UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC

Thaylan Campeche Vidal

A ARGUMENTAÇÃO NA MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Ilhéus, Bahia
2020

Thaylan Campeche Vidal

A ARGUMENTAÇÃO NA MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC

Orientador: Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

Ilhéus, Bahia
2020

V648 Vidal, Thaylan Campeche.
A argumentação na matemática sob a perspectiva da resolução de problemas no primeiro ano do ensino médio / Thaylan Campeche Vidal. – Ilhéus : UESC, 2020.
65f. : il.
Orientador : Vinícius Augusto Takahashi Arakawa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática.

Inclui referências.

1. Matemática (ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Currículo. 3. Resolução de problemas. (matemática). 4. Educação matemática. 5. Argumentação. I. Arakawa, Vinícius Augusto. II. Título

CDD – 510.7

THAYLAN CAMPECHE VIDAL

A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado em Ilhéus, 28 de abril de 2020.

____

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

Orientador - UESC

____

Profa. Dra. Pryscilla dos Santos Ferreira Silva

UESC

____

Prof. Dr. Josaphat Ricardo Ribeiro Gouveia Júnior

IFBA – Campus Eunápolis

ILHÉUS – BAHIA

2020

Agradecimentos

Primeiramente, sou grato aos meus pais, Iraildes Campeche Barros e Derisvaldo Brito Vidal, que sempre entenderam a importância da educação no meu desenvolvimento e tiveram êxito em cultivar em mim os mesmos ideais.

À minha irmã Thais Campeche pelo suporte com o qual sempre posso contar.

Agradeço à minha família como um todo, em especial à minha avó Maria D'Ajuda Campeche Barros. Obrigado por ser meu alicerce durante as exaustivas viagens à UESC.

Aos meus amigos, Carlos Henrique, Láisa Dias e Adrielle Dantas, pelo suporte que têm me dado desde a nossa graduação.

Aos colegas do PROFMAT, em especial aos companheiros de viagem Jackson e Fábio.

Aos colegas do Ruy Barbosa, pela solidariedade e suporte durante o período do curso.

Aos professores do curso, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi.

À FAPESB pelo suporte à minha pesquisa.

E a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, nesse percurso.

RESUMO

A presente pesquisa buscou fundamentar dois eixos direcionais presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio, a resolução de problemas e a argumentação, e, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e de sua adequação à abordagem simultânea de ambos os eixos direcionadores citados, esquematizar sequências didáticas que funcionem como norte no tratamento de conteúdos pertinentes ao currículo de Matemática do 1º ano do Ensino Médio, no tratamento enfático das competências de resolução de problemas e argumentação. Para tanto, damos início à pesquisa apresentando o vínculo natural entre a Matemática e a resolução de problemas assim como a mudança no caráter com o qual a resolução de problemas tem sido contemplada no contexto da aula de Matemática. Visando a confecção das sequências didáticas ao final da pesquisa bibliográfica, abordamos também os aspectos teóricos e práticos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Dando início ao tratamento da argumentação, ressaltamos a importância dessa competência no desenvolvimento humano do aluno, em seus aspectos cognitivos e sociais, e explicitamos o vínculo entre o desenvolvimento dessa competência e o ensino de Matemática. Tratamos de aspectos teóricos em torno da estrutura da argumentação, visando evidenciar a forma sinérgica com a qual a metodologia em questão nos permite enfatizar o estímulo a ambas as competências visadas, a resolução de problemas e a argumentação. Após a descrição do percurso metodológico seguido na produção desta pesquisa, apresentamos as sequências didáticas construídas à luz da exploração teórica e, por fim, exploramos aspectos específicos de sua confecção, que possam potencializar a implementação das mesmas no âmbito educacional.

Palavras-chave: 1º Ano do Ensino Médio. Argumentação. Educação Matemática. Resolução de Problemas. Sequências de Didáticas.

ABSTRACT

The present research sought to substantiate two directive axis present in the High School Mathematics curriculum, problem solving and argumentation, and, via the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving and its suitability to the simultaneous approach of both of the directing axis mentioned, lay out didactical sequences which would work as a north in the treatment of the subjects pertinent to the Mathematics curriculum of the 1st year of High School, in the emphatic treatment of the problem solving and argumentation skills. Therefore, we begin the research presenting the natural link between Math and problem solving, as well as the change in character in which problem solving has been addressed in the context of the Mathematics class. Seeking the production of the didactical sequences at the end of the bibliographical research, we also address the theoretical and practical aspects of the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Commencing the treatment of the argumentation, we highlight the importance of this skill in the human development of the student, in its cognitive and social aspects, and we clarify the link between the development of this skill and the teaching o Mathematics. We address the theoretical aspects surrounding the structure of argumentation, seeking to highlight the synergetic way in which the methodology in question allows us to emphasize the stimulus to both of the skills targeted, problem solving and argumentation. After the description of the methodological course followed in the production of this research, we present the didactical sequences, made in light of the theoretical exploration, and, lastly, we explore the specific aspects of the confection process, which could potentialize the implementation of the sequences in the educational environment.

Keywords: 1st Year of High School. Argumentation. Didactical Sequences. Mathematics Education. Problem Solving.

Sumário

INTRODUÇÃO

A sala de aula é um ambiente de desafios, superar esses desafios é objetivo, não exclusivo, mas prioritário dos sujeitos nela presente: da perspectiva discente, a aquisição de competências ao mesmo tempo em que se navega um ambiente social por muitas vezes encarado de forma hostil; da perspectiva docente, a busca pelo aprimoramento dos métodos de ensino e por formas de motivar o aluno em meio a distrações e divergências.

Nesse contexto, ao identificar tais desafios e reconhecer a escola como ambiente de desenvolvimento não só cognitivo, mas humano dos estudantes, é imprescindível que haja uma busca pelo refinamento dos métodos de desenvolvimento social dos indivíduos nela inseridos, e o ensino de Matemática não deve se abster de tal responsabilidade.

A importância conferida à disciplina de Matemática é inegável, reconhecida inclusive pelos indivíduos que dela desgostam. Contudo, seu "prestígio" contrasta com seus índices avaliativos. Segundo dados de 2017 do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), divulgados em 2018 pelo INEP, 71,7% dos estudantes apresentam nível de proficiência em Matemática classificado como insuficiente no Ensino Médio.

O tratamento dos conhecimentos matemáticos carrega consigo um apreço pela precisão simbólica e representativa, vinculado a noções que estabelecem sua exatidão e imutabilidade. Elementos como estes acrescentam ao imaginário do aluno a ideia de que seu processo de raciocínio, devido à sua natureza informal, é inválido.

Dessa forma, contemplar o desenvolvimento humano e afetivo dos estudantes e mitigar as problemáticas presentes no processo de ensino-aprendizagem (em especial, particulares ao ensino-aprendizagem de Matemática) se tornam desafios colaterais, devendo ser enfrentados sincronicamente.

Um dos grandes obstáculos na aprendizagem, não só de Matemática, se manifesta no processo de comunicação. É comum que o professor não seja integralmente compreendido, e deve estar preparado para isso. Porém, um impedimento primário à fluência desse processo está na incapacidade do aluno de comunicar aquilo que não foi compreendido, ou aquilo que foi compreendido, a fim de que se defina um ponto de referência para que o processo prossiga.

É nessa perspectiva que surge a proposta de trabalhar, enfaticamente, a habilidade de argumentação em meio ao currículo de Matemática. Reconhecendo como objetivo imprescindível da educação a competência para resolver problemas e contemplando, em meio a seu desenvolvimento, habilidades de comunicação e desenvolvimento social que venham a mitigar problemáticas habituais no processo de ensino-aprendizagem do aluno.

O estimulo à habilidade de argumentação do aluno tem o potencial de aproximar o processo de raciocínio lógico do estudante da formalidade requerida pela disciplina, uma vez que, ao estimular suas habilidades de argumentação e resolução de problemas, é esperado que se desenvolva no estudante a competência necessária para que seu processo cognitivo possa ser exposto em linhas coerentes, permitindo ao professor o aferimento e a adequação da construção de conhecimento pelo aluno.

Assim, essa dissertação se propõe a trazer à luz a importância do desenvolvimento das habilidades de argumentação no contexto do ensino da Matemática. Visando tal desenvolvimento, objetiva-se projetar um contexto de sala de aula onde, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo a visão de Onuchic (1999) e Onuchic et al. (2014), seja possível estimular o desenvolvimento de tais habilidades e, de forma recíproca, abordar conteúdos matemáticos requeridos pelo currículo.

De forma mais específica, guiados pela fundamentação teórica, objetiva-se criar sequências didáticas que perpassem o currículo de Matemática para o 1º ano do Ensino Médio fundamentados na utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando o estímulo às habilidades de argumentação matemática como uma ferramenta do processo de aprendizagem e como um objetivo por si só.

Nesta pesquisa, damos início à exploração teórica no **capítulo 1**, onde discutimos acerca da resolução de problemas, como ela se insere no contexto da Matemática, e como sua abordagem será guiada a partir das especificidades da metodologia adotada. Em seguida, no **capítulo 2** e ainda em exame do referencial teórico, discutimos acerca da argumentação no contexto da aula de Matemática, da forma com a qual sua abordagem é natural no ambiente gerado pela utilização da metodologia proposta, e das particularidades de sua análise, tendo em vista a necessidade de conduzir o alunado da linguagem materna à linguagem matemática, sem que se invalide suas formas de comunicação.

No **capítulo 3** apresentamos os métodos adotados no percurso da pesquisa, desde a opção pelos eixos temáticos expostos, perpassando o processo de exploração bibliográfica, à construção das sequências didáticas apresentadas no **capítulo 4**, onde apresentamos as produções para utilização em ambiente escolar. Por fim, no **capítulo 5**, discutimos peculiaridades do processo de confecção das sequências didáticas que não foram contempladas na descrição prática apresentada no capitulo 4 e apresentamos uma visão sintetizada do potencial para as aplicações das produções construídas.

1 Resolução de Problemas

1.1 A Resolução de Problemas e o Ensino de Matemática

O Dicionário Michaelis define *problema* como:

> 1 Tema, em qualquer área do conhecimento, cuja solução ou resposta requer considerável pesquisa, estudo e reflexão.
>
> 2 Questão levantada para inquirição, consideração, discussão, decisão ou solução: *"Falavam na vida e na morte, em Deus, em livros, política nacional e internacional, pássaros, árvores, pinturas e outra vez no problema da finitude humana"* (VERISSIMO, Erico. Incidente em Antares. São Paulo: Globo, 1988).
>
> 3 Dificuldade ou obstáculo que requer grande esforço para ser solucionado ou vencido.
>
> 4 Situação conflitante; dificuldade: *"Ela diz 'que é que você quer?' com aquele mesmo tom do telefonema. Como segura um menu, não sei se escolho o lanche ou se começo a contar o meu problema"* (BUARQUE, Chico. Estorvo. São Paulo: Companhia das Letras, 1991).
>
> 5 Pessoa, coisa ou situação que causa incômodo ou preocupação.
>
> 6 Distúrbio ou disfunção orgânica ou psíquica que afeta o equilíbrio de um indivíduo: *"Ocupávamos um lugar na plateia de um teatro [...] alguém nos disse que o presidente havia tido um problema de pressão, corremos para o hotel"* (CONY, Carlos Heitor; LEE, Anna. O beijo da morte. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003).
>
> 7 (MATEMÁTICA) Toda questão em que se procura calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas*, ligadas mediante relações a outras conhecidas, chamadas *dados*. (MICHAELIS, 2015, grifos do autor)

A amplitude dessa definição é um demonstrativo da natureza incerta dos "problemas". A visão pragmática do que é um problema leva a duas associações comuns, uma que faz referência a situações que ocasionam estresse e demandam soluções, e outra que remete diretamente à aula de Matemática, onde o problema se torna um instrumento pedagógico de ensino, avaliação e estudo. Um dos desafios do processo de ensino-aprendizagem surge justamente na existência de uma dissociação entre essas duas visões.

Problemas como vistos na escola e problemas na "vida real" se tornam dois objetos contrapostos com abordagens distintas. O estímulo das habilidades de resolução de problemas, na perspectiva discente, se limita somente a problemas escritos ou propostas didáticas. Em contraste a essa visão, os documentos curriculares apresentam tais habilidades como uma característica importante no processo de formação de cidadãos críticos e pensantes num contexto social que vem se modificando de maneira acelerada.

> A facilidade de acessar, selecionar e processar informações está permitindo descobrir novas fronteiras do conhecimento, nas quais este se revela cada vez mais integrado. Integradas são também as competências e habilidades requeridas por uma organização da produção na qual criatividade, autonomia e capacidade de solucionar problemas serão cada vez mais importantes, comparadas à repetição de tarefas rotineiras. (BRASIL, 2000a, p. 58)

Apesar da publicação datar de 2000, e fazer referência a um processo de mudança que se iniciou em meados da década de 80, a validade da assertiva se mantém de tal forma que, reconhecendo as consequências da enorme expansão do acesso à informação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2019 retoma tal compromisso, dando destaque às competências e habilidades necessárias para o emprego de conhecimentos, e não só a retenção dos mesmos.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (BRASIL, 2019, p. 14)

A competência para resolver problemas parte da instrumentalização dos conhecimentos e ferramentas adquiridas pelo indivíduo em sua vida. Dessa forma, a escola, por ser parte significativa do desenvolvimento do sujeito, trabalha de forma consonante, almejando o desenvolvimento desse conjunto de habilidades e visando a formação de adultos produtivos e críticos. Polya alude tal perspectiva ao afirmar que:

> Solucionar um problema significa encontrar uma saída para uma dificuldade, superar obstáculos, alcançar um objetivo que não era inicialmente alcançável. Resolver problemas é a conquista específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico da raça humana: solucionar problemas pode ser visto como a atividade mais caracteristicamente humana. (POLYA, 1981, p. ix, tradução nossa)

Como visto na definição apresentada no início da seção, há uma associação direta entre a Matemática e a resolução de problemas, associação esta que, por vezes, cria a ilusão de que o simples tratamento dos conteúdos matemáticos acarreta no estímulo à habilidade do aluno para resolver problemas, porém, "resolver problemas" trata de um conjunto de habilidades particular que vai além da simples retenção de informações e algoritmos.

Ao delimitarmos o contexto de discussão à aula de Matemática, há que se reconhecer a diversidade com a qual a resolução de problemas se permite contemplar: como objeto central de aprendizagem, como um potencializador desse processo, ou até mesmo como um simples instrumento didático. A validade de tais empregos não entra sob questionamento, a natureza da abordagem altera apenas a ênfase dada à competência para resolver problemas, à assimilação de conhecimentos matemáticos, e ao domínio do emprego de algoritmos. Nessa visão, não há razão para debate no que se refere ao tratamento da resolução de problemas na Matemática, e sim, na adequação dos métodos utilizados ao contexto escolar e aos objetivos almejados a curto e longo prazo.

Talvez, a forma mais frequente com a qual a resolução de problemas é contemplada na aula de Matemática seja como instrumento didático de assimilação de conhecimentos. Problemas escritos surgem como uma forma para que o aluno exercite os conteúdos aprendidos, seja em situações contextualizadas ou não. Dessa forma, a resolução de problemas é incluída de forma instrumental, enfatizando o aprendizado de conteúdos matemáticos e de suas aplicações.

Segundo Bosch e Winsløw:

> Conhecimento humano nasce do estudo de *questões* importantes e problemáticas. No intuito de fornecer respostas a uma determinada questão, fazemos uso de uma variedade de materiais, alguns dos quais são, por sua vez, respostas elaboradas por outros para a mesma questão, ou similar. Essas respostas são a síntese de processos de pesquisa anteriores e o resultado de uma organização específica dos resultados obtidos nesse processo. (BOSCH; WINSLØW, 2015, p. 362, tradução nossa, grifo dos autores)

Sob a perspectiva de visão instrumental mencionada, o ensino abrangeria o tratamento das habilidades de resolução de problemas como parte natural do processo de aprendizagem. Dessa forma, esperar-se-ia que ao assimilar os conteúdos matemáticos pertinentes (processo cujo resultado é referido como *síntese* por Bosch e Winsløw), o aluno desenvolva a habilidade de utilizá-los de forma natural, ou seja, o aluno aprende Matemática para que possa resolver problemas.

No reconhecimento de que este processo pode não ser espontâneo, surgem autores como Polya (1981, 1954) e Schoenfeld (1985), que defendem a ênfase ao tratamento da Matemática onde o aluno aprende a resolver problemas. Nessa perspectiva, a habilidade de resolver problemas ganha ênfase a partir de um tratamento heurístico, no qual os processos englobados pela resolução de problemas ganham destaque, e o conhecimento matemático se torna ferramenta para que o aluno expanda seu arsenal de métodos para resolução de novos problemas que venham a surgir ou ser propostos.

> Como um estudante universitário, um estudante graduado, e então um jovem professor, um matemático aprendiz soluciona milhares e milhares de problemas. Ocasionalmente aquela pessoa resolve um problema utilizando uma técnica que havia sido bem-sucedida anteriormente, e algo clica. [...] Se aquele método teve êxito duas vezes, o indivíduo pode utilizá-lo quando

> se deparar com outro problema similar. Dessa forma, um método se torna uma *estratégia*. Através do passar de anos, cada solucionador de problemas passa a contar – possivelmente de forma inconsciente – nestes métodos que se provaram úteis para si mesmo. Ou seja, o indivíduo desenvolve uma coleção pessoal e idiossincrática de estratégias de resolução de problemas. (SCHOENFELD, 1985, p. 70, tradução nossa, grifo do autor)

Assim, propiciar aos alunos um ambiente onde sejam confrontados com problemas cujos meios de solução devem ser explorados e compreendidos de forma significativa lhes permite que desenvolvam um conjunto particular de estratégias, visando construir um arsenal que lhes seja satisfatório ao lidar com problemas relativamente novos que possam surgir, não somente no contexto de sala de aula.

Em suma, o trabalho heurístico da resolução de problemas e de seus métodos direciona esforços à aquisição de habilidades de resolução de problemas como formas de instrumentalizar o saber próprio do aluno, enquanto o emprego da resolução de problemas como instrumento pedagógico é direcionado à assimilação de conteúdos matemáticos por vias de prática e exercício.

À primeira vista, é possível associar a visão dos documentos oficiais que regem o currículo de Matemática à visão da resolução de problemas sob uma ótica heurística. Os objetivos traçados por estes documentos reservam significativa importância à aquisição de habilidades para a utilização dos conteúdos matemáticos, e não apenas à assimilação dos mesmos. Porém, existe certo paradoxo quando tratamos o ensino de Matemática puramente nessa perspectiva dicotômica.

Schoenfeld (1985, p. 73) afirma que para que o sujeito aprenda a utilizar processos heurísticos é necessário domínio razoável dos recursos matemáticos que tem à sua disposição. Em um contexto educacional onde os alunos apresentem deficiências fundamentais no domínio da Matemática, tal trabalho perderia a base essencial requerida para seu sucesso.

Dessa forma, ao confrontarmos a realidade das salas de aula brasileiras e as demandas feitas pelas bases curriculares, encontramos desafios que não parecem ser compatíveis, há de se dar ênfase ao tratamento de habilidades, porém, como mostram os dados educacionais, os estudantes em sua maioria não apresentam os pré-requisitos necessários para que os conteúdos do componente curricular sejam instrumentalizados, o que implica no tratamento imperativo dos saberes matemáticos a priori.

Em vista desses desafios, a busca por contemplar os objetivos definidos para o ensino básico acaba por aproximar o ensino dos conteúdos da Matemática ao desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas de forma conjunta, como apontado por Cai e Lester:

> Pesquisas sugerem claramente que a resolução de problemas não deve ser ensinada como um tópico separado no currículo de matemática. Na verdade, pesquisas afirmam que ensinar estudantes a utilizar estratégias gerais de

> resolução de problemas tem pouco efeito em seu sucesso como solucionadores de problemas. Portanto, resolução de problemas deve ser ensinada como parte integral do aprendizado em matemática, e requer um compromisso significativo no currículo de todas as séries e tópicos matemáticos. (CAI; LESTER, 2010, p. 5, tradução nossa)

O ensino de Matemática **através** da resolução de problemas se propõe a providenciar aos alunos desafios que lhes permitam acessar às habilidades de resolução de problemas enquanto desenvolvem novas noções, que passam por um processo de adequação, através da mediação docente, aos saberes matemáticos visados pelo processo de ensino-aprendizagem.

Quanto ao ensino de Matemática através da resolução de problemas, Onuchic et al. (2014, p. 38) esclarecem que "a expressão 'através' – significando 'ao longo', 'no decurso' – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente".

Assim, esta pesquisa chega aos modelos culminantes dos trabalhos do GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) da UNESP, que apresentam um roteiro proposto inicialmente por Onuchic (1999) e posteriormente adequado por Onuchic e Allevato (2011) na chamada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (sigla RP, para conveniência do leitor).

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de Problemas o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81)

No ambiente de utilização da RP, o objetivo é que o conteúdo matemático se desenvolva de forma espontânea a partir da situação-problema apresentada. O docente atinge os objetivos fixados utilizando questionamentos como catalizadores do processo, o que culmina na formalização dos conteúdos matemáticos contemplados no decorrer da resolução. Onuchic e Allevato endossam o uso da RP ao destacar os benefícios observados em pesquisas acerca da abordagem da resolução de problemas:

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
>
> - Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
>
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
>
> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.

> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar da forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
>
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82, grifos das autoras)

Uma das premissas centrais que dá base à utilização da RP advém do fato de que o conteúdo matemático se manifesta da necessidade de solucionar o problema proposto, ou seja, a solução (as respostas) é encontrada a partir da compreensão e exploração dos problemas (as perguntas). A dicotomia "perguntas/respostas" pode ser mais explorada ao observar que, durante as aulas, é comum que o ponto de partida da exposição feita pelo docente sejam respostas para as quais não são apresentadas perguntas, quanto a isso, Bosh e Winsløw esclarecem que:

> O estudo de "respostas sem perguntas" pode parecer bizarro à primeira vista, mas [...] é a organização de educação matemática mais clássica e continua a mais prevalente. Ele consiste da transmissão direta de sínteses – no âmbito escolar, apresentado de forma altamente transposta através de livros didáticos e outros meios. Somos todos muito familiares com esse esquema pedagógico, por exemplo, através de palestras (nas quais palestrantes atuam como a mídia). [...]
>
> Simplesmente estudar dadas respostas através de meios orais e escritos (ambos representados e transmitidos digitalmente cada vez mais) continua sendo uma forma de ensino e aprendizagem de matemática bastante comum, com pouca preocupação aos questionamentos que deram origem a essas sínteses específicas. (BOSCH; WINSLØW, 2015, p. 364, tradução nossa)

Dado o exposto, é notável como o núcleo de proposta da RP corrobora a significação dos conteúdos trabalhados no componente curricular de maneira intrínseca ao processo pedagógico, estimulando e exigindo nos alunos a busca pela construção de conhecimento. Na seção a seguir, são apresentadas as especificidades da utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para que se esclareça de que forma a argumentação na Matemática entra em contexto.

1.2 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Reforçando o que foi apresentado na seção anterior, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) apresentam significativa ênfase no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dentro da disciplina de Matemática como parte do desenvolvimento crítico e social do aluno.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000b, p. 40)

As Orientações Educacionais Complementares aos PCN (2002, PCN+), destacam que, no contexto das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, formar cidadãos transcende às especificidades das disciplinas abordadas.

> Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:
>
> • saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
>
> • enfrentar problemas de diferentes naturezas;
>
> • participar socialmente, de forma prática e solidária;
>
> • ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
>
> • especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado. (BRASIL, 2002, p. 9)

Em consonância com tais objetivos, os PCN+ vão além, e destacam a importância do emprego de métodos de aprendizagem correspondentes, permitindo a organização de um ambiente escolar propício ao desenvolvimento de tais habilidades.

> Uma formação com tal ambição exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:
>
> • comunicar-se com problemas, compreendê-los e enfrenta-los;
>
> • participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
>
> • fazer escolhas e proposições;
>
> • tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender. (BRASIL, 2002, p. 9)

A abordagem metodológica em discussão foi proposta inicialmente por Onuchic (1999), sob essa abordagem, os conhecimentos matemáticos são contemplados através da Resolução de Problemas. Essa esquematização consiste na formação de grupos onde o professor assumiria uma nova postura, de mediador na exposição, discussão e análise dos resultados obtidos pelos alunos, objetivando concordância entre os alunos e, por fim, a formalização dos conteúdos referenciais em tratamento.

Uma versão mais atual do roteiro proposto em 1999 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) divide o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas em

9 momentos: a preparação do problema, a leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e, por fim, a formalização do conteúdo.

Assim, seguindo as orientações de Onuchic e Allevato (2011) para a utilização da RP, a proposta se inicia da criação de uma sequência didática que perpassa nove etapas de confecção, desde a escolha dos problemas a serem tratados ao momento de formalização do conteúdo através de aula expositiva.

Preparação do problema

Talvez um dos momentos mais cruciais do processo, contemplada no planejamento da aula, a preparação do problema adquire um novo eixo direcionador. Na seleção ou confecção de problemas, o professor usualmente se preocupa em contemplar determinado conteúdo/habilidade para acessar ou estimular este no aluno, no contexto proposto pela RP, o problema deve ser apresentado antes que o aluno tenha o conhecimento requerido, ou seja, deve ter suporte em conhecimentos prévios e na capacidade de construção de novos saberes pelos estudantes.

> [...] para o início do trabalho o professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos (Allevato, 2014). Esse problema inicial é chamado problema gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. (ONUCHIC et al., 2014, p. 45)

Como o problema toma nova importância no contexto da RP, há que se atentar, primeiramente, à definição adotada no que se refere ao significado de *problemas*, já que, como mencionado no início do capítulo, existe uma grande amplitude de definições que não necessariamente convergem em um único significado. Nessa perspectiva, adotando a visão de Onuchic e Allevato (2011, p. 81) de que problema *"é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer"*, seguem os critérios para que o problema seja considerado um *bom problema* por Cai e Lester:

> 1. O problema tem matemática importante e útil incorporada a si.
> 2. O problema requer alto nível de pensamento e resolução de problemas.
> 3. O problema contribui ao desenvolvimento conceitual de estudantes.
> 4. O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus estudantes estão aprendendo e onde estão encontrando dificuldades.
> 5. O problema pode ser abordado por estudantes de diversas formas usando diferentes estratégias de solução.

> 6. O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posicionamentos a serem tomados e defendidos.
>
> 7. O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos estudantes.
>
> 8. O problema se conecta a outras importantes ideias matemáticas.
>
> 9. O problema promove o uso engenhoso de matemática.
>
> 10. O problema proporciona uma oportunidade para praticar habilidades importantes. (CAI; LESTER, 2010, p. 1, tradução nossa)

O momento de preparação é, portanto, prévio à aula onde se espera utilizar a metodologia em questão. É ideal que o problema apresente etapas que conduzam o aluno à complexidade requerida para a formalização do saber em tratamento, ou seja, a ótica de preparação do problema deve ter em perspectiva todas as etapas do processo, a leitura e compreensão do problema, o processo de resolução pelos alunos e mediação pelo professor e, por fim, os momentos de socialização e discussão das resoluções, culminando na formalização pelo professor.

Leitura individual

A compreensão do problema proposto é pré-requisito básico para o seguimento do processo. A delineação do momento da leitura individual na sequência didática e no momento de aplicação da mesma visam despertar no aluno uma noção que, por mais intuitiva que pareça, não é considerada pelos estudantes como parte fundamental do processo, ao menos a nível pragmático.

Na leitura do problema de forma individual, o estudante é apresentado à proposta através de uma ótica particular. Os obstáculos na compreensão do texto do problema ou da própria proposta em si se tornam os primeiros desafios a serem enfrentados pelo aluno. Nesse momento, cabe ao professor dar espaço ao aluno para que produza uma compreensão particular, mesmo que errônea, do que é proposto.

Onuchic et al. (2014, p. 45) esclarecem que *"a ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto"*, fomentando assim, a necessidade pela interpretação individual do aluno, antes do tratamento do problema em perspectiva grupal.

Leitura em conjunto

Na etapa de leitura em conjunto, os alunos, separados em grupos, são estimulados a reler o problema para que, nesse novo contexto, confrontem divergências na compreensão do enunciado, e deem início ao processo de seleção de estratégias de resolução do problema através de discussões onde exponham suas ideias.

O ideal é que, dentro das discussões grupais, os alunos consigam socializar suas visões e compreender integralmente a proposta apresentada pelo enunciado do problema gerador, porém, é comum que surjam problemas secundários, que, segundo Onuchic et al. (2014) são dúvidas que inferem na compreensão de fragmentos linguísticos, simbólicos ou de conceitos fundamentais pertinentes, e não na extração de significado do problema de forma geral.

É importante destacar que este é o primeiro momento onde as habilidades de argumentação do aluno tomam centro. Ser capaz de expor aquilo que foi compreendido afim de justificar propostas de seguimento ao processo é essencial no contexto de um grupo, já que, por mais seguro que o aluno esteja de que sua visão terá sucesso na tarefa proposta, a validade do grupo só é conferida no momento onde eles são convencidos de que exista uma lógica apropriada por trás da fala do colega.

Resolução do problema

A etapa de resolução do problema busca seguir a ênfase dada à discussão dos estudantes acerca das estratégias para solucionar o problema proposto. Nessa etapa, havendo decidido quais estratégias seguir, os estudantes dão seguimento ao processo, buscando, em um segundo momento, defender não somente suas respectivas ideias, mas também os resultados e progressos encontrados no decorrer do processo.

Este momento se estabelece no posicionamento do estudante em caráter de protagonismo. A busca, discussão, defesa, registros, todos os procedimentos do processo são centrados no aluno, no reconhecimento de que a aprendizagem tem um caráter extremamente particular que não necessariamente siga os parâmetros formais do "saber", mas que tem validade substancial e deve ser um elemento integrado ao processo de ensino.

Compartilhando essa visão, a BNCC defende que para que a escola acolha a juventude, ela deve

> • garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política; [...]
>
> • promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; (BRASIL, 2019, p. 465)

Fomentando, assim, o estímulo à perspectiva a ser adotada pelo estudante no contexto da RP. Neste mesmo viés, a própria BNCC apresenta como a sua abordagem contempla o tratamento de atitudes e valores na própria forma com a qual define o conceito de "competências":

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo de trabalho. (BRASIL, 2019, p. 8, grifo do autor)

Observar e incentivar

Esta subseção não discute uma etapa distinta do processo didático apresentado, se trata de um momento simultâneo ao momento de resolução, sua menção é importante pois se trata da discussão acerca da postura docente em meio a um processo onde o estudante toma posição de protagonismo.

> O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos. (ONUCHIC et al., 2014, p. 45)

É importante ressaltar que uma concepção errônea gerada pela "perda" do protagonismo pelo professor é a de que, neste processo, ele se torna um componente passivo, devendo somente observar e direcionar os alunos através de questionamentos, porém, Franke, Kazemi e Battery desmitificam essa concepção ao tratar da dimensão desafiadora e da complexidade da postura a ser adotada pelo professor neste contexto:

> A professora deve dar a cada aluno a oportunidade de participar no trabalho com o problema enquanto, simultaneamente, encoraja cada estudante a dar assistência aos caminhos de solução dos outros, de forma que ela possa orquestrar oportunidades para que os estudantes construam os pensamentos uns dos outros. Enquanto se atenta a isso, a professora deve também adotar um papel ativo e se certificar que a turma alcance os objetivos implícitos e explícitos. Ela precisa fazer julgamentos sobre o que evitar, navegar por caminhos de soluções que nem sempre funcionam, responder a assertivas incorretas, e se atentar àqueles que não estão participando. Ela deve também encontrar uma forma de explicitar similaridades matemáticas subjacentes nas soluções de uma forma que faça sentido aos seus estudantes. Todas essas ações e decisões devem, é claro, caber no respectivo período de uma lição, uma unidade, e um ano escolar. (FRANKE; KAZEMI; BATTERY, 2007, p. 231, tradução nossa)

Um dos maiores desafios de se adequar ao contexto da RP paira justamente na apropriação e domínio dessa nova postura pelo professor. A visão tradicional de ensino acaba por condicionar o professorado a transformar uma situação problemática em uma simplificada para que os estudantes consigam sucesso em sua solução, porém, ao reduzir o desafio que cabe aos alunos superar, é reduzida também a dimensão do processo de aprendizagem.

Permitir que o aluno erre quando pertinente, redirecionar sua linha de raciocínio, não através de instrução direta, mas através de questões norteadoras, explicitar as ferramentas às quais se tem acesso no momento de resolução, estimular a socialização de ideias. Estes se tornam os artifícios mais eficazes para o processo de ensino-aprendizagem-avaliação no contexto da RP.

Registro das resoluções na lousa

Durante o registro das resoluções na lousa, os alunos são convidados a expor por escrito ao restante da turma a culminância de suas discussões e procedimentos seguidos durante a etapa anterior. Onuchic e Allevato (2011, p. 84) esclarecem que nesse momento, "representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam."

Essa etapa reforça nos alunos uma noção que já deve se fazer clara na visão dos professores de Matemática, de que a proposta de resolução de problemas vai além da pura descoberta de uma solução satisfatória para o problema proposto. Todos os momentos percorridos pelo estudante no decorrer do processo, desde a leitura e interpretação até a escrita de uma solução, sinalizam momentos de aprendizagem em potencial.

Plenária

Onuchic et al. (2014) descrevem a plenária como um momento essencial que parte do registro das resoluções na lousa e culmina no consenso da turma em uma solução:

> Diante desse "painel de soluções", o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução. Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo. (ONUCHIC et al., 2014, p. 46)

Nessa etapa, as soluções apresentadas pelos grupos são confrontadas de uma perspectiva externa, por estudantes que não participaram do mesmo processo de resolução e, provavelmente, tomam suas próprias soluções como modelos de comparação. A necessidade de se apropriar da própria resolução afim de expô-la de forma coerente e encontrar similaridades e pontos de intersecção entre as diferentes respostas apresentadas na lousa se propõe a conduzir os estudantes de um momento de confrontamento de raciocínios a uma busca pela aprimoração do processo como um todo, desde o nível de detalhe na exposição das diferentes etapas do processo à formalidade da linguagem matemática utilizada.

A BNCC (2019) defende que para que se desenvolvam habilidades referentes aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas, é essencial que se faça evidente aos alunos que seus processos de raciocínio nascem de suas formas particulares de pensar e devem ser nutridos de forma social, tendo como propósito fundamental a comunicação do saber.

> Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.
>
> Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem **raciocinar**, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. (BRASIL, 2019, p. 529, grifo do autor)

Busca do consenso

Embora o momento de discussão aprecie o debate entre os alunos, é importante que se mantenha claro o objetivo da plenária, o consenso entre os estudantes. Ao professor, é imprescindível nesse momento mediar a discussão, sem que haja reducionismo das falas dos estudantes, visando a concordância da turma no alcance aos conceitos matemáticos fixados como objetivo do problema proposto.

Encontrar equilíbrio ao estimular o confrontamento saudável de visões divergentes e direcionar tal confrontamento à busca por um consenso agregam ao processo de desenvolvimento das habilidades de argumentação dos estudantes o estimulo a hábitos saudáveis de debate e socialização, fundamentais no desenvolvimento de cidadãos críticos e politicamente ativos. Tal coordenação entre o desenvolvimento de competências e de atitudes é aludida pela BNCC:

> Cabe observar que essas competências consideram que, além da cognição, os estudantes devem desenvolver atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo. (BRASIL, 2019, p. 530)

Ao fim da plenária, idealmente após alcançar a satisfação dos alunos quanto às discussões ocorridas em meio às diferentes resoluções apresentadas, o professor deve prosseguir com o processo didático visando a formalização dos conceitos e procedimentos trabalhados.

Formalização do conteúdo

Onuchic et al. (2014, p. 46) estabelece que, nessa etapa, "o professor registra na lousa uma apresentação 'formal' – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações se for o caso."

Para que a etapa de formalização não pareça desconexa do processo de resolução, é importante que o professor evidencie os vínculos entre o que foi discutido e aquilo que está sendo apresentado aos alunos como resultado de suas construções. Essas nuances não podem ser comtempladas de forma concisa no planejamento, já que dependem quase que exclusivamente daquilo que foi produzido pelos alunos em sala, e, portanto, dependem intimamente de uma capacidade de leitura e adaptação do curso de aula pelo professor.

A culminância do processo de resolução do problema no tratamento formal da Matemática agrega valor aos conhecimentos construídos. Os conceitos e procedimentos formalizados ganham significado ao alunado à medida em que se faz nítida a conexão entre um processo de resolução que lhes pertence e a Matemática que lhes é apresentada. A construção do saber matemático parte, portanto, dos conhecimentos construídos pelo estudante, e não da exposição feita pelo professor ou do texto de um livro didático.

Dessa forma, é importante ressaltar que o modelo proposto por Onuchic e Allevato em 2011 define o momento de formalização como última etapa do processo de ensino com a RP, porém, Onuchic et al. (2014) apresentam nova proposta, que finaliza o processo em uma décima etapa, de proposição e resolução de novos problemas, pois

> Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem com aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante. (ONUCHIC et al., 2014, p. 46)

Porém, ao seguir o modelo de 2011, deve-se reconhecer que este processo pode ser contemplado no decorrer da formalização. À medida em que são traçadas correlações entre o processo de resolução feito pelos estudantes e o saber matemático visado, respeitando o dinamismo do planejamento de aulas, o docente deve integrar a proposição e resolução de novos problemas como artifício de ensino, permitindo-lhe acessar os conhecimento construídos a nível de detalhe, se necessário julgar.

Por fim, é importante destacar que a proposta de aula por meio da RP se justifica na necessidade pela diversificação da utilização de metodologias em sala de aula, e não se propõe como cura para todas as problemáticas presentes no âmbito educacional. A RP se coloca fundamentalmente como forma de introduzir novos conceitos e procedimentos matemáticos enquanto se abrange também o estímulo do protagonismo nos estudantes no desenvolvimento de suas próprias competências e habilidades.

2 Argumentação e a Matemática

2.1 A Argumentação no Contexto da Aula de Matemática

Pode-se caracterizar o processo de argumentação no contexto da Matemática à maneira com a qual Perelman caracteriza a lógica da argumentação, contrastando a diferença entre aquilo que chama de lógicas formal e informal.

> Enquanto a lógica formal é a lógica da demonstração, a lógica informal é a da argumentação. Enquanto a demonstração é correcta ou incorrecta, constringente no primeiro caso e sem valor no segundo, os argumentos são mais ou menos fortes, mais ou menos pertinentes, mais ou menos convincentes. (PERELMAN, 1992, p. 15)

Pinto (2015, p. 15) elucida tais definições interpretando a lógica formal como o "estudo sintático-semântico dos argumentos" e a lógica informal como "o estudo pragmático dos argumentos, por sua vez, foi inicialmente chamado de *retórica* e, mais recentemente, *teoria da argumentação*". Sob essa ótica, o trabalho com a Matemática em meio às demonstrações, carregando consigo minúcia na precisão linguística e conceitual, é espontaneamente associado à lógica formal, enquanto a lógica informal abarca o apreço à percepção da Matemática como corpo presente no cotidiano através de analogias e associações indutivas e dedutivas. Polya esclarece que:

> Matemática é vista como uma ciência demonstrativa. Mas este é apenas um de seus aspectos. A matemática concluída, apresentada em uma forma finalizada parece puramente demonstrativa, consistindo apenas de provas. Mas a matemática sendo fabricada assemelha-se a qualquer outro conhecimento humano em produção. Você deve predizer um teorema matemático antes de prová-lo, você deve predizer a ideia da prova antes de prosseguir com os detalhes. (POLYA, 1954, p. vi, tradução nossa)

Pode parecer estranho tratar da teoria da argumentação num contexto onde o conteúdo do debate não está necessariamente sob deliberação, a Matemática acomoda diversas formas de pensar, porém, sua construção apresenta uma aversão explícita a erros. Assim, se faz necessário esclarecer que a abordagem da argumentação em um contexto didático não se propõe a discutir a validade de conceitos e procedimentos já legitimados, e sim, tem como papel elementar o de potencializar o processo de aprendizagem do sujeito e de desenvolver capacidades de discussão que não se limitam ao contexto da Matemática. Boavida explicita o potencial da abordagem da argumentação no ensino de Matemática ao discutir acerca de sua importância:

> [...] a importância actualmente atribuída ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação, em particular na aula de matemática, decorre da sinergia de vários argumentos de que destaco: (a) a valorização do raciocínio matemático nas suas múltiplas vertentes numa perspectiva que não põe a ênfase no rigor e formalismo entendidos como um fim em si mesmo, (b) a recomendação de que os alunos aprendam matemática com compreensão, (c) o valor atribuído às linguagens naturais e à interação social para a aprendizagem, (d) a aproximação da comunicação na aula de matemática da existente na comunidade dos matemáticos, (e) dificuldades encontradas na aprendizagem da prova e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem e (f) a relevância da escola proporcionar a todos os alunos condições necessárias para desenvolverem certas competências transversais, entre as quais está a competência argumentativa, fundamentais ao exercício pleno de uma cidadania responsável numa sociedade democrática. (BOAVIDA, 2005, p. 7)

A visão comum da Matemática como um organismo concluído, imutável e absoluto, fomenta no seu aprendiz uma ideia de distanciamento. A Matemática se torna algo que deve ser absorvido, e não construído, porém, o processo de aprendizagem nada mais é do que a reconstrução da Matemática e de seus procedimentos dentro da perspectiva particular de cada indivíduo. Neste contexto, o processo de argumentação, mesmo que embasado na lógica interpretada como *informal*, traz consigo um processo de análise que estimula o desenvolvimento e assimilação dos conhecimentos que tangenciam o processo tratado.

Além da potencialidade ofertada pela ênfase dada à argumentação no que se refere à aprendizagem de conceitos e na assimilação de procedimentos, há também a abordagem de atitudes visadas pelo aluno do ensino básico. A argumentação é uma ferramenta indispensável no trabalho cooperativo. Perelman e Olbrechts-Tyteca defendem que ao engajar em discussões se agrega importância à opinião dos interlocutores e vão além ao afirmar que:

> Também deve-se observar que procurar convencer alguém sempre sugere certa modéstia na parte do iniciador da discussão; o que ele diz não é "verdade evangélica", ele não possui a autoridade que colocaria suas palavras acima de questionamento de forma que acatariam convicção imediata. Ele reconhece que deve utilizar persuasão, pensar em argumentos capazes de atuar em seu interlocutor, mostrar certa preocupação por ele, e estar interessado em seu estado mental. (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 1969, p. 16, tradução nossa)

Ao se posicionar na perspectiva apresentada por Perelman e Olbrechts-Tyteca, o indivíduo trabalha noções de respeito e cooperação de forma intrínseca, características que vão além dos limites definidos pelo conhecimento Matemático e alcançam a abordagem humana dos sujeitos inseridos neste processo.

2.2 A Argumentação Através do Currículo de Matemática

Quando se discute argumentação no ensino de Matemática, é habitual que esta assuma um caráter pragmático, se tornando um instrumento que possibilite expor definições, soluções e demonstrações através do uso de códigos apropriados. É possível que uma associação intuitiva do tratamento da argumentação, nos moldes que esta análise se propõe a discutir, nos aproxime mais da área de Linguagens ou até mesmo da área das Ciências Humanas, o que não estaria incorreto, sua concepção falharia no surgimento de uma dissociação entre o acomodamento da argumentação nos padrões da língua vernácula e o tratamento formal dos conhecimentos matemáticos.

Os processos de comunicação presentes em sala de aula transcendem a simbologia matemática. A utilização da língua materna se torna o meio central pelo qual o processo de aprendizagem ocorre. Distanciar a Matemática da língua vernácula nunca foi o objetivo do ensino, a abordagem da Matemática busca permitir que o aluno estimule seu domínio linguístico da mesma forma com a qual se apropria da linguagem particular à Matemática, assim como descrito pela BNCC:

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de **comunicar** ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. (BRASIL, 2019, p. 529)

Além disso, como ressalta a BNCC (2019, p. 531) o reconhecimento de que a representação matemática não está restringida ao uso de símbolos e nem mesmo da linguagem materna, é necessário para que o aluno possa *"compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.) na busca de solução e comunicação de resultados de problemas."*

A BNCC não é o primeiro momento em que os documentos curriculares nacionais se atentam à multiplicidade das formas de representação na Matemática e à sua importância para a formação estudantil, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) em 2000 já fomentavam a necessidade pelo domínio destas formas de representação na interpretação do mundo sob uma visão Matemática:

> Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço,

> a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 2000b, p. 40)

Assim, fica evidente a forma com a qual as competências para **representar** e se **comunicar** no campo da Matemática se interlaçam, a necessidade pela comunicação num contexto de aprendizagem demanda a utilização de representações adequadas, seja qual for a natureza de tal representação. A BNCC apresenta a noção de comunicação demarcando sua importância ao defini-la como objetivo do Ensino Básico:

> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita) corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (BRASIL, 2019, p. 9)

O desenvolvimento destas competências (representar e comunicar) se vê fundamental também no tratamento da competência para **argumentar**. A BNCC (BRASIL, 2019, p. 530) alude tal relação ao afirmar que, *"com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas"*. A magnitude com a qual os documentos nacionais fomentam a importância pela atenção à competência para argumentar se justifica na forma com a qual esta se faz necessária em ambientes sociais.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. (BRASIL, 2019, p. 10)

A ênfase dada ao desenvolvimento de atitudes surge do reconhecimento de que o objetivo do Ensino Básico não é a mera preparação dos estudantes para a vida acadêmica, é a preparação de sujeitos socialmente aptos, cidadãos críticos e produtivos. No trabalho com a Matemática, um dos espaços mais férteis para o tratamento de tais atitudes é justamente o espaço social gerado em contextos cooperativos, que demandam e estimulam simultaneamente a competência de argumentação. A BNCC (BRASIL, 2019, p. 10) faz tal relação ainda mais evidente ao definir que *"agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários."* é um dos objetivos centrais do Ensino Médio.

Há também que se observar que, enquanto a Matemática se faz instrumento fundamental em outros componentes curriculares (mais notavelmente na Física e Química, mas com potencial para se manifestar também em todos os outros componentes), em poucos momentos se faz explícito o emprego de competências centradas em outras áreas, isso, por muitas vezes, em detrimento do próprio aprendizado de Matemática, pois como já defendiam as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111)

Dessa forma, como potencializadora dos processos de ensino e aprendizagem e como um objetivo por si só na construção de alunos críticos e participativos, a argumentação supera, portanto, os limites definidos pelas áreas de conhecimento, e é listada dentre as metas da Educação Básica pela BNCC:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (BRASIL, 2019, p. 9)

Nessa perspectiva, é importante que se desconstrua a visão da Matemática como um aglomerado de conhecimentos e técnicas procedimentais. A percepção da Matemática como parte fundamental no desenvolvimento crítico de seres humanos e sempre presente no cotidiano natural do sujeito, em conjunto com o desenvolvimento das habilidades cujo tratamento da Matemática contempla são imprescindíveis no desenvolvimento do domínio matemático, um domínio que, segundo os PCNs, trata do *saber fazer* Matemática e do *saber pensar* matemático:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000b, p. 41)

A Matemática, a resolução de problemas e a argumentação devem, portanto, coexistir na busca pelo desenvolvimento estudantil. A percepção daquilo que é abordado no Ensino

Básico na leitura de realidade feita pelos discentes é instituído como objetivo do ensino de Matemática assim como dos outros componentes curriculares abordados. Dessa forma, o desenvolvimento de competências que permitam que o aluno navegue seu cotidiano sob uma ótica na qual perceba a validade daquilo que lhe apresentado no âmbito escolar dá significado ao processo de aprendizagem do qual é autor, evitando que desvincule seu desenvolvimento humano daquilo que experiencia durante sua vida estudantil.

2.3 A Argumentação e a Resolução de Problemas

Aproximando a discussão acerca do tratamento da argumentação às particularidades presentes no ambiente proporcionado pela utilização da RP, inicialmente, se faz importante explicitar a compatibilidade entre ambos. A abordagem da Matemática através de métodos tradicionais raramente abre espaço para que o aluno intervenha, tais momentos se limitam a eventuais dúvidas que venham a surgir no discente (considerando que esteja disposto a expô-las) ou comentários acerca do que é exposto pelo professor. Em contraste, como a RP se propõe a centralizar o processo de ensino-aprendizagem no aluno em um ambiente cooperativo, o processo de argumentação surge espontaneamente, como observado em pesquisas com a metodologia em questão:

> [...] fica evidente a forma com a qual o desenvolvimento da **argumentação matemática**, surge, com destaque, no contexto de aula através da RP, em especial em dois momentos, no desenvolvimento das resolução dentre os grupos, que requer que os alunos, ao socializarem ideias com os seus colegas as justifiquem de forma clara e válida, e no momento de busca por consenso, em especial quando as resoluções diferem, já que os estudantes devem debater defendendo seus respectivos raciocínios. (VIDAL, 2016, p. 59, grifo do autor)

Desta forma, a utilização de tal metodologia pode ser vista como um catalizador para o objetivo central do projeto, que é desenvolver estas habilidades através do tratamento de conteúdos da disciplina de Matemática. As habilidades de argumentação são contempladas na RP em sua natureza oral, os registros escritos pelos alunos comumente apresentam procedimentos matemáticos e cálculos aritméticos, e não contemplam o processo lógico de tomada de decisão perpassado pelos alunos.

A natureza cooperativa instituída pela proposta de ensino através da resolução de problemas proporciona um ambiente onde a argumentação e, consequentemente, seu estímulo se dão de maneira orgânica, isto pois o próprio percurso do processo de resolução demanda colaboração e, portanto, requer que exista consonância de ideias entre os sujeitos participantes, fomentando um ambiente de argumentação onde os membros devem buscar aderência de outros às suas visões e ideias. O objetivo da argumentação no contexto da aula de Matemática é apresentado por Boavida, ao afirmar que:

> Na aula de Matemática, a argumentação quando se reveste da forma oral, é um troca discursiva entre os participantes com o objetivo de convencer outros de certas ideias ou modos de pensamento. É, assim, um empreendimento colectivo. É, também, dialéctica, no sentido em que não conduz necessariamente a conclusões verdadeiras mas parte de princípios que são verdadeiros para quem argumenta. Se o seu sucesso depende de acordos relativamente aos dados de que se parte e aos elementos justificativos apresentados para apoiar as conclusões, a importância do auditório e, concretamente, do auditório universal de que fala Perelman, parece ser um aspecto relevante, pois convencer é levar alguém a aderir a algo fazendo apelo à razão. (BOAVIDA, 2005, p. 86)

Nessa perspectiva, a manifestação da argumentação na aula de Matemática no contexto da RP, como descrito no capítulo anterior, se faz evidente, a mediação docente, portanto, direciona a sua atenção à forma com a qual tal processo se dá. Identificar as relações entre as estruturas presentes na argumentação e estimular a apresentação destas estruturas de maneira coerente se torna um dos objetivos do processo de mediação, para tanto, é necessário que tais estruturas sejam conhecidas.

Uma análise detalhada da estrutura de argumentação é apresentada por Toulmin (2003), e já foi implementada em diversas pesquisas na área de Educação Matemática na análise das comunicações presentes em sala de aula (exemplos no referencial teórico: Boavida, 2005; Nunes e Almouloud, 2013)

O cerne do modelo definido por Toulmin (2003) se fundamenta sobre 3 organismos básicos: *dados*, *garantia* e *conclusão*. Nessa descrição, define-se *conclusão* como uma assertiva à qual se objetiva aderir validade, *dados* como as informações fundamentais que validam a conclusão e *garantias* como justificativas que explicitem a conexão entre os dados e as conclusões. Segundo Toulmin (2003, p. 91, tradução nossa), a *garantia* se insere nessa relação no reconhecimento de que *"nossa tarefa não mais é fortalecer o terreno no qual nosso argumento é construído, e sim, mostrar que, tomando tais dados como ponto de partida, o passo para a conclusão original é apropriado e legítimo."*

Ao detalhar o modelo simplificado, Toulmin aponta a necessidade pela descrição de novos organismos. Tomando o modelo apresentado anteriormente como um "esqueleto", Toulmin (2003) o expande apresentando os *qualificadores*, as *condições de refutação* e o *suporte*. Nesta expansão do modelo, os *qualificadores* elucidam a força conferida ao argumento a partir da garantia utilizada, as *condições de refutação* indicam as circunstâncias nas quais a garantia tem sua aplicabilidade suspensa e o *suporte*, um fato determinante que agrega autoridade à garantia apresentada.

Toulmin (2003, p. 97) ilustra a forma intricada com a qual tais elementos se relacionam na construção de um argumento a partir de um exemplo onde procura defender que um homem, chamado Harry, é um cidadão britânico, sua descrição oral seria algo da forma:

"Harry nasceu nas Bermudas, então, presume-se que Harry seja um cidadão britânico, já que, de acordo com os estatutos e disposições legais, em regra, um homem nascido nas Bermudas é um cidadão britânico. A menos que ambos seus pais sejam estrangeiros ou que tenha se tornado um cidadão americano."

Neste exemplo, se apresentam os elementos:

- **Dados**: *Harry nasceu nas Bermudas.*
- **Conclusão**: *Harry é um cidadão britânico.*
- **Garantia**: *Um homem nascido nas Bermudas é um cidadão britânico.*
- **Qualificador**: *Presumidamente.*
- **Condições de Refutação**: *Ambos seus pais sejam estrangeiros/ Harry tenha se tornado um cidadão americano.*
- **Suporte**: *Estatutos e disposições legais.*

O conhecimento sobre tais estruturas e os papeis que estas ocupam na construção da argumentação, serve como um norte na mediação dos processos de discussão da perspectiva docente. Ao fazer alusão à argumentação na visão da Matemática, Toulmin defende que, por mais que a Matemática em sua forma pura não pareça dar abertura à informalidade da argumentação como é apresentada em seu modelo, ainda há que se considerar o contexto no qual determinado fragmento matemático surgiu, e, portanto, não existe razão para que se desvincule o tratamento do saber matemático em meio à resolução de problemas de sua natureza informalmente lógica.

> Então, a pergunta "Este cálculo é matematicamente impecável?" pode ser bem diferente da pergunta "É este o cálculo relevante?". Aqui [...] a aplicabilidade de uma garantia em particular é uma questão, o resultado que nós devemos alcançar ao aplicar a garantia é uma outra questão, e ao perguntar sobre a *exatidão* do resultado, nós devemos ter que investigar ambas estas coisas independentemente. (TOULMIN, 2003, p. 95, tradução nossa)

Lidar com a aproximação da construção matemática produzida àquilo que se objetiva no contexto da resolução de um problema é pertinente em vias de justificar e validar todo o conhecimento construído no processo e também de consolidar as habilidades de argumentação contempladas no procedimento em questão. Tais conexões podem ser ferramentas no processo de edificação, no alunado, da ciência de que o conhecimento matemático também se constrói em um caráter particular, como inicialmente defendido pelo PCN:

> [...] a matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentidos às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000b, p. 40)

Deste modo, se faz notável que o ambiente de resolução de problemas cooperativo proporcionado pela utilização da RP, a partir do tratamento enfático da argumentação, possibilita ao alunos aprender a construir saberes matemáticos, validar as construções produzidas, comunica-las e, se necessário for, defendê-las, alinhando as particularidades da metodologia em questão aos objetivos definidos pelas propostas curriculares.

3 Métodos de Pesquisa

O conceito de progresso se faz nítido a partir do surgimento de novas técnicas, tecnologias ou descobertas, a busca pelo aprimoramento de um campo científico demanda ação, e o campo da educação não é diferente. Nesse contexto, o ambiente universitário se faz terreno fértil no desenvolvimento de pesquisadores, como endossado por Severino (2007, p. 261) ao afirmar que *"na Universidade, a aprendizagem, a docência, a ensinagem, só serão significativas se forem sustentadas por uma permanente atividade de construção do conhecimento. Tanto quanto o aluno, o professor precisa da pesquisa para bem conduzir um ensino eficaz."*

Reconhecendo o papel formativo da pesquisa na perspectiva discente, e, como professores em exercício, seu papel no desenvolvimento da educação, nos debruçamos sobre sua conceituação, apresentada por Lakatos e Marconi (2003, p. 155), postulando que *"A pesquisa, portanto, é um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo, que requer um tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais."*

Portanto, a pesquisa se constrói inicialmente através do estabelecimento de objetivos, seguido pela definição procedimentos a serem seguidos para alcançá-los, para tanto, a percepção da natureza da pesquisa que se objetiva construir se torna condição fundamental. Neste sentido, começamos a colocar os objetivos particulares desta pesquisa em perspectiva.

A escolha da temática surge da observação de problemáticas, neste sentido, a experiência docente proporciona espaço satisfatório de familiarização com o âmbito de educação, a busca por melhorias é consequência espontânea deste convívio. Mais especificamente, no espaço da aula de Matemática, fica definido como objetivo a busca por incorporar dois eixos visados pelo currículo, a resolução de problemas e a argumentação. O ímpeto pela busca em contemplar tais eixos se dá pela necessidade inata pelo desenvolvimento destas competências no ambiente educacional, não somente no contexto da Matemática, e a forma com a qual estas competências se colocam como engrenagens no processo de aprendizagem estudantil, tornando o seu estímulo um potencializador dos processos sociais e cognitivos que se dão no âmbito escolar.

Sob essa definição, há que se observar que a presente produção se trata de pesquisa de natureza *qualitativa* pois, como afirma Severino (2007, p. 119), *"faz referência mais a seus fundamentos epistemológicos do que propriamente a especificidades metodológicas"*. Assim, definidos os eixos temáticos que norteiam a pesquisa, surge o objetivo de integrá-los ao ambiente de sala de aula de maneira significativa.

Em primeiro momento, se faz imperativa a busca por referencial teórico satisfatório para que os conceitos temáticos abordados na pesquisa se façam claros, e que seus objetivos ganhem propriedade e comecem a tomar forma por meio de ações. A etapa onde é feita a revisão literária, na busca por autores que discursam acerca dos eixos de pesquisa contemplados agrega à pesquisa caráter bibliográfico, Severino a descreve:

> A *pesquisa bibliográfica* é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. (SEVERINO, 2007, p. 122, grifo do autor)

A partir da exploração bibliográfica, e sem sua interrupção, surgem noções imediatas que auxiliam no tratamento dos objetivos, até então vagos, que começam a tomar forma. A compatibilidade entre os objetivos e as visões dos autores estudados culmina na delimitação do objetivo fundamental e de seu problema de ação resultante:

Integrar a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o estímulo às competências de argumentação ao planejamento de curso do 1º ano do Ensino Médio.

Neste sentido, a partir da familiarização com a metodologia em questão consequente da exploração bibliográfica, e de sua compatibilidade com o tratamento das habilidades de argumentação, surge o alinhamento de suas especificidades à caracterização de sequência didáticas apresentada por Zabala:

> A maneira de configurar as sequências de atividades é um dos traços mais claros que determinam as características diferenciais da prática educativa. [...] Se realizarmos uma análise destas sequências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um *conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.* (ZABALA, 1988, p. 18, grifo do autor)

A ação consequente se torna a confecção de sequencias didáticas que venham a tecer, em meio ao encadeamento curricular da Matemática, momentos que contemplem de forma enfática as competências visadas, sem que se faça necessária a interrupção da abordagem dos conhecimentos e procedimentos requeridos.

Em suma, compreendida a demanda bibliográfica da pesquisa na garantia de qualidade da produção visada, segue-se a definição apresentado por Lakatos e Marconi a partir das declarações de Manzo e Trujillo:

> Para Manzo (1971:32), a bibliografia pertinente “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas

> áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente" e tem por objetivo permitir ao cientista "o reforço paralelo na análise de usas pesquisas ou manipulação de suas informações" (Trujillo, 1974:230). Dessa forma, a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras. (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 183)

Portanto, a produção das sequências didáticas fica definida a partir da mesclagem das visões de Cabral (2017) e Onuchic et al. (2014) nos aspectos práticos de sua confecção e Zabala (1988) em sua avaliação teórica. A RP é integrada à confecção a partir das produções de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011) e Onuchic et al. (2014). Por fim, o alinhamento da metodologia dentro do objetivo de abordagem enfática das habilidades de argumentação é feita a partir da busca pela leitura das técnicas de avaliação de argumentos definidas por Toulmin (2003), contemplado de forma analítica e orientadora dentro dos momentos de comunicação oral decorrentes da utilização da RP. Assim, não limitando, mas centrando a pesquisa bibliográfica na visão destes autores, a partir de seu estudo se dá o percurso direcionado ao alcance dos objetivos de ação definidos, visando apresentar a culminância deste processo através da produção de sequências didáticas, assim como se definiu a princípio.

4 Sequências Didáticas

4.1 Funções Polinomiais de 1º grau

Objetivos: Construir modelos empregando funções polinomiais de 1º grau, associando-as a tabelas e descrições contextualizadas e alcançando sua formalização através dos símbolos matemáticos adequados.
Conhecimentos de Base: Operações de multiplicação e adição em contexto de trabalho com variáveis.
Material: Atividade Impressa.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos[1]. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.
Problemas Propostos

Situação Problema – Parte 1
Com o objetivo de juntar dinheiro, um jovem, Robson, entra no seguinte acordo com sua mãe, que decide ajudá-lo como forma de incentivo; venderá os doces feitos por ela em sua escola e terá direito a ficar com todo o dinheiro resultante das vendas.

Questão 1: O acordo firmado estabelecia que Robson venderia os doces por R$ $1,50$ a unidade. Com essa informação em mãos, preencha a tabela associando as quantidades de doces vendidos ao valor recebido:

Quantidade de Doces Vendidos	Valor Recebido
0	
1	
2	
3	
4	
5	
10	
20	

[1] A quantidade é sugerida, apenas deve-se ter em mente que grupos muito grandes são permissivos ao escape de alguns alunos do processo de resolução e grupos muitos pequenos enfraquecem o trabalho cooperativo.

Questão 2: Descreva o processo operatório para encontrar o valor recebido por Robson a partir da quantidade de doces vendidos e do valor recebido por unidade.

Questão 3: Descreva o mesmo processo matematicamente, utilizando a variável "x" para representar a quantidade de doces vendidos, e "y" para representar o valor recebido:

Situação Problema – Parte 2

Percebendo que está usando seu próprio dinheiro para comprar os ingredientes de preparação, a mãe de Robson resolve modificar um pouco a proposta; a partir de então, Robson deve ajudar a custear os ingredientes com R\$ $15,00$ e sua mãe continuará a produção, independentemente da quantidade de doces que precise fazer.

Questão 4: Levando em conta o dinheiro inicial desembolsado por Robson, quantos doces Robson deve vender, no mínimo, para não ter prejuízo no final das contas?

Questão 5: De que forma a nova proposta da mãe de Robson altera a expressão matemática encontrada na questão 3?

Questão 6: Se em sua empreitada, Robson decide juntar exatamente R\$ $900,00$ para comprar um smartphone, quantos doces deve vender?

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

A partir do produto entre a quantidade de doces vendidos e o valor recebido por unidade vendida:

Quantidade de Doces Vendidos	Valor Recebido
0	R\$ $0,00$
1	R\$ $1,50$
2	R\$ $3,00$
3	R\$ $4,50$
4	R\$ $6,00$
5	R\$ $7,50$
10	R\$ $15,00$
20	R\$ $30,00$

Questão 2
Deve-se multiplicar a quantidade de doces vendidos e o valor recebido por unidade.

Questão 3
Seguindo o raciocínio lógico empregado na questão anterior:

$$y = 1,5x \quad ou \quad y = 1,50x$$

Questão 4
A partir da divisão do valor visado pelo valor unitário:

$$\frac{15}{1,50} = 10$$

Logo, precisaria vender 10 doces.

Questão 5
Os R\$ 15,00 devem ser subtraídos do valor encontrado.

$$y = 1,5x - 15$$

Questão 6
Associando o valor recebido à variável y definida na questão 5:

$$900 = 1,5x - 15 \Longrightarrow 915 = 1,5x \Longrightarrow x = 610$$

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m) [2]

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*

Resolução do Problema – *15 minutos*

Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: A partir da observação das resoluções construídas, o professor deve apresentar a estrutura algébrica da função polinomial de 1º grau assim como explicitar as diferenças funcionais entre os coeficientes da função. Das resoluções das questões 1, 4 e 6, surge o potencial para a diferenciação contextualizada entre as variáveis x e y da função e como o cálculo é afetado nessas circunstâncias.

[2] O dinamismo e a compatibilidade da duração para cada sequência didática apresentada deve ser observado pelo professor para que a proposta seja adequada ao ambiente onde se objetiva aplicá-la.

Extensões: Pode-se discutir acerca da definição de função constante ao observar os ganhos da perspectiva da mãe de Robson.

4.2 Módulo - Valor Absoluto

Objetivos: Definir o conceito de módulo de um número, modelar situações simples envolvendo a utilização de equações modulares.
Conhecimentos de Base: Expressões condicionais, equações de 1º grau, unidades de medida (kg-g).
Material: Atividade Impressa.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.
Problemas Propostos

Situação Problema
Em uma indústria de embalagem, há uma máquina responsável por preencher sacos com uma determinada quantidade de quilogramas (kg) de sal. Após o preenchimento, para a verificação, o sal embalado passa por uma balança de precisão, que verifica o trabalho feito pela máquina. Se a balança detectar mais de 50 gramas (g) de diferença fora do peso definido, o produto não passa pelo controle de qualidade e retorna para ser reembalado.

Questão 1: Sabendo que a máquina de embalagem deve preencher os sacos com 1 kg de sal, determine os pesos máximo e mínimo que a balança aceitaria.

Questão 2: Qual foi o processo operatório seguido para encontrar os dois resultados da questão anterior?

Questão 3: Qual o resultado encontrado ao subtrair 1 kg de ambos os resultados da questão 1? Justifique os sinais dos resultados encontrados a partir de sua aplicação prática.

Questão 4: Descreva a relação encontrada na questão 3 a partir das condições práticas observadas, utilizando linguagem algébrica, de modo a encontrar a **diferença** detectada pela balança (0,05; omitindo o sinal). Utilize x para o peso detectado pela balança.

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

Deve-se subtrair e somar as quantidades convertidas para a mesma unidade de medida:

$$1 + 0,05 = 1,05 \quad ou \quad 1 - 0,05 = 0,95$$

Assim, o valor máximo aceito é $1,05$ kg e o valor mínimo $0,95$ kg.

Questão 2

Para descobrir o peso máximo, somou-se o peso definido como objetivo pela máquina à margem de erro definida pela balança. Para o peso mínimo, subtraiu-se a margem de erro definida pela balança do peso objetivado pela máquina.

Questão 3

Executando a subtração:

$$1,05 - 1 = 0,05$$

$$0,95 - 1 = -0,05$$

No caso do peso maior do que o peso visado, a subtração resulta em valor positivo. No caso do peso menor que o peso visado, a subtração resulta em valor negativo.

Questão 4

Empregando linguagem matemática apropriada, e buscando omitir o sinal no caso em que o resultado é negativo, descrevemos:

$$\text{Se } x > 1, \quad x - 1 = 0,05$$
$$\text{Se } x < 1, \quad -(x - 1) = 0,05$$

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*

Resolução do Problema – *15 minutos*

Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: O professor deve apresentar a definição e representação para o valor absoluto, modelar as relações encontradas pelos alunos, neste momento, utilizando a simbologia formal, e incorporando as condições estabelecidas através da linguagem matemática. É importante destacar a relação lógica observada entre as condições estabelecidas por meio de linguagem vernácula e progredir gradualmente em direção ao uso exclusivo da linguagem matemática.
Extensões: É possível utilizar o problema como gatilho para o tratamento de inequações modulares, ao levar em conta não somente os valores máximo e mínimo aceitos, mas todos os valores dentro deste intervalo.

4.3 Introdução à Matemática Financeira

Objetivos: Construir modelos de cálculos para situações financeiras empregando noções de Juros Simples e Juros Compostos e alcançando sua generalização através das fórmulas.
Conhecimentos de Base: Porcentagem, equações de 1º grau e equações exponenciais.
Material: Atividade Impressa, calculadora.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.
Problemas Propostos

Situação Problema – Parte 1
Alice consegue economizar R$ $1000,00$ ao final de um ano e, apesar de não entender ao certo como funciona o rendimento em um caderneta de poupança, decide depositar seu dinheiro. A única informação que Alice se importa em descobrir é a taxa percentual de rendimento do dinheiro que deixará depositado.

Questão 1: Sabendo que a taxa de rendimento de sua aplicação é de 10% ao mês, determine qual será o rendimento do dinheiro de Alice ao final do primeiro mês.

Questão 2: Alice supõe que este mesmo valor seja o rendimento mensal durante todo o tempo em que deixar os R$ $1000,00$ na poupança. Seguindo o raciocínio de Alice, determine quanto dinheiro terá acumulado ao final de 6 meses.

Questão 3: Encontre uma expressão matemática para representar o total de dinheiro possuído por Alice a partir dos R$ $1000,00$ aplicados, em função da quantidade de meses (t) que este dinheiro passar na poupança.

Questão 4: De forma generalizada, encontre uma expressão para representar o cálculo do investimento como imaginado por Alice. Siga o raciocínio empregado nas questões anteriores, e utilize como representantes: C para o dinheiro inicialmente aplicado; M para o dinheiro total resultante do investimento; i para a taxa de rendimento da aplicação; t para a quantidade de vezes que o dinheiro aplicado passará pelo rendimento.

Situação Problema – Parte 2

Ao final do primeiro mês, Alice observa que a caderneta apresenta a quantidade de dinheiro que ela havia inicialmente calculado, porém, no segundo mês, Alice visualiza seu extrato e observa que tem R$ $1210,00$ em sua conta poupança. Segundo o seu raciocínio inicial, como não movimentou o dinheiro nesse período, deveria ter R$ $1200,00$. Sabendo que o dinheiro na conta de Alice não sofreu alterações externas, concluímos que o rendimento da poupança não funciona exatamente como Alice havia imaginado.

Questão 5: Descreva o funcionamento do rendimento da caderneta de poupança de Alice, observando o valor encontrado ao final do segundo mês.

Questão 6: Qual será, portanto, a quantidade de dinheiro na conta de Alice ao final de 6 meses?

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

A partir do cálculo de porcentagens:

$$1000 \cdot 0,1 = 100$$

O rendimento ao final do primeiro mês será de R$ $100,00$.

Questão 2

Se o rendimento for de R$ $100,00$ ao final de cada mês, com o passar de 6 meses teremos:

$$10 \cdot 6 = 600$$

Somados aos R$ $1000,00$ inicialmente aplicados, Alice teria R$ $1600,00$.

Questão 3

Seguindo o raciocínio empregado na questão 2:

$$M = 1000 + 100t$$

Questão 4

Generalizando o raciocínio anterior:

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

Questão 5

O rendimento do segundo mês foi calculado sobre o valor em conta ao final do primeiro mês, e não sobre o valor inicialmente investido.

Questão 6

Observando a correção a ser feita nos cálculos a partir da resposta da questão 5, temos:

$$\begin{aligned}
&1210 \cdot 0,1 = 121\\
&1331 \cdot 0,1 = 133,1\\
&1464,1 \cdot 0,1 = 146,41\\
&1610,51 \cdot 0,1 = 161,051
\end{aligned}$$

Assim, ao final do sexto mês, Alice terá em conta R\$ $1771,561$.

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 2 Aulas (1:40h)

1ª AULA – Situação Problema – Parte 1

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*
Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*
Resolução do Problema – *15 minutos*
Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*
Formalização – *15 minutos*

2ª AULA – Situação Problema – Parte 2

Procedimentos Preparatórios[3] – *2 minutos*
Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*
Resolução do Problema – *13 minutos*
Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *5 minutos*
Formalização – *25 minutos*

[3] Para otimização da estrutura de aula, recomenda-se que a sala seja organizada da mesma forma em que se dispunha na aula anterior

Formalização: O professor deve apresentar a terminologia correta, até então discutida de forma semântica. Nesse momento, definições de termos como montante, capital, juros, taxas, devem ser formalmente apresentadas e associadas às representações utilizadas no estudo de Matemática Financeira. Deve-se consolidar a generalização encontrada para o cálculo do montante a regime de juros simples e extrair deste o cálculo dos juros. O professor deve também fazer uso da oportunidade proporcionada pela segunda parte do problema e destacar a diferença entre as aplicações práticas de juros simples e composto.

Extensões: É possível alcançar, em conjunto com a turma, as formulações para situações a juros compostos a partir da distinção construída.

4.4 Logaritmo

Objetivos: Introduzir a definição de logaritmos na sua relação com a potenciação.
Conhecimentos de Base: Potenciação.
Material: Atividade Impressa.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.
Problemas Propostos

Situação Problema
Da observação em laboratório de uma cultura de bactérias, percebe-se que, a partir do processo de divisão celular, a sua população duplica a cada 1 minuto decorrido. Em um determinado momento, uma bactéria desta cultura é isolada do restante e a observação se direciona ao comportamento desta nova população.

Questão 1: Seguindo o mesmo padrão de duplicação descrito inicialmente, quantas bactérias haverá nesta nova população após passado 1 minuto? E após 3 minutos?

Questão 2: Descreva o processo operatório utilizado para encontrar a resposta da primeira questão.

Questão 3: Em um certo momento, se observa uma população de 32 bactérias. É possível concluir que a população passou por quantos processos de duplicação? Quantos minutos se passaram?

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1
Utilizando noções de multiplicação e potenciação:

$$1\ minuto:\ 1 \cdot 2 = 2$$

$$3\ minutos:\ 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\ \ ou\ \ 2^3 = 8$$

Assim, passado 1 minuto há 2 bactérias, passados 3 minutos a população é de 8 bactérias.

Questão 2

Como as bactérias se duplicam com o passar de cada minuto, houve a multiplicação pelo fator 2 uma quantidade de vezes equivalente à quantidade de minutos passados. Assim, para o primeiro minuto, a população inicial foi multiplicada por 2, e para o 3 minuto a população inicial foi multiplicada por $2^3 = 8$.

Questão 3

Deve-se inferir a quantidade de vezes que se duplicou a população inicial (1 bactéria), ou seja, quantas vezes foi multiplicada por 2:

$$32 = 1 \cdot 2^5$$

Logo, a população passou pelo processo de duplicação 5 vezes, e se passaram, portanto, 5 minutos.

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*

Resolução do Problema – *15 minutos*

Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: O professor deve apresentar a definição e a simbologia referente ao cálculo do logaritmo, discutir as especificidades de seu cálculo e as relação entre o logaritmo e o cálculo exponencial.

Extensões: É recomendado que se explore a utilização do logaritmo na resolução de equações exponenciais.

4.5 Padrões e Sequências

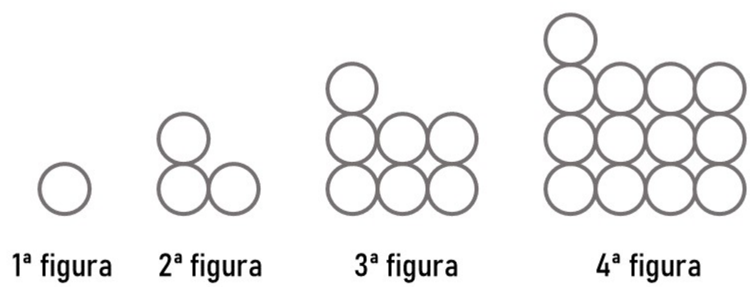
Objetivos: Investigar sequências, identificar padrões, comunicar observações através da língua materna e de cálculos matemáticos. Conjecturar e testar fórmulas de generalização para termos gerais de sequências.

Conhecimentos de Base: Operações básicas e, a depender da estratégia adotada, cálculos de áreas de retângulos e quadrados.

Material: Atividade Impressa.

Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.

Problemas Propostos



Questão 1: Descreva a quantidade de círculos contida em cada uma das figuras.

Questão 2: Desenhe, seguindo o mesmo padrão exposto, a 5ª figura. Quantos círculos há nela?

Questão 3: Qual sequência geométrica pode ser observada?

Questão 4: Interprete a quantidade de círculos em cada figura através da sequência geométrica observada na questão 3.

Questão 5: Encontre uma fórmula em "n" que descreva a quantidade de círculos na figura da sequência ocupando a nª posição.

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

A partir da contagem de círculos em cada figura:

1ª Figura: 1 círculo;

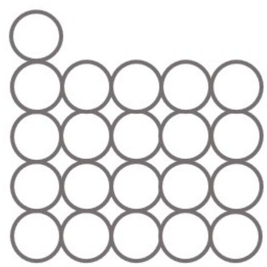
2ª Figura: 3 círculos;

3ª Figura: 7 círculos;

4ª Figura: 13 círculos.

Questão 2

Observando o padrão visual, pode-se inferir que a 5ª figura será:



5ª figura

Dessa forma, a partir da contagem, há 21 círculos na 5ª figura.

Questão 3

Os círculos formam um retângulo cujas dimensões aumentam em uma unidade a cada lado quando progredimos na sequência, com um círculo, fora do retângulo formado, no topo.

Questão 4

Havendo observado o padrão geométrico descrito na questão 3, resta aplicar as noções de cálculo de área do retângulo e somar o círculo avulso fixado ao topo de cada figura:

1ª Figura: $0 \cdot 1 + 1 = 1$ círculo;

2ª Figura: $1 \cdot 2 + 1 = 3$ círculos;

3ª Figura: $2 \cdot 3 + 1 = 7$ círculos;

4ª Figura: $3 \cdot 4 + 1 = 13$ círculos.

5ª Figura: $4 \cdot 5 + 1 = 21$ círculos.

Questão 5
A partir da expansão do padrão descrito na questão 4, buscando associar o valor de "n" e os valores empregados nos cálculos, chegamos a:

$$(n-1)n+1 \quad ou \quad n^2-n+1$$

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*
Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*
Resolução do Problema – *15 minutos*
Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *5 minutos*
Formalização – *20 minutos*

Formalização: Devem ser formalizados os padrões de representação de termos em uma sequência numérica. O professor pode explanar acerca da definição de uma sequência por recorrência e, a partir da generalização encontrada, explicitar a associação da lei de formação descoberta ao final e da abordagem de funções.

4.6 Progressões Aritméticas

Objetivos: Interpretar características específicas em sequências. Deduzir a fórmula do termo geral da sequência descrita e seguir para a dedução da fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética.

Conhecimentos de Base: Termos para a representação de sequências e domínio das quatro operações básicas.

Material: Atividade Impressa.

Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.

Problemas Propostos

Situação Problema

Um ciclista aposentado decide retornar à prática esportiva gradativamente. No primeiro dia de treino após o retorno, pedala 5 km, no segundo dia pedala 8 km, no terceiro dia pedala 11 km, no quarto dia 14 km e assim por diante. Sabendo que o ciclista pretende manter a mesma lógica sequencial na expansão de seus treinos, responda às questões a seguir.

Questão 1: Escreva a sequência numérica estabelecida pelas distâncias percorridas nos treinos do ciclista diariamente.

Questão 2: O que está a acontecer, matematicamente, com as distâncias percorridas a cada dia?

Questão 3: Quantos quilômetros serão percorridos no quinto dia? E no décimo dia?

Questão 4: A partir da lógica observada na questão 2, e dos cálculos efetuados na questão 3, estabeleça uma lei de formação do termo geral desta sequência.

Questão 5: Buscando a generalização, descreva a lei de formação de uma sequência qualquer (a_n) onde o primeiro termo é a_1, e a sua progressão sequencial se dá a partir da soma consecutiva de um valor r.

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

Descrevendo a sequência, utilizando a linguagem e simbologia apropriada, teremos:

$$(a_n) = (5, 8, 11, 14, ...)$$

Questão 2

A distância percorrida pelo ciclista sofre um aumento de 3 km a cada dia de treino, iniciando em 5 km.

Questão 3

Aplicando a noção matemática observada, encontramos o termo a_5 a partir da soma de a_4 e 3:

$$a_5 = a_4 + 3 = 14 + 3 = 17$$

Expandindo neste mesmo raciocínio, encontramos a_{10} ao somarmos a_5 a 5 parcelas de 3, quantidade necessária de vezes para alcançarmos o décimo termo:

$$a_{10} = a_5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = a_5 + 3 \cdot 5 = 17 + 15 = 32$$

Desta forma, observa-se que a distância percorrida no quinto dia é de 17 km e no décimo dia, 32 km.

Questão 4

Ao observar a soma de uma quantidade específica de parcelas e associando-a às noções de multiplicação, alcançamos a generalização:

$$a_n = 5 + 3(n - 1) \Longrightarrow a_n = 3n + 2$$

Questão 5

Expandindo naquilo observado na resolução da quarta questão, e empregando os símbolos a_1 e r em substituição dos valores específicos a esta situação problema, encontramos a lei de formação:

$$a_n = a_1 + r(n - 1)$$

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*

Resolução do Problema – *15 minutos*

Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: Deve-se consolidar as generalizações encontradas pelos estudantes durante a resolução dos problemas e reforçar as representações específicas às progressões aritméticas dentro do trabalho com sequências.

Extensões: Pode-se dar início à formulação da soma dos termos de uma P.A. ao propor aos alunos calcular a distância total percorrida pelo ciclista num determinado intervalo de dias.

4.7 Progressões Geométricas

Objetivos: Interpretar características específicas em sequências. Deduzir a fórmula do termo geral da sequência descrita e seguir para a dedução da fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica.
Conhecimentos de Base: Termos de representação de sequências e potenciação.
Material: Atividade Impressa.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega da atividade impressa em quantidade suficiente para que todos alunos consigam participar de sua resolução.
Problemas Propostos

Situação Problema
Em um estudo, buscando investigar o alcance da informação divulgada nas redes sociais, um grupo de alunos percebeu que, cada pessoa compartilha informações que consideram relevantes para, em média, mais 3 pessoas. Cada uma destas 3 pessoas compartilha com mais 3 e assim a informação se difunde.

Questão 1: Separando os grupos de pessoas alcançadas pela informação durante cada etapa de compartilhamento, temos no grupo inicial 1 pessoa, no segundo grupo 3 pessoas, no terceiro grupo 9 pessoas, e assim por diante. Ignorando a possibilidade de a mesma pessoa receber a informação de 2 fontes ao mesmo tempo, escreva a sequência estabelecida por estes grupos explicitando seus 5 primeiros termos.

Questão 2: Descreva matematicamente o cálculo executado para encontrar a quantidade de pessoas em cada grupo descrito na questão anterior.

Questão 3: Descreva os valores encontrados anteriormente, desta vez, com o cálculo executado a partir do primeiro termo.

Questão 4: A partir da lógica observada na questão 3 estabeleça uma lei de formação do termo geral desta sequência.

Questão 5: Buscando a generalização, descreva a lei de formação de uma sequência qualquer (a_n) onde o primeiro termo é a_1, e a sua progressão sequencial se dá a partir da multiplicação consecutiva de um valor q.

Possíveis Estratégias de Resolução

Questão 1

Descrevendo a sequência, utilizando a linguagem e simbologia apropriada, teremos:

$$(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, ...)$$

Questão 2

A partir da observação de que o número de pessoas alcançadas pela informação triplica a cada termo da sequência, descrevemos o cálculo:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = a_1 \cdot 3 = 3\\
&a_3 = a_2 \cdot 3 = 9\\
&a_4 = a_3 \cdot 3 = 27\\
&a_5 = a_4 \cdot 3 = 81
\end{aligned}$$

Questão 3

Buscando o emprego exclusivo do termo a_1, deve-se escrever os outros termos em função deste, substituindo-os nos cálculos observados na questão 2:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = a_1 \cdot 3 = 3\\
&a_3 = a_1 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2 = 9\\
&a_4 = a_1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^3 = 27\\
&a_5 = a_1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^4 = 81
\end{aligned}$$

Questão 4

Ao observar a multiplicação de uma quantidade específica de fatores e associando-a às noções de potenciação, alcançamos a generalização:

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1}$$

Questão 5

Expandindo naquilo observado na resolução da quarta questão, e empregando os símbolos a_1 e q em substituição dos valores específicos a esta situação problema, encontramos a lei de formação:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Leitura Individual e em Conjunto – *5 minutos*

Resolução do Problema – *15 minutos*

Registro das Resoluções no Quadro, Plenária e Busca do Consenso – *10 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: Deve-se consolidar as generalizações encontradas pelos estudantes durante a resolução dos problemas e reforçar as representações específicas às progressões geométricas dentro do trabalho com sequências.

Extensões: Pode-se dar início à formulação da soma dos termos de uma P.G. finita ao propor aos alunos calcular o total de pessoas alcançadas pela informação em um determinado momento.

4.8 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Objetivos: Calcular ângulos internos de triângulos retângulos a partir das razões trigonométricas com o uso de réguas.
Conhecimentos de Base: Utilização de réguas, razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente).
Material: Folha de ofício, calculadora, tesoura, régua, cola, lápis de cores.
Procedimentos Preparatórios: Organização da sala em grupos de 4-5 alunos. Entrega de uma folha de ofício a cada aluno.
Instruções (do professor para a turma)

1º Passo: Recortar 4 triângulos retângulos a partir dos cantos da folha de ofício:
Etapa I: Demarcar a região triangular traçando uma linha reta de um dos lados da folha ao seu lado adjacente. (importante incentivar os alunos para que criem triângulos visualmente distintos, em tamanhos e angulações)

Etapa II: Pintar a região triangular demarcada para melhor visualização.

Etapa III: Demarcar os ângulos internos do triângulo utilizando símbolos adequados (letras gregas).

Etapa IV: Recortar os triângulos demarcados e colá-los no caderno, deixando espaço para anotações em seu entorno.

2º Passo: Medir os triângulos produzidos:
Etapa I: Utilizar a régua para a medição de cada um dos lados dos quatro triângulos. (incentivar a precisão milimétrica na medição para que os cálculos futuros não sofram alterações significativas)

Etapa II: Sinalizar nos entornos dos triângulos as medidas de seus lados.

3º Passo: Calcular as medidas aproximadas dos ângulos internos dos triângulos confeccionados a partir da medida de seus lados e da utilização das razões trigonométricas (é ideal que os alunos tenham uma tabela contendo aproximações das razões trigonométricas para unidades de ângulo de 1º a 90º ou que saibam utilizar tal função na calculadora).

Estrutura de Aula no Padrão da RP: Duração de 1 Aula (50m)

Procedimentos Preparatórios – *5 minutos*

Confecção dos Triângulos – *10 minutos*

Medição dos Triângulos – *5 minutos*

Resolução do Problema Proposto – *15 minutos*

Formalização – *15 minutos*

Formalização: Deve ser formalizado o processo de inferência de ângulos a partir das razões trigonométricas, discutindo as noções de arco seno, arco cosseno e arco tangente.

Extensões: Devido à natureza geométrica do cálculo trigonométrico, pode-se trabalhar com o uso da calculadora para cálculos de razões trigonométricas e de ângulos.

5 Considerações Finais

As sequências didáticas expostas no capítulo anterior se propõem a criar momentos onde o ambiente de resolução de problemas descrito nos capítulos iniciais se faz presente. Nos resta, portanto, analisar a confecção das mesmas, destacando aspectos que não puderam ser contemplados em sua construção prática, e cuja discussão é interessante no contexto em que esta produção se posiciona.

A exposição das sequências didáticas busca seguir uma ordem cronológica que faça sentido ao ser definida como parte da ementa no trabalho com o 1º ano do Ensino Médio, dessa forma, é natural que se dê início com a abordagem de funções polinomiais do 1º grau. A confecção da sequência didática exposta na seção 5.1, reconhecendo-se como possível porta de entrada do Ensino Médio, visa introduzir de forma simples as noções algébricas em torno da associação entre variáveis. Dessa forma, enquanto busca apresentar aos alunos o processo de associação algébrica entre dois valores variáveis, também visa coordenar este desenvolvimento à construção de noções básicas no tratamento de funções. É importante destacar que, como citado anteriormente, pela possibilidade de ser abordada no início do ano letivo, esta sequência didática proporciona um potencial significativo para a introdução de noções de atitudes voltadas para a cooperação, o trabalho com as habilidades de comunicação surge de forma intrínseca ao processo de familiarização dos alunos da turma.

A sequência didática apresentada na seção 5.2 apresenta a abordagem das noções de valor absoluto. Os problemas, de um ponto de vista prático, têm soluções relativamente simples, pesando, portanto, no direcionamento da visão discente à especificidade simbólica requerida pela utilização do módulo como estrutura matemática e em sua associação com a construção de expressões condicionais. Os debates nesse contexto, especialmente no momento de plenária, devem ser direcionados ao tratamento da linguagem matemática e das formas de representação, através de equações, inequações, oralmente, etc.

No sentido de dar significado à abordagem escolar, e seguindo orientações da BNCC (2019), que explicita a demanda pela abordagem da Matemática financeira nos moldes das funções polinomiais de 1º grau e exponenciais, a sequência apresentada na seção 5.3 se propõe a introduzir noções básicas de cálculos envolvendo juros simples e compostos. Além disso, o problema descrito busca, através da ingenuidade do personagem descrito, que acredita que a caderneta de poupança funciona sob regime de juros simples, proporcionar uma oportunidade para que possíveis concepções errôneas sejam desmitificadas, dando significado real ao problema abordado, provocando discussão entre os alunos durante os momentos de resolução acerca da visão da personagem inserida na situação hipotética descrita, e da validade de seu raciocínio.

Na seção 5.4, é apresentada uma sequência didática que propõe a definição de logaritmo através das noções de multiplicações sucessivas ou potenciação. Compreendendo a complexidade da definição de logaritmo da perspectiva discente (tanto nos aspectos simbólicos quanto nas aplicações algorítmicas), a sequência didática visa abordar a consolidação das noções de logaritmo a partir de sua construção. As discussões em plenária devem ser direcionadas à representação de multiplicações sucessivas através da potenciação, já que, neste estágio do Ensino Médio, ainda é comum que os alunos se prendam à utilização das quatro operações básicas. Ao se estabelecer relação entre situações envolvendo cálculos de juros compostos, a sugestão de extensão da sequência didática na utilização do logaritmo para o cálculo de soluções de equações exponenciais se faz especialmente útil.

Quando se faz referência ao tratamento de padrões e sequências, deve-se reconhecer a amplitude de possibilidades em sua abordagem. Problemas envolvendo padrões e sequências podem ser variar significativamente em complexidade. Na seção 5.5, a opção por um problema visualmente simples, que requer um tratamento algébrico mais intrincado, parte daquilo que foi apresentado em capítulos anteriores, ao discutir argumentação no contexto da Matemática. A busca por estimular nos alunos a procura pela adequação da linguagem vernácula em momentos de comunicação se torna central, antes dos momentos onde se busca a interpretação algébrica de seus raciocínios. Desta forma, o momento de generalização poderá contar com uma compreensão mais embasada dos processos que se busca formalizar. Em especial, esta sequência didática proporciona espaço para que a apresentação da linguagem matemática específica ao tratamento de sequências seja abordada durante a formalização.

As sequências didáticas propostas nas seções 5.6 e 5.7 são estruturadas de forma análoga. O trabalho com progressões aritméticas e geométricas, com base nas noções representativas de sequências, de uma forma geral, demandam a compreensão à qual os problemas buscam construir nos estudantes de maneira gradual. A abordagem proposta para progressões aritméticas se debruça sobre os aspectos contextuais do problema, enquanto a abordagem das progressões geométricas, aproveitando-se da construção feita no tratamento da primeira, se fundamenta com mais força em seus aspectos algébricos. O objetivo central das sequências didáticas se torna a construção das fórmulas, comumente apresentadas em conjunto com a definição de P.A. e P.G., como culminância do processo de resolução. No caso específico da P.A., o potencial de formular, em conjunto com os estudantes, o cálculo da soma dos n termos de uma P.A. se faz mais evidente, tendo em vista a natureza lógica em sua formalização. Em relação ao cálculo da soma dos termos de P.G finita, a possibilidade ainda existe, porém, a demanda de compreensão da manipulação algébrica toma lugar da natureza lógica observada no cálculo da soma dos termos de uma P.A.

A última sequência didática apresentada, na seção 5.8, toma um modelo diferente do comum por se tratar de um problema construído a partir da manipulação de materiais. O professor acompanha os alunos através das instruções descritas de modo que, ao final da confecção, o problema seja gerado de forma particular ao trabalho efetuado pelo aluno. A estrutura da sequência didática culmina na abordagem da trigonometria em perspectiva inversa ao cálculo das razões trigonométricas apresentado anteriormente, este fator é mencionado pois, como descrito por Onuchic et al. (2014), na abordagem através da RP, é necessário que o procedimento matemático a ser utilizado na resolução do problema ainda não tenha sido apresentado aos alunos. Assim, embasado nas noções de seno, cosseno e tangente previamente apresentadas, o aluno deve, seguindo trajetória oposta, alcançar suas construções inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente. Neste contexto, é recomendado que, somente após o final do processo de formalização, como extensão da proposta, sejam apresentadas instruções práticas para o cálculo de razões trigonométricas e de suas funções inversas utilizando a calculadora.

É importante destacar que as sequências didáticas apresentadas como produto da pesquisa não se configuram como estruturas autossuficientes de aplicação, o conhecimento do professor acerca da metodologia em questão e das especificidades do tratamento da argumentação apresentados na fundamentação teórica dessa pesquisa são essenciais na significação do processo em vista dos objetivos aqui definidos.

Por fim, a expectativa é que as sequências didáticas apresentadas se posicionem não só como estímulo à abordagem da metodologia sob discussão, ou ao direcionamento da atenção ao tratamento das habilidades de argumentação, mas que se proponham a colocar sob vistas do professor, a importância de se apropriar dos processos de idealização do planejamento, desde a confecção de problemas com objetivos específicos à incorporação destes aos métodos didáticos empregados.

Referências

BOAVIDA, A. M. R. *A argumentação em matemática*: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 975 f. Dissertação (Doutorado em Educação) — Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005.

BOSCH, M.; WINSLØW, C. Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, v. 35, n. 3, p. 357–399, 2015. Disponível em: ⟨https://revue-rdm.com/2015/linking-problem-solving-and/⟩. Acesso em: 4 fev. 2020.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*: bases legais. Brasília: MEC/Semtec, 2000. 109 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

______. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2000. 58 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

______. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. 144 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

______. *Base nacional comum curricular*. Brasília: MEC, 2019. 595 p. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

CABRAL, N. F. *Sequências didáticas*: estrutura e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017. 104 p.

CAI, J.; LESTER, F. K. *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Reston: NCTM, 2010. Disponível em: ⟨https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf⟩. Acesso em: 4 fev. 2020.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTERY, D. Mathematics teaching and classroom practice. In: FRANK LESTER JR. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 225–256.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Press kit*: saeb 2017. 2018. Disponível em: ⟨http://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2018/documentos/presskit_saeb2017.pdf⟩. Acesso em: 16 jan. 2020.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. *Fundamentos de metodologia científica*. São Paulo: Atlas, 2003. 311 p.

MICHAELIS. Michaelis dicionário brasileiro da língua portuguesa. Editora Melhoramentos Ltda, 2015. Disponível em: ⟨https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOUD, S. A. O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 487–512, 2013.

ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199–218.

ONUCHIC, L. d. l. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, UNESP, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73–98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. d. l. R. et al. (Orgs.). *Resolução de problemas*: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. 158 p.

PERELMAN, C. Lógica formal e lógica informal. Tradução de Rui Alexandre L. M. Grácio. *Caderno de Filosofias*, n. 5, p. 11–20, 1992.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. *The new rhetoric*: a treatise on argumentation. Tradução para o inglês de John Wilkinson e Purcell Weaver. Londres: University of Notre Dame Press, 1969. 566 p.

PINTO, P. R. M. Prefácio. In: ALVES, M. A. S. *Perelman e a argumentação filosófica*: convencimento e universalismo. Belo Horizonte: Editora D'Plácido, 2015. p. 15–18.

POLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning*: induction and analogy in mathematics. New Jersey: Princeton University Press, 1954. v. 1. 220 p.

______. *Mathematical discovery*: on understanding, learning, and teaching problem solving. New York: John Wiley & Sons, 1981. 220 p.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press. Inc., 1985. 409 p.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Cortez, 2007. 304 p.

TOULMIN, S. E. *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press, 2003. 247 p.

VIDAL, T. C. *O desenvolvimento do pensamento combinatório sob a perspectiva da resolução de problemas*: a análise de uma aplicação no curso de licenciatura em matemática. 71 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade do Estado da Bahia, Teixeira de Freitas, 2016.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1988. 224 p.