Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM COM O USO DO PRINCÍPIO DAS GAVETAS E OS LEMAS DE KAPLANSKY

THIAGO AMARAL MELO LIMA

Teresina
2020

THIAGO AMARAL MELO LIMA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM COM O USO DO PRINCÍPIO DAS GAVETAS E OS LEMAS DE KAPLANSKY

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual do Piauí – UESPI, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva

Teresina
2020

L732r Lima, Thiago Amaral Melo.
Resolução de problemas de contagem com o uso do Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky / Thiago Amaral Melo Lima. – 2020.
72 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Teresina - PI, 2020.
Área de Concentração: Ensino da Matemática
"Orientador (a): Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva."

1. Análise combinatória. 2. Resolução de problemas. 3. Princípio das Gavetas. 4. Lemas de Kaplansky. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Ana Angélica Pereira Teixeira (Bibliotecária) CRB 3ª/1217

THIAGO AMARAL MELO LIMA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM COM O USO DO PRINCÍPIO DAS GAVETAS E OS LEMAS DE KAPLANSKY

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática
Aprovado por:

Afonso Norberto da Silva
____
Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva – Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Ítalo Dowell Lira Melo
____
Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Pitágoras Pinheiro de Carvalho
____
Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
JUNHO/2020

Thiago Amaral Melo Lima graduou-se em Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, em 2016. Concluiu Especialização em Ensino de Matemática pela Universidade Cândido Mendes - UCAM, em 2017. Atualmente é professor efetivo da rede pública estadual do Ceará (SEDUC-CE).

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus pais: Eliete Amaral Melo Lima e Salmito Melo Lima, por todo o amor durante minha criação e apoio incondicional aos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, saúde e disposição para conseguir concluir esse curso.

A minha família, por todo amor, carinho, apoio e compreensão.

Aos colegas da turma do PROFMAT/UESPI-2018, que compartilharam os momentos de estudo, tensão, cansaço e alegria, durante esse valioso período de formação. Sobretudo pela amizade construída nesses 2 anos de estudo.

A equipe de professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento matemático, bem como pelas dicas e conselhos valiosos durante todo o curso.

Ao coordenador do curso, Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito por todo o zelo para com nossa turma.

Em especial ao meu orientador Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva, que me direcionou com seus conhecimentos estando sempre disponível para me orientar. Professor ao qual tenho grande respeito e admiração.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para essa conquista, o meu muito obrigado!

Sem saber que era impossível, ele foi lá e fez.

Jean Cocteau

RESUMO

O presente trabalho buscou investigar a compreensão manifestada por alunos do Ensino Médio no que se refere à resolução de problemas de contagem envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Atualmente, tais assuntos não fazem parte do currículo de Matemática da Educação Básica. Porém, neste processo investigativo, defendemos que o estudo desses temas, durante o Ensino Médio, é possível. Visto que os conceitos basilares e/ou pré-requisitos para o estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky estão presente entre os conteúdos estudados na Educação Básica (aritmética básica e ferramentas básicas de contagem, respectivamente). A pesquisa envolveu a participação de alunos da 3ª série do Ensino Médio que estudam em uma escola de tempo integral do estado do Ceará. Para tanto, foram aplicados, em duas etapas, questionários e testes contendo 8 questões envolvendo problemas de contagem. A aplicação desses instrumentos foi intercalada por oficinas para estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky. Os dados obtidos foram analisados e discutidos, tendo como parâmetros o referencial teórico-metodológico, onde constatamos que os alunos do Ensino Médio podem se apropriar dos conceitos do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky. Entretanto, se faz necessário uma consolidação dos conceitos básicos de Análise Combinatória, pois alguns alunos manifestaram dificuldades de compreensão desses conceitos, os quais são indispensáveis na resolução de tais problemas. Esperamos que este estudo possa contribuir na formação e no aperfeiçoamento de alunos e professores de Matemática da Educação Básica.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Resolução de Problemas. Princípio das Gavetas. Lemas de Kaplansky.

ABSTRACT

The present work sought to investigate the understanding expressed by high school students regarding the resolution of counting problems involving the Drawer Principle and Kaplansky's Slogans. Currently, such subjects are not part of the Basic Education Mathematics curriculum. However, in this investigative process, we argue that the study of these themes, during high school, is possible. Since the basic concepts and / or prerequisites for the study of the Principle of Drawers and Kaplansky's Slogans are present among the contents studied in Basic Education (basic arithmetic and basic counting tools, respectively). The research involved the participation of students in the 3rd grade of high school who study at a full-time school in the state of Ceará. For that, questionnaires and tests containing 8 questions involving counting problems were applied in two stages. The application of these instruments was interspersed with workshops to study the Principle of Drawers and Kaplansky's Lemmas. The data obtained were analyzed and discussed, using the theoretical-methodological framework as parameters, where we found that high school students can appropriate the concepts of the Principle of Drawers and Kaplansky's Slogans. However, it is necessary to consolidate the basic concepts of Combinatorial Analysis, as some students expressed difficulties in understanding these concepts, which are indispensable in solving such problems. We hope that this study can contribute to the formation and improvement of students and Math teachers in Basic Education.

Keywords: Combinatorial Analysis. Troubleshooting. Principle of Drawers. Kaplansky Lemma's.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, como mostrado na seção 2.1, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades de resultados existentes em jogos, que incentivou o estudo dos métodos de contagem. A Análise Combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma direta ou indireta, o número de elementos de conjuntos finitos, por vezes, considerando certas condições e/ou restrições.

Atualmente a Análise Combinatória é um tema de grande importância no currículo de Matemática na Educação Básica, pois suas ideias e conceitos possuem aplicações em diversos outros campos, da Matemática, (principalmente na probabilidade e na estatística) como podemos observar em Morgado et al. (2006) [17] e ainda em outras áreas do conhecimento, tais como na Biologia, como evidencia Geraldo Júnior (2008) [22].

Durante minha formação acadêmica bem como em minha prática docente, os problemas de contagem sempre se destacaram, pois os mesmos se apresentam de forma desafiadora e interessante, demandando assim um raciocínio crítico e criativo por parte dos estudantes, na busca de estratégias para a sua resolução. Nesse sentido, Morgado et al. (2006) [17] afirmam que:

> [...] a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fácies de enunciar revelam-se por vezes, difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua resolução.

Sendo assim, a Análise Combinatória destaca-se como uma das áreas da Matemática, abordadas no Ensino Médio, que mais exige flexibilidade e criatividade por parte dos alunos. Isso porque seus problemas estão presentes em diversos outros assuntos, como por exemplo, na geometria, na álgebra e na aritmética, sendo bastante explorados nos vestibulares mais concorridos do país, tais como: no Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, no Instituto Militar de Engenharia – IME e no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Assim como em competições olímpicas, como por exemplo: na Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM e na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática – PCN (BRASIL,1997) [6], o ensino da Análise Combinatória, já era considerado de grande importância para a formação dos estudantes da Educação Básica. Tal necessidade foi reforçada pelos PCN+ (BRASIL, 2002) [7], sugerindo que os alunos adquiram tais conceitos e consigam aplicar os mesmos em situações do dia a dia. Isso pode ser constatado no seguinte trecho dos PCN+ (BRASIL, 2002) [7]:

> A contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade, por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige à construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL,2016) [5] orienta que as práticas de ensino de Análise Combinatória se iniciem a partir do quarto ano do Ensino Fundamental e percorra até o fim do Ensino Médio, aumentando progressivamente o grau de dificuldade dos problemas.

Nesse sentido, compreendemos o quão importante se faz o estudo do raciocínio combinatório, que de acordo com Morgado et al. (2006) [17] pode ser definido como a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas e, no geral, seus problemas podem ser divididos em dois grupos, a saber:

i) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de conjuntos finitos;

ii) Contar ou classificar subconjuntos de um conjunto finito.

Desse modo, além de estudar os métodos básicos de contagem, tais como: o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo, o Princípio da Inclusão-Exclusão, Arranjos, Permutações e Combinações, iremos tratar com maior destaque, outras duas ferramentas de contagem: o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Onde iremos verificar que seus problemas, de modo geral, estão incluídos respectivamente nos grupos i) e ii), citados acima.

Em geral, o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky não são abordados na Educação Básica, conforme minha experiência enquanto professor de Matemática, bem como pela análise de livros didáticos que estão sendo usados atualmente. Apesar disso, tais conceitos podem ser aplicados para auxiliar na resolução de diversos problemas de contagem, considerados difíceis.

Problemas esses que apresentam um número significativo de restrições e/ou casos distintos a serem analisados, de forma que abordá-los apenas com as técnicas básicas de contagem demandaria grande esforço.

Por outro lado, ao fazer uma consulta no Banco de Dissertações[1] do PROFMAT, dos 5084 trabalhos publicados, somente 09 tratam sobre tais assuntos, sendo 08 sobre o Princípio das Gavetas e apenas um único trabalho desenvolve um estudo sobre os Lemas de Kaplansky.

Portanto, entendemos que a presente pesquisa, que tem como objetivo investigar a compreensão manifestada por alunos do Ensino Médio no que se refere à resolução de problemas de contagem envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky,

[1]Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em 08 mar. 2020.

trará contribuições para o aperfeiçoamento de alunos e professores de Matemática da Educação Básica.

Desse modo, organizamos o presente trabalho em 6 capítulos. No capítulo 1, apresentamos os aspectos introdutórios e contextualizamos nosso objeto de estudo. Além disso, expomos o objetivo de nosso trabalho, bem como os motivos que nos levaram a estudar sobre tais temas: o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky.

No capítulo 2, relatamos alguns aspectos históricos sobre o processo de contagem e o desenvolvimento da Análise Combinatória. Em seguida fazemos um estudo sobre os conceitos básicos da Análise Combinatória: o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo, o Princípio da Inclusão-Exclusão, Arranjos, Permutações e Combinações.

Posteriormente, no capítulo 3, abordamos a parte específica de nosso trabalho. Nos dedicamos ao estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky. Apresentando suas definições, fazendo suas demonstrações, além de expor exemplos e algumas aplicações.

Já no capítulo 4, tecemos um breve comentário sobre a importância da resolução de problemas, no ensino da Matemática. Em seguida descrevemos a metodologia geral adotada em nosso trabalho, fazendo uma caracterização da pesquisa, apresentando o campo de pesquisa e os sujeitos envolvidos, bem como os instrumentos de produção e análise de dados.

No capítulo 5, fazemos a análise e discussão detalhada dos resultados da presente pesquisa, tomando como base nosso referencial teórico.

Por fim, no capítulo 6 tecemos um comentário geral sobre o presente trabalho e seus respectivos resultados além de propor possíveis sugestões de estudos futuros sobre o tema.

2 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesse capítulo, inicialmente iremos apresentar alguns aspectos históricos sobre o processo de contagem, conhecendo suas origens, motivação e desenvolvimento. Em seguida apresentaremos um breve estudo sobre os conceitos básicos da Análise Combinatória, tais como: o Princípio Aditivo, o Princípio da Inclusão-Exclusão, o Princípio Multiplicativo, Arranjos, Permutações e Combinações.

2.1 Análise Combinatória: Um Breve Histórico

O ato de "contar", isto é, determinar o número de elementos de conjuntos finitos foi desde cedo uma das necessidades básicas da humanidade, onde se fazia contagem de objetos tomando outros objetos como referência/marcadores. Por exemplo: um pastor ao final do dia, para saber se seu rebanho estava completo bastava estabelecer uma comparação (relação biunívoca), confrontando cada animal do seu rebanho com um objeto conhecido.

Em algumas civilizações esse cotejo "um-a-um" era feito ordenando algumas partes do corpo. Como por exemplo, os Bugilai[2], que usavam uma sequência ordenada do corpo, que era tocada uma a uma, pelo dedo indicador da mão direita, como destacou Gundlach (1992) [12], em sua obra História dos Números Naturais:

> Dedo mínimo da mão esquerda
> Dedo anular da mão esquerda
> Dedo médio da mão esquerda
> Dedo indicador da mão esquerda
> Dedo polegar da mão esquerda
> Pulso esquerdo
> Cotovelo esquerdo
> Ombro esquerdo
> Lado esquerdo do peito
> Lado direito do peito

Assim, por exemplo, para chegarmos à quantidade de animais de um rebanho, bastava lembrar a última parte do corpo que foi tocada e analisar a correspondência ordenada da sequência, já pré-estabelecida, por eles.

Observe que em tal método não era necessário a utilização de palavras para diferentes partes do corpo, pois uma vez fixada tal sequência, cada homem a traria consigo. Nesse sentido, usando métodos semelhantes, como por exemplo: ranhuras em barro, nós em cordas, talhos em paus, desenhos em cavernas e etc, era possível contar até um número elevado, sem que houvesse necessidade de recorrer à palavras.

Posteriormente, com o desenvolvimento da linguagem falada, era razoável que algumas dessas palavras fossem usadas durante o processo de contagem. Conforme Gundlach (1992) [12], no caso dos Bugalia, temos a seguinte lista de palavras, que eram utilizadas para representar as partes do corpo, como mostra a Tabela 1:

[2]Tribo da Nova Guiné.

Tabela 1: Enumeração Bugalia

Enumeração	Numeração	Número
Tarangesa	Dedo mindinho esquerdo	1
Meta Kina	Dedo anelar esquerdo	2
Guigimeta	Dedo médio esquerdo	3
Topea	Dedo indicador esquerdo	4
Manda	Polegar esquerdo	5
Gaben	Pulso esquerdo	6
Trankgimbe	Cotovelo esquerdo	7
Podei	Ombro esquerdo	8
Ngama	Peito esquerdo	9
Dala	Peito direito	10

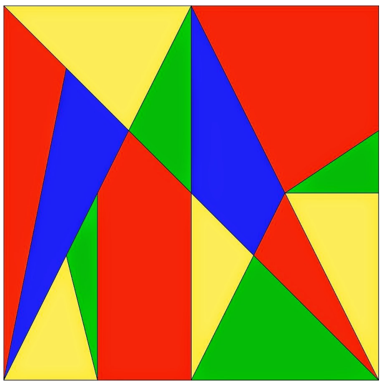
Fonte: Próprio Autor

Com o passar do tempo surgiram os sistemas de numeração de agrupamentos simples, que consistiam em símbolos que eram agrupados com o objetivo de representar uma quantidade desejada. O sistema de numeração de agrupamentos simples mais conhecido é o Quinário[3], que provavelmente foi inspirado na quantidade de dedos de uma mão.

Vale ressaltar que os sistemas de numeração de agrupamentos simples embora cumprissem bem o seu papel, na contagem, possuíam poucas propriedades aritméticas, o que favoreceu o surgimento dos sistemas de numeração posicionais, como por exemplo o sistema Indo-Arábico, utilizado nos dias de hoje. Nesse sentido, a evolução e o aprimoramento de tais métodos de contagem certamente contribuíram para o desenvolvimento do pensamento combinatório.

Ainda na antiguidade, o matemático grego Arquimedes (287 a.C - 212 a.C), propôs um problema: o *Stomachion* (do grego *stomachos*, em português, estômago), como mostra a Figura 1:

Figura 1: Stomachion



Fonte: http://somainfinita.blogspot.com

[3]Sistema de numeração de base numérica cinco. Teremos, portanto, que utilizar cinco dígitos diferentes para representar seus algarismos: 0, 1, 2, 3, 4.

Também conhecido como caixa de Arquimedes, o Stomachion consistia em um jogo, mais precisamente um “quebra-cabeça” composto por 14 peças planas de diversas formas poligonais (originalmente confeccionadas em marfim), tais peças possuíam duas características fundamentais:

1) deviam ser encaixadas para formar um quadrado;

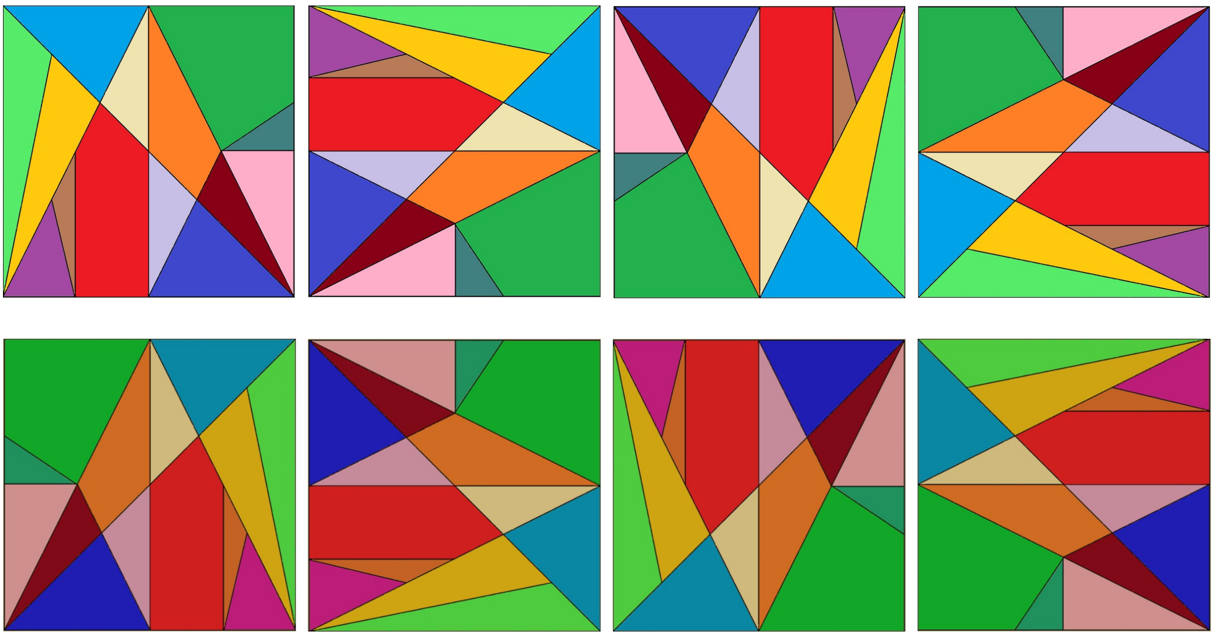
2) a área de cada peça é comensurável[4] com a área do quadrado original (constituído pelas 14 peças).

Em 14 de dezembro de 2003, o jornal americano *The New York Times* publicou um artigo de título *In Archimedes Puzzle, A New Eureka Moment* (em [14] tal artigo pode ser encontrado, na íntegra), que contém os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Dr. Reviel Next, da Universidade de Standford, na Califórnia, onde o mesmo afirma que o *Stomachion* era um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

Mais precisamente, Arquimedes estava interessado em determinar o número de maneiras que o problema poderia ser resolvido. Certamente o que despertou a curiosidade daqueles que tentaram solucionar tal problema foi o fato de, como um jogo simples e com regras claras poderia apresentar um grande número de variações/combinações.

A Figura 2 a seguir exemplifica diferentes combinações para a resolução do referido enigma:

Figura 2: Algumas Soluções do Stomachion



Fonte: https://culturacientifica.com

[4]Cuja medida, em relação a uma unidade previamente fixada, é um número racional.

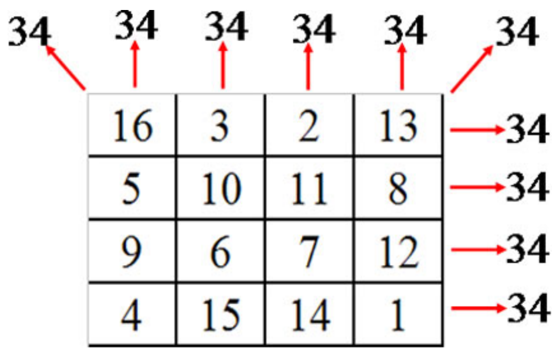
Não se sabe, se Arquimedes conseguiu resolver o tal problema. Porém, hoje sabemos que o mesmo possui 17152 soluções ou, desprezando-se as soluções simétricas, 268 soluções.

Por outro lado, segundo Wieleitner (1928) [23] um dos problemas mais antigos de Análise Combinatória é o da construção de quadrados mágicos.

Como sabemos um quadrado mágico, de ordem n, é uma matriz quadrada, também de ordem n, contendo um grupo ordenado de números naturais (de 1 até n^2), onde cada linha, coluna e diagonal de tal quadrado deve possuir a mesma soma.

A Figura 3, a seguir, exemplifica um quadrado mágico de ordem 4 e soma 34.

Figura 3: Quadrado Mágico de Ordem 4

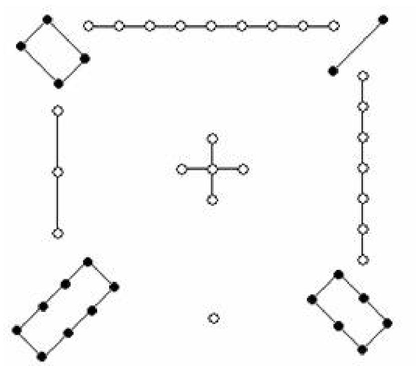


Fonte: https://educador.brasilescola.uol.com.br

Podemos perceber as diversas possibilidades de aplicar os conceitos combinatórios para resolver o problema dos quadrados mágicos, fato esse que chamou atenção de diversos matemáticos daquela época. Atualmente já possuímos diversos algoritmos para solucionar tal problema.

O primeiro quadrado mágico, como ilustra a Figura 4, é conhecido como Lo Shu, que segundo Berge (1971) [4], pode ter sido escrito por volta de 2000 a.C.

Figura 4: Lo Shu



Fonte: https://history.stackexchange.com

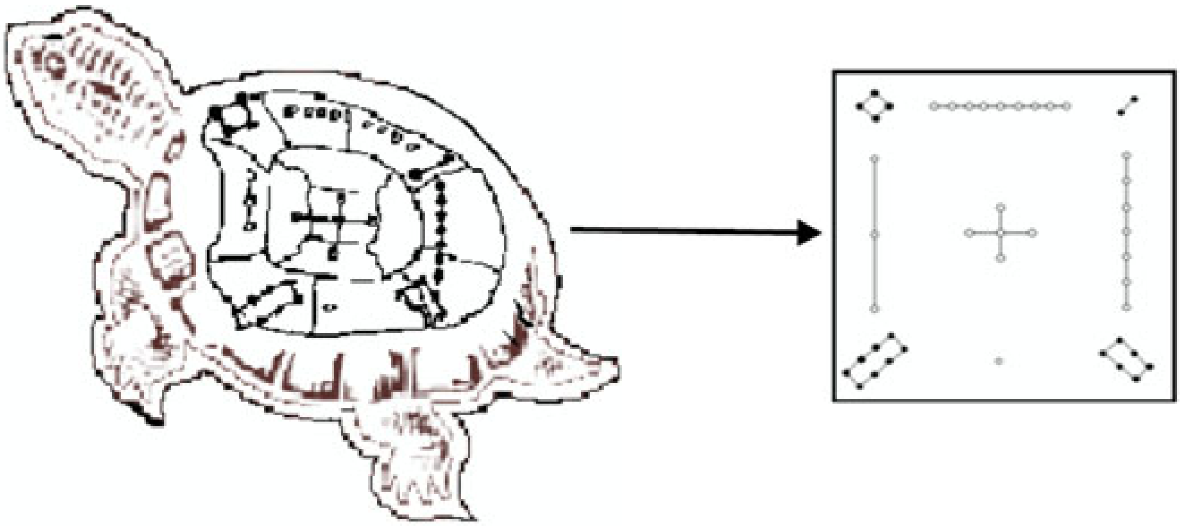
O diagrama mostrado acima, está associado às nove salas do palácio mítico de Ming[5].

[5]Dinastia que governou a China de 1368 a 1644, depois da queda da dinastia Mongol dos Yuan.

Observamos que os quadrados mágicos foram admirados não só pelo seu caráter místico e misterioso, mas também pela busca de métodos/combinações que levassem a construção de tais objetos.

Sobre o surgimento do quadrado mágico Lo Shu, conta-se a seguinte lenda: o imperador Yu, o Grande, estaria a observar um rio quando notou uma tartaruga (que era, na época, considerado um animal sagrado). Em seu casco estava o símbolo que hoje em dia é conhecido pelo nome de Lo Shu. Assim, Yu percebeu que as marcas nas costas da tartaruga, como mostra a Figura 5, poderiam ser associadas com os algarismos de 1 a 9 e que todos eles somavam quinze em todas as direções (linha, coluna e diagonal).

Figura 5: Relação entre o Casco da Tartaruga e o Lo Shu



Fonte: https://matcolegiao.wordpress.com

Temos ainda, de acordo com Morgado et al. (2006) [17], que o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas referentes à Análise Combinatória, sendo que o caso para $n = 2$, já podia ser encontrado nos Elementos de Euclides, por volta de 300 a.C.

Nesse sentido, o matemático e filósofo hindu Báskhara (1114-1185), sabia calcular o número de Permutações, Arranjos e Combinações de n objetos.

Michael Stifel (1486-1567) deu contribuições referentes aos números binomiais, onde por volta de 1550 mostrou como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Já Isaac Newton (1646-1727) mostrou como fazer tal cálculo, usando raciocínio recursivo, pela relação:

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}.$$

Além disso, o matemático Árabe Al-Karaji (no fim do século X) já conhecia a lei de formação dos elementos do Triângulo de Pascal:

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Entre os documentos mais antigos a respeito da Análise Combinatória, podemos citar o Problema 79, contido no Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.), conforme exemplificado na Figura 6.

Figura 6: Papiro de Rhind

Fonte: https://antigoegito.org

Tal problema trazia o seguinte enunciado: "Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hekats[6] de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?" Percebemos aqui, uma forte referência às regras básicas de contagem e suas respectivas aplicações, como reforça Bastos et al, (2016) [3]:

> Sobre a ótica do raciocínio combinatório o problema dos "Bens" sugere a aplicação de dois princípios de grande importância para a resolução de problemas em Análise Combinatória: o "princípio de adição" e o "princípio multiplicativo".

Assim, encerramos nossas considerações históricas sobre o processo de contagem e o desenvolvimento da Análise Combinatória. Percebemos que tal processo está diretamente relacionado à resolução de problemas cotidianos e despertou o interesse de diversos povos.

[6]Medida egípsia, que correspodia a aproximadamente 4,8 litos.

2.2 Conceitos Básicos da Combinatória

Nessa seção, apresentaremos um breve estudo acerca dos conceitos básicos da Análise Combinatória, tais como: o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo, o Princípio da Inclusão-Exclusão, Arranjos, Permutações e Combinações.

Logo depois de cada enunciado, definição e/ou teorema contido nessa seção, apresentaremos alguns exemplos de aplicações, com suas respectivas soluções e/ou considerações.

2.2.1 Princípio Aditivo

Como observado na seção 2.1, o ato de contar foi uma necessidade básica do ser humano, portanto aprender a contar, de modo eficiente, é sem dúvida uma habilidade fundamental, conforme confirma Lima et al. (2006) [15]:

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica Matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação à problemas de contagem.

Nesse sentido, a seguir apresentaremos o enunciado e alguns exemplos da ferramenta mais básica da contagem: o Princípio Aditivo.

Enunciado 2.1. *Seja A um conjunto contendo "a" elementos e B um conjunto contendo "b" elementos, com A e B necessariamente disjuntos*[7]*. Então, pelo Princípio Aditivo, a união dos conjuntos A e B possui "a+b" elementos.*

Exemplo 2.1. *Vanessa aluna do curso de Matemática é uma estudante muito organizada e divide seus pares de meias em duas gavetas, da seguinte maneira: na gaveta A ela guarda os seus 6 pares meias novas (nunca usadas) e na gaveta B, seus 7 outros pares de meias (que já foram usadas pelo menos uma vez). Quantos pares de meias Vanessa possui?*

Solução. *Considerando as gavetas como conjuntos, isto é, seja A o conjunto das meias novas e B o conjunto das meias que já foram usadas pelo menos uma vez. Observe que A e B são conjuntos disjuntos, pois uma meia é nova ou é usada. Assim, pelo Princípio Aditivo podemos afirmar que Vanessa possui $6 + 7 = 13$ pares de meias.*

Exemplo 2.2. *Para sair de um ginásio poliesportivo, dispomos de 3 portões ao norte e 2 portões ao sul, conforme o esquema apresentado na Figura 7. De quantas maneiras distintas, podemos sair de tal ginásio?*

[7] Conjuntos que não possui nenhum elemento em comum.

Figura 7: Representação Ginásio Poliesportivo

Fonte: Próprio Autor

Solução. *Considerando as saídas como conjuntos, isto é, seja A o conjunto das saídas ao norte e B o conjunto das saídas ao sul. Observe que A e B são conjuntos disjuntos. Assim, pelo Princípio Aditivo podemos afirmar que temos $3 + 2 = 5$ maneiras distintas de sair do ginásio poliesportivo considerado.*

Exemplo 2.3. *Numa lanchonete há 8 sabores de salgados e 4 sabores de docinhos. Suponha que Letícia só tenha permissão para comer um salgado ou comer um docinho. Quantos são os possíveis pedidos que Letícia pode fazer?*

Solução. *Seja $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ o conjunto dos sabores de salgados disponíveis e $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ o conjunto dos sabores de docinhos. Perceba que tais conjuntos são disjuntos. Assim, pelo Princípio Aditivo, temos $8 + 4 = 12$ pedidos possíveis.*

Exemplo 2.4. *Quantos são os inteiros entre 1 e 30 que são múltiplos de 3 ou de 7?*

Solução. *Temos que os múltiplos de 3, compreendidos entre 1 e 30, são dados pelo conjunto $M_{(3)} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$. Por outro lado, os múltiplos de 7, compreendidos entre 1 e 30, são dados pelo conjunto $M_{(7)} = \{7, 14, 21, 28\}$. Note $M_{(3)}$ e $M_{(7)}$ são disjuntos. Logo, pelo Princípio Aditivo, temos $9 + 4 = 13$ inteiros entre 1 e 30 que são múltiplos de 3 ou de 7.*

2.2.2 Princípio Multiplicativo

Também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem, esse é certamente, (como o próprio nome sugere: "fundamental") um resultado de extrema importância na Análise Combinatória. Pois com ele, conseguimos resolver a grande maioria dos problemas de contagem.

Além disso, conforme veremos adiante, os conceitos de algumas outras ferramentas básicas de contagem, tais como: Arranjos 2.2.4, Permutações 2.2.5 e Combinações 2.2.6, decorrem da aplicação direta do Princípio Multiplicativo, que será apresentado a seguir.

Teorema 2.1. *Suponha que uma decisão D deva ser tomada e que tal decisão possa ser dividida em n subdecisões, a saber: $d_1, d_2, \cdots, d_n$, que deverão ser tomadas uma após a outra e de modo independente. Suponha ainda que a decisão d_i possa ser tomada de x_i maneiras diferentes, para $i = \{1, 2, \cdots, n\}$. Assim, pelo Princípio Multiplicativo existem $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ modos distintos de se tomar a decisão D.*

Embora possua um enunciado simples, o Princípio Multiplicativo, cuja demostração pode ser encontrada no capítulo 1 da obra [13], nos permite resolver um grande número de problemas combinatórios, conforme veremos a seguir por meio de alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 2.5. *Em uma reunião há* 6 *homens e* 7 *mulheres, de quantas maneiras podemos formar uma dupla, composta por um homem e uma mulher?*

Solução. *Observe que devemos tomar a seguinte decisão D: formar uma dupla. Para isso, dispomos de duas subdecisões, d_1: escolher um homem e d_2: escolher uma mulher. Como temos $x_1 = 6$ maneiras de escolher um homem e $x_2 = 7$ maneiras possíveis para escolher uma mulher, o Princípio Multiplicativo garante que há $6 \cdot 7 = 42$ maneiras de formar uma dupla composta por um homem e uma mulher.*

Exemplo 2.6. *Sabendo que existem* 3 *estradas distintas que ligam as cidades A e B e* 4 *estradas distintas que ligam as cidades B e C, de quantas maneiras diferentes um viajante, partindo da cidade A, pode chegar até a cidade C, passando pela cidade B?*

Solução. *Observe que devemos tomar a seguinte decisão D : chegar até a cidade C. Para isso, dispomos de duas subdecisões, d_1: escolher um trajeto entre as cidades A e B e d_2: escolher um trajeto entre as cidades B e C. Como temos $x_1 = 3$ estradas que ligam as cidades A e B e $x_2 = 4$ estradas que ligam as cidades B e C, pelo Princípio Multiplicativo, temos $3 \cdot 4 = 12$ maneiras diferentes de chegar até a cidade C, partindo da cidade A e passando pela cidade B.*

Exemplo 2.7. *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando as cores azul, verde e amarelo, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos essa bandeira pode ser colorida?*

Solução. *Observe que devemos tomar a seguinte decisão D: colorir a bandeira. Para isso, dispomos de quatro subdecisões: escolher uma cor para pintar cada uma das* 4 *listras. Note que há* 3 *modos de escolher a cor para pintar a primeira listra (azul, verde ou amarelo); tomada tal decisão, temos* 2 *modos para escolher a cor que será usada para pintar a segunda listra (pois não podemos escolher a mesma tonalidade usada na faixa anterior); tomada tal decisão, teremos de modo análogo, duas opções de cores para pintar a terceira listra e duas opções de cores para pintar a quarta listra. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ maneiras de colorir tal bandeira.*

Exemplo 2.8. *Quantos números de três algarismos distintos podemos formar?*

Solução. *Note que ao escolher o primeiro dígito (o algarismo das centenas), temos apenas* 9 *opções, pois o algarismo* 0 *não pode ser escolhido. Para o segundo dígito (o algarismo das dezenas) também temos* 9 *opções, pois o mesmo não pode ser igual ao primeiro dígito escolhido. Por fim, para o terceiro dígito (o algarismo das unidades) temos apenas* 8 *opções, pois o mesmo não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígito, escolhidos anteriormente. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos* $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ *números de três dígitos distintos.*

Sobre a resolução de problemas em Análise Combinatória, Morgado [17], recomenda algumas estratégias, que podem ser resumidas da seguinte maneira:

1) **Postura.** Devemos sempre nos colocar no lugar da pessoa que deve desempenhar a ação solicitada, no problema;

2) **Divisão.** Devemos sempre que possível dividir a decisão a ser tomada, em decisões mais simples;

3) **Não adiar dificuldades.** Se existe uma decisão que seja mais restrita que as demais, esta deve ser tomada em primeiro lugar.

Nesse sentindo, perceba que no Exemplo 2.5 nos colocamos no lugar da pessoa que deveria formar as duplas, assim como no Exemplo 2.7 nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira.

Por outro lado, no Exemplo 2.6 dividimos o problema em duas etapas: escolher uma estrada que ligue as cidades A e B e escolher uma estrada que ligue as cidades B e C.

Por fim, no Exemplo 2.8, a escolha do primeiro dígito era mais restrita que as demais, essa foi portanto, a primeira decisão que tomamos.

2.2.3 Princípio da Inclusão-Exclusão

Antes de enunciar tal princípio, devemos fazer um breve comentário sobre duas operações fundamentais entre conjuntos, são elas: a União e a Interseção.

A União entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, representa o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A "ou" ao conjunto B. Por outro lado, a Interseção entre dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, representa o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A "e" ao conjunto B.

Feito tais considerações, vejamos a seguir o que diz o Princípio da Inclusão-Exclusão:

Teorema 2.2 (Para Dois Conjuntos)**.** *Dados dois conjuntos* A *e* B*, o número de elementos de* $A \cup B$*, representado por* $N(A \cup B)$ *é dado por:* $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$*.*

Ressaltamos que a generalização de tal teorema bem como sua respectiva demonstração pode ser encontrada no capítulo 2 do texto [10].

Exemplo 2.9. *Em uma turma de* 30 *alunos de Matemática olímpica,* 12 *alunos estudam geometria,* 8 *estudam contagem e* 5 *estudam geometria e contagem. Quantos alunos dessa turma estudam pelos menos uma disciplina dentre geometria e contagem?*

Solução. *Denotando por A o conjunto dos alunos que estudam geometria e por B o conjunto dos alunos que estudam contagem, para resolver tal problema basta determinar o número de elementos da união entre os conjuntos A e B. Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão temos que:* $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 12 + 8 - 5 = 15$ *alunos estudam pelos menos uma disciplina dentre geometria e contagem.*

Exemplo 2.10. *Quantos números inteiros entre* 1 *e* 689 *são divisíveis por* 3 *ou por* 5*?*

Solução. *Seja A o conjunto dos números inteiros entre* 1 *e* 689 *que são divisíveis por* 3*, ou seja,* $A = \{3, 6, 9, \cdots, 687\}$*. Seja B o conjunto dos números inteiros entre* 1 *e* 689 *que são divisíveis por* 5*, ou seja,* $B = \{5, 10, 15, \cdots, 685\}$*. Assim, temos que $A \cap B$ representa o conjunto dos números inteiros entre* 1 *e* 698 *que são divisíveis por* 3 *e* 5 *simultaneamente, ou seja,* $A \cap B = \{15, 30, 45, \cdots, 675\}$*. Nesse sentido, para resolver o referido problema, basta calcular o número de elementos da união entre os conjuntos A e B. Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão temos* $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 229 + 137 - 45 = 321$ *números inteiros entre* 1 *e* 689 *que são divisíveis por* 3 *ou por* 5*.*

2.2.4 Arranjos

Antes de prosseguir com a apresentação das demais ferramentas de contagem é necessário definir a notação fatorial.

Definição 2.1. *Seja n um número inteiro não negativo, ou seja, $n \in \mathbb{N}$. Definimos $n!$ (lê-se "n fatorial"), pelas relações a seguir:*

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \forall\ n \geq 2 \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Feito tais considerações, podemos definir Arranjo.

Definição 2.2. *Segundo Hazzan (2013) [13], considerando um conjunto A com m elementos, ou seja, $A = \{\ a_1, a_2, ..., a_m\ \}$, chamamos de arranjo dos "m elementos tomados r a r" $(1 \leq r \leq m)$ qualquer $r-upla$ (sequência de r elementos) formados por elementos de A, todos distintos.*

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, estudado da seção 2.2.2, temos que o número de Arranjos (sequências ordenadas) de m elementos tomados r a r é dado por:

$$\underbrace{A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot [m-(r-1)]}_{r fatores} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Exemplo 2.11. *Em uma corrida de rua, participam* 40 *atletas. De quantas maneiras distintas o pódio pode ser composto, isto é, de quantas maneiras diferentes podem ser ocupados os postos de 1º lugar, 2º lugar e 3º lugar?*

Solução. *Observe que a ordem de escolha dos atletas que devem ocupar respectivamente os postos de 1º lugar, 2º lugar e 3º lugar, é importante, ou seja, influencia na resolução do problema. Por exemplo, escolhendo a sequência de atletas* (a_1, a_2, a_3)*, teremos o atleta* a_1 *em 1º lugar, o atleta* a_2 *em 2º lugar e o atleta* a_3 *em 3º lugar. Por outro lado, escolhendo a sequência de atletas* (a_2, a_3, a_1)*, teremos o atleta* a_2 *em 1º lugar, o atleta* a_3 *em 2º lugar e o atleta* a_1 *em 3º lugar. Logo, basta determinar o número de Arranjos de "40 elementos tomados 3 a 3". Portanto, há* $A_{40,3} = \dfrac{40!}{(40-3)!} = 59280$ *maneiras diferentes de compor o pódio.*

Exemplo 2.12. *De um baralho de 52 cartas, 4 são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas podemos obter?*

Solução. *Perceba que cada um dos resultados é uma quádrupla ordenada de cartas* (a, b, c, d)*, onde "a" é a 1ª carta retirada, "b" é a 2ª carta retirada, "c" é a 3ª carta retirada e "d" é a 4ª carta retirada. Logo temos* $A_{52,4} = \dfrac{52!}{(52-4)!} = 6497400$ *sequências possíveis.*

Perceba que tais exemplos poderiam ser facilmente resolvidos apenas aplicando o Princípio Multiplicativo, estudado na seção 2.2.2.

2.2.5 Permutações

Neste tópico estudaremos os conceitos das Permutações Simples 2.3, Permutações com Repetição 2.4 e das Permutações Circulares 2.5.

Fazendo uma aplicação direta do Princípio Multiplicativo, estudado da seção 2.2.2, podemos concluir que o número de maneiras de ordenar n objetos diferentes, entre si, pode ser obtido fazendo: $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n!$

Definição 2.3 (Permutações Simples)**.** *Segundo Morgado et al. (2006) [17] cada uma das ordenações desses* n *objetos é uma Permutação Simples de* n *objetos distintos, sendo representado por* $P_n = n!$

Exemplo 2.13. *Quantos são os anagramas*[8] *da palavra ESTUDO? Quantos desses anagramas são iniciados por vogal?*

[8]Resultado do rearranjo das letras de uma palavra ou expressão para produzir outras palavras ou expressões, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez. Por exemplo, ignorante é um anagrama da palavra argentino.

Solução. *Perceba que cada anagrama da palavra ESTUDO, nada mais é do que a ordenação das letras E,S,T,U,D,O. Portanto, como estamos interessados em ordenar 6 letras diferentes, usando os conceitos de Permutações Simples, temos* $P_6 = 6! = 720$ *anagramas. Agora, devemos determinar quantos desses anagramas iniciam por vogais, para tanto, observe que na palavra ESTUDO, temos 3 vogais, ou seja, temos 3 escolhas possíveis para a primeira letra de nossos anagramas. Feito tal escolha, basta permutar as 5 letras restantes. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, teremos* $3 \cdot P_5 = 360$ *anagramas desse tipo.*

Por outro lado, temos os casos de permutações com elementos nem todos distintos, ou seja, Permutações com Repetição. Nestes casos, devemos observar tal particularidade e pensar em outra estratégia de contagem. Analisemos, por exemplo a palavra ANA, onde temos os seguintes anagramas possíveis:

NAA, ANA, AAN

Observe que o total de anagramas é $3 \neq P_3 = 3! = 6$. Pois, devemos lembrar que $P_n = n!$ é o resultado obtido considerando todas as permutações possíveis como distintas, ou seja, as Permutações Simples, conforme estudado na Definição 2.3. Porém, na palavra em questão temos letras que se repetem (letra "A") e que ao permutá-las, iremos continuar com a mesma palavra.

Então, nesses casos devemos observar quantas Permutações podemos fazer com essas letras repetidas. E para retirar o aparente "erro na contagem" do número Permutações, basta dividirmos n pelo produto de todas as Permutações de cada um dos elementos repetidos.

Como na palavra ANA temos uma letra que se repete duas vezes, para determinar o total de anagramas fazemos: $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$. Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 2.4 (Permutações Com Repetição). *Considere n elementos, onde existem α deles iguais entre si, β deles iguais entre si, γ deles iguais entre si, etc. O número de Permutações desses elementos é dado por:*

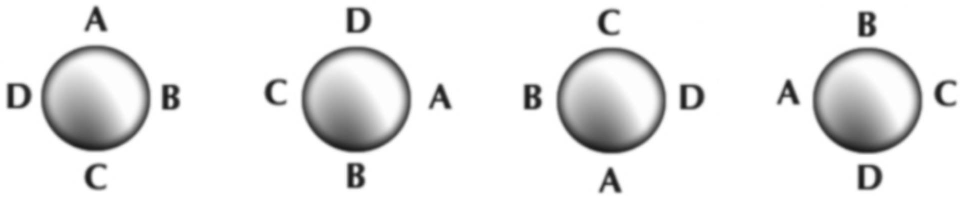
$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \cdot \ldots}$$

Exemplo 2.14. *Quantos são os anagramas da palavra BATATA?*

Solução. *Como há 3 letras A e 2 letras T, temos que o número de anagramas da palavra BATATA é* $P_6^{3,2} = \dfrac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$.

Pensemos agora no seguinte problema: de quantos modos 4 crianças podem formar uma roda de ciranda? É razoável que pensemos inicialmente, que para solucionar tal problema basta ordenar essas 4 crianças, fazendo $P_4 = 4! = 24$. Entretanto, as rodas ABCD, DABC, CDAB, BCDE são iguais como mostra a Figura 8, já que na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si.

Figura 8: Permutação Circular



Fonte: Próprio Autor

Como observamos acima, cada roda pode ser "rotacionada"de quatro modos diferentes. Assim, em nossa contagem inicial de 24 rodas, contamos cada uma dessas rodas 4 vezes. Portanto a resposta correta será dada por: $\frac{24}{4} = 6$. O que de modo geral, sugere a seguinte definição:

Definição 2.5 (Permutações Circulares). *Segundo Morgado (2009) [18] o número de maneiras de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas idênticas é dado por:* $(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

Exemplo 2.15. *De quantas maneiras 7 crianças, dentre elas: Ana e Beto, podem ser sentar ao redor de uma messa circular, de modo que Ana e Beto fiquem juntos (lado a lado)?*

Solução. *Inicialmente observe que para que Ana e Beto fiquem juntos, devemos considerá-los como uma "única criança". Assim devemos fazer* $(PC)_6$*, note também que Ana e Beto podem ficar lado a lado de 2 maneiras diferentes (Ana-Beto ou Beto-Ana). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos um total de* $2 \cdot (PC)_6 = 240$ *maneiras.*

2.2.6 Combinações

Definição 2.6. *Segundo Santos, Melo e Murari (2007) [21], o número de Combinações de "n" elementos tomados p a p, onde* $n \geq 1$ *e* $p \leq n$*, pode ser definido como o número de escolhas não ordenadas com p desses n elementos e/ou o número de subconjuntos de p com n elementos e pode ser obtido fazendo:*

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Exemplo 2.16. *Em uma turma de estudantes do curso Física há 20 alunos, quantas comissões contendo 3 alunos podem ser formadas?*

Solução. *Observe que tal problema trata de conjuntos onde a ardem não é importante pois, por exemplo, a comissão formada pelos alunos* $\{a, b, c\}$ *é equivalente à comissão formada pelos alunos* $\{b, c, a\}$*. Dessa forma basta calcular o número de Combinações de 20 elementos tomados 3 a 3. Assim, podemos formar* $C_{20,3} = 1140$ *comissões.*

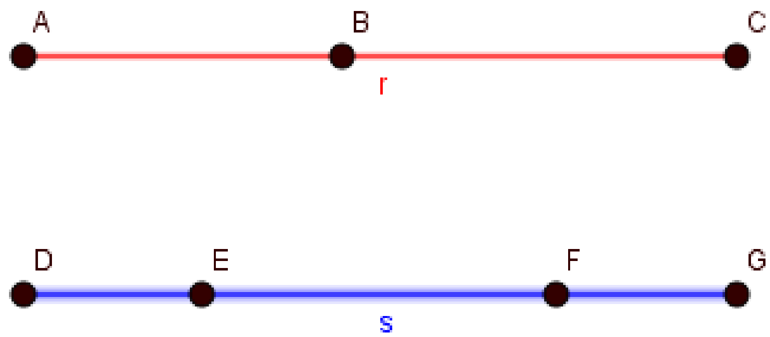
Exemplo 2.17. *Em uma reunião há* 6 *homens e* 3 *mulheres, quantos grupos de* 5 *pessoas podem ser formados contendo necessariamente duas mulheres?*

Solução. *Note que, o grupo formado deve conter duas mulheres e consequentemente três homens. Assim, para escolher as mulheres que farão parte do grupo basta tomar* $C_{3,2}$*, de modo análogo, para escolher os homens que irão compor o grupo basta tomar* $C_{6,3}$*. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, teremos um total de* $C_{3,2} \cdot C_{6,3} = 60$ *grupos distintos.*

Exemplo 2.18. *Considere duas retas paralelas* r *e* s*. Sabendo que os pontos* A, B, C *pertencem a reta* r *e os pontos* D, E, F, G *pertencem a reta* s*, quantos triângulos com vértices em tais pontos podemos formar?*

Solução. *A situação descrita no problema pode ser representada pela Figura 9:*

Figura 9: Representação Exemplo 2.18



Fonte: Próprio Autor

Perceba que para formar triângulos com vértices nos pontos A, B, C, D, E, F, G*, temos duas possibilidades:*

- *escolher* 2 *pontos da reta* r *e* 1 *ponto da reta* s *e isto pode ser feito de* $C_{3,2} \cdot C_{4,1} = 3 \cdot 4 = 12$ *maneiras.*

- *escolher* 1 *ponto da reta* r *e* 2 *pontos da reta* s *e isto pode ser feito de* $C_{3,1} \cdot C_{4,2} = 3 \cdot 6 = 18$ *maneiras.*

Portanto pelo Princípio Aditivo, podemos formar 30 triângulos com vértices no pontos A, B, C, D, E, F, G.

3 OUTROS MÉTODOS DE CONTAGEM

Nesse capítulo, iremos apresentar um estudo sobre dois outros métodos de contagem, são eles: o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Evidenciando seus resultados, teoremas, demonstrações e exemplos de aplicação.

3.1 O Princípio das Gavetas

O Princípio das Gavetas também conhecido como Princípio das Casa dos Pombos ou Princípio de Dirichlet[9], apesar de possuir um enunciado simples e bastante intuitivo, pode ajudar a resolver inúmeros problemas sofisticados de Matemática, não apenas de combinatória, como também de geometria, álgebra e aritmética, por exemplo.

Figura 10: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Fonte: http://clubes.obmep.org.br

A seguir apresentaremos o Princípio das Gavetas, com sua respectiva demonstração, seguida por alguns exemplos de aplicação.

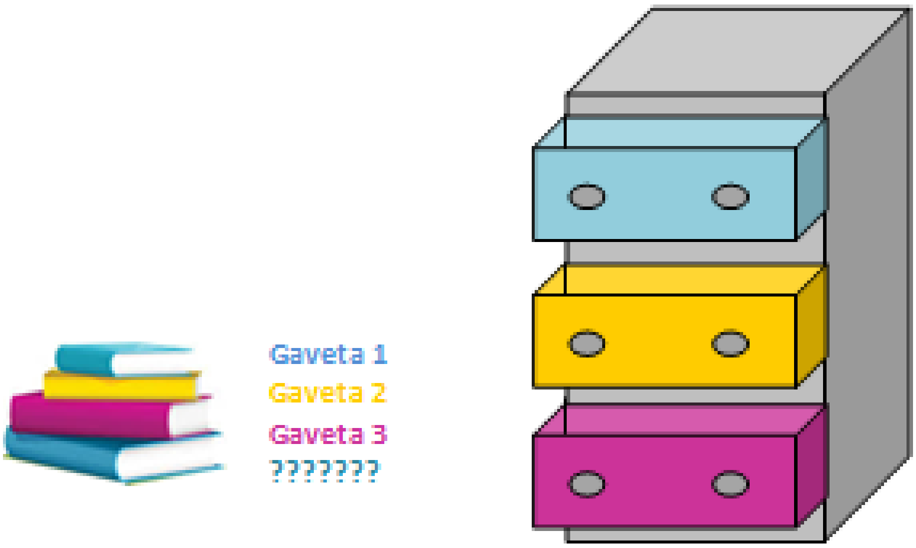
Teorema 3.1. *Se n objetos forem colocados em $(n-1)$ gavetas, pelo menos uma das gavetas receberá mais de um objeto.*

Demonstração. *Suponha por absurdo, que em cada uma das $(n-1)$ gavetas tenha no máximo 1 objeto, assim o número total de objetos nelas colocados será, no máximo $(n-1)$, o que contradiz o fato de termos n objetos. Logo, por absurdo, segue o resultado.* ∎

[9]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 — 1859) foi um matemático alemão, a quem se atribui a moderna definição formal de função. Teve contribuições relevantes em diversos campos da Matemática, tais como: teoria dos números, estudo das series, funções analíticas e equilíbrio de sistemas.

Exemplo 3.1. *Suponha que tenhamos* 4 *livros e queremos colocá-los em* 3 *gavetas, de modo que em cada gaveta deva conter apenas um livro. Tal distribuição é possível?*

Figura 11: Princípio das Gevetas



Fonte: http://clubes.obmep.org.br

Solução. *A resposta é não! Tal situação, ilustrada na Figura 11, representa uma aplicação direta do Princípio das Gavetas. De fato, suponha que coloquemos o primeiro livro na primeira gaveta (gaveta azul), o segundo livro na segunda gaveta (gaveta amarela) e o terceiro livro na terceira gaveta (gaveta roxa), sendo assim ainda restaria o quarto livro para ser alocado, mas cada uma das* 3 *gavetas já possui um livro. Assim, o Teorema 3.1 garante que haverá pelo menos uma gaveta com mais de um livro.*

Como veremos nos exemplos a seguir, uma boa estratégia é identificar, em cada situação problema, os elementos que representam os "objetos", bem como os elementos que representam as "gavetas"as quais receberão esses objetos. E em seguida, observar a relação existente entre ambos.

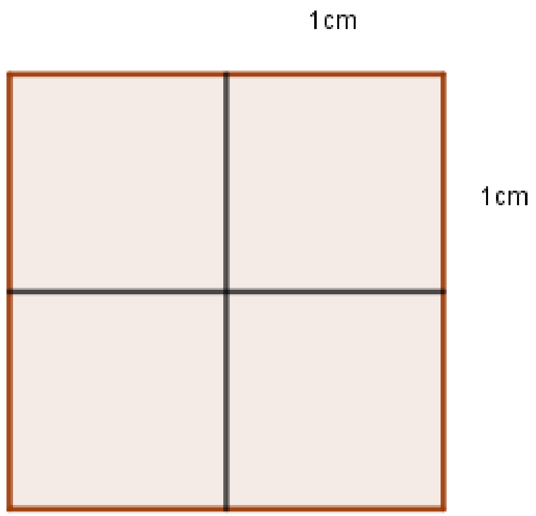
Exemplo 3.2. *Mostre que em um grupo de* 13 *pessoas, pelo menos duas delas, nasceram no mesmo mês.*

Solução. *Observe que temos* 13 *objetos (pessoas) que devem ser distribuídos em* 12 *gavetas (meses do ano). Logo, pelo Princípio das Gavetas temos que pelo menos duas dessas pessoas nasceram no mesmo mês.*

Exemplo 3.3. *Prove que, ao escolher* 5 *pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado* $2cm$*, existe pelo menos dois pontos cujo distância entre ele é menor que ou igual* $\sqrt{2}cm$*.*

Solução. *Inicialmente, podemos dividir o quadrado de lado $2cm$ em quatro quadrados de lado $1cm$, conforme mostra a Figura 12*

Figura 12: Quadrado Dividido



Fonte: Próprio Autor

Note que temos 5 "objetos"(pontos) e apenas 4 "gavetas"(quadrados de lado $1cm$). Assim, pelo Princípio das Gavetas, temos que dois desses pontos pertencerão ao mesmo quadrado. E como sabemos a maior distância entre dois desses pontos será, no máximo, igual a diagonal do quadrado de lado $1cm$, ou seja, $\sqrt{2}cm$.

Exemplo 3.4. *Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.*

Solução. *Considere os $(n+1)$ primeiros termos da sequência $1, 11, 111, 1111, ...$ Observe que ao dividir tais termos por n, teremos como possíveis restos: $0, 1, 2, 3, \cdots, (n-1)$. Assim, teremos $(n+1)$ "objetos"(os termos da sequência) e apenas n "gavetas"(os possíveis restos). Portanto, o Princípio das Gavetas garante que há pelo menos dois números dessa sequência que quando divididos por n deixam o mesmo resto.*
Por fim, sejam $x_p = 11...1$(p algarismos) e $x_q = 11...1$(q algarismos), com $p < q$ esses números. Daí temos que a diferença($x_p - x_q = 11...10...0$) é um múltiplo de n com p algarismos 0 e $(q-p)$ algarismos 1, donde seque o resultado.

Feito tal estudo, iremos apresentar a seguir três generalizações do Princípio das Gavetas, por meio dos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4. Para tanto, devemos recordar a notação $\lfloor x \rfloor$[10] que associa cada número real x, o maior número inteiro menor ou igual a x.

[10] Conhecida como função piso de x ou função chão de x.

Teorema 3.2. *Se n gavetas são ocupadas por $nk+1$ objetos, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k+1$ objetos.*

Demonstração. *Suponha por absurdo, que em cada uma das n gavetas tenha no máximo k objetos, assim o número total de objetos nelas colocados será, no máximo nk, o que contradiz o fato de existirem $nk+1$ objetos. Logo, por absurdo, segue o resultado.* ■

Exemplo 3.5. *Considere uma bolsa que contém 4 canetas vermelhas, 5 canetas azuis, 6 canetas pretas e 9 canetas verdes. Qual o menor número de canetas que devemos retirar (ás cegas) de modo que tenhamos certeza de termos retirado, pelo menos 3 canetas de mesma cor?*

Solução. *Note que dispomos de 4 gavetas (as 4 cores diferentes, de canetas), assim usando o Teorema 3.2, temos: $4 \cdot 2 + 1 = 9$. Logo para que tenhamos certeza de termos retirado 3 canetas de mesma cor, devemos fazer, no mínimo 9 retiradas.*

Teorema 3.3. *Se m objetos são colocados em n gavetas (com $m > n$), então pelo menos uma gaveta conterá, no mínimo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ objetos.*

Demonstração. *Suponha por absurdo, que em cada uma das n gavetas tenha no máximo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ objetos, assim o número total de objetos nelas colocados será, no máximo:*

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1$$

o que contradiz o fato de existirem m objetos. Logo, por absurdo, segue o resultado. ■

Exemplo 3.6. *Prove que em uma turma de 37 alunos, pelo menos 6 deles nasceram no mesmo dia da semana.*

Solução. *Neste exemplo temos 7 gavetas (dias da semana) e 37 objetos (pessoas). Assim, tomando $m = 37$ e $n = 6$ e usando o Teorema 3.2, temos que:*

$$\left\lfloor \frac{37-1}{7} \right\rfloor + 1 = 5 + 1 = 6$$

Ou seja, pelo menos 6 alunos nasceram no mesmo dia da semana.

Teorema 3.4. *Seja n o número de gavetas e k número um inteiro positivo. Coloquemos a_1 objetos na 1^a gaveta, a_2 objetos na 2^a gaveta, $\cdots$, a_n objetos na $n-$ésima gaveta. Se a média aritmética:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > k$$

então necessariamente, uma das gavetas conterá pelo menos $(k+1)$ objetos.

Demonstração. *Suponha por absurdo, que em cada uma das* n *gavetas tenha no máximo* k *objetos, ou seja:*

$$\begin{aligned} a_1 &\leq k \\ a_2 &\leq k \\ a_3 &\leq k \\ &\vdots \\ a_n &\leq k \end{aligned}$$

Somando membro a membro tais desigualdades, temos que:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq nk \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq k$$

que é um absurdo, pois $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > k.$

Logo, por contradição, uma das gavetas conterá pelo menos $(k+1)$ *objetos.* ■

Exemplo 3.7. *Em uma determinada noite, foram atendidos* 82 *pacientes na Unidade de Pronto Atendimento - UPA da cidade de São Benedito - CE. Sabendo que nessa noite haviam* 6 *médicos plantonistas, mostre que um desses médicos atendeu pelo menos* 14 *pacientes.*

Solução. *Perceba que temos* 6 *gavetas (médicos) e* 82 *objetos (pacientes). Seja* M_A *a média aritméticas dos atendimentos, usando o Teorema 3.3, temos que:*

$$M_A = \frac{82}{6} \approx 13,6 > 13$$

assim, necessariamente um médico atendeu pelo menos 14 *pacientes.*

3.2 Os Lemas de Kaplansky

Os Lemas de Kaplansky[11] são ferramentas de grande utilidade na resolução de alguns problemas de contagem considerados difíceis e que teriam soluções demasiadamente trabalhosas, como por exemplo, àqueles presentes nos vestibulares militares e em olimpíadas de Matemática.

[11] Irving Kaplansky (1917 - 2006), matemático americano nascido no Canadá, fez importantes contribuições para áreas algébricas como a teoria dos anéis, grupos e campos, bem como na álgebra comutativa. Tendo publicado mais de 150 artigos e trabalhado com mais de vinte coautores.

Figura 13: Irving Kaplansky

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

Kaplansky idealizou os Lemas em 1943 para a resolução do Problema de Lucas (para saber mais, indicamos a leitura do capítulo 5 do texto [19]). A seguir, a fim de compreender sua real utilidade, iremos analisar o seguinte problema:

Quantos são os subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, com p elementos, de maneira que em tais subconjuntos não haja elementos consecutivos?

Iremos considerar dois casos desse problema:

i) o primeiro (em nosso caso 1) e o último elemento (em nosso caso n) do conjunto A não são considerados consecutivos;

ii) os elementos do conjunto A ordenados e em torno de um círculo. Observe que aqui, os elementos 1 e n serão consecutivos.

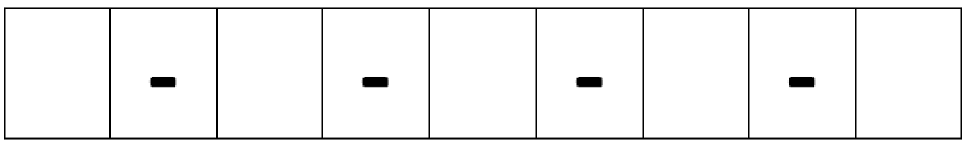
Exemplo 3.8. *Quantos subconjuntos com 3 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ podemos formar, de modo que nesses subconjuntos não ocorra números consecutivos?*

Solução. *Para resolver tal problema, iremos representar os subconjuntos da seguinte maneira: marcando ordenadamente, com um sinal de* $(+)$ *os elementos do conjunto* A *que farão parte do subconjunto e com um sinal de* $(-)$ *os elementos do conjunto* A *que não participarão do subconjunto. Vejamos alguns exemplos:*

- *o subconjunto* $\{1,3,5\}$ *será representado por* $+-+-+--$
- *o subconjunto* $\{3,5,7\}$ *será representado por* $--+-+-+$
- *o subconjunto* $\{2,4,7\}$ *será representado por* $-+-+--+$
- *o subconjunto* $\{1,2,5\}$ *será representado por* $++--+--$

Observe que o último exemplo de subconjunto não satisfaz o enunciado do problema, pois possui números consecutivos (1 *e* 2)*, ou seja, na representação que adotamos haverá sinais de* $(+)$ *juntos (lado a lado).*
De posse de tal representação e analisando os exemplos citados acima, percebemos que para determinar o número de subconjuntos com 3 elementos do conjunto A, basta calcular o número de Permutações de 7 *elementos, sendo* 3 *sinais de* $(+)$ *e* 4 *sinais de* $(-)$*, de modo que não se tenha dois sinais de* $(+)$ *juntos.*

Figura 14: Possibilidades de Escolha para o Sinal de (+)



Fonte:Próprio Autor

Para tanto, conforme mostra a Figura 14, basta escolhermos 3 *dos* 5 *"espaços vazios"entre os sinais de* $(-)$*. E isso pode ser feito de* $C_{5,3} = 10$ *maneiras, conforme estudado na seção 2.2.6. Logo, podemos formar* 10 *subconjuntos, com 3 elementos, do conjunto A de modo que não se tenha números consecutivos. A saber:*

Tabela 2: Enumeração dos Subconjuntos

$\{1,3,5\}$	$\{1,3,6\}$
$\{1,3,7\}$	$\{1,4,6\}$
$\{1,4,7\}$	$\{2,4,6\}$
$\{2,4,7\}$	$\{1,5,7\}$
$\{3,5,7\}$	$\{2,5,7\}$

Fonte: Próprio Autor

Feito tais considerações, apresentaremos o Primeiro Lema de Kaplansky, com sua respectiva demonstração, seguida por exemplos de aplicação.

Teorema 3.5 (Primeiro Lema de kaplansky). *O número de subconjuntos com p elementos de* $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *nos quais não há números consecutivos é dado por* $f(n, p) = C_{n-p+1,p}$.

Demonstração. *Seja* $f(n, p)$ *o número de subconjuntos com p elementos de* $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *nos quais não há números consecutivos. Pensando de modo análogo ao Exemplo 3.8, teremos p elementos representados pelo sinal de* $(+)$ *e* $(n - p)$ *elementos representados pelo sinal de* $(-)$. *E consequentemente* $(n - p + 1)$ *"espaços vazios"entre os sinais de* $(-)$. *Portando, basta escolher p espaços dentre os* $(n - p + 1)$ *disponíveis, logo:*

$$f(n, p) = C_{n-p+1,p}$$

■

Exemplo 3.9. *Sabendo que as provas de combinatória, aritmética e geometria, de uma turma de Matemática olímpica, devem ser aplicadas nos* 10 *primeiros dias do mês de agosto, de quantas maneiras podemos escolher os dias dessas provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?*

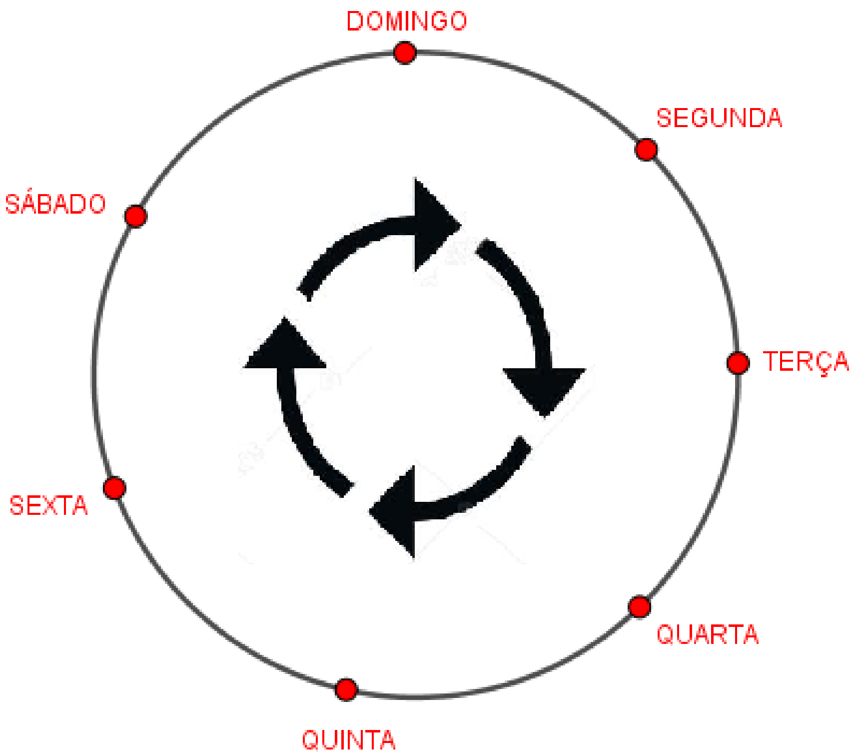
Solução. *Perceba que devemos formar um subconjunto de* 3 *elementos (dias que haverão prova) de um conjunto de* 10 *elementos (os dez primeiros dias do mês), de modo que não haja elementos (dias) consecutivos. Logo, pelo Primeiro Lema de Kaplansky, temos* $f(10, 3) = C_{10-3+1,3} = C_{8,3} = 56$ *maneiras de escolher os dias que serão aplicadas essas provas.*

Exemplo 3.10. *Uma fila tem* 10 *cadeiras, nas quais devem sentar-se* 4 *meninas e* 6 *meninos. De quantos modos isso pode ser feito, se quaisquer duas das meninas não devem ficar em cadeiras vizinhas?*

Solução. *Inicialmente devemos escolher* 4 *cadeiras, dentre as* 10 *disponíveis de modo que não haja duas cadeiras consecutivas. Pelo primeiro Lema de Kaplansky isso pode ser feito de* $f(10, 4) = C_{10-4+1,4} = C_{7,4} = 35$ *maneiras distintas.*
Feito a escolha das cadeiras que serão utilizadas pelas meninas, podemos permutá-las nesses 4 *lugares de* $4! = 24$ *maneiras, por outro lado, podemos permutar os homens nos* 6 *lugares restantes de* $6! = 720$ *modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos* $35 \cdot 24 \cdot 720 = 604800$ *modos de resolver o problema.*

Exemplo 3.11. *João deve ter aulas de violão 3 vezes por semana, durante um semestre inteiro. Quantos são os modos de escolher os dias da semana que haverão aula, sabendo que João prefere não ter aulas em dias consecutivos?*

Figura 15: Ciclo dos Dias da Semana



Fonte: Próprio Autor

Solução. *Note que, neste exemplo temos uma pequena variação em relação aos exemplos anteriores. Pois aqui segunda e domingo são considerados como dias consecutivos (ciclo), como mostrado na Figura 15.*
Desse modo, não poderemos usar diretamente o Teorema 3.5, entretanto, podemos dividir o problema em dois casos:

i) João terá aula de violão no domingo

Perceba que neste caso, João não poderá ter aula de violão no sábado nem na segunda. Então basta escolhermos mais dois dias entre terça, quarta, quinta e sexta, de modo que não tenhamos dois dias consecutivos. E de acordo com o Primeiro Lema de Kaplansky isso pode ser feito de $f(4,2) = C_{4-2+1,2} = C_{3,2} = 3$ *maneiras.*

ii) João não terá aula de violão no domingo

Observe que este caso, basta escolhermos três dias entre segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado, de modo que não tenhamos dois dias consecutivos. E, pelo Primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $f(6,3) = C_{6-3+1,3} = C_{4,3} = 4$ *maneiras.*

Logo, usando o Princípio Aditivo, temos $3 + 4 = 7$ *modos de resolver o problema.*

A generalização do problema que acabamos de resolver, trata-se do Segundo Lema de Kaplansky, que possui o seguinte enunciado:

Teorema 3.6 (Segundo Lema de kaplansky). *O número de subconjuntos com p elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos, é dado por:* $g(n, p) = \dfrac{n}{n-p} \cdot C_{n-p,p}$.

Demonstração. *Seja $g(n, p)$ o número de subconjuntos com p elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos. Inspirados no Exemplo 3.6, iremos dividir o problema em dois casos:*

i) O elemento 1 *faz parte do subconjunto*

Note que neste caso, os elementos 2 *e n não poderão fazer parte do subconjunto. Então basta escolhermos $(p-1)$ elementos do conjunto $\{3, 4, \cdots, n-1\}$, de modo que não tenhamos dois elementos consecutivos. E, de acordo com Primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $f(n-3, n-1) = C_{n-p-1,p-1}$ maneiras.*

ii) O elemento 1 *não participa do subconjunto*

Neste caso, basta escolhermos p elementos do conjunto $\{2, 3, \cdots, n\}$, de forma que não tenhamos dois elementos consecutivos. E, pelo Primeiro Lema de Kaplansky, isso pode ser feito de $f(n-1, p) = C_{n-p,p}$ maneiras.

Logo, por i) e ii) e usando o Princípio Aditivo, temos que:

$$
\begin{aligned}
g(n,p) &= C_{n-p-1,p-1} + C_{n-p,p} \\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)!}{p(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} + \frac{(n-p)(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
&= (n-p-1)!\frac{p+(n-p)}{p!(n-2p)!} \\
&= n \cdot \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{(n-p)} \cdot \frac{(n-p)(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{(n-p)} \cdot \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p,p}
\end{aligned}
$$

■

Agora, vejamos um exemplo de aplicação do Segundo Lema de Kaplansky, que esteve presente no vestibular do IME, considerado um dos mais concorridos/difíceis do país.

Exemplo 3.12. *(IME) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.*

Para fins de comparação, iremos solucionar o referido problema de duas maneiras distintas. Solução (1): utilizando o Segundo Lema de Kaplansky; Solução (2): sem o uso de tal teorema.

Solução (1)**.** *Estamos interessados em escolher 5 elementos, em um total de 12, sendo que o primeiro elemento e o décimo segundo são vizinhos (considerados consecutivos). Logo, pelo segundo Lema de Kaplansky, temos um total de* $g(12,5) = \dfrac{12}{12-5} \cdot C_{12-5,5} = 36$ *maneiras possíveis de escolher esse grupo.*

Solução (2)**.** *Sejam 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os cavaleiros em questão. Iremos dividir o problema em dois casos:*

i) O cavaleiro 1 é escolhido

Perceba que neste caso, os cavaleiros de números 2 e 12 não poderão fazer parte do grupo. Então basta escolhermos mais quatro cavaleiros, dentre os cavaleiros disponíveis (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11), de modo que não tenhamos dois cavaleiros consecutivos. Para tanto, representemos com um sinal de (+) os cavaleiros que farão parte do grupo e com um sinal de (-) os cavaleiros que não farão parte do grupo. Perceba que temos 9 cavaleiros disponíveis para 4 vagas, então, basta calcular o número de permutações de 9 elementos, sendo 4 sinais de (+) e 5 sinais de (-), de modo que não se tenha sinais de (+) juntos. E isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ *maneiras (conforme mostrado no Exemplo 3.8).*

ii) O cavaleiro 1 não é escolhido

Observe que neste caso, basta escolher 5 cavaleiros dentre os cavaleiros (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12), de modo que não tenhamos dois cavaleiros consecutivos. Novamente, representemos com um sinal de (+) os cavaleiros que farão parte do grupo e com um sinal de (-) os cavaleiros que não farão parte do grupo. Perceba que temos 11 cavaleiros disponíveis para 5 vagas, então, basta calcular o número de permutações de 11 elementos, sendo 5 sinais de (+) e 6 sinais de (-), de modo que não se tenha sinais de (+) juntos. E isso pode ser feito de $C_{7,5} = 21$ *maneiras (conforme mostrado no Exemplo 3.8).*

Logo, usando o Princípio Aditivo, temos $15 + 21 = 36$ *modos de resolver o problema.*

Perceba que a referida questão, oriunda do vestibular do Instituto Militar de Engenharia - IME, que é um dos vestibulares mais concorridos do país, pode ser resolvida apenas usando as ferramentas básicas de contagem, como bem exemplificou a Solução (2), embora tal tarefa possa ser considera demasiadamente trabalhosa.

Por outro lado, percebemos por meio da Solução (1), que a mesma questão foi resolvida de maneira mais rápida e simples, sem a necessidade de analisar casos separadamente, apenas com a aplicação imediata do Teorema 3.6.

Assim, analisando e comparando as soluções apresentadas acima, percebemos como o uso do Teorema 3.6 pode ser útil durante a resolução de alguns problemas de Análise Combinatória.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Nesse capítulo trataremos sobre os procedimentos metodológicos adotados no presente estudo. Para tanto, inicialmente faremos um breve comentário sobre a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Em seguida, faremos a caracterização da pesquisa, ressaltando o campo da pesquisa bem como os sujeitos envolvidos. Por fim, iremos tratar sobre os instrumentos de produção e análise dos dados.

4.1 Sobre a Resolução de Problemas

A resolução de problemas é algo muito presente em nossas vidas. Por diversas vezes em nosso dia-a-dia nos deparamos com situações, onde devemos traçar uma estratégia e pensar em possíveis soluções.

Na Matemática, a resolução de problemas ganha um papel de destaque, pois a mesma estimula a criatividade e o senso crítico, tornando assim a aprendizagem mais prazerosa e significativa.

Nesse sentido, entendemos que a resolução de problemas, seja por meio de jogos, de desafios de raciocínio lógico ou pela apresentação de belas questões, consegue atrair a atenção dos estudantes, podendo despertar nos mesmos o interesse pelo estudo da Matemática. Sobre a resolução de problemas, Polya[12] (1995) [20] destaca que:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais que, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Ainda nesse contexto, os PCN (BRASIL,1997) [6], reforçam a importância da resolução de problemas na Matemática e orientam que a mesma ocorra com base em "problemas reais", conforme trecho abaixo:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCN privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

[12] George Pólya (1887-1985) foi um matemático e professor de Matemática, nascido na Hungria. Ele fez contribuições fundamentais para a Análise Combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da probabilidade. Ele também é conhecido por seu trabalho em heurística (resolução de problemas) e educação Matemática.

Percebemos aqui, que a resolução de problemas oportuniza que os alunos ampliem seus conhecimentos acerca de conceitos matemáticos. Além disso, D'Ambrósio (1989) [8] orienta o uso da resolução de problemas como metodologia de ensino, pois oportuniza a investigação e/ou exploração de novos conceitos.

A seguir, com base em Polya (1995) [20] apresentaremos um resumo sobre "as quatro fases"para a resolução de um problema.

Figura 16: George Polya

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/

I) **Compreensão do problema.** Antes de responder um problema, o mesmo deve ter sido, previamente compreendido. Pois se faltar compreensão, consequentemente não despertará o interesse. Devemos primordialmente, além de compreender, desejar resolvê-lo. Além disso, é importante considerar as principais partes de seu enunciado (verbal e não verbal), destacar/evidenciar seus dados e usar uma notação que satisfaça todas as condições e/ou requisitos apresentados;

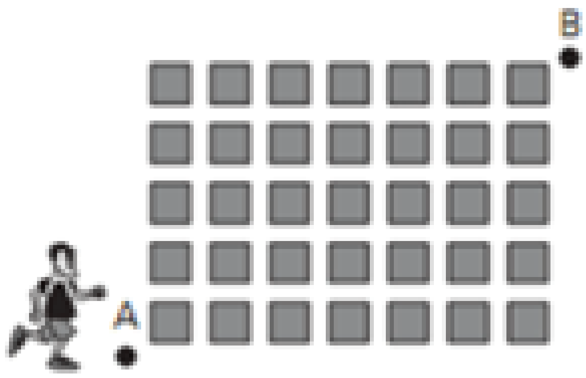
II) **Estabelecimento de um plano.** Precisamos conhecer, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. Podemos dizer que essa etapa (a concepção da ideia) se constitui no ápice da resolução de um problema. Uma boa ideia pode demorar a surgir ou até mesmo nascer de um rápido relampejo criativo. Vale ressaltar que também podemos ter boas ideias baseadas em experiências passadas e em conhecimentos previamente adquiridos durante a resolução de problemas anteriores;

III) **Execução do plano.** O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-lo, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e livre de erros. Assim, executar o plano é bem mais fácil do que concebê-lo, precisando apenas de uma boa dose de paciência e muitas vezes, de convicção no sentido de continuar com a execução, embora que a mesma pareça trabalhosa;

IV) **Retrospecto.** Essa fase, embora muitas vezes deixada de lado, é de extrema importância durante a resolução de um problema. Ao fazer um retrospecto completo da resolução, iremos reconsiderar e reexaminar o resultado final, além do caminho que nos levou a tal conclusão. Essa atitude nos permite aperfeiçoar e consolidar o conhecimento, além de levantar as seguintes hipóteses: essa estratégia será válida em outras situações? É possível usar esse método em outros problemas? Como podemos generalizar os resultados obtidos?

Para uma melhor compreensão das quatro fases sugeridas por Polya, a seguir, iremos resolver um problema as utilizando.

Exemplo 4.1. *(VUNESP) A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos "de baixo para cima" ou "da esquerda para a direita". Quantos percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B?*



Solução. *Iremos resolver o referido problema analisando cada uma das fases citadas anteriormente:*

I) ***Compreensão do problema.***

Qual é a incógnita?

- O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B.

Quais são os dados do problema?

- Representação das ruas por meio da planta do bairro.

Quais são as condicionantes?

- São permitidos apenas deslocamentos para cima e para direita.

II) ***Estabelecimento de um plano.***

Podemos representar cada um dos movimentos para cima pela letra (C) e cada um dos movimentos para direita pela letra (D). Em seguida, iremos contar quantos segmentos, de cada um dos sentidos (direita e cima) iremos precisar para ir do ponto A até o ponto B. Por exemplo, CCCDDDDDDCCD é um caminho que satisfaz o problema. Perceba que ao traçar um outro caminho diferente (por exemplo, CCCCDDDDDDDC), teremos necessariamente 5 letras (C) e 7 letras (D), ou seja, para solucionar tal problema basta determinar o número de Permutações das letras CCCCCDDDDDDD.

III) ***Execução do plano.***

Conforme estudado na seção 2.4 o número de Permutações que podemos formar com as letras CCCCCDDDDDDD é dado por $P_{12}^{7,5} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$. *Portanto, como cada uma dessas Permutações representa um caminho diferente, concluímos que essa pessoa poderá fazer 792 percursos diferentes de A até B.*

IV) ***Retrospecto.***

Revisando o que foi feito nas etapas anteriores, concluímos que nossa estratégia e nossos cálculos estão corretos. Caso contrário, teríamos que corrigir os erros ou até mesmo traçar um outro plano capaz de resolver o problema.

Diante do exposto, tivemos a oportunidade de conhecer algumas estratégias importantes usadas durante a resolução de um problema, não necessariamente difícil/sofisticado, mas que ofereça uma solução não imediata, estimulando assim a capacidade investigativa/inventiva dos que tentam solucioná-lo.

Além disso, podemos refletir sobre o papel de cada uma das quatro fases para a resolução de um problema, as quais são de grande importância e se fazem necessárias na busca por uma solução adequada.

4.2 Caracterização da Pesquisa

Segundo Barros (2002) [2], podemos entender pesquisa como "o esforço dirigido para a aquisição de um determinado conhecimento, que propicia a solução de problemas teóricos, práticos e/ou operacionais, mesmo quando situados no contexto do dia-a-dia do homem".

Nesse sentido, Gil (1996) [11], define pesquisa como:

> o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema.

Levando em conta os objetivos desse estudo, entendemos que o mesmo trata-se de uma pesquisa de campo com abordagem qualitativa, pois os dados são produzidos e/ou coletados diretamente no ambiente de realização da pesquisa. Conforme Deslandes (2010) [9]:

> [...] o trabalho de campo deve ser realizado a partir de referências teóricas e também de aspectos operacionais. Isto é, não se pode pensar num trabalho de campo neutro. A forma de realizá-lo revela as preocupações científicas dos pesquisadores que selecionam tanto os fatos a serem observados, coletados e compreendidos como o modo como vai recolhê-los. Esse cuidado é necessário porque o campo da pesquisa social não é transparente e tanto o pesquisador como os seus interlocutores e observados interferem no conhecimento da realidade. Essa interferência faz parte da própria natureza social que nunca é neutra.

Nesse contexto e como base nos elementos presentes nesse trabalho, concordamos com a referida autora, no sentido que a pesquisa de campo possibilita um olhar específico acerca de um determinado tema, em nosso caso: a resolução de problemas de contagem com o uso do Princípios da Gavetas e nos Lemas de Kaplansky.

Vale ressaltar que em uma pesquisa de abordagem qualitativa buscamos compreender um comportamento de um determinado grupo de sujeitos sobre um assunto específico. Sendo assim o pesquisador deve escolher questionamentos que favoreçam a compreensão, respeitando as condições cognitivas de cada um dos agentes pesquisados (sujeitos da pesquisa).

Além disso, é fundamental que os sujeitos participantes da pesquisa tenham consciência de seu papel de destaque durante o estudo. Para tanto, o pesquisador deve fazer uma apresentação minuciosa do estudo, abordando todas suas etapas e expondo seus objetivos.

Destacamos que a presente pesquisa foi dividida em três etapas, a saber:

1ª) **Fase documental.** Onde foi preparado todo o material utilizado durante o estudo (oficinas, questionários, lista de exercícios e testes);

2ª) **Fase prática.** Momento empírico, onde foram aplicados os procedimentos da etapa anterior, produzindo assim os dados da pesquisa;

3ª) **Fase exploratória.** Onde foi analisado/interpretado os resultados da fase anterior.

Diante do exposto, a seguir iremos caracterizar o campo em que ocorreu a pesquisa bem como apresentar os sujeitos envolvidos.

4.3 Campo da Pesquisa

Os dados empíricos dessa pesquisa foram produzidos e coletados na Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Dr. João Almir de Freitas Brandão, localizada na cidade de São Benedito - CE.

Figura 17: E.E.M.T.I Dr. João Almir de Freitas Brandão

Fonte: Próprio Autor

Inaugurada no dia 20 de fevereiro de 2001, a Escola Liceu Dr. João Almir de Freitas Brandão é um estabelecimento de ensino de nível médio, tendo como seu idealizador o ex-prefeito Dr. João Almir de Freitas Brandão que se empenhou intensamente em trazer para São Benedito esta obra que reflete a grandeza de seu trabalho e a conquista maior da juventude sambeneditense.

Recentemente, pelo decreto Nº 32.639, de 27 de abril de 2018, foi renomeada para E.E.M.T.I Dr. João Almir de Freitas Brandão. Com a implementação do ensino integral, a referida escola transformou-se em referência em tal modalidade, na região.

Completa em 2020, 19 anos de existência e atualmente oferece Ensino Médio em tempo integral (manhã e tarde), além da Educação de Jovens e Adultos - EJA, no turno da noite.

Atualmente conta com 404 alunos, (sendo 333 do turno integral e 71 do turno noturno) e 25 professores (sendo 07 efetivos e 18 substitutos). Além disso, a unidade escolar dispõe de 12 salas de aula, laboratórios (de informática, biologia, química e física), sala de artes, centro de multimeios, cantina, auditório, pátio coberto, quadra coberta, sala de coordenação, diretoria, sala dos professores e banheiros.

4.4 Sujeitos da Pesquisa

Participaram da pesquisa 18 alunos da 3ª série do Ensino Médio da escola E.E.M.T.I Dr. João Almir de Freitas Brandão. Dentre os 18 alunos participantes, 7 (sete) alunos são do sexo masculino e 11 (onze) do sexo feminino, na faixa etária de 16 a 19 anos.

Vale ressaltar que todos os estudantes envolvidos na pesquisa tiveram suas identidades preservadas, sendo que qualquer atividade produzida por eles não expressam nenhuma característica que permita a quebra do anonimato dos mesmos. Para tanto, durante a análise e discussão dos dados usamos os nomes fictícios: Aluno 01, Aluno 02, ...

4.5 Instrumentos de Produção e Análise dos Dados

Os instrumentos de produção/apreensão de dados constituem um papel de grande importância em qualquer pesquisa. Assim precisamos construí-los de forma adequada e conforme os objetivos do estudo. A esse respeito Barbosa (2005) reforça:

> Um sistema de monitoramento e avaliação de projetos só pode ser implementado com sucesso, com a definição dos meios para obtenção de dados confiáveis sobre processos, produtos e resultados. Um sistema de avaliação, mesmo com um planejamento perfeito, pode fracassar inteiramente se dos dados necessários para análise não puderem ser obtidos, ou se os mesmos são imprecisos ou sem confiabilidade.

Portanto, diante do exposto e levando em consideração o objetivo do presente estudo iremos descrever, com base nas autoras Marconi e Lakatos (2017) [16], os instrumentos de apreensão de dados que utilizamos em nossa pesquisa:

- o questionário semiestruturado, que "é um instrumento de coleta de dados constituído por uma série de perguntas que devem ser respondidas por escrito"

- o teste que, "é uma técnica utilizada quando se deseja aferir o potencial dos indivíduos. São apresentados de várias formas como, por exemplo, verbais, de lápis e papel (escrito), visuais e podem ser feitos individualmente ou coletivamente".

Os questionários semiestruturados foram constituídos por questões objetivas e subjetivas com questionamentos (de carácter pessoal) sobre a aprendizagem Matemática, bem como sobre nosso estudo de forma geral: oficinas e testes.

Ambos os testes (o teste inicial e o teste final) foram constituídos por 8 questões subjetivas contendo situações problemas sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. No teste inicial tivemos a oportunidade de traçar um diagnóstico geral da turma. Por outro lado, no teste final, os alunos tiveram a oportunidade de pôr em prática os conhecimentos adquiridos durante as oficinas.

Vale ressaltar que tais testes foram analisados quantitativamente (números de questões corretas, número de questões erradas e número de questões em branco) e principalmente qualitativamente (estratégias utilizadas pelos alunos na resolução ou na tentativa de resolução dos problemas propostos). A seguir, iremos descrever, de forma breve, o percurso metodológico que foi utilizado na presente pesquisa.

Inicialmente fizemos um estudo, por meio da aplicação de um questionário (questionário inicial), contendo 5 (cinco) questões. Tal instrumento possibilitou conhecer o perfil dos alunos enquanto estudantes de Matemática, identificando assim algumas de suas aptidões e/ou dificuldades, em relação à aprendizagem da referida disciplina.

Em seguida foi aplicado o primeiro teste (teste inicial), composto por 8 (oito) questões, contendo situações problemas, envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Com a aplicação do referido teste, tivemos a oportunidade de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos, acerca dos assuntos da oficina, bem como identificar possíveis dificuldades, dos mesmos.

Posteriormente, oferecemos 4 oficinas teóricas, cada uma com duração de 3 horas/aula, com objetivo de apresentar a fundamentação teórica básica sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky, expondo resultados importantes, exemplos e problemas clássicos envolvendo tais temas. Durante as oficinas abordamos os seguintes temas:

- **Oficina 01**: Estudo sobre o Princípio das gavetas;
- **Oficina 02**: Resolução de situações problemas envolvendo o Princípio das Gavetas;
- **Oficina 03**: Estudo sobre os Lemas de Kaplansky;
- **Oficina 04**: Resolução de situações problemas envolvendo os Lemas de Kaplansky;

Após a realização das oficinas, aplicamos o segundo teste (teste final), também composto por 8 (oito) questões, contendo situações problemas, envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Vale ressaltar que tal teste nos deu embasamento para analisar os possíveis efeitos das oficinas.

Por fim, aplicamos mais um questionário (questionário final), contendo 6 (seis) questões, onde os alunos puderam registrar sua opinião geral sobre as oficinas. Expondo um breve comentário sobre os temas estudados, relatando suas vivências, pontos positivos, dificuldades, além de apresentar possíveis sugestões.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo iremos analisar os dados e discutir os resultados produzidos durante nossa pesquisa, realizada com 18 (dezoito) alunos da 3ª série de uma escola de ensino em tempo integral do estado do Ceará.

Para tanto, nas próximas seções, iremos apresentar e comentar os resultado de cada um dos instrumentos de produção de dados, usados na presente pesquisa: questionário inicial, teste inicial, teste final e questionário final. Vale ressaltar que tais instrumentos estão disponíveis, na íntegra, nos apêndices.

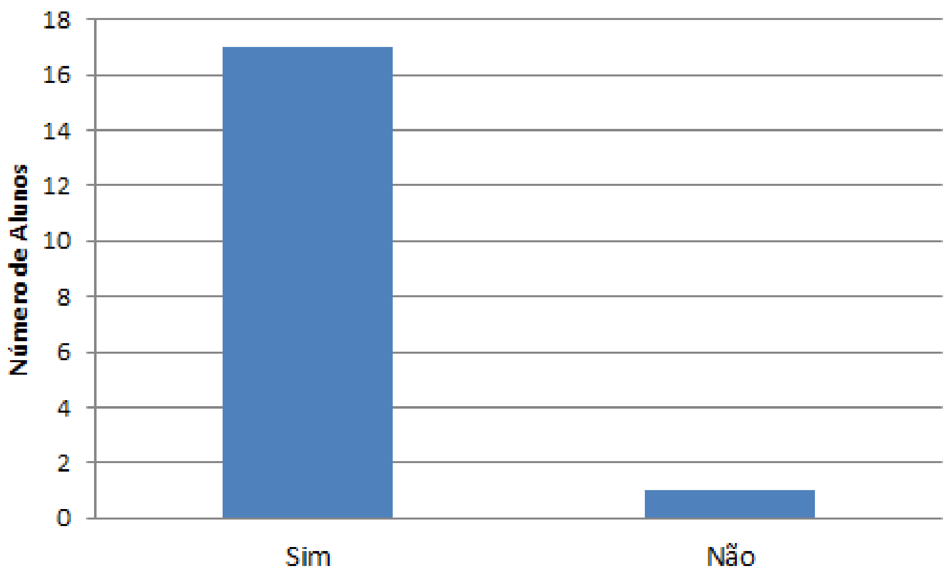
5.1 Questionário Incial

O questionário inicial, do tipo semiestruturado, foi composto por 5 (cinco) questões e teve como objetivo conhecer o perfil dos alunos/sujeitos da pesquisa, enquanto estudantes de Matemática.

Por meio deste, buscamos também identificar as habilidades bem como as possíveis dificuldades dos alunos, em relação à aprendizagem da Matemática. A seguir, iremos analisar as respostas, dadas pelos alunos, às questões do referido questionário.

Na **Questão 01**, os alunos foram perguntados se gostavam da disciplina de Matemática. Solicitamos ainda que relatassem o porquê de suas respostas, fazendo uma breve justificativa. A Figura 18 mostra o resultado obtido:

Figura 18: Gosto dos Alunos pela Matemática



Fonte: Próprio Autor

Conforme apresentado acima, 17 alunos (cerca de 94,4%) responderam que gostam da disciplina de Matemática. Donde destacamos as seguintes justificativas:

> Aluno 01: Por que é um modo de provar que está certo, tipo você faz uma compra e o vendedor passa o troco errado, através da Matemática você pode provar.
>
> Aluno 02: Nos ajuda a provar que os cálculos estão certo. E porque a Matemática está em todo lugar onde vamos.

Observamos aqui, que tais alunos conseguem perceber a presença e a importância da Matemática na resolução de problemas cotidianos. Além disso, os referidos alunos reconhecem o caráter exato da disciplina de Matemática, citando que a mesma oferece a possibilidade de "provar"resultados.

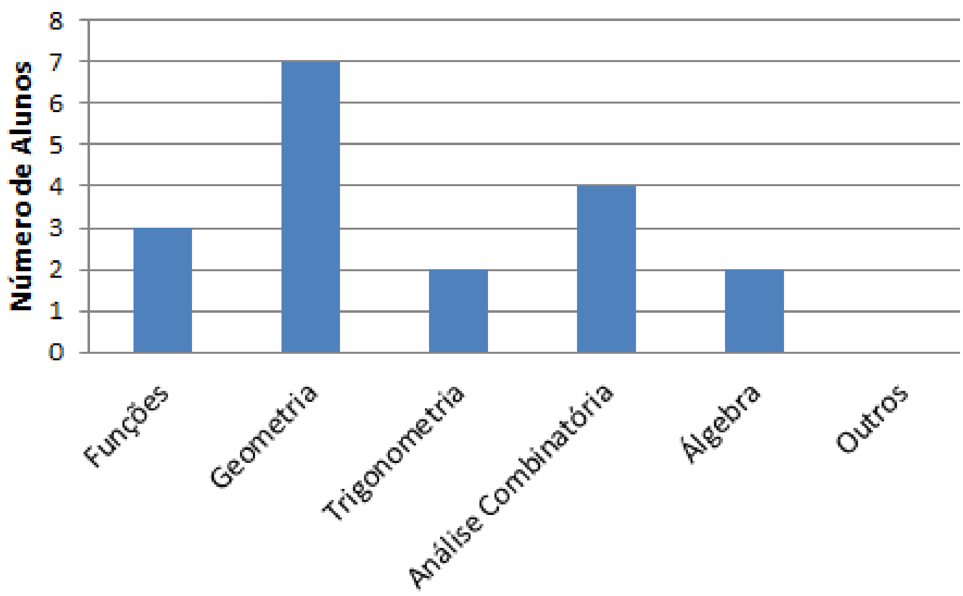
Em contrapartida, o aluno que relatou não gostar de Matemática, apresentou a seguinte justificativa:

> Aluno 03: Porque acho meio confuso e as vezes difícil de mais.

O relato citado acima, sugere que a afinidade com a Matemática, por parte de alguns alunos, está diretamente relacionada com o seu nível de entendimento, em relação à mesma. Ou seja, se não entendem um determinado conteúdo tendem a criar um certo distanciamento com a disciplina.

Na **Questão 02**, os estudantes foram questionados sobre qual dos conteúdos, estudados durante as aulas de Matemática, eles consideravam mais fácil. Solicitamos ainda que os mesmos relatassem o porquê de suas respostas, tecendo um breve comentário. A Figura 19 mostra o resultado obtido:

Figura 19: Conteúdo Considerado Mais Fácil



Fonte: Próprio Autor

Percebemos que 4 alunos (cerca de 22,2%) consideram Análise Combinatória como o conteúdo mais fácil, estudado na Matemática. A esse respeito destacamos os seguintes comentários:

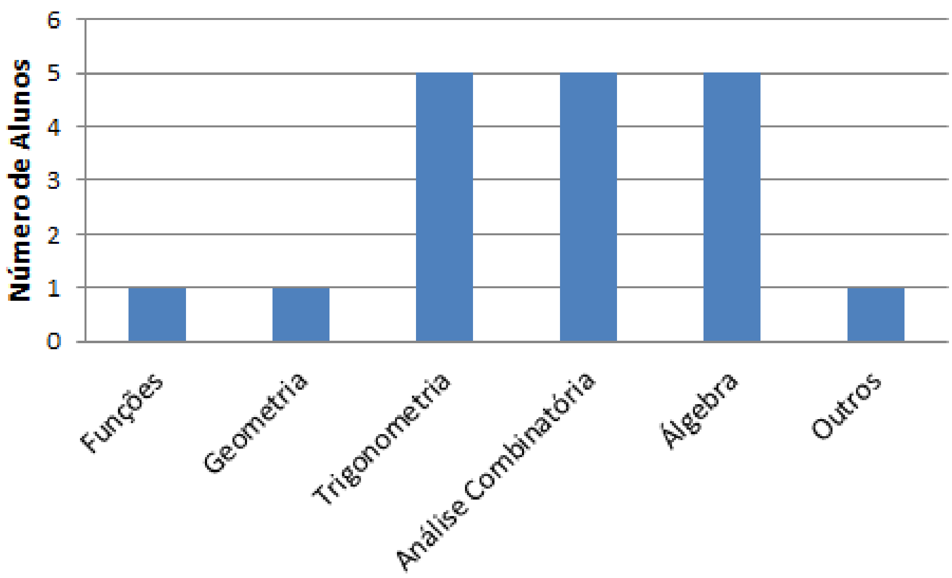
> Aluno 02: Dependendo do professor a gente não precisa muito ficar pensando como fazer porque aprendemos em uma explicação e através das práticas de resoluções de questões.

> Aluno 04: Porque a base dela é apenas a multiplicação.

Percebemos que o Aluno 02, se refere à aprendizagem da Análise Combinatória através da resolução de problemas. Enquanto o Aluno 04 menciona claramente o uso do Princípio Multiplicativo, reforçando sua importância enquanto ferramenta básica de contagem.

Em seguida, na **Questão 03** os sujeitos da pesquisa foram questionados sobre qual dos conteúdos, estudados na Matemática eles consideravam mais difícil. Solicitamos ainda que os mesmos comentassem, de forma breve, suas respectivas respostas. A Figura 20 mostra os resultados obtidos:

Figura 20: Conteúdo Considerado Mais Difícil



Fonte: Próprio Autor

Percebemos que 5 alunos (cerca de 27,8%) consideram Análise Combinatória como o conteúdo mais difícil, estudado na Matemática. A esse respeito destacamos os seguintes comentários:

> Aluno 05: ... há fórmulas complexas.

> Aluno 07: Porque tenho dificuldades de interpretar.

O comentário dado pelo Aluno 05 faz uma crítica ao ensino de Análise Combinatória por meio da apresentação excessiva de fórmulas e do uso de algoritmos resolutivos, metodologia esta que ainda é praticada por muito professores, durante às aulas de contagem.

Vale ressaltar que tal prática pode ser extremamente negativa, uma vez que tira o caráter investigativo e criativo inerente à resolução de problemas de contagem.

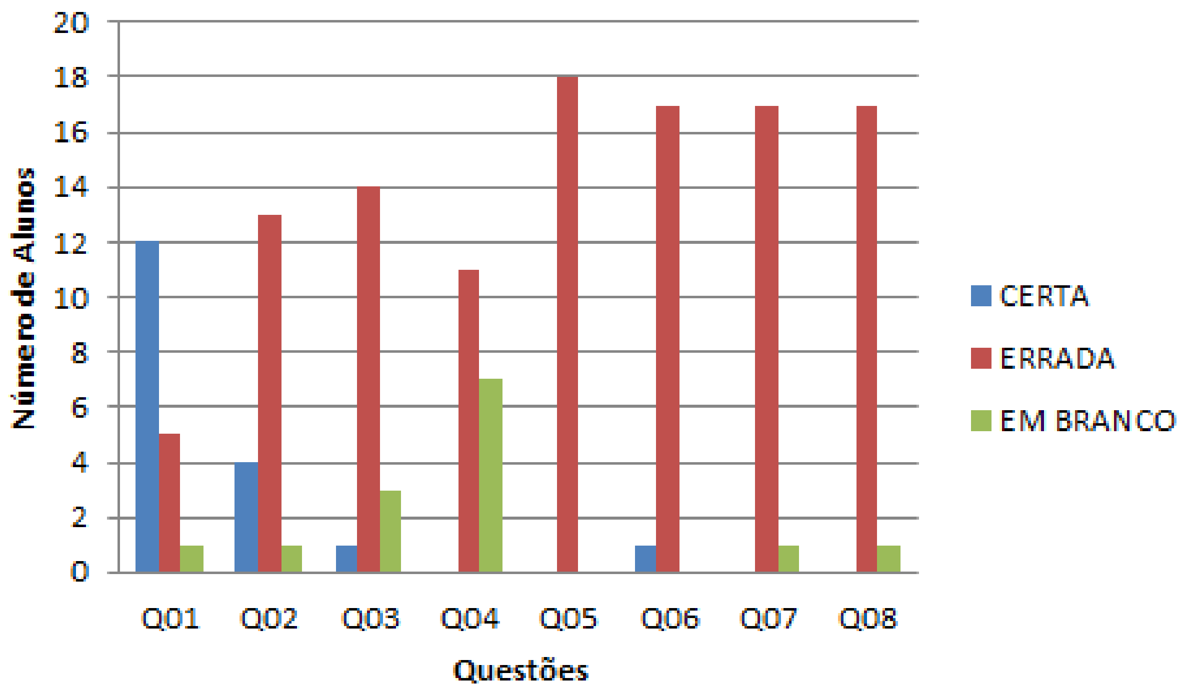
Por outro lado, Aluno 07 expôs que tem dificuldade em interpretar problemas. Nesse sentido, como visto no capítulo anterior, segundo POLYA (1995) [20], compreender é a fase inicial para a resolução de problemas e é portanto uma habilidade muito importante.

Por fim, nas **Questões 04 e 05**, os alunos foram questionados se já haviam estudado sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky, respectivamente. Onde verificamos que nenhum dos estudantes, que participaram da oficina, haviam estudado tais conteúdos. O que comprova nossa hipótese de que, atualmente, tais conteúdos não fazem parte do currículo de Matemática da Educação Básica.

5.2 Teste Inicial

O teste inicial foi composto por 8 (oito) questões, contendo situações problemas, envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Vale ressaltar que os alunos resolveram de forma individual, usando seus conhecimentos prévios, adquiridos em experiências escolares anteriores. A figura 21 apresenta o resumo do desempenho dos alunos no teste inicial:

Figura 21: Resumo do Desempenho no Teste Inicial



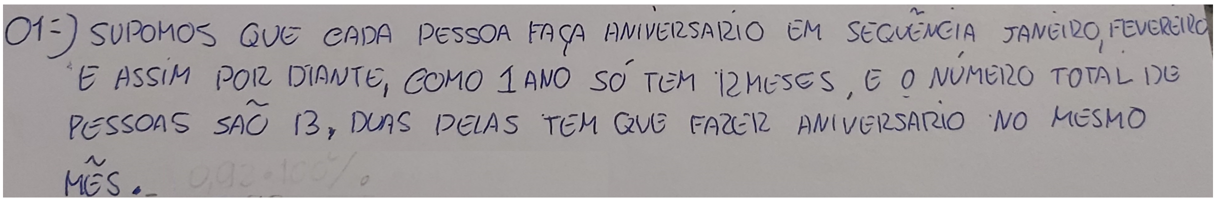
Fonte: Próprio Autor

A seguir iremos analisar e comentar algumas das respostas, dadas pelos alunos, em cada uma das 8 (oito) questões do teste inicial.

Questão 01. Dado um conjunto de 13 pessoas podemos garantir que, pelo menos, duas delas aniversariam no mesmo mês? Justifique sua resposta.

Conforme os dados apresentados na Figura 21, essa foi a questão, contida no teste inicial, com maior número de acertos (cerca de 66,67%). Nesse sentido, através da Figura 22, destacamos a solução apresentada por um dos alunos:

Figura 22: Resposta dada pelo Aluno 09 (Q1TI)


01:) SUPOMOS QUE CADA PESSOA FAÇA ANIVERSARIO EM SEQUÊNCIA JANEIRO, FEVEREIRO E ASSIM POR DIANTE, COMO 1 ANO SÓ TEM 12 MESES, E O NÚMERO TOTAL DE PESSOAS SÃO 13, DUAS DELAS TEM QUE FAZER ANIVERSARIO NO MESMO MÊS.

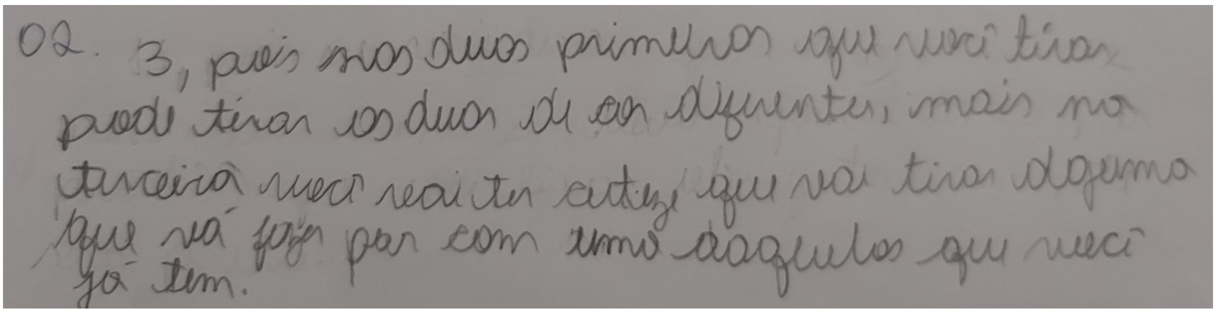
Fonte: Próprio Autor

Observamos que o referido aluno, usou do seguinte raciocínio: como o número de objetos (pessoas) é maior que o número de gavetas (meses), então necessariamente pelo menos duas pessoas aniversariam em um mesmo mês.

Questão 02. Em uma gaveta há 10 meias brancas e 10 meias pretas. Quantas meias, no mínimo, devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor? Justifique sua resposta.

Tal questão obteve apenas 22,22% de acertos. A figura 23 exemplifica a solução dada por um dos alunos:

Figura 23: Resposta dada pelo Aluno 06 (Q2TI)

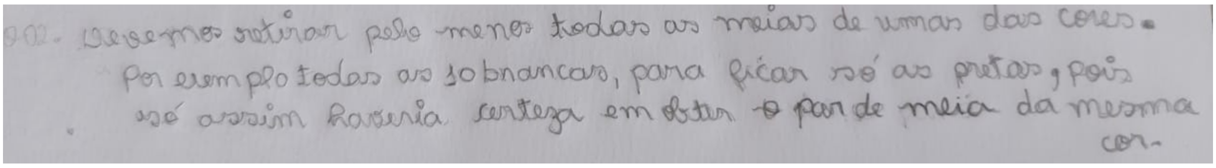

02. 3, pois nas duas primeiras que você tirar pode tirar as duas de cor diferentes, mais na terceira você vai ter certeza que vai tirar alguma que vá fazer par com uma daquelas que você já tem.

Fonte: Próprio Autor

Aqui, notamos que o aluno argumentou de forma correta. Inicialmente pensou no "pior dos casos", ou seja, considerou a possibilidade de se obter meias distintas em duas retiradas consecutivas. Por fim, concluiu que, com uma terceira retirada iria necessariamente formar um par de meias de mesma cor.

Por outro lado, a Figura 24, exemplifica uma resolução incorreta, apresentada por um dos alunos:

Figura 24: Resposta dada pelo Aluno 13 (Q2TI)



Q2- Devemos retirar pelo menos todas as meias de umas das cores. Por exemplo todas as 10 brancas, para ficar só as pretas, pois só assim haveria certeza em obter o par de meia da mesma cor.

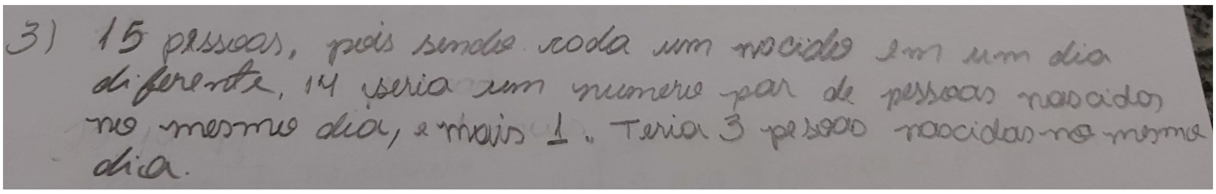
Fonte: Próprio Autor

Analisando tal resposta, notamos que o Aluno 13 pensou em uma estratégia equivocada, uma vez que não podemos garantir, que em 10 retiradas iremos obter 10 meias de uma mesma cor. O que contribuiu para o insucesso de sua solução.

Questão 03. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 3 pessoas nascida em um mesmo dia da semana? Justifique sua resposta.

Conforme apresentado na Figura 21 apenas um aluno resolveu a referida questão de forma correta, a seguir por meio da Figura 25, apresentamos essa solução:

Figura 25: Resposta dada pelo Aluno 04 (Q3TI)

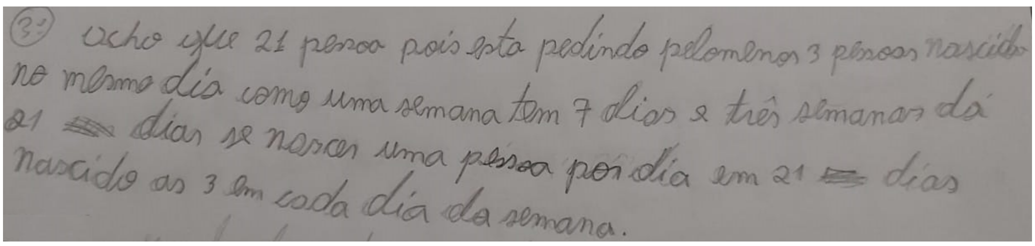


3) 15 pessoas, pois sendo cada um nascido em um dia diferente, 14 seria um numero par de pessoas nascidos no mesmo dia, e mais 1. Teria 3 pessoas nascidas no mesmo dia.

Fonte: Próprio Autor

Por outro lado, na solução apresentada através da Figura 26:

Figura 26: Resposta dada pelo Aluno 01 (Q3TI)



3- Acho que 21 pessoa pois esta pedindo pelo menos 3 pessoas nascido no mesmo dia como uma semana tem 7 dias e três semanas dá 21 dias se nascer uma pessoa por dia em 21 dias nascido as 3 em cada dia da semana.

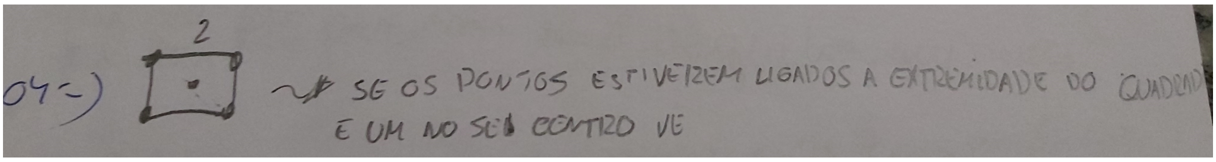
Fonte: Próprio Autor

Podemos perceber que o Aluno 01 fez uma má interpretação do enunciado do problema, uma vez que o mesmo considerou que estávamos interessados em garantir que pelo menos 3 pessoas tivessem nascidos "em cada"um dos 7 dias da semana. O que fez com que o mesmo resolvesse tal problema de forma incorreta.

Questão 04. Escolhendo 5 pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2 cm, mostre que a maior distância entre dois desses pontos é no máximo $\sqrt{2}$ cm.

Essa foi a única questão que tratava sobre o Princípio das Gavetas, que não obteve nenhum acerto por parte dos sujeitos participantes da pesquisa. Na figura 27 compartilhamos a resolução que chegou mais próxima da solução correta:

Figura 27: Resposta dada pelo Aluno 04 (Q4TI)



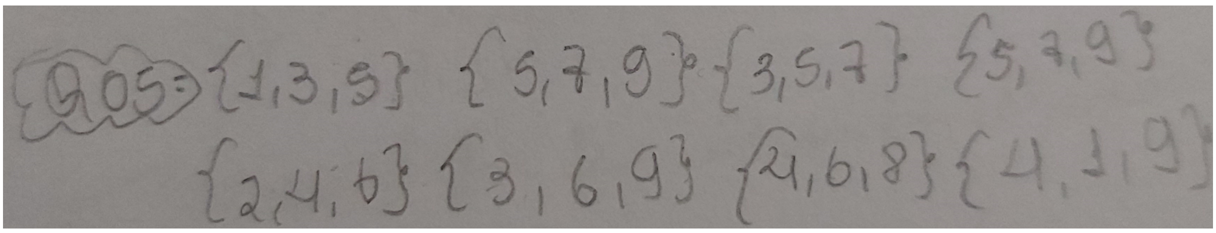
Fonte: Próprio Autor

Notamos que o referido aluno conseguiu supor a posição dos 5 pontos de maneira satisfatória, mas o mesmo não conseguiu mostrar que a distância entre quaisquer dois desses pontos é de, no máximo, $\sqrt{2}$ cm, conforme solicitado no enunciado do problema.

Questão 05. Quantos subconjuntos com 3 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podemos formar, de modo que nesses subconjuntos não ocorra números consecutivos?

De acordo com a Figura 21, podemos notar que não obtivemos acertos em tal questão. Porém, na Figura 28, trazemos uma tentativa de solução apresentada por um dos alunos, participantes de nosso estudo.

Figura 28: Resposta dada pelo Aluno 07 (Q5TI)



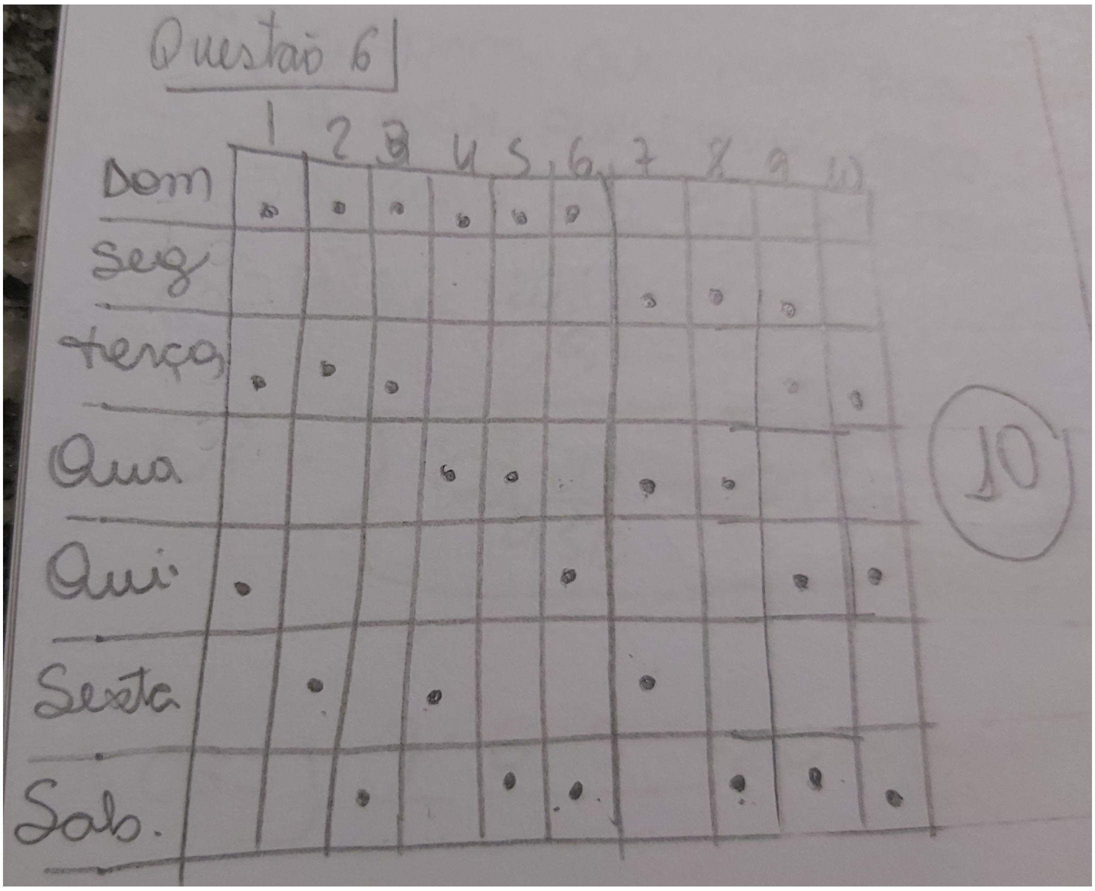
Fonte: Próprio Autor

Como podemos perceber o referido aluno tentou elencar todas as possibilidades, porém não fez a contagem dos subconjuntos de forma correta.

Questão 06. As provas de Matemática, Química e Física do vestibular do IME devem ser realizadas nos 7 primeiros dias de dezembro. De quantas maneiras é possível escolher os dias da prova de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Essa foi a única situação problema sobre os Lemas de Kaplansky, que obteve acerto por parte dos sujeitos da pesquisa. A seguir, apresentamos por meio da Figura 29 a única solução correta:

Figura 29: Resposta dada pelo Aluno 08 (Q6TI)



Fonte: Próprio Autor

A referida questão trouxe um problema contextualizado, o que pode ter motivado o Aluno 06 na buscar por uma estratégia alternativa para sua resolução. Nesse sentido, como observado no capítulo anterior, os PCN (BRASIL, 1997) [6], orientam uma aprendizagem Matemática de forma contextualizada, pois a mesma permite que o estudante possa argumentar, analisar, avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões bem como generalizar ideias.

Tal resolução reforça que a Análise Cominatória favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade, devido ao carácter investigativo e instigantes sob os quais alguns de seus problemas são propostos, conforme defende Morgado (2009) [17].

Por fim, como podemos observar por meio da Figura 21, a Questão 07 bem como a Questão 08, apresentadas a seguir, não obtiveram nenhum acerto por parte dos alunos participantes de nossa pesquisa.

Questão 07. Considere 8 cadeiras numeradas (de 01 até 08) e dispostas, ordenadamente, em círculo. De quantas maneiras podemos escolher 3 dessas cadeiras, de modo que não sejam selecionadas cadeiras com números consecutivos?

Questão 08. Em decorrência dos últimos acontecimentos de violência entre as torcidas organizadas do Ceará e do Fortaleza, a Federação de Futebol do Estado do Ceará resolveu convocar os chefes de torcida dos 8 maiores clubes do estado para uma reunião. A reunião acontecerá em uma mesa redonda com 10 cadeiras onde sentarão os chefes de torcida, o presidente da Federação e um secretário. Devido ao clima de inimizade entre as torcidas do Ceará e do Fortaleza, o responsável pela reunião, resolveu distribuir as cadeiras de modo que esses líderes sentassem em cadeiras não consecutivas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

Ressaltamos ainda que alguns desses alunos tentaram, sem sucesso, descrever todas as possibilidades, de maneira análoga à apresentada na Figura 28, porém não conseguiram descrever todos os casos, obtendo assim respostas incorretas.

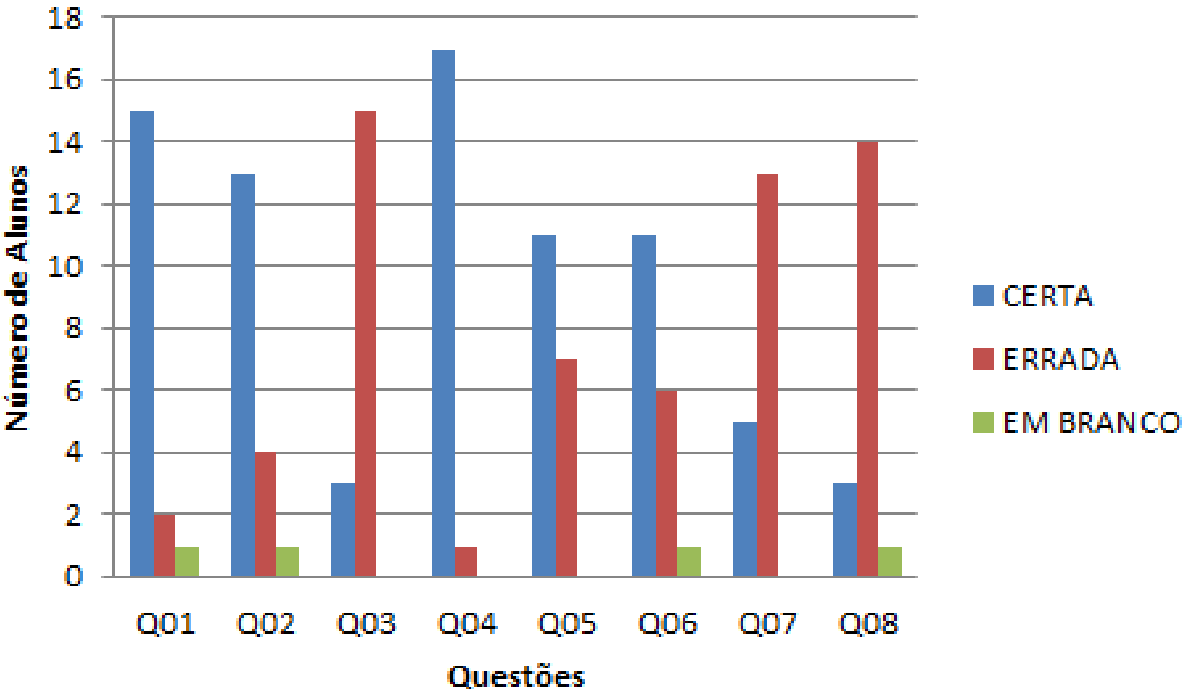
De modo geral, a partir da Questão 05 os problemas trataram sobre os Lemas de Kaplansky. E de acordo com a Figura 21 podemos concluir que tais questões apresentaram um maior número de erros, se comparadas com as 4 questões iniciais, que trataram sobre o Princípio das Gavetas.

5.3 Teste Final

O teste final também foi composto por 8 (oito) questões, contendo situações problemas, envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Vale ressaltar que o referido teste foi oferecido, aos alunos, logo após a realização das 4 (quatro) oficinas de estudo.

Assim, os alunos tiveram a oportunidade de pôr em prática os conhecimentos obtidos durante nosso estudo, bem como suas experiências anteriores enquanto estudantes de Matemática. A Figura 30 apresenta o resumo do desempenho dos alunos no teste final.

Figura 30: Resumo do Desempenho no Teste Final



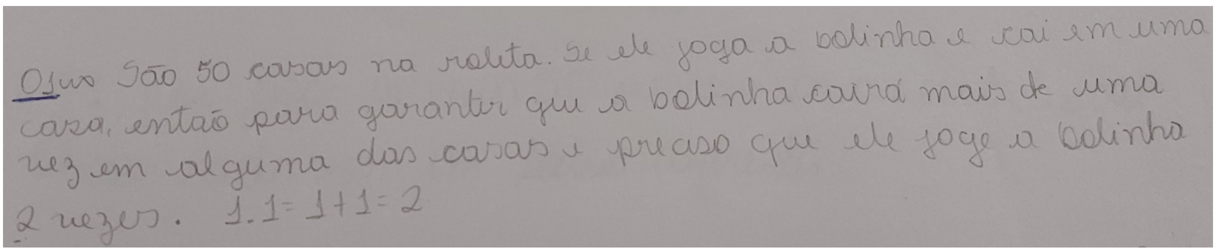
Fonte: Próprio Autor

A seguir iremos analisar e comentar algumas das respostas, dadas pelos alunos, em cada uma das 8 (oito) questões do teste final.

Questão 01. Uma roleta de cassino possui 50 casas numeradas (de 01 até 50). O Jogo é: rodar a roleta e soltar uma bolinha que irá parar em uma das casas. Quantas jogadas são necessárias a fim de garantir que a bolinha cairá mais de uma vez em alguma das casas?

Conforme observado na Figura 30, apenas dois alunos (cerca de 11,12%) erraram a Questão 01 do teste final. A Figura 31 apresenta uma dessas soluções equivocadas:

Figura 31: Resposta dada pelo Aluno 07 (Q1TF)



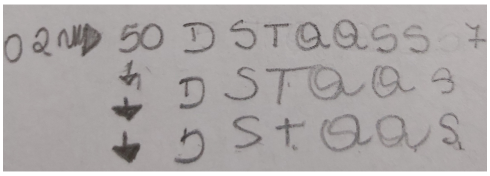
Fonte: Próprio Autor

Percebemos que tal aluno interpretou a questão de maneira incorreta, uma vez que em duas jogadas **pode ocorrer** que a bolinha caia duas vezes em uma das casas, mas só podemos **garantir** tal fato com, no mínimo, 51 jogadas.

Questão 02. Considerando um grupo de 50 pessoas podemos garantir que, pelo menos, 8 delas nasceram no mesmo dia da semana? Justifique sua resposta.

Nessa questão tivemos um total de 22,23% de erro. A Figura 32 exemplifica uma dessas respostas que foi dada de maneira incorreta:

Figura 32: Resposta dada pelo Aluno 06 (Q2TF)



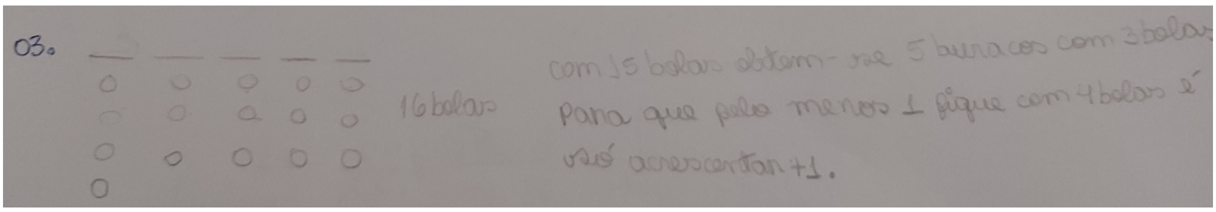
Fonte: Próprio Autor

Podemos observar que o estudante esboçou uma distribuição dos objetos (pessoas) nas respectivas gavetas (dias da semana), mas não prosseguiu com o raciocínio e consequentemente não obteve a solução correta.

Questão 03. Num campo de golfe, ficou combinado de só retirar as bolas dos buracos quando pelo menos em um deles contivesse mais de 3 bolinhas. Sabendo que existem 5 buracos nesse campo de golfe e que cada bolinha "morre"quando cai em um deles, pergunta-se: depois de quantas bolinhas mortas, os boleiros (meninos que coletam as bolinhas) devem sair para esvaziar os buracos?

A Questão 03 foi respondida de forma correta apenas por 3 alunos (cerca de 16,67%). Sendo, uma das questões que apresentou o menor índice de acerto, no teste final. A seguir, por meio da Figura 33, temos um exemplo de umas das soluções corretas:

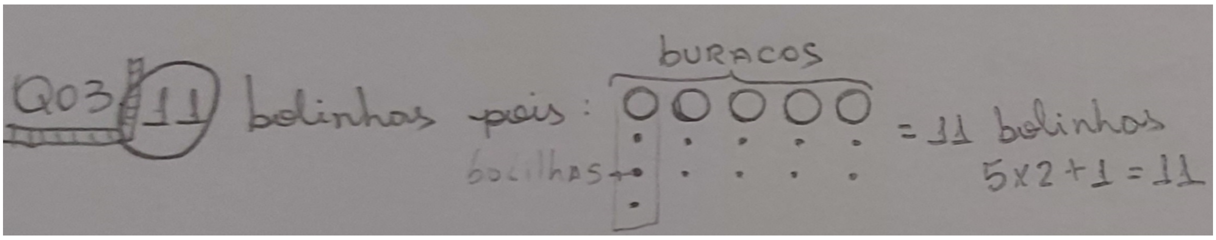
Figura 33: Resposta dada pelo Aluno 13 (Q3TF)



Fonte: Próprio Autor

Por outro lado, percebemos que grande parte dos alunos, que responderam à essa questão de maneira equivocada, obtiveram o mesmo resultado (11 bolinhas). Conforme exemplifica a Figura 34.

Figura 34: Resposta dada pelo Aluno 08 (Q3TF)



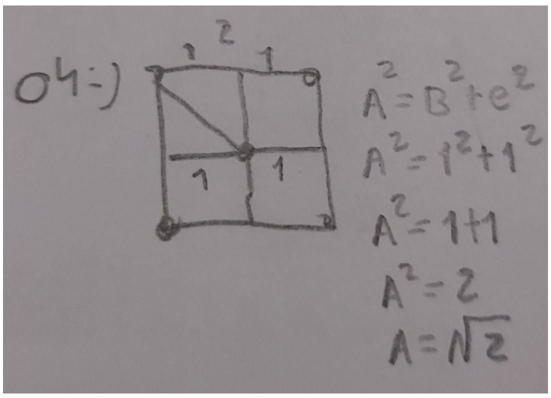
Fonte: Próprio Autor

Esse fato deixa claro que tais alunos fizeram a seguinte confusão de interpretação, do enunciado: consideraram "contivesse **3 bolinhas**"ou invés de "contivesse **mais de 3 bolinhas**". Tal interpretação errônea fez com que 8 (oito) alunos obtivessem o mesmo resultado (11 bolinhas), contribuindo assim para o elevado índice de erro, apresentado na questão.

Questão 04. Escolhendo 5 pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2 cm, mostre que a maior distância entre dois desses pontos é no máximo $\sqrt{2}$ cm.

Ressaltamos que essa questão também esteve presente no teste inicial. Onde naquela oportunidade, foi o único problema sobre o Princípio das Gavetas que não obteve nenhum acerto, por parte dos alunos. Por outro lado, destacamos por meio da Figura 35, parte da solução dado pelo Aluno 09, que nessa oportunidade conseguiu concluir o raciocínio corretamente.

Figura 35: Resposta dada pelo Aluno 09 (Q4TF)



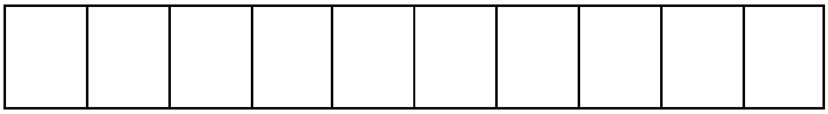
Fonte: Próprio Autor

Vale ressaltar que, ao considerar o teste final, essa foi a questão que apresentou o maior índice de aproveitamento (cerca de 94,95%), onde obtivemos 17 repostas corretas.

A Questão 05 bem como a Questão 06, apresentadas a seguir, tratavam sobre o Primeiro Lema de Kaplansky e tiveram o mesmo número de acertos (11 soluções corretas).

Questão 05. Quantos são os subconjuntos com 3 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tais que não ocorra números consecutivos?

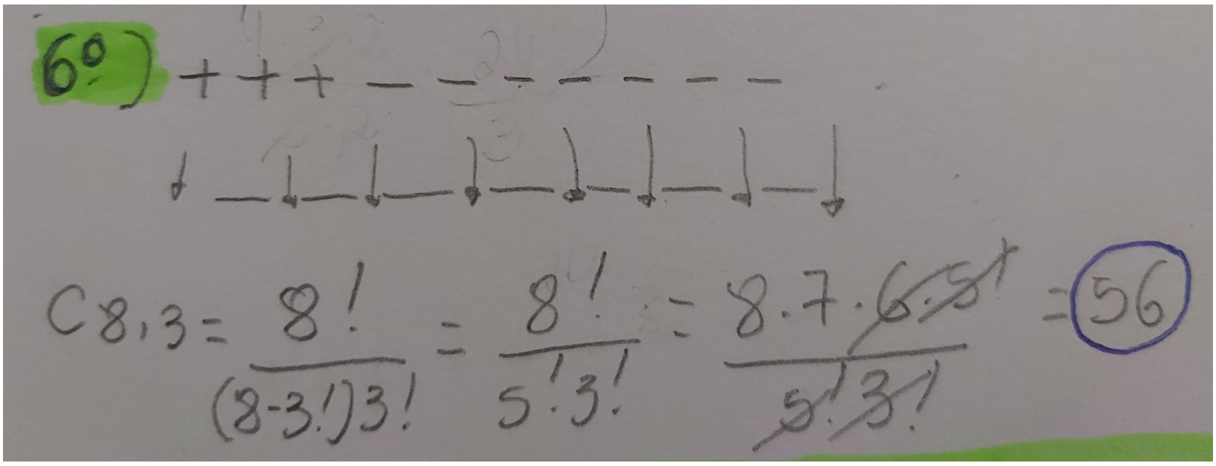
Questão 06. Em um grupo de 10 bodes, existem três que não conseguem ficar próximos sem haver briga. O dono desses animais vai levá-los à feira para vendê-los e o transporte será feito em um caminhão cuja carroceria é dividida conforme ilustrado a seguir:



De quantas maneiras o criador pode acomodar os animais sem que os três animais briguentos fiquem em jaulas adjacentes?

A seguir, através da Figura 36, destacamos a solução da Questão 06, dada por um dos alunos:

Figura 36: Resposta dada pelo Aluno 02 (Q6TF)



Fonte: Próprio Autor

O referido aluno optou por usar apenas o cálculo de Combinações. Percebemos aqui, o uso da ideia contida na demonstração do Teorema 3.5 (Primeiro Lema de Kaplansky), que foi apresentada durante as oficinas.

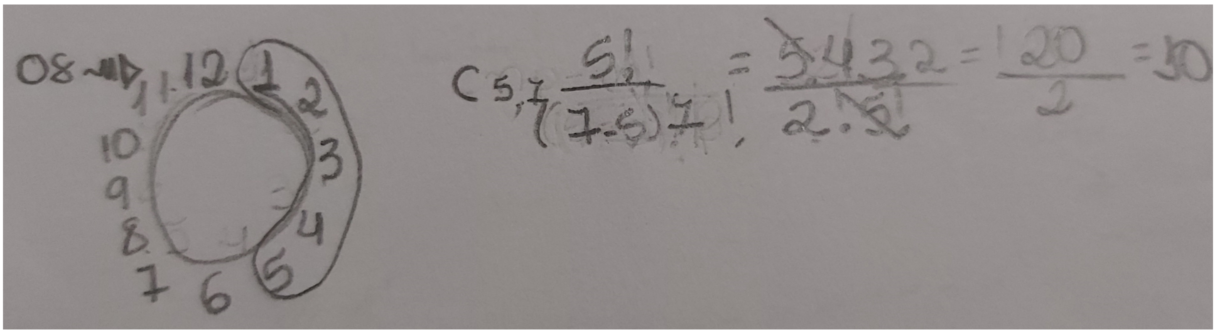
Por fim, na Questão 07 bem como na Questão 08, apresentadas a seguir, propomos problemas envolvendo o Segundo Lema de Kaplansky. E de acordo com a Figura 30, essas juntamente com a Questão 03, foram as situações problemas que obtiveram os menores índices de acertos, considerando o teste final.

Questão 07. Em decorrência dos últimos acontecimentos de violência entre as torcidas organizadas do Ceará e do Fortaleza, a Federação de Futebol do Estado do Ceará resolveu convocar os chefes de torcida dos 8 maiores clubes do estado para uma reunião. A reunião acontecerá em uma mesa redonda com 10 cadeiras onde sentarão os chefes de torcida, o presidente da Federação e um secretário. Devido ao clima de inimizade entre as torcidas do Ceará e do Fortaleza, o responsável pela reunião, resolveu distribuir as cadeiras de modo que esses líderes sentassem em cadeiras não consecutivas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

Questão 08. 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

A seguir, através da Figura 37, destacamos a solução da Questão 08, apresentada por um dos alunos:

Figura 37: Resposta dada pelo Aluno 03 (Q8TF)

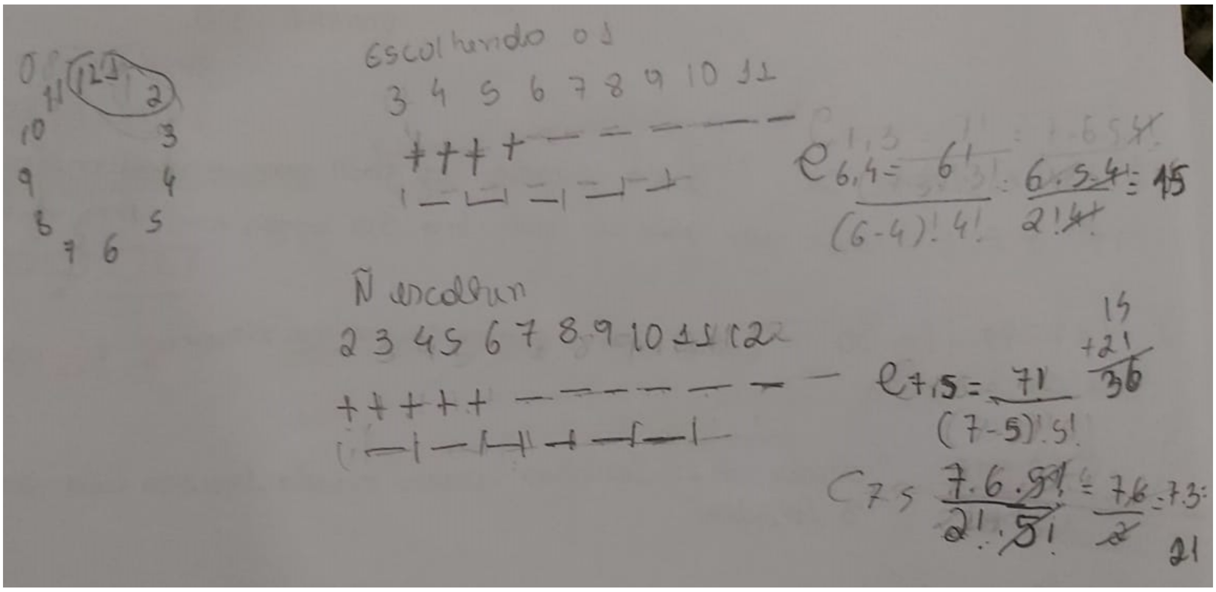


Fonte: Próprio Autor

Observamos que o referido aluno apresentou dificuldades nos conceitos básicos de combinatória, mais precisamente no cálculo de Combinações.

Por outro lado, tivemos excelentes soluções, como por exemplo resolução proposta pelo Aluno 15 , como mostra a Figura 38:

Figura 38: Resposta dada pelo Aluno 15 (Q8TF)



Fonte: Próprio Autor

Percebemos aqui, o uso da ideia contida na demonstração do Teorema 3.6 (Segundo Lema de Kaplansky), que foi apresentada durante as oficinas.

Assim, de modo geral, comparando os resultados obtidos no teste inicial (representado por meio da Figura 21) e no teste final (representado por meio da Figura 30) percebemos que houve uma evolução quantitativa no desempenho dos alunos.

Nesse sentido, analisando as soluções apresentadas pelos alunos, participantes da pesquisa, em cada um dos testes (inicial e final), percebemos também um avanço qualitativo, ou seja, notamos que houve uma evolução do raciocínio combinatório dos mesmo, após o estudo dos referidos temas, por meio de nossas oficinas.

Classificamos então como positiva nossa intervenção, feita por meio do estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky, com um grupo de 18 estudantes da 3ª série do Ensino Médio.

5.4 Questionário Final

O questionário final, do tipo semiestruturado, foi composto por 6 (seis) questões e teve como objetivo registrar a opinião geral dos alunos, em relação aos temas estudados durante às oficinas.

Por meio deste, buscamos também identificar as possíveis dificuldades dos alunos, em relação à aprendizagem de tais temas. A seguir iremos analisar as respostas, dadas pelos alunos, às questões do referido questionário.

Inicialmente, os alunos foram perguntados se haviam gostado de nossas oficinas. Solicitamos ainda que relatassem o porquê de suas respostas, fazendo uma breve justificativa.

Analisando as repostas percebemos que todos os alunos relataram ter gostado de participar de nossas aulas, onde destacamos os comentários dos seguintes alunos:

> Aluno 01: Gostei é como se fosse um enigma e nos faz pensar, raciocinar fora da caixa.
>
> Aluno 08: Sim, mostrou algo que está além da aulas e ensinou algo novo.

Percebemos, no relato do Aluno 01, que os mesmo se sentiu desafiado durante a resolução dos problemas proposto, o que reforça a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática.

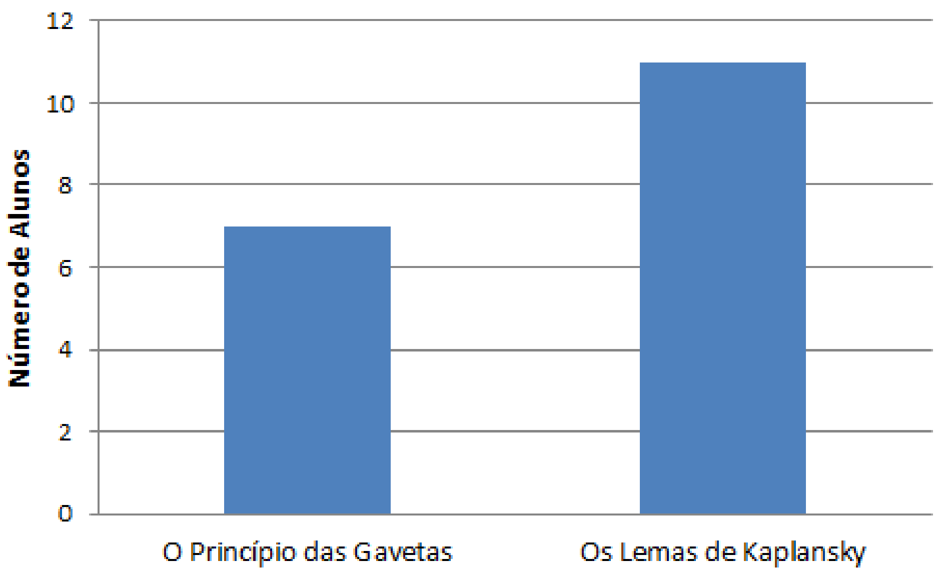
Em seguida, trouxemos o seguinte questionamento: você considera que estudar o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky pode auxiliar no desempenho em olimpíadas de Matemática em testes de vestibulares? Por quê? Onde destacamos a seguinte resposta:

> Aluno 13: Sim. Pois ele nos faz imaginar e ir além do que somos acostumados e auxilia na maneira de resolver.

Novamente notamos que, com as oficinas conseguimos oferecer "novos modelos matemáticos"para a resolução situações problemas, ampliando assim, os conhecimentos dos alunos participantes.

Posteriormente os alunos foram questionados sobre qual dos temas estudos (o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky) haviam considerado mais fácil. A Figura 39 mostra o resultado obtido:

Figura 39: Conteúdo, Estudando Durante às Oficinas, Considerado mais Fácil



Fonte: Prórpio Autor

Onde os Lemas de Kaplansky obtiveram uma ligeira vantagem. Quanto às justificativas, destacamos as seguintes:

> Aluno 01: Princípio das Gavetas, é só pensar colocando as piores possibilidades

> Aluno 03: Lemas de Kaplansky, por que já pega a base da fórmula de combinações, já estudamos.

O Aluno 01, ressaltou uma estratégia muito válida durante a resolução de alguns problemas sobre o Princípio das Gavetas: "pensar no pior dos casos". Por outro lado, o Aluno 03 considerou o estudo dos Lemas de Kaplansky mais fácil, pois o mesmo usa os conceitos de Análise Combinatória, que tais alunos já haviam estudado.

Já em relação às dificuldades, dos alunos, durante a oficina, notamos que muitos deles relataram ter dificuldades apenas no teste inicial, como podemos verificar a seguir:

> Aluno 07: Só o teste inicial.

> Aluno 09: A primeira prova pois não tinha conhecimento de nada.

> Aluno 10: Solucionar as primeiras questões propostas.

Por fim, propomos o seguinte questionamento: O que você acha desses modelos de problemas serem trabalhados nas aulas de combinatória?

Vale ressalvar que todos os alunos avaliaram como positiva a possibilidade de trabalhar tais assuntos, durantes às aulas de Análise Combinatória, onde destacamos as respostas a seguir:

> Aluno 08: Acho que seria uma coisa boa, iria mostrar e ensinar algo novo que tem a ver com o conteúdo combinatório e ajudaria os alunos a pensarem mais.

> Aluno 13: Bem legal, uma chance de abranger mais nosso conhecimento.

> Aluno 14: Seria bom para ampliar nossa visão e assim termos mais aprendizados.

De modo geral, e com base nos relatos colhidos através do questionário final, percebemos que os alunos avaliaram nossa intervenção de forma positiva. Nesse sentido, considerando a opinião dos alunos, os resultados obtidos nos dois testes (inicial e final) bem como a observação das atitudes dos mesmos durante nossas aulas, consideramos que nosso estudo foi bem sucedido e esperamos que possa ter contribuído com a aprendizagem de tais estudantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações apresentadas a seguir trazem algumas reflexões acerca dos resultados obtidos durante nosso estudo, bem como as possíveis contribuições que a presente pesquisa possa oferecer a alunos e professores de Matemática da Educação Básica.

Nesse trabalho, investigamos a compreensão manifestada por alunos do Ensino Médio no que se refere à resolução de problemas de contagem envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky. Para tanto, iniciamos nosso estudo por meio de questionário e teste inicial, onde tivemos a oportunidade de traçar o perfil dos sujeitos envolvidos na pesquisa, conhecendo algumas de suas habilidades e/ou dificuldades, em relação à aprendizagem Matemática.

Após a realização das oficinas de estudo sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky, onde os alunos poderam conhecer seus teoremas, suas respectivas demonstrações bem como alguns dos seus principais problemas de aplicação, oferecemos outro teste, também composto por 8 (oito) situações problemas envolvendo o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky.

Nesse sentido, analisando e comparando ambos os resultados, percebemos que houve um grande avanço quanto à porcentagem de acertos em cada uma das questões. Mais do que isso, analisando qualitativamente as resoluções apresentadas pelos alunos, notamos que houve uma considerável evolução do raciocínio combinatório dos sujeitos envolvidos, em relação ao apresentado durante o teste inicial.

Destacamos ainda que, a maioria dos estudantes que participaram de nosso estudo se mostraram motivados em aprender mais sobre tais temas, apresentando questionamentos interessantes e propondo soluções criativas em diversos momentos, durante nossos encontros. Sendo assim, ao final das oficinas obtivemos relatos positivos por parte dos alunos, em relação ao estudo de tais conceitos. O que comprova nossa hipótese, de que alunos do Ensino Médio podem se apropriar dos conceitos do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky e que tais assuntos podem ser trabalhados durante as aulas de Análise Combinatória.

Entretanto, se faz necessário uma consolidação dos conceitos básicos de contagem, visto que muitos desses conceitos são pré-requesitos para o estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky. Pois, como observamos durante a análise dos dados, alguns alunos apresentaram deficiência em tais conceitos, o que contribuiu para o insucesso dos mesmos, durante a resolução de alguns dos problemas propostos.

Além disso, é importante que o professor, como mediador da aprendizagem, selecione problemas com níveis de dificuldades adequado ao seu respectivo público. Pois como observamos durante nosso trabalho, o Princípio das gavetas nos permite resolver desde situações simples até problemas bem sofisticados o que reforça o pensamento de Polya (1995) [20], "o problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta."

Diante do exposto, esperamos que o presente texto, possa servir de embasamento teórico, no que diz respeito ao estudo do Princípio das Gavetas e dos Lemas de Kaplansky, bem como na produção de novas pesquisas sobre os referidos temas, contribuindo assim na formação e no aperfeiçoamento de alunos e professores de Matemática da Educação Básica.

Por fim, ressaltamos que o presente trabalho nos motivou a continuar pesquisando sobre tal temática. Nesse sentido, pretendemos fazer um estudo investigativo, analisando os limites e as possibilidades do ensino do Princípio das Gavetas, subsidiados pelo uso do software educacional Casas, Pombos e Matemática.[13]

[13]Software educacional, idealizado do por Marcelo Firer, que apresenta o Princípio da Casa dos Pombos, sugerindo três atividades com aplicações variadas: uma aplicação geométrica, uma aplicação combinatória e outra em contexto de teoria dos números elementar. O mesmo faz parte de um conjunto de softwares educionais para o ensino de Matemática, disponíveis no site da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP e pode ser acessado no seguinte endereço: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1223.

Referências

[1] BARBOSA, Eduardo Fernandes. Instrumentos de coleta de dados em pesquisas educacionais. Educativa: Instituto de Pesquisa e Inovações Educacionais. [Boletim informativo da internet] 2005 [atualizado 2005 Mar; acesso em 22/08/19].

[2] BARROS, Aidil de Jesus Paes; LEHFELD, Neide Ap. de S. **Projeto de Pesquisa: Propostas Metodológicas**. 13. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

[3] BASTOS, Antônio Carlos. **O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações Problema e sob uma Abordagem Histórica**. In: XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Vitória - ES, 2013.

[4] BERGE, C. Principles of Combinatorics. 1. ed. New York: Academic Press, 1971.175p

[5] BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. BNCC. Proposta Preliminar. Segunda Versão Revista. Brasília: MEC, 2016.

[6] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). V.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[7] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

[8] D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar Matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. 2. Brasília, 1989.

[9] DESLANDES, S. F. Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

[10] FERNANDES, Marcelo Melo **Ultilizando técnicas de contagem no ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André, 2014.

[11] GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 3. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 1996.

[12] GUNDLACH, Bernard H. **História dos números naturais**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula).

[13] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**, volume 5, 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[14] KOLATA, Gina. **In Archimedes Puzzle, A New Eureka Moment**. The New York Times, New Yory, 14 de dez. de 2003. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2003/12/14/science/14MATH.html.>. Acesso em: 30 de dez. de 2020.

[15] LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[16] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. – Fundamentos de Metodologia Científica. São Paulo: Atlas, 2017.

[17] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do professor de Matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[18] MORGADO, A. C. **Matemática Discreta** - Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[19] NUNES, Alexmay S. **As Permutações Caóticas, O Problema de Lucas e a Teoria dos Permanentes**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2015.

[20] POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[21] SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. **Introdução à Análise Combonatória**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[22] SILVA JUNIOR, Geraldo Bull. **Biologia e Matemática: Diálogos Possíveis no Ensino Médio**. Artigo - EBRAPEM - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC, Minas, 2008 .

[23] WIELEITNER, H. **História de La Matemática**. [S.l.]: Editorial Labor, 1928.

APÊNDICES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO - CPTN
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT
PROF. THIAGO AMARAL
ALUNO: ______________________________

QUESTIONÁRIO INICIAL

Questão 01. Você gosta de Matemática?
( ) Sim
( ) Não
Por quê?

Questão 02. Qual dos temas abaixo, estudados na Matemática, você considera mais fácil?
( ) Funções
( ) Geometria
( ) Trigonometria
( ) Análise Combinatória
( ) Álgebra (equações, produtos notáveis, fatoração, ...)
( ) Outro:
Por quê?

Questão 03. Qual dos temas abaixo, estudados na Matemática, você considera mais difícil?
( ) Funções
( ) Geometria
( ) Trigonometria
( ) Análise Combinatória
( ) Álgebra (equações, produtos notáveis, fatoração, ...)
( ) Outro:
Por quê?

Questão 04. Você já estudou sobre o Princípio das Gavetas?
( ) Sim
( ) Não

Questão 05. Você já estudou sobre os Lemas de Kaplansky?
( ) Sim
( ) Não

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO - CPTN
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT
PROF. THIAGO AMARAL
ALUNO: ____ PROFMAT

TESTE INICIAL

Questão 01. Dado um conjunto de 13 pessoas podemos garantir que, pelo menos, duas delas aniversariam no mesmo mês? Justifique sua resposta.

Questão 02. Em uma gaveta há 10 meias brancas e 10 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso, no mínimo, para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor? Justifique sua resposta.

Questão 03. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 3 pessoas nascida em um mesmo dia da semana? Justifique sua resposta.

Questão 04. Escolhendo 5 pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2 cm, mostre que a maior distância entre dois desses pontos é no máximo $\sqrt{2}$ cm.

Questão 05. Quantos subconjuntos com 3 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podemos formar, de modo que nesses subconjuntos não ocorra números consecutivos?

Questão 06. As provas de Matemática, Química e Física do vestibular do IME devem ser realizadas nos 7 primeiros dias de dezembro. De quantas maneiras é possível escolher os dias da prova de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Questão 07. Considere 8 cadeiras numeradas (de 01 até 08) e dispostas, ordenadamente, em círculo. De quantas maneiras podemos escolher 3 dessas cadeiras, de modo que não sejam selecionadas cadeiras com números consecutivos?

Questão 08. Em decorrência dos últimos acontecimentos de violência entre as torcidas organizadas do Ceará e do Fortaleza, a Federação de Futebol do Estado do Ceará resolveu convocar os chefes de torcida dos 8 maiores clubes do estado para uma reunião. A reunião acontecerá em uma mesa redonda com 10 cadeiras onde sentarão os chefes de torcida, o presidente da Federação e um secretário. Devido ao clima de inimizade entre as torcidas do Ceará e do Fortaleza, o responsável pela reunião, resolveu distribuir as cadeiras de modo que esses líderes sentassem em cadeiras não consecutivas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO - CPTN
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT
PROF. THIAGO AMARAL
ALUNO: ______________________________

PROFMAT

TESTE FINAL

Questão 01. Uma roleta de cassino possui 50 casas numeradas (de 01 até 50). O Jogo é: rodar a roleta e soltar uma bolinha que irá parar em uma das casas. Quantas jogadas são necessárias a fim de garantir que a bolinha cairá mais de uma vez em alguma das casas?

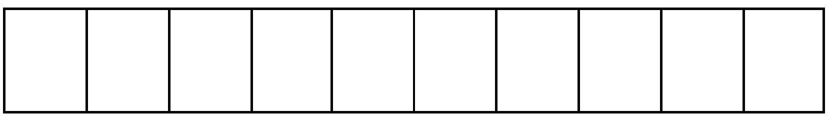
Questão 02. Considerando um grupo de 50 pessoas podemos garantir que, pelo menos, 8 delas nasceram no mesmo dia da semana? Justifique sua resposta.

Questão 03. Num campo de golfe, ficou combinado de só retirar as bolas dos buracos quando pelo menos em um deles contivesse mais de 3 bolinhas. Sabendo que existem 5 buracos nesse campo de golfe e que cada bolinha "morre"quando cai em um deles, pergunta-se: depois de quantas bolinhas mortas, os boleiros (meninos que coletam as bolinhas) devem sair para esvaziar os buracos?

Questão 04. Escolhendo 5 pontos, ao acaso, sobre a superfície de um quadrado de lado 2 cm, mostre que a maior distância entre dois desses pontos é no máximo $\sqrt{2}$ cm.

Questão 05. Quantos são os subconjuntos com 3 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tais que não ocorra números consecutivos?

Questão 06. Em um grupo de 10 bodes, existem três que não conseguem ficar próximos sem haver briga. O dono desses animais vai levá-los à feira para vendê-los e o transporte será feito em um caminhão cuja carroceria é dividida conforme ilustrado a seguir:



De quantas maneiras o criador pode acomodar os animais sem que os três animais briguentos fiquem em jaulas adjacentes?

Questão 07. Em decorrência dos últimos acontecimentos de violência entre as torcidas organizadas do Ceará e do Fortaleza, a Federação de Futebol do Estado do Ceará resolveu convocar os chefes de torcida dos 8 maiores clubes do estado para uma reunião. A reunião acontecerá em uma mesa redonda com 10 cadeiras onde sentarão os chefes de torcida, o presidente da Federação e um secretário. Devido ao clima de inimizade entre as torcidas do Ceará e do Fortaleza, o responsável pela reunião, resolveu distribuir as cadeiras de modo que esses líderes sentassem em cadeiras não consecutivas. De quantas maneiras diferentes isso pode ser feito?

Questão 08. 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO - CPTN
MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT
PROF. THIAGO AMARAL
ALUNO: ____________________________________

PROFMAT

QUESTIONÁRIO FINAL

Questão 01. Você gostou da oficina realizada sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky? Por quê?

Questão 02. Você considera que estudar o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky pode auxiliar no desempenho em olimpíadas de Matemática em testes de vestibulares? Por quê?

Questão 03. Depois da oficina, relate sua visão sobre o Princípio das Gavetas e os Lemas de Kaplansky.

Questão 04. Qual dos temas estudados você considerou mais fácil: Princípio das Gavetas ou os Lemas de Kaplansky? Por quê?

Questão 05. Qual foi a sua maior dificuldade durante a oficina?

Questão 06. O que você acha desses modelos de problemas serem trabalhados nas aulas de combinatória?