como cientista, matemático, engenheiro, inventor, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico. Talentoso matemático teve também sua própria prova do teorema que aqui vamos mostrar.

Usamos nessa seção o livro The Pithagorean Proposition ([8] LOOMIS, 1940) como referência.

DEMONSTRAÇÃO

Traçando segmentos e compondo algumas novas figuras para apoiar sua demonstração. Primeiro ligou dois vértices *E* e *F* dos quadrados construídos sobre os catetos, criando o hexágono *BCDEFG*, traçou também o segmento GD interno a esse hexágono que é um eixo de simetria do hexágono, pois os triângulos *ABC* e *AFE* são congruentes pelo caso LAL. Após criou o triângulo *JIH* congruente ao triângulo *ABC*. Em seguida ligando os pontos A e J criou o segmento AJ, segmento esse que corta o hexágono *ABHJIC* em dois quadriláteros congruentes, pois AC congruente à JH, CI congruente à HB, IJ congruente à AB e AJ comum aos dois quadriláteros. Os ângulos formados nesses quadriláteros são também congruentes pois sendo o segmento *BC* paralelo ao segmento *HI* temos que $A\hat{L}C \equiv B\hat{L}M \equiv H\hat{M}J \equiv L\hat{M}I$ e com isso os triângulos ΔALC e ΔJMH são congruentes pelo caso AAL com $\overline{AC} \equiv \overline{HJ}$. De forma análoga os triângulos ΔABL e ΔJIM são também congruentes, conforme a figura 41.

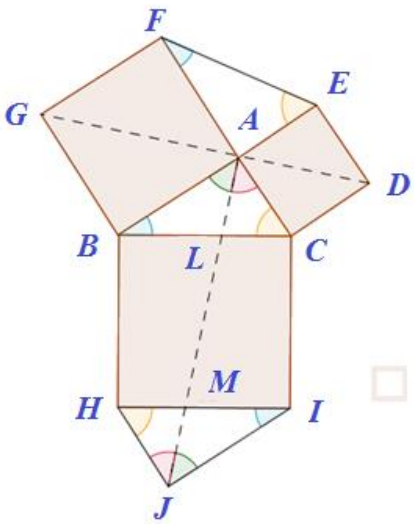


Figura 41: Demonstração de Leonardo de Vinci (1)

Podemos reparar que os quadriláteros *ACIJ* e *DCBG* são congruentes, pois o segmento AC é congruente ao segmento CD, o segmento CI é congruente ao segmento BC, o segmento IJ é congruente ao segmento BG, o ângulo $A\hat{C}I$ é congruente ao ângulo $B\hat{C}D$ e o ângulo $C\hat{I}J$ é congruente ao ângulo $C\hat{B}G$. A congruência dos quadriláteros é verificada quando giramos 90º no quadrilátero *ACIJ* no sentido horário em torno do ponto *C* teremos esses segmentos e ângulos congruentes sobrepostos, sobrepondo também os lados *AJ* e *DG*, tornando-os também congruentes.

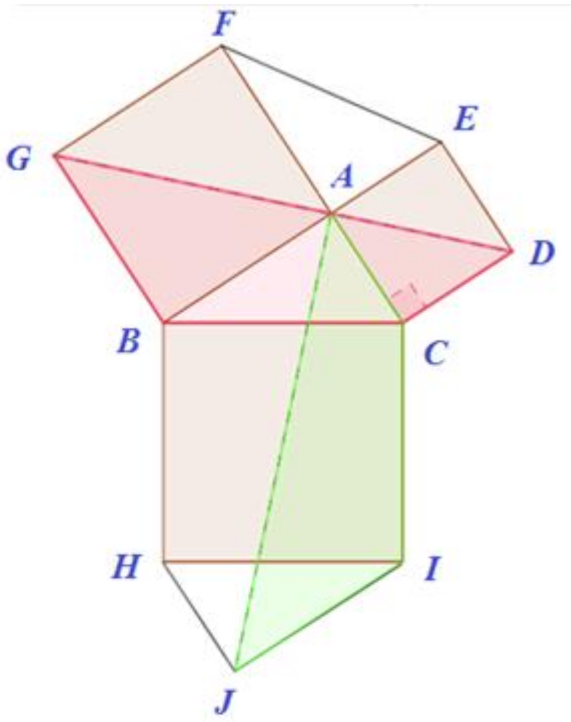


Figura 42: Demonstração de Leonardo de Vinci (2)

Com isso, temos que os quatro quadriláteros *ABHJ*, *ACIJ*, *DCBG* e *DEFG* são congruentes entre si, logo suas áreas são também iguais. Daí, as áreas dos dois hexágonos *ABHIJC* e *DCBGFE* são também iguais. Consequentemente,

área de *ABGF* $+$ área de *ABC* $+$ área de *AEF* $+$ área de *AEDC* $=$ área de *ABC* $+$ área de *BHJC* $+$ área de *HIJ*.

Assim, área de *ABGF* $+$ área de *AEDC* $=$ área de *BHIC*, o que prova o teorema de Pitágoras.

4.6 DEMONSTRAÇÃO PELO TEOREMA DAS CORDAS

DEMONSTRAÇÃO

Iniciamos essa demonstração a partir de uma circunferência de centro em *A* onde traçamos as cordas DE e BF perpendiculares com ponto em comum *C*. Após traçamos o raio

AB formando assim um triângulo *ABC*, retângulo em *C*, como podemos ver na figura 43 a seguir.

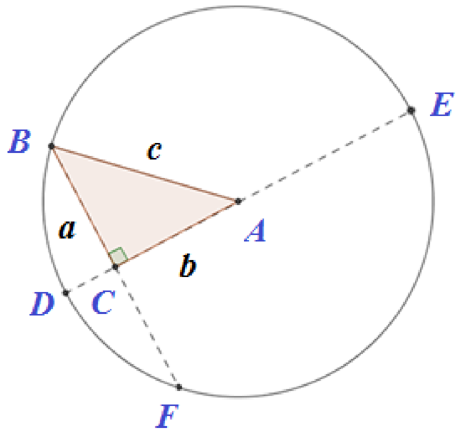


Figura 43: Demonstração pelo teorema das cordas

Primeiramente verificamos que os segmentos BC e CF são congruentes e medem *a*, e isso ocorre pois os triângulos *ABC* e *AFC* são congruentes pelo caso especial de triângulos retângulos que possuem um cateto e a hipotenusa de mesmo tamanho, com o lado AC comum aos dois triângulos, os ângulos $B\hat{C}A$ e $A\hat{C}F$ retos e os segmentos AB e AF são raios da circunferência. Temos agora que o segmento CD mede $c-b$, pois os segmentos AD e AE são também raios da circunferência. Como já vimos no teorema das cordas, podemos montar a seguinte relação:

$$\overline{BC}.\overline{CF} = \overline{DC}.\overline{CE}$$
$$a.a = (c-b).(c+b)$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Isto prova o teorema de Pitágoras, pois o triângulo retângulo *ABC* tem como catetos os lados BC e AC, e hipotenusa o lado AB.

4.7 DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Bhaskara Acharya era astrônomo e um dos maiores matemáticos de sua época entre os anos de 1114 e 1185. Produziu três grandes obras em vida: “Siddhanta”, sobre assuntos astronômicos, “Bijaganita” sobre Álgebra e “Lilavati” sobre Aritmética. Numa dessas obras esse reconhecido matemático demonstrou também o teorema de Pitágoras.

Nesta seção, usamos como referência, o livro The history of mathematics - An introduction ([3] BURTON, 2011).

Em sua demonstração Bhaskara usa uma figura central para uma sequência de composições, e é esse triângulo retângulo da figura 44 essa figura central.

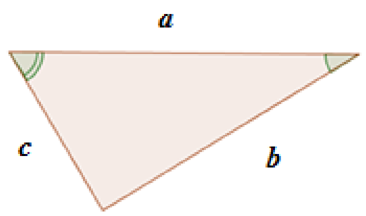


Figura 44: Demosntração de Bhaskara (1)

A primeira composição é formada aglutinando quatro triângulos retângulos congruentes como na figura 45. Essa figura produzida é um quadrado, pois os ângulos não retos dos triângulos retângulos são complementares, isto é, sua soma é igual a 90º. Em adição a isso vemos que internamente temos um quadrado menor, sombreado, com seu lado medindo a diferença entre os catetos do triângulo retângulo e seus ângulos internos retos, pois são suplementares aos ângulos retos dos triângulos retângulos.

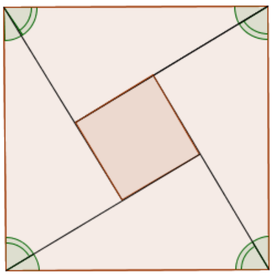


Figura 45: Demosntração de Bhaskara (2)

Podemos verificar que a figura 45 tem área igual à a^2.

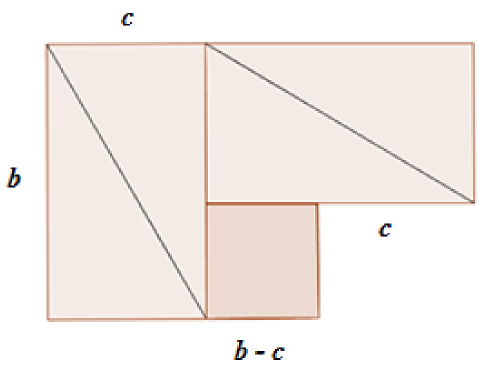


Figura 46: Demosntração de Bhaskara (3)

A figura 46 é apenas uma arrumação estratégica dos polígonos que compõem a figura 45. Façamos agora o prolongamento de um dos lados do quadrado de lado $b-c$ na figura 46, podendo assim calcular a área dessa figura usando dois quadrados, um de lado b e outro de lado c.

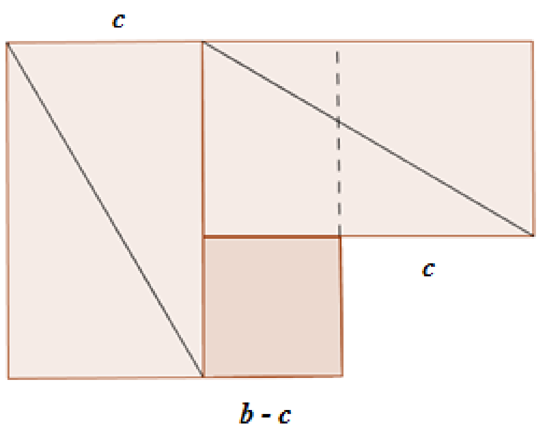


Figura 47: Demosntração de Bhaskara (4)

Com isso a área da segunda figura 46 é igual a b^2+c^2. Como as duas figuras possuem a mesma área, $a^2=b^2+c^2$, o que prova o teorema de Pitágoras.

4.8 DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE JAMES GARFIELD

Essa nova demonstração é atribuída ao presidente americano James Abram Garfield e foi publicada em 1882 na “Mathematical Magazine”. Sua demonstração foi elaborada enquanto ainda era Senador usando alguns rabiscos num papel durante uma discussão matemática com outros membros do Congresso americano. Essa demonstração como em outras demonstrações anteriores, usa a composição de figuras e comparação de suas áreas. A figura que James Garfield usou para iniciar sua demonstração foi um trapézio composto internamente por dois triângulos retângulos congruentes conforme se vê a seguir.

Nessa seção, também usamos como referência, o livro The history of mathematics - An introduction ([3] BURTON, 2011).

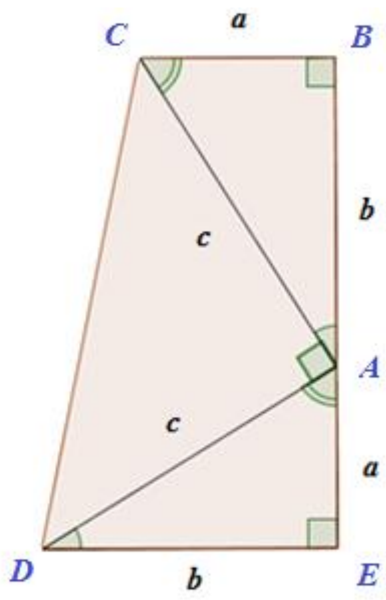


Figura 48: Demosntração do presidente James Garfield

DEMONSTRAÇÃO

Calculando a área do trapézio, temos a seguinte equação:

$$S_{trapézio} = \frac{a+b}{2}.(a+b) = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{2} = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}$$

Mas a área do trapézio também pode ser calculada como a soma da área dos três triângulos que o compõe. Para isso devemos atentar que os pontos *B*, *A* e *E* estão alinhados, fazendo com que os três triângulos sejam retângulos e assim calculamos a área do trapézio pela equação:

$$S_{Trapézio} = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{ADE} = \frac{a.b}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a.b}{2}.$$

Comparando agora as duas equações encontradas, temos que:

$$S_{trapézio} = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = \frac{a.b}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a.b}{2}.$$

Dobrando os elementos da segunda igualdade,

$$a^2 + 2ab + b^2 = ab + c^2 + ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Resultado esse que prova o teorema.

4.9 DEMONSTRAÇÃO USANDO A FÓRMULA DE HERON

Essa prova do teorema de Pitágoras usa o resultado obtido por Heron para cálculo de áreas de triângulos. Heron grande matemático também reconhecido como inventor e engenheiro mecânico, em sua “Metrica” que consistia em 3 volumes sobre cálculo de áreas e volumes trazia nela uma expressão matemática envolvendo o perímetro de um triângulo e seus lados que dão como resultado a área desse triângulo.

DEMONSTRAÇÃO

Consideraremos um triângulo *ABC* com ângulo reto em $\hat{A}$, lados medindo a, b e c, e o semiperímetro medindo *p*, conforme a figura 49.

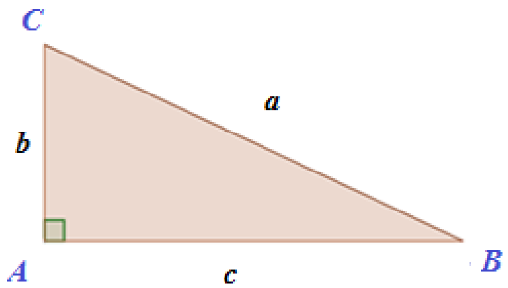


Figura 49: Demosntração usando a fórmula de Heron

Como já vimos anteriormente, pela fórmula de Heron, a área do triângulo *ABC*, que denotamos por S_{ABC}, é dada por:

$$S_{ABC} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}\text{, onde } p = \frac{1}{2}.(a+b+c).$$

Ao substituir a segunda igualdade na primeira, resulta na equação:

$$S_{ABC} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{(p^2 - pa).(p^2 - (b+c)p + bc)}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p^4 - (a+b+c)p^3 + (ab+bc+ac)p^2 - abcp}$$

Trocando p por $\frac{1}{2}.(a+b+c)$, temos que:

$$S_{ABC} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)^4}{16} - \frac{2(a+b+c)^4}{16} + \frac{4(ab+ac+bc).(a+b+c)^2}{16} - \frac{8abc(a+b+c)}{16}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}.\sqrt{-(a+b+c)^4 + 4(ab+ac+bc).(a+b+c)^2 - 8abc(a+b+c)}.$$

Sabendo que,

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 +$$

$$+ 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4, \text{ temos,}$$

$$4(ab+ac+bc).(a+b+c)^2 = 4a^3b + 8a^2b^2 + 20a^2bc + 4ab^3 + 20ab^2c + 20abc^2 +$$

$$+ 4b^3c + 8b^2c^2 + 4bc^3 + 4a^3c + 8a^2c^2 + 4ac^3.$$

Com isso,

$$8abc(a+b+c) = 8a^2bc + 8ab^2c + 8abc^2 .$$

Simplificando os termos semelhantes, e assim obtemos,

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}.\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} .$$

Por outro lado, como o triângulo *ABC* é retângulo sua área pode ser calculada por:

$$S_{ABC} = \frac{b.c}{2} .$$

Ao igualar agora os resultados das duas últimas equações vamos ter que:

$$\frac{1}{4}.\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{b.c}{2}$$

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4b^2c^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4b^2c^2 = 0.$$

Sabendo que:

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 = (b^2 + c^2 - a^2).(b^2 + c^2 - a^2) = b^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 + c^4 - 2a^2c^2 + a^4,$$

então

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

$$b^2 + c^2 = a^2 .$$

Resultado final esse que prova mais uma vez o teorema de Pitágoras.

4.10 RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Agora se deve pensar noutra proposição, vamos verificar se a relação algébrica for verdadeira faz com que o triângulo seja retângulo.

Se os lados de um triângulo medem a, b e c, e a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é verdadeira então afirmamos que o triângulo com esses lados é retângulo.

Essa seção tem como referência o material do PICOBMEP, Teorema de Pitágoras e Áreas ([18] WAGNER, 2015).

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos um triângulo qualquer *ABC* com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Analisaremos 3 casos para a prova completa.

1º caso: Ângulo $\hat{A}$ = 90º

Nesse caso não há nada a provar, pois assim o triângulo *ABC* já seria retângulo, não precisando analisar mais nada.

2º caso: Ângulo $\hat{A}$ < 90º

Tomamos sem perda de generalidades $b \leq c$. Traçamos um segmento do ponto *C* ao lado AB, tal que seja perpendicular a esse lado. O ponto de intersecção entre esse segmento e o lado AB é o ponto *D*, sendo assim o pé da altura desse triângulo com base em AB (veja figura 50).

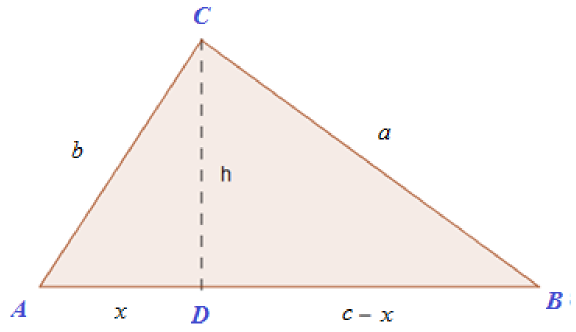


Figura 50: A recíproca do teorema de Pitágoras (1)

Deste modo os triângulos *ADC* e *CDB* são retângulos. Tomaremos por x o segmento AD e temos por $c - x$ o segmento BD.

Usando o teorema de Pitágoras nos lados do triângulo *ADC*, obtemos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \text{ , onde } h = \overline{CD}$$

Usando também o teorema de Pitágoras no triângulo *CDB*, obtemos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

Das duas últimas equações, obtemos:

$$b^2 - x^2 = h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Como $2cx > 0$, temos $a^2 < b^2 + c^2$ que contradiz a condição inicial.

3º caso: Ângulo A > 90º

Com ângulo $\hat{A}$ agora sendo obtuso, o ponto *D* ficará fora do triângulo *ABC* pois será a intersecção entre a reta que contém o lado AB do triângulo *ABC* e a perpendicular a essa reta que passa pelo ponto *C*.

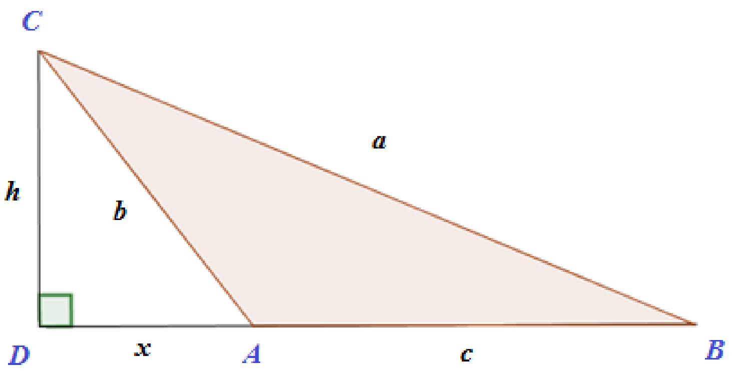


Figura 51: A recíproca do teorema de Pitágoras (2)

Analogamente ao que foi feito no caso anterior, usando o teorema de Pitágoras no triângulo *CDA*, tem-se que:

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = b^2 - x^2.$$

Fazendo o mesmo no triângulo *CDB* tem-se que:

$$a^2 = h^2 + (x+c)^2$$

$$h^2 = a^2 - (x+c)^2 \,.$$

Consequentemente,

$$b^2 - x^2 = a^2 - (x+c)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - x^2 - 2cx - c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \,.$$

Novamente, como $2cx > 0$, temos $a^2 > b^2 + c^2$, o que contradiz mais uma vez a condição inicial.

Assim, somente o 1º caso é possível. Com isso, demonstramos que um triângulo *ABC* com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, para valer a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ é necessário que o ângulo $\hat{A}$ seja reto, provando a recíproca do teorema de Pitágoras.

5. APLICAÇÕES E CURIOSIDADES PITAGÓRICAS

5.1 OS TERNOS PITAGÓRICOS

DEFINIÇÃO

Sejam *a*, *b* e *c* inteiros positivos com $b < c < a$. Dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $b^2 + b^2 = a^2$.

Exemplo. Os ternos (3, 4, 5); (5, 12, 13); (7, 24, 25) e (9, 40, 41) são pitagóricos.

Uma forma interessante de gerar esses ternos e atribuída a Pitágoras, apesar dos babilônios já usarem-na, é dada por: $\left(m, \frac{1}{2}(m^2 - 1), \frac{1}{2}(m^2 + 1)\right)$ com m sendo um número inteiro ímpar maior do que 1. Importante chamar a atenção de que essa fórmula não gera todos os ternos pitagóricos.

Usando a fórmula acima, também podemos obter ternos pitagóricos da seguinte maneira:

Num triângulo retângulo podemos ter o menor cateto dado por $a_n = 2.n + 1$, o outro cateto por $b_n = \frac{1}{2}(a_n^2 - 1)$ e a hipotenusa por $\frac{1}{2}\left(a_n^2 + 1\right) = b_n + 1$. Notamos que o cateto maior e a hipotenusa são números inteiros consecutivos.

A seguir temos uma tabela mostrando alguns resultados para lados de triângulos retângulos com lados inteiros, isto é, onde os lados formam ternos pitagóricos.

n	Cateto menor $a_n = 2.n + 1$	Cateto maior $b_n = \frac{1}{2}(a_n^2 - 1)$	Hipotenusa $b_n + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113

Tabela 1: Ternos pitagóricos

5.2 SEGMENTOS DO TIPO $a\sqrt{n}$

Existe uma forma simples e fácil de produzir segmentos com medida $a\sqrt{n}$, com n natural. Para isso, nos basta construir um triângulo retângulo isósceles inicial e usar sucessivamente o teorema de Pitágoras, como vemos na figura 52. O triângulo inicial tem catetos medindo *a*, e assim, pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa tem medida $a\sqrt{2}$.

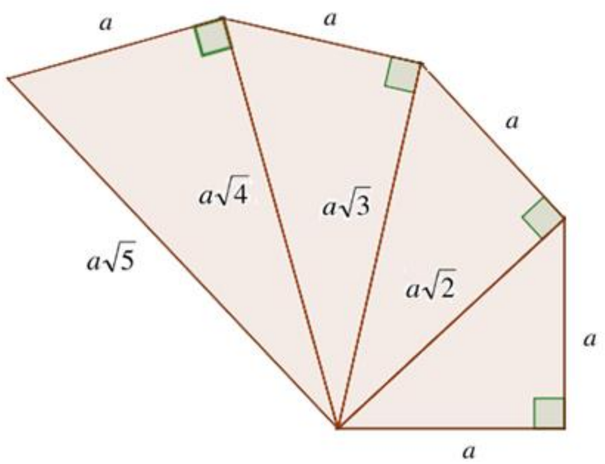


Figura 52: Segementos do tipo $a\sqrt{n}$

No próximo passo usaremos essa medida para ser um dos catetos de um novo triângulo retângulo e com outro cateto a, e ao aplicar o teorema de Pitágoras a hipotenusa será $a\sqrt{3}$. Fazendo os passos seguintes com o mesmo padrão podemos produzir segmentos medindo $a\sqrt{n}$ com a real positivo e n natural. Por exemplo, com $a=1$ produzimos segmentos com medidas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4},...$

5.3 ÁREAS DE QUADRADOS SOBRE LADOS DE TRIÂNGULO QUALQUER

Dado um triângulo *ABC* qualquer com *BCIJ* um quadrado sob o lado *BC*. Definimos os pontos *E* e *F*, pertencentes ao lado *BC*, tais que os ângulos $A\hat{E}B$ e $C\hat{F}A$ sejam congruentes ao ângulo $B\hat{A}C$. Também temos os pontos *G* e *H*, pertencentes ao lado *IJ*, tais que os ângulos $E\hat{G}I$ e $F\hat{H}J$ sejam retos. Provaremos que a soma das áreas dos quadrados sobre *AB* e *AC* é igual a soma das áreas dos retângulos *BEGI* e *FCJH*.

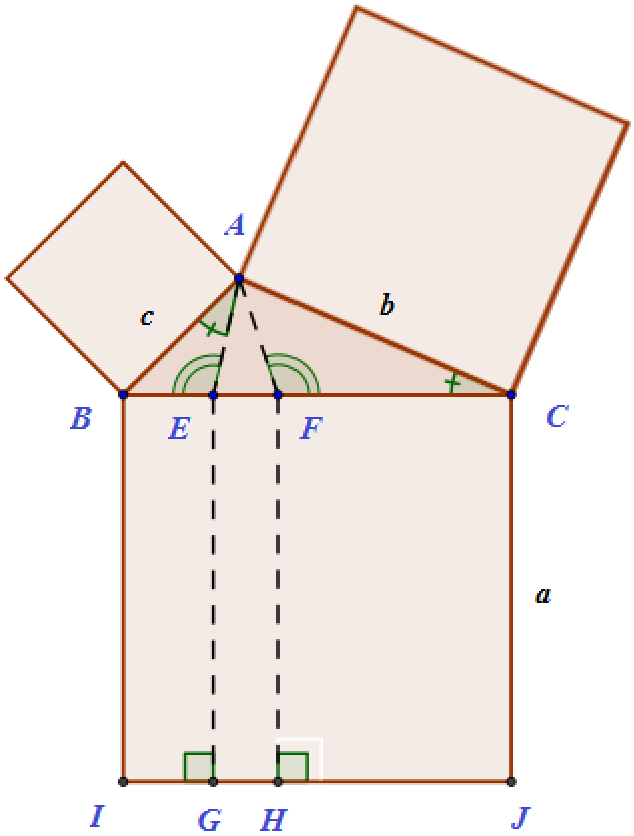


Figura 53: Áreas de quadrados sobre lados de triângulo qualquer

DEMONSTRAÇÃO

Pelo caso AA_o de semelhança de triângulos, teremos que os triângulos *ABC*, *EBA* e *FAC* são semelhantes. Com isso, teremos as seguintes proporções:

$$\frac{\Delta EBA}{\Delta ABC} = \frac{\overline{BE}}{c} = \frac{c}{a} \text{ e } \frac{\Delta FAC}{\Delta ABC} = \frac{\overline{FC}}{b} = \frac{b}{a}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} a.\overline{BE} = c^2 \\ a.\overline{FC} = b^2. \end{cases}$$

Logo, $a.(BE + FC) = b^2 + c^2$.

5.4 GENERALIZAÇÃO DE GEORGE PÓLYA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

George Pólya, húngaro que iniciou sua vida acadêmica nos estudos de Direito, atividade a qual logo abandonou e passou a se interessar por Filosofia e Matemática. Grande matemático, contribuiu em diversas áreas além da Matemática como Química, Física e Filosofia e produtor de grandes obras matemáticas como *"Mathematics and plausible reasoning"* em dois volumes publicados em 1954 e *"Mathematical discovery"* também em dois volumes o primeiro em 1962 e outro em 1967. Sua principal área de estudos eram a Simetria geométrica e a Enumeração das classes de simetria dos objetos. Provou um teorema, publicado em 1937, que resolveria o problema de quantas configurações com certas propriedades existem, a qual teve aplicações na enumeração de compostos químicos e na enumeração de árvores enraizadas na teoria dos Grafos.

George Pólya, húngaro que iniciou sua vida acadêmica nos estudos de Direito, atividade a qual logo abandonou e passou a se interessar por Filosofia e Matemática. Grande matemático, contribuiu em diversas áreas além da Matemática como Química, Física e Filosofia e produtor de grandes obras matemáticas como *"Mathematics and plausible reasoning"* em dois volumes publicados em 1954 e *"Mathematical discovery"* também em dois volumes o primeiro em 1962 e outro em 1967. Sua principal área de estudos eram a Simetria geométrica e a Enumeração das classes de simetria dos objetos. Provou um teorema, publicado em 1937, que resolveria o problema de quantas configurações com certas propriedades existem, a qual teve aplicações na enumeração de compostos químicos e na enumeração de árvores enraizadas na teoria dos Grafos.

Demonstramos de várias formas que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. George Polya apresenta uma demonstração mais geral, isto é, usando figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

Antes de apresentarmos a generalização de Pólya para o Teorema de Pitágoras, daremos a definição de figuras semelhantes que pode ser encontrada na referência [7].

DEFINIÇÃO

Dizemos que duas figuras A e B são semelhantes com razão de semelhança k, quando houver uma correspondência bijetora $f : A \to B$ entre pontos de A e de B, tais que:

Se X e Y são pontos de A e se $X' = f(X)$ e $Y' = f(Y)$ são os correspondentes em B então $\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = k$, isto é, duas figuras são semelhantes quando as medidas de todos os segmentos entre dois pontos internos de uma figura aparecem na outra figura multiplicadas por uma mesma constante, fazendo com que duas figuras diferentes semelhantes sejam sempre uma redução ou uma ampliação uma da outra, quando $k \neq 1$.Quando $k = 1$ é o caso de termos figuras congruentes.

Com essa correspondência bijetora, temos as seguintes definições:

a) Sendo $X' = f(X)$, então X' e X são homólogos.

b) Sendo $X' = f(X)$ e $Y' = f(Y)$, então os segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ também são segmentos homólogos.

Para que as duas figuras sejam semelhantes tem-se que, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k = \frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}}$, isto é, o segmento XY é homólogo do $X'Y'$ e o segmento AB é homólogo do $A'B'$.

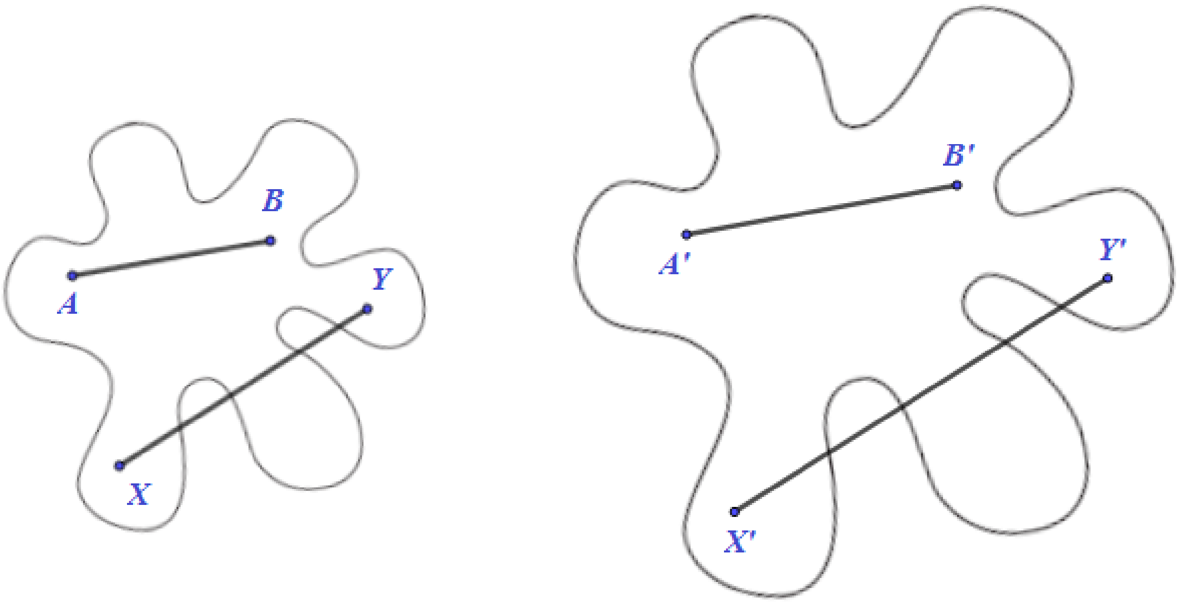


Figura 54: Semelhança

É bom termos a ciência de que para confirmar a semelhança das figuras, qualquer que sejam os segmentos tomados conforme a definição, a razão k deverá ser mantida.

GENERALIZAÇÃO DE PÓLYA PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS

Sejam *A*, *B* e *C*, as áreas das figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo *ABC*, então a soma das áreas das figuras sobre os catetos será igual à área da figura sobre a hipotenusa.

DEMONSTRAÇÃO

Para a demonstração do teorema aqui estudado, constroem-se sobre os catetos b e c e hipotenusa a de um triângulo retângulo figuras quaisquer *A*, *B* e *C* semelhantes entre si conforme a imagem representada na figura 55.

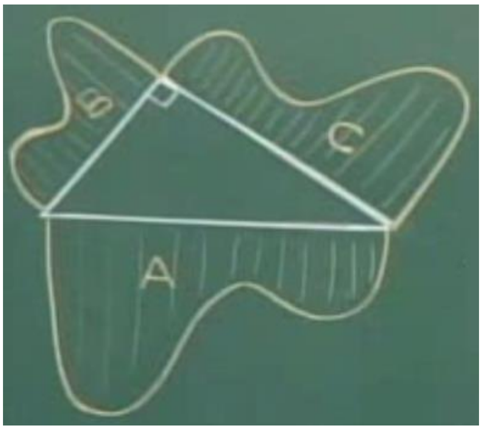


Figura 55: Generalização de George Pólya do teorema de Pitágoras – Foto

Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança [7], temos:

$$\begin{cases} \dfrac{B}{A} = \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{B}{b^2} = \dfrac{A}{a^2} \\ \dfrac{C}{A} = \dfrac{c^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{C}{c^2} = \dfrac{A}{a^2} \end{cases}$$

Igualando as equações e usando uma propriedade das proporções temos,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}\ .$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $A = B + C$.

Vemos então que ao construir figuras semelhantes quaisquer sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura sobre a hipotenusa será igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos, provando assim o teorema.

Na referência [7] o leitor pode encontrar a prova que a definição de semelhança de figuras quaisquer, quando aplicada a triângulos, reduz-se à definição tradicional que apresentamos na seção 3.7.

5.5 AS TRÊS MÉDIAS E O TRIÂNGULO RETÂNGULO

Uma outra aplicação interessante num triângulo retângulo possibilita, a partir da construção geométrica, ter uma visualização das médias, de dois números, normalmente trabalhadas no ensino básico: Aritmética, Geométrica e Harmônica. Essa construção facilita a compreensão do aluno, trazendo a teoria para o concreto, e tornando assim interessante o assunto em sala de aula.

DEFINIÇÃO

As médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números positivos a e b são definidas por:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{a+b}{2} = M_a,$$

$$\text{Média Geométrica} = \sqrt{a.b} = M_g,$$

$$\text{Média Harmônica} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2.a.b}{a+b} = M_h.$$

Desigualdade das Médias:

Se a e b são números reais positivos então $M_h \leq M_g \leq M_a$.

DEMONSTRAÇÃO

Construiremos uma circunferência, conforme a figura 56, de raio = R e diâmetro = $\overline{AD}$, tal que:

$$a = \overline{AE}, \quad b = \overline{ED}, \quad x = \overline{CE}, \quad y = \overline{CF}, \ \overline{AD} = a + b \text{ e } R = \frac{a+b}{2}.$$

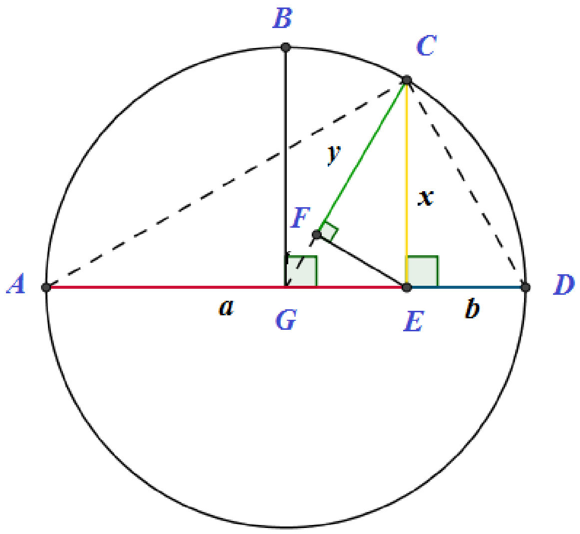


Figura 56: As três médias e o triângulo retângulo

Temos $M_a = \overline{GB} = R$, pois sendo G centro da circunferência, $\dfrac{\overline{AG} + \overline{GD}}{2} = \dfrac{R+R}{2} = R = \overline{GB}.$ Temos também que $M_g = \overline{EC} = x$, pois sendo o ΔACD retângulo com ângulo reto em $\hat{C}$, podemos usar as relações métricas no triângulo retângulo para ver que:

$$x.x = a.b \Rightarrow x^2 = a.b \Rightarrow x = \sqrt{a.b}.$$

Por outro lado, $M_h = \overline{CF} = y$, pois os triângulos retângulos CFE e CEG são semelhantes pelo caso AA_o. Com isso temos que:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CG}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{R} \Rightarrow x^2 = y.R.$$

$$y = \frac{x^2}{R} \Rightarrow y = \frac{a.b}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow y = \frac{2.a.b}{a+b}.$$

Os resultados e a construção acima nos trazem a seguinte conclusão: $M_a \geq M_g \geq M_h$.

5.6 O PROBLEMA DE HIPÓCRATES

Hipócrates de Quios ensinou Geometria em Atenas e trabalhou nos problemas clássicos de quadratura de círculos e transformações de áreas. Supõe-se que Hipócrates tenha proposto esse problema em Atenas pelo ano de 450 A.C. e que só tenha ensinado após uma perda de suas posses já após o ano de 430 A.C. Em seus estudos para quadrar círculos, apareceram figuras da intersecção de três semicírculos, construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, os quais são seus diâmetros, essas figuras são chamadas lúnulas (figura 57).

Usando um de seus teoremas foi possível encontrar a soma das áreas dessas lúnulas.

Para isso, vamos construir um triângulo retângulo, e traçaremos dois semicírculos com seus centros nos pontos médios dos catetos do triângulo retângulo, conforme figura 57. Traçamos também, um semicírculo que tenha o ponto médio da hipotenusa do mesmo triângulo retângulo.

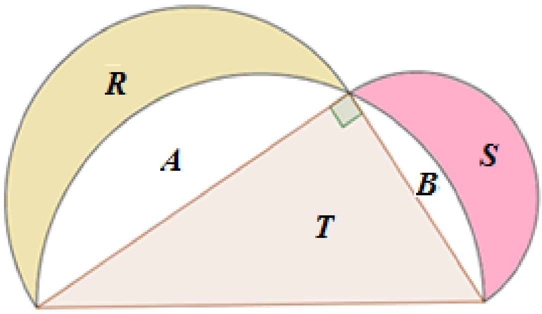


Figura 57: Problema de Hipócrates

Toma-se por R e S as áreas das lúnulas, T a área do triângulo retângulo e A e B pelas áreas dos segmentos circulares, e usando a generalização do teorema de Pitágoras teremos que:

$$A+T+B=(R+A)+(B+S) \Rightarrow T=R+S$$

Temos assim que a área do triângulo retângulo é igual à soma das áreas das duas lúnulas.

5.7 RESOLVENDO UM PROBLEMA ALGÉBRICO

É muito comum usar a Álgebra para solucionar uma questão geométrica, mas é possível usar o teorema de Pitágoras para solucionar e provar que a seguinte desigualdade é verdadeira.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}, \text{ com } a>0,\ b>0 \text{ e } a \neq b.$$

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos sem perda de generalidade que $a > b$. Consideraremos um triângulo retângulo com seus catetos medindo:

$$\frac{a+b}{2} \text{ e } \frac{a-b}{2}.$$

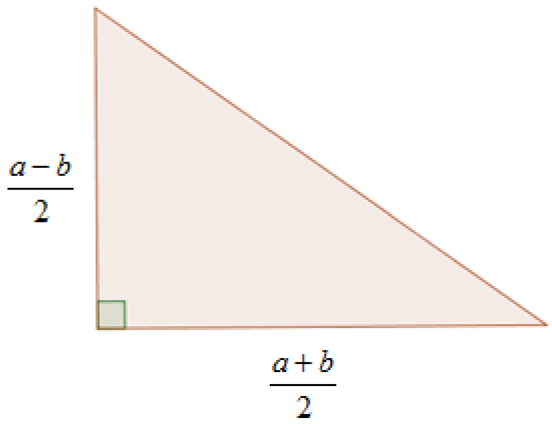


Figura 58: Um problema algébrico

Usando o teorema de Pitágoras temos que:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = (\text{Hipotenusa})^2$$

$$\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\right) = (\text{Hipotenusa})^2$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = (\text{Hipotenusa})^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} = (\text{Hipotenusa})^2$$

E agora fica fácil observar a desigualdade, pois sendo $\frac{a+b}{2}$ um cateto e $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ a hipotenusa, temos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) < \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right).$$

Como a e b são positivos,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2.$$

Portanto,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Provando assim a hipótese inicial, usando o teorema de Pitágoras num problema algébrico.

6. EXPERIMENTO EM SALA DE AULA

Preparamos uma experiência com diferentes apresentações do Teorema de Pitágoras para dois grupos. Na primeira, apresentamos o teorema de Pitágoras com três provas diferentes e no segundo grupo apresentamos apenas uma única prova. Terminadas as apresentações, solicitamos aos alunos que respondessem um questionário sobre as apresentações e também uma lista com quatro exercícios de níveis diferentes envolvendo o teorema de Pitágoras retirados do Portal da Matemática, módulo do 9º ano do Ensino Fundamental.

As três demonstrações apresentadas levaram em consideração o ano em que se encontravam e os assuntos prévios por eles já estudados. Para o grupo 1 foram apresentadas as demonstrações: Usando comparação simples de áreas, Demonstração de Bhaskara e Demonstração do presidente James Garfield. Para o grupo 2 foi apresentada apenas a Demonstração usando comparação de áreas simples.

Fizemos uma coleta de dados dessa experiência para comparar o rendimento dos alunos subsequente às exposições.

O experimento ocorreu em 25 de julho de 2017 na Escola de Ensino Fundamental Experimental de Vitória – UFES, na turma 9A, do turno matutino com 23 alunos com idades entre 13 e 15 anos.

Os alunos foram separados em duas salas, uma para cada apresentação, sendo um grupo com 12 alunos e outro com 11.

Foram utilizadas 3 aulas expositivas de 50 minutos, onde foram utilizados quadro e Datashow para as apresentações em duas dessas aulas, e os alunos responderam o questionário e a lista proposta na terceira aula.

No questionário foram feitas as seguintes perguntas:

1) Sobre o assunto abordado, você acha que compreendeu o que foi passado?

2) Escreva com suas palavras o que aprendeu hoje?

3) Você acha que a explicação foi suficiente?

4) Se sentiu confiante a participar da aula, perguntando ou confirmando seu entendimento?

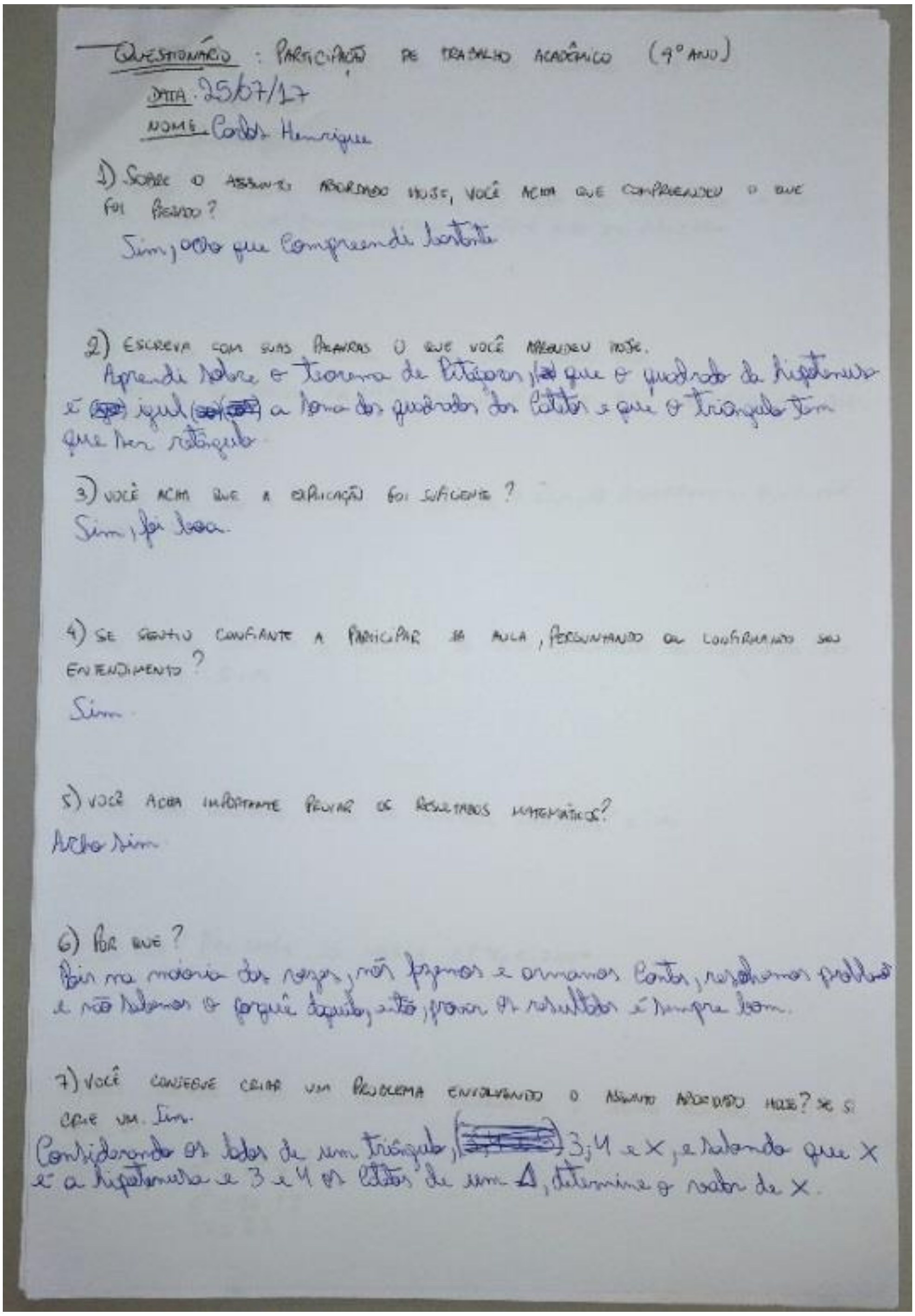
5) Você acha importante provar os resultados matemáticos?

6) Por que?

7) Você consegue criar um problema envolvendo o assunto abordado? Se sim, crie um.

Os alunos tiveram 20 minutos para responder o questionário e mais 30 minutos para a solução das questões da lista proposta.

Na figura 59 vemos a foto do questionário proposto respondido por um dos alunos participantes do experimento.


QUESTIONÁRIO: PARTICIPAÇÃO DE TRABALHO ACADÊMICO (9º ANO)
DATA: 25/07/17
NOME: Carlos Henrique

1) SOBRE O ASSUNTO ABORDADO HOJE, VOCÊ ACHA QUE COMPREENDEU O QUE FOI PASSADO?
Sim, acho que compreendi bastante

2) ESCREVA COM SUAS PALAVRAS O QUE VOCÊ APRENDEU HOJE.
Aprendi sobre o teorema de Pitágoras, que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos e que o triângulo tem que ser retângulo.

3) VOCÊ ACHA QUE A EXPLICAÇÃO FOI SUFICIENTE?
Sim, foi boa.

4) SE SENTIU CONFIANTE A PARTICIPAR DA AULA, PERGUNTANDO OU CONFIRMANDO SEU ENTENDIMENTO?
Sim

5) VOCÊ ACHA IMPORTANTE PROVAR OS RESULTADOS MATEMÁTICOS?
Acho sim

6) POR QUE?
Pois na maioria das vezes, nós fazemos e armamos contas, resolvemos problemas e não sabemos o porquê daquilo, então, provar os resultados é sempre bom.

7) VOCÊ CONSEGUE CRIAR UM PROBLEMA ENVOLVENDO O ASSUNTO ABORDADO HOJE? SE SIM, CRIE UM. Sim.
Considerando os lados de um triângulo, 3, 4 e X, e sabendo que X é a hipotenusa e 3 e 4 os catetos de um Δ, determine o valor de X.

Figura 59: Respostas de aluno - Foto

A seguir a tabela 2 retrata as respostas dos alunos.

G1		
1)	SIM	NÃO
	12	0
2)	CORRETO	INCORRETO
	12	0
3)	SIM	NÃO
	11	1
4)	SIM	NÃO
	11	1
5)	SIM	NÃO
	12	0
6)	EXPLICOU	NÃO EXPLICOU
	11	1
7)	CONSEGUIU	NÃO CONSEGUIU
	8	4

G2		
1)	SIM	NÃO
	9	2
2)	CORRETO	INCORRETO
	6	5
3)	SIM	NÃO
	10	1
4)	SIM	NÃO
	8	3
5)	SIM	NÃO
	11	0
6)	EXPLICOU	NÃO EXPLICOU
	10	1
7)	CONSEGUIU	NÃO CONSEGUIU
	6	5

Tabela 2: Respostas dos alunos

Já na lista de exercícios proposta, usamos os exercícios introdutórios para checagem do entendimento dos alunos no assunto apresentado conforme questões a seguir.

Exercício 1. São medidas dos lados de um triângulo retângulo:

a) $(1,2,3)$. d) $(4,5,6)$.

b) $(2,3,4)$. e) $(5,6,7)$.

c) $(3,4,5)$.

Exercício 2. Determine a medida da diagonal de um retângulo de base 12cm e altura 8cm.

Exercício 3. Determine o valor de x na figura.

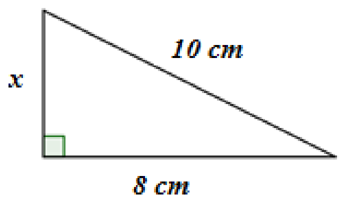


Figura 60: Exercício do Portal da Matemática

Exercício 4. Qual a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 12cm?

Tabela 3

G1	Respondidas	Corretas	%
Q1	12	11	91,66666667
Q2	12	11	91,66666667
Q3	12	10	83,33333333
Q4	12	8	66,66666667

G2	Respondidas	Corretas	%
Q1	11	10	90,90909091
Q2	11	7	63,63636364
Q3	11	6	54,54545455
Q4	11	4	36,36363636

Tabela 3: Percentual de acertos

É importante salientar que as questões eram discursivas, porém não foi dada questão em parte, isto é, foi corrigida apenas como certa ou errada.

É possível analisar que o rendimento dos alunos do grupo 1 foi mais satisfatório do que o grupo 2.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existe uma frase atribuída à Pitágoras dizendo que tudo é número. Isso nos traz uma visão interessante do mundo, a qual vemos nossa necessidade de despertar nos alunos a curiosidade nas aplicações, nos questionamentos das coisas que nos cercam, tentando comprovar com eles os por quês de situações do dia-dia através de demonstrações.

Esse trabalho contribuiu com algumas ferramentas para ajudar nessa tarefa, dispondo de diferentes formas de provar o Teorema de Pitágoras.

É notório que utilizar diferentes estratégias e organizações na solução de um mesmo problema desafia e motiva os alunos, melhorando sua compreensão e argumentação nos assuntos matemáticos estudados.

E como acontecia na Escola Pitagórica, devemos incentivar os alunos para novas e diferentes descobertas, para isso necessitamos de formas pedagógicas que despertem neles os tais questionamentos e assim encontrar formas distintas de respondê-los.

A forma mais comum e tradicional da prática do ensino da Matemática no Ensino Básico atual atrapalha esse despertar, está cada vez mais repleta de repetições com pouco espaço para questionamentos e criações advindas da relação professor-aluno. Esse trabalho trouxe formas do professor trabalhar a prova do Teorema de Pitágoras usando a Álgebra relacionada com a Geometria, com diversos pontos de vista e com vários outros conteúdos associados.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, João Lucas. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 1985.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática (3º e 4º ciclos do ensino Fundamental). Brasília: MEC / SEF., 1998.

[3] BURTON, David M. **The history of mathematics-An Introduction.** 7 ed. New York: Mc Graw-Hill, 2011.

[4] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[5] DE ALEXANDRIA, Euclides. **Os Elementos.** Tradução Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

[6] FERREIRA, Edson Luiz Cataldo. **Geometria básica.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.

[7] LIMA, Elon. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[8] LOOMIS, Elisha. **The Pithagorean Proposition: Classics in Mathematics Education Series.** 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1940.

[9] MARQUES, Sofia. **A descoberta do teorema de Pitágoras.** São Paulo: Livraria da Física - USP, 2011.

[10] NELSEN, Roger B. **Heron´s formula via proofs without words.** The College Mathematics Journal, vol. 32, Portland, 2001.

[11] OBMEP. **Teorema de Pitágoras: Apostila de exercícios.** Portal da Matemática. Acesso em: 24 Jul 2017.

[12] OZANAM, Jacques. **Récréations mathématiques et physiques.** Paris: Jean Jombert, 1694.

[13] PÓLYA, George. **Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics.** Princeton: Princeton University Press, v. 1 e 2, 1954.

[14] ROSAS PINHO, José Luiz; BATISTA, Eliezer; BOTH CARVALHO, Neri Terezinha. **Geometria I.** 2. ed. Florianópolis, 2010.

[15] ROTHBART, Andréa. **Números pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas.** RPM, 7 ed. São Paulo, 1984.

[16] SIGH, Simon. **O último Teorema de Fermat.** Tradução Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 1998. Tradução de: Fermat's last theorem.

[17] STRATHERN, Paul. **Pythagoras and his theorem.** London: Random House, 1997.

[18] WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** PICOBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.