ELIANE DOS SANTOS CORSINI LUCAS

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES E PRISMAS UTILIZANDO ORIGAMI

LAVRAS – MG

2013

ELIANE DOS SANTOS CORSIN LUCAS

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES E PRISMAS UTILIZANDO ORIGAMI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós- Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Osnel Broche Cristo

LAVRAS - MG

2013

ELIANE DOS SANTOS CORSIN LUCAS

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES E PRISMAS UTILIZANDO ORIGAMI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós- Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 12 de março de 2013.

Dr. Francinildo Nobre Ferreira UFSJ

Dr. Lucas Monteiro Chaves UFLA

Dr. Osnel Broche Cristo
Orientador

LAVRAS - MG

2013

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor uma sequência de oficinas abordando a construção de poliedros regulares e prismas utilizando origami. Desta forma, elaboramos atividades com diagramas detalhados que auxiliem professores e alunos na utilização desses recursos. Acreditamos que sua aplicação contribui para a construção de conceitos geométricos por meio das dobraduras e encaixe das peças.

Palavra chave: Origami. Oficinas. Poliedros. Prismas.

ABSTRAT

The objective of this work is to propose a sequence of workshops approaching the construction of regular polyhedrons and prisms using origami. This way, we elaborated activities with detailed diagrams that aid teachers and students in the use of those resources. We believed that your application contributes to the construction of geometric concepts through the folding and fitting of the pieces.

Keywords: Origami. Workshops. Polyhedrons. Prisms.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para que o ensino da Matemática contribua para a formação do aluno é imprescindível explorar temas que encontrem na Matemática uma ferramenta indispensável para serem compreendidos. Como o origami é um poderoso instrumento para o ensino de Geometria, forneceu-nos subsidio para elaboração do trabalho que nos foi proposto no curso de mestrado profissional de matemática (PROFMAT), que deveria versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.

O Origami por se tratar de uma arte de custo acessível influencia positivamente no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, visto que permite a construção de figuras tridimensionais e a movimentação de objetos no espaço. É uma das raras oportunidades no ensino da Matemática, onde se pode pôr a "mão" no objeto de estudo. Com materiais simples, como papel A4, papel de jornal, papel reciclável pode-se aprender Matemática de uma forma divertida. Assim o aluno percebe que, com uma simples folha de papel, pode construir, desde um simples polígono, como o hexágono, até um sólido geométrico, como o tetraedro.

Sendo assim, pode ser utilizado como recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade, do senso estético e do espírito de investigação, entre outras competências e habilidades recomendadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1998), nas categorias que dizem respeito à representação e comunicação, à investigação e compreensão e à contextualização sociocultural.

Ministrando aulas em uma escola estadual, a autora do trabalho teve experiência em trabalhar com dobraduras (origami), com alunos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. Começou quando foram levados à sala de aula, alguns poliedros feitos de origami para que os alunos tivessem noção do espaço tridimensional. Ao se deparar com essas figuras, muitos ficaram impressionados pelas cores e formatos, despertando o interesse pela construção destas.

Quando se é educador, é quase impossível resistir à vontade de compartilhar o conhecimento, ainda mais quando se tem a oportunidade de instigar o gosto pela aprendizagem, fazendo com que o educando construa seu próprio conhecimento, tornando-se protagonista do próprio aprendizado. Após a decisão de compartilhar este conhecimento, foram feitas diversas pesquisas em livros e, principalmente em sites da internet, coletando diferentes diagramas para a construção desses sólidos para levar à sala de aula. As dificuldades que encontradas pela autora para colocar a atividade em prática foram muitas. Instruções que, no início pareciam ser fáceis, se tornaram imensamente difíceis, por falta de monitores em ambientes com mais de trinta alunos, nas quais alguns mostraram dificuldade de concentração e interpretação.

Diante das dificuldades encontradas na aplicação do origami em sala de aula, e para cumprir o que foi solicitado pelo PROFMAT, propusemos elaborar uma sequência de oficinas que auxilie a utilização dessa ferramenta como processo de ensino aprendizagem, tornando assim o origami mais acessível aos alunos e professores.

As pesquisas realizadas para a elaboração das oficinas centrou-se na utilização do Origami no ensino da Geometria, principalmente que tratasse das construções de poliedros e prismas. Houve relativa dificuldade em encontrar literatura disponível, pois existem poucos livros, principalmente publicados em português, que tratam do assunto. Assim, a pesquisa foi com base nas obras de autores como: Fusè (2006), Imenes (1994) e Kasahara (2005) e alguns trabalhos sobre origami publicados na internet.

No livro de Imenes (1994) encontrou-se o uso das dobraduras para introduzir noções de retas paralelas e perpendiculares, bissetrizes e construções de polígonos, além de trabalhar com as características matemáticas de alguns poliedros. Já o livro de Fusè (2006) é constituído de modelos para a construção de módulos com os quais se constroem vários tipos de poliedros e que exige maior habilidade com o origami. No livro de Kasahara (2005), além de construções de poliedros bem detalhadas, também traz algumas demonstrações matemáticas que justificam a exatidão das peças construídas.

Após a fase inicial de pesquisa e o levantamento dos materiais coletados, selecionamos os conteúdos para a elaboração das atividades que poderiam ser desenvolvidas para aplicação em sala de aula. Desta forma as nossas pesquisas deram origem a dois trabalhos: Um deles, elaborado por Bráz (2013), voltado para a aplicação do origami no ensino da Geometria Plana com foco nos pontos notáveis de um triângulo. O outro, da autora desse trabalho que consiste em uma abordagem didática para a construção de poliedros e prismas.

Uma vez selecionados os conteúdos dos trabalhos, começamos pela introdução que ressalta as motivações que nos levaram ao desenvolvimento dessa proposta de atividades educacionais.

Com a colaboração de Bráz (2013), elaboramos partes comuns aos dois trabalhos. Nestas partes, apresentamos um breve histórico do origami, onde salientamos que a história do origami está diretamente ligada à história do papel, além de citarmos as sete possibilidades para uma única dobragem de Origami, que consistem nos axiomas de Huzita-Hatori. Como os iniciantes dessa técnica podem apresentar certa dificuldade ao começar as primeiras dobras, trazemos recomendações e observações baseadas na nossa experiência para facilitar sua utilização em sala de aula.

Ao elaborarmos as oficinas com origami, ilustramos os diagramas de modo mais detalhado possível, levando os alunos à finalização de suas atividades, e ao mesmo tempo permitindo a compreensão de conceitos abstratos. O trabalho está organizado em três oficinas. Na primeira oficina são construídos os principais polígonos regulares como o triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono e octógono. Devido a grande dificuldade dos alunos em reconhecer formas, a construção e estudo desses polígonos regulares facilitariam a compreensão das principais propriedades que envolvem os poliedros regulares. A segunda oficina consiste na construção e montagem dos cinco Poliedros de Platão : tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Na última oficina, construímos módulos retangulares que ao se encaixarem dão origem a prismas "ocos" que possuem apenas faces laterais. Lembrando que durante todas as oficinas, apresentamos recomendações que auxiliem professores e alunos na utilização desses recursos.

Concluindo, acreditamos que, sendo o resultado final da dobradura um material manipulável, permite ao aluno manusear o objeto em estudo, analisar seus elementos, propriedades e características.

2 APRESENTAÇÃO E BREVE HISTÓRICO DO ORIGAMI

A origem da palavra origami advém do japonês e é composta por dois caracteres: o primeiro “Ori” deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, “Kami”, deriva do desenho da seda, significa papel e Deus, uma indicação da importância do papel para os japoneses. Ao juntar os dois caracteres, “cai” o K e a pronúncia fica origami.

Segundo Rafael (2011), em qualquer livro da especialidade pode-se ler que “O Origami é a arte japonesa de dobrar papel”.

Ori **Kami**

Figura 1 Símbolos dos caracteres da palavra origami

Fonte: História... (2013)

Pode-se dizer que o trabalho com origami pode ser dividido em dois tipos: o origami tradicional, que utiliza apenas uma peça de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem, e o origami modular, que se baseia na construção de módulos ou unidades, na qual se dobram várias peças independentes transformando-as em módulos, que possuem aberturas que serão unidas entre si e cujo objetivo é dar origem, quase sempre, a corpos geométricos.

A história do origami está diretamente ligada à história do papel e, apesar de o Japão ser considerado o berço do origami, diz-se também que ele pode ter surgido na China, onde a história do papel é bem mais antiga. Neste país, a invenção do papel foi creditada, em 105 d.C., a *T’sai Lao*, alto funcionário da corte real, que começou a misturar cascas de árvores, panos e redes de pesca na tentativa de substituir a sofisticada seda que se utilizava para escrever.

O império chinês manteve segredo sobre as técnicas de fabricação do papel durante séculos, pois exportava este material a preços altos. No século VI, por intermédio de monges coreanos, a técnica para fabricar papel chegou ao Japão, país em que o origami se desenvolveu tal como o se conhece hoje, e um século mais tarde, os árabes obtiveram o segredo desse processo. Na Europa, a técnica chegou por volta do século XII e, dois séculos mais tarde, já se espalhava por todos os reinos cristãos.

No Brasil, acredita-se que a arte do Origami iníciou-se por dois meios: - por nosso país vizinho, a Argentina, que possuía muita influência da cultura espanhola e por meio dos imigrantes japoneses que aqui vieram, a partir de 1908.

Segundo o artigo de Rafael (2011), a história do origami pode ser dividida em três grandes períodos:

a) o período Heian, que vai de 794 a 1185: neste período, o origami era visto como um divertimento das classes mais ricas, pois eram as únicas que tinham condições de adquirir o papel, que era um artigo de luxo;
b) período Muromachi, que vai de 1338 a 1573: neste período, o papel tornou-se um produto mais acessível e o origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais conforme os adornos que as pessoas usavam;

c) o período Tokugawa, que vai de 1603 a 1867: também conhecido como o período da democratização do papel. Foi neste que se deu a popularização do origami, surgiu a dobradura original do *tsuru* (cegonha), sem dúvida a mais popular no Japão e, também, surgiram os primeiros livros de Origami. Em 1845 foi publicado o livro *Janela Aberta à Estação do Inverno*, que incluía cerca de 150 modelos de origami. Graças a esta publicação, o origami espalhou-se no Japão como uma atividade tanto recreativa como educacional.

Muita dessa evolução se deve ao espalhamento desta arte ao redor do mundo, que só possivel quando foi trancendida a barreira da lingua, quando se criou um sistema de diagramação. Este sistema consiste em códigos formados por setas, linhas pontilhadas e outros símbolos, criado pelo mestre japonês Akira Yoshizawa, em 1956. Desta forma, Yoshizawa com a colaboração do americano Sam Randlett criou uma simbologia (Sistema Yoshizawa – Randlett, 1956), de instruções para dobrar os modelos que constituem a linguagem do origami.

Para finalizar este breve histórico sobre origami, não seria possível deixar de citar Humiaki Huzita, um matemático japonês- italiano (nasceu no Japão, mas viveu grande parte de sua vida na Itália), conhecido por formular, no final da década de 70 do século passado, os primeiros seis axiomas, conhecidos como *axiomas de Huzita*, que descreviam a Matemática de dobrar o papel para resolver problemas de construção geométrica.

De acordo com Lang (2003, p.11), em origami, existem dois tipos de dobras que são representados no sistema de Yoshizawa por linhas tracejadas diferentemente denominadas dobra em vale e dobra em montanha (Figura 2).

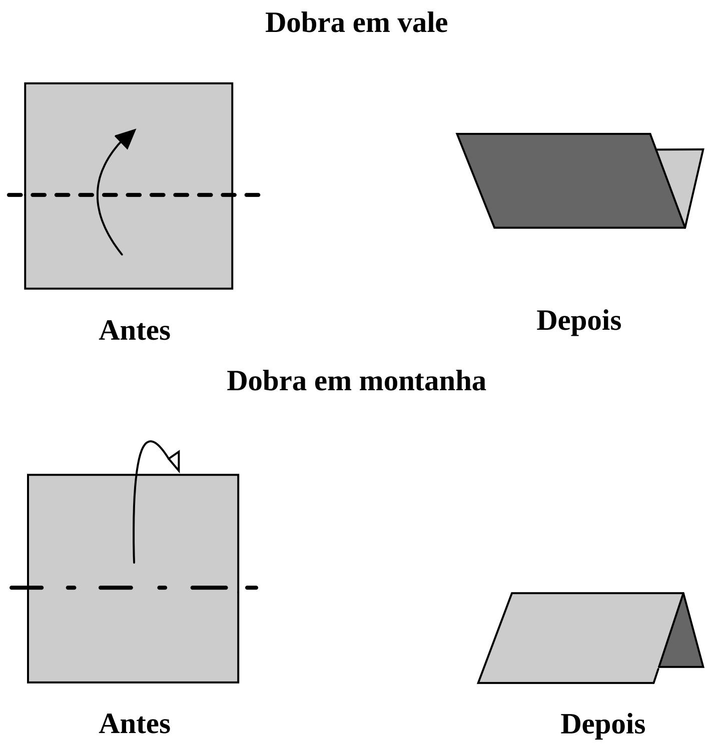


Figura 2 Tipos de dobras

Outro aspecto a considerar na história do Origami é a forma do papel utilizado nas dobragens. Durante vários anos, os modelos eram construídos a partir de um papel com formato de quadrado, mas, mais recentemente, passaram a ser utilizadas outras formas e, muitos dos modelos poliédricos são construídos a partir de retângulos semelhantes a uma folha A4, cuja razão entre o lado menor e o lado maior é $1{:}\sqrt{2}$.

Da mesma forma que as construções geométricas tradicionais, as construções realizadas por meio de dobraduras são regidas por um corpo axiomático. O conjunto de axiomas necessários para realizar construções geométricas por meio de dobraduras no papel é conhecido como axiomas de

Huzita-Hatori, obtidos em Lank (2012). Desta forma, os axiomas enumerados abaixo regem todas as construções realizáveis via dobraduras em papel.

2.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori

Axioma 1: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.

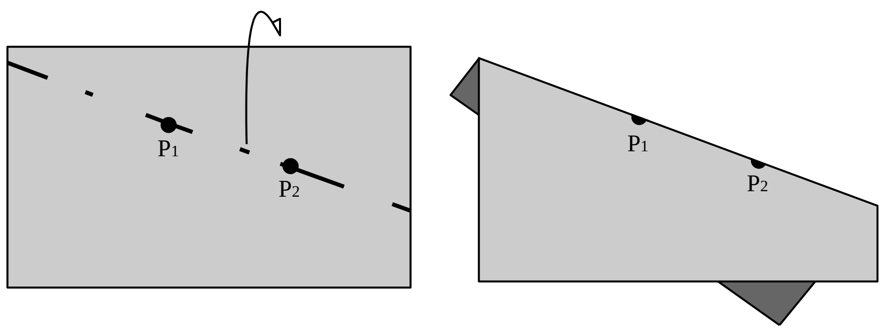


Figura 3 Axioma 1

Axioma 2: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2.

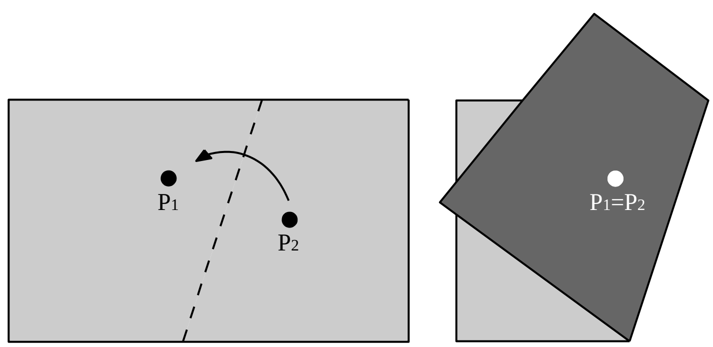


Figura 4 Axioma 2

Axioma 3: Dadas as retas r_1 e r_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.

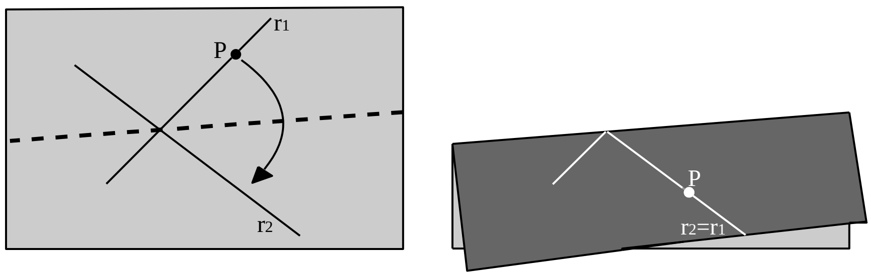


Figura 5 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 concorrentes

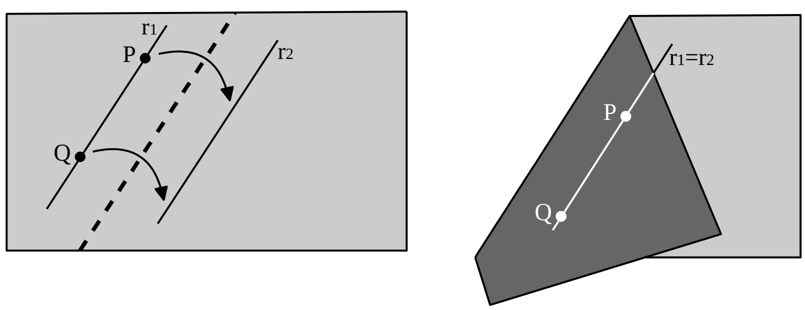


Figura 6 Axioma 3: Retas r_1 e r_2 paralelas

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P.

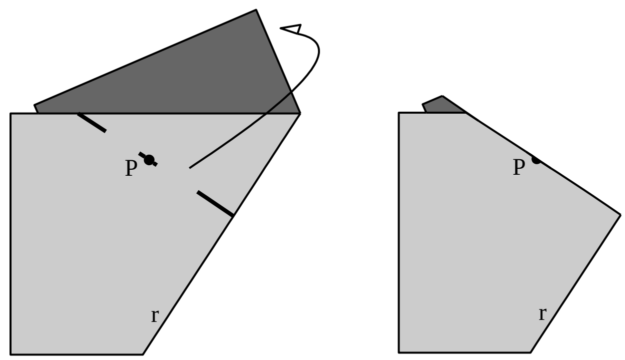


Figura 7 Axioma 4

Axioma 5: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e uma reta r, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2.

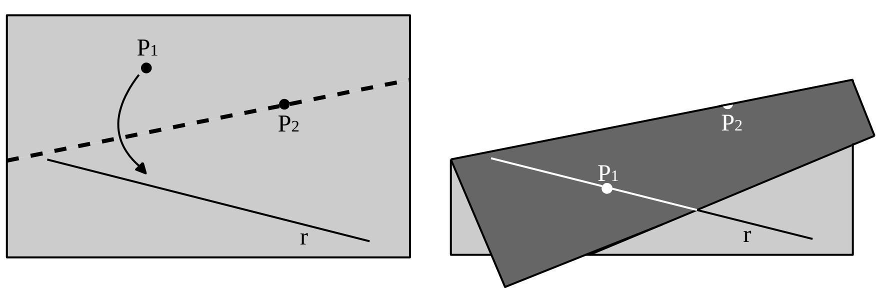


Figura 8 Axioma 5

Axioma 6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.

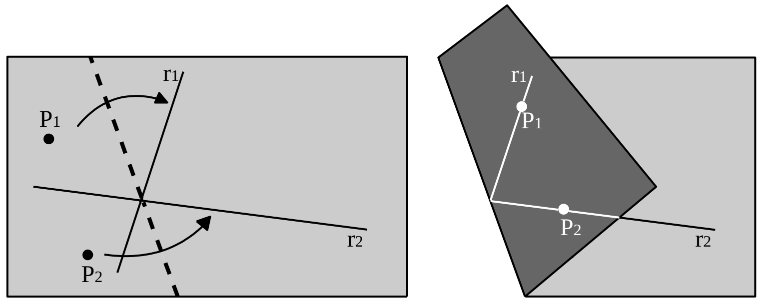


Figura 9 Axioma 6

Axioma 7: Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2.

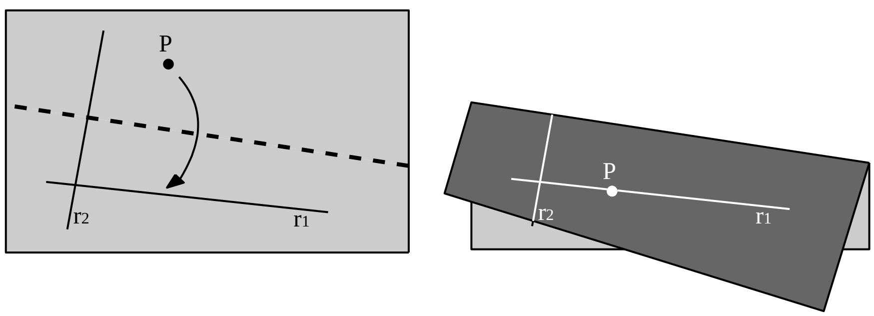


Figura 10 Axioma 7

3 RECOMENDAÇÕES EM RELAÇÃO AO USO DA TÉCNICA DO ORIGAMI

Levando em consideração que iniciantes no estudo da técnica origami podem apresentar certa dificuldade ao começar as primeiras dobras, mostraremos abaixo algumas recomendações em relação às dobragens e observações sobre como se vai expor os passos e figuras das atividades ao longo do trabalho. Estas recomendações e observações são baseadas na nossa prática durante o desenvolvimento deste, na nossa experiência e no livro de Mitchell (2008).

Cada passo de cada atividade, em sua maioria, está organizado em uma série de figuras que apresentam o modelo “antes” e “depois”. Os símbolos que serão utilizados para ilustrar as dobragens são baseados no sistema inventado por Akira Yoshizawa.

Uma figura “antes” para uma dobragem simples pode ter o aspecto da figura da esquerda abaixo. Para fazer esta dobra (com a folha sobre a carteira), levante o lado direito do papel e, seguindo o sentido indicado pela seta, coloque-o sobre o lado esquerdo. Segure firmemente o papel e faça uma pequena dobra sobre o centro do lado direito. Se os lados não tiverem se movido, finalize a dobra passando uma unha para acentuar o papel. Se a dobra tiver sido bem feita (e espera-se que seja), o resultado tem o aspecto da figura da direita abaixo.

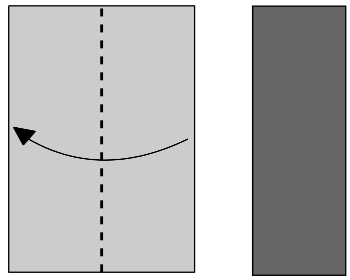


Figura 11 Dobragem simples

Depois de ter feito esta dobra e desdobrado, haverá uma linha pontilhada no meio da folha que indica a dobradura realizada (figura da esquerda abaixo). As dobras serão sempre mostradas logo a seguir a serem feitas, mas às vezes há tantas dobras que, para distinguir as que representam dobras já realizadas da que está se propondo fazer, será colocada a linha pontilhada da dobra a ser feita **em negrito**.

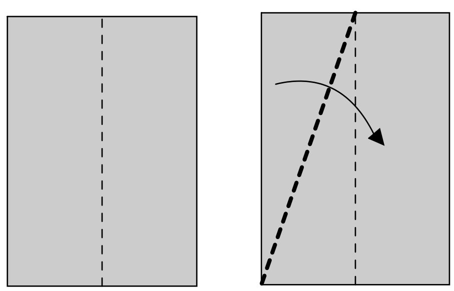


Figura 12 Dobra a ser feita

Para fazer a dobra proposta na figura da direita acima, observe primeiro a linha que está em negrito, ela assinala onde ficará a dobra. Neste caso, a nova dobra irá da dobra central até o canto inferior esquerdo. O problema é que a seta de movimento termina num espaço vazio, por isso não se pode saber exatamente aonde o canto que vai se mover irá ficar. A melhor maneira de fazer esta dobradura é dobrar pequenas seções de cada vez. Comece da dobra existente e vá avançando mais ou menos na direção certa.

Dobre esta primeira seção, mas mantenha o resto da dobra indefinida até ter certeza que passa exatamente no ponto do canto, e vá dobrando o papel por fases, ajustando-o sempre que necessário até acertar. O resultado está ilustrado na figura abaixo.

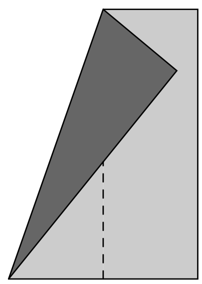


Figura 13 Resultado da dobra

É mais fácil fazer dobras com o papel sobre uma superfície lisa e dura, mas há casos em que retirá-lo da superfície também pode ser vantajoso. Não receie em virar a folha ao contrário para poder fazer a dobra de forma mais natural. O que pode ser fácil para uma pessoa destra, por exemplo, pode não ser para uma pessoa canhota.

Nas figuras, usamos um papel com faces de cores diferentes para ilustrar melhor as dobras. Note que, quando se faz uma dobra para frente, a face colorida fica no exterior do papel. Se a dobra for feita para trás, a face colorida fica no interior do papel. No entanto, mesmo que não se use papel de duas cores, esta distinção pode ser importante para melhor compreensão das figuras. Em alguns passos, se fará a dobra para frente (em sua maioria) e, em outros, para trás, isto se deve à nossa experiência com a técnica origami e à nossa prática durante o desenvolvimento deste trabalho, por exemplo, ao se fazer uma dobra sobre uma reta, ou uma dobra que passe por dois pontos distintos, percebe-seque a dobragem torna-se mais fácil se for feita para trás. Cabe observar que, a dobra obtida será a mesma, independente de realizar para frente ou para trás, o que muda é como chegar até tal dobra. E a própria escolha será sempre baseada na nossa prática, valendo observar também que há casos em que tanto uma quanto outra, o grau de dificuldade é o mesmo.

Para que o professor consiga atingir seus objetivos em uma aula de Geometria utilizando origami, é conveniente iniciá-la partindo-se de dobras mais simples, para que os alunos se familiarizem com os diagramas e dobras e vão adquirindo mais segurança para realizar as construções que incluem mais elementos. Sugere-se que o professor discuta com os alunos as relações matemáticas encontradas durante a construção, orientando a aprendizagem da matemática por meio do origami, caso contrário o aluno apenas realizará a atividade, não associando as dobras com a matemática.

Vale ressaltar que, não há obrigatoriedade em trabalhar as atividades propostas neste trabalho na sequência apresentada. O professor pode executar a atividade que melhor se encaixe no seu conteúdo. Sugere-se apenas que se dê uma pequena introdução sobre o origami.

Uma das dificuldades previstas durante a execução das atividades é que o professor poderá encontrar alunos com dificuldade motora para realizar as dobras no papel com certa perfeição, devendo assim, dar maior assistência a estes alunos. É aconselhável que o professor tenha ajuda de alguns monitores para executar as atividades.

4 OFICINAS

O trabalho consiste na elaboração de sequências de oficinas abordando conceitos de Geometria Plana e Espacial com a utilização de dobraduras (origami), facilitando assim a compreensão destes conceitos abstratos.

O trabalho foi dividido em três oficinas:

a) POLÍGONOS REGULARES: Esta oficina trata da construção dos principais polígonos regulares, como triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono e octógono. Desta forma o professor pode trabalhar o conteúdo de polígonos regulares de uma forma mais dinâmica, onde o próprio aluno constrói seu conhecimento, permitindo assim uma melhor compreensão das principais propriedades que envolvem este tópico.

b) POLIEDROS REGULARES – POLIEDROS DE PLATÃO: Nesta oficina são construídos os cinco poliedros de Platão. São eles: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Será construído utilizando o origami modular, onde serão utilizadas várias folhas de papel, eventualmente de cores diferentes, para construir diferentes módulos ou unidades modulares que, depois de encaixados, determinam a forma final do modelo.

c) PRISMAS: Nesta oficina, serão apresentadas atividades com dobraduras que envolvem a construção das faces laterais de alguns prismas, entre eles: prisma triangular, o prisma quadrangular, prisma pentagonal e o prisma hexagonal.

4.1 Oficina 1 : Polígonos Regulares

O objetivo principal com essa oficina é construir os principais polígonos regulares como o triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono e octógono, utilizando dobraduras. Como poucos objetos tem o formado de um heptágono regular e pela dificuldade nas dobras não o construiremos.

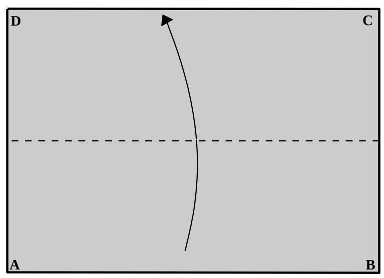
Estas atividades podem ser trabalhadas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, bem como com alunos do segundo ano do Ensino Médio. No Ensino Fundamental estas atividades se enquadram no estudo dos polígonos, onde o aluno pode ter uma visão mais clara dos tipos de polígonos e seus elementos. Ao iniciar o estudo da Geometria Espacial, principalmente os poliedros no Ensino Médio, muitos alunos encontram dificuldade em reconhecer formas, sendo conveniente o professor trabalhar inicialmente os principais polígonos regulares.

Para a realização das atividades, o professor pode utilizar folhas de papel A4 (gramatura 75 g/m^2, 210 mm x 297 mm). Na verdade, todo o papel de espessura moderada vai atender a finalidade, Escolheu-se o papel A4 devido ao fácil acesso e baixo custo. Serão utilizadas também a régua ou a tesoura em algumas atividades. Assim a forma obtida não é propriamente um origami, pois como já foi citado o origami tradicional utiliza apenas uma peça de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem.

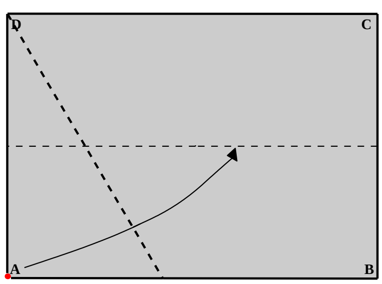
Para passar as instruções sugere-se o uso do data show ou, se não for possível, que o professor forneça as instruções das atividades no formato impresso e proponha que os alunos façam as atividades em grupo. O professor deverá mostrar a sequência de passos aos alunos (data show) explicando cada um deles e, preferencialmente, realizando as dobraduras junto com a turma, podendo utilizar folhas maiores para a melhor visualização por parte dos alunos. Seria interessante também que o professor, ao longo de cada oficina, reforce conceitos básicos da Geometria Plana e identifique os principais elementos e propriedades das formas geométricas construídas.

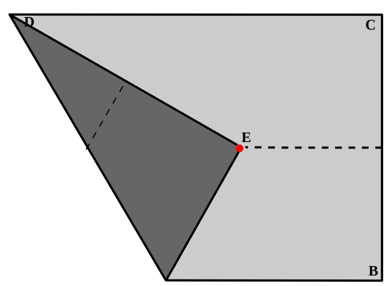
4.1.1 Atividade 1: Triângulo Equilátero

Passo 1: Seja $ABCD$ um retângulo. Faça uma dobra de modo a coincidir os lados AB e CD . (note que a dobra que estamos determinando é a mediatriz do lado AD).

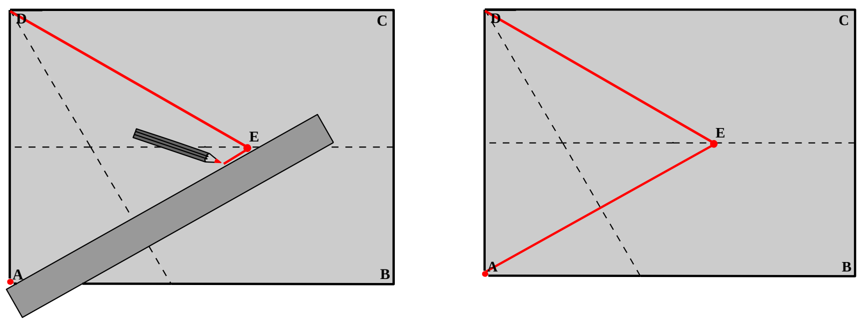


Passo 2: Desdobre. Faça uma dobra que passe pelo vértice D e de modo que o vértice A fique sobre a dobra obtida no passo 1. Seja E o ponto que A determina em tal dobra. Note que, ao se fazer esta dobra, obtém o segmento DE que é congruente ao segmento AD .





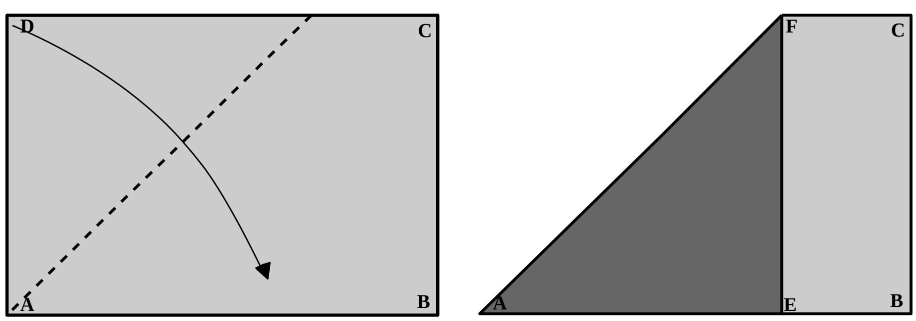
Passo 3: Desdobre. Para melhor visualizar o triângulo, o professor pode pedir aos alunos que façam uso de régua e lápis e tracem os segmentos DE e AE.



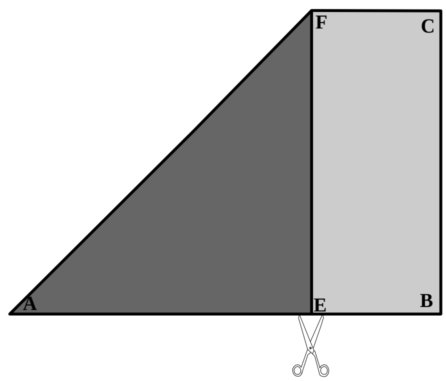
Justificativa: Observe que, como $AD = DE$ e o ponto E pertence à mediatriz do lado AD, ou seja, E equidista de A e de D, segue que, $AD = AE = DE$.

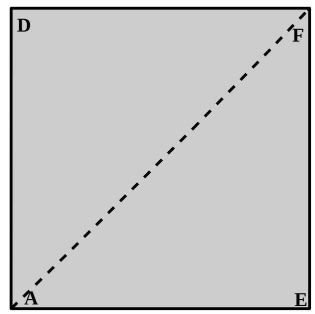
4.1.2 Atividade 2: Quadrado

Passo 1: Seja uma folha retangular. Faça uma dobra sobrepondo o lado AD sobre o lado AB. Seja E o ponto que D determina sobre AB e F o ponto de interseção entre a dobra e o lado CD.



Passo 2: Recorte EF, ou seja a parte cinza claro. Após desdobrar, encontraremos um quadrado.



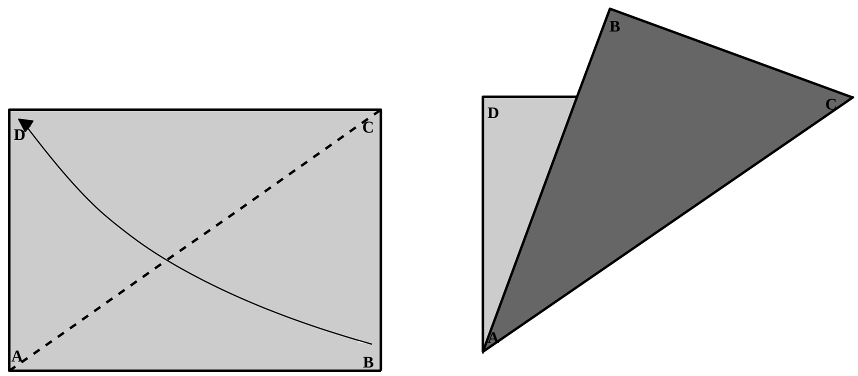


Justificativa: Observe, no passo 1, a sobreposição dos ângulos $\angle FDA$ e $\angle AEF$, assim, tem-se que $90º = \angle DAE = \angle FDA = \angle AEF$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, segue que $\angle EFD = 90º$ e, portanto, todos os ângulos internos do quadrilátero são retos. Observe ainda que, no passo 1, ao sobrepor o lado AD sobre AB, além de determinar o segmento $AE = AD$, a dobra obtida é a bissetriz do ângulo $\angle DAE$ e, como F pertence à esta dobra, tem-se que F equidista de AD e de AE , logo $FD = FE$, já que $FD \perp AD$ e $FE \perp AE$.

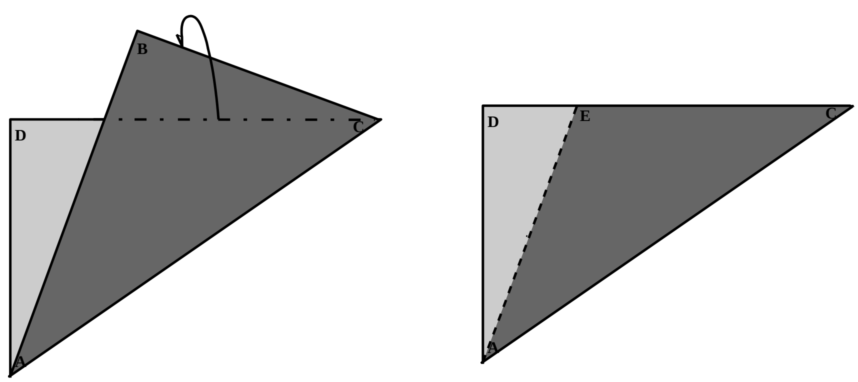
4.1.3 Atividade 3: Pentágono Regular

Existem vários diagramas que ensinam a construir um pentágono regular. Escolheu-se esta, pela facilidade de construção. Talvez uma das dobras em que o grau de dificuldade é maior seja a primeira, que consiste na diagonal do retângulo.

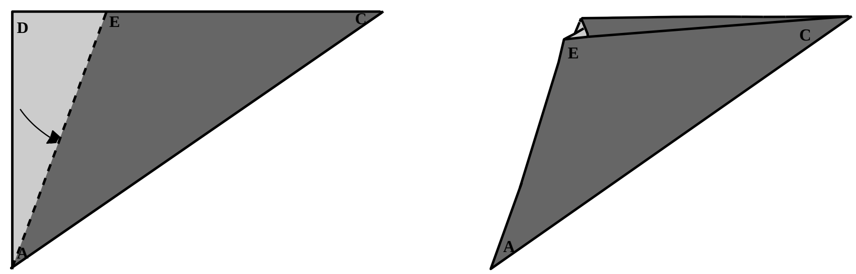
Passo 1: Seja um retângulo de vértices *ABCD*. Dobre a diagonal AC do retângulo.



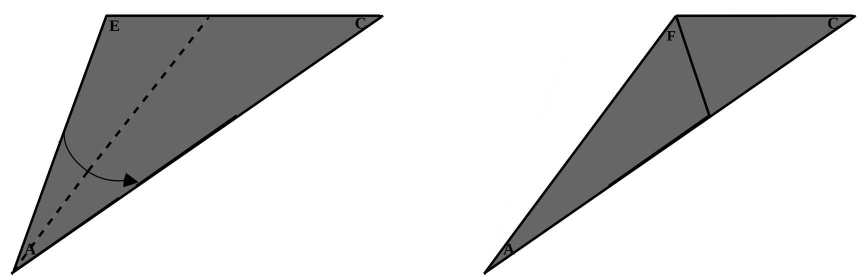
Passo 2: Encontre o ponto E, interseção de DC com AB, e faça uma dobra para trás colocando *BC* para dentro.



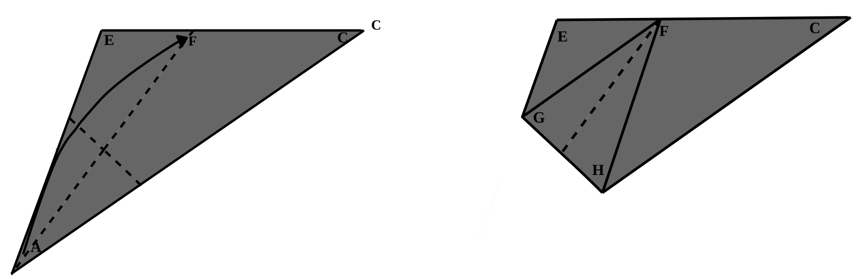
Passo 3: Dobre colocando AD por dentro de AE encaixando as duas abas internas, conforme a figura . Observe que o triângulo AEC formado é isósceles.



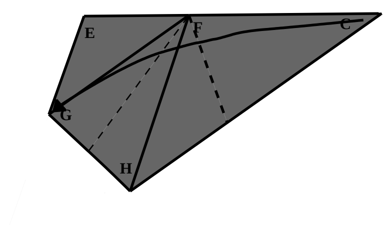
Passo 4: Dobre de forma a encontrar a bissetriz do ângulo $\angle EAC$.

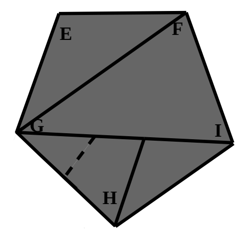


Passo 5: Desdobre e faça uma dobra levando o vértice A até F.



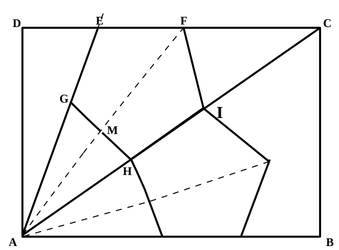
Passo 6: Proceda como o passo anterior com o vértice C. Desta forma teremos um pentágono regular.





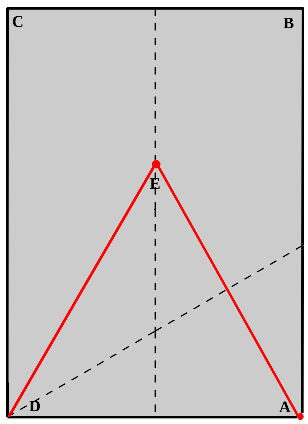
Esta atividade também serve para montar o módulo que representa a face pentagonal do dodecaedro, pois possui abas e bolsos para os doze módulos se encaixem montando assim, o dodecaedro (Instruções de montagem desse poliedro está em oficina 2, na atividade 3).

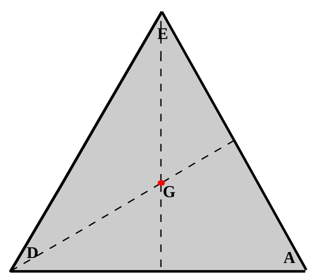
Justificativa: Note que, ao desdobrou-se o módulo, o ângulo reto A, do retângulo inicial, ficou dividido em 5 partes iguais, ou seja, cada um dos ângulos tem como medida 18º. Sendo GH a mediatriz do segmento AF, segue que $GH \perp AF$ e, portanto, o triângulo GAH é isósceles, logo $A\hat{G}H = A\hat{H}G = 72^o$. E assim obtém-se $E\hat{G}H = I\hat{H}G = 108^o$.



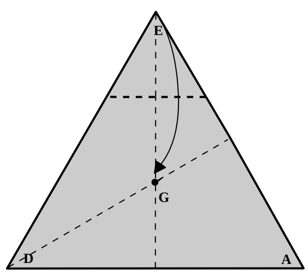
4.1.4 Atividade 4: Hexágono Regular

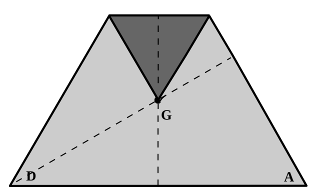
Passo 1: Recorte o triangulo equilátero obtido conforme instruções da atividade 1. Note que o segmento que passam por *D* representa a bissetriz, altura e mediatriz em relação ao lado *AE*, da mesma forma que o segmento que passa por E em relação ao lado *AD*. Observe também que esses segmentos se intersectam em ponto, chamado de baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro do triângulo que denotaremos por *G*.



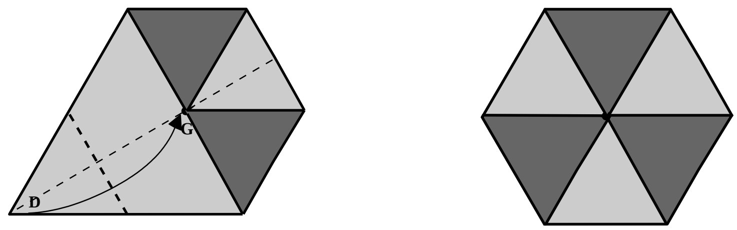


Passo 2: Faça uma dobra levando o vértice *E* a *G*.





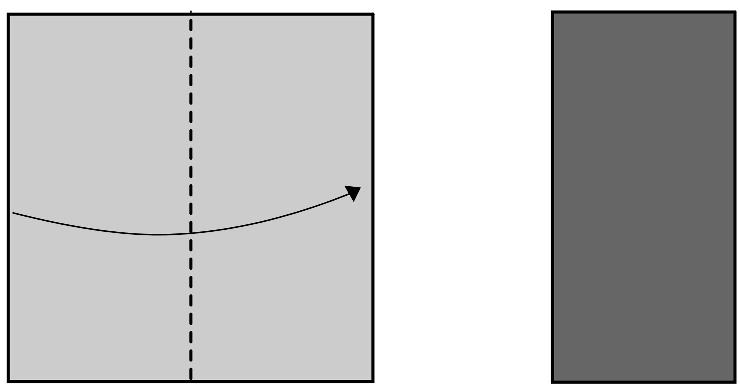
Passo 3: Proceda como no passo anterior levando os vértices *D* e *A* ao ponto *G*. Desta forma obtém um hexágono regular.



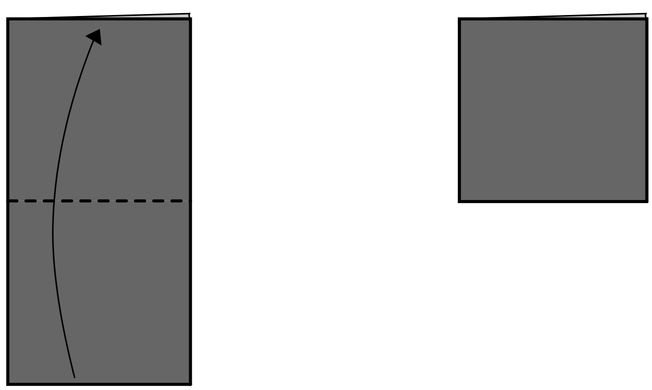
Justificativa: Considere o triângulo equilátero ADE . A dobra que passa por D representa a bissetriz, a altura e a mediatriz do ângulo $\angle EDA$, relativas ao lado AE (o mesmo vale para a dobra que passa por E). O ponto G , de interseção destas duas dobras, é o baricentro, o ortocentro, o incentro e o circuncentro do triângulo. Como o baricentro divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice, ao se levar cada vértice até o baricentro, obtém-se triângulos equiláteros. Logo, a polígono formado é um hexágono regular.

4.1.5 Atividade 5: Octógono Regular

Passo 1: Seja uma folha quadrada. Dobre a folha ao meio.



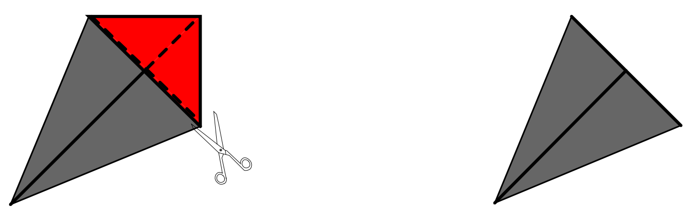
Passo 2: Dobre novamente. Note que o quadrado obtido é um quarto da área do quadrado inicial.



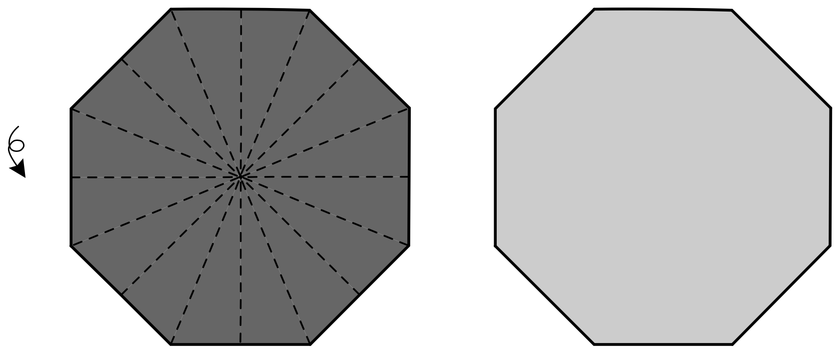
Passo 3: Faça uma dobra de modo a encontrar a diagonal do quadrado.

Passo 4: Desfaça a dobra anterior e dobre o quadrado como mostra a figura.

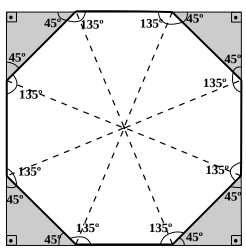
Passo 5: Recorte o triângulo destacado abaixo.



Passo 6: Desfazendo todas as dobras, teremos um octógono regular.



Justificativa:



Pelas dobras observe vai que os oito triângulos internos da figura são isósceles. Note que o triângulo recortado é retângulo e isósceles. Assim, cada ângulo agudo do triangulo retângulo mede 45º e o ângulo interno do octógono mede 135º. Portanto, o octógono construído é regular.

4.2 Oficina 2 : Poliedros Regulares

Como um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si, será utilizado nesta oficina, o origami modular, que consiste em confeccionar módulos individuais que quando encaixados geram os sólidos geométricos.

O objetivo da seção é propor uma sequência de atividades abordando o conteúdo de poliedros regulares, ou seja, os poliedros de Platão. Desta forma, elas podem ser realizadas com alunos do segundo ano do Ensino Médio ao iniciar-se o conteúdo de poliedros. Para a realização das atividades em sala de aula, como já foi citado na oficina anterior, pode ser utilizado material mais economicamente favorável, como folhas de papel A4. Mas se o professor resolver fazer uma exposição dos sólidos construídos, sugere-se que usem folhas coloridas ou até mesmo papel próprio para origami. Para confeccionar os poliedros de Platão foram utilizadas folhas *Real Paper*, que possuem cores fortes e tem o mesmo formato A4. Para passar as instruções, seria interessante que o professor, juntamente com o monitor mostrasse as dobraduras a serem realizadas, em folha consideravelmente maior, para que os alunos pudessem acompanhar os passos indicados, ou se for possível utilizar o data show.

Foi proposta a construção dos cinco Poliedros de Platão que são tetraedro (4 faces triangulares), hexaedro (6 faces quadradas), octaedro (8 faces triangulares), dodecaedro (12 faces pentagonais) e icosaedro (20 faces triangulares). Existe uma propriedade que diz que “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360°”. Analisando esta propriedade note que os polígonos regulares que formam os cinco poliedros regulares são: o Triângulo ($3x60^o = 180^o$), o quadrado ($3x90^o = 270^o$) e o Pentágono ($3x108^o = 324^o$).

Desta forma, para a construção dos poliedros de Platão serão utilizados módulos que representam as faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. Para melhor visualização dos passos efetuados durante a montagem dos poliedros, utilizou-se de fotos indicando os procedimentos que devem ser executados. Por ter um grau de dificuldade menor começaremos pelo hexaedro, o qual partindo de uma folha quadrada obterá um módulo com formato de quadrado com duas pontas (abas) triangulares. A segunda atividade consiste na construção dos Poliedros de faces triangulares: Tetraedro, Octaedro e Icosaedro. Este módulo terá o formato de um triângulo equilátero construído a partir de um quadrado, sendo que de ¼ da área deste quadrado será construída uma peça que servirá de conexão para a montagem dos Poliedros. O último módulo construído será um pentágono com duas abas de conexão para a montagem do dodecaedro.

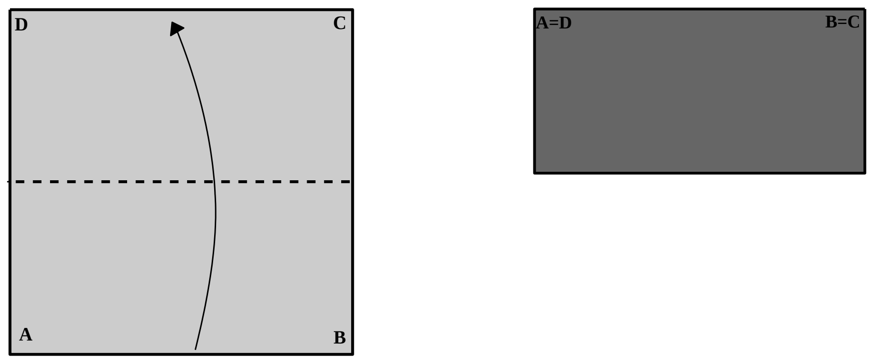
Depois de realizada cada atividade, ou seja, após a construção dos módulos correspondente ao poliedro que será montado, o professor poderá pedir para que os alunos formem grupos para encaixar os módulos, montando assim o respectivo poliedro. Os grupos podem ser de seis alunos se o módulo construído for, por exemplo, o que gera o hexaedro, pois teremos seis módulos que formarão as seis faces quadrangulares do hexaedro. Desta forma o professor conseguirá com uma ou duas aulas finalizar a montagem do hexaedro. Os poliedros que para construção, utilizam muitos módulos, sugere-se ao professor que depois de construir um ou dois módulos em sala de aula, peça aos alunos como atividade extra classe a construção dos módulos restantes. Desta forma, facilita a realização da construção de todos os poliedros durante as aulas.

No final das atividades colocaram-se alguns exercícios para que os alunos possam manipular os sólidos geométricos, identificando seus principais elementos e características. Sendo assim, durante a montagem dos poliedros os alunos podem observar o número de número de faces, vértices e arestas dos poliedros construídos para verificação da relação de Euler.

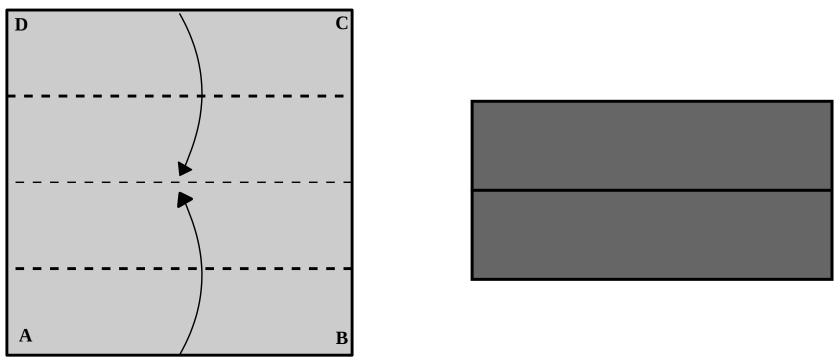
4.2.1 Atividade 1: Hexaedro ou cubo

4.2.2 Atividade 1.1: Construindo um módulo

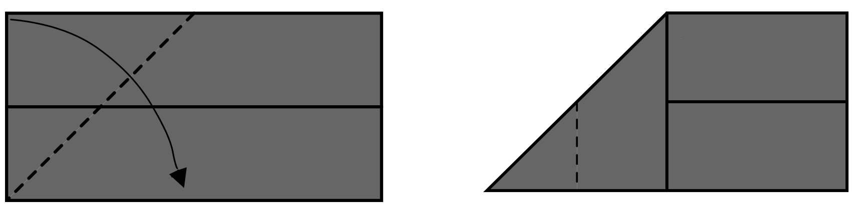
Passo 1: Partindo de um quadrado, faça uma dobra de modo a coincidir os lados AB e CD (note que a dobra que se determina é a mediatriz do lado AD).



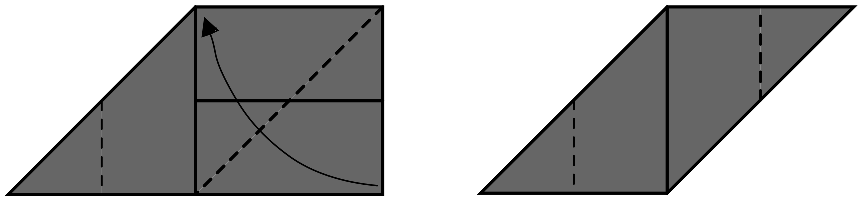
Passo 2: Desfaça a dobra anterior. Faça uma dobra, levando os lados *AB* e *CD* até a mediatriz.



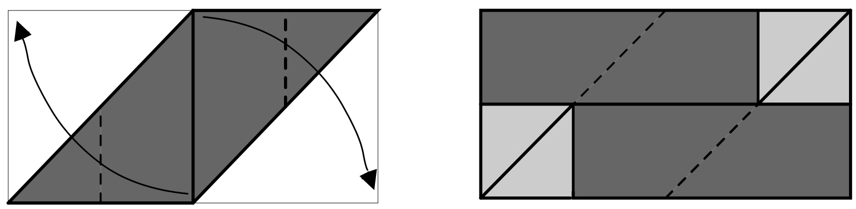
Passo 3: Mantendo um dos vértices fixo, dobre de modo a formar um triângulo retângulo, conforme a figura.



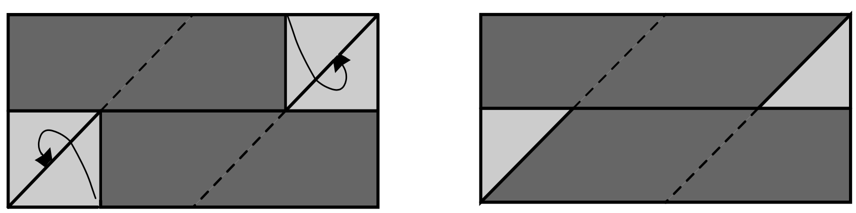
Passo 4: Proceda da mesma forma que o passo anterior com o vértice oposto obtendo um paralelogramo cuja base é a metade do lado do quadrado inicial.



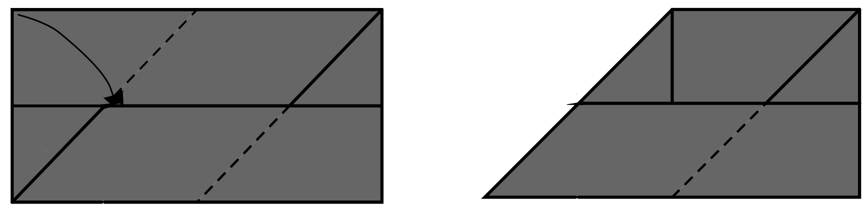
Passo 5: Desdobre. Observe que se teránas extremidades dos vincos, duas abas (cinza) que formam triângulos retângulo.



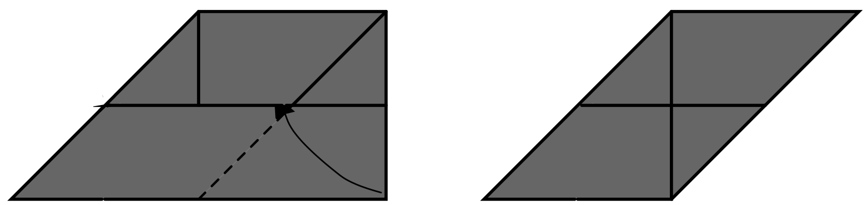
Passo 6: Dobre colocando estes triângulos para dentro.



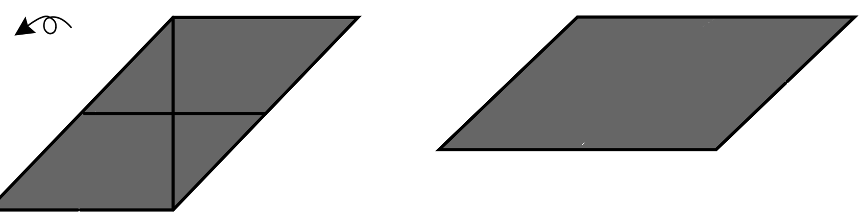
Passo 7: Proceda conforme o passo 3 , mas de forma a colocar o vértice do triângulo dentro da parte inferior da peça.



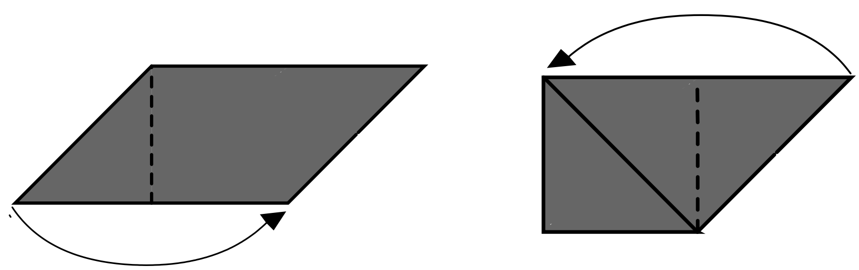
Passo 8: Proceda conforme o passo 4, mas de forma a colocar o vértice do triângulo dentro da parte superior da peça.



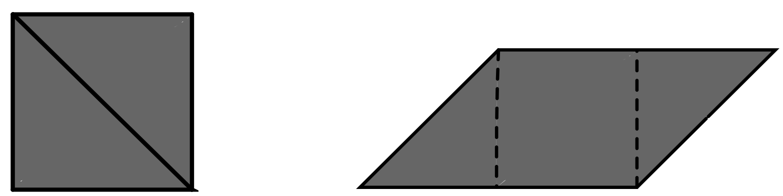
Passo 9: Vire o módulo.



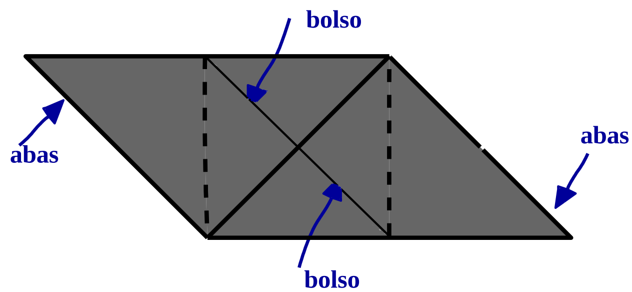
Passo 10: Faça uma dobra de modo que coincida os dois vértices da base do paralelogramo. Proceda da mesma forma com os vértices superiores.



Passo 11: Assim ,forma-se um quadrado. Desfaça o último passo.



Ao virar você perceberá que o quadrado formado pelas dobras possui dois bolsos que servirão para o encaixe das abas dos módulos.



4.2.3 Atividade 1.2: Montagem do Hexaedro ou cubo

Para montar um cubo será preciso construir inicialmente 6 módulos. Construiu-se os módulos em três cores diferentes para que ao confeccionar o cubo coloquemos cores iguais em faces opostas.

Comece encaixando as abas nos bolsos, de modo a posicionar abas de cores iguais em lados opostos de cada face quadrangular do cubo. Conecte o restante dos módulos tomando cuidado de não deixar nenhuma aba sem encaixar e nem bolsos sem abas.

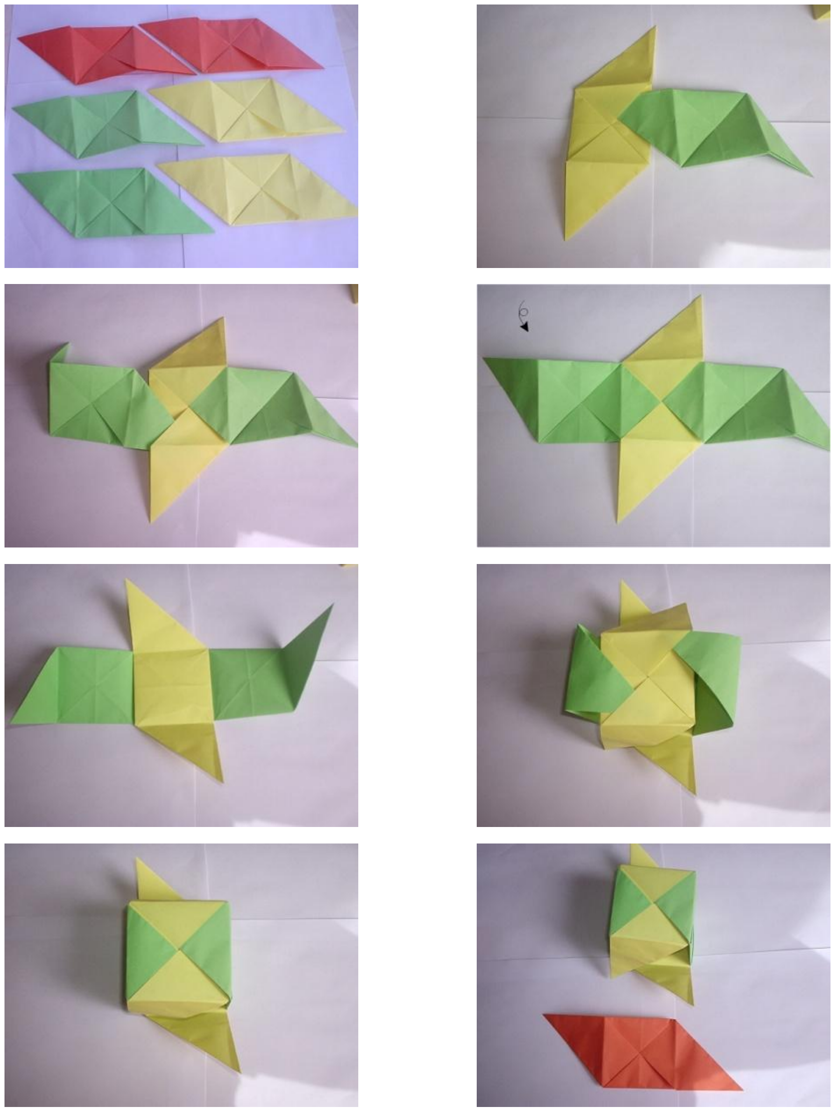
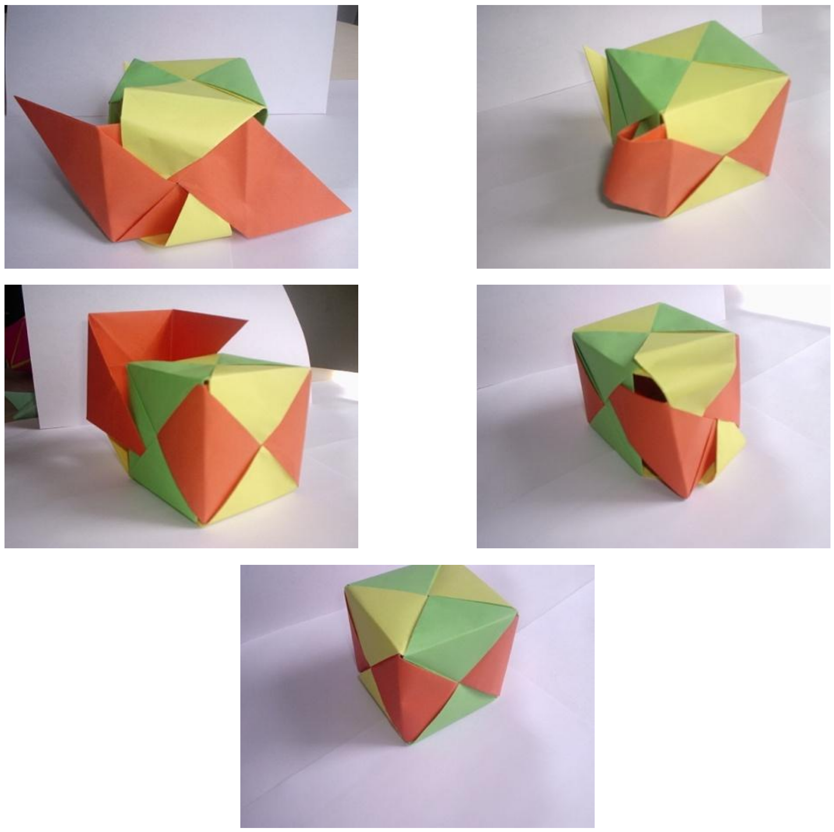


Figura 14 Montagem do hexaedro

(continua...)

“Figura 14, conclusão”

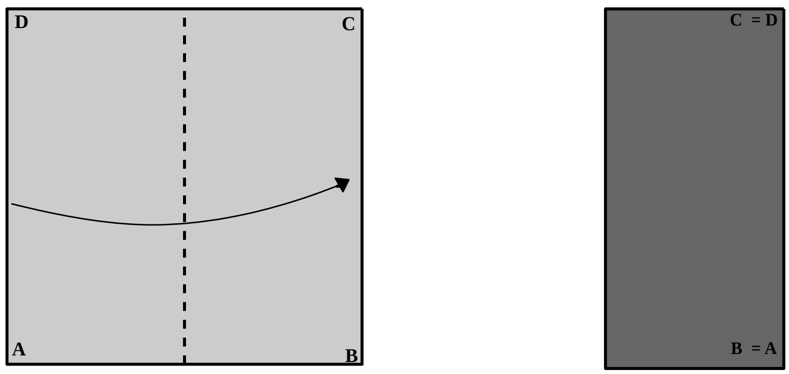


4.3 Atividade 2: Poliedros de faces triangulares: Tetraedro, Octaedro e Icosaedro

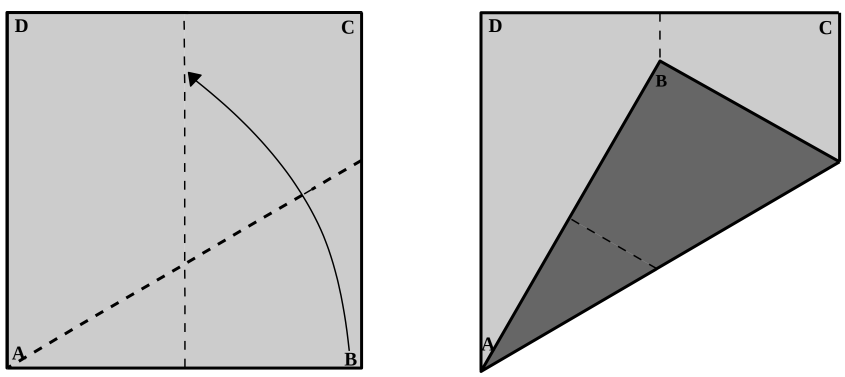
Inicialmente construiremos o módulo triangular que representa a face de cada um dos Poliedros. Em seguida será construído módulo de encaixe, que servirá como arestas unindo as faces triangulares.

Atividade 2.1: Módulo triangular

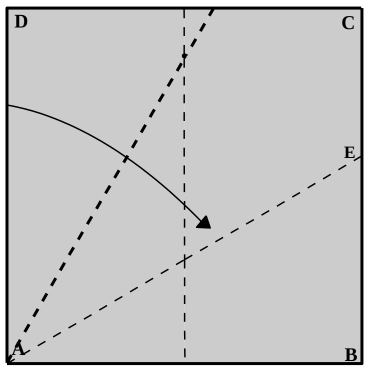
Passo 1: Considerando um quadrado de vértices ABCD**,** faça uma dobra de modo que *AD* fique sobre *BC*, determinando a mediatriz. Desdobre.

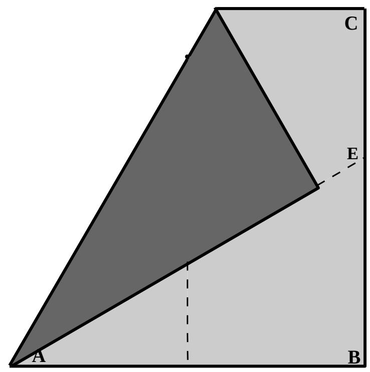


Passo 2: Mantendo o ponto *A* fixo, faça uma dobra de modo que o vértice *B* fique sobre a mediatriz.

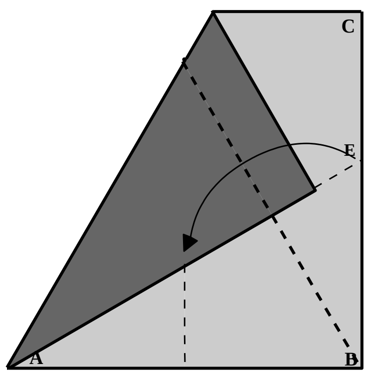


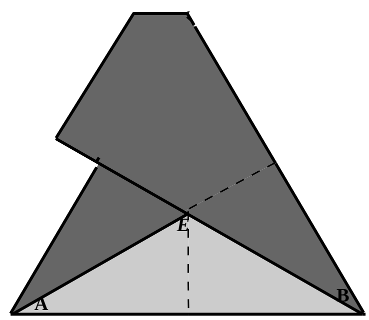
Passo 3: Desdobre . Seja E a extremidade dessa última dobra. Em seguida dobre a bissetriz do ângulo $D\hat{A}E$.



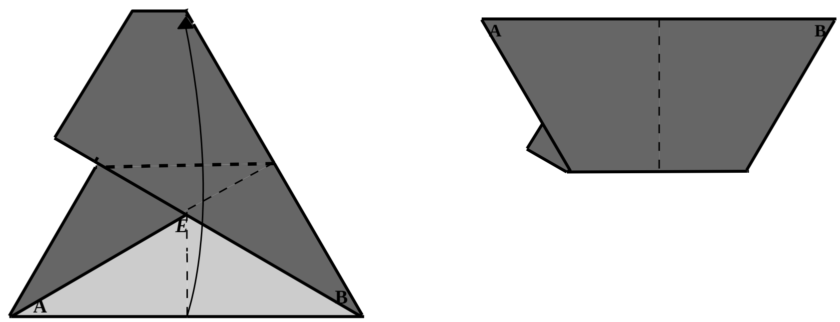


Passo 4: Faça uma dobra levando o ponto E até a primeira dobra, ou seja, até a mediatriz, formando assim um triângulo equilátero.

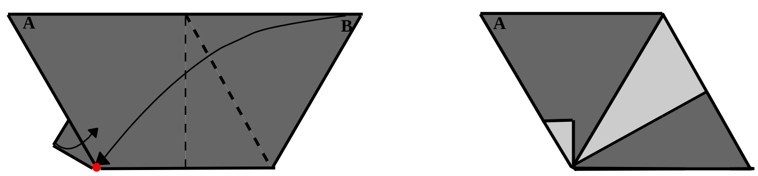




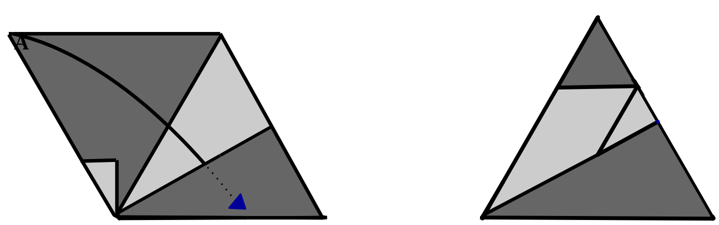
Passo 5: Dobre conforme a figura.



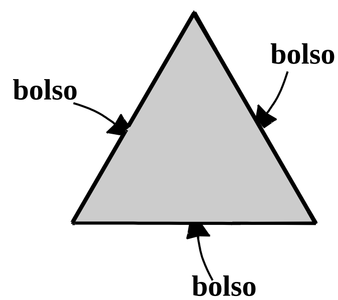
Passo 6: Dobre levando o vértice B ao ponto indicado. Dobre também a aba do canto esquerdo.



Passo 7: Dobre colocando o vértice *A* por dentro da aba.



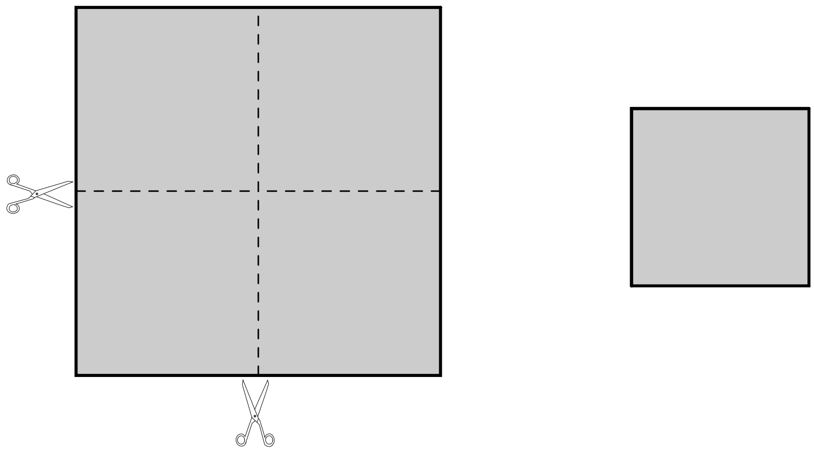
Assim formamos um triângulo equilátero, que representa o módulo dos poliedros de faces triangulares sendo usado na construção do tetraedro, octaedro e icosaedro. Observe que o triângulo obtido contém um bolso em cada um dos três lados. Neles serão colocados os módulos de encaixe que irão unir as faces do Poliedro.



4.3.1 Atividade 2.2: Módulo de encaixe

O módulo de encaixe será construído a partir de um papel quadrado, onde a área deste quadrado corresponde a um quarto da área do papel utilizado para construir as faces. O módulo de encaixe funciona como se fosse arestas do Poliedro.

Passo 1: Com um quadrado de mesmo tamanho do usado no módulo triangular, divida-o em e quatro partes iguais e recorte-os. Pegue um para fazer o módulo de encaixe.

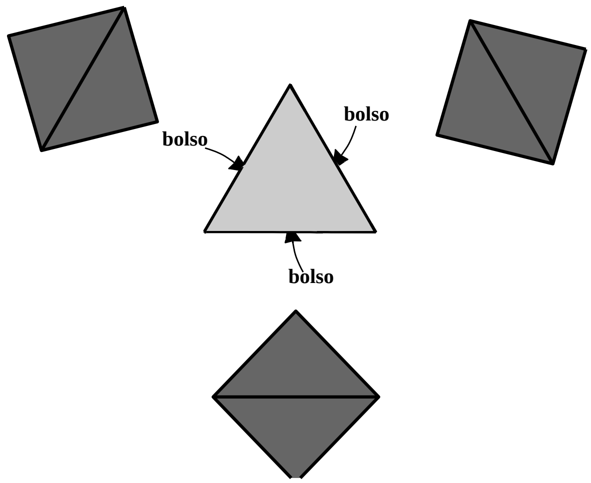


Passo 2: Dobrar e desdobrar marcando o vinco. O quadrado fica dividido em quatro partes.

Passo 3: Faça dobra em vale levando os quatro vértices do quadrado ao centro.

Passo 4: Vire e dobre ao meio. E está pronto o módulo de encaixe.

Forma de encaixe:



A vantagem deste método de construção dos poliedros, é que cada um dos módulos triangulares representam as faces e cada um dos módulos de encaixe, representam as arestas, sendo assim, o professor deverá passar a tabela para que os alunos tomem conhecimento da quantidade de faces e arestas de cada um dos poliedros.

Nome	Nº de faces	Número de arestas	Número de vértices
Tetraedro	4	6	4
Octaedro	8	12	6
Icosaedro	20	30	12

4.3.2 Atividade 2.3: Montagem do Tetraedro

Separar quatro módulos triangulares e seis módulos de encaixe. Em seguida, encaixar os módulos triangulares introduzindo o módulo de conexão nos bolsos de encaixe. Após conectar todos os módulos teremos o tetraedro.

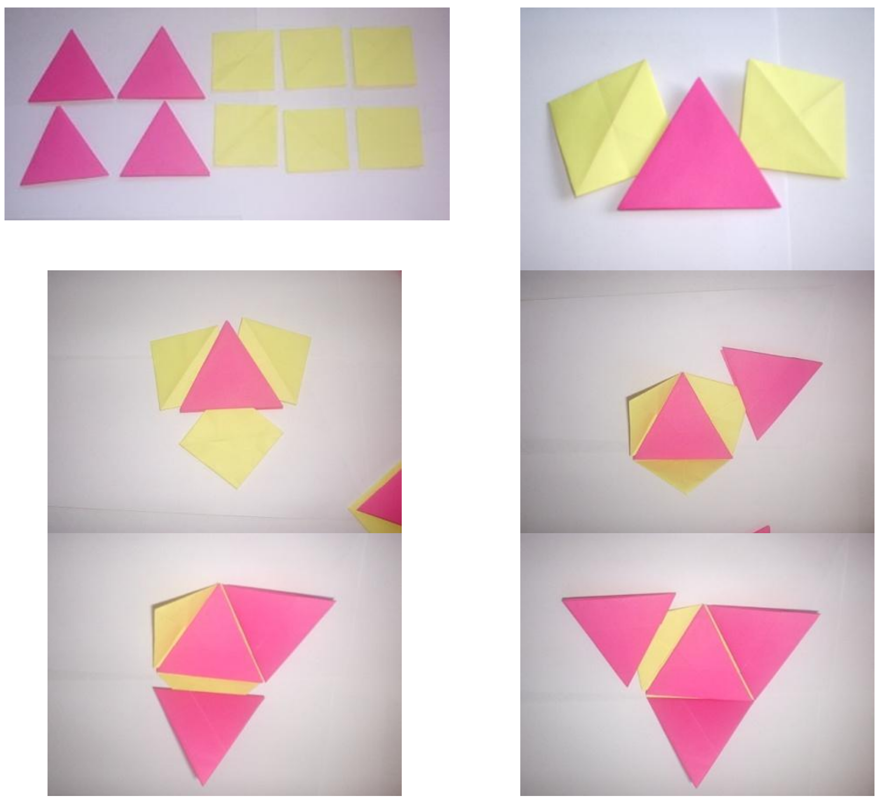
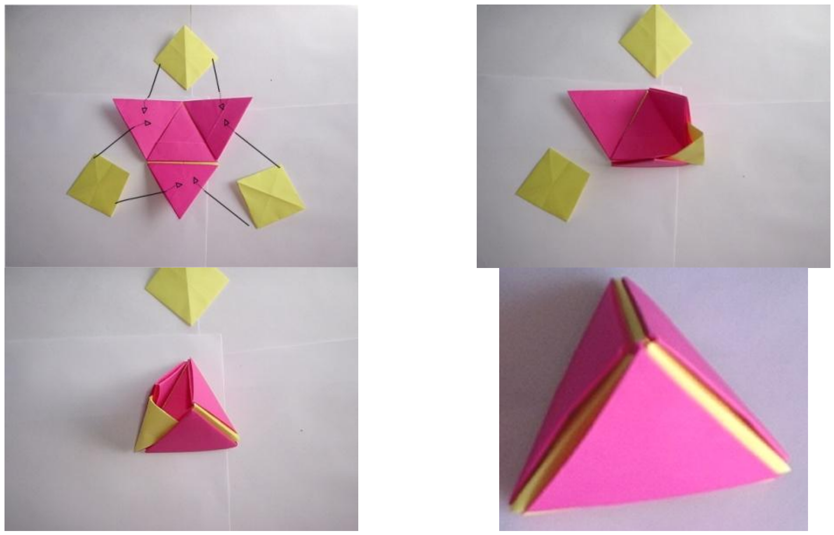


Figura 15 Montagem do tetraedro

(continua...)

(Figura 15, conclusão”



4.3.3 Atividade 2.4 : Montagem do Octaedro

Construir oito módulos triangulares e doze módulos de encaixe. Unindo quatro módulos triangulares com quatro módulos de conexão, obtém-se a parte superior do octaedro. Proceda da mesma forma para obter a parte inferior. Com os módulos de encaixe restante faça a junção das faces superiores com as inferiores obtendo o octaedro.

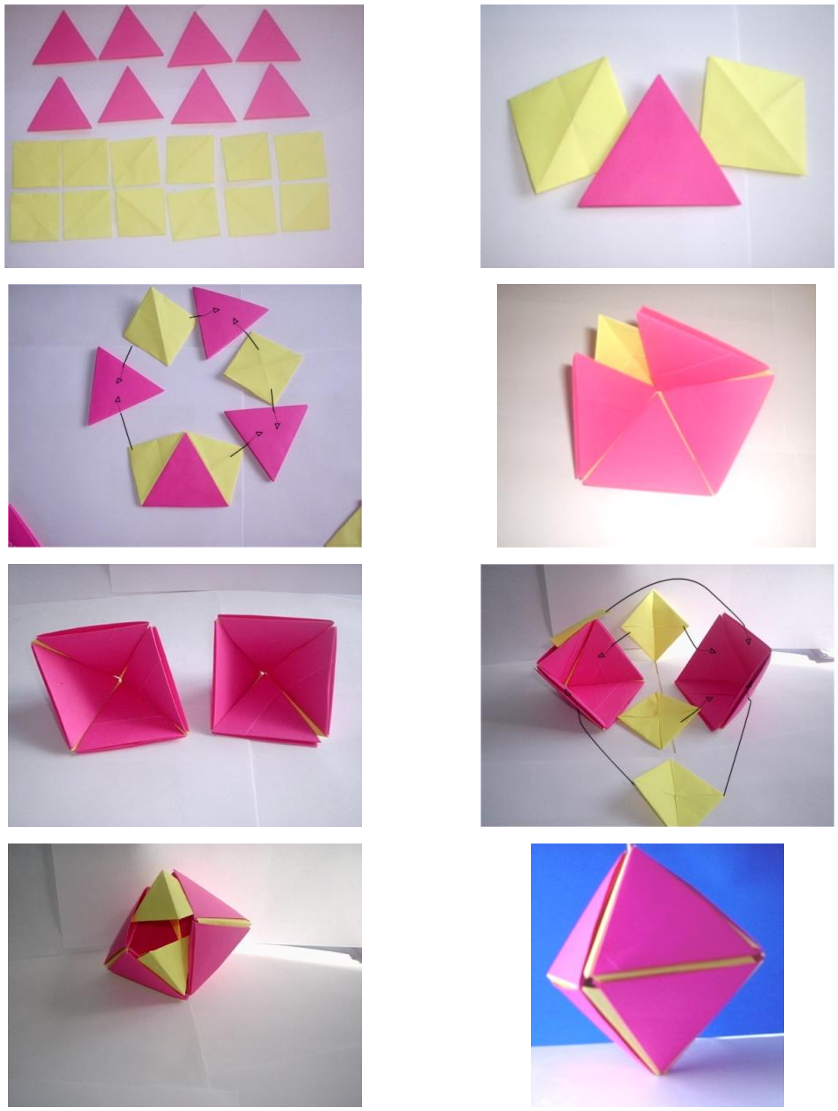


Figura 16 Montagem do octaedro

4.3.4 Atividade 2.5: Montagem do Icosaedro

Construir vinte módulos triangulares e trinta módulos de conexão. Para facilitar a montagem, observe que o Icosaedro é formado pela junção por pentágonos, ou seja, o número de faces que concorrem em cada vértice é sempre cinco. Desta forma encaixe os módulos triangulares introduzindo a peça de conexão nos bolsos de encaixe de modo a formar o primeiro pentágono. Continue formando pentágonos de modo a obter o Icosaedro.

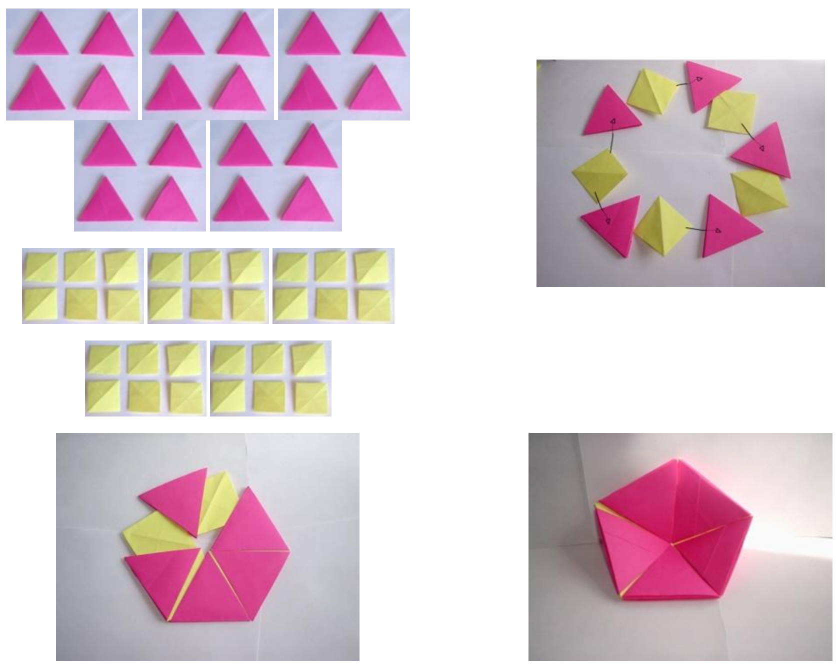
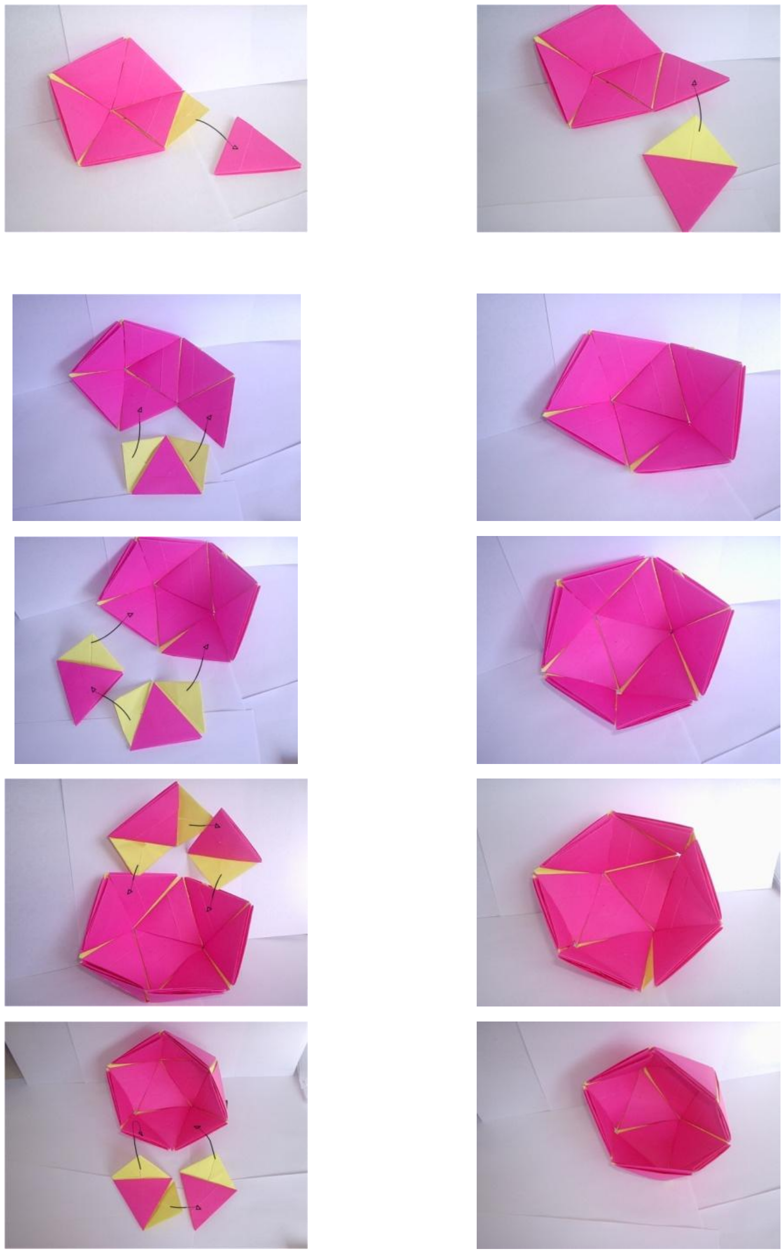


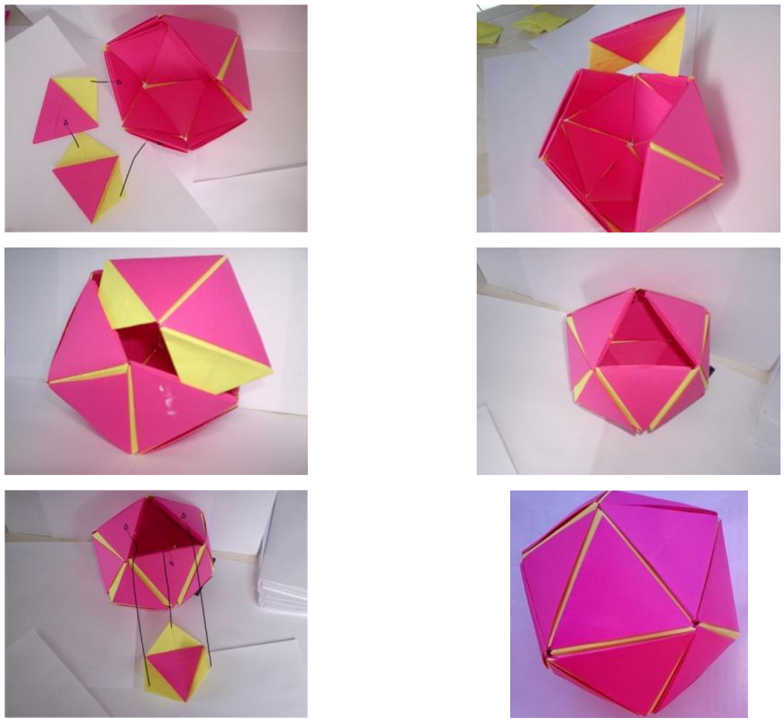
Figura 17 Montagem do icosaedro

(continua...)

“Figura17, continuação”



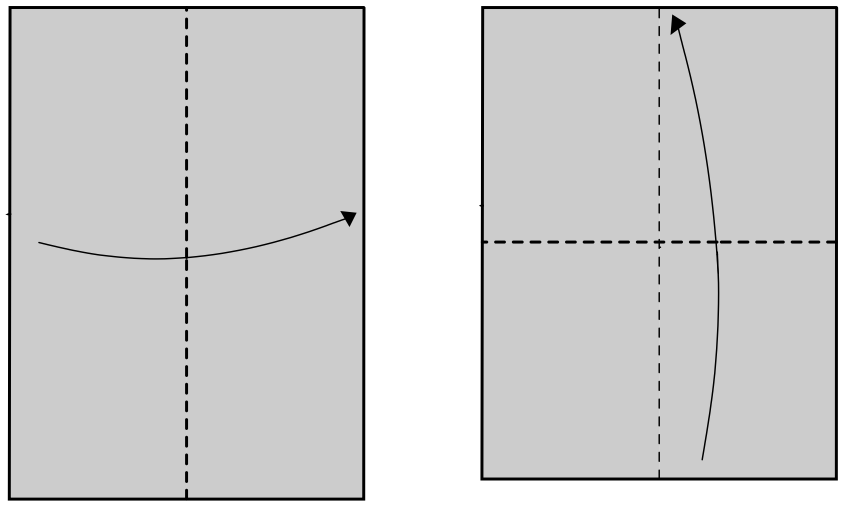
“Figura 17, conclusão”



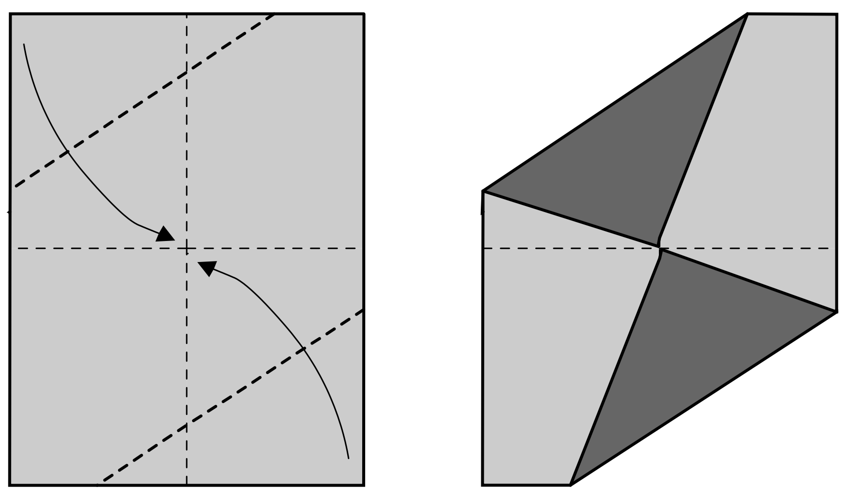
4.4 Atividade 3: Dodecaedro

Será construído um módulo em forma de pentágono para a montagem do dodecaedro. Lembrando que existem vários tipos de módulo que servem para esta atividade, inclusive, como foi citado o módulo obtido na atividade 4 da oficina 1, também serve para a montagem do dodecaedro.

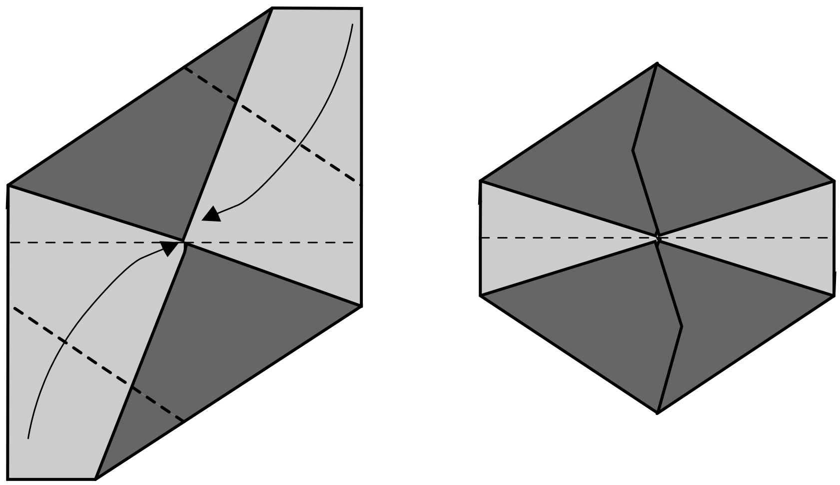
Passo 1: Usando uma folha tamanho A4 ou de mesma proporção, dobrar e desdobrar marcando as duas mediatrizes.



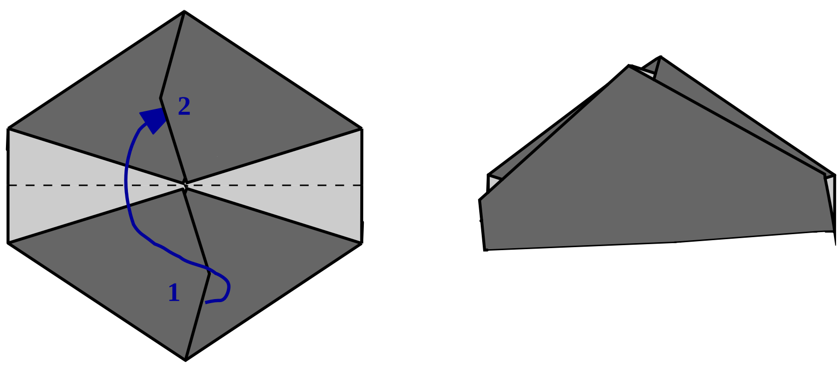
Passo 2: Dobre dois dos vértices opostos ao centro da folha



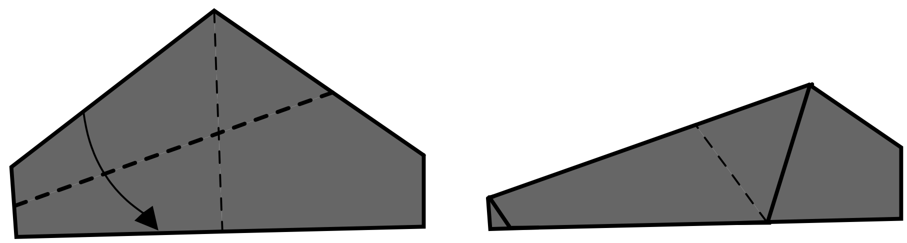
Passo 3: Dobre os outros dois vértices conforme a figura.



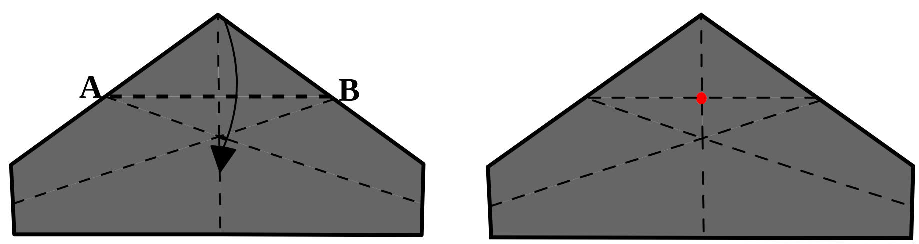
Passo 4: Dobre ao meio encaixando a parte 1 por baixo da parte 2.



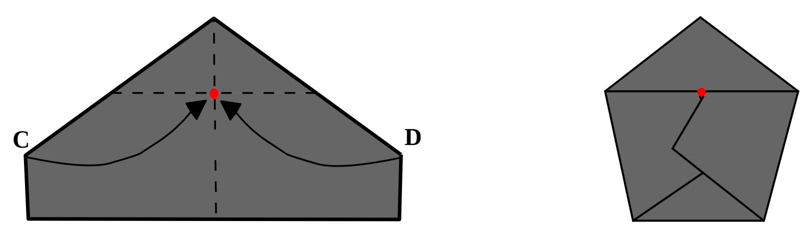
Passo 5: Dobre a bissetriz levando um lado ao outro.



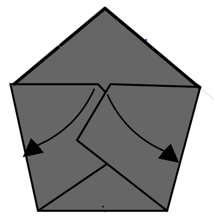
Passo 6: Desdobre e proceda da mesma forma com o outro lado. Em seguida, dobre uma reta que passa por A e B, que determina o ponto vermelho realçado na figura.

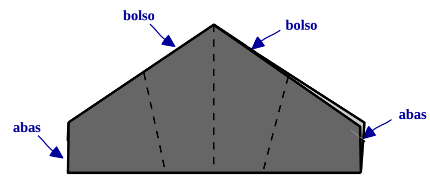


Passo 7: Dobre levando C e D ao ponto indicado. Desta forma teremos um pentágono regular.



Abrindo as abas do módulo você poderá observar que ele possui dois bolsos e duas abas.





4.4.1 Atividade 3.1: Montagem do dodecaedro regular

Para montar o dodecaedro regular precisam-se construir doze módulos pentagonais. Aqui construiremos os doze módulos com seis cores diferentes para facilitar as instruções de encaixe. Observe que dos cinco lados do pentágono, dois são bolsos e dois têm abas. O lado que sobra não terá conexão com o pentágono de outra cor, ficando apenas encostado com o lado correspondente ao outro pentágono. Comece encaixando dois pentágonos nos respectivos bolsos de um terceiro pentágono. Continue encaixando tomando cuidado para não ficar nenhuma aba sem encaixar e nenhum bolso sem aba. Ao encaixar os doze módulos teremos o dodecaedro.

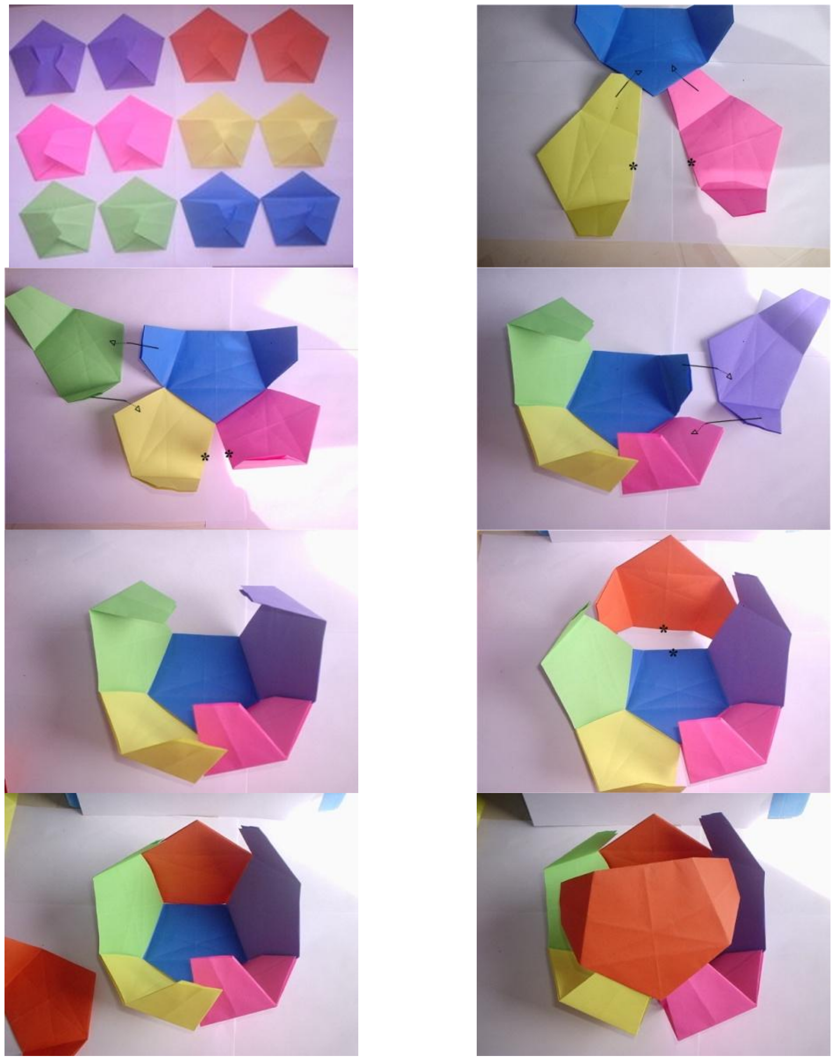
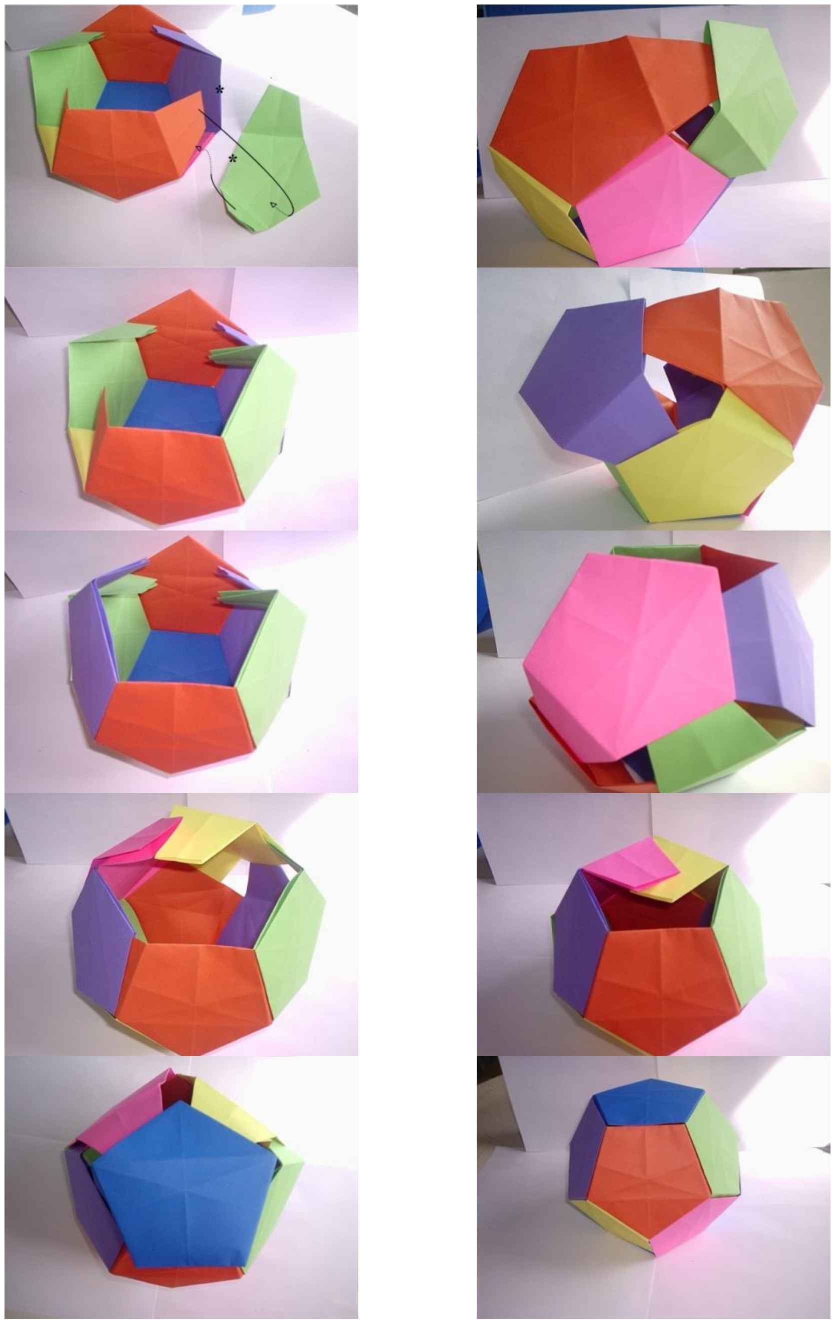


Figura 18 Montagem do dodecaedro

(continua...)

“Figura 18, conclusão”



Sugestões: Depois de finalizadas todas as atividades, ou quando os alunos tiverem montado os Poliedros de Platão, o professor poderia propor a seguinte atividade:

1) Analisando os poliedros de Platão , preencha a tabela:

Nome	**Tipo de face**	**Número de faces (F)**	**Número de arestas (A)**	**Número de vértices (V)**	$\boldsymbol{V-A+F}$
Tetraedro					
Hexaedro					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

2) Os poliedros platônicos são sólidos geométricos com as seguintes características:

I. todas as faces têm o mesmo número de lados.

II. o número de faces concorrentes em cada vértice é sempre o mesmo.

III. vale a relação de *Euler* $V - A + F = 2$, onde $\begin{cases} V = número\ de\ vértices \\ A = número\ de\ arestas \\ F = número\ de\ faces \end{cases}$

Verifique se realmente estas três condições são válidas para os Poliedros de Platão?

4.5 Oficina 3: Prismas

O objetivo é propor uma sequência de atividades abordando o conteúdo de prismas. O prisma consiste em uma figura espacial que possui duas faces poligonais opostas, paralelas e congruentes, denominadas bases, separadas por uma distância chamada altura. As demais faces possuem forma de paralelogramos, sendo os lados segmentos que unem os vértices correspondentes das duas bases. Um prisma é chamado reto quando as arestas laterais são perpendiculares às bases. Desta forma a atividade consiste na construção das faces laterais dos principais prismas, ou seja, construiremos módulos retangulares que ao se encaixarem dão origem a prismas “ocos” que possuem apenas faces laterais.

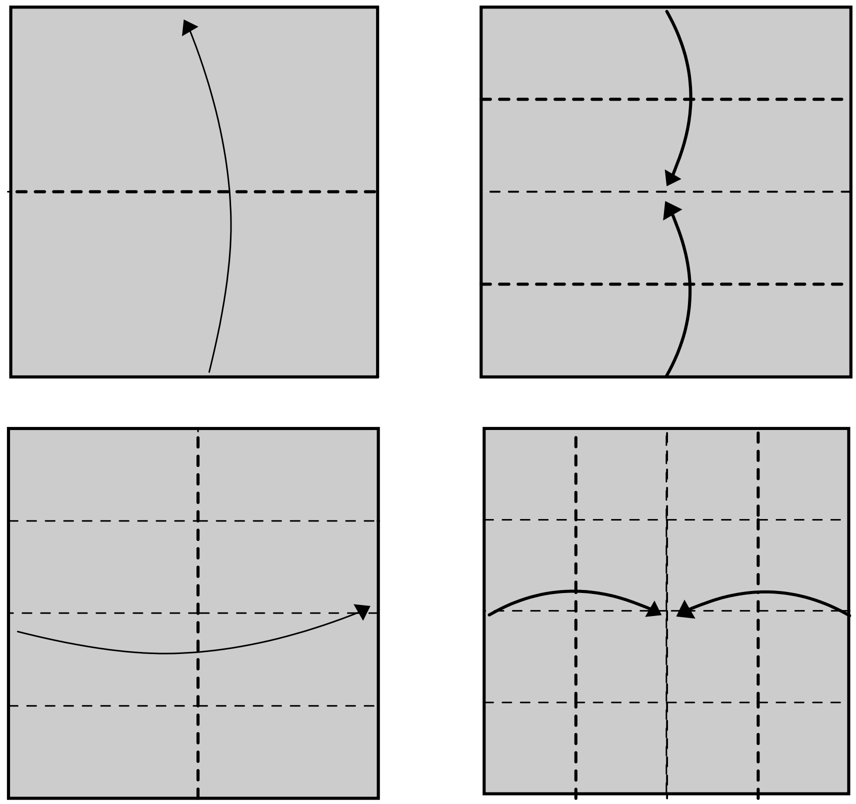
Estas atividades podem ser realizadas com alunos do segundo ano do Ensino Médio ao iniciar-se o conteúdo de prismas, para assim manipular estes sólidos e desenvolver atividades que envolvem cálculos de área e volume.

Para a confecção desses prismas construiremos dois módulos diferentes, que serão chamados de módulo I e módulo II do Prisma. O módulo I é formado por 4 retângulos e o módulo II, por três retângulos. Esta diferença na quantidade de retângulos é necessária, pois assim conseguiremos montar vários tipos de prismas. São eles: prisma triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal.

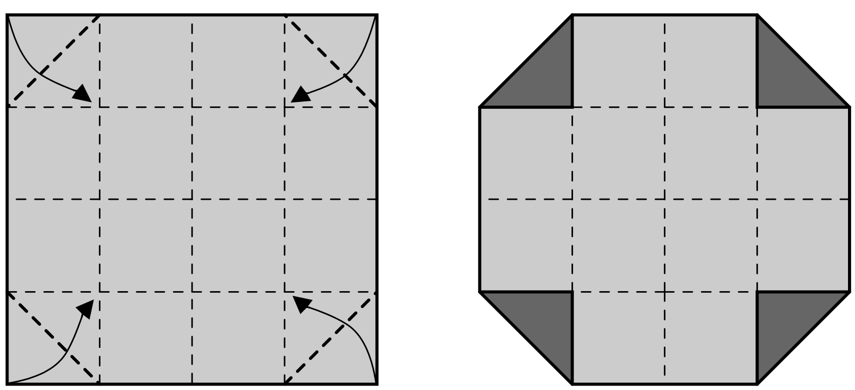
4.5.1 Atividade 1: Módulo I do Prisma

A peça montada nesta unidade representa as faces laterais de um prisma, sendo assim servirá para montar qualquer prisma regular. Ela é formada por 4 retângulos.

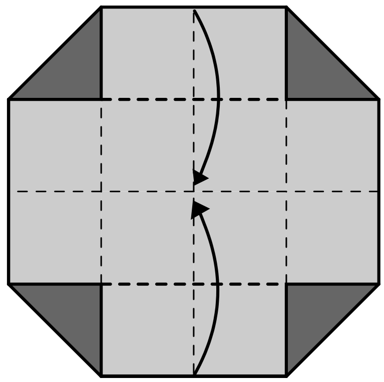
Passo 1: Partindo de um quadrado, dobre e desdobre, conforme as figuras, de modo a dividir a folha em 16 quadrados de mesmo tamanho.

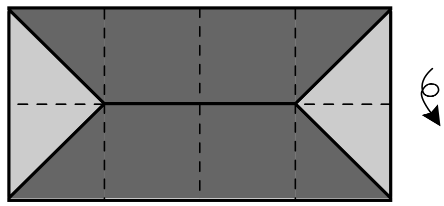


Passo 2: Dobre os vértices do quadrados da seguinte maneira.

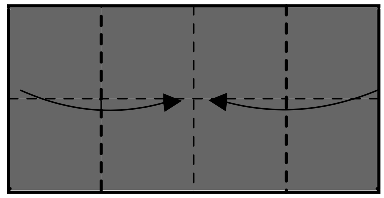


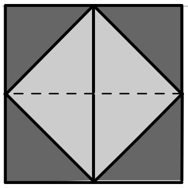
Passo 3: Dobre passando pelos vincos formados anteriormente, fechando o módulo. Vire.



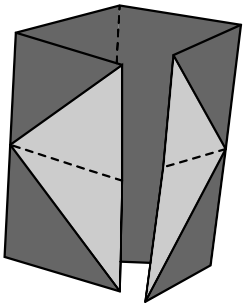


Passo 4: Leve os dois lados do retângulo ao centro.





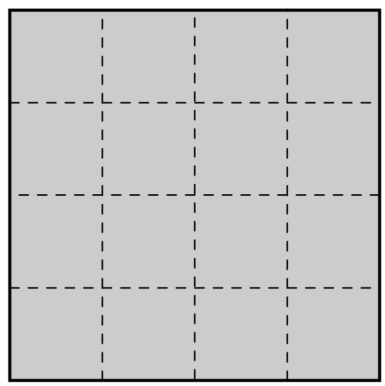
Passo 9: A peça está pronta. Observe que ela é formada por 4 retângulos.



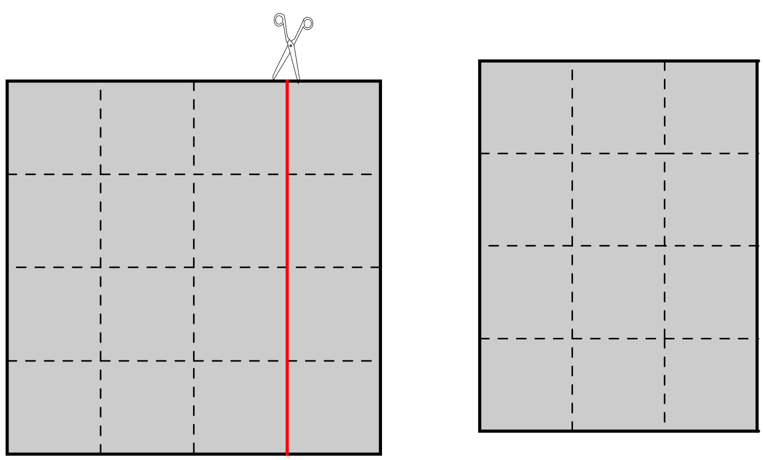
4.5.2 Atividade 2: Módulo II do Prisma

A peça montada nesta atividade representa as faces laterais de um prisma sendo formada por 3 retângulos.

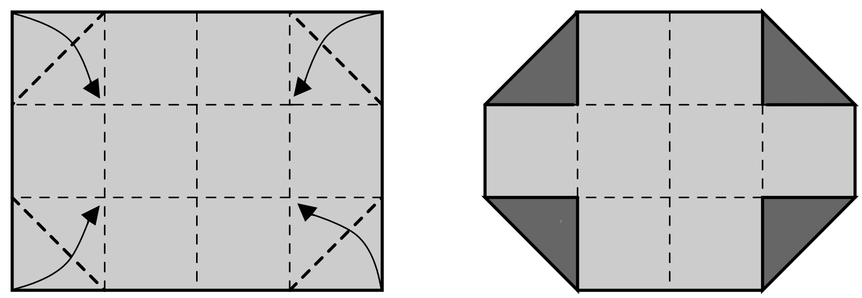
Passo 1: Faça o passo 1 da atividade anterior para obter um quadrado dividido em 16 partes.



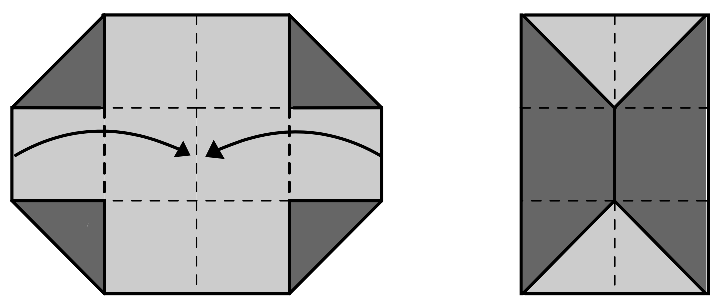
Passo 2: Recorte o quadrado de modo que ficar apenas 12 quadrados.



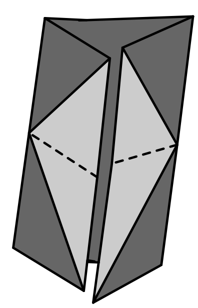
Passo 3: Dobre os 4 vértices do retângulo conforme a figura.



Passo 4: Dobre de modo que os lados do retângulo chegue ao vinco central. A unidade esta pronta.



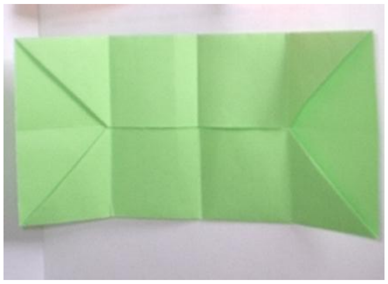
Passo 5: Reforce os vincos e teremos a unidade com 3 retângulos.

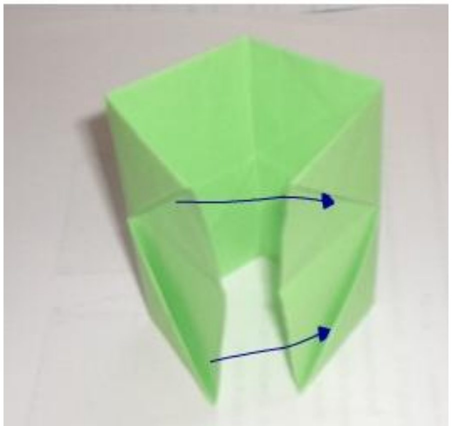


4.5.3 Atividade 3 : Montagem dos prismas

Atividade 3.1 : Prisma triangular

Para montar um prisma triangular precisa-se de apenas uma peça do módulo I. Como jáfoi dito, este modelo de prisma possui apenas as faces laterais, é um prisma “oco”. Para encaixar a peça, basta colocarmos a extremidade de um retângulo dentro da extremidade do outro retângulo.





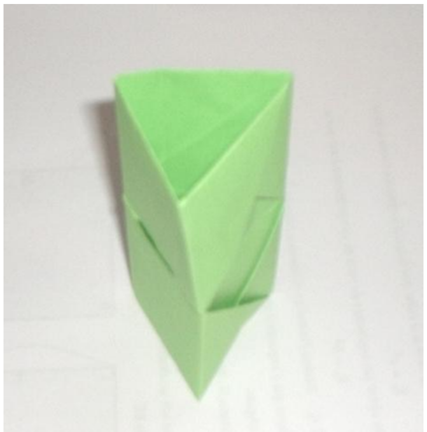


Figura 19 Montagem do prisma triangular

Atividade 3.2 : Prisma quadrangular

Para montar um prisma triangular é necessário construir duas unidades do módulo II. Em seguida encaixe um retângulo de uma unidade no retângulo da outra unidade. Encaixando os outros retângulos das extremidades tem-se um prisma quadrangular.

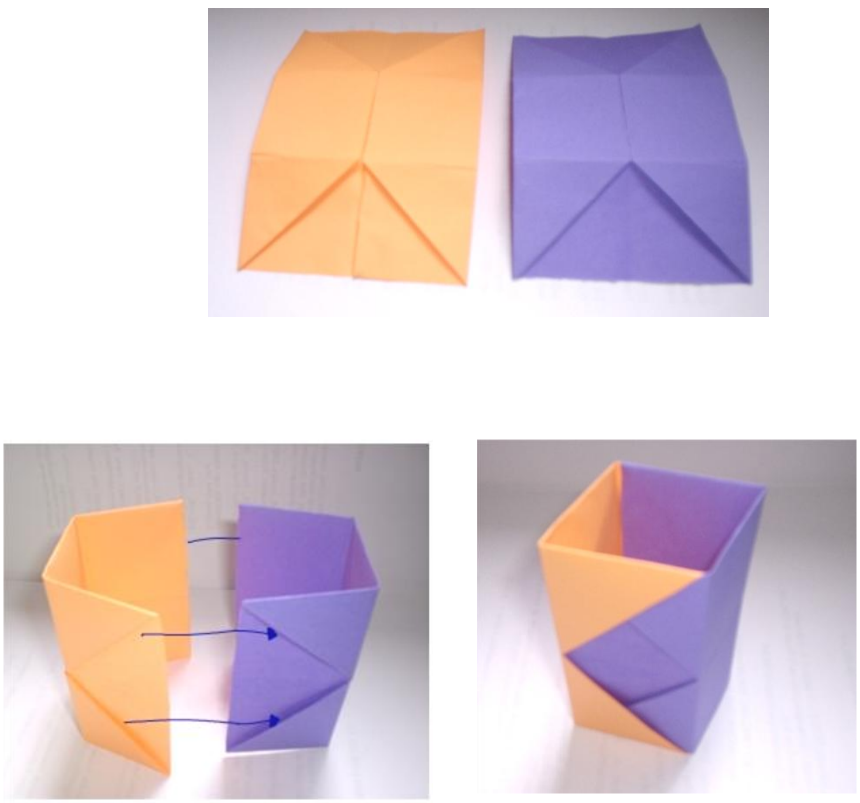


Figura 20 Montagem do prisma quadrangular

Atividade 3.3 : Prisma Pentagonal

Para montarmos um prisma triangular precisa-se de duas peças (unidade). Sendo uma do módulo I e a outra do modulo II. Siga as mesmas instruções para a montagem do prisma anteriores.

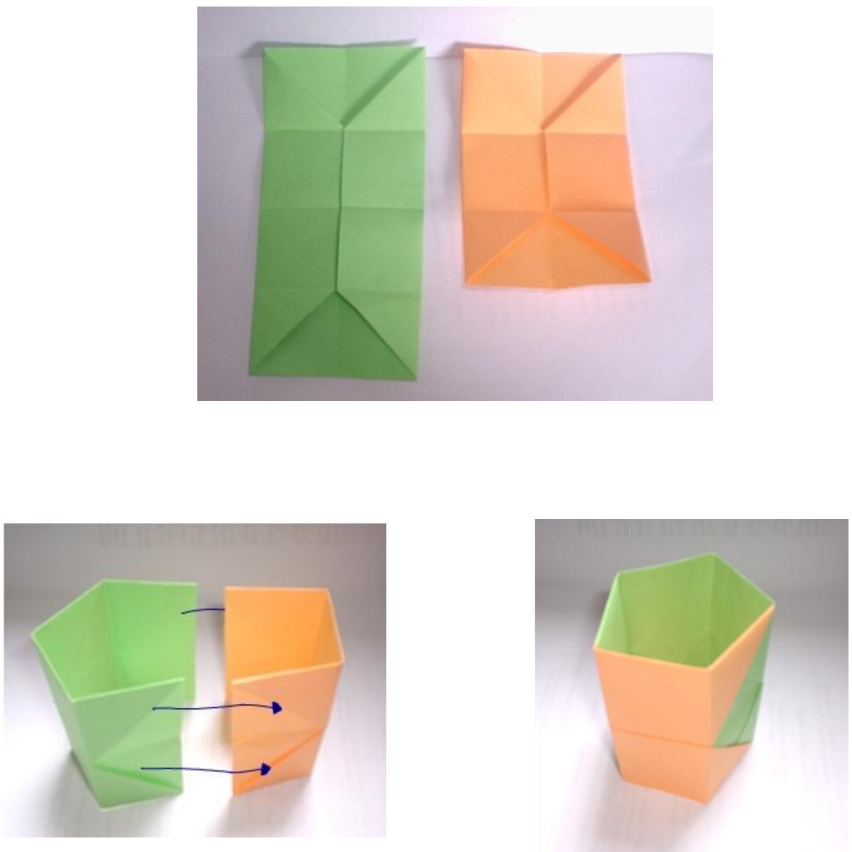


Figura 21 Montagem do prisma pentagonal

Atividade 3.4 : Prisma Hexagonal

Para montarmos um prisma triangular precisa-se de duas peças (unidade) do modulo I.

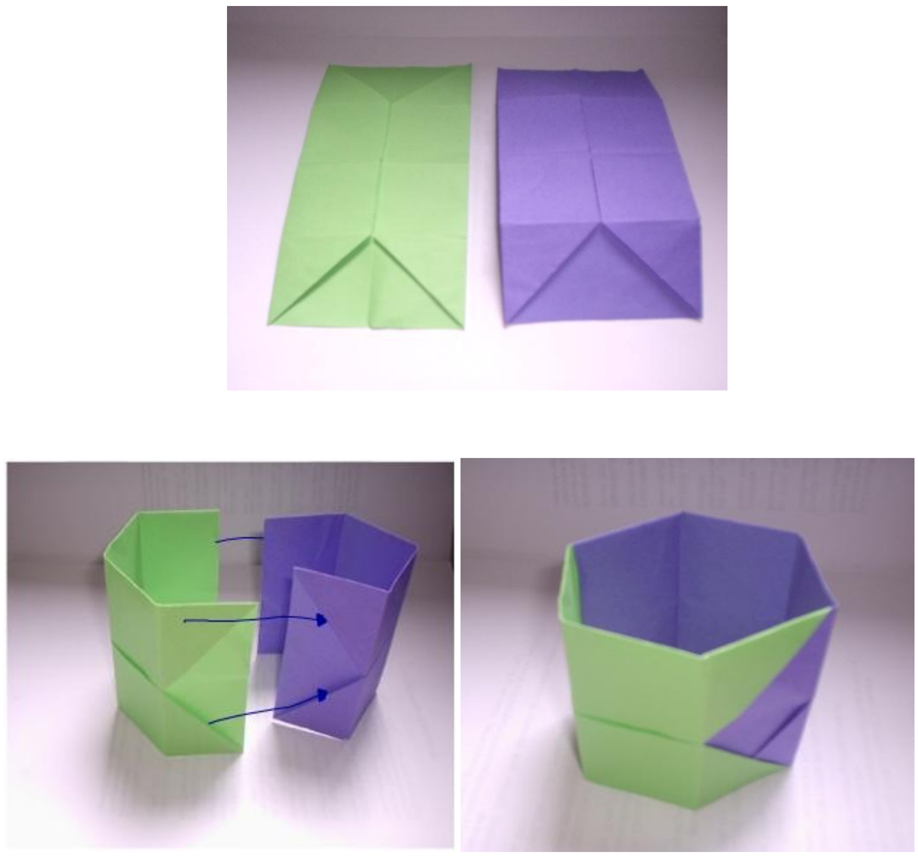


Figura 22 Montagem do prisma hexagonal

Observação: Dependendo da modelo e da quantidade de módulos retangulares poderemos construir diferentes tipos de prismas. Se usarmos apenas um módulo com quatro retângulos, obtemos um sólido geométrico com três faces laterais, pois na junção das extremidades, os dois retângulos formam uma face. Agora, com um módulo I (quatro retângulos) e um módulo II (três retângulos), haverá um total de sete faces retangulares. Ao unir as extremidades dos retângulos, construiremos um prisma pentagonal, pois teremos cinco faces laterais. Veja a tabela abaixo:

Quantidade de Módulo I (3 retângulos)	Quantidade de Módulo II (4 retângulos)	Junção das faces	Cálculo	Prisma obtido
0	1	1	$0.3 + 1.4 - 1$	Triangular
1	1	2	$1.3 + 1.4 - 2$	Pentagonal
2	0	2	$2.3 + 0.4 - 2$	Quadrangular
2	1	2	$2.3 + 1.4 - 2$	Octogonal
0	2	2	$0.3 + 2.4 - 2$	Hexagonal
3	0	3	$3.3 + 0.4 - 3$	Hexagonal

Observe que se associarmos módulos em quantidades diferentes obtém prismas distintos. Desta forma o professor poderia pedir aos alunos que verificassem a validade da sequência obtida na tabela, e construíssem primas com diferentes tipos de módulos.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho foi elaborado com o intuito de contribuir para a aprendizagem da Geometria de uma forma mais lúdica, proporcionando maior compreensão no estudo dos poliedros regulares e prismas. Desta forma, foi elaborada uma proposta de ensino com instruções simples e utilizando materiais de fácil acesso. Acredita-se que ao confeccionar materiais manipuláveis utilizando a técnica do Origami, conduzimos os alunos a realizarem descobertas, além de adquirirem um embasamento geométrico necessário para a continuação de seus estudos de Geometria.

Estas atividades representam uma pequena contribuição aos professores, dando recursos para que estes possam utilizá-las em sala de aula, fazendo assim a junção do Origami com a Geometria. Fica como sugestão de trabalho futuro, a aplicação dessas oficinas em salas de aula, com a finalidade de comprovar sua eficácia como material de apoio para aulas de Geometria, recomendando o adequado planejamento para a utilização desta ferramenta como forma de aprendizagem, levando os alunos a construírem seu próprio conhecimento.

Espera-se com este trabalho contribuir de alguma forma para o ensino da matemática, mais precisamente da Geometria, abrindo assim um caminho para futuras elaborações de oficinas com orientações pedagógicas voltadas para prática em sala de aulas.

REFERÊNCIAS

BORLIN, H. **Resolução do problema da duplicação do volume do cubo utilizando o origami**. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96619?show=full>. Acesso em: 2 mar. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 146 p.

BRAZ, L. H. C. **Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

FUSÈ, T. **Unit polyhedron origami**. Tokyo: Japan Publications Trading, 2006. 99 p.

HISTÓRIA do origami. Disponível em: <http://yasalde.no.sapo.pt/Historia.htm#Hist%C3%B3ria%20do%20Origami>. Acesso em: 4 mar. 2013.

IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras**. 5. ed. São Paulo: Scipione, 1994. 64 p. (Coleção Vivendo a Matemática).

KASAHARA, K. **Origami Omnibus:** paper folding for everybody. 20th ed. Tokyo: Japan Publications, 2005. 384 p.

LANG, R. J. **Origami desing secrets:** mathematical methods for an ancient art. Boca Raton: CRC, 2003. 585 p.

LANK, R. J. **Huzita-Justin axioms**. Disponível em: <http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>. Acesso em: 1 nov. 2012.

MITCHELL, D. **Origami matemáticos:** dobragens de papel para fazer figuras geométricas. Lisboa: Replicação, 2008. 64 p.

RAFAEL, I. Origami. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 111, p. 16-22, set./out. 2011.

ANEXO

DUPLICAÇÃO DO CUBO

Ao longo da história, três problemas considerados clássicos da matemática grega, tiveram extrema importância para o desenvolvimento da geometria. Os problemas consistiam na:

(1) Trissecção do Ângulo

Dado um ângulo qualquer, determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo com um terço da amplitude do ângulo inicial;

(2) Quadratura do Círculo

Dado um círculo *C* de raio *r* determinar, com régua não graduada e compasso, o lado *a* de um quadrado de área igual à do círculo *C*;

(3) Duplicação do Cubo

Dado um cubo de aresta *a* determinar com régua não graduada e compasso, a aresta *b* de outro cubo com o dobro do volume.

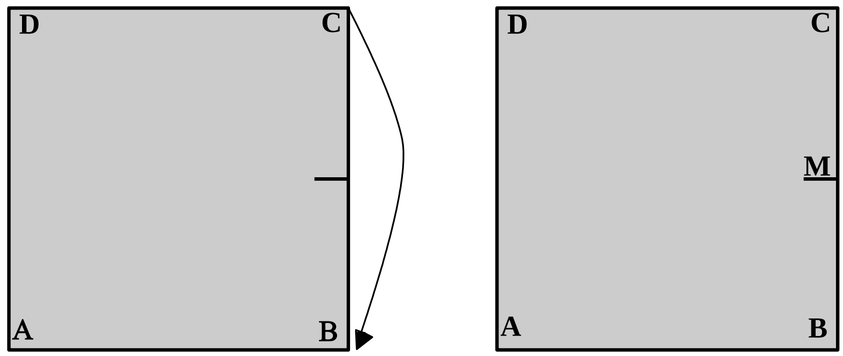
Na duplicação do cubo, note que o comprimento deste último segmento deverá ser igual ao do segmento inicial multiplicado por $\sqrt[3]{2}$. Este problema sendo impossível construir com régua e compasso é possível solucionarmos com origami. Sendo assim, apresentamos uma solução para a duplicação de um cubo através de Origami.

Seja um segmento de aresta a. O cubo que tem tal segmento como aresta terá volume: $V_a = a^3$

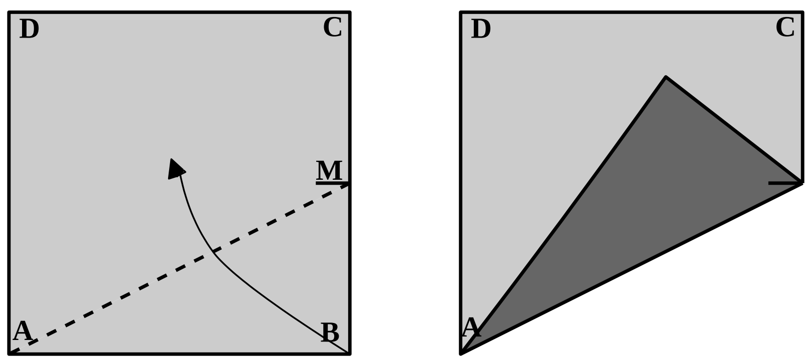
Queremos então obter um segmento de reta de comprimento b, tal que o cubo de volume $V_b = b^3$ satisfaça $V_b = 2.V_a$. Destas fórmulas obtemos a relação $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.

Observe a execução dos passos que obtém a relação acima.

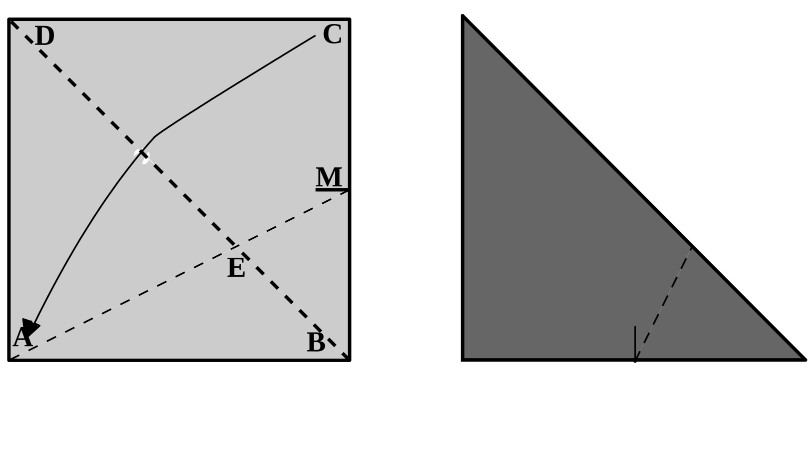
Passo 1: Considere um quadrado ABCD de dimensão arbitrária. Seja M ponto médio do lado BC.



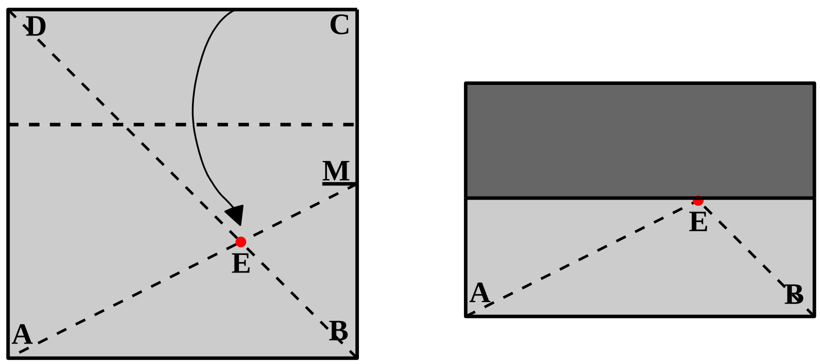
Passo 2: Faça uma dobra passando por A e M.



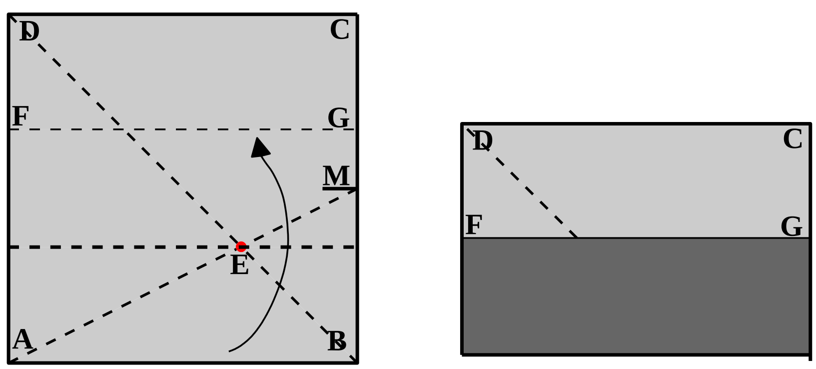
Passo 3: Dobre a diagonal BD



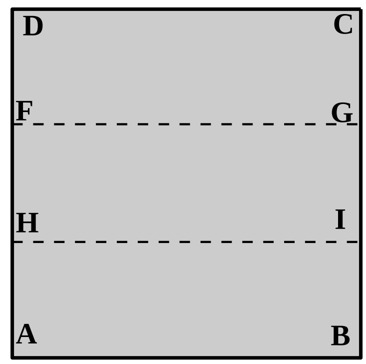
Passo 4: Dobre horizontalmente de modo que CD fique sobre o ponto E determinado pela interseção das dobras anteriores.



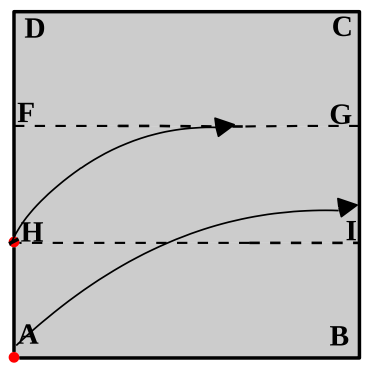
Passo 5: Dobre horizontalmente de modo que AB fique sobre FG obtido anteriormente.

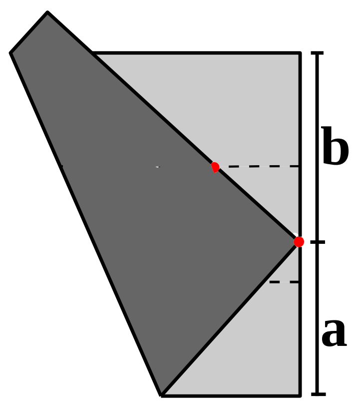


Passo 6: Desdobre. Observe que as duas dobras horizontais obtidas anteriormente dividem a folha em três partes iguais.



Passo 7: Dobre levando o ponto H sobre o segmento FG e A sobre o segmento CB.

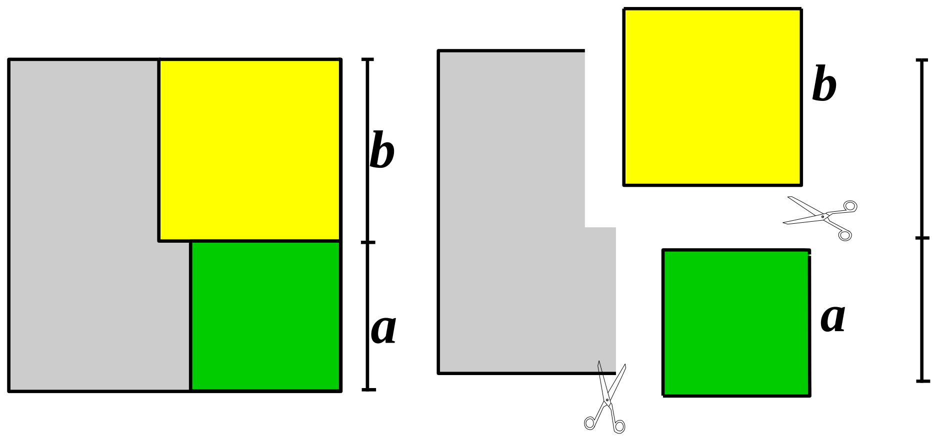




Nesse passo, determinamos $\sqrt[3]{2}$, onde $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.

No trabalho feito por Borlin (2013), que aborda as tentativas de resolução do problema da duplicação do cubo, encontraremos a demonstração da divisão da folha de papel em três partes iguais representados nos passos de (1) a (6), além de demonstrar que a dobra do passo (7) determina $b = a\sqrt[3]{2}$.

Para a construção dos cubos, note que através das dobras feitas anteriormente obtemos dois quadrados, representados pelas cores amarela e verde, cujos lados medem a e $b = a\sqrt[3]{2}$ respectivamente. Recortando-os temos:

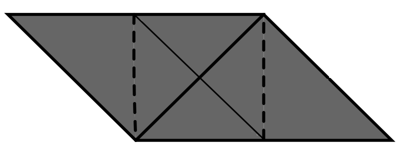


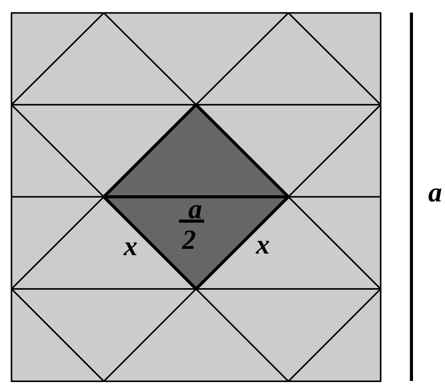
Desta forma, o professor pode propor a construção dos cubos como atividade aos seus alunos.

De acordo com as instruções da atividade 1, construirmos os módulos para a montagem dos cubos. Para isto utilizaremos seis quadrados amarelos e seis quadrados verdes, obtidos conforme instruções acima, para confeccionar dois cubos representados abaixo, cujo volume de um é o dobro do volume do outro.

Note que o cubo obtido pelos quadrados amarelos tem o dobro do volume do cubo obtido pelos quadrados verdes.

Justificativa: Desdobrando o módulo obtido , obtemos o seguinte quadrado:





Se *a* representa o lado do quadrado obtido pelas dobras realizadas, temos que a diagonal do quadrado destacado vale *a/2* . Representando por *x* a aresta do cubo verde gerado por este quadrado, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + x^2$$

$$\frac{a}{4} = 2x^2$$

$$8x^2 = a^2$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Determinaremos analogamente o valor de y, que representa a aresta do cubo maior (amarelo). Assim $y = a\sqrt[3]{2}\ \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Note que $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ é constante. Desta forma, determinando o volume de cada um dos cubos, temos:

Cubo verde	*Cubo amarelo*
$V = (l.k)^3$	$V = \left(l\sqrt[3]{2}.k\right)^3$
$V = l^3.k^3$	$V = 2.l^3.k^3$

Portanto o volume do cubo amarelo é o dobro do volume do cubo verde.