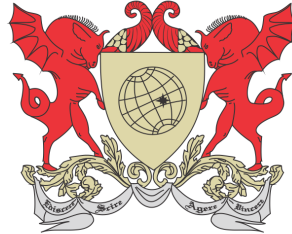


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



SIMONE APARECIDA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE INTERSEÇÕES  
DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS

FLORESTAL – MINAS GERAIS  
2019

SIMONE APARECIDA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE INTERSEÇÕES DE CURVAS  
ALGÉBRICAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Danielle Franco Nicolau Lara

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal**

T

S586e  
2019  
Silva, Simone Aparecida da, 1975-  
Um estudo sobre interseções de curvas algébricas planas /  
Simone Aparecida da Silva. – Florestal, MG, 2019.  
101f. : il. ; 29 cm.

Inclui anexos.

Orientador: Danielle Franco Nicolau Lara.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Inclui bibliografia.

1. Interseção de curvas planas. 2. Curva algébrica. 3. Teorema de Bézout. 4. Geometria algébrica. 5. Geometria analítica. I. Universidade Federal de Viçosa. Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

SIMONE APARECIDA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE INTERSEÇÕES DE CURVAS  
ALGÉBRICAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 01 de novembro de 2019.

Assentimento:

---

Simone Aparecida da Silva  
Autora

---

Danielle Franco Nicolau Lara  
Orientadora

# Dedicatória

---

Dedico esse trabalho a todos os meus alunos, que são a razão pela qual estou sempre em busca de conhecimento, procurando me aperfeiçoar e levar o melhor de mim para a sala de aula.

# Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus que me fez capaz de seguir sempre em busca dos meus objetivos.

Aos meus pais, José Luiz e Maria do Carmo, por tanto carinho e compreensão. Sem este alicerce sólido, eu nunca chegaria até aqui.

Aos meus irmãos, Márcia, Luiz Gustavo e Flávia, pelo carinho e compreensão.

Aos amigos da Escola Estadual Ângela Maria de Oliveira, que sempre me apoiaram e me incentivaram nessa jornada.

Ao meu futuro marido, Douglas, pela paciência e incentivo nesse período de aprendizado.

Aos amigos do PROFMAT, pelo companheirismo e perseverança.

À minha orientadora Dra. Danielle Franco Nicolau Lara, que sempre me incentivou e muito contribuiu para esta conquista.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente me proporcionaram a alegria desta vitória!!

# Resumo

---

SILVA, Simone Aparecida da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2019. **UM ESTUDO SOBRE INTERSEÇÕES DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS**. Orientadora: Danielle Franco Nicolau Lara.

O estudo sobre as interseções de Curvas Algébricas, nos leva ao Teorema de Bézout, que versa sobre o número de pontos de interseção entre duas curvas. Para melhor compreender este importante teorema, estudaremos sobre a Geometria Algébrica Clássica que envolve a Geometria Analítica e a Geometria Projetiva. Além do plano cartesiano e complexo, trataremos também do plano projetivo que contém os pontos finitos e os pontos no infinito. Definiremos curvas algébricas e curvas projetivas chegando assim ao objetivo do nosso trabalho que é a demonstração do Teorema de Bézout.

Palavras-chave: Interseção de curvas. Curva algébrica. Teorema de Bézout. Geometria algébrica. Geometria analítica.

# Abstract

---

SILVA, Simone Aparecida da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2019. **Algebraic Curves - The Bezout Theorem**. Adviser: Danielle Franco Nicolau Lara.

The study of the intersections of Algebraic Curves leads us to the Bézout Theorem, which deals with the number of intersection points between two curves. To better understand this important theorem, we will study about Classical Algebraic Geometry involving Analytic Geometry and Projective Geometry. In addition to the Cartesian and complex plane, we will also deal with the projective plane that contains the finite points and the infinity points. We will define algebraic curves and projective curves, thus reaching the objective of our work, which is the demonstration of the Bezout Theorem.

Keywords: Intersection of curves. Algebraic curve. Bézout's theorem. Algebraic geometry. Analytical geometry.



# Lista de Figuras

---

2.1	1-Geometria Esférica; 2-Geometria Euclidiana; 3-Geometria Hiperbólica . . . . .	16
4.1	Reta: Curva definida por $f(x,y) = 2x - y + 1 = 0$ . . . . .	28
4.2	Círculo: Cônica definida por $f(x,y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 4 = 0$ . . . . .	28
4.3	Elipse: Cônica definida por $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ . . . . .	29
4.4	Hipérbole: Cônica definida por $f(x,y) = \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ . . . . .	29
4.5	Parábola: Cônica definida por $f(x,y) = 2x^2 - 3y = 0$ . . . . .	30
4.6	Cissóide: Cúbica definida por $f(x,y) = 5x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$ . . . . .	30
4.7	Cúbica Singular: definida por $f(x,y) = y^2 - x^2(x + 1) = 0$ . . . . .	31
4.8	Cúbica Não Singular: Cúbica definida por $f(x,y) = y^2 - x(x + 1)(x - 1) = 0$ . . . . .	31
4.9	$f(x,y) = 4y^2 - x^4$ e $g(x,y) = 2y + x^2$ . . . . .	32
4.10	União de duas retas verticais: $x = -1$ e $x = 1$ . . . . .	34
4.11	Curva definida por $f(x,y) = 3x - y$ . . . . .	35
4.12	$f : x + y = 0$ e $g : 2x + 2y = 0$ . . . . .	35
4.13	As interseções são: $A(3,4)$ e $B(-3,1)$ . Aqui $B$ é “contado duas vezes”. Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	38
4.14	Interseções da hipérbole $f : xy = 1$ com a reta $l : ax + by = c$ . Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	39
4.15	Interseções entre a elipse $f : x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ e a reta $g : x - 2y + 2 = 0$ . Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	40
4.16	Interseções entre as elipses $f : x^2 + 16y^2 + 2x - 96y + 113 = 0$ e $g : 9x^2 + 25y^2 + 18x - 150y + 65 = 0$ . Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	40
4.17	Interseções entre a elipse $f : x^2 + y^2 - 10y = 0$ e o círculo $g : 9x^2 + 4y^2 - 90x - 40y + 225 = 0$ . Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	41
4.18	Interseção entre as retas $x - y = 1$ e $y - 2x = 3$ . Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	42
4.19	Interseção do Círculo com a Hipérbole. Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	43
4.20	Interseção do Círculo com a Parábola. Gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	44
4.21	Interseção entre a curva $f : y - x^3 = 0$ e a reta $l : y - x = 0$ , gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	46
4.22	Interseção entre a curva $f : y - x^2 + 4 = 0$ e as retas $l_1 : y = -4$ e $l_2 : y = 2x - 4$ , gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	47
4.23	Dois interseções distintas, gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	48
4.24	Uma interseção com multiplicidade 2, gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	48
4.25	Uma interseção com multiplicidade 3, gráfico em $\mathbb{R}$ . . . . .	49

4.26	Uma interseção com multiplicidade 1, gráfico em $\mathbb{R}$ .	49
4.27	3 interseções com multiplicidade 1, gráfico em $\mathbb{R}$ .	50
4.28	Multiplicidade 3, gráfico em $\mathbb{R}$ .	50
4.29	Multiplicidade de um ponto sobre uma curva. Gráfico em $\mathbb{R}$ .	51
4.30	Lemniscata. Gráfico em $\mathbb{R}$ .	53
4.31	Cissóide. Gráfico em $\mathbb{R}$ .	54
5.1	Plano Projetivo	56
6.1	Interseções reais entre a parábola e a elipse quando $\lambda = 2$ e $\lambda = 0$ .	65
6.2	Interseções reais entre a parábola e a elipse quando $\lambda = 1$ .	66
6.3	Interseções entre a parábola $y = x^2$ e uma reta $L$ .	66
6.4	Interseções no plano afim entre a cônica $F(x,y) = x^2 - y^2 - z^2 = 0$ e a cúbica $G(x,y) = x^3 - 4yz^2 = 0$ .	69
6.5	Interseções reais entre as cônicas $F(x,y) = 2x^2 + y^2 - 12yz = 0$ e $G(x,y) = x^2 + y^2 - 10yz = 0$ .	70
6.6	Interseções reais entre a cúbica $F(x,y) = x^3 + 3x^2z - 5xz^2 - 8yz^2 - 7z^3 = 0$ e a reta $G(x,y) = x - 2y + 5z = 0$ .	70
6.7	Interseções reais entre a cônica $F(x,y) = 3x^2 + 7y^2 - 55z^2 = 0$ e a cúbica $G(x,y) = 11x^3 - 155xz^2 - 84yz^2 = 0$ .	71
6.8	Interseções reais entre a cúbica $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 12z^2 = 0$ e a reta $G(x,y) = x - y = 0$ .	72
6.9	Interseções reais entre as cônicas $F(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 90xz - 40yz + 225z^2 = 0$ e $G(x,y) = x^2 - y^2 - 10xz = 0$ .	73
7.1	“A Santíssima Trindade” de Tomasso Masaccio (1401-1427)	77
7.2	Retas paralelas que se encontram no infinito	78
7.3	Trabalhos dos alunos	78
A.1	Retas concorrentes e retas paralelas no Plano Euclidiano	89
A.2	A Última Ceia - Leonardo Da Vinci	89
A.3	A Escola de Atenas - Raffaello Sanzio	89
A.4	A Santíssima Trindade - Tomasso Masaccio	90
A.5	Mona Lisa - Leonardo Da Vinci	90
A.6	Globo Terrestre	91
A.7	Retas paralelas que se encontram no infinito	91
A.8	Retas paralelas que se encontram no infinito	91

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Um pouco de História</b>	<b>13</b>
2.1	Geometria Euclidiana . . . . .	13
2.2	Geometrias não Euclidianas . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Anéis de Polinômios</b>	<b>17</b>
3.1	Anéis de Polinômios . . . . .	18
3.2	O Algoritmo da Divisão . . . . .	20
3.3	Fatoração de Polinômios . . . . .	22
3.4	Domínio de Fatoração Única . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Curva Algébrica Plana</b>	<b>27</b>
4.1	Equação de uma Curva Algébrica . . . . .	31
4.2	Interseções de Curvas Planas . . . . .	37
4.2.1	Finitude da Interseção . . . . .	38
4.3	A Resultante . . . . .	41
4.4	Multiplicidades . . . . .	45
4.4.1	Interseção de uma curva com uma reta . . . . .	45
4.4.2	Pontos Múltiplos . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Pontos no Infinito</b>	<b>56</b>
5.1	O Plano Projetivo . . . . .	56
5.2	Curvas Projetivas . . . . .	58
5.3	Interseção de Curvas Projetivas . . . . .	61
5.3.1	Interseção de Reta e Curva, agora Projetivas . . . . .	61
<b>6</b>	<b>O Teorema de Bézout</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>Aplicação em sala de aula</b>	<b>74</b>
7.1	Curvas Algébricas no contexto da Educação Básica . . . . .	74
7.2	Desenvolvimento da Atividade . . . . .	76
7.2.1	Introdução à Geometria Projetiva . . . . .	77
7.2.2	Interseção entre Curvas no GeoGebra . . . . .	78

<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Anexos</b>	<b>88</b>
A.1	Aula do nono ano . . . . .	88
A.1.1	Trabalhos dos alunos . . . . .	92
A.2	Aula do primeiro ano . . . . .	93

# Introdução

---

Curvas algébricas são estudadas sobre vários contextos na educação básica e superior. O entendimento desse tema é importante para o estudo de diversas áreas da Matemática.

Este trabalho traz um estudo sobre Curvas Algébricas utilizando ferramentas da Geometria Algébrica, que é uma sub área da Álgebra, pouco ou nunca abordada no Ensino Básico. Podemos dizer que a Geometria Algébrica surgiu no século *XVII* juntamente com a descrição do sistema cartesiano, fato que tornou possível o estudo de elementos geométricos pela álgebra. Anteriormente um elemento geométrico tinha sua definição somente descritiva, por exemplo, um círculo era definido como o lugar geométrico dos pontos do plano euclidiano que estão a uma mesma distância de um ponto dado. Com a descrição do sistema cartesiano esse mesmo elemento pode ser descrito como o conjunto de pontos  $(x,y)$  do plano real (por exemplo), tais que  $x^2 + y^2 = 1$ , caso do centro na origem e raio 1. A Geometria Algébrica então, é uma área da matemática que combina técnicas de álgebra abstrata, especialmente de álgebra comutativa, com a linguagem e os problemas da geometria. O texto norteador deste estudo é a obra de Israel Vainsencher, intitulada “Introdução às Curvas Algébricas Planas” [10].

Para o entendimento de qualquer geometria é necessário conhecer a Geometria Plana, seus axiomas e elementos básicos. Dessa forma, iniciamos essa dissertação no capítulo 2, trazendo um breve resumo sobre a Geometria Euclidiana cuja referência usada foi o livro da Coleção PROFMAT, Tópicos de História da Matemática [9]. Até o início do século *XIX* a Geometria Euclidiana era absoluta, no sentido de ser aceita e considerada única pela maioria dos matemáticos. Porém, renomados matemáticos da época, entre eles Gauss, Lobachewsky, Bolyai e Riemann, independentemente, apresentaram alguns estudos contrários à geometria plana. Sua inquietação era o quinto postulado de Euclides que pode ser descrito como “*Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada*”. Negando esse postulado, construíram uma geometria sólida. Surgem então as chamadas Geometrias não Euclidianas: a Geometria Esférica e a Geometria Hiperbólica. Estas geometrias têm nos proporcionado grandes avanços tecnológicos e constante progresso nas pesquisas espaciais.

As curvas algébricas aparecem na Geometria Algébrica em um ambiente diferente do Euclidiano e são estudadas na Geometria Projetiva, uma Geometria considerada não Euclidiana. Na Geometria Projetiva não há retas paralelas, todas as retas se interceptam.

Antes de iniciar efetivamente o estudo sobre curvas algébricas, trataremos no capítulo 3, conceitos importantes de Álgebra, mais especificamente sobre Anéis de Polinômios, necessários para um melhor entendimento deste trabalho.

Uma *Curva Algébrica Plana* é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo  $f(x,y) = 0$ , onde  $f$  é um polinômio não constante. No capítulo 4, veremos alguns exemplos de curvas algébricas planas e que duas equações podem definir uma mesma curva quando possuem fatores irredutíveis em comum. Trataremos ainda, das interseções entre curvas planas, que é finita quando estas não possuem componentes em comum e descreveremos o processo da resultante para determinar estes pontos. Veremos também que uma curva pode passar um certo número de vezes por um mesmo ponto. Com essa ideia de multiplicidade estudaremos sobre a interseção de reta e curva.

Fixando as atenções para os pontos no infinito, introduziremos no capítulo 5, o plano projetivo e as curvas projetivas. A projetividade foi muito utilizada pelos artistas do renascimento, fato que levou matemáticos do século *XIX* a se dedicarem ao estudo da Geometria Projetiva. Interseções entre curvas planas projetivas bem como suas multiplicidades, também serão estudadas nesse capítulo.

Como resultado de todos esses estudos chegaremos, no capítulo 6, à demonstração do Teorema de Bézout no plano afim: “*Se  $F, G$  são duas curvas planas afins sem componentes em comum,  $F$  de grau  $m$  e  $G$  de grau  $n$ , então o número de pontos de interseção  $F \cap G$ , contados com suas multiplicidades, é menor do que ou igual a  $m \cdot n$* ”. Faremos ainda um breve estudo deste teorema para o plano projetivo: “*Se  $F, G$  são duas curvas planas projetivas sem componentes em comum,  $F$  de grau  $m$  e  $G$  de grau  $n$ , então o número de pontos de interseção  $F \cap G$ , contados com suas multiplicidades, é igual a  $m \cdot n$* ”.

Finalmente, no capítulo 7, apresentaremos uma proposta de atividade envolvendo interseções finitas e noções de interseções no infinito para alunos do ensino fundamental. Utilizaremos o GeoGebra para representar graficamente e analisar a quantidade de pontos de interseção entre duas curvas com alunos do ensino médio.

## Um pouco de História

---

Iniciaremos este estudo com um breve relato sobre como surgiram as geometrias euclidianas e não euclidianas, apresentando conceitos importantes para melhor entendimento deste trabalho.

### 2.1 Geometria Euclidiana

A Geometria ensinada na Escola Básica é a *Geometria Euclidiana*, descrita no livro “Elementos” de Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. e tem sua base em *axiomas e postulados*.

*Axiomas* são verdades incontestáveis aplicados a todas as ciências e *Postulados* são verdades sobre determinado tema, como indicado em “Tópicos de História da Matemática” [9]

- Axiomas:
  1. As coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si.
  2. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
  3. Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.
  4. Se a coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
  5. Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.
  6. Quantidades que perfazem cada uma o dobro de outra quantidade são iguais.
  7. Quantidades que são metades de uma mesma quantidade são também iguais.
  8. Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais.
  9. O todo é maior que qualquer das suas partes.
  10. Duas linhas retas não compreendem um espaço.
- Segue os 5 postulados de Euclides para a Geometria Plana:

1. Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer.
2. E que se produza uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.
4. E que todos os ângulos retos sejam iguais.
5. E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.

Os *axiomas* não são passíveis de demonstração por serem evidentemente verdadeiros. Os *postulados* surgem com o desenvolvimento dos axiomas e, se provados verdadeiros, são considerados *teoremas*.

Em outras palavras, *Geometria Euclidiana* é a geometria em duas e três dimensões, baseada nos postulados de Euclides.

O quinto postulado do livro *I*, dito postulado das paralelas, o mais famoso dos postulados de Euclides, é aquele que apresentou mais discussões entre os matemáticos. Muitos tentaram prová-lo. Equivalente ao axioma das paralelas, “*Por um ponto exterior a uma reta, passa apenas uma, e somente uma reta paralela à reta dada*”.

No século *XIX*, Gauss, Bolyai, Riemann e Lobachevski, independentemente, conseguiram demonstrar que se trata efetivamente de um axioma, necessário e independente dos outros. Supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros axiomas:

- a. Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta (geometria de Lobachevski);
- b. Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta (geometria de Riemann).

Todos se deram conta de que, substituindo o axioma das paralelas, era possível construir duas geometrias diferentes da geometria euclidiana, igualmente coerentes e que não conduzia a nenhuma contradição. Apesar de serem dificilmente concebíveis, estas duas novas geometrias foram pouco a pouco reconhecidas como alternativas legítimas. Chegou-se mesmo a demonstrar que, se qualquer das duas pudesse apresentar alguma contradição, a própria geometria euclidiana seria também contraditória. Desde então, encontramos-nos perante três sistemas geométricos diferentes:

- A. A geometria euclidiana;
- B. A geometria de Lobachevski, também chamada hiperbólica;
- C. A geometria de Riemann, também chamada esférica ou elíptica.

As duas últimas recebem o nome de geometrias Não Euclidianas.



## 2.2 Geometrias não Euclidianas

Segundo Lázaro Coutinho [2], por volta de 1820, Carl Friedrich Gauss, grande matemático da época, começou a se interessar pela existência de uma geometria que não fosse a de Euclides. A geometria Euclidiana é aplicada em superfícies planas mas não pode ser aplicada a superfícies curvas. Por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  em uma superfície plana, o que não podemos afirmar se a superfície em que se encontra esse triângulo for curva.

Gauss não publicou seus trabalhos para não entrar em conflitos com filósofos e matemáticos da época pois a geometria Euclidiana era considerada uma verdade única e incontestável. Em 1829, Lobachewsky publicou um artigo sobre o princípio da geometria que marcou o nascimento oficial da Geometria não Euclidiana. Lobachevski e Bolyai, independentemente, criaram versões de uma geometria logicamente consistente, cujos princípios eram diferentes dos euclidianos.

Durante o século XIX, Riemann criou uma nova estrutura geométrica, perfeitamente consistente e sem contradições, a qual apresenta princípios diferentes da geometria euclidiana e também da criada por Lobachevski e Bolyai. A aceitação total da Geometria Não Euclidiana só se estabeleceu após a morte de Riemann. A Geometria não Euclidiana é baseada num sistema axiomático distinto da Geometria Euclidiana.

Modificando o *axioma das paralelas* que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias *elíptica* e *hiperbólica*.

Na *Geometria Elíptica* não há nenhuma reta paralela à inicial, enquanto na *Geometria Hiperbólica* existe uma infinidade de retas paralelas à inicial que passam no mesmo ponto.

Na *Geometria Elíptica* a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos, enquanto na *Geometria Hiperbólica* esta soma é menor que dois ângulos retos.

Na *Geometria Elíptica* temos que a circunferência de um círculo é menor do que  $\pi$  vezes o seu diâmetro, enquanto na *Geometria Hiperbólica* é maior que  $\pi$  vezes o seu diâmetro.

**Exemplo 2.2.1:** Observe na figura 2.1 o triângulo representado nas três geometrias:

1. Na geometria esférica ou elíptica de Riemann
2. Na geometria euclidiana
3. E na geometria hiperbólica de Lobachevski



**Figura 2.1:** 1-Geometria Esférica; 2-Geometria Euclidiana; 3-Geometria Hiperbólica

A geometria projetiva, que será estudada neste trabalho é um exemplo de geometria esférica. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [2] o livro de Lázaro Coutinho.

## Anéis de Polinômios

---

Para compreender o conceito de curva algébrica é necessário compreender os elementos de um anel de polinômio. Assim, tendo como texto base a obra de Vainsencher [10] e o livro de Gallian [4], este capítulo trará conceitos importantes sobre Anéis de Polinômios, necessários para o entendimento de todo trabalho. Inicialmente veremos a definição de Anel e algumas de suas propriedades.

**Definição 3.1:** Um *anel*  $A$  é um conjunto não vazio no qual estão definidas as operações  $+$  (Soma) e  $\cdot$  (Multiplicação), denotado por  $(A, +, \cdot)$  que satisfazem quatro propriedades para a soma e uma propriedade para a multiplicação, além da distributiva, a saber:

Propriedades para a Soma:

1. Comutatividade:  $\forall x, y \in A, x + y = y + x$
2. Associatividade:  $\forall x, y, z \in A, (x + y) + z = x + (y + z)$
3. Existência do elemento neutro: Existe um elemento, denotado por  $0$ , tal que  $\forall x \in A, x + 0 = 0 + x = x$
4. Existência do simétrico: Existe um elemento denotado por  $-x$ , tal que  $\forall x \in A$ , temos  $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Propriedades para a Multiplicação:

1. Associatividade:  $\forall x, y, z \in A, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .
2. Distributiva:  $\forall x, y, z \in A, x \cdot (y + z) = xy + xz$

**Observação:** Um anel pode satisfazer algumas propriedades adicionais. Nesse caso recebe nomes especiais:

- Se a multiplicação é comutativa ( $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in A$ ) o anel é chamado de *anel comutativo*.
- Se existe elemento neutro para a multiplicação, denotado por  $1$ , ( $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in A$ ) dizemos que o anel é um *anel com unidade*.

- Se o anel  $A$  é comutativo com unidade e possui a propriedade:  $x \cdot y = 0$  se e somente se  $x = 0$  ou  $y = 0$ , dizemos que  $A$  é um *domínio de integridade*, ou simplesmente um domínio.

Obs.: Um elemento não nulo  $x$  de um anel  $A$  tal que  $\exists y \in A$  não nulo com  $xy = 0$  é dito divisor de zero do anel.

- Se, em um Domínio de Integridade  $A$ , todo elemento  $x$  não nulo de  $A$  possui inverso (existe  $x^{-1}$  tal que  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ) chamamos  $A$  de *corpo*.

**Exemplo 3.0.1:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  é domínio de integridade.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ;  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  são corpos.

Um elemento inversível de um domínio de integridade é chamado de unidade.

**Exemplo 3.0.2:** (Anel dos inteiros módulo  $n$ ) Seja  $n$  um inteiro positivo. Sobre  $\mathbb{Z}$ , definimos a relação  $\equiv \pmod{n}$  da seguinte maneira: para  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \text{ é um múltiplo de } n.$$

É fácil ver que a relação  $\equiv$  é de equivalência.

Se  $a \in \mathbb{Z}$ , então, por definição, sua classe de equivalência módulo o inteiro  $n$  consiste no conjunto  $\{b \in \mathbb{Z}; b \equiv a \pmod{n}\}$ , i.e., no subconjunto  $\{a + kn; k \in \mathbb{Z}\}$ . Ela será denotada por  $\bar{a}$  ou  $a + \mathbb{Z}_n$ . Denotaremos por  $\mathbb{Z}_n$  o conjunto das classes de equivalência módulo  $n$ ; é claro que  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ .

Sobre  $\mathbb{Z}_n$  definimos duas operações:

$$\begin{aligned} \text{Soma: } + : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \overline{x + y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplicação: } \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \overline{x \cdot y} \end{aligned}$$

A soma e a multiplicação acima estão bem definidas e  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  é um anel dito anel dos inteiros módulo  $n$ .

### 3.1 Anéis de Polinômios

Trabalharemos com anéis de polinômios nos preocupando com a sua estrutura de anel. Veremos que alterando o anel onde os coeficientes pertencem teremos anéis de polinômios de estruturas diferentes.

**Definição 3.2:** Seja  $A$  um anel comutativo. O conjunto dos símbolos formais

$$A[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

é chamado o *anel de polinômios* sobre  $A$  na indeterminada  $x$ .

Dois polinômios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

e

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

são considerados iguais se, e somente se,  $a_i = b_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  (defina  $a_i = 0$  quando  $i > n$  e  $b_i = 0$  quando  $i > m$ ).

Para fazer  $A[x]$  um anel definimos a adição e multiplicação de modo usual.

**Definição 3.3:** Soma e Multiplicação de Polinômios: Sejam  $A$  um anel comutativo e

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

polinômios pertencentes a  $A[x]$ . Então

$$f(x) + g(x) = (a_s + b_s)x^s + (a_{s-1} + b_{s-1})x^{s-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$

onde  $a_i = 0$  para todo  $i > s$  e  $b_i = 0$  se  $i > m$ . Também

$$f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdots + c_0$$

onde  $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$  para  $k = 0, \dots, m+n$ .

**Exemplo 3.1.1:** Sejam  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  e  $g(x) = 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ .

$$f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^3 + 2x + 1)(2x^2 + 2) \\ &= 2x^5 + 2x^3 + 4x^3 + 4x + 2x^2 + 2 \\ &= 2x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

Nossa definição de soma e produto de polinômios foram formuladas de tal forma que  $A[x]$  é um anel comutativo.

Vamos agora introduzir alguma terminologia para polinômios.

**Definição 3.4:** Se  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$  onde  $a_n \neq 0$ , nós dizemos que:

- $f(x)$  tem grau  $n$ . Nós geralmente escrevemos  $gr(f) = n$  para indicar que o grau de  $f$  é  $n$ .
- O termo  $a_n$  é chamado de *coeficiente líder de  $f(x)$* .
- Se o coeficiente líder de  $f(x)$  for a unidade do anel dizemos que  $f$  é *mônico*.

- Não definimos grau para o polinômio nulo  $f(x) = 0$ .
- Polinômios do tipo  $f(x) = a_0$ , são chamados de *polinômios constantes*.

O teorema seguinte mostra que muitas propriedades de  $A$  são levadas para  $A[x]$ . Vejamos:

**Teorema 3.5:** Se  $D$  é um domínio então  $D[x]$  é um domínio.

*Demonstração.* Como já sabemos que  $D[x]$  é um anel, precisamos provar que  $D[x]$  é comutativo com unidade sem divisores de zero. Claramente  $D[x]$  é comutativo porque  $D$  o é. Se 1 for a unidade de  $D$  então é fácil ver que  $f(x) = 1$  é a unidade de  $D[x]$ . Finalmente suponha que  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  e  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$  onde  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ . Então pela definição do produto,  $f(x)g(x)$  tem coeficiente líder  $a_n b_m \neq 0$  porque  $D$  é domínio. Logo  $f(x)g(x) \neq 0$  e  $D[x]$  é um domínio.  $\square$

## 3.2 O Algoritmo da Divisão

Se  $a$  e  $b$  são inteiros e  $b \neq 0$ , então existem inteiros únicos  $q$  e  $r$  tais que  $a = bq + r$  onde  $0 \leq r < |b|$ . Seria interessante uma versão desse algoritmo para polinômios. Veremos a seguir que se tomarmos dois polinômios com coeficientes num corpo, podemos dividi-los obtendo quociente e resto únicos.

**Teorema 3.6:** Sejam  $F$  um corpo,  $f(x)$  e  $g(x) \in F[x]$  com  $g(x) \neq 0$ . Então existem polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  em  $F[x]$  tais que  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$  com  $r(x) = 0$  ou  $gr(r(x)) < gr(g(x))$ . Tais  $q(x)$  e  $r(x)$  são únicos.

*Demonstração. Existência* de  $q(x)$  e  $r(x)$ : Se  $f(x) = 0$  ou  $gr(f) < gr(g)$  basta tomar  $q(x) = 0$  e  $r(x) = f(x)$ . Então vamos assumir que  $n = gr(f) \geq gr(g) = m$ . Sejam

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

Se  $gr(f) = 0$ ,  $f$  e  $g$  são constantes em  $F$ , tome  $q(x) = fg^{-1}$  e  $r(x) = 0$ . Vamos supor agora que  $gr(f) > 0$  e colocamos  $f_1 = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ . Então  $f_1 = 0$  ou  $gr(f_1) < gr(f)$ . Pela nossa hipótese de indução existem  $q_1(x)$  e  $r_1(x)$  em  $F[x]$  tais que  $f_1 = g(x)q_1(x) + r_1(x)$  onde  $r_1 = 0$  ou  $gr(r_1) < gr(g)$ . Assim

$$f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + f_1(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + q_1(x)g(x) + r_1(x) = [a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)]g(x) + r_1(x).$$

E esta parte do teorema está provada.

**Unicidade:** Suponhamos  $f(x) = q_0(x)g(x) + r_0(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$  onde  $r_i = 0$  ou  $gr(r_i) < gr(g)$ ,  $i = 1, 2$ . Subtraindo as duas equações temos que:

$$0 = g(x)(q_0(x) - q_1(x)) + (r_0(x) - r_1(x))$$

ou

$$r_0(x) - r_1(x) = g(x)(-q_0(x) + q_1(x))$$

Como o grau de  $r_0(x) - r_1(x)$  é menor que o grau de  $g(x)$  e  $g(x)$  divide  $r_0(x) - r_1(x)$ , isto só é possível se  $r_0(x) - r_1(x) = 0$ . Assim  $r_1 = r_0$  e  $q_1 = q_0$ . Os polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  são chamados de quociente e resto da divisão.  $\square$

Seja agora  $D$  um domínio. Se  $f$  e  $g \in D[x]$  dizemos que  $g|f$  isto é,  $g$  divide  $f$  se existe um polinômio  $h \in D[x]$  tal que  $f = gh$ . Neste caso nós chamamos  $g$  de fator de  $f$ . Um elemento  $a \in D$  é um zero de  $f$  se  $f(a) = 0$ . Quando  $F$  é um corpo,  $a \in F$  e  $f(x) \in F[x]$ , nós dizemos que  $a$  é um zero de multiplicidade  $k$  se  $(x - a)^k$  divide  $f$  mas  $(x - a)^{k+1}$  não divide  $f$ . Com estas definições, podemos dar várias consequências do algoritmo da divisão.

**Corolário 3.7:** (O Teorema do Resto). Se  $F$  é um corpo,  $a \in F$  e  $f(x) \in F[x]$  então  $f(a)$  é o resto da divisão de  $f$  por  $x - a$ .

**Corolário 3.8:** (O Teorema do Fator). Se  $F$  um corpo,  $a \in F$  e  $f \in F[x]$ , então  $a$  é zero de  $f$  se, e somente se,  $x - a$  é fator de  $f$ .

**Corolário 3.9:** (Polinômios de grau  $n$  têm no máximo  $n$  zeros). Um polinômio de grau  $n$  sobre um corpo tem no máximo  $n$  zeros contando multiplicidades.

*Demonstração.* Usaremos a indução em  $n$ . Claramente um polinômio de grau 1 tem exatamente 1 zero. Agora suponha que a afirmativa é válida para todo polinômio de grau menor que  $n$  e  $n$  é maior que 1. Seja  $f$  um polinômio de grau  $n$  sobre um corpo e seja  $a$  um zero de multiplicidade  $k$ . Então  $f(x) = (x - a)^k g(x)$  onde  $g(a) \neq 0$  e  $n = k + gr(g)$  o que mostra que  $gr(g) < n$ . Se  $f$  não tem nenhum zero diferente de  $a$  então não temos nada mais a demonstrar. Se  $f$  tiver outro zero  $b \neq a$  então  $0 = f(b) = (b - a)^k g(b)$  e então  $g(b) = 0$ . Como  $gr(g) < n$  segue pela nossa hipótese de indução que o número de zeros de  $g$  é menor ou igual ao grau de  $g$  e assim o número de zeros contando multiplicidades de  $f$  é menor ou igual a  $k + gr(g) = k + n - k = n$  e o nosso corolário está demonstrado.  $\square$

Observamos que o último corolário não é verdade para anéis de polinômios arbitrários. Por exemplo  $x^2 + 3x + 2$  tem 4 zeros em  $\mathbb{Z}_6$ , sendo que  $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ , é o conjunto formado pelas classes residuais módulo 6.

Apresentaremos uma aplicação teórica do algoritmo da divisão mostrando que  $F[x]$  e  $\mathbb{Z}$  são bem parecidos. Para isto vamos definir domínios de ideais principais.

**Definição 3.10:** Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel e  $I$  um subconjunto não vazio de  $A$ . Dizemos que  $I$  é um ideal de  $A$  se

- $x + y \in I, \quad \forall x, y \in I$
- $ax \in I, \quad \forall x \in I, \quad \forall a \in A$

**Exemplo 3.2.1:** .

- a. Se  $n \geq 0$  um inteiro, então o subconjunto  $\mathbb{Z}_n := \{z_n | z \in \mathbb{Z}\}$  é um ideal do anel dos inteiros.
- b. Mais geralmente, seja  $(A, +, \cdot)$  um anel e sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  elementos de  $A$ . Então o subconjunto  $A\alpha_1 + \dots + A\alpha_t := \{a_1\alpha_1 + \dots + a_t\alpha_t | a_1, \dots, a_t \in A\}$  é um ideal de  $(A, +, \cdot)$  que será denotado por  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ .

**Definição 3.11:** (Domínio de Ideais Principais). Um domínio de ideais principais (DIP) é um domínio  $D$  no qual todo ideal tem a forma  $\langle a \rangle = \{ra | r \in A\}$ . Note que um corpo  $F$  só possui  $\{0\}$  e  $F$  como ideais. E  $\{0\} = \langle 0 \rangle$  e  $F = \langle 1 \rangle$ , logo  $F$  é um DIP.

**Teorema 3.12:** Se  $F$  é um corpo então  $F[x]$  é um DIP.

*Demonstração.* Pelo teorema 3.5 sabemos que  $F[x]$  é um domínio. Seja agora  $I$  um ideal de  $F[x]$ . Se  $I = 0$  nada temos a demonstrar. Suponha então que  $I \neq 0$  e seja  $g$  o polinômio de menor grau que pertence a  $I$ . Vamos provar que  $I = \langle g \rangle$ . Como  $g \in I$ ,  $gf(x) = \{gf | f \in F[x]\} \subset I$ , e então  $\langle g \rangle \subset I$ . Tome  $h \in I$ . Pelo algoritmo da divisão temos que existem  $q$  e  $r$  em  $F[x]$  tais que  $h = qg + r$  com  $r = 0$  ou  $gr(r) < gr(g)$ . Temos que  $r = h - qg \in I$  e então pela escolha de  $g$ ,  $r$  só pode ser 0. Logo  $g|h$  o que prova que  $I \subset \langle g \rangle$  e portanto  $I = \langle g \rangle$ . □

### 3.3 Fatoração de Polinômios

Como você deve ter notado, o anel de polinômios  $F[x]$  com  $F$  corpo possui propriedades parecidas com o anel de inteiros. Isso se deve pelo fato de ambos anéis serem domínios e, as propriedades conhecidas dos números inteiros valem, em geral, para domínios. Uma definição importante para elementos em um domínio, é a de elemento irredutível, o que em  $\mathbb{Z}$  chamamos de número primo.

**Definição 3.13:** (Polinômio irredutível e redutível) Seja  $D$  um domínio. Um polinômio  $f(x) \in D[x]$  é *irredutível* sobre  $D$  se:

- 1.  $f \neq 0$  e  $f$  não é uma unidade de  $D[x]$ .
- 2. Sempre que  $f = gh$  então  $g$  ou  $h$  é uma unidade de  $D[x]$ .

Um polinômio  $f \in D[x]$  é *redutível* se  $f$  não é nulo nem uma unidade de  $D[x]$  e se  $f$  não for irredutível. Antes de darmos exemplos de irredutíveis precisamos saber quais são as unidades de  $D[x]$ , ou seja, quais são os elementos inversíveis de  $D[x]$ . Sabemos que  $D[x]$  é um domínio e então vale que  $gr(f \cdot g) = gr(f) + gr(g)$ . Se  $f$  é uma unidade de  $D[x]$ , então existe um  $g \in D[x]$  tal que  $f \cdot g = 1$ . Aplicando o grau, temos que  $gr(f) + gr(g) = 0$ . Assim  $gr(f) = gr(g) = 0$ ,  $f, g \in D$  e  $f \cdot g = 1$  provando assim que  $f$  e  $g$  são unidades de  $D$  e acabamos de provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.14:** Os elementos inversíveis de  $D[x]$ , onde  $D$  é um domínio, são as unidades de  $D$ .



**Exemplo 3.3.1:** Vamos calcular o conjunto das unidades de alguns anéis de polinômios (denotaremos por  $U(A)$  as unidades de  $A$ ):

1.  $U(\mathbb{Z}[x]) = \{-1, 1\}$
2.  $U(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R} - \{0\}$ .
3.  $U(F[x]) = F - \{0\}$  se  $F$  é um corpo.

Conhecendo agora as unidades de  $F[x]$  onde  $F$  é um corpo, temos que  $f$  é irredutível sobre  $F$  se não for constante e se  $f$  não puder ser escrito como produto de dois polinômios em  $F[x]$  de grau menor .

**Exemplo 3.3.2:**  $f(x) = 2x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$  pois  $2x^2 + 4 = 2(x^2 + 2)$ ,  $2$  é uma unidade de  $\mathbb{Q}[x]$  e  $x^2 + 2$  não pode ser escrito como um produto de polinômios de grau 1, pois se  $x^2 + 2 = (ax + b)(cx + d)$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ,  $x^2 + 2$  teria raiz em  $\mathbb{Q}$ , já que a raiz de  $ax + b$  é  $-\frac{b}{a}$ . Mas as raízes de  $x^2 + 2$  são  $\pm\sqrt{2}i \notin \mathbb{Q}$ .

**Exemplo 3.3.3:**  $f(x) = 2x^2 + 4 \in \mathbb{Z}[x]$  é redutível sobre  $\mathbb{Z}$ . Com efeito,  $2x^2 + 4 = 2(x^2 + 2)$ , e  $2$  não é uma unidade em  $\mathbb{Z}[x]$ , e novamente, se  $x^2 + 2$  fosse redutível em  $\mathbb{Z}$ ,  $(x^2 + 2) = (ax + b)(cx + d)$ , então teria raiz em  $\mathbb{Z}$ , mas a raiz de  $(x^2 + 2)$  é  $\pm\sqrt{2}i \notin \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.3.4:**  $f(x) = 2x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$  é irredutível sobre  $\mathbb{R}$  e redutível sobre  $\mathbb{C}$ . Com efeito,  $2x^2 + 4 = 2(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$ .

**Exemplo 3.3.5:** O polinômio  $x^2 - 2$  é redutível sobre  $\mathbb{R}$  e irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ , já que  $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ .

**Exemplo 3.3.6:** O polinômio  $x^2 + 1$  é irredutível sobre  $\mathbb{R}$  e redutível sobre  $\mathbb{C}$ .

Em geral é difícil determinar se um polinômio é ou não irredutível sobre um domínio mas existem alguns casos especiais em que isto é fácil . O teorema seguinte é um desses casos. Ele se aplica a alguns dos exemplos acima.

**Teorema 3.15:** (Teste de redutibilidade para graus 2 e 3) Seja  $F$  um corpo. Se  $f(x) \in F[x]$  e  $gr(f) = 2$  ou  $3$  então  $f$  é redutível sobre  $F$  se e somente se  $f$  tem um zero em  $F$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f = gh$  onde  $g$  e  $h$  possuem grau menor que o de  $f$  e pertençam a  $F[x]$ . Como  $gr(f) = gr(g) + gr(h)$  e  $gr(f) = 2$  ou  $3$ , pelo menos um dos  $g$  ou  $h$  tem grau 1, digamos  $g(x) = ax + b$ . Então claramente  $-\frac{b}{a}$  é um zero de  $g$  e então um zero de  $f$ . Reciprocamente, suponha que  $f(a) = 0$  onde  $a \in F$ . Então pelo teorema do fator,  $x - a$  é um fator de  $f$  e assim  $f(x)$  é redutível sobre  $F$ .  $\square$

## 3.4 Domínio de Fatoração Única

**Definição 3.16:** Um domínio  $D$  é *domínio de fatoração única* (DFU) se:

- Todo elemento de  $D$  não nulo e não unidade pode ser escrito como um produto de irredutíveis de  $D$ .
- A fatoração em irredutíveis é única a menos de associados e da ordem em que aparecem. Sendo que dois elementos  $a, b \in D$  são associados se existe  $u \in D$ , inversível, tal que  $a = ub$ .

Vamos mostrar que todo  $DIP$  é um  $DFU$ . Para isso consideraremos cadeias ascendentes de ideais, isto é, uma coleção de ideais  $I_1, I_2, \dots$  tais que  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_i \subset \dots$

**Teorema 3.17:** Num  $DIP$  toda cadeia ascendente de ideais  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$  é estacionária, isto é, existe um  $k$  tal que  $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \dots$ .

*Demonstração.* Seja  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$  uma cadeia ascendente de ideais num domínio  $D$  e seja  $I = \cup I_i$ . É fácil mostrar que  $I$  é um ideal de  $D$ . Como  $D$  é um  $DIP$ ,  $I = \langle a \rangle$  para algum  $a \in D$ . Como  $a \in I$ ,  $a \in I_k$  para algum inteiro  $k$  e assim  $I = \langle a \rangle \subset I_k$ . Mas pela definição de  $I$ , temos que  $I_i \subset I \subset I_k$  para todo  $I_i$  da cadeia e assim  $I_k$  deve ser o último ideal da cadeia.  $\square$

**Teorema 3.18:** Todo  $DIP$  é um  $DFU$ .

*Demonstração. Existência:* Seja  $D$  um  $DIP$ . Primeiro mostraremos que todo  $a \in D$ ,  $a \neq 0$ , e  $a$  não unidade é um produto de irredutíveis que pode constar de apenas um fator. Assim, seja  $a_0 \neq 0$ , não unidade e não irredutível. Então existem  $a_1$  e  $b_1$  não unidades em  $D$  tais que  $a_0 = b_1 a_1$ . Se ambos,  $a_1$  e  $b_1$  podem ser escritos como produto de irredutíveis então  $a_0$  também pode. Suponha que  $a_0$  não pode ser escrito como produto de irredutíveis. Assim  $b_1$  ou  $a_1$  não pode ser escrito como produto de irredutíveis, digamos,  $a_1$ . Então  $a_1 = a_2 b_2$  onde nem  $a_2$  nem  $b_2$  é unidade. Continuando neste processo, obtemos uma sequência infinita  $b_1, b_2, \dots$  de elementos que não são unidades de  $D$  e uma sequência  $a_0, a_1, a_2, \dots$  de elementos não nulos de  $D$ , com  $a_n = b_{n+1} a_{n+1}$  para cada  $n$ . Como  $b_{n+1}$  não é unidade, temos

$$\langle a_n \rangle \subset \langle a_{n+1} \rangle$$

para cada  $n$ . Assim,  $\langle a_0 \rangle \subset \langle a_1 \rangle \subset \dots$  é uma cadeia infinita crescente de ideais. Então concluímos que  $a_0$  é um produto de irredutíveis. A cadeia não para pois senão  $\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle$ ,  $a_{n+1} = da_n$ ,  $a_n = b_{n+1} a_{n+1}$ . Juntando essas equações temos que  $b_{n+1}$  é uma unidade, o que é absurdo.

*Unicidade:* Temos que mostrar que a fatoração é única a menos de associados e a ordem em que os fatores aparecem. Para fazer isto, suponha que um elemento  $a$  de  $D$  pode ser escrito como:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$$

onde os  $p$  e  $q$  são irredutíveis e a repetição é permitida. Faremos indução em  $r$ . Se  $r = 1$ , então  $a$  é irredutível e claramente  $s = 1$  e  $p_1 = q_1$ . Assumimos que todo elemento o qual pode ser expresso como um produto de  $r - 1$  elementos irredutíveis é escrito de modo único, a menos de associados e ordem). Vamos agora provar que isto também vale para um produto de  $r$  irredutível. Como  $p_1 | q_1 q_2 \cdots q_s$  ele divide algum  $q_i$ . Então  $q_1 = up_1$  onde  $u$  é uma unidade de  $D$ . Assim, sem perda de generalidade,

$$ua = up_1 p_2 \cdots p_r = q_1 (uq_2) \cdots q_s$$

e por cancelamento

$$p_2 p_3 \cdots p_r = uq_2 \cdots q_s.$$

Pela hipótese de indução estas duas fatorações são idênticas a menos de associados e a ordem em que aparecem. Assim, o mesmo é verdade para as 2 fatorações de  $a$ .  $\square$

E pelo teorema (3.12) temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.19:** Se  $F$  é um corpo então  $F[x]$  é um DFU.

Um importante resultado para DFU é o Lema que veremos a seguir.

Antes porem, veja a definição de *Conteúdo de um Polinômio* e *Polinômio Primitivo*:

**Definição 3.20:** O conteúdo de um polinômio  $f = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  é o  $\text{mdc} \{a_i | i = 0, \dots, n\}$ . Um polinômio é chamado de *primitivo* se seu conteúdo for igual a 1.

**Lema 3.21 (Lema de Gauss):** Seja  $A$  um DFU e seja  $K \supseteq A$  seu corpo de frações. Seja  $f \in A[X]$  um polinômio primitivo não constante.

- Se  $f$  é redutível em  $K[X]$ , então também o é em  $A[X]$ .
- Se  $g \in A[X]$  e  $f|g$  em  $K[X]$ , então  $f|g$  em  $A[X]$ .

Para entender o Lema, vamos definir o que é o corpo de frações de um domínio.

Seja  $D$  um domínio, nosso objetivo é mostrar que existe um corpo  $F$  que contém  $D$ . Para isso, definimos em  $D \times D^*$  a relação de equivalência

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

a classe do elemento  $(a,b)$ , denotamos por  $[(a,b)]$  e o conjunto quociente por  $F := \{[(a,b)] | (a,b) \in D \times D^*\}$ .

Em  $F$  definimos uma soma e produto

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc), bd]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$$

Temos  $(F, +, \cdot)$  é um corpo. Note que

- Zero de  $F$ :  $[(0,1)] = 0$
- Unidade de  $F$ :  $[(1,1)]$  (elemento neutro da multiplicação)
- Inverso de  $[(a,b)] \neq 0$ :  $[(b,a)]$ .

Usamos a notação  $\frac{a}{b} = [(a,b)]$  e identificamos  $a \in D$  com o elemento  $\frac{a}{1} (\Phi : D \rightarrow F, \text{ onde } \Phi(a) = \frac{a}{1} \text{ é injetiva})$ .

Dizemos, nessas condições, que  $F$  é o corpo de frações de  $D$ .

Omitiremos aqui a demonstração do Lema de Gauss, o leitor pode conferi-la em [10].

Os Teoremas, Corolários e Proposição que veremos agora, nos ajudarão a entender melhor a demonstração do Teorema de Bézout, que apresentamos no capítulo 6. Suas demonstrações podem ser consultadas na obra de Arnaldo Garcia: Elementos de Álgebra [5].

**Teorema 3.22:** Seja  $D$  um domínio. Então as afirmações seguintes são equivalentes:

- (i)  $D$  é um *DIP*.
- (ii)  $D$  é um *DFU* que possui a seguinte propriedade:

$$\forall a, b \in D \setminus \{0\}, \exists e, f \in D \text{ tais que } M.D.C. \{a, b\} = ea + fb.$$

**Corolário 3.23:** Sejam  $D$  um domínio e  $0 \neq f(x) \in D[x]$ . Então:

1. Número de raízes de  $f(x)$  em  $D$  (contando as multiplicidades)  $\leq$  grau  $f(x)$ .
2. Chamando  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  essas raízes denotadas por  $e_1, \dots, e_r$  as suas multiplicidades, temos

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_r)^{e_r} t(x)$$

onde  $t(x) \in D[x]$  é um polinômio que não tem raiz em  $D$ .

**Teorema 3.24:** Seja  $D$  um domínio e sejam  $f(x), g(x) \in D[x]$  dois polinômios de grau  $\geq 1$ .

- a. Se  $f(x)$  e  $g(x)$  possuem um fator comum de grau  $\geq 1$  em  $D[x]$ , então  $R_{f,g} = 0$ .
- b. Se  $D$  é um *DFU* e se  $R_{f,g} = 0$ , então  $f(x)$  e  $g(x)$  possuem um fator comum de grau  $\geq 1$  em  $D[x]$ .

Onde  $R_{f,g}$  é a resultante de  $f, g$ , que veremos na seção 4.3.

**Corolário 3.25:** Sejam  $D \subset D'$  dois domínios, sendo  $D$  um *DFU*. Sejam  $f(x), g(x) \in D[x]$  de grau  $\geq 1$ . Então,  $f(x)$  e  $g(x)$  têm fator comum de grau  $\geq 1$  em  $D[x]$  se, e somente se, eles têm fator comum de grau  $\geq 1$  em  $D'[x]$ .

# Curva Algébrica Plana

---

Veremos neste capítulo alguns exemplos de curvas algébricas, segundo Vainsencher [10], e ainda algumas definições básicas como traço, grau, componentes irredutíveis e multiplicidade, que nos ajudarão a compreender conceitos importantes.

Neste texto usaremos  $K$  para indicar corpo e os polinômios  $f(x,y)$  pertencem a  $K[x,y]$ . Considere  $K[x,y]$  o anel de polinômios em duas variáveis com coeficientes em  $K$ . Note que  $K[x]$  é um domínio, e podemos considerar  $K[x,y]$  como  $K[x][y]$ . Portanto o que vimos no capítulo anterior em anéis de polinômios de uma variável, vale para  $K[x,y]$ , considerando  $K[x,y] = K[x][y]$ .

Se  $f(x,y) \in K[x,y]$  é tal que  $f(x,y) = f_1^{\alpha_1}(x,y) \cdots f_s^{\alpha_s}(x,y)$ , com  $f_i$  irredutíveis, dizemos que cada  $f_i$  é um *fator irredutível* de  $f$ .

Iniciaremos este capítulo com a definição de curva algébrica e, ao longo deste texto, veremos que essa definição precisará de um detalhe a mais.

**Definição 4.1:** Uma *Curva Algébrica Plana* é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo  $f(x,y) = 0$ , onde  $f$  é um polinômio não constante.

Neste caso dizemos que a curva é dada por  $f(x,y)$ .

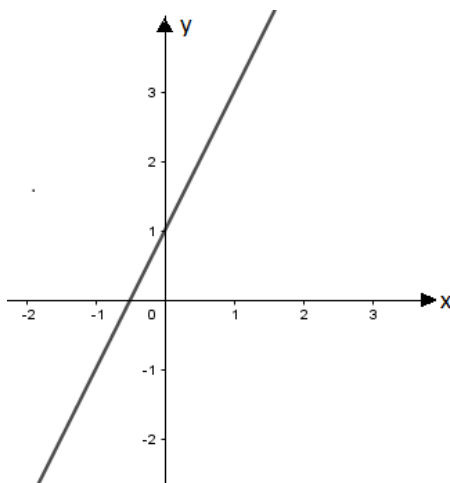
No Ensino Básico estudamos algumas curvas como retas, parábolas, círculos, etc. Vejamos alguns exemplos de curvas algébricas planas. Aqui consideraremos  $K = \mathbb{R}$ .

## 1. Reta (figura 4.1)

A curva dada pela equação

$$f(x,y) = ax + by + c = 0$$

é uma reta. Observe que a reta é definida por um polinômio  $f(x,y)$  de grau 1.



**Figura 4.1:** Reta: Curva definida por  $f(x,y) = 2x - y + 1 = 0$

## 2. Cônicas

Uma cônica é uma curva algébrica plana dada por um polinômio de grau 2. Assim a equação geral de uma cônica é

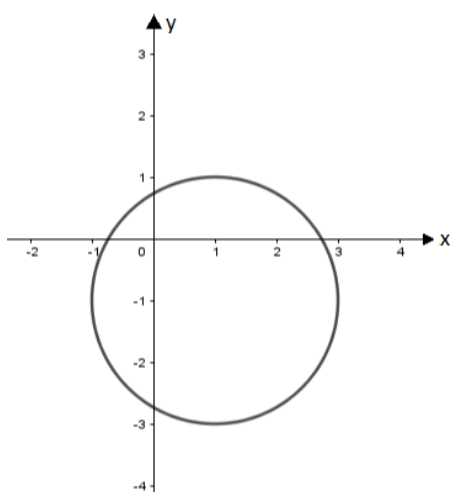
$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Alguns exemplos de cônicas:

### a. Círculo (figura 4.2)

É a cônica dada pela equação

$$f(x,y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

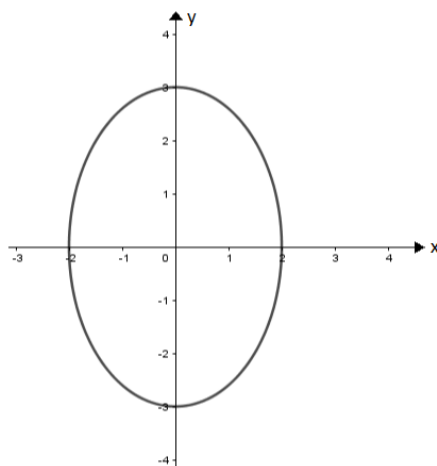


**Figura 4.2:** Círculo: Cônica definida por  $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0$

### b. Elipse (figura 4.3)

É a cônica dada pela equação

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

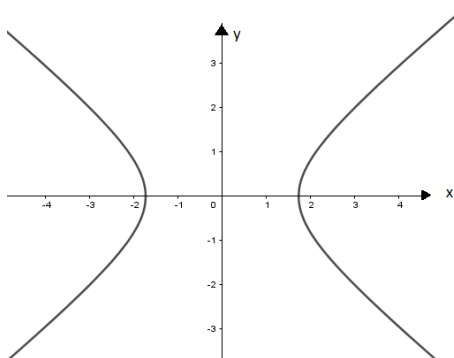


**Figura 4.3:** Elipse: Cônica definida por  $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

c. Hipérbole (figura 4.4)

É a cônica dada pela equação

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

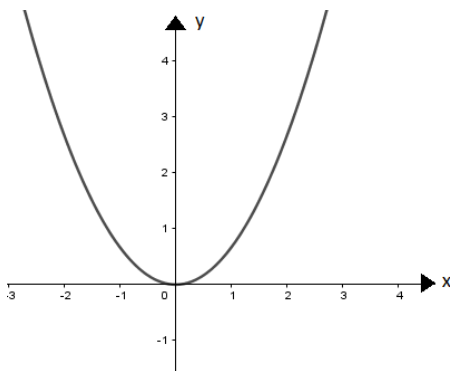


**Figura 4.4:** Hipérbole: Cônica definida por  $f(x,y) = \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

d. Parábola (figura 4.5)

É a cônica dada pela equação

$$f(x,y) = x^2 - 4by = 0$$



**Figura 4.5:** Parábola: Cônica definida por  $f(x,y) = 2x^2 - 3y = 0$

3. Cúbicas

Cúbica é uma curva algébrica plana dada por um polinômio de grau 3. Sua equação geral é

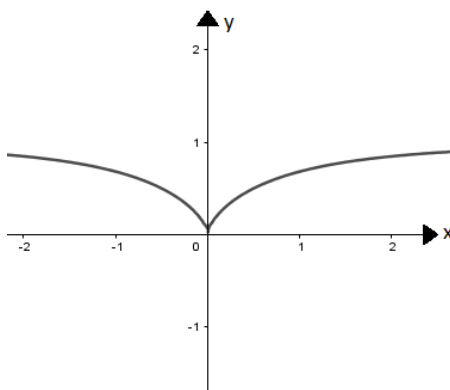
$$f(x,y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + iy + j = 0$$

Alguns exemplos de cúbicas:

a. Cissóide (figura 4.6)

É a cúbica dada pela equação

$$f(x,y) = x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$$



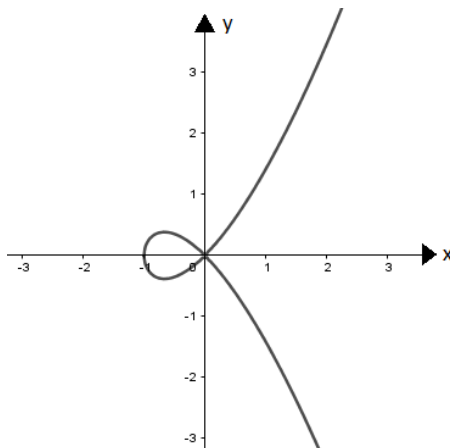
**Figura 4.6:** Cissóide: Cúbica definida por  $f(x,y) = 5x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$

b. Cúbica Singular (figura 4.7)

É a cúbica dada pela equação

$$f(x,y) = y^2 - x^2(x + 1) = 0$$



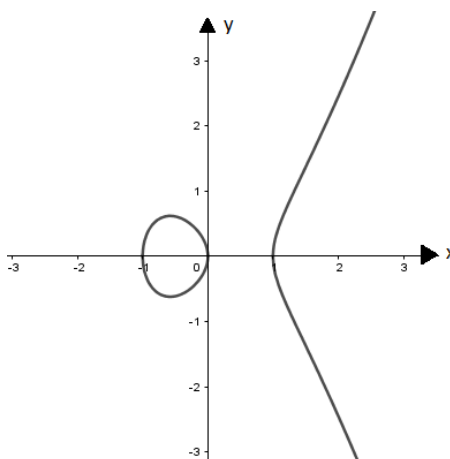


**Figura 4.7:** Cúbica Singular: definida por  $f(x,y) = y^2 - x^2(x + 1) = 0$

c. Cúbica Não Singular (figura 4.8)

É a cúbica dada pela equação

$$f(x,y) = y^2 - x(x + 1)(x - 1) = 0$$



**Figura 4.8:** Cúbica Não Singular: Cúbica definida por  $f(x,y) = y^2 - x(x + 1)(x - 1) = 0$

## 4.1 Equação de uma Curva Algébrica

Sabemos que a equação  $f(x,y) = 0$ , nos fornece um conjunto de pontos que definem uma curva. Mas podem existir duas equações diferentes definindo uma mesma curva? O ideal seria identificar a curva com sua equação. Vejamos um exemplo em  $K = \mathbb{R}$ . Sejam  $f$  e  $g$  duas curvas algébricas planas definidas por:

$$f(x,y) = 4y^2 - x^4 \quad e \quad g(x,y) = 2y + x^2$$

A equação de  $f$  pode ser escrita da seguinte forma:

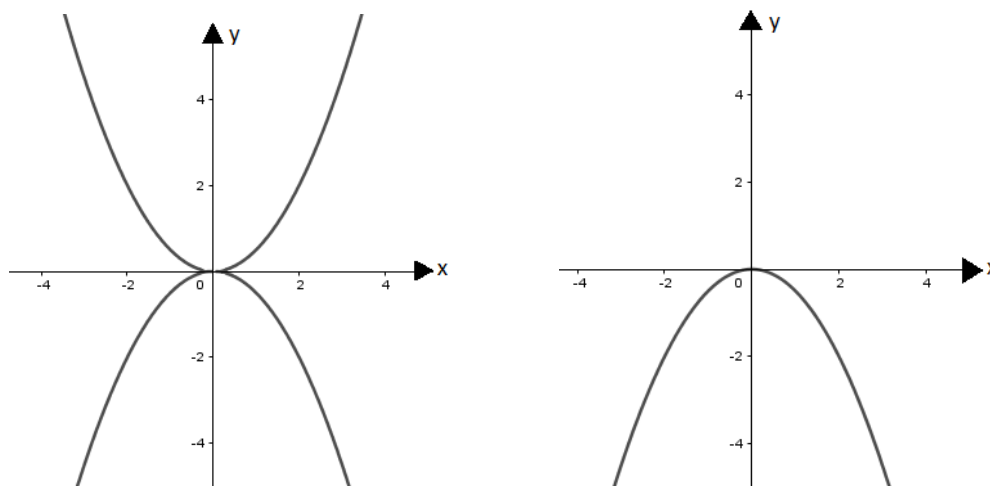
$$4y^2 - x^4 = (2y + x^2)(2y - x^2)$$

Daí,

$$f(x,y) = g(x,y) \cdot h(x,y)$$

Neste caso,  $g$  e  $h$  são fatores de  $f$ .

Dizemos então que  $g$  é componente comum de  $f$  (figura 4.9).



**Figura 4.9:**  $f(x,y) = 4y^2 - x^4$  e  $g(x,y) = 2y + x^2$

Note que a curva definida por  $g(x,y)$  está contida na curva definida por  $f(x,y)$ . Mas, além de termos uma curva contida em outra, podemos considerar, por exemplo,  $f(x,y) = x + y$  e  $g(x,y) = (x + y)^2$  e teríamos  $g = f^2$ .

Nesse caso  $f$  e  $g$  definem a mesma curva, que é a reta  $x + y = 0$ . Mas será que esse problema, de equações definirem a mesma curva, ocorre só quando  $g = f^n$ ,  $n$  natural? Se sim, resolveríamos tomando a equação de menor grau.

Mas olhando para o exemplo  $xy = 0$  e  $xy^2 = 0$  notamos que a curva por elas definidas também é a mesma e uma não é múltipla da outra. Mas nesse exemplo, a curva é a união de duas. Note que a curva  $xy = 0$  é a união de  $x = 0$  e  $y = 0$  e a curva  $xy^2 = 0$  é a união de  $x = 0$  e  $y^2 = 0$  e a nossa afirmativa poderia valer para cada uma delas ( $x = 0$  é múltipla de  $x = 0$  e  $y = 0$  é múltipla de  $y^2 = 0$ ).

Então a hipótese de se considerar uma equação de grau mínimo para definir curva, em que as outras equações que também as definem são múltiplas desta, nos parece promissora. Mas as equações  $f(x,y) = x^2 + y^2$  e  $g(x,y) = 2x^2 + y^2$  definem a mesma curva em  $\mathbb{R}^2$  o que contraria nossa hipótese.

Nesse último exemplo, os pontos  $(x,y)$  tal que  $f(x,y) = 0$  e  $g(x,y) = 0$  não são todos reais. Em  $\mathbb{R}$ ,  $f$  e  $g$  tem a mesma solução, mas em  $\mathbb{C}$  não. E essa é a raiz do problema. Veremos mais adiante que se  $f(x,y)$  é um polinômio irredutível e a curva que ele define (em  $\mathbb{C}$ ) é infinita, então a equação de grau mínimo está bem determinada (a menos de fator constante).

Portanto, a partir desse momento suporemos sempre que  $K = \mathbb{C}$ . Na verdade basta que  $K$  seja algebricamente fechado, motivo de continuarmos com a notação  $K$ , mas, nos exemplos, tomaremos  $K = \mathbb{C}$ . Um corpo  $K$  é algebricamente fechado se qualquer polinômio  $p(x) \in K[x]$ , de grau  $\geq 1$ , possui uma raiz em  $K$ .

Assim, pela definição 4.1, não conseguimos identificar a curva à equação, já que esta não é única. Esse problema começa a se resolver com a compreensão da proposição abaixo:

**Proposição 4.2:** *Sejam  $f, g$  polinômios em duas variáveis com coeficientes no corpo  $K$  algebricamente fechado. Então  $f(x, y) = 0$  e  $g(x, y) = 0$  têm as mesmas soluções em  $K^2$  se, e só se, os fatores irredutíveis de  $f, g$  são os mesmos.*

*Demonstração.* Faremos somente a ida, já que a volta é imediata. Suponhamos que  $f$  e  $g$  têm as mesmas soluções em  $K^2$ . Seja  $p \in K[x, y]$  um fator irredutível de  $f$ . Por hipótese, para cada  $(x, y) \in K^2$ , vale a implicação,

$$p(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x, y) = 0$$

Provaremos que  $p$  divide  $g$  em  $K[x, y]$ . Trocando  $x$  por  $y$  se necessário, podemos supor que  $y$  ocorre efetivamente em  $p$ . Ponhamos  $A = K[x], L = K(x)$  (corpo de frações). Assim, pelo lema de Gauss (3.21),  $p \in A[y]$  é irredutível em  $L[y]$ . Suponhamos, por absurdo que  $p$  não divide  $g$ . Então  $MDC(p, g) = 1$ . Daí, existe uma relação

$$ap + bg = 1$$

onde  $a, b \in L[y]$ . Podemos escrever

$$a = a'/c, \quad b = b'/c$$

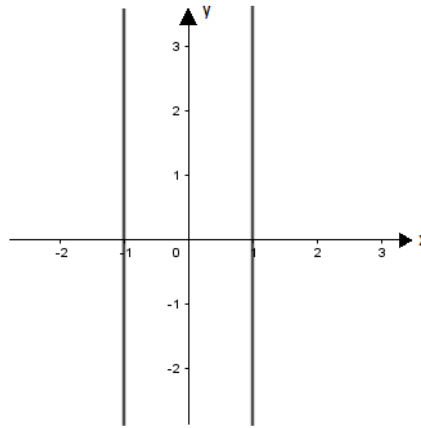
com  $a', b' \in A[y]$  e  $c \in A, c \neq 0$ . Obtemos então

$$a'p + b'g = c$$

Agora, como  $p$  não é constante, segue-se que, exceto para um número finito de valores de  $x \in K$ , com  $K$  sendo um corpo algebricamente fechado, a equação  $p(x, y) = 0$  admite solução ( $K$  é algebricamente fechado). Conclui-se que há uma infinidade de valores  $x$  tais que  $c(x) = 0$ , donde  $c = 0$ . Esta contradição mostra que  $p|g$  em  $K[y]$  seguindo, novamente pelo lema de Gauss, que  $p|g$  em  $K[x, y]$ .  $\square$

Desta proposição podemos deduzir que se uma curva algébrica é dada por  $f(x, y) = 0$ , podemos escrever  $f(y)$  como produto de irredutíveis  $f(x, y) = f_1^{\alpha_1} \cdots f_s^{\alpha_s}$  e tomar o produto dos fatores irredutíveis distintos de  $f$ .

**Exemplo 4.1.1:** Seja  $f(x, y) = (x + 1)^2(x - 1)^3$ . A curva que  $f(x, y)$  define é a mesma curva definida por  $g(x, y) = (x + 1)^i(x - 1)^j$  com  $i, j$  inteiros positivos. Note que  $(x + 1)(x - 1)$  é a equação de menor grau que define a curva  $f$  (Nesse caso, é a união de duas retas verticais,  $x = -1$  e  $x = 1$ , em  $\mathbb{R}^2$ ). Veja a figura 4.10.



**Figura 4.10:** União de duas retas verticais:  $x = -1$  e  $x = 1$

Dada uma curva algébrica plana, temos então uma equação de grau mínimo que a define. Mas se  $f(x,y)$  define a curva,  $cf(x,y)$ , com  $c \in K$ , define a mesma curva, como podemos perceber em  $f(x,y) = 3x^2 - x + y$  e  $4f(x,y) = 12x^2 - 4x + 4$ .

Observe que para essas equações algumas propriedades são válidas. Mais especificamente, dados  $f, g \in K[x,y]$ , podemos definir a relação  $f \sim g$ , da seguinte maneira:  $f \sim g \Leftrightarrow f = cg$ ,  $c \in K$ .

Note que a relação  $\sim$  acima definida é uma relação de equivalência, pois possui as propriedades:

1. Reflexiva:  $f \sim f$ , pois  $f = 1f$
2. Simétrica: se  $f \sim g$  então  $g \sim f$ , pois se  $f = cg$ , temos  $g = c^{-1}f$ .
3. Transitiva: se  $f \sim g$  e  $g \sim h$ , então  $f \sim h$ , pois se  $f = cg$  e  $g = dh$ , então  $f = cdh$ .

e portanto determina em  $K[x,y]$  subconjuntos disjuntos, as chamadas classes de equivalência, aqui denotadas por  $[f]$  (a classe de equivalência de  $f$ ).

$$\begin{aligned} [f] &= \{g \in K[x,y] \mid f \sim g\} \\ &= \{g \in K[x,y] \mid f = cg, c \in K\} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.1.2:** Seja  $f(x,y) = 3x - y$ ,  $K = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [f] &= \{g \in K[x,y] \mid f \sim g\} \\ &= \{g \in K[x,y] \mid g = cf, c \in K\} \\ &= \{g \in K[x,y] \mid g = 3cx + cy\} \end{aligned}$$

Essa classe é formada por todas as equações polinomiais que definem a curva  $f(x,y) = 3x - y$  (figura 4.11).

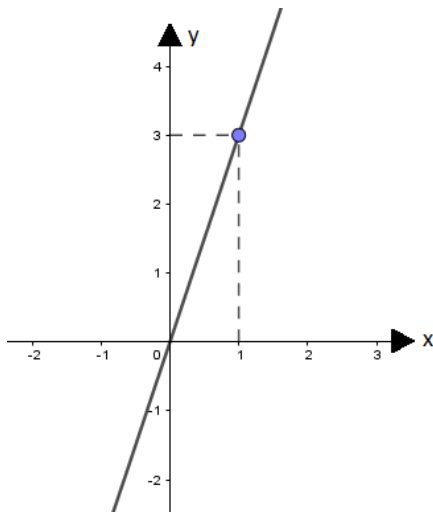


Figura 4.11: Curva definida por  $f(x,y) = 3x - y$

A Definição 4.1 nos diz o que é uma curva algébrica plana, mas não nos dá uma unicidade em sua equação. Podemos então melhorar essa definição substituindo-a pela seguinte, onde passamos a identificar “curva” com a sua equação.

**Definição 4.3:** Uma *curva algébrica plana afim* é uma classe de equivalência de polinômios não constantes  $f \in K[x,y]$ , módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por alguma constante.

A partir desse momento, uma curva neste capítulo significará curva algébrica afim. Assim, a equação de uma curva é qualquer um dos polinômios na classe de sua definição.

**Exemplo 4.1.3:** Sejam

$$f : x + y = 0 \quad \text{e} \quad g : 2x + 2y = 0$$

Neste caso,  $g$  é múltiplo de  $f$  pela constante 2 (figura 4.12).

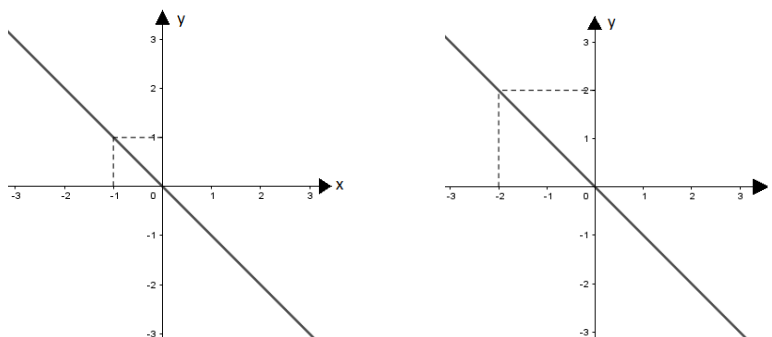


Figura 4.12:  $f : x + y = 0$  e  $g : 2x + 2y = 0$

Segue alguns conceitos básicos que usaremos no decorrer dos nossos estudos sobre curvas algébricas planas:

**Definição 4.4:** Dizemos que uma curva *está definida sobre o corpo*  $K_0$ , subcorpo de  $K$ , se ela admite uma equação a coeficientes em  $K_0$ .

**Definição 4.5:** O *traço* de uma curva é o conjunto das soluções da equação. E o *grau* de uma curva  $f$  é o grau de sua equação, e será denotado por  $gr(f)$ . Qualquer representante da curva  $f$  tem o mesmo grau.

**Definição 4.6:** Uma curva é *irredutível* se admite uma equação que é um polinômio irredutível.

**Definição 4.7:** As *componentes irredutíveis* de uma curva  $f$  são as curvas definidas pelos fatores irredutíveis de  $f$ .

**Definição 4.8:** A *multiplicidade de uma componente*  $p$  de  $f$  é o expoente com que o fator  $p$  ocorre na decomposição de  $f$ ; quando esse expoente é maior ou igual a 2, dizemos que  $p$  é componente múltipla de  $f$ .

**Exemplo 4.1.4:** Considere  $K = \mathbb{C}$ . Fatorando a equação:  $f(x,y) = y^2 - (x+4)^2$ , temos  $f(x,y) = (y - (x+4)) \cdot (y + (x+4))$ . Assim, podemos dizer que:

- O Traço da curva  $f$  é o conjunto de soluções da equação  $y^2 - (x+4)^2 = 0$ .
- O grau da curva  $f$  é igual a 2.
- A curva  $f(x,y) = y^2 - (x+4)^2 = (y + (x+4)) \cdot (y - (x+4))$  não é irredutível.
- As componentes irredutíveis de  $f$  são  $(y + (x+4))$  e  $(y - (x+4))$ .

Usaremos aqui, conceitos de álgebra linear que o leitor, caso necessite de algum esclarecimento, pode consultar em [6].

**Definição 4.9:** Um *referencial* ou *sistema de coordenadas afim* no plano  $K^2$  consiste na escolha de um ponto  $O \in K^2$ , chamado *origem do referencial*, e de uma base  $\{v_1, v_2\}$  do espaço vetorial  $K^2$ . O *referencial canônico* é dado por

$$O = (0,0), \quad v_1 = (1,0), \quad v_2 = (0,1)$$

O *vetor coordenadas* de um ponto  $P \in K^2$  em relação a um referencial

$$\mathbb{R} = \{0, \{v_1, v_2\}\}$$

é o par  $(P)_R = (x_1, x_2) \in K^2$  tal que

$$P = O + x_1 v_1 + x_2 v_2. \tag{4.1}$$

**Exemplo 4.1.5:** Seja  $K = \mathbb{R}$ ; Se

$$P = (-2, 4)$$

Então

$$P = (0, 0) - 2(1, 0) + 4(0, 1)$$

Uma *transformação afim* ou *afinidade* em  $K^2$  é uma aplicação  $T : K^2 \rightarrow K^2$  composta de uma translação com um isomorfismo linear.

Toda transformação afim é da forma  $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ , onde

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

com  $\det(a_{ij}) \neq 0$ .

A composta de duas afinidades é uma afinidade, e a inversa de uma afinidade também.

Denotando

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}), \quad v_2 = (a_{12}, a_{22}), \quad O = (a_1, a_2)$$

podemos interpretar as equações (4.2) como as que relacionam

$$P = (y_1, y_2) \text{ com } (P)_R = (x_1, x_2)$$

E ainda, podemos considerar as relações (4.1) definindo a afinidade

$$(x_1, x_2) \rightarrow O + x_1v_1 + x_2v_2$$

**Definição 4.10:** Dizemos que a afinidade  $T$  e o referencial  $R$  são associados se

$$T(P)_R = P \quad (\forall P \in K^2)$$

Assim, temos dois casos no processo de mudança de coordenadas:

1. Dada uma afinidade  $T$ , podemos olhar a relação

$$(y_1, y_2) = T(x_1, x_2)$$

como expressão que fornece novas coordenadas de um mesmo ponto em termos das antigas; os pontos ficam e as coordenadas se movem.

2. Considerar  $T$  agindo sobre os pontos do plano:  $(y_1, y_2)$  é a nova posição de  $(x_1, x_2)$ , com as coordenadas todas tomadas em relação ao referencial canônico.

## 4.2 Interseções de Curvas Planas

Problemas cuja solução equivale a encontrar interseção de curvas sempre aparecem nos livros didáticos do Ensino Básico. Nesta seção estudaremos este tema e veremos que a interseção de duas curvas sem componentes em comum é finita. Lembremos que  $K$  é um corpo algebricamente fechado.

### 4.2.1 Finitude da Interseção

Sejam  $f, g \in K[x, y]$  sem fatores irredutíveis em comum. Temos que  $f$  e  $g$  determinam curvas distintas. Sobre tais polinômios  $f$  e  $g$  existe uma relação

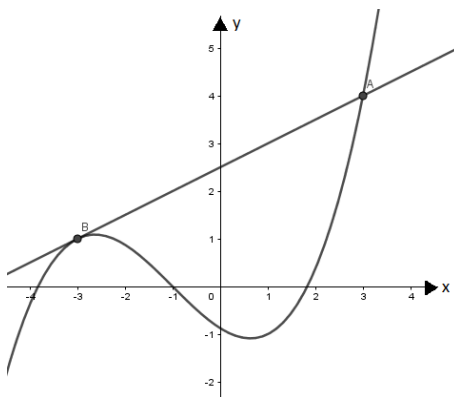
$$af + bg = c(x)$$

onde  $a, b \in K[x, y]$ , enquanto  $c$  é um polinômio apenas na variável  $x$ , não nulo. (O resultado é análogo quando trocamos  $x$  por  $y$ .) Este resultado pode ser verificado em ([10], pág. 19).

A equação  $f(x) = 0$  (em uma variável) admite no máximo um número finito de soluções se  $f \in K[x]$  é um polinômio não constante. Se  $f(x)$  tem grau  $n$ ,  $f(x)$  tem no máximo  $n$  raízes em  $K$ . Assim, é claro que o número de raízes comuns de dois polinômios  $f(x)$  e  $g(x)$  é finito. O que podemos dizer para polinômios de duas variáveis? A partir de agora, vamos usar  $\#$  para indicar a cardinalidade das interseções. Vamos verificar alguns exemplos:

**Exemplo 4.2.1:** Considere as curvas  $f(x, y) = 4y^2 - x^4$  e  $g(x, y) = 2y + x^2$ . Conforme a figura 4.9 Note que  $g$  é componente comum de  $f$ . Temos que  $\#f \cap g = \infty$ .

**Exemplo 4.2.2:** Considere a curva  $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8y - 7$  e a reta  $g(x, y) = x - 2y + 5$ . Temos que  $\#f \cap g = 3$  pontos (figura 4.13).



**Figura 4.13:** As interseções são:  $A(3, 4)$  e  $B(-3, 1)$ . Aqui  $B$  é “contado duas vezes”. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Nos exemplos acima temos duas curvas com interseção infinita (figura 4.9) e duas com interseção finita (figura 4.13). O que podemos falar em geral? Para determinar a interseção  $f, g$  podemos resolver o sistema de equações a duas incógnitas.

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 5x - 8y - 7 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é um conjunto finito de pontos de interseção entre  $f$  e  $g$ , e este resultado é equivalente, na linguagem geométrica, à seguinte proposição:



**Proposição 4.11:** *A interseção de duas curvas algébricas planas sem componentes em comum é finita.*

*Demonstração.* Nos polinômios  $f, g \in K[x, y]$  que não admitem fator comum, obtemos as relações

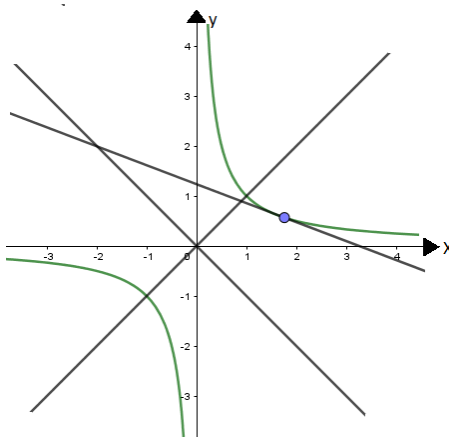
$$af + bg = c(x) \tag{4.3}$$

e

$$uf + vg = w(y) \tag{4.4}$$

onde  $a, b, c, u, v, w$  são polinômios,  $c(x), w(y)$  são não nulos e envolvem apenas a variável indicada. Fazendo  $f = g = 0$ , temos em (4.3),  $c(x) = 0$  e em (4.4),  $w(y) = 0$ . Assim  $(x_0, y_0) \in K^2$  tal que  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$  deve satisfazer  $c(x_0) = 0$  e  $w(y_0) = 0$ . Mas  $c(x)$  e  $w(y)$  são polinômios de uma variável e, portanto, tem uma quantidade finita de raízes. Concluimos então que a quantidade de pontos  $(x_0, y_0)$  de  $K^2$  tal que  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$  é finita.  $\square$

**Exemplo 4.2.3:** Consideremos as interseções da hipérbole  $f : xy = 1$  com a reta  $l : ax + by = c$  (figura 4.14).



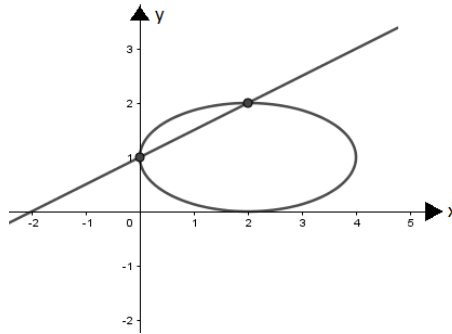
**Figura 4.14:** Interseções da hipérbole  $f : xy = 1$  com a reta  $l : ax + by = c$ . Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Na figura 4.14, podemos observar que:

- As retas  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = -x$  não cortam a hipérbole, em pontos reais;
- Em geral, há duas interseções distintas, reais ou complexas:  $y = x$  corta  $f$  nos pontos  $(x, y)$ ,  $(-x, -y)$ ;
- As retas tangentes têm apenas um ponto de interseção que, intuitivamente, deve ser contado duas vezes.

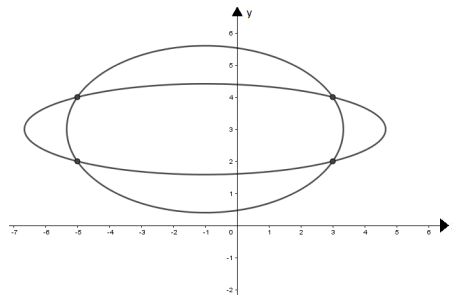
**Exemplo 4.2.4:** Consideremos as interseções entre a elipse  $f : x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$  e a reta  $g : x - 2y + 2 = 0$  (figura 4.15)

Na figura 4.15, observamos que existem duas interseções distintas, reais:  $g$  corta  $f$  nos pontos  $(0, 1)$  e  $(2, 2)$ .



**Figura 4.15:** Interseções entre a elipse  $f : x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$  e a reta  $g : x - 2y + 2 = 0$ . Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

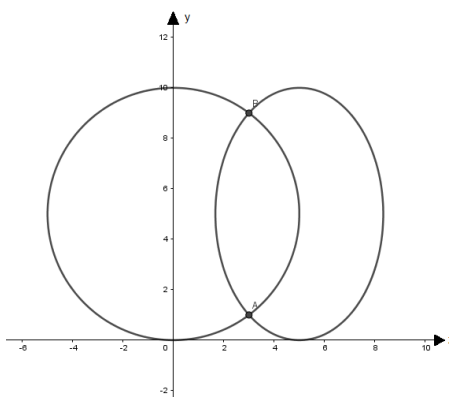
**Exemplo 4.2.5:** Consideremos as interseções entre as elipses  $f : x^2 + 16y^2 + 2x - 96y + 113 = 0$  e  $g : 9x^2 + 25y^2 + 18x - 150y + 65 = 0$  (figura 4.16)



**Figura 4.16:** Interseções entre as elipses  $f : x^2 + 16y^2 + 2x - 96y + 113 = 0$  e  $g : 9x^2 + 25y^2 + 18x - 150y + 65 = 0$ . Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Na figura 4.16, observamos que existem quatro interseções distintas, reais:  $f$  corta  $g$  nos pontos  $(-5, 2)$ ,  $(-5, 4)$ ,  $(3, 2)$  e  $(3, 4)$ .

**Exemplo 4.2.6:** Consideremos as interseções entre a elipse  $f : x^2 + y^2 - 10y = 0$  e o círculo  $g : 9x^2 + 4y^2 - 90x - 40y + 225 = 0$  (figura 4.17)



**Figura 4.17:** Interseções entre a elipse  $f : x^2 + y^2 - 10y = 0$  e o círculo  $g : 9x^2 + 4y^2 - 90x - 40y + 225 = 0$ . Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Na figura 4.17, observamos que existem duas interseções reais distintas:  $f$  corta  $g$  nos pontos  $(3, 1)$  e  $(3, 9)$ . E ainda temos duas interseções complexas nos pontos  $(15, 5 + 10i\sqrt{2})$  e  $(15, 5 - 10i\sqrt{2})$ .

Na próxima seção, descreveremos o processo da resultante para a determinação dos pontos de interseção.

### 4.3 A Resultante

Como encontrar a interseção de duas curvas? Há casos bem simples como por exemplo, para calcular a interseção de  $f : y - x = 1$  e  $g : y - 2x = 3$ , basta resolvermos o sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$$

Isolando  $y$  na segunda equação:

$$y - 2x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 + 2x$$

Substituindo  $y$  na primeira equação:

$$x - y = 1 \quad \Rightarrow \quad x - (3 + 2x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

E portanto,

$$y = 3 + 2 \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad y = -5$$

Temos então que a solução do sistema é o par ordenado  $(-4, -5)$  (figura 4.18).



Agora, qual a importância da resultante? Note que no exemplo acima, encontrar as interseções de  $f$  e  $g$  é resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Isolando  $y$  na segunda equação:

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

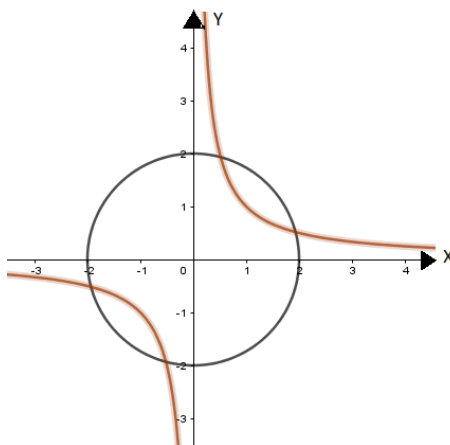
Substituindo  $y$  na primeira equação:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + x^2 = 4$$

O que nos fornece

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

exatamente o valor de  $R(x)$ , o que veremos adiante não ser coincidência. Calculando  $R(x) = 0$ , temos que  $R(x)$  tem 4 raízes complexas, o que nos fornece 4 interseções. A figura a seguir nos mostra essas interseções, que são todas reais, e têm para abscissas as soluções dessa última equação resultante (figura 4.19).



**Figura 4.19:** Interseção do Círculo com a Hipérbole. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Ainda sobre o cálculo de  $R(x) = 0$ , temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser verificada em [10]

**Proposição 4.12:** *Sejam  $f, g \in K[x, y]$*

$$\begin{cases} f = a_d(x)y^d + \dots + a_0(x), \\ g = b_e(x)y^e + \dots + b_0(x), \end{cases}$$

onde  $a_i, b_j$  são polinômios na variável  $x$  a coeficientes no corpo  $K$ . Então, para cada

$x_0$  temos

$$R_{f,g}(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_d(x_0) = b_e(x_0) = 0 \\ \text{ou} \\ f(x_0,y), g(x_0,y) \text{ admitem fator comum não constante.} \end{cases}$$

Podemos agora relacionar o cálculo da resultante com o problema de encontrar a interseção de duas curvas. Retornando ao problema da interseção de duas curvas  $f, g$ , observemos que  $R_{f,g}$  é identicamente nulo se, e só se,  $f, g$  admitem componentes em comum, caso em que  $f \cap g$  não é finita.

Quando a interseção é finita, podemos estimar o número de pontos contando o número de suas abscissas, que é limitado pelo grau da resultante  $R(x)$ . Este procedimento é muito grosseiro, pois podem ocorrer vários pontos de interseção com a mesma abscissa.

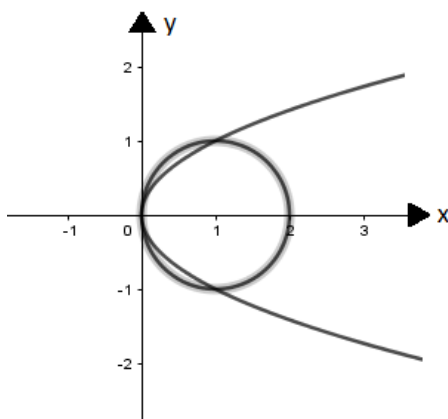
**Exemplo 4.3.2:** Vamos encontrar os pontos de interseção das curvas

$$f = x^2 + y^2 - 2x \quad e \quad g = y^2 - x$$

Para isso selecionamos uma das variáveis, digamos  $x$ , para figurar como parte dos coeficientes. Isto é, consideramos  $f$  e  $g$  como polinômios na variável  $y$ , a coeficientes no anel  $K[x]$ . Tentamos então encontrar os valores de  $x$  para os quais  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  admitem raiz comum. Geometricamente, queremos encontrar as projeções, sobre o eixo dos  $x$ , dos pontos de  $f \cap g$ . Então vamos calcular a resultante de  $f$  e  $g$ :

$$R(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 - 2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(x - 1)^2$$

E,  $R(x) = 0$  implica em  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Pela proposição 4.12,  $f(0,y)$  e  $g(0,y)$  bem como  $f(1,y)$  e  $g(1,y)$  tem fatores em comum. Note que  $f(0,y) = y^2$  e  $g(0,y) = y^2$ , assim  $(0,0) \in f \cap g$  e  $f(1,y) = y^2 - 1$  e  $g(1,y) = y^2 - 1$  nos dá  $(1,1)$  e  $(1,-1)$  na interseção de  $f$  e  $g$ . Teremos então três interseções?



**Figura 4.20:** Interseção do Círculo com a Parábola. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Nesse exemplo, o cálculo da resultante não permite prever o número de interseções, já que  $R(x)$  nos deu dois valores para  $x$ . Aqui temos duas observações a fazer:

1. A raiz  $x = 0$  aparece nas interseções como ponto de tangência. Esse fato a fazer “contada” duas vezes na interseção (significa multiplicidade 2, que veremos à frente).
2. A raiz  $x = 1$  é dupla pois há duas interseções com a mesma abscissa.

Teremos então quatro interseções. Fazendo o mesmo procedimento, agora trocando  $x$  por  $y$ , obtemos:

$$R(y) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & y^2 \\ -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \end{vmatrix} = y^2(y-1)(y+1)$$

$R(y) = 0$  nos dá  $y = 0$ ,  $y = 1$  e  $y = -1$

Agora, os pontos de interseção aparecem fielmente refletidos nas raízes da resultante. A multiplicidade dois da raiz  $y = 0$  persiste, pois ela corresponde a um fenômeno geométrico, que diz respeito à posição relativa das curvas  $f$  e  $g$ , e não depende do particular sistema de coordenadas empregado.

O cálculo da resultante em um domínio  $D$  qualquer é realizado de acordo com a proposição abaixo:

**Proposição 4.13:** Seja  $D$  um domínio. Sejam

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$$

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$$

dois polinômios em  $D[x]$  de grau  $\geq 1$ . Então a resultante  $R_{f,g}$  é uma soma de termos do tipo

$$\pm a_{i_1} \dots a_{i_m} b_{j_1} \dots b_{j_n}, \quad \text{com } i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_n = mn.$$

## 4.4 Multiplicidades

Para qualquer anel de polinômio  $F[x]$ , com  $F$  corpo, subcorpo de  $\mathbb{C}$ , todo polinômio de grau  $n$  admite exatamente  $n$  raízes complexas, contadas com as devidas multiplicidades. Esse resultado pode ser verificado, pelo leitor, em Gallian [4]. Intuitivamente sabemos que essa multiplicidade nos diz que a curva “passa um certo número de vezes” sobre um ponto. Por exemplo, a curva  $f(x) = (x-1)^2$ , pode ser escrita como  $f(x) = (x-1)(x-1)$  e a raiz 1 está sendo “contada duas vezes”. Vamos agora, dar um sentido preciso à essa ideia apresentando a definição de multiplicidade.

### 4.4.1 Interseção de uma curva com uma reta

Vamos trabalhar com curvas no plano, do tipo  $y = f(x)$ . Consideraremos  $K$  corpo (subcorpo de  $\mathbb{C}$ ) e as raízes complexas de  $f(x) = y \in K[x]$ . Seja  $f$  uma curva e

$l$  uma reta de equação  $y = ax + b$ . Os pontos de  $f \cap l$  podem ser obtidos eliminando  $y$  e resolvendo a equação

$$f_l(x) := f(x, ax + b) = 0$$

Temos duas possibilidades para  $f_l(x)$ , identicamente nula ou não.

- Se  $f_l(x) \equiv 0$ , temos que a curva  $f$  se anula em todos os pontos da reta  $l \Rightarrow l$  é uma componente de  $f$ ;
- Se  $f_l(x) \not\equiv 0$ , ela não se anula em todos os pontos da reta  $l \Rightarrow f \cap l = \emptyset$ .

Agora, se  $f_l(x)$  é um polinômio não constante, então

$$f_l(x) = c \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{m_i}, \in \mathbb{C}[x]$$

onde  $c$  é uma constante e os  $x_i$  são abscissas dos pontos de interseção (complexos).

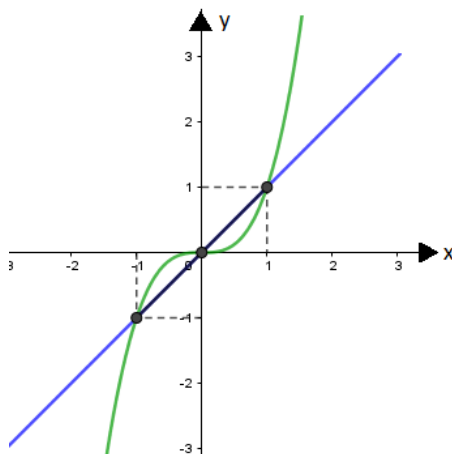
**Exemplo 4.4.1:** Considere a curva  $f : y - x^3 = 0$  e a reta  $l : y - x = 0$ .

$$f_l(x) = f(x, x) = -x^3 + x$$

$$f_l(x) = x(-x^2 + 1)$$

$$f_l(x) = x(x + 1)(x - 1)$$

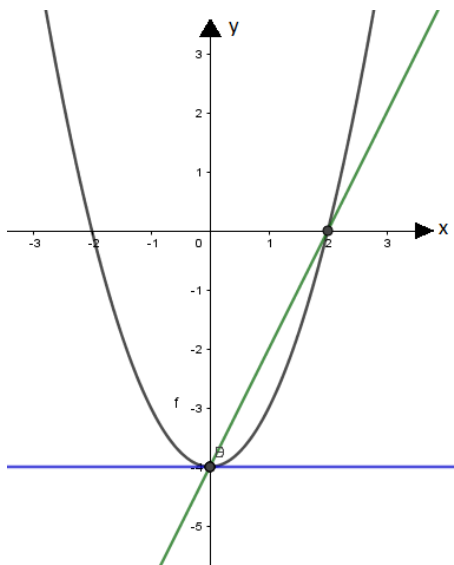
Resolvendo a equação  $f_l(x) = 0$ , temos que  $x = 0$ ,  $x = 1$  ou  $x = -1$ , que são as abscissas dos pontos de interseção (figura 4.21).



**Figura 4.21:** Interseção entre a curva  $f : y - x^3 = 0$  e a reta  $l : y - x = 0$ , gráfico em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.4.2:** Considere a curva  $f : y - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4$  e as retas  $l_1 : y = -4$  e  $l_2 : y = 2x - 4$ . (figura 4.22)





**Figura 4.22:** Interseção entre a curva  $f : y - x^2 + 4 = 0$  e as retas  $l_1 : y = -4$  e  $l_2 : y = 2x - 4$ , gráfico em  $\mathbb{R}$ .

$$f_{l_1}(x) = f(x, -4) \Rightarrow f_{l_1}(x) : x^2 = x \cdot x;$$

$$f_{l_1}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{uma interseção})$$

$$f_{l_2}(x) = f(x, 2x - 4) \Rightarrow f_{l_2}(x) : x^2 - 2x = x(x - 2);$$

$$f_{l_2}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \quad (\text{duas interseções})$$

Note que a reta  $l_1$  é tangente à curva  $f$  em  $x = 0$ . Essa interseção está sendo “contada” duas vezes, isso é indicado pela potência do fator  $(x - 0)$  de  $f_{l_1}$ . Já a reta  $l_2$  é secante à curva, suas interseções são “contadas” uma única vez. Generalizamos essa “contagem” com a definição seguinte:

**Definição 4.14:** A multiplicidade ou índice de interseção de  $l, f$  no ponto  $P$  é dada por

$$(l, f)_P = \begin{cases} 0 & \text{se} & P \notin l \cap f \\ \infty & \text{se} & P \in l \subset f \\ m_i \in \mathbb{N} & \text{se} & P = (x_i, ax_i + b) \in l \cap f \quad \text{e} \quad l \not\subset f \end{cases}$$

Aqui,  $m_i$  é da definição de  $f_l(x) = c \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{m_i}$ .

Para compreendermos esse conceito, veremos alguns exemplos.

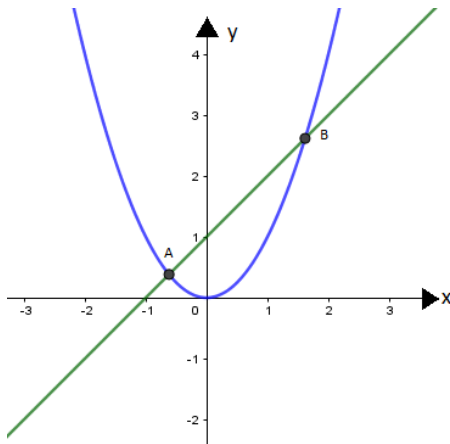
**Exemplo 4.4.3:** Sejam

$$f = y - x^2 \quad \text{e} \quad l : y - (ax + b) = 0.$$

- Se  $a^2 + 4b \neq 0$ , temos dois pontos de interseção distintos. (figura 4.23).

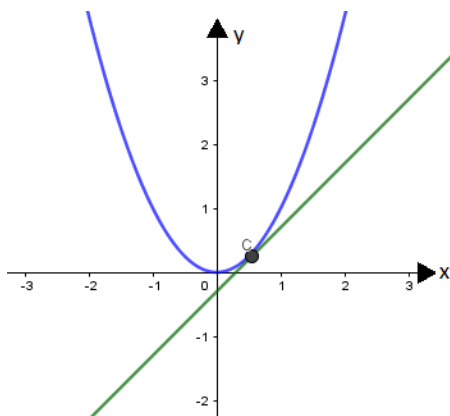
Note que  $f_l(x) = ax + b - x^2$  e  $f_l(x) = 0$  nos dá  $x = A$  e  $x = B$ , onde

$$f_l(x) = -(x - A)(x - B) \Rightarrow (l, f)_A = 1 \text{ e } (l, f)_B = 1$$



**Figura 4.23:** Duas interseções distintas, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

- Se  $a^2 + 4b = 0$ , temos um ponto de interseção com multiplicidade 2. (figura 4.24). Neste caso,  $f_l(x) = -(x - C)^2$  e  $(l, f)_c = 2$ .



**Figura 4.24:** Uma interseção com multiplicidade 2, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

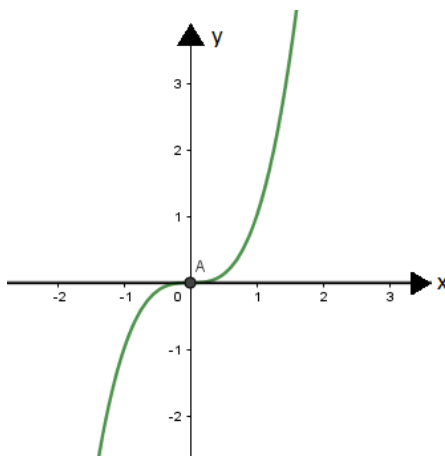
**Exemplo 4.4.4:** Sejam

$$f = y - x^3 \quad \text{e} \quad l : ax + by + c = 0$$

- Se  $b \neq 0$  e  $a = c = 0$ , temos uma interseção na origem com multiplicidade 3. (figura 4.25)

Note que  $f_l(x) = (ax + b) + x^3$  e  $f_l(x) = 0$  nos dá  $x = A$ , onde

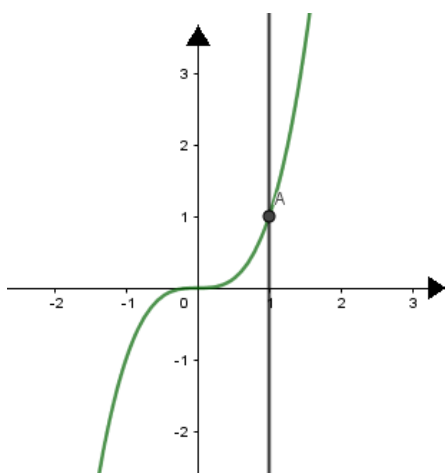
$$f_l(x) = -(x - A)^3 \Rightarrow (l, f)_A = 3$$



**Figura 4.25:** Uma interseção com multiplicidade 3, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

- Se  $a \neq 0$  e  $b = 0$  temos uma interseção com multiplicidade 1. (figura 4.26)

Neste caso,  $f_l(x) = -(x - A)$  e  $(l, f)_A = 1$ .



**Figura 4.26:** Uma interseção com multiplicidade 1, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

- Se  $b \neq 0$ , podemos ter 1, 2 ou 3 pontos de interseção. (figura 4.27)

Calculando  $f_l(x)$  temos:  $f_l(x) = (ax + b) - x^3$  e  $f_l(x) = 0$  nos dá  $x = A$ ,  $x = B$  e  $x = C$  onde:

$$f_l(x) = -(x-A)(x-B)(x-C) \quad \Rightarrow \quad (l, f)_A = 1, \quad (l, f)_B = 1 \quad e \quad (l, f)_C = 1$$

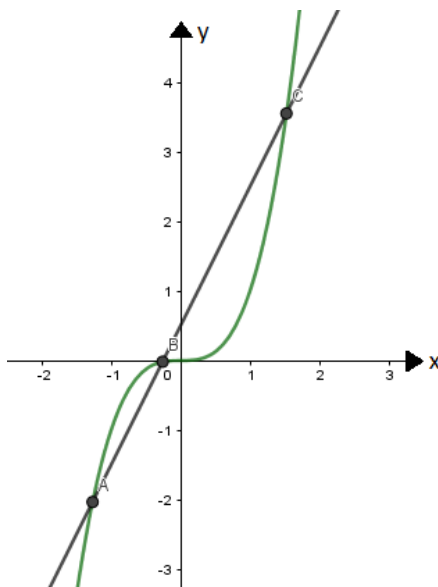


Figura 4.27: 3 interseções com multiplicidade 1, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.4.5:** Sejam

$$f = y^2 - x^2(x + 1), \quad \text{e} \quad l_a : y - ax = 0.$$

A origem  $O$  absorve pelo menos duas interseções. Se  $a = \pm 1$ , a multiplicidade de interseção  $(l, f)_O = 3$ . (figura 4.28)

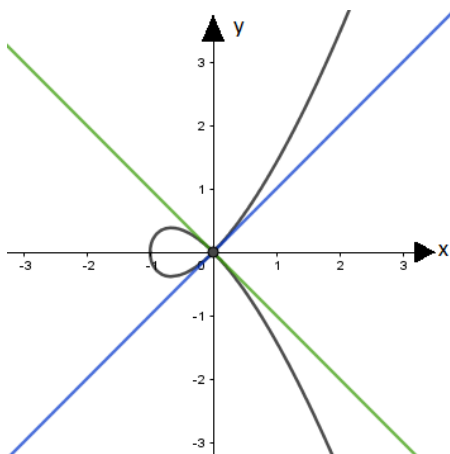


Figura 4.28: Multiplicidade 3, gráfico em  $\mathbb{R}$ .

### 4.4.2 Pontos Múltiplos

Na seção anterior definimos multiplicidade de interseção de uma curva e uma reta. Veremos agora a noção de multiplicidade de um ponto sobre uma curva, que será independente de qual reta estaremos interceptando.

**Exemplo 4.4.6:** Consideremos a curva  $f : y^2 - x^2(x + 1) = 0$  e as retas  $l_1 : y - x = 0$ ,

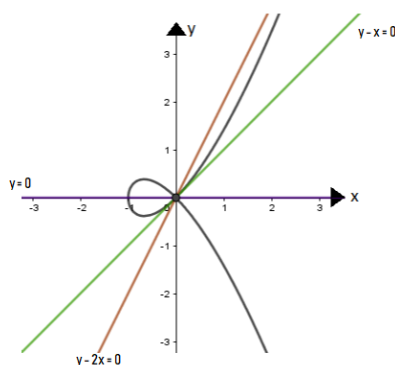
$l_2 : y = 0$  e  $l_3 : y - 2x = 0$ .

$$f_{l_1}(x) = x^2 - x^2(x+1) \Rightarrow f_{l_1}(x) = x^2 - x^3 - x^2 \Rightarrow f_{l_1}(x) = -x^3$$

$$f_{l_2}(x) = 0^2 - x^2(x+1) \Rightarrow f_{l_2}(x) = -x^3 - x^2 \Rightarrow f_{l_2}(x) = -x^2(x+1)$$

$$f_{l_3}(x) = 4x^2 - x^3 - x^2 \Rightarrow f_{l_3}(x) = 3x^2 - x^3 \Rightarrow f_{l_3}(x) = -x^2(x-3)$$

Note que a curva  $f$  obteve, no ponto  $(0,0) = 0$  duas multiplicidades diferentes,  $(l_1, f)_0 = 3$ ,  $(l_2, f)_0 = 2 = (l_3, f)_0$ . Nem sempre um ponto terá multiplicidades iguais. Isso dependerá da reta. Mas em geral, podemos dizer que  $(l, f)_p$  possui sempre uma cota inferior (figura 4.29).



**Figura 4.29:** Multiplicidade de um ponto sobre uma curva. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 4.15:** *Seja  $f$  uma curva e seja  $P$  um ponto de  $f$ . Existe um inteiro  $m = m_P(f) \geq 1$ , tal que, para toda reta  $l$  passando por  $P$ , temos  $(l, f)_P \geq m$ , ocorrendo a desigualdade estrita para no máximo  $m$  retas e no mínimo uma.*

*Demonstração.* Suponhamos, sem perda de generalidade,  $P = 0$ . Escrevamos  $f = f_m + \dots + f_d$ , com  $f_i$  homogêneo de grau  $i$  para  $m \leq i \leq d$ , e  $f_m \neq 0$ . Um polinômio  $F$  é homogêneo de grau  $d$  se todos os monômios com coeficientes não nulos tem o mesmo grau. Lembrando que quando  $P \in f$ , temos  $m \geq 1$ . Mudando de coordenadas se necessário, podemos supor  $x$  não divide  $f_m$ . Assim

$$f(0, y) = y^m(f_m(0, 1) + \dots + f_d(0, 1)y^{d-m})$$

e  $f_m(0, 1) \neq 0$ . Daí segue que  $(x_0, f)_O = m$ . Para as demais retas passando por  $O$ , ponhamos  $l_t = y - tx$ . Temos então,

$$f(x, tx) = x^m(f_m(1, t) + f_{m+1}(1, t)x + \dots + f_d(1, t)x_{d-m}).$$

Deduzimos que  $(l_t, f)_O \geq m$ , ocorrendo igualdade se, e só se,  $f_m(1, t) \neq 0$ . Como  $x$  não divide  $f_m$ , segue-se que  $f_m(1, t)$  é um polinômio em  $t$  de grau  $m \geq 1$  e que portanto se anula para ao menos um e no máximo  $m$  valores de  $t$  distintos.  $\square$

**Definição 4.16:** O inteiro  $m = m_P(f)$  é denominado a *multiplicidade do ponto  $P$  na curva  $f$  ou multiplicidade de  $f$  em  $P$* .

No exemplo 4.4.6, temos  $m_p(f) = 2$ , com  $P = (0,0)$ .

Voltando à curva deste exemplo,  $f : y^2 - x^2(x + 1) = 0$ , temos que o ponto  $(-1, 0) \in f$ , e fazendo

$$\begin{aligned} f(x + (-1), y - 0) &= f(x - 1, y) = y^2 - (x - 1)^2((x - 1) + 1) \\ \Rightarrow f(x - 1, y) &= y^2 - (x^2 - 2x + 1)(x) \\ \Rightarrow f(x - 1, y) &= y^2 - x^3 + 2x^2 - x \\ \Rightarrow f(x - 1, y) &= y^2 - x^3 - 2x^2 \\ \Rightarrow f(x - 1, y) &= -x + y^2 - 2x^2 - x^3 \\ \Rightarrow f(x - 1, y) &= f_1(x, y) + y^2 - 2x^2 - x^3 \end{aligned}$$

onde  $f_1(x, y) = x$  é um polinômio homogêneo de grau 1.

Efetuando o cálculo da multiplicidade de  $P = (-1, 0)$  em  $l : y = x + 1$ , temos:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 - x^2(x + 1) &= (x + 1)(x + 1 - x^2) = (x + 1)(-x^2 + x + 1) \\ (l, f)_P &= 1, \quad \text{ou seja, } m_P(f) = 1 \\ E \quad f(x - 1, 0) &= f_1(x, y) + (\text{termos de grau} > 1) \end{aligned}$$

Agora, para  $Q = (0, 0)$ , temos:

$$\begin{aligned} f(x + 0, y + 0) &= y^2 - x^2(x + 1) = y^2 - x^3 - x^2 = y^2 - x^2 - x \\ f(x + 0, y + 0) &= f_2(x, y) - x \end{aligned}$$

E, pelo exemplo 4.4.6, vimos que  $m_Q(f) = 2$ .

Em geral, se  $P \notin f$ , convencionamos  $m_P(f) = 0$ , agora se  $P = (x_0, y_0) \in f$ , escrevemos

$$f(x + x_0, y + y_0) = f_m(x, y) + (\text{termos de grau} > m).$$

O polinômio homogêneo  $f_m(x_0, y_0)$  pode ser decomposto de maneira única,

$$f_m = \prod (a_i x + b_i y)^{e_i},$$

onde os fatores lineares  $a_i x + b_i y$  são retas distintas. As retas

$$l_i = a_i(x - x_0) + b_i(y - y_0)$$

são as retas tangentes de  $f$  em  $P$ . O expoente  $e_i$  é a *multiplicidade da tangente  $l_i$* .  $(l, f)_P > m = m_P(f)$  para  $l$  igual a uma das retas tangentes a  $f$  em  $P$ .

Como podemos ver no exemplo 4.4.6, as retas  $l_1, l_2$  e  $l_3$  são tangentes à curva

$f : y^2 - x^2(x + 1) = 0$  no ponto  $P = (0,0)$ , sendo  $f_{l_1}(x) = -x^3$ ,  $f_{l_2}(x) = -x^2(x + 1)$  e  $f_{l_3}(x) = -x^2(x - 3)$  com multiplicidades  $(l_1, f)_0 = 3$ , e  $(l_2, f)_0 = (l_3, f)_0 = 2$ .

Um ponto  $P$  de uma curva  $f$  é *liso*, ou *não singular* ou *simples* em  $f$ , ou ainda  $f$  é *lisa*, ou *não singular* ou *simples* em  $P$  se  $m_P(f) = 1$ ; caso contrário, dizemos ser *singular*. A curva  $f$  é *lisa* ou *não singular* se  $m_P(f) = 1$  para cada  $P \in f$ . Se  $m_P(f) = 2, 3, \dots, m$ ,  $P$  é dito um ponto *duplo*, *triplo*, ..., *m-uplo*.

Ainda observando o exemplo 4.4.6, podemos dizer que o ponto  $P = (0,0)$  na curva  $f : y^2 - x^2(x + 1) = 0$ , é um ponto duplo.

Um ponto  $P$  de uma curva é singular se  $m_p(l) > 1$ . Nesse caso, é importante saber encontrá-los. A proposição abaixo nos ajuda nessa tarefa.

**Proposição 4.17:** Temos que:

1. Um ponto  $P \in f$  é liso se, e só se, ao menos uma das derivadas parciais  $f_x, f_y$  não se anula em  $P$ .
2. Se  $P = (a,b) \in f$  é liso, então a única tangente a  $f$  em  $P$  é dada por

$$f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) = 0.$$

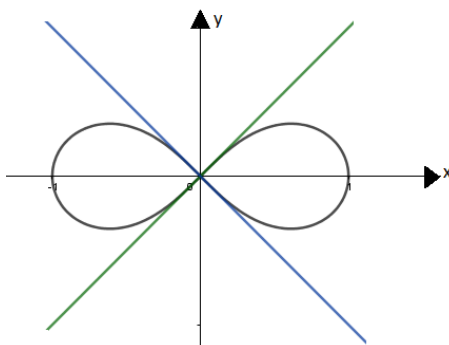
*Demonstração.* Ambas as afirmativas decorrem da fórmula de Taylor,

$$f(x + a, y + b) = f(a, b) + f_x(a,b)x + f_y(a,b)y + g(x, y),$$

onde todos os termos de  $g$  têm grau  $\geq 2$ . □

**Exemplo 4.4.7:** A *Lemniscata*, curva definida pela equação  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  passa duas vezes pela origem formando um “nó”. As retas  $y = \pm x$  são tangentes a essa curva na origem  $P = (0,0)$  (figura 4.30).

Note que  $f_x = 0$  e  $f_y = 0$  em  $P = (0,0)$ , assim  $P$  é um ponto singular e  $m_p(f) = 2$ .



**Figura 4.30:** Lemniscata. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.4.8:** A *Cissóide*, curva definida por  $x^2 - y(y^2 + x^2) = 0$ , também passa duas vezes pela origem, mas tão rapidamente que só vemos um “bico”, chamado cúspide, com tangente vertical  $x = 0$ .(figura 4.31)

Note que  $f_x = 0$  e  $f_y = 0$  em  $P = (0,0)$ , assim  $P$  é um ponto singular e  $m_p(f) = 2$ .

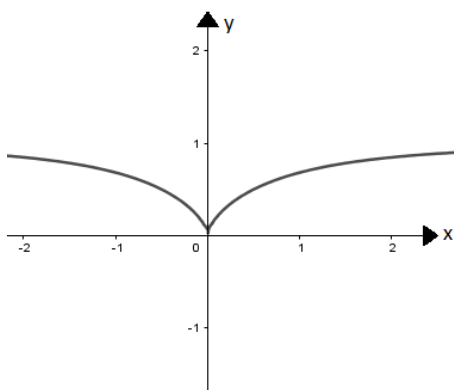


Figura 4.31: Cissóide. Gráfico em  $\mathbb{R}$ .

Algumas curvas tem pontos singulares. Mas como eles podem aparecer? A proposição seguinte nos diz que uma curva  $f$  não pode ter infinitos desses pontos.

**Proposição 4.18:** *Se  $f$  é uma curva sem componentes múltiplas, então o conjunto dos pontos singulares de  $f$  é finito.*

*Demonstração.* Uma componente irredutível  $p$  de  $f$  é múltipla de  $p^2|f$ . O conjunto dos pontos singulares é dado pelas equações  $f = f_x = f_y = 0$ . Ora, ao menos uma das derivadas parciais, digamos  $f_x$ , é não identicamente nula. Afirmamos que  $f = f_x = 0$  admite só um número finito de soluções. Do contrário, pela proposição 4.11, existiria componente irredutível  $p$  comum a  $f$  e  $f_x$ . Mas isto acarreta que  $p^2|f$ , absurdo.  $\square$

**Proposição 4.19:** *Se  $f$  uma curva sem componentes múltiplas, então, para cada ponto  $P$  do plano, e para cada reta  $l$  contendo  $P$ , com exceção de um número finito,  $l$  encontra  $f$  fora de  $P$  em  $gr(f) - m_p(f)$  pontos distintos.*

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente  $f$  irredutível. Sem perda de generalidade, podemos supor  $P = (0,0)$ . Ponhamos  $m = m_p(f)$ ,  $d = gr(f)$  e lembremos a convenção  $m = 0 \Leftrightarrow P \notin f$ . Podemos escrever  $f = f_m + \dots + f_d$ , com  $f_i$  homogêneo de grau  $i$  para  $m \leq i \leq d$  e  $f_m f_d \neq 0$ . Seja  $t$  uma nova indeterminada. Vamos definir

$$g(x, t) := x^{-m} f(x, tx) = f_m(1, t) + \dots + x^{d-m} f_d(1 - t).$$

Podemos verificar que  $g(x, t)$  é irredutível em  $K[x, t]$ . Em particular,  $g_x$  e  $g$  não têm componente em comum. Logo, existe um número finito de valores  $t_0$  de  $t$  para os quais  $g(x, t_0)$  e  $g_{x_0}(x, t_0)$  admitem raiz comum, que são as raízes múltiplas de  $g(x, t_0)$ . Evitando o número também finito de valores que anulam  $f_m(1, t) f_d(1, t)$ , concluímos que  $g(x, t_0)$  é um polinômio em  $x$  de grau  $d - m$ , com esse mesmo número de raízes distintas, e todas  $\neq 0$ . Tendo em conta que  $f(x, t_0 x) = x^m g(x, t_0)$ , concluímos que a reta  $y = t_0 x$  encontra  $f$  conforme anunciado.  $\square$



A proposição acima nos diz que um ponto de multiplicidade  $m$  absorve  $m$  interseções de  $l \cap f$ . De fato, as interseções de  $f$  e a reta  $l$  podem ser encontradas resolvendo a equação  $f_l(x) = f(x, ax + b)$  e  $f_l(x)$  tem o mesmo grau de  $f$ , portanto tem exatamente grau  $f$  raízes complexas. Sabendo que  $l$  encontra  $f$  fora de  $P$  em  $gr(f) - m_p(f)$  pontos distintos,  $l$  interceptará  $f$  em  $P$   $m_p(f)$  vezes.

## Pontos no Infinito

---

Há curvas que não possuem interseção em  $\mathbb{C}$ . Por exemplo  $f(x,y) = y - x + 4$  e  $g(x,y) = y - x + 2$ . Ao trabalharmos com interseção de curvas, seria interessante trabalhar em um plano em que todas as curvas se interceptam. As duas retas mencionadas acima, são paralelas (em  $\mathbb{C}^2$ ), possuem a mesma direção assintótica, e temos a noção intuitiva que se “encontrariam no infinito”.

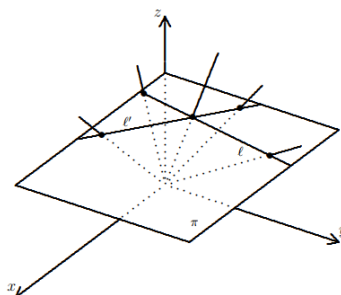
Neste capítulo trataremos do plano projetivo e das curvas projetivas, introduzindo de maneira sistemática os pontos no infinito, atendendo assim ao desejo de dar um tratamento rigoroso aos “pontos que deveriam estar na interseção”.

Esses “pontos” serão apresentados inicialmente como entes da natureza aparentemente diversa dos pontos usuais do plano afim. Mas logo veremos ser possível, e mesmo recomendável, eliminar as aspas; os novos pontos não merecerão no final nenhuma distinção especial com relação a seus parceiros dados a distância finita.

A ideia de acrescentar ao plano usual uma reta no infinito, constituindo um plano projetivo, é devida a Desargues que em 1639 publicou um livro onde pretendia dar uma fundamentação matemática aos métodos de perspectiva empregados por pintores e arquitetos da época.

### 5.1 O Plano Projetivo

Considere o plano  $\pi$  de equação  $Z = 1$ , em  $\mathbb{R}^3$  (figura 5.1).



**Figura 5.1:** Plano Projetivo

Cada ponto do plano  $\pi$  determina uma reta passando pela origem e pelo ponto

dados. E cada reta de  $\pi$  determina um plano que passa pela origem. Sejam as retas  $l$  e  $l'$ :

- Se elas se encontram, seu ponto de interseção representa a reta de interseção dos dois planos associados a  $l, l'$ .
- Se elas são paralelas, os planos que elas definem se cruzam ao longo de uma reta passando pela origem e contida no plano  $Z = 0$ .

Pensando nesse contexto, podemos considerar o conjunto de todas as retas de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem.

**Definição 5.1:** O plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  é o conjunto das retas do espaço tridimensional passando pela origem.

Note que as retas de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem, ou interceptam o plano  $\pi$ , ou estão contidas no plano  $z = 0$ . Vemos então que os pontos de  $\pi$  se identificam naturalmente com um subconjunto de  $\mathbb{P}^2$ .

Essa definição é bem geométrica.

Há também uma definição algébrica do plano projetivo, equivalente a definição dada acima. Considere em  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  a seguinte relação:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow (x, y, z) = t(x', y', z')$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$  não nulo.

Essa é uma relação de equivalência, pois:

1.  $\sim$  é reflexiva

$$(x, y, z) \sim t(x, y, z) \quad \text{basta tomar} \quad t = 1$$

2.  $\sim$  é simétrica

$$\text{Se } (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = t(x_2, y_2, z_2), \quad t \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Se } (x_2, y_2, z_2) \sim (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow (x_2, y_2, z_2) = t^{-1}(x_1, y_1, z_1), \quad t^{-1} \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Se } (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow (x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1)$$

3.  $\sim$  é transitiva

$$\text{Se } (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2, z_2) \sim (x_3, y_3, z_3), \quad \text{temos:}$$

$$(x_1, y_1, z_1) = t_1(x_2, y_2, z_2) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2, z_2) = t_2(x_3, y_3, z_3), \quad \text{com } t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Então, } (x_1, y_1, z_1) = t_1 t_2 (x_3, y_3, z_3) \quad \text{com } t_1 t_2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Logo, } (x_1, y_1, z_1) \sim (x_3, y_3, z_3)$$

A classe de equivalência de  $(x, y, z)$  é:

$$\overline{(x, y, z)} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} / (x, y, z) = t(a, b, c), \text{ para } t \in \mathbb{R}^*\}$$

Note que  $\overline{(x, y, z)}$  é a reta de  $\mathbb{R}^3$  que passa por  $(x, y, z)$  e pela origem  $(0, 0, 0)$ .

O conjunto quociente dessa relação de equivalência

$$\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} / \sim = \left\{ \overline{(x, y, z)} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \right\}$$

é denominado plano projetivo e denotado por  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  ou  $\mathbb{P}^2$  ou ainda  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Assim o plano projetivo é o conjunto das classes de equivalência, isto é, o conjunto das retas de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem. Um elemento de  $\mathbb{P}^2$  é a classe  $\overline{(x, y, z)}$  e será representada por  $(x : y : z)$ .

Assim, denotamos por  $(x : y : z)$  o ponto de  $\mathbb{P}^2$  que representa a reta ligando a origem  $O$  a um ponto  $(x, y, z) \neq O$ . Dizemos que  $x, y, z$  são as *coordenadas homogêneas* do ponto  $(x : y : z)$  relativas à base canônica  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

Por definição, temos que  $(x : y : z) = (x' : y' : z') \Leftrightarrow$  existe constante  $t \neq 0$  tal que  $(x, y, z) = t(x', y', z')$ .

Em geral, fixada uma base qualquer no espaço tridimensional, as coordenadas de um ponto diferente de 0 relativas a essa base são chamadas de *coordenadas homogêneas* do ponto correspondente de  $\mathbb{P}^2$ .

## 5.2 Curvas Projetivas

Definimos no capítulo 4 *curva algébrica* como o conjunto de pontos em  $K^2$  tal que  $f(x, y) = 0$  para  $f \in K[x, y]$  e, considerando a classe de equivalência de polinômios não constantes  $f \in K[x, y]$ , módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por alguma constante, podemos identificar a curva à equação de  $f$ , tendo a definição de curva afim. Note que, no plano projetivo, precisamos tomar mais cuidados. Observe o exemplo abaixo.

**Exemplo 5.2.1:** Seja  $f : y - x^2 = 0$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Vamos analisar se a mesma definição dada para curva afim no plano  $\mathbb{R}^2$  faz sentido para o plano projetivo.

A curva definida por  $f$  é a parábola  $y = x^2$ .

Agora, em  $\mathbb{P}^2$ , no plano projetivo, o ponto  $P = (2 : 4 : 1)$  pertence à curva, pois  $4 = 2^2$ ; mas tomando a coordenada homogênea de  $P = (4 : 8 : 2)$ ,  $P \notin f$ . Então  $P$  pertence ou não à curva?

O fato de  $P$  pertencer à curva não deveria depender da coordenada homogênea escolhida. Assim não é bom trabalharmos, no caso projetivo, com esse tipo de polinômio.

Agora seja  $F = zy - x^2$ . O ponto  $P = (2 : 4 : 1)$  pertence à curva  $F$ , e as coordenadas homogêneas  $P = (4 : 8 : 2)$  continuam satisfazendo a equação de  $F$ . Note que, para  $P = (2\lambda : 4\lambda : \lambda)$ ,  $\lambda \neq 0$  real, temos que as coordenadas homogêneas  $x = 2\lambda$ ,  $y = 4\lambda$  e  $z = \lambda$  satisfazem a equação  $F = 0$ , já que

$$F = zy - x^2 = \lambda(4\lambda) - (2\lambda)^2 = 0$$

Observe que a diferença entre os polinômios  $F$  e  $f$  acima, está no fato de  $F$  ser polinômio homogêneo e  $f$  não. Lembrando que um polinômio  $F$  é homogêneo de grau  $d$  se todos os monômios com coeficientes não nulos tem o mesmo grau.

**Proposição 5.2:** Seja  $F \in K[x,y,z]$  um polinômio homogêneo. Se  $F$  se anula para um conjunto de coordenadas homogêneas de um ponto  $P \in \mathbb{P}^2$  então  $F$  se anula para todas as coordenadas homogêneas de  $P$ .

*Demonstração.* Seja  $P = (x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{P}^2$  e suponha que  $F(P) = 0$  onde  $F$  é polinômio homogêneo de grau  $d$ . Então

$$F(\lambda P) = F(\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0) = \lambda^d F(x_0 : y_0 : z_0) = 0$$

□

Podemos então, definir uma curva no plano projetivo.

Note que, pela definição de ponto em  $\mathbb{P}^2$ , se  $(x : y : z)$  é tal que  $z \neq 0$ , podemos tomar  $(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$  para representar o ponto  $(x : y : z)$ .

E, para cada  $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2$  temos que ou  $z \neq 0$  ou  $z = 0$ , então podemos pensar em  $\mathbb{P}^2$  como a união de dois conjuntos

$$\mathbb{P}^2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 | z \neq 0\} \cup \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 | z = 0\}$$

O conjunto  $\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 | z \neq 0\}$  denotamos por  $U_z$  e veremos que ele pode ser identificado com  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 5.3:** Uma *curva plana projetiva* é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes,  $F \in K[x,y,z]$ , módulo a relação que identifica dois tais polinômios,  $F, G$ , se um for múltiplo constante do outro.

Observe que, se  $F$  é um polinômio homogêneo, a relação

$$F(tx, ty, tz) = t^{gr(F)} F(x, y, z), \quad \text{com } gr(F) = \text{grau de } F$$

mostra que a condição para que o ponto  $(x : y : z)$  pertença ao traço de uma curva projetiva é independente das coordenadas homogêneas. Curvas de grau 1, 2, 3, ... são, como antes, chamadas *retas, cônicas, cúbicas*, etc.

**Exemplo 5.2.2:** Seja  $F(x, y, z) = xz - y^2$ . A curva determinada por  $F$  é uma cônica. Agora, como  $(x : y : z) = (tx : ty : tz)$  para  $t \neq 0$  real, podemos considerar sempre  $z = 0$  ou  $z = 1$ . Note que  $z = 1$  temos  $F(x, y, 1) = x - y^2$ , equação de uma parábola em  $\mathbb{R}^2$  e se  $z = 0$ ,  $F(x, y, 0) = -y^2$  e o ponto sobre a curva  $F$  para  $z = 0$  é  $(1 : 0 : 0)$  pois  $F(x, y, 0) = 0 \Rightarrow y = 0$  e  $x$  qualquer. Note que fazendo  $z = 1$ , temos em  $\mathbb{P}^2$  o conjunto de pontos  $\{(y^2 : y : 1)\}$ .

**Exemplo 5.2.3:** Temos que  $F = ax + by + cz$  é uma reta em  $\mathbb{P}^2$ , polinômio de grau 1. Observe que em  $\mathbb{R}^3$ ,  $F$  é a equação de um plano, mas em  $\mathbb{P}^2$  identificamos cada reta que passa na origem de  $\mathbb{R}^3$  com um ponto.

**Proposição 5.4:** Seja

$$U_z = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2, \quad z \neq 0\}$$

Então a aplicação  $\varphi : (x, y) \mapsto (x : y : 1)$  é bijetiva entre  $\mathbb{R}^2$  e  $U_z \subset \mathbb{P}^2$ .

*Demonstração.* Seja  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_0$  com  $\varphi(x, y) = (x : y : 1)$  e considere  $\psi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\psi : (x : y : z) = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right) \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Note que  $\varphi \circ \psi = id$  e  $\psi \circ \varphi = id$ . □

No plano projetivo, a equação  $Z = 0$  nos fornece a curva  $\{(x : y : 0) \in \mathbb{P}^2\}$  que é uma reta. A essa reta damos o nome de reta no infinito, e seu complementar é  $\mathbb{R}^2$ , assim  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup H$ .

De maneira semelhante temos  $U_x$  e  $U_y$  e,  $\mathbb{P}^2 = U_z \cup U_x \cup U_y$ . Os conjuntos  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  são chamados de abertos afins.

Usando a igualdade  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup H$ , dizemos que os pontos que pertencem ao complementar de  $H(z = 0)$  estão a uma distância finita, e os pontos que pertencem a  $H$  são ditos estarem em uma distância infinita.

As curvas algébricas planas afins  $f(x, y) = 0$  serão consideradas implicitamente como a parte que se acha a distância finita sobre a curva projetiva  $F(x, y, z) = 0$ , em que  $F$  é a homogeneização de  $f$ .

O processo de homogeneizar um polinômio  $f(x, y)$  de grau  $d$  consiste em, com o uso da indeterminada  $z$ , deixar todos os monômios de  $f$  com grau  $d$ . Para isso basta multiplicar cada monômio de grau  $i$  por  $z^{d-i}$ .

**Definição 5.5:** Seja  $f = \sum_0^d f_i$ , onde cada  $f_i \in K[x, y]$  é homogêneo de grau  $i$ ,  $f_d \neq 0$ . A homogeneização de  $f$  é o polinômio homogêneo de grau  $d = gr(f)$ ,

$$F(x, y, z) = \sum z^{d-i} f_i(x, y)$$

Notação: Homogeneização de  $f : f^*$  ou  $F$ .

Do mesmo jeito podemos desomogeneizar uma equação com relação à variável  $z$ , fazendo  $z = 1$ . Usaremos a notação  $F_*$  para a desomogeneização de  $F$ .

**Exemplo 5.2.4:** Considere a curva afim  $y = x^2$ . Para enxergarmos a parábola como uma curva projetiva, devemos homogeneizar  $f : y = x^2$ .

Temos  $F = f^* : zy = x^2$ .

Note que, considerando a reta do infinito,  $z = 0$ , temos que o ponto de  $F$  no infinito é  $(0 : 1 : 0)$  e os demais estão “a uma distância finita” considerando  $z = 1$ , temos  $F_*^2$  estão no aberto afim  $U_z$  e, portanto, sobre a parábola  $y = x^2$  no plano afim.

Poderíamos considerar também a reta do infinito como sendo  $x = 0$  e, neste caso, o ponto no infinito da curva seria  $(0 : 1 : 0)$  e  $(0 : 0 : 1)$  e os pontos “à distância finita”

considerando  $x = 1$ , estão no aberto afim  $U_x$  e, portanto, sobre a curva  $yz = 1$  no plano afim.

### 5.3 Interseção de Curvas Projetivas

Veremos nesta seção que quaisquer duas curvas projetivas planas sempre se cruzam e que é possível atribuir multiplicidades de interseção de modo que o número de pontos comuns à essas curvas seja igual ao produto de seus graus ou infinito. O segundo caso ocorre se houver componentes comuns às duas curvas.

#### 5.3.1 Interseção de Reta e Curva, agora Projetivas

Trabalharemos aqui considerando  $K = \mathbb{C}$ . Vamos analisar  $L$  uma reta e  $F$  uma curva de grau  $d$ . Suponhamos  $L = x$ . Temos então

$$P = (0 : b : c) \in x \cap F \Leftrightarrow F(0, b, c) = 0$$

Se o polinômio  $F(0, y, z)$  é identicamente nulo, teremos que  $x \subset F$ . Agora se  $F(0, y, z)$  não for identicamente nulo, será homogêneo de grau  $d$  e se decompõe como:

$$F(0, y, z) = \prod (z_i y - y_i z)^{m_i},$$

Onde os pontos  $P_i = (0 : y_i : z_i)$  são dois a dois distintos e constituem  $x \cap F$ . O expoente  $m_i$  é a multiplicidade de interseção de  $x, F$  em  $P_i$ . Mais geral, temos:

**Proposição 5.6:** Seja  $L$  uma reta e seja  $F$  uma curva de grau  $d$ . Se  $L \not\subset F$  então  $L \cap F = \{P_1, \dots, P_r\}$ , onde  $P_i \neq P_j$  para  $i \neq j$  e existem inteiros  $m_i$  bem determinados pela seguinte condição: Se  $T$  é qualquer transformação linear tal que  $T \bullet L = x$ , então

$$F(0, y, z) = \prod_1^r (z_i y - y_i z)_i^{m_i}$$

onde  $P_i = (0 : y_i : z_i)$  para  $i = 1, \dots, r$ . Em particular,  $\sum m_i = d$ .

**Observação:** O leitor para compreender melhor a transformação linear usada na proposição 5.6 pode consultar [10], onde encontrará também a demonstração desta proposição.

**Definição 5.7:** A multiplicidade ou índice de interseção da reta  $L$  com uma curva  $F$  no ponto  $P$  é definida por

$$(L, F)_P = \begin{cases} \infty & \text{se } P \in L \subset F \\ 0 & \text{se } P \notin L \cap F \\ m_i & \text{se } P = P_i, \end{cases} \quad (\text{nas condições anteriores}).$$

Temos que  $L \cap F$  consiste em  $gr(F)$  pontos contado com multiplicidades. Com o emprego de uma transformação linear conveniente, podemos supor, para o cálculo

de  $(L, F)_p$ , que  $P$  se encontra a distância finita e que  $L$  e  $F$  são distintos da reta no  $\infty$ . Nessas circunstâncias, é imediato que  $(L, F)_P = (L_*, F_*)_P$ , onde o segundo membro é a multiplicidade de interseção definida no caso afim. Assim, os resultados da seção 4.4 podem ser transcritos para as curvas projetivas. Em especial, temos a seguinte proposição:

**Proposição 5.8:** *Seja  $F$  uma curva projetiva e seja  $P$  um ponto de  $F$ . Então, existe um inteiro  $m = m_p(F) \geq 1$  tal que, para toda reta  $L$  passando por  $P$ , vale  $(L, F)_p \geq m$ , ocorrendo desigualdade estrita para no máximo  $m$  retas e no mínimo uma.*

Demonstração c.f.[10].

Comparemos a definição seguinte com a definição 4.16:

**Definição 5.9:** O inteiro  $m_p(F)$  descrito acima é a multiplicidade de  $F$  em  $P$  ou  $P$  em  $F$ .

Se  $P \notin F$ , convencionamos  $m_p(F) = 0$ .

Dizemos que  $P$  é um ponto *simples* ou *não singular* ou *liso* de  $F$ , e que  $F$  é *simples* ou *não singular* ou *lisa* em  $P$  se  $m_p(F) = 1$ ;  $P$  é *múltiplo* ou *singular* se  $m_p(F) \geq 2$ .

A curva  $F$  é *lisa* ou *não singular* se o for em cada um de seus pontos.

Se  $m_p(F) = 2, 3, \dots, m$ , dizemos que  $P$  é um ponto *duplo*, *triplo*,  $\dots$ , *m-uplo*.

Se  $f$  é uma curva afim e  $F = f^*$ , é imediato que  $m_p(F) = m_p(f)$  para cada ponto  $P \in \mathbb{C}^2$  (plano afim).

Para a determinação de  $m_p(F)$ , reduzimos ao caso afim, desomogeneizando  $F$  com relação a uma variável que não se anula no ponto  $P$ .

Note que as definições acima são consistentes com as da subseção 4.4.2.

**Exemplo 5.3.1:** Seja a curva  $f : y = x^3$ . Note que a homogeneização de  $f$  é  $f^* = F : z^2y = x^3$ . E o ponto  $P = (0 : 1 : 0)$  pertence à curva.

Mas qual a multiplicidade de  $P$ ?

Vamos encontrar  $m_P$ , de acordo com a Proposição 5.8.

Desomogeneizando  $F$  com relação a  $y$ , temos  $z^2 = x^3$  e tomando a reta  $z = 0$ , a única interseção de  $z = 0$  e  $F$  é  $P$ . Escrevendo  $F(x, y, 0)$  conforme no início do capítulo (fazendo em  $z$  ao invés de em  $x$ ) temos:

$$F(x, y, 0) = -x^3 \text{ e } (z, F)_P = 3.$$

Agora para qualquer reta  $L \neq z$ , passando por  $P$  temos  $(L, P) = 2$ , o que podemos observar no exemplo 4.4.4. Assim  $m_P = 2$ . E o ponto  $P$  é singular.



## O Teorema de Bézout

---

O matemático Frances Étienne Bézout (1739 – 1783), foi autor de um dos livros de matemática mais utilizados de sua época, os seis volumes de *Cours de Mathématique*. Nascido na França, em março de 1739, em uma família de Magistrados distritais, Bézout preferiu os números à política, convencendo seu pai a lhe permitir estudar matemática ao invés de direito. Foi muito influenciado pelo trabalho de Leonahrd Euler, e suas habilidades foram reconhecidas pela Académie Royale des Sciences.

Ele é bem conhecido por seu trabalho sobre o uso de determinantes na eliminação algébrica. Outros trabalhos que ele publicou sobre a teoria das equações foram reunidos em *Théorie Générale des Algébriques* em 1779. Este inclui um resultado conhecido hoje por Teorema de Bézout, um importante resultado da matemática que revela como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas. Após sua morte em 1783 uma estátua foi erguida em Nemours, cidade de seu nascimento, uma pequena homenagem para um grande matemático.

Vamos primeiramente, enunciar e demonstrar o Teorema de Bézout no plano afim. No plano projetivo, veremos alguns exemplos e o enunciaremos. Porém sua demonstração não será mostrada nesse trabalho já que necessitaria de ferramentas mais avançadas.

**Teorema 6.1 (Teorema de Bézout):** Sejam  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$  dois polinômios em  $\mathbb{C}[x,y]$  de graus  $m, n \geq 1$ . Se  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  não têm fator comum em  $\mathbb{C}[x,y]$ , então

$$\#(f \cap g) \leq m \cdot n$$

onde  $\#(f \cap g)$  significa quantidade de elementos em  $(f \cap g)$ .

*Demonstração.* Como  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  não têm fator comum em  $\mathbb{C}[x,y]$ , pelo corolário 3.25, o número de interseções  $f \cap g < \infty$ . Temos que  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  não têm fator comum em  $\mathbb{C}[y][x]$ , então, novamente pelo corolário 3.25, eles não têm fator comum em  $\mathbb{C}(y)[x]$ . Estamos considerando então  $f, g$  polinômios na variável  $x$  com coeficientes no corpo  $K(y)$ , e o  $MDC(f, g) = 1$ .

Pelo teorema 3.22, existem elementos  $\gamma, \delta$  em  $\mathbb{C}(y)[x]$  tais que

$$1 = \gamma \cdot f + \delta \cdot g$$

Mas,  $\gamma, \delta$  são polinômios com coeficientes em  $\mathbb{C}(y)[x]$ , então podemos ter  $y$  no denominador. Seja  $d(y) \in \mathbb{C}[y]$  o M.M.C. dos denominadores de  $\gamma, \delta$ . Assim, multiplicando  $d(y)$  por  $1 = \gamma \cdot f + \delta \cdot g$ , obtemos:

$$d(y) = A(x,y) \cdot f(x,y) + B(x,y) \cdot g(x,y)$$

onde  $A(x,y) = d(y) \cdot \gamma$  e  $B(x,y) = d(y) \cdot \delta$ , com  $A(x,y), B(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ .

Se  $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$  é tal que  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$  então  $d(y_0) = 0$ . Assim existe somente um número finito de ordenadas possíveis para um ponto em  $\mathbb{C}^2$  da interseção das curvas determinadas por  $f$  e por  $g$ , a saber as raízes em  $\mathbb{C}$  do polinômio não nulo  $d(y)$ . Agora, para uma ordenada fixa  $y_0 \in \mathbb{C}$ , existem no máximo  $m$  pontos em  $\mathbb{C}^2$  da curva determinada por  $f(x,y)$  com esta ordenada  $y_0$ , a saber os pontos  $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$  tais que  $x_0$  seja uma raiz de  $f(x,y)$ . Fica assim provado que o número de interseções  $f \cap g$  é finito. Como  $\mathbb{C}$  é um corpo infinito, existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tal que, com

$$f_1(x,y) := f(x, y + \beta x) \quad \text{e} \quad g_1(x,y) := g(x, y + \beta x)$$

temos: os pontos distintos de  $f_1 \cap g_1$  tem ordenadas distintas, o coeficiente de  $x^m$  em  $f_1(x,y)$  e o coeficiente de  $x^n$  em  $g_1(x,y)$  são não-nulos.

Escrevemos

$$f_1(x,y) = a_0 x^m + a_1(y) x^{m-1} + \dots + a_m(y), \quad \text{com} \quad a_0 \neq 0,$$

$$g_1(x,y) = b_0 x^n + b_1(y) x^{n-1} + \dots + b_n(y), \quad \text{com} \quad b_0 \neq 0,$$

Vamos considerar  $f_1(x,y)$  e  $g_1(x,y)$  como polinômios na variável  $x$  com os coeficientes  $a_i(y), b_j(y)$  em  $\mathbb{C}[y] \forall i, j$  e vamos considerar a resultante, que é um elemento de  $\mathbb{C}[y]$ . Denotaremos esta resultante por  $R_{f_1, g_1}(y)$  no lugar de  $R_{f_1(x,y), g_1(x,y)}$ . Temos:

$$\begin{aligned} \#(f \cap g) &= \#(f_1 \cap g_1), \\ &= \{y \in \mathbb{C}; \quad f_1(x,y) \quad \text{e} \quad g_1(x,y)\} \text{ tem uma raiz comum em } \mathbb{C} \\ &\leq \{y \in \mathbb{C}; \quad f_1(x,y) \quad \text{e} \quad g_1(x,y)\} \\ &\quad \text{tem um fator comum de grau } \geq 1 \text{ em } \mathbb{C}[x] \\ &= \{y \in \mathbb{C}; \quad R_{f_1(x,y), g_1(x,y)} = 0\} \text{ pelo teorema } 3.24 \\ &= \{y \in \mathbb{C}; \quad R_{f_1, g_1}(y) = 0\} \\ &\leq \text{grau } R_{f_1, g_1}(y), \text{ pelo corolário } 3.23 \end{aligned}$$

Pela proposição 4.13, a resultante  $R_{f_1, g_1}(y)$  envolve termos do tipo

$$a_{i_1}(y) \cdots a_{i_m}(y) b_{j_1}(y) \cdots b_{j_n}(y), \quad \text{com} \quad i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_n = m \cdot n.$$

Como grau  $a_i(y) \leq i$  e grau  $b_j(y) \leq j$ , vimos que

$$\text{grau } a_{i_1}(y) \cdots a_{i_m}(y) b_{j_1}(y) \cdots b_{j_n}(y) \leq m \cdot n.$$

Logo grau  $R_{f_1, g_1}(y) \leq m \cdot n$ , e portanto

$$\#(f \cap g) \leq m \cdot n.$$

□

Vamos considerar agora o cálculo do número de pontos de interseção de duas curvas projetivas.

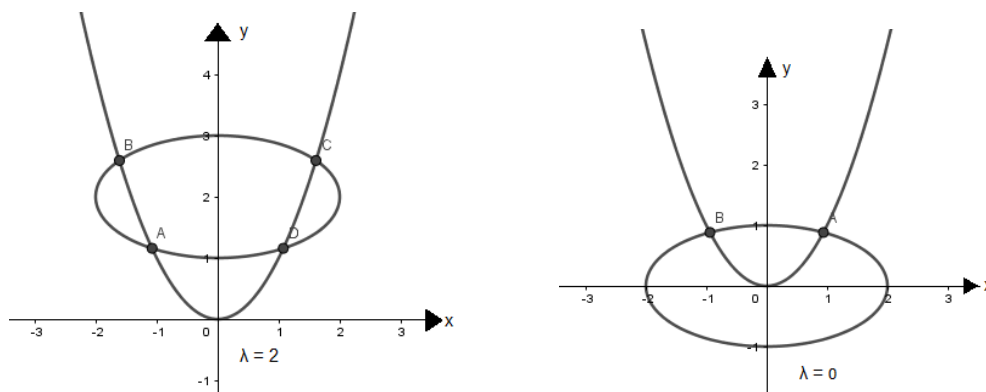
**Lema 6.2:** *Sejam  $F, G$  duas curvas planas projetivas. Então  $F \cap G$  é finita se e só se  $F, G$  não admitem componentes em comum.*

*Demonstração.* Se  $F, G$  não admitem fator comum em  $K[x, y, z]$  então  $F_*, G_*$  também não admitem em  $K[x, y]$ . Com efeito, se  $F_* = fg, G_* = gh$ , com  $f, g, h \in K[x, y]$  e  $h$  não constante, então  $(F_*)^* = f^*h^*, (G_*)^* = g^*h^*$ . Daí se seguiria que  $h^*$  é fator de  $F, G$ , contradição. Como  $F_*, G_*$  não tem componente comum, segue-se que  $F$  e  $G$  têm interseção finita, a distância finita. Como  $F \cap Z$  ou  $G \cap Z$  é finita, caso contrário  $Z$  seria componente comum, temos que  $F \cap G$  é finita. □

Vimos que a interseção entre  $F$  e  $G$  é finita. Vamos agora calcular seu número de pontos. Ainda não podemos afirmar que  $F \cap G \neq \emptyset$  Isto será uma consequência do Teorema de Bézout.

Vamos então explorar o que acontece quando duas curvas se cruzam no plano projetivo, segundo Cox [3]. Estamos particularmente interessados no número de pontos de interseção. Os exemplos a seguir ilustram por que a resposta é especialmente agradável quando trabalhamos com curvas em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , o plano projetivo sobre os números complexos.

**Exemplo 6.0.1:** Considere a interseção da parábola  $y = x^2$  com a elipse  $x^2 + 4(y - \lambda)^2 = 4$ . Suponha  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 2$ . Teremos (figura 6.1):



**Figura 6.1:** Interseções reais entre a parábola e a elipse quando  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 0$ .

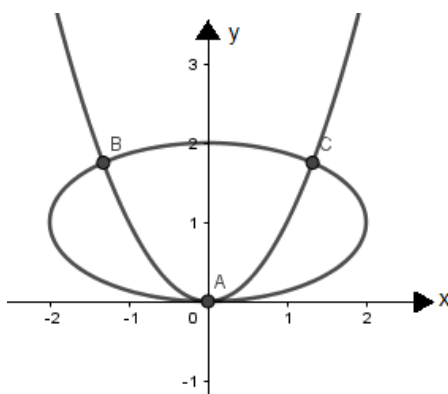
Em  $\mathbb{R}$  obtemos números diferentes de interseções. Porém, em  $\mathbb{C}$ , temos quatro pontos de interseção em ambos os casos.

Quando  $\lambda = 0$ , podemos substituir  $y = x^2$  em  $x^2 + 4y^2 = 4$  obtendo  $y + 4y^2 = 4$  que tem raízes  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$  e os valores correspondentes de  $x$  são  $x = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}}$ . Isto nos dá quatro pontos de interseção, dois reais e dois complexos.

Você pode verificar que, quando  $\lambda = 2$ , não há novas soluções em  $\mathbb{C}$  além das quatro observadas na figura 6.1.

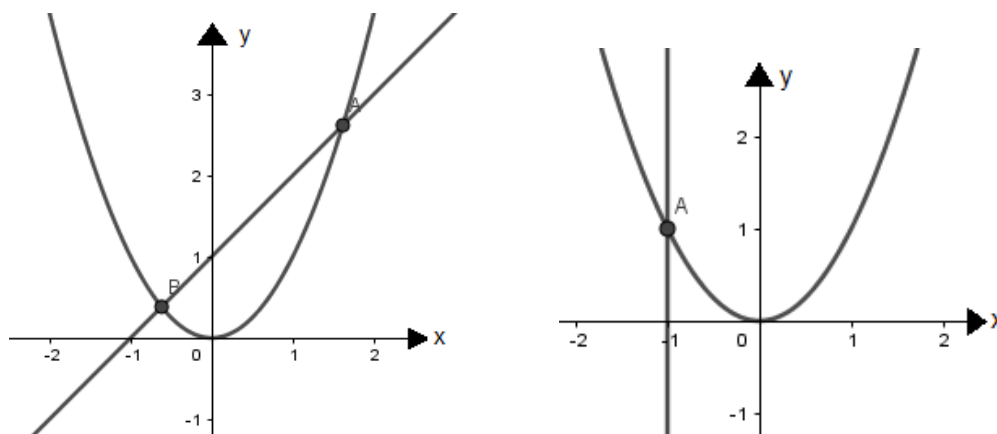
Assim, o número de interseções parece ser mais previsível quando trabalhamos com os números complexos. Para confirmar, você pode verificar que, nos casos em que não há ponto de interseção em  $\mathbb{R}$ , existem quatro pontos de interseção em  $\mathbb{C}$ .

Quando  $\lambda = 1$ , temos três pontos de interseção (figura 6.2). Um desses pontos acontece na origem onde as duas curvas são tangentes. Portanto, este ponto tem multiplicidade 2, enquanto os outros dois tem multiplicidade 1. Assim, temos quatro pontos de interseção como nos outros casos.



**Figura 6.2:** Interseções reais entre a parábola e a elipse quando  $\lambda = 1$ .

**Exemplo 6.0.2:** Agora, considere a interseção da parábola  $y = x^2$  com uma reta  $L$ . Na maioria dos casos existem dois pontos de interseção em  $\mathbb{C}$ , contados com suas multiplicidades. No entanto, se  $L$  for uma linha vertical, obtemos apenas um ponto de interseção com multiplicidade 1 (figura 6.3).



**Figura 6.3:** Interseções entre a parábola  $y = x^2$  e uma reta  $L$ .

No entanto, seria interessante todas as retas cortarem a parábola em dois pontos, mas se isso acontece, onde está o outro ponto? Se mudarmos nosso ponto de vista e trabalharmos no plano projetivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , a pergunta acima é fácil de responder: o ponto que falta está “no infinito”.

Seja  $z$  a terceira variável. Então, homogeneizamos  $y = x^2$  para obter a equação projetiva  $yz = x^2$ , e uma linha vertical  $x = c$  fornece a linha projetiva  $x = cz$ . Substituindo  $x$  obtemos  $yz = c^2z^2$ , que é facilmente resolvido para obter  $(x : y : z) = (c : c^2 : 1)$  ou  $(0 : 1 : 0)$ , que são coordenadas homogêneas. A primeira está no plano afim, onde  $z = 1$ , enquanto a segunda está no infinito,  $z = 0$ .

**Exemplo 6.0.3:** Em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , considere duas curvas dadas por  $F = x^2 - z^2$  e  $G = x^2y - xz^2 - xyz + z^3$ . É fácil verificar que  $(1, b, 1) \in F \cap G$  para qualquer  $b \in \mathbb{C}$ , de modo que a interseção  $F \cap G$  seja infinita. Observe as fatorações:

$$x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$$

$$x^2y - xz^2 - xyz + z^3 = (x - z)(xy - z^2)$$

Temos que  $F$  é a união de duas linha projetivas e  $G$  é a união de uma linha e uma cônica. E, como  $F$  e  $G$  tem componente irredutível em comum, sua interseção é infinita.

Esses exemplos mostram porque devemos trabalhar em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Trabalharemos daqui para frente em  $\mathbb{C}$  e escreveremos  $\mathbb{P}^2$  em vez de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . E, vamos considerar a interseção de duas curvas  $F$  e  $G$  em  $\mathbb{P}^2$ , sem componentes em comum. Nosso objetivo é relacionar o número de pontos em  $F \cap G$  com os graus de suas equações reduzidas. O Lema seguinte tem papel muito importante em nosso estudo.

**Lema 6.3:** Sejam  $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$  homogêneos de grau total  $m$  e  $n$  respectivamente. Se  $f(0, 0, 1)$  e  $g(0, 0, 1)$  são diferentes de zero, então a resultante  $R(f, g, z)$  é homogênea em  $x$  e  $y$  de grau total  $m \cdot n$ .

Como aplicação desses lemas, mostraremos como ligar o número de pontos na interseção de duas curvas usando os graus de suas equações.

**Teorema 6.4:** Sejam  $F$  e  $G$  curvas projetivas em  $\mathbb{P}^2$  sem componentes irredutíveis comuns. Se os graus das equações reduzidas para  $F$  e  $G$  forem  $m$  e  $n$  respectivamente, então  $F \cap G$  é finito e tem no máximo  $m \cdot n$  pontos.

Demonstração cf [3].

**Exemplo 6.0.4:** Considere os seguintes polinômios em  $\mathbb{C}[x, y, z]$ :

$$f = x^3 + y^3 - 2xyz$$

$$g = 2x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + y^3 - 2y^2z$$

Esses polinômios definem duas cúbicas em  $\mathbb{P}^2$ . Para estudar a interseção entre elas,

calculamos primeiro a resultante em relação a  $z$ :

$$R(f,g,z) = -2y(x-y)^3(2x+y)$$

Os pontos em  $F \cap G$  satisfazem  $y = 0$ ,  $x - y = 0$  ou  $2x + y = 0$  e, a partir daqui, é fácil mostrar que  $F \cap G$  consiste nos três pontos

$$P = (0 : 0 : 1), \quad Q = (1 : 1 : 1), \quad R = \left( \frac{4}{7} : \frac{-8}{7} : 1 \right)$$

Em particular, isso mostra que  $F$  e  $G$  não possuem componentes comuns. No entanto, a resultante acima não fornece as multiplicidades de interseção corretas por  $(0,0,1) \in F$ . Portanto, devemos fazer o mesmo processo considerando a resultante em relação a  $x$  e a  $y$ . Note que  $m_Q = 3$  e  $m_R = 1$ . E vamos encontrar que  $m_P = 5$ .

**Teorema 6.5 (Teorema de Bézout em sua versão projetiva):** *Sejam  $F, G$  curvas planas projetivas sem componentes em comum com  $m$  e  $n$  os respectivos graus de suas equações. Então o número de pontos na interseção  $F \cap G$ , contados com multiplicidades, é igual a  $(gr(F)) \cdot (gr(G))$ , ou seja,  $m \cdot n$ .*

Demonstração cf [3]

Para finalizar esse capítulo veremos exemplos de interseção no plano afim e no plano projetivo. O Teorema de Bézout garante que  $F \cap G \leq gr(F) \cdot gr(G)$  e sua igualdade sempre é verdadeira no caso projetivo.

**Exemplo 6.0.5:** Sejam as curvas algébricas planas:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

e

$$g(x,y) = x^3 - 4y = 0$$

Então,

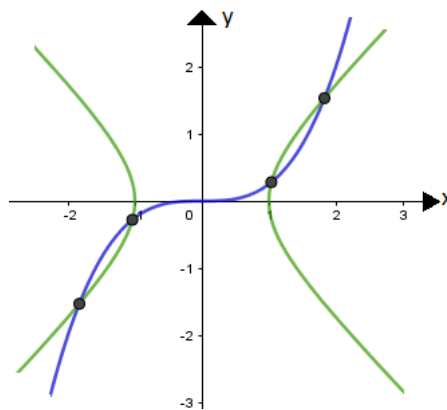
$$\#(f \cap g) \leq 2 \cdot 3 = 6$$

De fato, observe a figura que mostra as interseções entre a cônica  $f(x,y)$  com a cúbica  $g(x,y)$  (figura 6.4). Considerando no plano projetivo,  $F = f^*$  e  $G = g^*$ , as outras duas interseções acontecem no infinito.

$$F(x,y) = x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

e

$$G(x,y) = x^3 - 4yz^2 = 0$$



**Figura 6.4:** Interseções no plano afim entre a cônica  $F(x,y) = x^2 - y^2 - z^2 = 0$  e a cúbica  $G(x,y) = x^3 - 4yz^2 = 0$ .

**Exemplo 6.0.6:** Sejam as curvas algébricas planas:

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 12y = 0$$

e

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 10y = 0$$

Então,

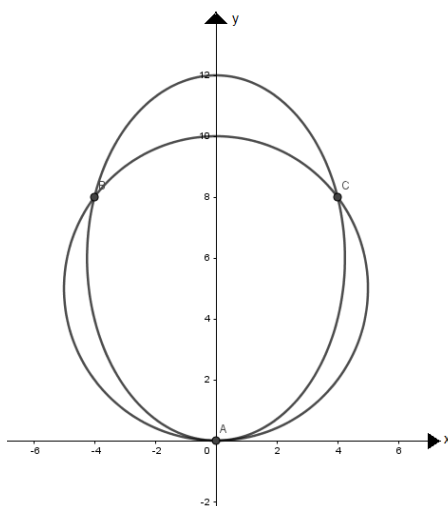
$$\#(f \cap g) \leq 2 \cdot 2 = 4$$

De fato, observe a figura que mostra as interseções entre as cônicas  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  (figura 6.5). No plano projetivo,  $F = f^*$  e  $G = g^*$  devem ter exatamente 4 interseções. A outra interseção acontece no infinito.

$$F(x,y) = 2x^2 + y^2 - 12yz = 0$$

e

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 10yz = 0$$



**Figura 6.5:** Interseções reais entre as cônicas  $F(x,y) = 2x^2 + y^2 - 12yz = 0$  e  $G(x,y) = x^2 + y^2 - 10yz = 0$ .

**Exemplo 6.0.7:** Sejam as curvas algébricas planas:

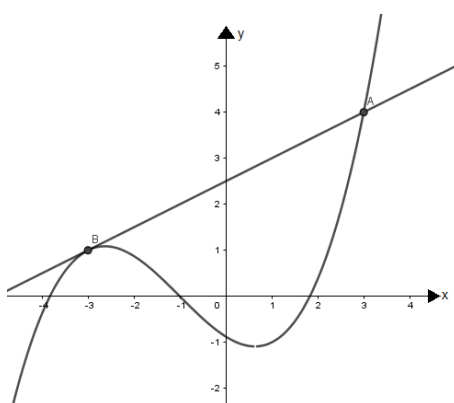
$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8y - 7 = 0$$

e

$$g(x,y) = x - 2y + 5 = 0$$

Então,

$$\#(f \cap g) \leq 3 \cdot 1 = 3$$



**Figura 6.6:** Interseções reais entre a cúbica  $F(x,y) = x^3 + 3x^2z - 5xz^2 - 8yz^2 - 7z^3 = 0$  e a reta  $G(x,y) = x - 2y + 5z = 0$ .

De fato, observe a figura que mostra uma interseção simples em  $A$  e uma interseção dupla em  $B$  entre a cúbica  $f(x,y)$  e a reta  $g(x,y)$  (figura 6.6).

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2z - 5xz^2 - 8yz^2 - 7z^3 = 0$$



e

$$g(x,y) = x - 2y + 5z = 0$$

**Exemplo 6.0.8:** Sejam as curvas algébricas planas:

$$f(x,y) = 3x^2 + 7y^2 - 55 = 0$$

e

$$g(x,y) = 11x^3 - 155x - 84y = 0$$

Então,

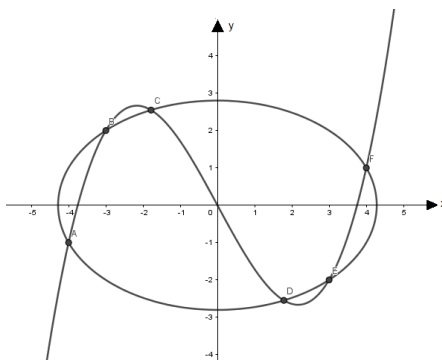
$$\#(f \cap g) \leq 2 \cdot 3 = 6$$

De fato, observe a figura que mostra as interseções entre a cônica  $f(x,y)$  e a cúbica  $g(x,y)$  (figura 6.7). No plano projetivo,  $F = f^*$  e  $G = g^*$  tem exatamente 6 interseções.

$$F(x,y) = 3x^2 + 7y^2 - 55z^2 = 0$$

e

$$G(x,y) = 11x^3 - 155xz^2 - 84yz^2 = 0$$



**Figura 6.7:** Interseções reais entre a cônica  $F(x,y) = 3x^2 + 7y^2 - 55z^2 = 0$  e a cúbica  $G(x,y) = 11x^3 - 155xz^2 - 84yz^2 = 0$ .

**Exemplo 6.0.9:** Sejam as curvas algébricas planas:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 6y + 12 = 0$$

e

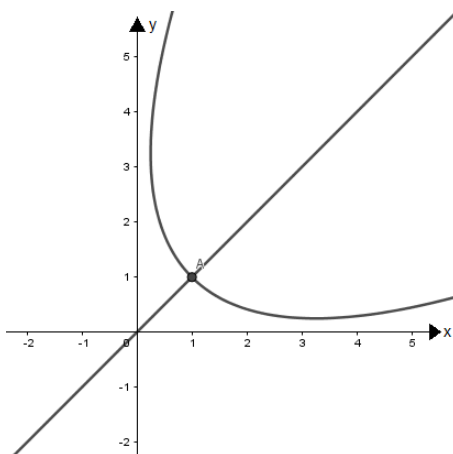
$$g(x,y) = x - y = 0$$

Então,

$$\#(f \cap g) \leq 2 \cdot 1 = 2$$

De fato, observe a figura que mostra as interseções entre a cônica  $f(x,y)$  e a reta  $g(x,y)$  (figura 6.8). No plano projetivo,  $F = f^*$  e  $G = g^*$  tem exatamente 2 interseções. A outra interseção acontece no infinito.

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 12z^2 = 0$$



**Figura 6.8:** Interseções reais entre a cônica  $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 12z^2 = 0$  e a reta  $G(x,y) = x - y = 0$ .

**Exemplo 6.0.10:** Sejam as curvas algébricas planas:

$$f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 90x - 40y + 225 = 0$$

e

$$g(x,y) = x^2 - y^2 - 10x = 0$$

Então,

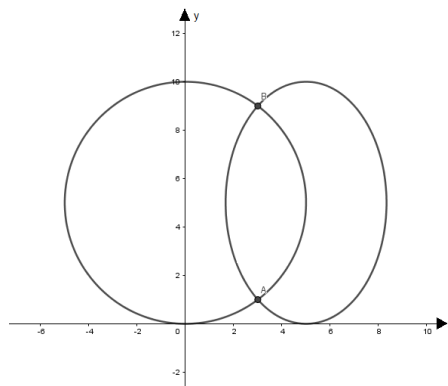
$$\#(f \cap g) \leq 2 \cdot 2 = 4$$

De fato, observe a figura que mostra as interseções entre as cônicas  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  (figura 6.9). No plano projetivo,  $F = f^*$  e  $G = g^*$  tem exatamente 4 interseções. As outras acontecem no infinito.

$$F(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 90xz - 40yz + 225z^2 = 0$$

e

$$G(x,y) = x^2 - y^2 - 10xz = 0$$



**Figura 6.9:** Interseções reais entre as cônicas  $F(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 90xz - 40yz + 225z^2 = 0$  e  $G(x,y) = x^2 - y^2 - 10xz = 0$ .

## Aplicação em sala de aula

---

O Ensino Básico no Brasil é norteado pela LDB - Lei de Diretrizes e Bases (Lei 9.394/1996). A partir dela, vários documentos foram elaborados com a finalidade de direcionar os conteúdos a serem estudados. Neste capítulo veremos o que dizem alguns desses documentos como os PCN's, a BNCC e o CBC, sobre o estudo de Curvas Algébricas. Aqui também serão relatadas algumas atividades desenvolvidas com alunos do ensino básico.

### 7.1 Curvas Algébricas no contexto da Educação Básica

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's [8], são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo de orientar sobre alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina, abrangendo tanto a rede pública, como a rede privada de ensino. Os PCN's foram elaborados procurando respeitar as diversidades regionais, culturais e políticas existentes no país considerando a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Em Matemática visam a construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que possibilite sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. O tema “Curvas” é introduzido desde o Ensino Fundamental, com o estudo de Funções. Vejamos o que os PCN's orientam sobre o assunto:

#### 1. Para o Ensino Fundamental

*... No trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) ...*

#### 2. Para o Ensino Médio

... O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

De acordo com a BNCC [7], o estudo das “Curvas” é muito importante no Ensino Médio. Na área de Matemática e suas tecnologias, a competência específica 4, diz que o aluno deve compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos, sejam algébricos, geométricos, entre outros, na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem. No que se refere ao estudo das Curvas podemos citar:

*Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.*

*Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.*

*Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais - domínio, imagem, crescimento - de cada função.*

A proposta curricular do Conteúdo Básico Comum - CBC [1], elaborado de acordo com os PCN's, norteia o ensino básico em Minas Gerais. O tema "Curvas" é introduzido a partir do primeiro ano com o estudo de Funções, consolidadas no terceiro ano com as equações de retas e circunferências em Geometria Analítica. As Curvas são apresentadas através de Eixos temáticos da seguinte forma:

#### *Eixo Temático II*

##### *Funções Elementares e Modelagem*

*O conceito de função é um dos temas centrais e unificadores da matemática, podendo ser usado em diversas situações, mesmo não numéricas, por exemplo, na geometria, quando falamos em transformações geométricas. As funções elementares estudadas no Ensino Médio - afim, polinomial, exponencial e trigonométricas - permitem a análise de fenômenos que envolvam proporcionalidade, crescimento, decaimento e periodicidade, que são bastante comuns no cotidiano.*

e

#### *Eixo Temático III*

##### *Geometria e Medidas*

*No ensino médio, a geometria é estudada levando-se em conta três aspectos: o tratamento formal, lógico-dedutivo dos fatos referentes a figuras planas e espaciais; o desenvolvimento de técnicas de medição indireta (usando semelhança de triângulos ou trigonometria) e a algebrização da geometria através da introdução de um modelo para a geometria euclidiana plana (geometria analítica). ... Por sua vez, a geometria analítica permite tratar lugares geométricos planos por meio de equações, transformando problemas geométricos em problemas algébricos. Além disso, possibilita a representação gráfica de funções ou de dados.*

De acordo com o CBC, os alunos têm contato com o estudo das Curvas a partir do primeiro ano do Ensino Médio, quando começam a estudar por exemplo Funções Afins e Quadráticas, que são representadas por curvas como retas e parábolas, respectivamente. No nono ano do Ensino Fundamental é feita uma abordagem sobre o assunto quando estudamos as Equações de Primeiro e Segundo grau.

## **7.2 Desenvolvimento da Atividade**

As atividades foram desenvolvidas em dois momentos com turmas diferentes, com o objetivo de apresentar o tema "Curvas Algébricas" de uma maneira diferenciada, na tentativa de auxiliar o aluno a desenvolver as competências citadas na BNCC. Com o nono ano do Ensino Fundamental, abordando conceitos básicos da Geometria Euclidiana, e com o primeiro ano do Ensino Médio sobre a interseção entre curvas planas. Vejamos como aconteceram as atividades.

### 7.2.1 Introdução à Geometria Projetiva

Nesta subseção vamos apresentar a aula lecionada para o nono ano do ensino fundamental. O leitor encontrará o roteiro desta aula em [A.1](#).

Os alunos do nono ano do Ensino Fundamental já estão bem familiarizados com a Geometria Euclidiana, seus conceitos, definições e teoremas. A aula teve a duração de dois horários de 50 minutos conforme previsto. Abordamos temas como conceitos da Geometria Projetiva e de Curvas Algébricas e levamos os alunos a descobrirem que existe um outro plano, com pontos no infinito, onde retas paralelas se encontram, o Plano Projetivo.

A perspectiva renascentista e a necessidade de uma representação geométrica nessa arte foram citados durante a apresentação dos slides que mostraram algumas obras de grandes artistas da época, como por exemplo, “A Santíssima Trindade” de Tomasso Masaccio (1401-1427) ([7.1](#)).



**Figura 7.1:** “A Santíssima Trindade” de Tomasso Masaccio (1401-1427)

Nesta aula recordamos conceitos básicos de Geometria Euclidiana, sobre retas paralelas e concorrentes. Para exemplificar a Geometria não Euclidiana, usamos o globo terrestre. Daí começaram a surgir questionamentos do tipo “ Como duas retas paralelas podem se encontrar?”, pois, até então, todos estavam certos de que duas retas paralelas não possuem pontos de interseção. Então, para melhor entendimento, mostramos algumas imagens como a figura ([7.2](#)) com as seguintes perguntas: “Os trilhos por onde passa o trem representam retas paralelas? Ou elas vão se encontrar em algum ponto?”

A turma ficou dividida entre “Elas são paralelas” e “Elas vão se encontrar no infinito”. Nesse momento foi mencionado o Plano Projetivo. Alguns entenderam a ideia de interseção no infinito, acharam interessante. Outros foram mais resistentes e não queriam aceitar a informação.



**Figura 7.2:** Retas paralelas que se encontram no infinito

Para concluir a atividade, orientamos os alunos a representarem através de desenhos, algum ponto interessante da aula. A maioria retratou como em (7.3):



**Figura 7.3:** Trabalhos dos alunos

Consideramos a aula interativa e produtiva, já que todos participaram ativamente. O objetivo de deixá-los com uma “pulga atrás da orelha” foi atingido. O leitor pode verificar mais trabalhos em [A.1.1](#).

### 7.2.2 Interseção entre Curvas no GeoGebra

Nesta subseção vamos apresentar a aula lecionada para o primeiro ano do ensino médio. O leitor encontrará o roteiro desta aula em [A.2](#).

Realizada na sala de informática a aula teve a duração de 4 horários de 50 minutos, dois a mais do que o planejado devido ao fato de os alunos não conhecerem o GeoGebra, onde as curvas foram representadas. O GeoGebra é um software que reúne Álgebra e Geometria, e pode ser usado em qualquer nível de ensino. O objetivo dessa aula é levar o aluno a identificar pontos de interseção entre duas curvas levando-o a compreender que a quantidade desses pontos está relacionada aos seus respectivos graus. Todos os alunos receberam um roteiro com os passos necessários para a realização das atividades. Nas duas primeiras aulas, foram desenvolvidas as atividades de *I* a *V*, onde a maioria dos alunos necessitaram de uma atenção mais individualizada. Já nas aulas seguintes, conseguiram desenvolver as atividades com mais independência, registrando tudo que foi observado.

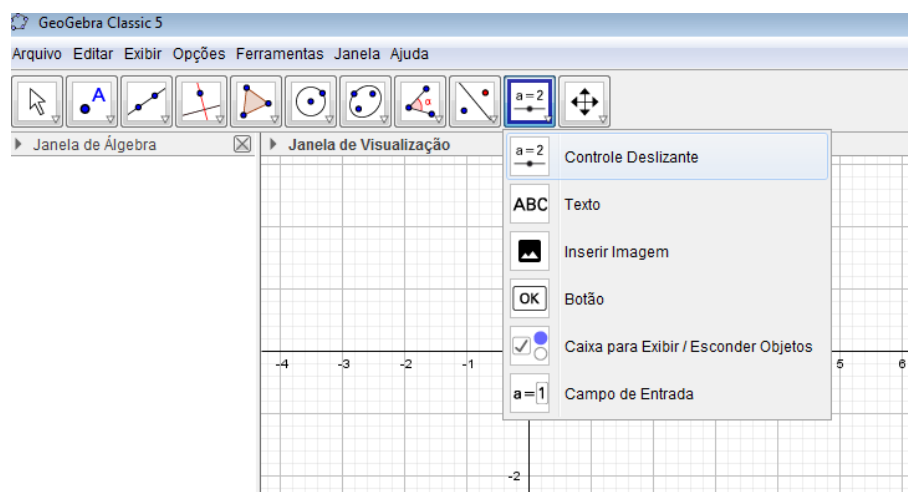
A primeira atividade apresenta a interseção entre duas curvas genéricas, uma de grau 1 e outra de grau 2:



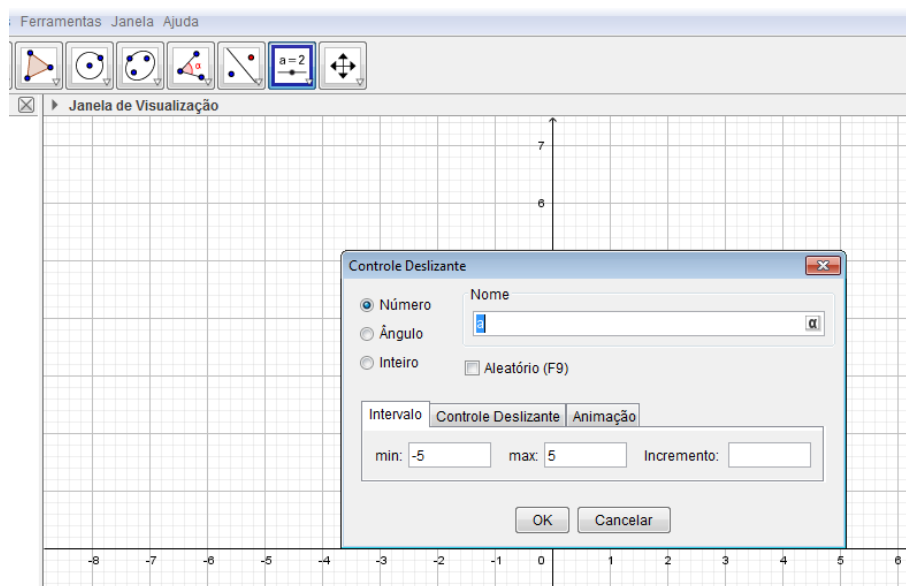
## Atividade I

Siga os seguintes passos para analisar as interseções entre curvas:

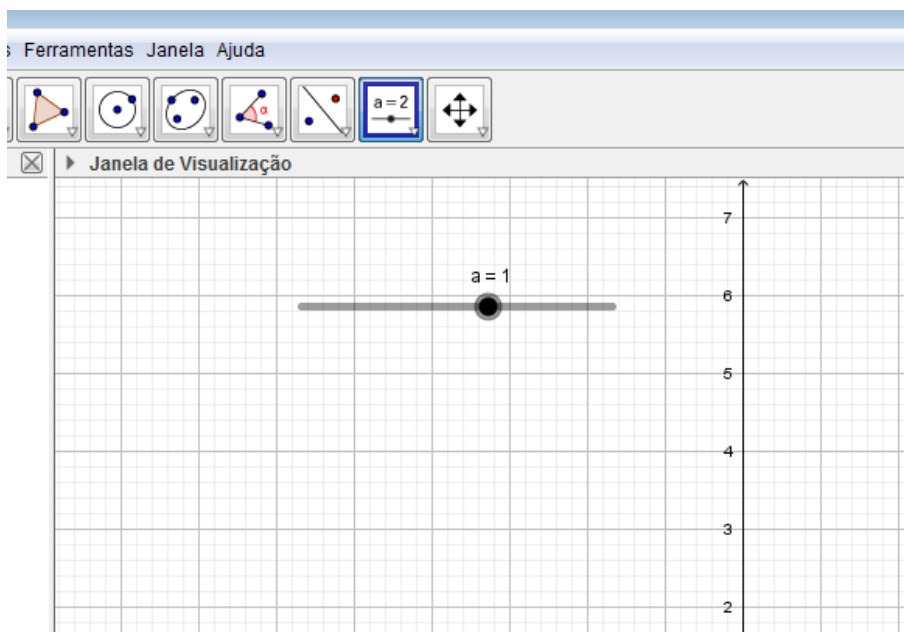
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.



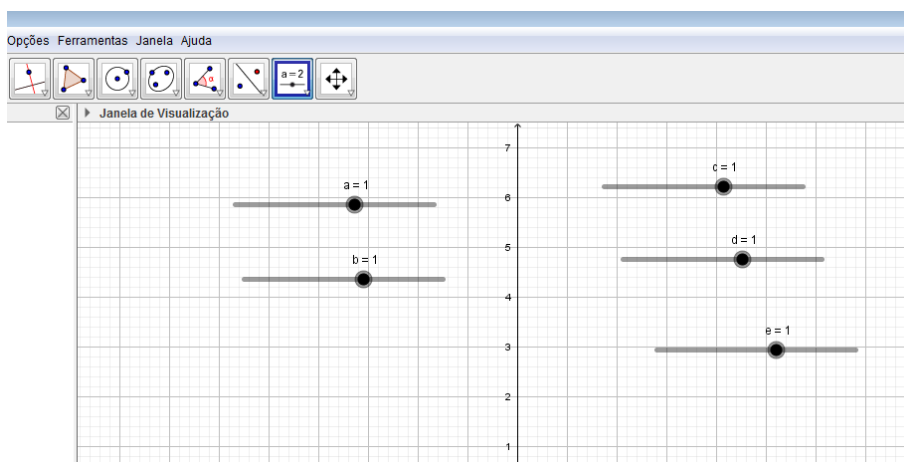
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela. Clique em “OK”.



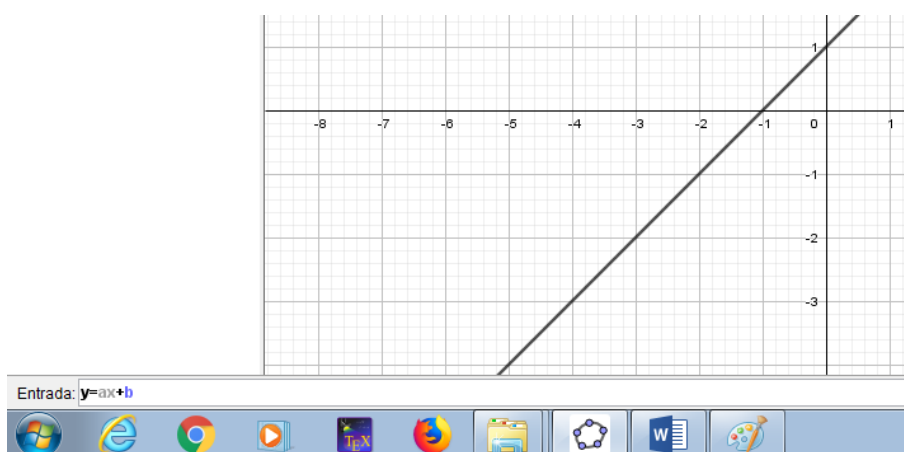
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.



- Repita a operação e insira novos parâmetros  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ .



- No campo “Entrada”, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecle “Enter”.



- Digite a equação  $y = cx^2 + dx + e$  de uma parábola e tecla “Enter”.
- Além de observar significados importantes para os coeficientes das equações, podemos também analisar os pontos de interseção entre elas. Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para todos os coeficientes.

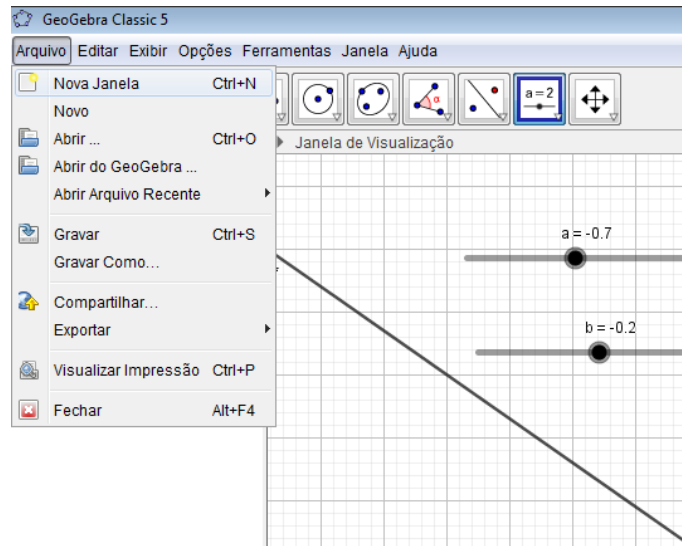
**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a parábola? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Os alunos fizeram a atividade com bastante atenção, e conseguiram responder todas as perguntas.

Nas atividades de 2 a 5, apenas uma das equações é genérica. Assim, movimentando os parâmetros dos controles deslizantes, os alunos percebem que o número de pontos de interseção entre as curvas pode variar.

### Atividade II

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.



- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira o parâmetro  $b$ .

- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$  de uma elipse e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para o coeficiente  $b$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a elipse? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Os alunos perceberam sem muita dificuldade, que a reta pode interceptar a elipse em nenhum, 1 ou 2 pontos.

### Atividade III

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira o parâmetro  $b$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$  de uma cúbica singular e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para o coeficiente  $b$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a cúbica? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Os alunos perceberam sem muita dificuldade, que a reta pode interceptar a cúbica em nenhum, 1, 2 ou 3 pontos.

### Atividade IV

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.

- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira os parâmetros  $b$  e  $c$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax^2 + bx + c$  de uma parábola e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$  de uma elipse e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para os coeficientes  $b$  e  $c$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a parábola e a elipse? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Os alunos perceberam sem muita dificuldade, que a quantidade de pontos de interseção entre a parábola e a elipse pode variar de 0 a 4 pontos.

#### Atividade V

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira os parâmetros  $b$  e  $c$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax^2 + bx + c$  de uma parábola e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$  de uma cúbica simples e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para os coeficientes  $b$  e  $c$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a parábola e a cúbica? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Alguns alunos perceberam, que a quantidade de pontos de interseção entre a parábola e a cúbica pode variar de 0 a 6 pontos.

Na atividade 6 foram apresentados vários exemplos de interseções entre duas curvas de diferentes graus:

#### Atividade VI

Vejam o que acontece quando interceptamos as seguintes curvas. Quantos pontos de interseção podemos observar entre elas?

$$1. \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = 5x \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y = x - 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = -4x - 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = x - 1 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = -4x + 5 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = -3x^2 + 4x - 2 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} y = -x^2 + 3x + 3 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y = x^2 + 4x + 4 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 3x + 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} y = -2x^2 - 3x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} y = -2x^2 - x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Para concluir esta atividade, observe, pense e responda:

- a. Nos itens 1 e 2, quando interceptamos duas curvas de grau 1, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo? ?
- b. Nos itens 3 a 5, quando interceptamos uma curva de grau 1 e uma curva de grau 2, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- c. Nos itens 6 a 9, quando interceptamos uma curva de grau 1 e uma curva de grau 3, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- d. Nos itens 10 a 13, quando interceptamos duas curvas de grau 2, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- e. Nos itens 14 a 17, quando interceptamos uma curva de grau 2 e uma curva de grau 3, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- f. Você observou alguma regularidade na quantidade de interseção de curvas? Podemos dizer que existe alguma relação entre o número de pontos de interseção e o produto dos graus das curvas? Há um valor máximo? Conjecture.

Como esta atividade é mais específica, ficou fácil observar que o número de pontos de interseção entre curvas de grau 1 é no máximo 1; entre curvas de grau 1 e 2, no máximo 2; entre curvas de grau 1 e 3, no máximo 3; entre curvas de grau 2, no máximo 4, ou seja, no máximo o produto dos graus.

Alguns alunos logo perceberam que a quantidade máxima de pontos de interseção tem relação com os graus das equações. Outros tiveram um pouco de dificuldade mas entenderam a ideia. Daí, contando com a orientação da professora, conseguiram conjecturar algo próximo ao Teorema de Bézout:

*Através das atividades acima, podemos observar que quando interceptamos duas curvas, a quantidade de pontos de interseção entre elas, é no máximo o produto entre seus graus.*

Esta atividade investigativa mostrou que, quando o aluno participa ativamente da construção do conhecimento, este torna-se mais verdadeiro para ele, conseguindo um entendimento maior e, conseqüentemente, maior gosto pela matéria.

Quando as aulas acontecem em um ambiente diferente da sala de aula, os alunos ficam mais interessados, participam mais das atividades e até procuram buscar mais informações sobre o conteúdo. Essas aulas contaram com a participação ativa da maioria dos alunos, levando a momentos agradáveis e produtivos.



## Conclusão

---

Curvas algébricas são objetos matemáticos dotados de propriedades muito interessantes e de beleza inerente tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico. Assim, estudá-las é não só um excelente exercício para aqueles que pretendem se aprofundar nos estudos em matemática, como uma fonte de prazer e inspiração.

“Curvas Algébricas” é um tema considerado importante pelos documentos norteadores do ensino básico no Brasil, PCN’s, CBC e BNCC porém, pouco ou nunca estudado. Eles trazem as “curvas” na Geometria Analítica, através do estudo das equações de retas, circunferências e cônicas, ou inseridos em conteúdos como Funções.

As atividades apresentadas para as turmas do ensino básico foram bem interativas e houve a participação efetiva dos alunos, que se mostraram bem interessados. Para alunos do nono ano do ensino fundamental abordamos o tema de uma forma superficial, fazendo menção aos pontos no infinito. Através de slides contendo obras de artistas renascentistas apresentamos a ideia de ponto no infinito. Os alunos criaram desenhos mostrando a interseção de retas paralelas no infinito, como estradas, linhas férreas, horizontes...

Já com os alunos do primeiro ano do ensino médio realizamos um trabalho utilizando o software GEOGEBRA para representar e analisar a quantidade de pontos de interseção entre curvas. Os alunos “descobriram” e compreenderam que o número de interseções entre duas curvas é no máximo o produto de seus graus.

A Geometria Algébrica, que é uma sub área da Álgebra, foi utilizada neste estudo para que pudéssemos entender o Teorema de Bézout. Em sua versão afim: “*Se  $F, G$  são duas curvas planas afins sem componentes em comum,  $F$  de grau  $m$  e  $G$  de grau  $n$ , então o número de pontos de interseção  $F \cap G$ , contados com suas multiplicidades, é menor do que ou igual a  $m \cdot n$* ”, foi necessário o estudo de conceitos como interseção de curvas, multiplicidades de interseção, cálculo da resultante, entre outros. E para compreender sua versão projetiva: “*Se  $F, G$  são duas curvas planas projetivas sem componentes em comum,  $F$  de grau  $m$  e  $G$  de grau  $n$ , então o número de pontos de interseção  $F \cap G$ , contados com suas multiplicidades, é igual a  $m \cdot n$* ”, foi necessário também conhecer o plano projetivo e suas coordenadas homogêneas.


O Teorema de Bézout foi demonstrado neste trabalho em sua versão afim, ficando a demonstração de sua versão projetiva como tema para estudos posteriores.

# Anexos

---

Encontram-se anexados nesta seção, os planos de aula e trabalhos dos alunos.

## A.1 Aula do nono ano

	GOVERNO DO ESTADO DE MINAS GERAIS Secretaria de Estado de Educação Escola Estadual Ângela Maria de Oliveira
PROFESSOR: SIMONE APARECIDA DA SILVA DISCIPLINA: MATEMÁTICA SÉRIE: 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	

### PLANO DE AULA

#### INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PROJETIVA

Pré requisitos:

- Conceitos básicos de Geometria Euclidiana
- Posição Relativa entre Retas

#### Justificativa

Mostrar ao aluno do 9º ano do ensino fundamental, que existe um outro plano geométrico onde retas paralelas se encontram, o plano projetivo.

#### Objetivos

Espera-se que ao final da aula, os alunos sejam capazes de:

- Reconhecer retas paralelas e retas concorrentes na Geometria Euclidiana;
- Entender que existem outros tipos de geometria além da Euclidiana;
- Perceber a necessidade de uma representação geométrica na arte renascentista;
- Concluir que duas retas paralelas podem se encontrar no infinito.

### Metodologia

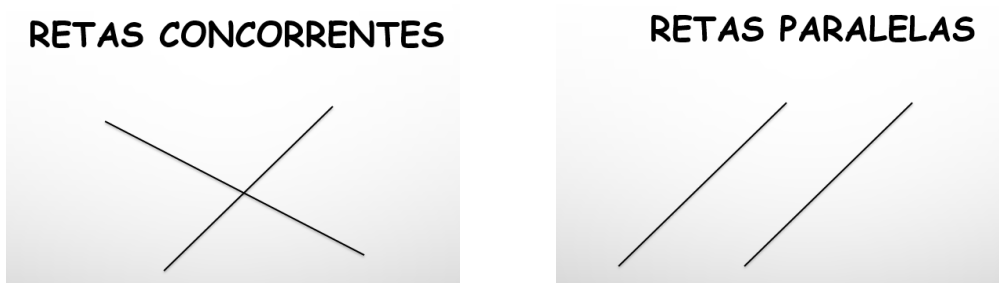
Como método de ensino usaremos o Data Show para apresentação de slides que foram preparados pela professora. Utilizaremos folhas A4 e lápis de cor para o registro dos alunos. Essa aula terá a duração de dois horários de 50 minutos.

### Avaliação

A avaliação será feita através da participação dos alunos com troca de ideias sobre o assunto e registro através de desenho de algum ponto abordado na apresentação dos slides.

### APRESENTAÇÃO

Primeiramente vamos recordar alguns conceitos básicos da Geometria Euclidiana:



**Figura A.1:** Retas concorrentes e retas paralelas no Plano Euclidiano

Nos próximos slides serão apresentadas algumas obras renascentistas e falaremos da necessidade de uma representação geométrica para essa arte:



**Figura A.2:** A Última Ceia - Leonardo Da Vinci



**Figura A.3:** A Escola de Atenas - Rafaello Sanzio



Figura A.4: A Santíssima Trindade - Tomasso Masaccio



Figura A.5: Mona Lisa - Leonardo Da Vinci

Com o Golbo Terrestre, teremos um exemplo de Geometria não Euclidiana, a

Geometria Esférica:

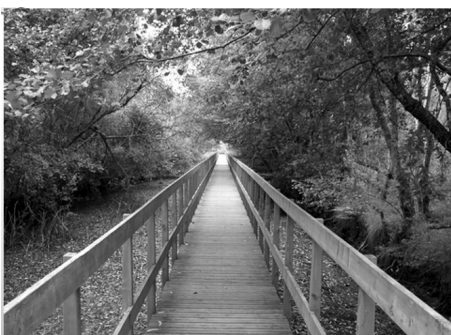


**Figura A.6:** Globo Terrestre

Ainda sobre Geometria não Euclidiana, temos a Geometria Projetiva, com o plano projetivo, onde as retas paralelas se encontram no infinito:

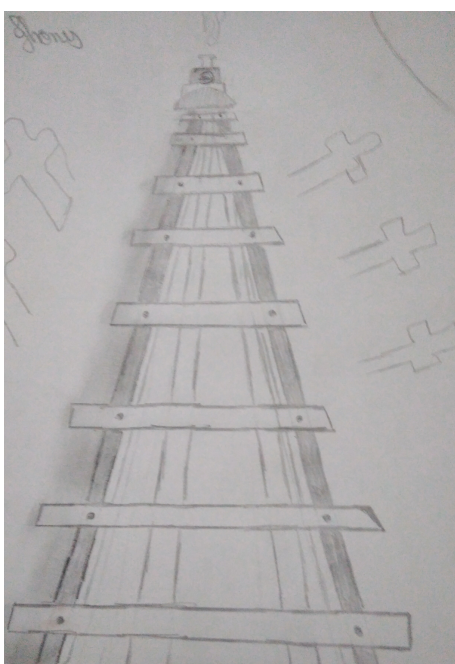
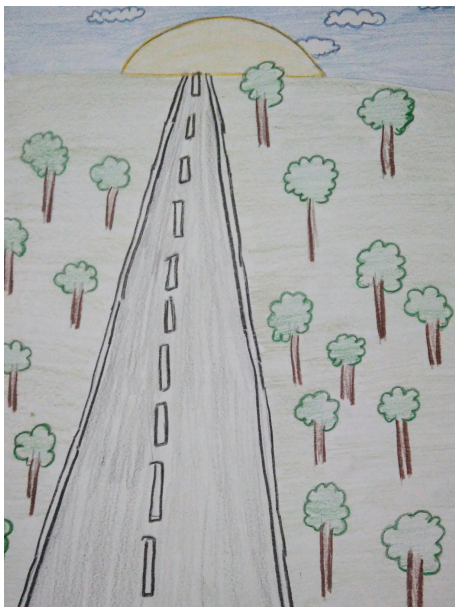


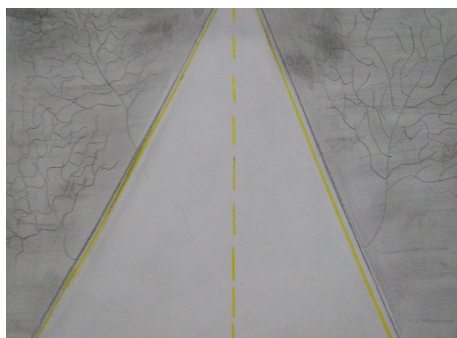
**Figura A.7:** Retas paralelas que se encontram no infinito




**Figura A.8:** Retas paralelas que se encontram no infinito

### A.1.1 Trabalhos dos alunos





## A.2 Aula do primeiro ano

	GOVERNO DO ESTADO DE MINAS GERAIS Secretaria de Estado de Educação Escola Estadual Ângela Maria de Oliveira
PROFESSOR: SIMONE APARECIDA DA SILVA DISCIPLINA: MATEMÁTICA SÉRIE: 1º ANO DO ENSINO MÉDIO	

### PLANO DE AULA

#### INTERSEÇÕES ENTRE CURVAS NO GEOGEBRA

Pré requisitos:

- Função Afim
- Função Quadrática
- Sistemas de Equações

#### Justificativa

O ensino de Curvas no Ensino Básico gira em torno do estudo de funções. Função Afim e Função Quadrática são conteúdos estudados no 1º ano do Ensino Médio de forma bem dinâmica, com definições, determinação do(s) zero(s) da função, construção de gráficos, estudo do sinal, etc.. A aula aqui descrita tem o propósito de representar geometricamente as funções, relacionando-as às equações de retas, cônicas e demais curvas, observando suas interseções, resultado da solução de sistemas de equações.

#### Objetivos

Espera-se que ao final da aula, os alunos sejam capazes de:

- Representar no GeoGebra equações de curvas como retas, cônicas e cúbicas;
- Identificar os pontos de interseção entre essas curvas;
- Relacionar o número de pontos de interseção com o produto dos graus entre as curvas;

- Compreender que o número de pontos de interseção entre uma curva de grau  $m$  e outra de grau  $n$  é menor ou igual ao produto entre eles:  $m \cdot n$ .

### Metodologia

Como método de ensino usaremos o GeoGebra na versão Classic 5, um software matemático criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria e pode ser usado em qualquer nível de ensino. A aula ocorrerá no Laboratório de Informática da escola com a duração de dois horários de 50 minutos. Os alunos seguirão um roteiro preparado pela professora.

### Avaliação

A avaliação será feita através da participação dos alunos nas atividades.

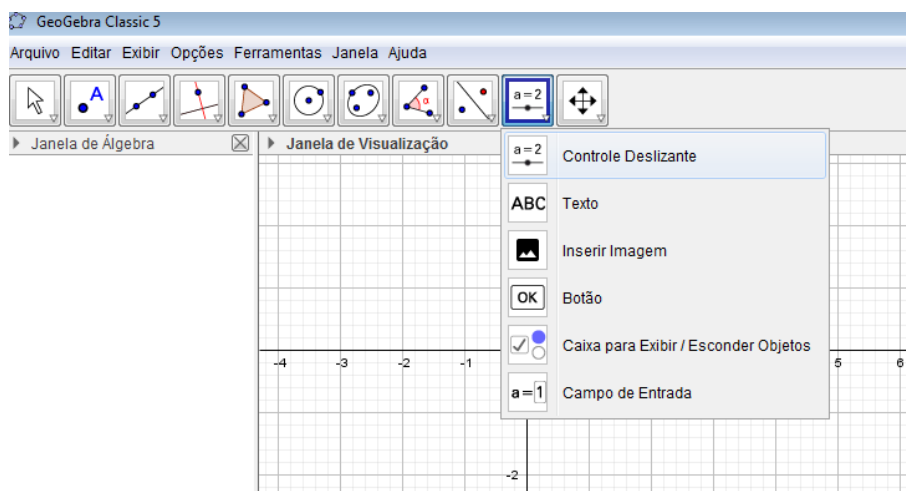
## ATIVIDADES

Nestas atividades, usaremos o GeoGebra na versão Classic 5 para representar graficamente equações de algumas curvas de forma geral, analisando a quantidade de pontos de interseção entre elas.

### Atividade I

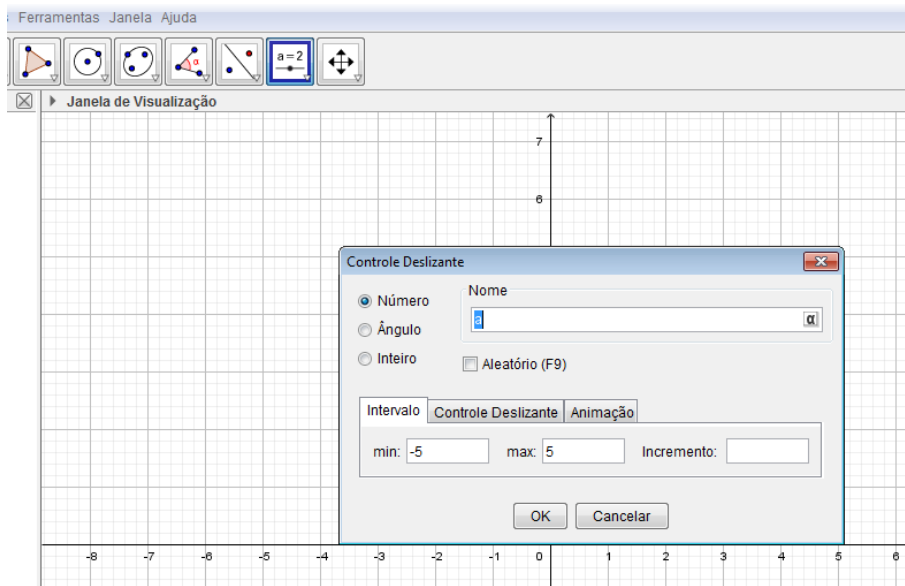
Siga os seguintes passos para analisar as interseções entre curvas:

- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.

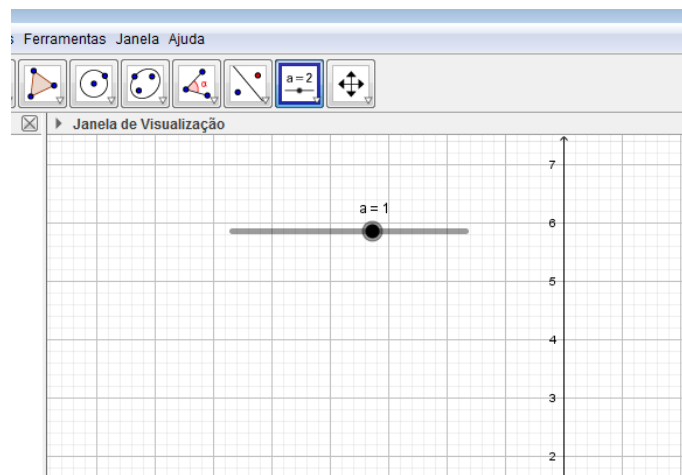


- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela. Clique em “OK”.

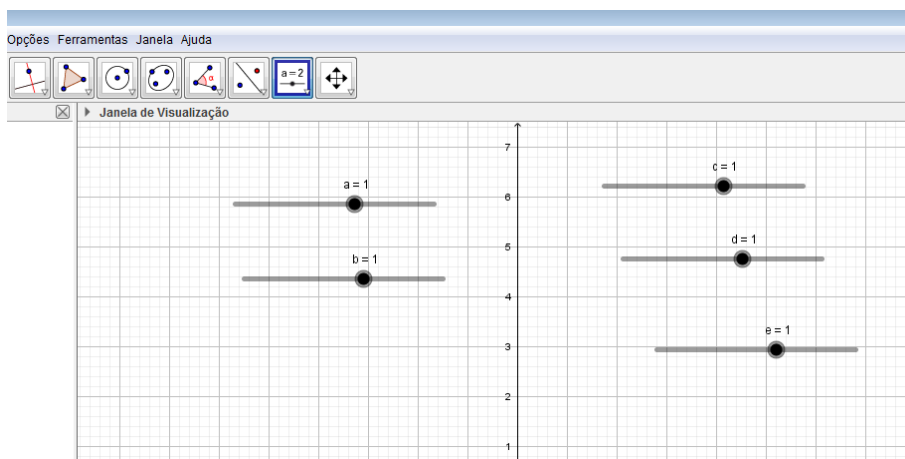




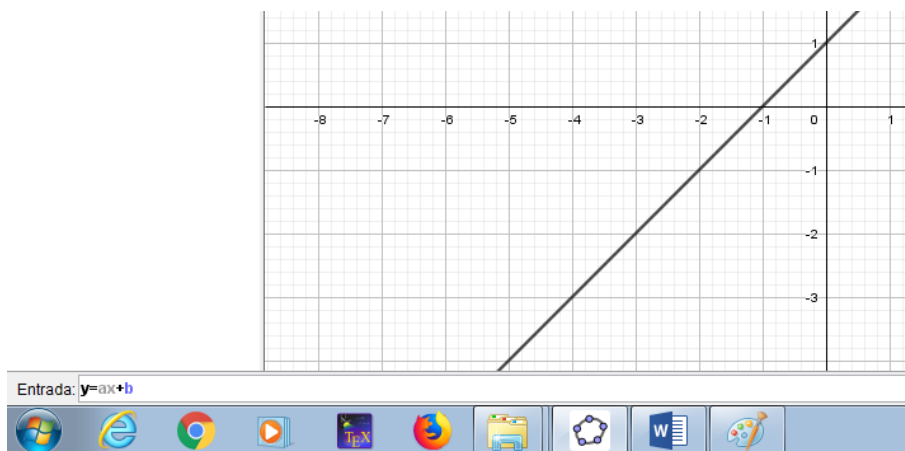
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.



- Repita a operação e insira novos parâmetros  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ .



- No campo “Entrada”, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecla “Enter”.



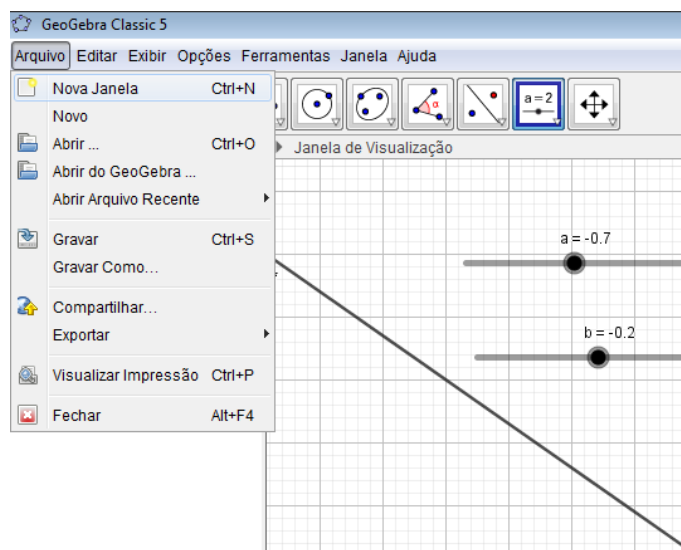
- Digite a equação  $y = cx^2 + dx + e$  de uma parábola e tecla “Enter”.
- Além de observar significados importantes para os coeficientes das equações, podemos também analisar os pontos de interseção entre elas. Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para todos os coeficientes.

Agora responda: Ao variar os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a parábola? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

Para as atividades seguintes repetiremos alguns passos da atividade anterior.

### Atividade II

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.



- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira o parâmetro  $b$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$  de uma elipse e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para o coeficiente  $b$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a elipse? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

### Atividade III

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira o parâmetro  $b$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax + b$  de uma reta e tecla “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$  de uma cúbica singular e tecla “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para o coeficiente  $b$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a reta e a cúbica? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

### Atividade IV

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.

- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira os parâmetros  $b$  e  $c$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax^2 + bx + c$  de uma parábola e tecle “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$  de uma elipse e tecle “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para os coeficientes  $b$  e  $c$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a parábola e a elipse? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

#### Atividade V

- Clique na aba “Arquivo” e selecione a opção “Nova Janela”.
- Na Barra de Ferramentas, clique com o botão esquerdo do mouse, na opção “Controle Deslizante”.
- Em seguida, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização. Automaticamente abrirá uma janela; clique em “OK”.
- Nesse instante, aparecerá o parâmetro  $a$ , com valor inicial igual a 1.
- Repita a operação e insira os parâmetros  $b$  e  $c$ .
- No campo Entrada, que fica na parte inferior da tela, digite a equação  $y = ax^2 + bx + c$  de uma parábola e tecle “Enter”.
- Agora, digite a equação  $x^3 - x^2 + y^2 = 0$  de uma cúbica simples e tecle “Enter”.
- Clique na bolinha do controle deslizante de  $a$  arrastando-a para os lados, assim seu valor será alterado. Repita a operação para os coeficientes  $b$  e  $c$ .

**Agora responda:** Ao variar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , você percebeu se existem pontos de interseção entre a parábola e a cúbica? Se sim, quantos? É uma quantidade fixa?

#### Atividade VI

Vejamos o que acontece quando interceptamos as seguintes curvas. Quantos pontos de interseção podemos observar entre elas?

1.  $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
4.  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
5.  $\begin{cases} y = 5x \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
6.  $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
7.  $\begin{cases} y = -4x - 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
8.  $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
9.  $\begin{cases} y = -4x + 5 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
10.  $\begin{cases} y = -3x^2 + 4x - 2 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
11.  $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 3 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
12.  $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
13.  $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 4 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 0 \end{cases}$
14.  $\begin{cases} y = 3x^2 - 3x + 2 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
15.  $\begin{cases} y = -2x^2 - 3x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
16.  $\begin{cases} y = -2x^2 - x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
17.  $\begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 3 \\ x^3 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Para concluir esta atividade, observe, pense e responda:

- a. Nos itens 1 e 2, quando interceptamos duas curvas de grau 1, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo? ?
- b. Nos itens 3 a 5, quando interceptamos uma curva de grau 1 e uma curva de grau 2, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- c. Nos itens 6 a 9, quando interceptamos uma curva de grau 1 e uma curva de grau 3, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- d. Nos itens 10 a 13, quando interceptamos duas curvas de grau 2, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- e. Nos itens 14 a 17, quando interceptamos uma curva de grau 2 e uma curva de grau 3, quantos pontos de interseção no mínimo podemos observar? E no máximo?
- f. Você observou alguma regularidade na quantidade de interseção de curvas? Podemos dizer que existe alguma relação entre o número de pontos de interseção e o produto dos graus das curvas? Há um valor máximo? Conjecture.

# Bibliografia

---

- [1] Carneiro, M. J. D., Spira, M. e Sabatucci, J. *CBC - Proposta Curricular*. Ed. por SEE-MG. 2007. URL: [http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema\\_crv/index2.aspx?](http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index2.aspx?)
- [2] Coutinho, L. *Convite às Geometrias não Euclidianas*. 2ª ed. Interciência, 2001, p. 116.
- [3] Cox, D., Little, J. e O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. 3ª ed. Springer, 2000.
- [4] Gallian, J. A. *Contemporary Abstract Algebra*. 7ª ed. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.
- [5] Garcia, A. e Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*. 5ª ed. IMPA, 2010.
- [6] Lima, E. L. *Álgebra Linear*. Ed. por IMPA. 7ª ed. 1995.
- [7] MEC, ed. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. 2018. URL: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC\\_19dez2018\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf).
- [8] MEC/SEF, ed. *Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's*. 1997. URL: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>.
- [9] Pitombeira, J. B. e Roque, T. M. *Tópicos de História da Matemática*. 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2012, p. 269.
- [10] Vainsencher, I. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. 3ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996, p. 160.