UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ARQUIMEDES ALBUQUERQUE MOURA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES USANDO OS NÚMEROS DE JACOBSTHAL

JUAZEIRO DO NORTE
2020

ARQUIMEDES ALBUQUERQUE MOURA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES USANDO OS NÚMEROS DE JACOBSTHAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Clarice Dias de Albuquerque

JUAZEIRO DO NORTE
2020

Dados internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

M929p Moura, Arquimedes Albuquerque.
Uma proposta didática para o ensino de matrizes usando os números de Jacobsthal/ Arquimedes Albuquerque Moura. – 2020.
69 f.; il. color.
(Inclui bibliografia p.57-58).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2020.
Orientação: Profª. Dra. Clarice Dias de Albuquerque.

1. Sequência de Jacobsthal. 2. Matriz de Jacobsthal. 3. Sequência Didática.
I. Jacobsthal, Ernest Erich (1882-1965). II. Título.

CDD 515.24

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento –CRB 3/1355

ARQUIMEDES ALBUQUERQUE MOURA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATRIZES USANDO OS NÚMEROS DE JACOBSTHAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 23 de junho de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Clarice Dias de Albuquerque

Profª. Drª. Clarice Dias de Albuquerque
Orientadora

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Coorientador/URCA

Vicente Helano F. Batista Sobrinho

Prof. Dr. Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho
CCT/UFCA

Carlos Danísio Macedo Silva

Prof. Me. Carlos Danísio Macedo Silva
IFCE

Dedico esse trabalho a Deus, por ter me abençoado em todas as etapas da minha vida acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, ao meu Deus por ter me ajudado, em todos os aspectos, na conclusão deste trabalho.

Agradeço, em especial, ao Instituto Federal do Ceará, IFCE, campus Cedro-CE, por todo incentivo, apoio, preocupação e disponibilidade para a minha qualificação como professor de matemática.

Agradeço, a minha esposa, Nágyla Dalila Januário Albuquerque Moura, e a minha filha, Ariadne Januário Albuquerque Moura, por todo incentivo, apoio e compreensão nas minhas ausências em casa por conta do PROFMAT.

Aos meus pais e meus irmãos, pelas orações, palavras de incentivo, ligações diárias, enfim, por todo apoio. Registro aqui, o meu carinho especial por vocês.

Também quero agradecer aos meus colegas de turma e, em especial, a minha amiga Érica por ter sido uma forte coluna, principalmente nos momentos mais difíceis, de apoio para as realizações das atividades e por todo incentivo e dedicação. Obrigado Érica, que Deus te abençoe de maneira especial.

Agradeço, ao grande Maurício José, por toda disposição em me ajudar com a parte da formatação desse trabalho. Muito obrigado!

Aos meus professores, por ter nos presenteado com seus conhecimentos adquiridos com muita dedicação e esforço. Obrigado!

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço aos meus orientadores, Clarice Dias de Albuquerque e Paulo César Cavalcante de Oliveira, por toda ajuda, compreensão, incentivo e dedicação a este trabalho. Registro aqui, o meu carinho especial por vocês.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre a Sequência de Jacobsthal, suas propriedades e aplicações. Neste sentido, trouxemos um embasamento com assuntos essenciais, como o Princípio de Indução Infinita, Sequências, Recorrências e Matrizes. Feito isso, definimos, formalmente, a Sequência de Jacobsthal para depois mostrarmos alguns tipos de generalizações dessa sequência. Em seguida, apresentamos a Matriz de Jacobsthal, e evidenciamos uma generalização específica que nos permite relacioná-la com os Números de Jacobsthal através de uma matriz que denotamos por F_s. Por fim, apresentamos uma proposta de sequência didática baseada na Sequência de Zabala para o estudo de matrizes utilizando as matrizes de Jacobsthal.

Palavras-chave: Sequência de Jacobsthal. Matriz de Jacobsthal. Sequência Didática.

ABSTRACT

This work presents an approach on the Jacobsthal Sequence, its properties and applications. In this sense, we brought a foundation with essential issues, such as the Infinite Induction Principle, Sequences, Recurrences and Matrices. That done, we formally define a Jacobsthal Sequence to later show some types of generalizations of that sequence. Next, we present the Jacobsthal Matrix and show a specific generalization that allows us to relate it to the Jacobsthal Numbers using a matrix that we denote by F_s. Finally, we present a didactic sequence proposal based on the Zabala Sequence for the study of matrices using Jacobsthal matrices.

Keywords: Jacobsthal Sequence. Jacobsthal Matrices. Didatic Sequence .

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A matemática tem sido um dos fatores relevantes no desenvolvimento lógico e científico do ser humano. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], a Matemática é uma linguagem, uma forma de ver e modelar realidades. Mesmo que algumas de suas aplicações não sejam evidentes, contextualizar a matemática torna o seu estudo mais dinâmico e interessante.

Sequência é um tema que nos permite perceber padrões lógicos que podem estar relacionados a várias situações reais. Além disso, através de suas propriedades e relações podemos estimar termos a partir de outros ou encontrar termos gerais e generalizações de uma mesma sequência.

Temos vários exemplos de sequências de grande relevância, como é o caso da Sequência de Fibonacci onde são várias as aplicações dessa sequência, como na computação, na administração de finanças, nos jogos, na pintura, e até mesmo no corpo humano e no esteriótipo de algumas plantas e animais [3].

A Sequência de Jacobsthal é a principal sequência que apresentamos neste trabalho, ela recebe esse nome em homenagem ao matemático alemão Ernst Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números.

Mesmo não tendo a fama de outras sequências, a Sequência de Jacobsthal tem sua relevância e inspira esse trabalho. Essa sequência é muito utilizada para resolver problemas de análise combinatória, pois nela podemos encontrar padrões, fórmulas e expressões que trazem propriedades bem específicas. Da mesma forma que a Sequência de Fibonacci converge para o Número de Ouro, também conhecido como Razão Áurea, a Sequência de Jacobsthal também converge para um número metálico, que é conhecido como Número de Cobre, representado por 2. Nosso objetivo é de ensinar matrizes, através da Sequência de Jacobsthal e de suas propriedades.

O segundo capítulo tem uma função importantíssima, que é dar o embasamento para entendermos todos os passos deste trabalho. Para isso, fizemos uma abordagem de assuntos relacionados ao que estamos estudando, para dar suporte para o leitor se situar e fazer uma construção lógica.

No terceiro capítulo apresentamos a Sequência de Jacobsthal, sua motivação histórica e sua lei de recorrência. Logo em seguida, apresentamos o termo geral da sequência onde conseguimos mostrar muitas definições, teoremas e propriedades. Ainda no terceiro capítulo, mostramos algumas generalizações da Sequência de Jacobsthal, com a demonstração de alguns teoremas relevantes, que nos instiga a aprofundar mais e mais com essa teoria.

No quarto capítulo, apresentamos as Matrizes de Jacobsthal, que têm relações muito fortes com a Sequência de Jacobsthal e onde podemos relacioná-las com o estudo de matrizes, sob diferentes aspectos, mas principalmente, o que diz respeito a operações matriciais.

Por fim, no quinto capítulo, trazemos uma proposta de Sequência Didática para o estudo de matrizes para os alunos do Ensino Médio. Apresentamos algumas etapas, propostas pelo autor, de como estudar matrizes através da Sequência de Jacobsthal.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Definiremos alguns conceitos essenciais para a compreensão deste trabalho, como por exemplo o Princípio de Indução Finita e suas variações, Sequências que, sem dúvida, são fundamentais para o que queremos apresentar, Recorrências que nos auxiliarão no desenvolvimento do termo geral e da generalização da Sequência de Jacobsthal e, finalmente, Matrizes que é o assunto que queremos estudar. A ideia é que o leitor construa uma sequência lógica e compreensível para o entendimento completo de todo o trabalho.

2.1 INDUÇÃO MATEMÁTICA

Descreveremos matematicamente a estrutura do conjunto dos números naturais por meio de uma lista de propriedades essenciais, chamadas *axiomas*, que caracterizam a estrutura da sequência, sem ambiguidade ou propriedades desnecessárias, isto é, que possam ser obtidas das demais. Giuseppe Peano (1858-1932) propôs uma lista de axiomas, baseado na noção de *sucessor* de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais). A construção de Peano caracteriza o conjunto dos números naturais, que definiremos do início ao fim desse trabalho como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, por meio dos quatro axiomas a seguir:

- Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n + 1$.
- Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.
- Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Embora todos os quatro axiomas sejam fundamentais para caracterização dos números naturais, o último, chamado *Axioma de Indução*, se destaca. Ele fornece um mecanismo para garantir que um dado subconjunto X de $\mathbb{N}$ inclui, na verdade, todos os elementos de $\mathbb{N}$. Por esta razão, é um instrumento fundamental para construir definições e demonstrar teoremas relativos a números naturais (as definições e provas por *indução* ou *recorrência*) [4].

Suponhamos que desejamos provar que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n seja válida para todos os valores naturais de $\mathbb{N}$. Ou seja, desejamos provar que o conjunto $X = \{n|P(n)$ é válida$\}$, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$ é, na verdade, igual ao próprio $\mathbb{N}$. Pelo Axioma de Indução basta mostrar que $1 \in X$ e que o sucessor de cada elemento de X também está em X.

O Axioma da Indução pode ser reescrito com uma linguagem mais formal como a seguir, sendo assim, o mesmo pode ser chamado *Princípio da Indução Finita* ou *Indução Matemática*.

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo n, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Portanto, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: Em algum momento, por conveniência, consideraremos o zero como um número natural.

Exemplo 1. *Neste exemplo, vamos mostrar, de maneira simples, que a igualdade* $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Para isso, vamos utilizar o Princípio de Indução Finita onde podemos constatar se a igualdade é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Seja* $P(n) : 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$*, devemos mostrar os dois passos abaixo*

i) Observe que $P(1) : 1 = 1^2$*, e portanto* $P(1)$ *é válida.*

ii) Precisamos, agora, mostrar que, se $P(n)$ *é verdadeira, então* $P(n+1)$ *também é verdadeira. Temos, por hipótese de indução, que* $P(n)$ *vale para um certo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,*

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2.$$

Sendo assim, precisamos mostrar que $P(n+1)$ *também é válido, isto é,*

$$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) &= n^2+(2n+1) \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira e pelo Princípio de Indução Finita, podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. *Neste exemplo, vamos utilizar o Princípio de Indução Finita, sobre n, para provarmos uma desigualdade muito famosa, que é a desigualdade de Bernoulli representada a seguir:*

$$(1+h)^n \geq 1+nh,$$

onde a mesma é válida para todo n natural e $h \in \mathbb{R}$, com $h > -1$.

Para isso, seja $P(n) : (1+h)^n \geq 1+nh$, devemos mostrar os seguintes passos

i) verificando se $P(1)$ vale, temos

$$(1+h)^1 = 1+h \quad e \quad 1+1\cdot h = 1+h,$$

portanto verificamos que $P(1)$ vale, pois $1+h \geq 1+h$.

ii) Agora, vamos supor que $P(n)$ vale para um certo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Queremos mostrar, com base na hipótese acima, que $P(n+1)$ também vale, isto é,

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n \cdot (1+h) \\
&\geq (1+nh)\cdot(1+h) \\
&= 1+h+nh+nh^2 \\
&= 1+(n+1)h+nh^2.
\end{aligned}$$

Com efeito, temos que $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h+nh^2$, mas observe que ainda não é o que queremos. No entanto, basta observar que $nh^2 \geq 0$. Dessa forma, podemos dizer

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h.$$

Portanto, $P(n+1)$ vale e pelo Princípio de Indução podemos afirmar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $h > -1$.

A partir do Princípio da Indução, podemos obter variantes que são úteis para construir determinadas demonstrações. Como é o caso do teorema a seguir, onde o mesmo está demonstrado em [4].

Teorema 1 (Segundo Princípio de Indução). *Seja $P(n)$ uma sentença aberta relativa ao natural n. Suponhamos que*

(i) $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$ *são verdadeiras.*

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k-1)$ implicam a validez de $P(n+k)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 SEQUÊNCIAS

Inicialmente trataremos de sequências que, sem dúvidas, é a chave para o entendimento do que será abordado neste trabalho. Definiremos sequências de maneira formal, e mostraremos alguns exemplos usuais e significativos, tendo a percepção que precisamos entender somente o essencial.

Definição 1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Denotaremos que o valor de $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado de n-ésimo termo da sequência [5].*

A notação para a representação de uma sequência qualquer é dada por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (x_n).$$

Exemplo 3. *A sequência definida por (x_n) tal que $x_n = 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é dada por:*

$$(3, 6, 9, 12, 15, \ldots),$$

e é conhecida como sequência dos múltiplos positivos de três.

Definição 2. *Diz-se que a sequência (x_n) é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.*

Exemplo 4. *Seja $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$; isto define a sequência constante $(2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ que se trata de uma sequência limitada.*

Definição 3. *Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ (ou seja, $x_n \in]-\infty, b]$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, diz-se que (x_n) é limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty[$) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 5. *Observe a sequência $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a aplicação de inclusão. Ora, obtemos a sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ que é, claramente, limitada inferiormente e ilimitada superiormente.*

Dizemos que uma sequência é *limitada* se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Definição 4. *Uma sequência (x_n) chama-se crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, isto é, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, a sequência diz-se não decrescente.*

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes e não crescentes são chamadas *sequências monótonas*.

Exemplo 6. *Utilizando o Exemplo 5, observe que a sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.*

2.3 RECORRÊNCIA

Muitas sequências são definidas por intermédio de uma regra (ou lei) que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s), essa regra (ou lei) chamamos *recorrência*.

Exemplo 7. *Toda progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geq 1)$, com $x_1 = a$.*

Exemplo 8. *Toda progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo b pode ser definida por $x_n = q \cdot x_n$ $(n \geq 1)$, com $x_1 = b$.*

Exemplo 9. *A sequência (F_n), de Fibonacci, cujos termos são $1, 1, 2, 3, 5, ...$ e na qual cada termo é a soma dos dois anteriores a partir do terceiro, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n > 0)$, com $F_1 = F_2 = 1$.*

Para a sequência ficar bem definida é necessário, além da recorrência, o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Podemos observar que nos Exemplos 7 e 8, temos recorrências de primeira ordem, isto é, nas quais cada termo é representado em função do antecessor imediato, e, no Exemplo 9, temos uma recorrência de segunda ordem, ou seja, na qual cada termo é representado em função dos dois termos antecessores imediatos. Definiremos esses tipos de recorrências, com mais objetividade, a seguir.

2.3.1 RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Temos que uma recorrência de primeira ordem expressa por x_{n+1} em função de x_n é dita linear se, e somente se, essa função for uma função afim.

Podemos exemplificar com as recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = nx_n$, que são lineares, e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$, não linear. Quando uma recorrência não possuir termo independente de x_n ela é dita *homogênea*, como é o caso do exemplo a seguir.

Exemplo 10. *Vamos resolver a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$. Para tal feito, inicialmente, precisamos conhecer os termos da recorrência para encontrarmos uma relação. Para isso faremos,*

$$\begin{array}{ccc} x_2 & = & 1x_1 \\ x_3 & = & 2x_2 \\ x_4 & = & 3x_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & (n-1)x_{n-1}. \end{array}$$

Observando o padrão que a recorrência apresenta, e com o intuito de encontrarmos uma expressão para x_n, podemos perceber que multiplicando as equações acima obtemos o seguinte

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\ .$$

Fazendo os devidos cancelamentos, encontramos

$$x_n = (n-1)! \cdot x_1.$$

Como $x_1 = 1$, temos como solução para a recorrência $x_n = (n-1)!$

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem são geralmente da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$. Podemos exemplificá-las da seguinte maneira

Exemplo 11. *Resolvendo a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $x_1 = 1$, temos que*

$$\begin{array}{ccc} x_2 & = & x_1 + 2 \\ x_3 & = & x_2 + 2^2 \\ x_4 & = & x_3 + 2^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & x_{n-1} + 2^{n-1}. \end{array}$$

Somando as equações, resulta

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

.

Não é sempre tão simples resolver as recorrências da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, por isso enunciaremos e demonstraremos um teorema que nos possibilita obter soluções desta gama de recorrências.

Teorema 2. *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.*

Demonstração: Temos por hipótese que a_n é uma solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, isto é, $a_{n+1} = g(n)a_n$. Agora, precisamos mostrar que a substituição de $x_n = a_n y_n$ transforma $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n)a_n]^{-1}$. Para isso, temos

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) &\Longrightarrow a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n) \\ &\Longrightarrow g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n) \\ &\Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{g(n)a_n y_n + h(n)}{g(n)a_n} \\ &\Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{g(n)a_n y_n}{g(n)a_n} + \frac{h(n)}{g(n)a_n} \\ &\Longleftrightarrow y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n)a_n]^{-1}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 12. *Vamos resolver a recorrência de primeira ordem não-homogênea $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$. De início, precisamos encontrar uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$, isto é,*

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\ldots \ldots \ldots \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações, resulta

$$x_n = 2^{n-1}.$$

Agora, pelo Teorema 2, faremos a substituição de $x_n = 2^{n-1}y_n$, *obtemos*

$$y_{n+1} = y_n + 1 \cdot [2 \cdot 2^{n-1}]^{-1} \iff y_{n+1} = y_n + 2^{-n}.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Somando as equações, resulta

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + \frac{2^{-1} \cdot [(2^{-1})^{n-1} - 1]}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 + \frac{(2^{-1})^n - 2^{-1}}{-2^{-1}} \\ &= y_1 - \frac{(2^{-1})^n}{2^{-1}} + 1 \\ &= y_1 - (2^{-1})^{n-1} + 1 \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ *e* $x_1 = 2$, *temos que*

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n-1}y_n \\ &= 2^{n-1} \cdot (y_1 - 2^{1-n} + 1) \\ &= y_1 2^{n-1} - 2^0 + 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(y_1 + 1) - 1. \end{aligned}$$

Com efeito, como $x_1 = 2$, *podemos determinar* y_1 *da seguinte forma*

$$\begin{aligned} x_1 = 2^{1-1}(y_1 + 1) - 1 &\iff 2 = (y_1 + 1) - 1 \\ &\iff y_1 = 2. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que

$$
\begin{aligned}
x_n = 2^{n-1}(y_1+1)-1 &\iff x_n = 2^{n-1}(2+1)-1\\
&\iff x_n = 3\cdot 2^{n-1}-1.
\end{aligned}
$$

2.3.2 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Iniciamos mostrando a forma de uma recorrência de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes, isto é, equações do tipo

$$x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0,$$

com $q \neq 0$, do contrário temos uma recorrência de primeira ordem.

Associaremos a cada recorrência de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, como vimos acima, uma equação polinomial do segundo grau, $r^2+pr+q=0$, chamada *equação característica*. Para garantirmos que uma recorrência homogênea, com coeficientes constantes, seja de segunda ordem é necessário $q \neq 0$, o que nos mostra que 0 não é raiz da equação característica.

Exemplo 13. *Observe que a recorrência $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ tem como equação característica $r^2=r+1$. Perceba, que as raízes da equação característica são*

$$
\begin{aligned}
r^2=r+1 &\iff r^2-r-1=0\\
&\iff r=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}\\
&\iff r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Temos como missão, resolver as recorrências de maneira que precisaremos da equação característica e de suas raízes. Pensando nisso enunciaremos e, consequentemente, demonstraremos o teorema a seguir que caracteriza uma solução geral para a recorrência

Teorema 3. *Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2, então $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Por hipótese, temos que r_1 e r_2 são raízes da equação característica $r^2+pr+q=0$, isto é, $r_1^2+pr_1+q=0$ e $r_2^2+pr_2+q=0$. Queremos mostrar que a_n é solução da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$, isto é, precisamos mostrar que

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. Para isso, temos

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\
&= C_1 r_1^n \cdot r_1^2 + C_2 r_2^n \cdot r_2^2 + pC_1 r_1^n \cdot r_1 + pC_2 r_2^n \cdot r_2 + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n \\
&= C_1 r_1^n \cdot r_1^2 + pC_1 r_1^n \cdot r_1 + qC_1 r_1^n + C_2 r_2^n \cdot r_2^2 + pC_2 r_2^n \cdot r_2 + qC_2 r_2^n \\
&= C_1 r_1^n \cdot (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n \cdot (r_2^2 + pr_2 + q) \\
&= C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência sempre que r_1 e r_2 forem raízes da equação característica.

$\blacksquare$

Exemplo 14. *Seja a recorrência $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ que tem $r^2 + 3r - 4 = 0$ como equação característica. Resolvendo a equação característica temos,*

$$\begin{aligned}
r^2 + 3r - 4 = 0 \iff & r = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} \\
\iff & r = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \\
\iff & r_1 = \frac{-3+5}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{-3-5}{2} \\
\iff & r_1 = 1 \quad e \quad r_2 = -4
\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com o Teorema 3 todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência.

Perceba que as raízes r_1 e r_2 da equação característica, por se tratar de uma equação polinomial do segundo grau, podem ser diferentes, isto é, $r_1 \neq r_2$ ou iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$. Podemos nos questionar se a_n representa a sequência de soluções para ambos os casos; por conta disso podemos mostrar, através dos teoremas a seguir, que para o caso que $r_1 = r_2$, a_n tem uma outra cara. Primeiro vamos mostrar a seguir que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções de recorrência têm a forma apontada no Teorema 3.

Teorema 4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, onde C_1 e C_2 são constantes.*

Demonstração: Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Provaremos o teorema por indução sobre n. Primeiro, observe que, sendo r_1 e r_2 raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, temos que

$$r_1 + r_2 = -p \quad \text{e} \quad r_1 \cdot r_2 = q\ .$$

Para $n = 1$, temos $y_3 + py_2 + qy_1 = 0$, isto é, $y_3 = -py_2 - qy_1$. Substituindo os valores de $-p$ e q em função de r_1 e r_2 tem-se

$$\begin{aligned}
y_3 &= (r_1 + r_2)y_2 - r_1 \cdot r_2 \cdot y_1 \\
&= r_2(y_2 - r_1 y_1) + r_1 y_2 \\
&= \frac{r_2(y_2 - r_1 y_1)(r_2 - r_1) + r_1 y_2 (r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \\
&= r_1^2 \frac{(r_2 y_1 - y_2)}{r_2 - r_1} + r_2^2 \frac{(y_2 - r_1 y_1)}{r_2 - r_1} \\
&= r_1^3 \frac{(r_2 y_1 - y_2)}{r_1(r_2 - r_1)} + r_2^3 \frac{(y_2 - r_1 y_1)}{r_2(r_2 - r_1)},
\end{aligned}$$

assim, tomando $C_1 = \dfrac{r_2 y_1 - y_2}{r_1(r_2 - r_1)}$ e $C_2 = \dfrac{y_2 - r_1 y_1}{r_2(r_2 - r_1)}$, teremos

$$y_3 = C_1 r_1^3 + C_2 r_2^3 \; .$$

Suponhamos que o resultado seja válido para todo natural menor do que ou igual a n, mostraremos que vale para $n + 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= -py_n - qy_{n-1} \\
&= -p(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) - q(C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}) \\
&= C_1(-pr_1^n - qr_1^{n-1}) + C_2(-pr_2^n - qr_2^{n-1}) \\
&= C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}
\end{aligned}$$

Logo, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 15. *Vamos, agora, determinar o número de Fibonacci F_n definido por*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad com \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Perceba que a equação característica relacionada à recorrência é $r^2 = r + 1$ e, consequentemente, calcularemos as suas raízes r_1 e r_2, isto é,

$$\begin{aligned}
r^2 - r - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Então, podemos garantir pelo Teorema 3 que

$$F_n = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n .$$

Agora, precisamos determinar as constantes C_1 e C_2. Para isso, podemos usar os valores iniciais $F_1 = F_2 = 1$ dado, mas para facilitar as contas, sem perda alguma, podemos utilizar $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, com isso obtemos

$$F_0 = C_1 + C_2 \quad e \quad F_1 = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) .$$

Com efeito, podemos formar o seguinte sistema de duas equações e de duas variáveis

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) &= 1 \end{cases},$$

Novamente, podemos utilizar o método da substituição para resolver o sistema. Vamos, inicialmente, isolar na primeira equação a variável C_1, isto é, $C_1 = -C_2$.

Substituindo C_1 na segunda equação do sistema, temos a chance de encontrar C_2 e consequentemente, voltar, e encontrar C_1. Temos,

$$\begin{aligned} C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1 &\implies -C_2\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1 \\ &\implies C_2\Big[\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) - \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)\Big] = 1 \\ &\implies C_2 \cdot [-\sqrt{5}] = 1 \\ &\implies C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Com efeito, $C_1 = -C_2 = -\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Daí, finalmente, temos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n ,$$

ou ainda,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n .$$

Podemos, logicamente, nos perguntar o que aconteceria se as raízes, que chamamos de r_1 e r_2, da equação característica fossem iguais. O teorema a seguir responde a nossa pergunta de maneira clara.

Teorema 5. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam* *os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração: Temos, por hipótese, que as raízes da equação polinomial do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, isto é, $r_1 = r_2 = r$, sabemos que a soma das raízes de uma equação quadrática, em função de seus coeficientes, é dada por $r_1 + r_2 = -\frac{p}{1}$, ou seja, $r = -\frac{p}{2}$. Queremos mostrar que a_n é solução da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$, isto é, precisamos, apenas, substituir $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ e fazer a verificação. Vejamos,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2} + p[C_1r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}] + q(C_1r^n + C_2nr^n) \\
&= C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^nr(2r + p) \\
&= C_1r^n \cdot 0 + C_2nr^n \cdot 0 + C_2r^nr \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Precisamos garantir que todas as soluções da recorrência tenham essa cara, isto é, são da forma $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$. O teorema a seguir nos garante esse fato. A demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 6. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $C_1r^n + C_2nr^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Exemplo 16. *Vamos encontrar a solução geral para a recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$. Temos, inicialmente, que a equação característica da recorrência é $r^2 - 4r + 4 = 0$, portanto, resolvendo a equação polinomial do segundo grau, temos*

$$\begin{aligned}
r^2 - 4r + 4 = 0 \quad &\iff \quad r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4)}}{2} \\
&\iff \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \\
&\iff \quad r_1 = r_2 = r = 2
\end{aligned}$$

Concluímos, pelo Teorema 3, que a solução para recorrência é $x_n = C_12^n + C_2n2^n$.

2.4 MATRIZES

A seguir, mostraremos formalmente as definições, os conceitos e as propriedades de matrizes. Para isso, construiremos uma linha lógica e pedagógica para a compreensão desejada.

Definição 5. *Dados dois números m e n naturais, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.*

Exemplo 17. *Vejamos alguns exemplos de matrizes:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ *é uma matriz* 2×3*;*

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz* 3×2*;*

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ *é uma matriz* 1×3.

Seja M uma matriz qualquer de dimensões $m \times n$. Cada elemento de M é indicado por a_{ij}, onde podemos utilizar a notação $M = (a_{ij})_{m \times n}$. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento a_{ij} da matriz pertence. Convencionamos, por conveniência, que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para direita (de 1 até n). Assim, uma matriz $m \times n$ pode ser representada da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Há matrizes que recebem nomes especiais pelo fato de apresentarem uma característica marcante e uma utilidade maior. Vejamos algumas dessas matrizes:

a) uma *matriz nula* é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

b) uma *matriz quadrada* de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem igual o número de linhas e colunas, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ (ou, simplesmente, de ordem n) o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}.$$

c) uma *matriz diagonal* é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

d) uma *matriz identidade* de ordem n (indicada por I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Vejamos, por exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4.1 IGUALDADE E OPERAÇÕES DE MATRIZES

Definição 6. *Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i ($i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$) e todo j ($j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser de mesma dimensão e apresentar os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais.*

Exemplo 18. *Note que todos os termos de uma matriz precisam ser posicionalmente iguais aos termos da outra matriz para serem iguais, caso contrário, serão diferentes.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 7. *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que a soma de duas matrizes A e B de dimensões $m \times n$ é uma matriz C de mesma dimensão, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes de A e B.*

Exemplo 19. *Vejamos um exemplo de como somar matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 7. *A adição de matrizes do tipo $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:*

(1) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$;

(2) Comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$;

(3) Elemento Neutro: existe M tal que $A + M = A$ qualquer que seja A do tipo $m \times n$;

(4) Elemento Simétrico: para todo A do tipo $m \times n$: existe A' tal que $A + A' = M$, onde M é a matriz nula.

Demonstração: Faremos a demonstração de item por item. Lembre-se que os elementos, reais, de uma matriz qualquer, supondo A, são representados por a_{ij}. Portanto, temos

(1) Sejam $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$. Queremos mostrar que $X = Y$, onde $X = (x_{ij})_{m \times n}$ e $Y = (y_{ij})_{m \times n}$ são matrizes quaisquer. Então, pela Definição 7 temos que

$$\begin{aligned} X = (A+B)+C &\implies x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \\ &\iff x_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \\ &\implies X = A + (B + C) \\ &\implies X = Y. \end{aligned}$$

(2) Com o mesmo raciocínio, ainda, sejam $A + B = X$ e $B + A = Y$. Queremos mostrar que $X = Y$, onde $X = (x_{ij})_{m \times n}$ e $Y = (y_{ij})_{m \times n}$ são matrizes quaisquer. Ora,

$$\begin{aligned} X = A+B &\implies x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ &\iff x_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \\ &\implies X = B + A \\ &\implies X = Y. \end{aligned}$$

(3) Supondo $A + M = A$, temos que

$$\begin{aligned} A + M = A &\implies a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \\ &\iff m_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &\iff m_{ij} = 0 \\ &\implies M = 0, \end{aligned}$$

observe que M é a matriz nula.

(4) Supondo $A + A' = M$, isto é, pelo item (3) temos que $A + A' = M = 0$, ainda,

$A + A' = 0$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} A + A' = 0 &\implies a_{ij} + a'_{ij} = 0 \\ &\iff a'_{ij} = -a_{ij} \\ &\iff A' = -A, \end{aligned}$$

isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' do mesmo tipo que A, isto é, cada elemento de A' é simétrico do correspondente em A.

■

Definição 8. *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se oposta de A (indica-se $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.*

Exemplo 20. *Segue um exemplo de como calcular a matriz oposta.*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \implies -A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 9. *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.*

Exemplo 21. *Segue um exemplo de como calcular a diferença de matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 10. *Dado um número $k \in \mathbb{R}$ e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, define-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.*

Exemplo 22. *Vejamos um exemplo de como multiplicar um número real por uma matriz:*

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O teorema a seguir nos traz algumas propriedades importantes, onde a demonstração é muito parecida com o Teorema 7 e pode ser encontrada em [6].

Teorema 8. *O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:*

(1) $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$;

(2) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$;

(3) $(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$*;*

(4) $1 \cdot A = A$,

em que A *e* B *são matrizes quaisquer do tipo* $m \times n$ *e* a *e* b *são números reais quaisquer.*

Definição 11. *Dadas duas matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n\times p}$*, define-se produto* AB *a matriz* $C = (c_{ik})_{m\times p}$ *tal que*

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *e todo* $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Observação: Perceba que o produto de matrizes só é possível se, e somente se, o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Exemplo 23. *Dadas*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

sendo A *de dimensão* 2×3 *e* B *de dimensão* 3×1*, decorre que existe* AB *de dimensão* 2×1*. Fazendo* $AB = C$*, devemos calcular* C*, isto é,*

$$C = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Teorema 9. *A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:*

(1) Associativa: $(AB)C = A(BC)$ *quaisquer que sejam as matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*,* $B = (b_{jk})_{n\times p}$ *e* $C = (c_{kl})_{p\times r}$*;*

(2) Distributiva à Direita em relação à Adição: $(A+B)C = AC + BC$ *quaisquer que sejam as matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*,* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *e* $C = (c_{jk})_{n\times p}$ *;*

(3) Distributiva à Esquerda em relação à Adição: $C(A+B) = CA + CB$ *quaisquer que sejam as matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*,* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *e* $C = (c_{ki})_{p\times m}$*;*

(4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ *quaisquer que sejam o número* $k \in \mathbb{R}$ *e as matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n\times p}$

Demonstração: Fazendo, novamente, a demonstração item por item, temos

(1) Sejam $D = AB = (d_{ik})_{m\times p}$, $E = (AB)C = (e_{il})_{m\times r}$ e $F = BC = (f_{jl})_{n\times r}$. Queremos mostrar que $(AB)C = A(BC)$, ou seja, que $E = AF$. Ora, pela Definição 11 temos

$$\begin{aligned}
E = (AB)C = DC \quad &\Longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{kl} \\
&\Longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \Big) \cdot c_{kl} \\
&\Longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \Big) \\
&\Longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl} \Big) \\
&\Longrightarrow \quad e_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot f_{jl} \\
&\Longrightarrow \quad E = AF.
\end{aligned}$$

(2) Seja $D = (A+B)C = (d_{ik})_{m\times p}$. Queremos mostrar que $(A+B)C = AC + BC$, ou seja, $D = AC + BC$. Ora,

$$\begin{aligned}
D = (A+B)C \quad &\Longrightarrow \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} \\
&\Longrightarrow \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk} \\
&\Longrightarrow \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk} \\
&\Longrightarrow \quad D = AC + BC.
\end{aligned}$$

Portanto, $(A+B)C = AC + BC$.

(3) A demonstração é análoga ao item (2).

(4) Sejam $C = kA = (c_{ij})_{m\times n}$, $D = kB = (d_{jk})_{n\times p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m\times p}$. Queremos mostrar que $(kA)B = A(kB) = k(AB)$, ou seja, $CB = AD = kE$.

Ora,

$$\begin{aligned} CB &= \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot b_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} \\ &= k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \\ &= k(AB) \\ &= kE. \end{aligned}$$

Por outro lado, também temos

$$\begin{aligned} AD &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot d_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) \\ &= k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \\ &= k(AB) \\ &= kE. \end{aligned}$$

Concluímos, finalmente, que $CB = kE$ e $kE = AD$ e, por transitividade, temos que $CB = AD = kE$.

■

TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES

Um dos resultados mais importantes, porém simples, no estudo de matrizes é a operação transposição de matrizes que veremos a seguir.

Definição 12. *Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j.*

Por exemplo,

Exemplo 24. $A = \begin{bmatrix} a & e \\ i & o \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & i \\ e & o \end{bmatrix}.$

O teorema a seguir apresenta alguns resultados importantes. A sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 10. *A transposição de matrizes apresenta as seguintes propriedades:*

(1) $(A^t)^t = A$ *para toda matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*;*

(2) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\times n}$*, então* $(A+B)^t = A^t + B^t$*;*

(3) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $k \in \mathbb{R}$*, então* $(kA)^t = kA^t$*;*

(4) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{jk})_{n\times p}$*, então* $(AB)^t = B^tA^t$*.*

MATRIZES INVERTÍVEIS

Percebemos no conjunto das matrizes que algumas operações são um pouco diferente que as operações no conjunto dos números reais. Uma dessas diferenças é a comutatividade com relação a operação da multiplicação, que no conjunto das matrizes arbitrárias nem sempre acontece. A seguir, definiremos o conceito de matriz inversa, isto é, quando uma matriz é invertível.

Definição 13. *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* n*. Dizemos que* A *é uma matriz invertível se existir uma matriz* B *tal que* $AB = BA = I_n$*. Se* A *não é invertível, dizemos que* A *é uma matriz singular.*

Teorema 11. *Se* A *é invertível, então é única a matriz* B *tal que* $AB = BA = I_n$*.*

Demonstração: Suponha que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Queremos mostrar que $B = C$. Ora,

$$C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Portanto, $B = C$.

■

Definição 14. *Dada uma matriz invertível* A*, chama-se inversa de* A *a matriz* A^{-1} *(que é única) tal que* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$*.*

Perceba que A^{-1} também vai ser quadrada de ordem n.

Exemplo 25. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ *é invertível e* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$*. Como a matriz inversa é única, basta verificar uma das igualdades da Definição 14, isto é,*

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Capítulo 3

SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

A Sequência de Jacobsthal recebe esse nome em homenagem ao matemático alemão Ernst Erich Jacobsthal (1882–1965), veja na Figura 3.1, doutor pela Universidade de Berlim em 1906. Sua tese de doutorado tinha o título **Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste**, e é um trabalho que até agora é um clássico, e que é frequentemente referido na maioria dos livros didáticos sobre teoria dos números. Na tese, ele fornece, entre outras coisas, uma prova muito bonita de que todo número primo p da forma $4n + 1$ pode ser escrito como uma soma dos quadrados de dois números. Ele também mostrou que é possível encontrar uma solução $p = x^2 + y^2$ onde x e y podem ser expressos com somas simples sobre os símbolos de Legendre. A seguir, na figura 3.1, temos a foto de Jacobsthal.

Figura 3.1: Erns Erich Jacobsthal (1882 – 1965). Fonte: Siegmund-Schultze (2009).

Em 1909, Jacobsthal tornou-se professor na escola Kaiser Wilhelms em Berlim. Além disso, ele foi assistente do professor E. Lampe na Faculdade de Tecnologia de Berlim e, em 1913, tornou-se professor particular no mesmo local.

Em 1918, ele recebeu o título de Professor e, em 1922, tornou-se professor extraordinário na Faculdade de Tecnologia de Berlim. Quando Jacobsthal foi admitido à Faculdade de Tecnologia, no entanto, não era para ensinar matemática a engenheiros em potencial. Na Alemanha, como em muitos outros países após a Primeira Guerra Mundial, havia uma escassez de professores no ensino médio. Para formar mais professores de matemática, a ciência foi introduzida em várias faculdades técnicas, incluindo a de Berlim. Assim, o objetivo da associação de Jacobsthal com a faculdade era principalmente dar aulas de matemática a futuros professores do ensino médio.

Jacobsthal era especialista em Teoria dos Números e foi aluno de Ferdinand G. Frobenius com quem trabalhou em teoria dos grupos e sua representação. Siegmund-Schultze (2009, p. 327) recorda que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para a Normandia e a Suíça em 1939 e 1943 [1], respectivamente.

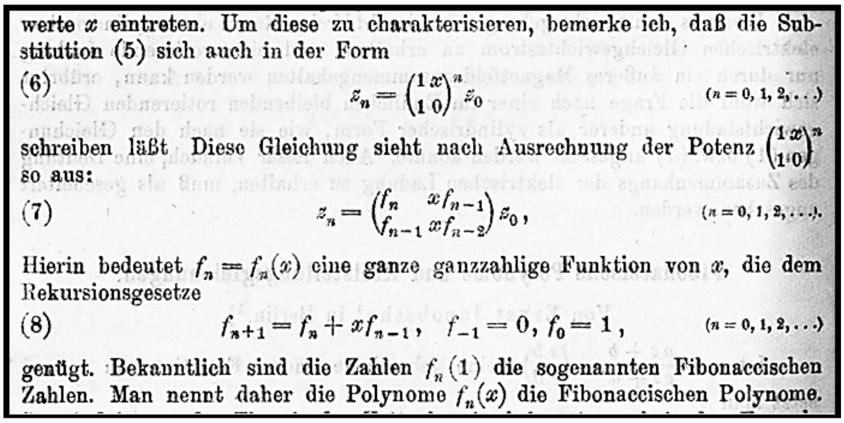
Dentre suas contribuições, destaca-se uma sequência que recebe seu nome, a Sequência de Jacobsthal que é definida pela seguinte lei de recorrência

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad \text{para} \quad n \geq 2,$$

e é determinada pelas condições iniciais $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$. A partir dessa lei podemos representar os primeiros termos da sequência, também conhecidos como números de Jacobsthal. Dessa forma, temos que a sequência de Jacobsthal é

$$(J_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \ldots) \tag{3.1}$$

Observe a Figura 3.2, um recorte da obra de Jacobsthal, que apesar de estar em alemão, conseguimos entender o registro da equação de recorrência $f_{n+1} = f_n + x \cdot f_{n-1}$, onde para $x = 1$ obtemos a sequência de Fibonacci, e para $x = 2$ temos a tal sequência de Jacobsthal representada em (3.1). Também podemos observar, na figura abaixo, algumas representações matriciais apresentadas para auxiliar na equação de recorrência, particularmente, matrizes de ordem 2.


werte x eintreten. Um diese zu charakterisieren, bemerke ich, daß die Substitution (5) sich auch in der Form

(6) $$z_n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n z_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben läßt. Diese Gleichung sieht nach Ausrechnung der Potenz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ so aus:

(7) $$z_n = \begin{pmatrix} f_n & xf_{n-1} \\ f_{n-1} & xf_{n-2} \end{pmatrix} z_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierin bedeutet $f_n = f_n(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von x, die dem Rekursionsgesetze

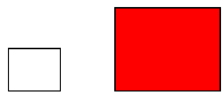
(8) $$f_{n+1} = f_n + xf_{n-1}, \quad f_{-1} = 0, \; f_0 = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt. Bekanntlich sind die Zahlen $f_n(1)$ die sogenannten Fibonaccischen Zahlen. Man nennt daher die Polynome $f_n(x)$ die Fibonaccischen Polynome.

Figura 3.2: Jacobsthal (1919 – 1920) estudou propriedades de sequências numéricas. Fonte: [1].

Apresentamos um exemplo a seguir, encontrado em [7], em que a Sequência de Jacobsthal aparece de uma forma diferente via ladrilhamento,

Exemplo 26. *Observe que pelo cálculo do número de ladrilhamentos possíveis para um retângulo* $3 \times n$ *com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca* (1×1) *e um ladrilho de cor vermelha* (2×2)*, é que vamos encontrar a representação da Sequência de Jacobsthal. Segue abaixo os tipos de ladrilhos,*



Denotamos por T_n *o número de ladrilhamentos para um retângulo* $3 \times n$ *com os dois tipos de ladrilhos descritos acima.*

Definimos $T_0 = 1$.

Temos que $T_1 = 1$ *pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo* 3×1 *com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente. Veja na Figura 3.3*

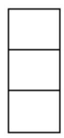


Figura 3.3: Ladrilhamento para retângulo 3×1.

Agora listamos os ladrilhamentos possíveis para o retângulo 3×2*, observe a Figura 3.4*

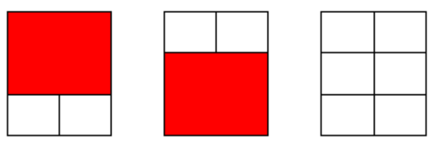


Figura 3.4: Ladrilhamento para retângulo 3×2.

Logo $T_2 = 3$.

O número de ladrilhamentos para o retângulo 3×3 *com os dois tipos de ladrilhos: com um ladrilho* 1×1 *de cor branca e um ladrilho de cor vermelha* 2×2 *é* $T_3 = 5$. *Segue (veja Figura 3.5) cada um desses ladrilhamentos,*

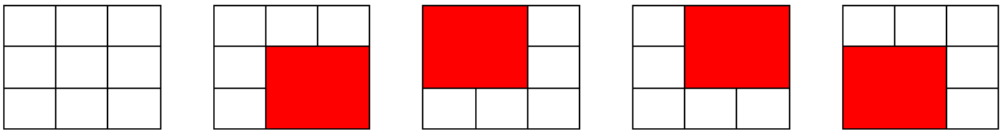


Figura 3.5: Ladrilhamento para retângulo 3×3.

Observamos que $T_4 = 11$*, pois há 11 maneiras de ladrilhar o retângulo* 3×4 *com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Listamos na Figura 3.6 esses ladrilhamentos,*

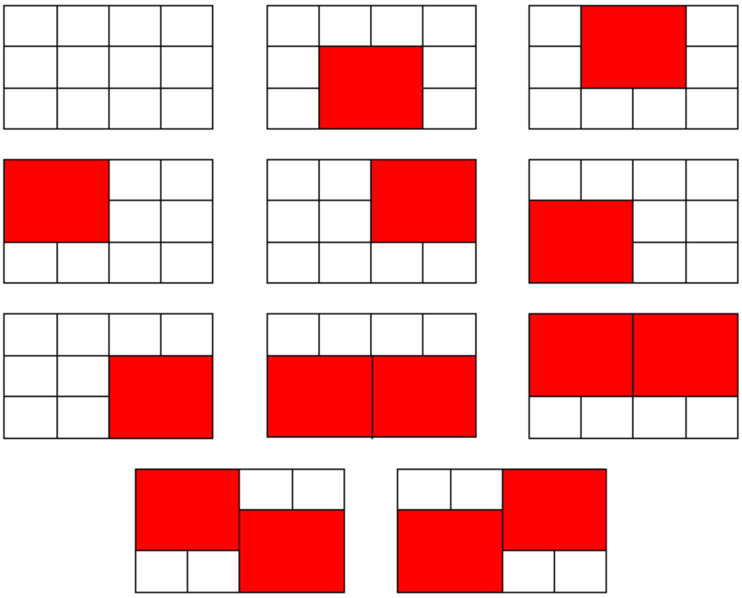
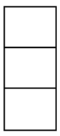


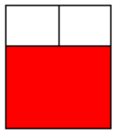
Figura 3.6: Ladrilhamento para retângulo 3×4.

Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ *com ladrilhos de dois tipos em três conjuntos:*

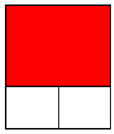
- *o conjunto dos ladrilhamentos* $3 \times n$ *(com os ladrilhos de dois tipos) que contêm pelo menos um ladrilhamento (à direita)* 3×1 *com ladrilhos de cor branca medindo* 1×1*;*



- *o conjunto dos ladrilhamentos* $3 \times n$ *(com os ladrilhos de dois tipos) que contêm pelo menos um ladrilhamento (à direita)* 3×2 *com dois ladrilhos de cor branca* (1×1) *e um ladrilho de cor vermelha* 2×2*, representado a seguir*



- *o conjunto dos ladrilhamentos* $3 \times n$ *(com os ladrilhos de dois tipos) que contêm pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×* 2 *com um ladrilho de cor vermelha e dois ladrilhos de cor branca* (1×1) *de acordo com a representação a seguir*



Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é T_{n-1}*. O segundo conjunto tem cardinalidade* T_{n-2} *e o terceiro tem* T_{n-3} *elementos. Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema:*

$$\begin{cases} T_0 &= 1 \\ T_1 &= 1 \\ T_n &= T_{n-1} + 2T_{n-2}. \end{cases}$$

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Jacobsthal.

3.1 TERMO GERAL DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

Pretendemos encontrar uma representação geral para os números de Jacobsthal. Para isso utilizaremos recorrência, como ferramenta principal. Lembrando que, precisamos conhecer o termo geral de uma sequência, se possível, para nos aprofundarmos no estudo da mesma.

Sejam α e β raízes da equação polinomial do segundo grau $x^2 - x - 2 = 0$. Consequentemente, serão satisfeitas as duas equações $\alpha^2 = \alpha + 2$ e $\beta^2 = \beta + 2$. Agora, se multiplicarmos as duas equações por α^n e β^n, com $n \in \mathbb{N}$, respectivamente, obtemos o seguinte

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + 2\alpha^n \quad \text{e} \quad \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + 2\beta^n.$$

Subtraindo as duas equações e dividindo, em ambos os membros da equação resultante, por $\alpha - \beta$, obtemos

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + 2 \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{3.2}$$

Se definirmos, propositalmente, $H_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n \in \mathbb{N}$, podemos reescrever (3.2) da seguinte forma

$$H_{n+2} = H_{n+1} + 2H_n \tag{3.3}$$

Assim, a sequência H_n satisfaz:

$$\begin{cases} H_0 &= 0 \\ H_1 &= 1 \\ H_n &= H_{n-1} + 2H_{n-2},\ n \geq 2. \end{cases}$$

Logo, H_n é a própria Jacobsthal. Portanto,

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

onde α e β são as raízes da equação $x^2 - x - 2$. Pretendemos, por fim, encontrar α e β. Ora, resolvendo a equação do segundo grau temos,

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Dessa forma, os termos da sequência são calculados por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Observe que agora podemos calcular qualquer termo da Sequência de Jacobsthal, sem a necessidade de conhecermos o termo anterior.

Algo muito interessante quanto às sequências, em particular a Sequência de Jacobsthal, são as suas convergências. Em 1995, a argentina Vera W. Spinadel (nascida em 1929) definiu os números metálicos como sendo o conjunto dos números que resultam das raízes positivas de equações da forma $x^2 - px - q = 0$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ [8]. A seguir enunciamos o terorema de convergência dessas sequências, onde podemos encontrar a demonstração em [9] que por sua vez recebe nomes especias como citei no Capítulo 1.

Teorema 12. *Suponha que $a, b, p, q > 0$ sejam números positivos tais que*

$$\frac{b}{a} = r \neq \mu = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Então a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$a_n = \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é dada por

$$c_n = \begin{cases} a, & \textit{se} \;\; n = 1 \\ b, & \textit{se} \;\; n = 2 \\ pc_{n-1} + qc_{n-2}, & \textit{se} \;\; n \geq 3; \; p, q \in \mathbb{Z}^+, \end{cases}$$

converge e

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Esse teorema nos garante a convergência da sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Denote, agora, esse número metálico por $\sigma_{p,q}$ e o conjunto formado por todos esses números metálicos por M, isto é,

$$M = \left\{ \sigma_{p,q} : \sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \; p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Os seus valores exatos e aproximados a 8 casas decimais podem ser vistos na tabela 3.1. Destacamos a convergência da Sequência de Jacobsthal, em verde, para o número de cobre.

p	q	**símbolo**	**nome do número**	**valor expresso**	**valor aproximado**
1	1	$\phi = \sigma_{1,1}$	Número de ouro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$1,611803399$
2	1	$\sigma_{Ag} = \sigma_{2,1}$	Número de prata	$1 + \sqrt{2}$	$2,41421356$
3	1	$\sigma_{Br} = \sigma_{3,1}$	Número de bronze	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$3,30277564$
1	2	$\sigma_{Cu} = \sigma_{1,2}$	Número de cobre	2	2
1	3	$\sigma_{Ni} = \sigma_{1,3}$	Número de rúquel	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$2,30277564$
2	2	$\sigma_{Pt} = \sigma_{2,2}$	Número de platina	$1 + \sqrt{3}$	$2,73205081$

Tabela 3.1: Números Metálicos. Construída pelo autor.

Proposição 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ são válidas as igualdades:*

(i) $J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n$;

(ii) $J_{n+1} = 2^n - J_n$.

Demonstração: $i)$ Ora, temos que

$$
\begin{aligned}
2J_n + (-1)^n &= 2 \cdot \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right) + (-1)^n \\
&= \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - (-1) \cdot (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \\
&= J_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos demonstrar o item (ii), isto é,

$$
\begin{aligned}
2^n - J_n &= 2^n - \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\
&= \frac{3 \cdot 2^n - 2^n + (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2 \cdot 2^n + (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - (-1)(-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \\
&= J_{n+1}.
\end{aligned}
$$

■

Percebemos que até o momento nossas sequências estão definidas com índices naturais, mas podemos estendê-las para os números inteiros a partir das seguintes definições:

Definição 15. *Denotamos como sequência bi-infinita a enumeração*

$$\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$, com $i \in \mathbb{Z}$.

Definição 16. *Dada uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definimos a extensão de x, como sendo a função $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $z|_{\mathbb{N}} = x$. Chamamos tal extensão de sequência estendida.*

Para a sequência de Jacobsthal, usando a recorrência temos,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n,$$

fazendo $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, ficamos

$$\begin{aligned} J_{-m+2} = J_{-m+1} + 2J_{-m} &\iff 2J_{-m} = J_{-(m-2)} - J_{-(m-1)} \\ &\iff J_{-m} = \frac{J_{-(m-2)} - J_{-(m-1)}}{2}, \end{aligned}$$

onde temos que $J_{-1} = \frac{1}{2}$.

Teorema 13. *Para todo inteiro $n \geq 0$, temos*

$$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n. \tag{3.4}$$

Demonstração: Utilizaremos o princípio de Indução Finita sobre n para provarmos a igualdade. Para $n = 0$, temos

$$0 = J_0 = \frac{2^0 - (-1)^0}{3} = J_{-0} = \frac{(-1)^{0+1}}{2^0} \cdot J_0 = (-1) \cdot 0 = 0$$

Depois de verificada a primeira condição inicial, observaremos, agora, para $n = 1$,

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{2^{-1} - (-1)^1}{3} = J_{-1} = \frac{(-1)^{1+1}}{2^1} \cdot J_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^1 - (-1)^1}{3} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Agora vamos para a hipótese de indução.

Suponhamos que (3.4) seja válido para todo natural menor ou igual a n. Queremos mostrar que também é válido para $n + 1$, ou seja,

$$J_{-(n+1)} = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1}.$$

Ora, temos que

$$\begin{aligned} J_{-(n+1)} &= \frac{J_{-(n-1)} - J_{-n}}{2} \\ &= \frac{\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot J_{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot J_n}{2} \\ &= \frac{\frac{2 \cdot (-1)^n \cdot J_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot J_n}{2^n}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot J_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot J_n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{-(n+1)} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (2 \cdot J_{n-1} - (-1) \cdot J_n) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot (2J_{n-1} + J_n) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n \cdot (-1)^2}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Propriedade 1. *Para todo inteiro não negativo $n \geq 0$, vale que:*

(i) $2^n = 2J_n + 2J_{n-1}$*;*

(ii) $(-1)^n = -J_n + 2J_{n-1}$.

Demonstração: $i)$ Ora, temos que

$$\begin{aligned}
2J_n + 2J_{n-1} &= 2 \cdot \frac{2^n - (-1)^n}{3} + 2 \cdot \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 2^n - 2 \cdot (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 2^n - 2 \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2 \cdot 2^n + 2^n}{3} \\
&= \frac{3 \cdot 2^n}{3} \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

Partindo para a prova de $ii)$ temos que,

$$\begin{aligned}
-J_n + 2J_{n-1} &= -\frac{2^n - (-1)^n}{3} + 2 \cdot \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{-2^n + (-1)^n + 2^n - 2 \cdot (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{(-1)^n - 2 \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{-1}}{3} \\
&= \frac{(-1)^n + 2 \cdot (-1)^n}{3} \\
&= \frac{3 \cdot (-1)^n}{3} \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

3.1.1 GENERALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

Sabemos que o n-ésimo número de Jacobsthal $(n \geq 0)$ é dado por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{3.5}$$

Os dez primeiros termos da sequência (J_n), para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, estão na Tabela 3.2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	3	5	11	21	43	85	171

Tabela 3.2: Termos iniciais da Sequência de Jacobsthal

Pretendemos generalizar a sequência de Jacobsthal de uma maneira natural, isto é, substituindo, em (3.5), 2 por s podemos reescrever os termos da sequência da seguinte forma:

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}, \tag{3.6}$$

onde n é um número natural, incluindo o zero, e $s \geq 0$ é um número real.

É fácil ver, nessa generalização, como o número 2 foi alterado para s e, portanto, 3 pode ser escrito como $s + 1$.

Aqui observamos outra generalização com a interpretação do denominador não como o próximo número após 2, mas como $2^2 - 1$, ou seja, escrevendo-o como $s^2 - 1$, como pode ser visto em [10] e aprofundado em [11].

Com efeito, são obtidos os seguintes números

$$Y_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1}. \tag{3.7}$$

Logicamente quando $s = 2$, obtemos os números padrão de Jacobsthal. No entanto, para $s = 0$ obtemos

$$Y_n^0 = (-1)^n.$$

Os seis primeiros termos da sequência $\{Y_n^s\}$ em relação a n estão na tabela 3.3

0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{s-1}$	1	$s + \frac{1}{s-1}$	$s^2 + s + \frac{1}{s-1}$	$s^3 + s + \frac{1}{s-1}$

Tabela 3.3: Termos iniciais da sequência Y_n^s

Pode-se observar de (3.6) e (3.7), para o número real $s \neq 1$, que

$$\frac{1}{s-1} \cdot J_n^s = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s+1} = \frac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1} = Y_n^s$$

Então,

$$Y_n^s = \frac{1}{s-1} \cdot J_n^s.$$

Teorema 14 ([10]). *Para cada número natural $n \geq 0$ e número real $s \neq 1$:*

$$Y_{n+2}^s = Y_n^s + s^n,$$

$$Y_{n+1}^s = s \cdot Y_n^s + \frac{(-1)^n}{s-1}.$$

Demonstração: Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
Y_{n+2}^s - Y_n^s &= \frac{s^{n+2} - (-1)^{n+2}}{s^2-1} - \frac{s^n - (-1)^n}{s^2-1} \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s^{n+2} - (-1)^{n+2} - s^n + (-1)^n] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s^n \cdot s^2 - (-1)^n \cdot (-1)^2 - s^n + (-1)^n] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s^n \cdot (s^2-1) + (-1)^n \cdot (1 - (-1)^2)] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s^n \cdot (s^2-1)] \\
&= \frac{s^n \cdot (s^2-1)}{s^2-1} \\
&= s^n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Y_{n+2}^s - Y_n^s = s^n \Longleftrightarrow Y_{n+2}^s = Y_n^s + s^n.$$

Temos ainda, que

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^s - s \cdot Y_n^s &= \frac{s^{n+1} - (-1)^{n+1}}{s^2-1} - s \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s^2-1} \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s^{n+1} - (-1)^{n+1} - s^{n+1} + s \cdot (-1)^n] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s \cdot (-1)^n - (-1)^{n+1}] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [s \cdot (-1)^n - (-1)^n \cdot (-1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^s - s \cdot Y_n^s &= \frac{1}{s^2-1} \cdot [(-1)^n \cdot (s-(-1))] \\
&= \frac{1}{s^2-1} \cdot [(-1)^n \cdot (s+1)] \\
&= \frac{1}{(s+1)\cdot(s-1)} \cdot [(-1)^n \cdot (s+1)] \\
&= \frac{(-1)^n \cdot (s+1)}{(s+1)\cdot(s-1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{s-1}
\end{aligned}$$

Então,

$$Y_{n+1}^s - s \cdot Y_n^s = \frac{(-1)^n}{s-1} \Longleftrightarrow Y_{n+1}^s = s \cdot Y_n^s + \frac{(-1)^n}{s-1}.$$

■

As duas possíveis generalizações dos números de Jacobsthal têm as seguintes formas.

Primeiro, podemos dizer que a condição inicial é dada, de maneira que 2 e 3 são os dois primeiros números primos e, portanto, os números de Jacobsthal podem obter a forma

$$JP_n^s = \frac{p_s^n - (-1)^n}{p_{s+1}}, \tag{3.8}$$

onde p_i, é o i-ésimo número primo $(p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots)$

Segundo, podemos mencionar que 2 e 3 são dois números sequenciais de Fibonacci e, portanto, os números de Jacobsthal podem obter a forma

$$JF_n^s = \frac{f_s^n - (-1)^n}{f_{s+1}}, \tag{3.9}$$

onde f_i é o i-ésimo número de Fibonacci $(f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots)$

Para os números mais recentes, vemos que a seguinte asserção é válida. A seguir enunciamos um teorema, sobretudo, encontrado em [12].

Teorema 15. *Para cada número natural $n \geq 0$ e número real $s \neq 1$:*

$$JF_{n+1}^s = JF_n^s + s^n + \frac{f_s - 1}{f_{s+1}} \cdot f_s^n.$$

Capítulo 4

MATRIZES DE JACOBSTHAL

Podemos compreender que o processo da sequência de Jacobsthal está em evidência na pesquisa atual, como mostram os trabalhos [1], [7], [10], [11] e [13].

As representações matriciais permitem a verificação de uma série de propriedades relacionadas com a Sequência Generalizada de Jacobsthal J_n^s com um menor custo operacional [14]. Traremos alguns resultados para podermos embasar tal afirmação [1].

Proposição 2. *Para todo inteiro positivo $n \geq 0$, vale a seguinte relação:*

$$J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s$$

Demonstração: Temos, por (3.6), que

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s &= \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s+1} \\
&= (-1) \cdot \frac{(-1)^n}{s^n} \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s+1} \\
&= (-1) \cdot \frac{(-1)^n}{s+1} \cdot \frac{s^n - (-1)^n}{s^n} \\
&= (-1) \cdot \frac{(-1)^n \cdot (1 - s^{-n}(-1)^n)}{s+1} \\
&= (-1) \cdot \frac{(-1)^n - s^{-n}(-1)^{2n}}{s+1} \\
&= (-1) \cdot (-1)^{2n} \cdot \frac{(-1)^{-n} - s^{-n}}{s+1} \\
&= [(-1)^2]^n \cdot (-1) \cdot \frac{(-1)^{-n} - s^{-n}}{s+1} \\
&= [(-1)^2]^n \cdot \frac{s^{-n} - (-1)^{-n}}{s+1} \\
&= 1 \cdot J_{-n}^s \\
&= J_{-n}^s.
\end{aligned}$$

■

Dessa forma, a Proposição 2, permite avaliar ou determinar um termo qualquer da sequência que indicamos por $\{J^s_{-n}\}$, conhecendo-se J^s_n.

Agora, colocando em evidência a generalização dada em (3.6) vamos determinar alguns termos da sequência

$$J^s_n = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1},$$

isto é, os seis primeiros termos da sequência $\{J^s_n\}$ em relação a $n \geq 0$ estão representados na tabela 4.1

J^s_0	J^s_1	J^s_2	J^s_3	J^s_4	J^s_5
0	1	$s-1$	s^2-s+1	s^3-s^2+s-1	$s^4-s^3+s^2-s+1$

Tabela 4.1: Termos iniciais da Sequência Generalizada de Jacobsthal

Um problema natural envolve a determinação de outros elementos, dessa generalização, na medida em que o índice n cresce ou decresce indefinidamente $\{J^s_{-n}\}$

Pensando nisso, vamos definir as seguintes matrizes

$$F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix}.$$

Vamos avaliar as matrizes do tipo $F^n_s,\ n \geq 0$

$$\begin{aligned} F^2_s &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^2-s+1 & s\cdot(s-1) \\ s-1 & s\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J^s_3 & s\cdot J^s_2 \\ J^s_2 & s\cdot J^s_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

temos ainda,

$$\begin{aligned} F^3_s &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^2-s+1) \\ s^2-s+1 & s\cdot(s-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J^s_4 & s\cdot J^s_3 \\ J^s_3 & s\cdot J^s_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

observe que há um possível padrão. Seguindo com o mesmo raciocínio temos

$$\begin{aligned}
F_s^4 &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \\ (s^3-s^2+s-1) & s\cdot(s^2-s+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_5^s & s\cdot J_4^s \\ J_4^s & s\cdot J_3^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo, com esse resultado, temos

$$\begin{aligned}
F_s^5 &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \\ s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_6^s & s\cdot J_5^s \\ J_5^s & s\cdot J_4^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Fazendo só mais uma vez, encontramos

$$\begin{aligned}
F_s^6 &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^5-s^4+s^3-s^2+s-1) \\ s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_7^s & s\cdot J_6^s \\ J_6^s & s\cdot J_5^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vejam que podemos extrair desses resultados, tipos de expressões algébricas, produtos notáveis ou até mesmo o termo geral de F_s^n.

De modo semelhante, vamos observar, agora, o que ocorre com as potências da inversa de F_s, isto é,

$$\begin{aligned}
F_s^{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \\ \\ \frac{1-s}{s^2} & \frac{s^2-s+1}{s^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2}{s^{2-1}} \cdot J_1^s & s \cdot \frac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s \\ \\ \frac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s & s \cdot \frac{(-1)^{2+2}}{s^{2+1}} \cdot J_3^s \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

continuando, temos

$$\begin{aligned}
F_s^{-3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2}{s^{2-1}} \cdot J_1^s & s \cdot \frac{(-1)^2}{s^2} \cdot J_2^s \\ \\ \frac{(-1)^2}{s^2} \cdot J_2^s & s \cdot \frac{(-1)^2}{s^{2+1}} \cdot J_3^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^3}{s^{3-1}} \cdot J_2^s & s \cdot \frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s \\ \\ \frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s & s \cdot \frac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}} \cdot J_4^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vamos em frente,

$$\begin{aligned}
F_s^{-4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^3}{s^{3-1}} \cdot J_2^s & s \cdot \frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s \\ \\ \frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s & s \cdot \frac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}} \cdot J_4^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^4}{s^{4-1}} \cdot J_3^s & s \cdot \frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s \\ \\ \frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s & s \cdot \frac{(-1)^{4+2}}{s^{4+1}} \cdot J_5^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos a última iteração a seguir

$$
\begin{aligned}
F_s^{-5} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^4}{s^{4-1}} \cdot J_3^s & s \cdot \frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s \\ \frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s & s \cdot \frac{(-1)^{4+2}}{s^{4+1}} \cdot J_5^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^5}{s^{5-1}} \cdot J_4^s & s \cdot \frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s \\ \frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s & s \cdot \frac{(-1)^{5+2}}{s^{5+1}} \cdot J_6^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Observe a beleza desses padrões que encontramos e, consequentemente, o apoio que as matrizes nos dão para essa apreciação. Dentro dos padrões acima, podemos instigar e estimular a conjectura de propriedades reveladas a partir de determinados invariantes algébricos presentes nas matrizes $F_s^{-2}, F_s^{-3}, F_s^{-4}, F_s^{-5}, \ldots$.

Na Figura 4.1, podemos verificar a determinação de potências F_s^n com expoentes elevados. Com o auxílio do Maxima [15], podemos antever/verificar e comprovar determinadas propriedades extraídas dos elementos do conjunto indicado por $\{J_{-n}^s\}_{n\in\mathbb{N}}$. A seguir, determinamos ainda o comportamento das matrizes $F_s^7, F_s^8, F_s^9, F_s^{10}$ com o recurso computacional. Assim, poderemos determinar uma fórmula fechada para, F_s^n, $n \geq 0$.

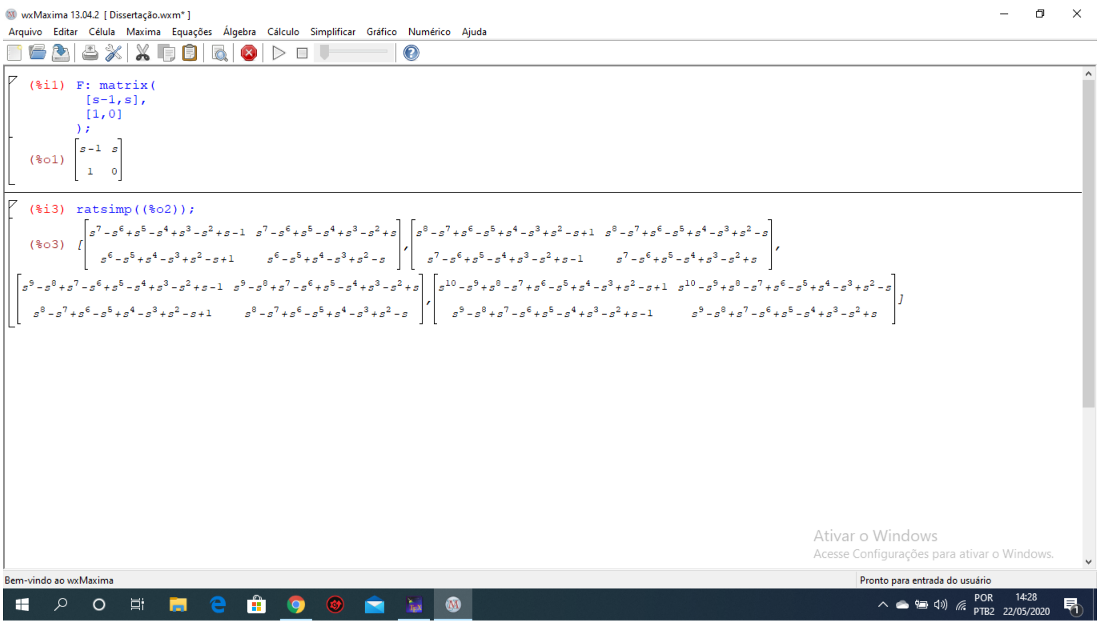


Figura 4.1: Investigação do comportamento das matrizes, F_s^n, $n \geq 0$ com o auxílio computacional do Maxima. Fonte: Construído pelo autor.

Consequentemente, verificamos o comportamento das matrizes a seguir

$$F_s^{-6}, F_s^{-7}, F_s^{-8}, F_s^{-9}.$$

Vejamos a Figura 4.2, onde nos mostra o processo de investigação de propriedades, através do auxílio computacional, no que concerne ao processo de identificação de padrões e invariantes algébricos para a descrição de uma fórmula fechada, deduzida indutivamente, para potências negativas da matriz.

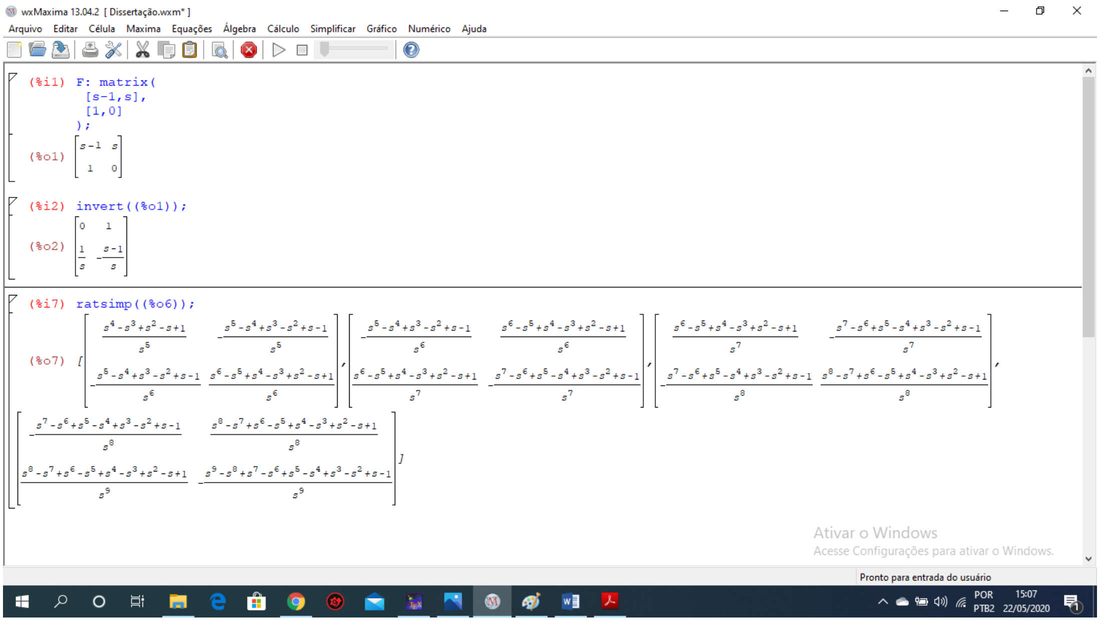


Figura 4.2: O software Maxima permite a determinação das potências negativas das matrizes relacionadas com a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Fonte: Construída pelo autor

Precisamos ter a certeza que esses padrões se repetem para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, precisamos mostrar que a generalização intuitiva, seja de fato uma verdade absoluta e não apenas uma intuição. Utilizaremos o Princípio de Indução Finita, que é uma ferramenta que se encaixa, com maestria, a essa constatação. Para isso, vamos demonstrar as identidades a seguir.

Proposição 3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, são válidas as igualdades:*

(i) $J_{n+1}^s = s \cdot J_n^s + (-1)^n$, $n \geq 0$;

(ii) $F_s^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}$, $n \geq 2$;

(iii) $F_s^{-n} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.

Demonstração: $i)$ Temos que

$$\begin{aligned}
J_{n+1}^s &= \frac{s^{n+1}-(-1)^{n+1}}{s+1} \\
&= \frac{s\cdot s^n - s\cdot(-1)^n + s\cdot(-1)^n - (-1)^n\cdot(-1)}{s+1} \\
&= \frac{s\cdot s^n - s\cdot(-1)^n + s\cdot(-1)^n + (-1)^n}{s+1} \\
&= \frac{s\cdot(s^n-(-1)^n) + (-1)^n\cdot(s+1)}{s+1} \\
&= \frac{s\cdot(s^n-(-1)^n)}{s+1} + \frac{(-1)^n\cdot(s+1)}{s+1} \\
&= s\cdot\frac{(s^n-(-1)^n)}{s+1} + (-1)^n \\
&= s\cdot J_n^s + (-1)^n.
\end{aligned}$$

Vamos provar, agora, o item (ii) utilizando o Princípio de Indução Finita sobre n, isto é,

Para $n=2$ temos que,

$$\begin{aligned}
F_s^2 &= \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s^2-s+1 & s\cdot(s-1) \\ s-1 & s\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_3^s & s\cdot J_2^s \\ J_2^s & s\cdot J_1^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{2+1}^s & s\cdot J_2^s \\ J_2^s & s\cdot J_{2-1}^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Perceba que o caso base de indução é verificado. Agora, vamos supor que (ii) seja verificado para um certo n, ou seja,

$$F_s^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \\ J_n^s & s\cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que (ii) também vale para $n+1$, isto é,

$$F_s^{n+1} = \begin{pmatrix} J_{n+2}^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix}.$$

Com efeito, seja

$$
\begin{aligned}
F_s^{n+1} = F_s^n \cdot F_s &= \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (s-1) \cdot J_{n+1}^s + s \cdot J_n^s & s \cdot J_{n+1}^s \\ (s-1) \cdot J_n^s + s \cdot J_{n-1}^s & s \cdot J_n^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s \cdot J_{n+1}^s - J_{n+1}^s + s \cdot J_n^s & s \cdot J_{n+1}^s \\ s \cdot J_n^s - J_n^s + s \cdot J_{n-1}^s & s \cdot J_n^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s \cdot J_{n+1}^s - (-1)^n & s \cdot J_{n+1}^s \\ s \cdot J_n^s - (-1)^{n-1} & s \cdot J_n^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s \cdot J_{n+1}^s + (-1) \cdot (-1)^n & s \cdot J_{n+1}^s \\ s \cdot J_n^s + (-1) \cdot (-1)^{n-1} & s \cdot J_n^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s \cdot J_{n+1}^s + (-1)^{n+1} & s \cdot J_{n+1}^s \\ s \cdot J_n^s + (-1)^n & s \cdot J_n^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{n+2}^s & s \cdot J_{n+1}^s \\ J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita podemos afirmar que F_n^s vale para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$.

Finalmente, vamos provar o item (iii), também, por indução sobre n. Para $n = 2$ temos que,

$$
\begin{aligned}
F_s^{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \\ \\ \dfrac{1-s}{s^2} & \dfrac{s^2-s+1}{s^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^2}{s^{2-1}} \cdot J_1^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{2+2}}{s^{2+1}} \cdot J_3^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Note que, F_s^{-n} vale para $n = 2$. Agora, vamos supor que F_s^{-n} é válido para um certo n, isto é,

$$
F_s^{-n} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}
$$

Queremos mostrar que esta fórmula também vale para $n+1$, ou seja,

$$F_s^{-(n+1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+3}}{s^{n+2}} \cdot J_{n+2}^s \end{pmatrix}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
F_s^{-(n+1)} &= F_s^{-n} \cdot F_s^{-1} \\
\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n}}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{-1}}{s^{-1-1}} \cdot J_{-1-1}^s & \dfrac{(-1)^{-1+1}}{s^{-1}} \cdot J_{-1}^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{-1+1}}{s^{-1}} \cdot J_{-1}^s & \dfrac{(-1)^{-1+2}}{s^{-1+1}} \cdot J_{-1+1}^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n}}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s & \dfrac{(-1)^{n}}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s + (1-s) \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s + (1-s) \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix} \\
\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^s & \dfrac{s \cdot (-1)^{n} \cdot J_{n-1}^s + (1-s) \cdot (-1)^{n+1} \cdot J_{n}^s}{s^{n}} \\ \\ \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & \dfrac{s \cdot (-1)^{n+1} \cdot J_{n}^s + (1-s) \cdot (-1)^{n+2} \cdot J_{n+1}^s}{s^{n+1}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_s^{-(n+1)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & (-1)^n \cdot \dfrac{s \cdot J_{n-1}^s + (1-s) \cdot (-1) \cdot J_n^s}{s^n} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{s \cdot J_n^s + (1-s) \cdot (-1) \cdot J_{n+1}^s}{s^{n+1}} \end{pmatrix} \\[2ex]
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & (-1)^n \cdot \dfrac{s \cdot J_{n-1}^s - (1-s) \cdot J_n^s}{s^n} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{s \cdot J_n^s - (1-s) \cdot J_{n+1}^s}{s^{n+1}} \end{pmatrix} \\[2ex]
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & \dfrac{(-1)^n \cdot (s \cdot J_{n-1}^s - J_n^s + s \cdot J_n^s)}{s^n} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (s \cdot J_n^s - J_{n+1}^s + s \cdot J_{n+1}^s)}{s^{n+1}} \end{pmatrix} \\[2ex]
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & \dfrac{(-1)^n}{s^n} \cdot ((-1)^n + s \cdot J_n^s) \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & \dfrac{(-1)^2 \cdot (-1)^{n+1}}{s^{n+1}} \cdot ((-1)^{n+1} + s \cdot J_{n+1}^s) \end{pmatrix} \\[2ex]
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+3}}{s^{n+2}} \cdot J_{n+2}^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, podemos garantir que a expressão matricial de F_s^{-n} vale para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$.

■

Capítulo 5

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Zabala (1998) sequências didáticas são: “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (...)” [16]. Observe que uma Sequência Didática tem uma relação harmoniosa com a matemática pura e aplicada, no que diz respeito ao cumprimento de todas as etapas, respeitando o processo de cognição e aprendizagem de cada etapa específica.

O interessante dessa técnica é a possibilidade de uso da interdisciplinaridade, isto é, a busca em outras disciplinas por relações de afinidade com o conteúdo abordado. Com isso, o professor traz uma dinâmica evolutiva, abrangente e aplicável em sala de aula. Dessa forma, podemos estimular os discentes para perceber que existe uma conexão, muitas vezes não percebida, da matemática com outras matérias.

A Sequência Didática baseia-se na didática francesa, que por sua vez, tem relações muito fortes com a prática ativa do discente e, logicamente, com a contextualização no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem [3].

Propomos uma atividade com uma finalidade bem específica, que é de apresentar, de maneira simples, a Sequência de Jacobsthal e sua generalização (J_n^s), e fazer uma relação com o estudo de matrizes. Nosso desafio é fazer uma construção visível e lógica, para que o educador e o discente consigam entender o processo e aplicá-lo de maneira objetiva e satisfatória.

Com efeito, construiremos as etapas, propostas pelo autor, para o entendimento dessa atividade a seguir:

5.1 Etapa 1: Abordagem Histórica da Sequência de Jacobsthal

Objetivo: Trazer uma motivação para o aluno, mostrando o período da descoberta, os matemáticos que contribuíram para a expansão da Sequência de Jacobsthal, enfim, contextualizar o que irá ser abordado para construirmos um raciocínio lógico embasado no contexto histórico.

Procedimentos: É necessário, cronologicamente, construir as etapas do surgimento da Sequência de Jacobsthal, explicando o porquê desse nome, contando um pouco da biografia de Ernst Erich Jacobsthal, em quais áreas da matemática ele mais se dedicou, quais seus trabalhos mais renomados, pois dessa forma, os alunos se envolvem na história e entram na dinâmica da aula possibilitando o despertar, de maneira natural, do interesse pelo assunto e, consequentemente, a aprendizagem conceitual e histórica.

5.2 Etapa 2: Conhecendo a Sequência de Jacobsthal

Objetivo: Fazer com que o aluno conheça os termos iniciais da Sequência de Jacobsthal através da sua lei de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, para $n \geq 2$, com as condições iniciais $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$.

Procedimentos: A construção de uma tabela é favorável, para esse primeiro contato, para a melhor visualização e afinidade. Veja que, para cada $n \in \mathbb{N}$, nós temos um termo correspondente da sequência, e através dessa atribuição de valores para n podemos entender de que forma a sequência é construída.

n	$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$
0	0
1	1
2	1
3	3
4	5
5	11
6	21
7	43
8	85
9	171
10	341
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 5.1: Onze primeiros da Sequência de Jacobsthal

Podemos escrever os onze primeiros termos da Sequência de Jacobsthal da seguinte forma:

$$(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, \ldots).$$

5.3 Etapa 3: Encontrando o Termo Geral da Sequência de Jacobsthal

Objetivo: Poder determinar qualquer termo da Sequência de Jacobsthal sem precisar conhecer termos anteriores.

Procedimentos: Como a Sequência de Jacobsthal é uma recorrência de segunda ordem, precisamos determinar as raízes da equação característica, para logo em seguida encontrar o termo geral da sequência.

É importante instigar o aluno para investigar possíveis termos, como o J_{30}, J_{50} e, por exemplo, o J_{100}, pois eles irão perceber que para encontrar termos como esses, é necessário o conhecimento prévio dos termos anteriores. No entanto, com esse gancho, precisamos encontrar, consequentemente, o termo geral da Sequência de Jacobsthal. Para isso, utilizaremos recorrência linear de segunda ordem.

Como $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, temos que a equação característica é $r^2 = r + 2$ (essa relação pode ser, intuitivamente, esclarecida de maneira que podemos subir os índices, da fórmula de recorrência, para o expoente e tomar $n = 2$). Portanto, vamos encontrar as raízes da equação característica, isto é,

$$
\begin{aligned}
r^2 = r + 2 &\iff r^2 - r - 2 = 0 \\
&\iff r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \\
&\iff r_1 = \frac{1+3}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-3}{2} \\
&\iff r_1 = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = -1
\end{aligned}
$$

Com efeito, temos que $J_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n$. Temos os valores iniciais $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$ que nos possibilitam encontrar as constante C_1 e C_2, isto é,

$$
\begin{aligned}
J_0 = 0 &\iff C_1 2^0 + C_2(-1)^0 = 0 \\
&\iff C_1 + C_2 = 0 \\
&\iff C_1 = -C_2.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
J_1 = 1 &\iff C_1 2^1 + C_2(-1)^1 = 1 \\
&\iff 2C_1 - C_2 = 1 \\
&\iff 2C_1 + C_1 = 1 \\
&\iff 3C_1 = 1 \\
&\iff C_1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Com isso, se $-C_2 = C_1 = \dfrac{1}{3}$ então $C_2 = -\dfrac{1}{3}$. Finalmente, encontramos o termo geral para a Sequência de Jacobsthal representado a seguir:

$$J_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \Big(-\frac{1}{3}\Big) \cdot (-1)^n \Longleftrightarrow J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

5.4 Etapa 4: Generalizando a Sequência de Jacobsthal

Objetivo: Poder enxergar a Sequência de Jacobsthal de maneira mais abrangente.

Procedimentos: Iremos nos ater para generalização que deriva, de maneira direta, do termo geral da sequência. De fato, fazendo a substituição do número 2 por s conseguimos essa generalização.

Conseguimos, na **Etapa 3**, encontrar o termo geral, isto é,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Vamos escrever o termo geral da seguinte forma,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{2+1}.$$

Feito isso, vamos fazer uma substituição de 2 por s, onde obtemos uma das generalizações da Sequência de Jacobsthal a seguir

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}.$$

5.5 Etapa 5: Conhecendo os Termos da Sequência Generalizada de Jacobsthal

Objetivo: Fazer com que o aluno diferencie os termos da Sequência de Jacobsthal e os termos da generalização de Jacobsthal.

Procedimentos: Construiremos, também, uma tabela para encontrarmos os termos iniciais, em função de s, da Sequência Generalizada de Jacobsthal.

Os primeiros termos da sequência generalizada estão representadas na Tabela 5.2

n	$J_n^s = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s+1}$	J_n
0	$J_0^s = \dfrac{s^0 - (-1)^0}{s+1}$	0
1	$J_1^s = \dfrac{s^1 - (-1)^1}{s+1}$	1
2	$J_2^s = \dfrac{s^2 - (-1)^2}{s+1}$	$s-1$
3	$J_3^s = \dfrac{s^3 - (-1)^3}{s+1}$	s^2-s+1
4	$J_4^s = \dfrac{s^4 - (-1)^4}{s+1}$	s^3-s^2+s-1
5	$J_5^s = \dfrac{s^5 - (-1)^5}{s+1}$	$s^4-s^3+s^2-s+1$
6	$J_6^s = \dfrac{s^6 - (-1)^6}{s+1}$	$s^5-s^4+s^3-s^2+s-1$
7	$J_7^s = \dfrac{s^7 - (-1)^7}{s+1}$	$s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1$
8	$J_8^s = \dfrac{s^8 - (-1)^8}{s+1}$	$s^7-s^6+s^5-s^4+s^3-s^2+s-1$
9	$J_9^s = \dfrac{s^9 - (-1)^9}{s+1}$	$s^8-s^7+s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1$
10	$J_{10}^s = \dfrac{s^{10} - (-1)^{10}}{s+1}$	$s^9-s^8+s^7-s^6+s^5-s^4+s^3-s^2+s-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 5.2: Alguns Números de Jacobsthal

Observe que as simplificações, da segunda coluna da Tabela 5.2, podem ser feitas por muitos mecanismos, como uma divisão de polinômios, produtos notáveis, etc. O resultado dessas divisões resultam em diversos padrões que proporcionam um entendimento dessa generalização, como por exemplo, os coeficientes alternam entre 1 e -1 a partir de $n = 2$, o grau do polinômio, se pensarmos assim, é uma unidade a menos do que o valor n, e a tabela, esteticamente, aparenta um triângulo, mostrando o aumento dos termos a partir do crescimento dos valores de n.

5.6 Etapa 6: Relacionando os Números de Jacobsthal com Matrizes

Objetivo: Trabalhar as operações de matrizes com os alunos.

Procedimentos: Vamos definir a matriz F_s invertível. Consequentemente, vamos calcular a matriz inversa de F_s, isto é, F_s^{-1}. Logo em seguida, faremos as operações com matrizes.

Precisamos definir a matriz F_s, invertível, da seguinte maneira

$$F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos calcular sua inversa, F_s^{-1}. Precisamos lembrar que a matriz inversa é única e podemos encontrá-la através da fórmula representativa a seguir

$$F_s \cdot F_s^{-1} = F_s^{-1} \cdot F_s = I_2.$$

Feito isso, seja $F_s^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz inversa de F_s, onde temos a missão de encontrar os valores de a, b, c e d. Temos então,

$$\begin{aligned}
F_s \cdot F_s^{-1} = I_2 &\Longrightarrow \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} a \cdot (s-1) + sc & b \cdot (s-1) + sd \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} a \cdot (s-1) + sc = 1 \\ b \cdot (s-1) + sd = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 0 \cdot (s-1) + sc = 1 \\ 1 \cdot (s-1) + sd = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} sc = 1 \\ s + sd = 1 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} sc = 1 \\ sd = 1 - s \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{s} \\ d = \dfrac{1-s}{s} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observe que $s \neq 0$ pelo fato do produto $s \cdot c = 1$, obviamente. Feito assim, encontramos a matriz inversa, isto é,

$$F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix}.$$

Também podemos calcular alguns produtos de matrizes e observar os padrões obtidos.

$$\begin{aligned}
F_s^{-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \\ \\ \dfrac{1-s}{s^2} & \dfrac{s^2-s+1}{s^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^2}{s^{2-1}} \cdot J_1^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{2+1}}{s^2} \cdot J_2^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{2+2}}{s^{2+1}} \cdot J_3^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Veja a relação com os termos iniciais da Sequência Generalizada de Jacobsthal. Vamos continuar,

$$\begin{aligned}
F_s^{-3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^2}{s^{2-1}} \cdot J_1^s & s \cdot \dfrac{(-1)^2}{s^2} \cdot J_2^s \\ \\ \dfrac{(-1)^2}{s^2} \cdot J_2^s & s \cdot \dfrac{(-1)^2}{s^{2+1}} \cdot J_3^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^3}{s^{3-1}} \cdot J_2^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}} \cdot J_4^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Novamente podemos ver, além da relação com os termos iniciais, padrões que instigam o aluno a generalizar o processo. Fazendo mais uma vez, temos

$$
\begin{aligned}
F_s^{-4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^3}{s^{3-1}} \cdot J_2^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}} \cdot J_4^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^4}{s^{4-1}} \cdot J_3^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s \\ \\ \dfrac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s & s \cdot \dfrac{(-1)^{4+2}}{s^{4+1}} \cdot J_5^s \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Garantido, intuitivamente, a presença dos termos da sequência generalizada e, também, aos padrões.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos a Sequência de Jacobsthal e sua generalização como uma maneira de relacionar os Números de Jacobsthal, com o estudo de Matrizes, permitindo introduzir o assunto de matrizes, relacionando-as com sequências, assim como previsto no currículo do 2º ano. Logicamente, tomamos os devidos cuidados para que a construção deste raciocínio se faça de maneira gradativa e consistente.

Fizemos, inicialmente, um aparato, usando matemática básica, de assuntos relevantes para o entendimento da relação, como o Princípio de Indução Finita, que foi uma ferramenta necessária para as demonstrações de teoremas e proposições. Também abordamos Sequências, de modo bem geral, que foi a chave para entendermos especificamente a Sequência de Jacobsthal que, por sua vez, é o objeto principal deste trabalho.

Depois fizemos um resumo do estudo de Recorrências, tanto de primeira ordem como de segunda ordem, para podermos compreender o processo da construção do termo geral da Sequência de Jacobsthal que, por sua vez, nos revela qualquer termo da sequência e, também, nos mostra que a Sequência de Jacobsthal é uma recorrência de segunda ordem. Ainda em conformidade com o nosso objetivo, apresentamos uma revisão de alguns conceitos básicos de Matrizes trazendo uma base relevante para entendermos a relação com os Números de Jacobsthal.

A Sequência de Jacobsthal foi apresentada, inicialmente, por um resumo histórico para entendermos o surgimento do seu nome, as motivações, as derivações e as semelhanças com as sequência famosas, como é o caso da Sequência de Fibonacci. Mostramos, por definição, a lei de recorrência da Sequência de Jacobsthal, mas como para encontrar qualquer termo da sequência é necessário conhecer termos anteriores, encontramos o termo geral da sequência de Jacobsthal.

Chegamos, de fato, na generalização da Sequência de Jacobsthal que consiste em abrir um leque para novas representações de números, lembrando que fizemos exemplos de outras generalizações, mas mantendo o foco para a relação com as Matrizes, no caso, a generalização que substitui o número 2 por s na fórmula do termo geral.

Com tudo isso, mostramos como as matrizes, chamadas Matrizes de Jacobsthal, se relacionam com os Números de Jacobsthal.

Por último, adotamos a proposta pedagógica da Sequência de Jacobsthal, por onde mostramos todas as etapas e as possíveis possibilidades de se trabalhar com matrizes, onde apresentamos alguns exemplos, como foi o caso da multiplicação de matrizes e o cálculo da inversa de uma Matriz quadrada, invertível, que chamamos de F_s.

Referências

[1] ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a s-sequência generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-sequência generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática-UNIÓN*, v. 24, n. 51, p. 83–106, 2017.

[2] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 2020-04-26.

[3] AQUINO, A. M. F. Uma abordagem sobre a sequência de Padovan e o ensino de proporções. *Dissertação de Mestrado-Universidade Federal do Cariri*, v. 59, n. 2, p. 1–59, 2019.

[4] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 13. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[5] LIMA, E. L. *Curso de análise*. 1. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015.

[6] IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[7] CRAVEIRO, I. M. Extensões e interpretações combinatórias para os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal. *Tese de Doutorado-UNICAMP*, v. 117, n. 1, p. 69–72, 2004.

[8] VINAGRE, F. Quase-cristais e números metálicos. *Escola Secundária da Azambuja*, n. 25, p. 2–2.

[9] MARTÍNEZ, L. J.; SALAS, A. H. Convergence of quotients of consecutive terms of a generalized secondary Fibonacci sequence. *International Mathematical Forum*, v. 6, n. 25, p. 1955–1964.

[10] ATANASSOV, K. T. Short remarks on Jacobsthal numbers. *Department of Bioinformatics and Mathematical Modelling*, v. 18, n. 2, p. 63–64, 2012.

[11] ATANASSOV, K. T. Remark on Jacobsthal numbers. part 2. *Department of Bioinformatics and Mathematical Modelling*, v. 2, n. 17, p. 37–39, 2011.

[12] CERIN, Z. Sums of squares and products of Jacobsthal numbers. *Department of Mathematics-University of Zagreb*, v. 10, n. 2, p. 1–15, 2007.

[13] UYGUN, S. The (s,t)- Jacobsthal and (s,t)- Jacobsthal lucas sequences. *Department of Mathematics, Science and Art Faculty Gaziantep University, Campus, 27310, Gaziantep, Turkey*, v. 9, n. 70, p. 3467 – 3476, 2015.

[14] MATOUŠEK, J. *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*. American Mathematical Society, 2010. (Student mathematical library). ISBN 9781470416362. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XeZqswEACAAJ>.

[15] MAXIMA. *Maxima, um sistema de álgebra computacional. Versão 5.43.2*. http://maxima.sourceforge.net/: [s.n.], 2020. Disponível em: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html>. Acesso em: 01-07-2020.

[16] ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.