Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

MARGARETH CARDOSO DOMINGUES

SOBRE OS CONCEITOS DE FUNÇÃO E FINITUDE

Orientadora: Cecília de Souza Fernandez

**NITERÓI
ABRIL/2020**

MARGARETH CARDOSO DOMINGUES

SOBRE OS CONCEITOS DE FUNÇÃO E FINITUDE

Dissertação apresentada por **Margareth Cardoso Domingues** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Cecília de Souza Fernandez

Niterói - RJ

Abril / 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D671s Domingues, Margareth Cardoso
Sobre o conceito de funções e finitude / Margareth Cardoso Domingues ; Cecília de Souza Fernandez, orientador. Niterói, 2020.
91 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.00205663796

1. Função: definição, exemplos; função injetora, sobrejetora, bijetora; composição de funções e função inversa. 2. Conjuntos finitos, infinitos e ilimitados. Análise de livros didáticos sobre o tema e sugestão aos professores do Ensino Médio. 3. Conjuntos infinitos enumeráveis e conjuntos infinitos não-enumeráveis. 4. Pesquisa objetivando compreender a visão de alunos, professores de Matemática e pessoas de profissões diversas sobre os conceitos de conjunto finito, infinito, limitado e ilimitado. 5. Produção intelectual. I. Fernandez, Cecília de Souza, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

MARGARETH CARDOSO DOMINGUES

SOBRE OS CONCEITOS DE FUNÇÃO E FINITUDE

Dissertação apresentada por **Margareth Cardoso Domingues** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 15/04/2020

Banca Examinadora

Cecília de Souza Fernandez

Prof. Cecília de Souza Fernandez - Orientadora

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Dirce Uesu Pesco - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Humberto José Bortolossi

Prof. Humberto José Bortolossi - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Raphael Antunes dos Santos

Prof. Raphael Antunes dos Santos - Membro

Doutor – Universidade Federal do Rio de Janeiro/Macaé

NITERÓI

2020

Ao meu esposo Nilton e filho Yuri, minha mãe e toda minha família pela compreensão nas ausências ...

À minha mestre orientadora Cecília.

A todos que participaram da pesquisa e que sempre torceram por mim.

AGRADECIMENTOS

À professora Dirce Uesu Pesco, Coordenadora do Programa de Mestrado em Matemática.

À professora orientadora Cecília de Souza Fernandez.

Aos demais Professores do Programa de Mestrado em Matemática: Abramo Hefez, Humberto José Bortolossi, Lhaylla dos Santos Crissaff, Mario Olivero Marques da Silva, Miriam Del Milagro Abdón, Mitchael Alfonso Plaza Martelo, Sebastião Marcos Antunes Firmo, Wanderley Moura Rezende.

A todos os meus amigos de turma, em especial a Bianca do Rego Silva, Felipe Ribeiro Gomes, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho, Renata de Assumção Monteiro Domingo e Rozinaldo Ferreira da Silva.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”.

“This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001”.

"Para Tales, a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos o que sabemos."

Tradução própria. Revista Mathematical Intelligencer, vol. 6, nº 3, 1984. (Frase atribuída a Aristóteles, ≅350 a.C.), filósofo grego; a frase resume bem os objetivos do matemático.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Mat. Aplic. – Matemática Aplicada

Lóg. Fund. –Lógica e Fundamentos

Teoria Nºs – Teoria dos Números

Convex. – Convexidade

Geom. – Geometria

Mat. Gerais – Matemáticas Gerais

EF2 – Ensino Fundamental Anos Finais

EM – Ensino Médio

q. – questão

inf X – Ínfimo de X

sup X – Supremo de X

RESUMO

O conceito de função é um conceito básico em Matemática. Ele se faz presente em diversos cursos de graduação. Desde Matemática ou Engenharia e Biologia ou Medicina, estuda-se funções. Por exemplo, funções reais de uma variável real são estudadas no Cálculo e funções de distribuição de uma variável aleatória são estudadas em Bioestatística. Contudo, o conceito de função está associado a um conceito que para muitos é intuitivo: o conceito de finitude. O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito de função e os conceitos de conjunto finito e infinito. Também vamos apresentar o resultado de uma pesquisa realizada com alunos e professores da Escola Básica, que nos permitirá constatar que o conceito de finitude nos é bastante intuitivo mas de difícil formalização mesmo para professores de Matemática.
Palavras-chave: Função, Conjunto Finito, Conjunto Infinito, Escola Básica.

ABSTRACT

The definition of function is basic in Mathematics. It is present in several undergraduate courses, since Mathematics or Engineering and Biology or Medicine, functions are studied. For example, real functions of a real variable are studied in Calculus and distribution functions of a random variable are studied in Biostatistics. However, the definition of function is associated with a concept that for many is intuitive: the concept of finiteness. The aim of this work is to present the notion of function and the definition of finite and infinite sets. We will also present the results of a survey conducted with students and teachers of the Basic School, which will allow us to see that the concept of finiteness is quite intuitive to us, but difficult to formalize even for Math teachers.

Keywords: Function, Finite Set, Infinite Set, Basic School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Todos nós temos um conceito intuitivo de função. Costumamos dizer que o preço do combustível é dado em função da cotação internacional do petróleo; ainda dizemos que o índice de glicose de um paciente é dado em função do nível de açúcar ingerido. Quando assistimos ou lemos um jornal, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação, comparação de duas grandezas, ou até mesmo uma função, mas representada graficamente. Em muitas outras situações do nosso cotidiano nos deparamos com situações que envolvem relações e funções, mesmo não conhecendo o conceito formal.

Na Matemática, o conceito de função está presente em Álgebra Linear (nas transformações lineares, associando vetores entre dois espaços vetoriais), em Cálculo (nas funções contínuas, deriváveis ou integráveis), em Probabilidade (nas funções de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória), em Trigonometria (nas funções trigonométricas), em Geometria (com as transformações geométricas), entre outras áreas da Matemática.

Neste trabalho, vamos usar o conceito de função para definir conjunto finito, conjunto infinito, conjunto enumerável e conjunto não enumerável. Muitos alunos, e até muitos professores, têm uma visão bastante básica sobre estes conjuntos.

O infinito intriga a muitos. De fato, muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo do infinito. Zenão de Eleia (cerca de 490 a.C. – 430 a.C.), Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), Eudoxo (390 a.C. – 337 a.C.), Arquimedes (288 a.C. – 212 a.C.), Galileu (1564-1642), Torricelli (1608- 1647), Lagrange (1736 – 1813), Cantor (1845 – 1918), Hilbert (1862 – 1943), dentre outros [EVES, Howard. Introdução à história da matemática: Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004]. Da minha prática em sala de aula, observo que muitos alunos têm dificuldade em entender o conjunto infinito. Em geral, eles confundem conjunto infinito com conjunto ilimitado. E muitos professores do Ensino Fundamental não conseguem formalizar o conceito de conjunto infinito.

Uma parte desse trabalho é uma pesquisa, em forma de questionário, feita com setenta alunos da Escola Estadual Edmundo Silva, que estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio, lotados nas turmas 3003 e 3004, no turno da manhã e vinte professores da Escola Básica lotados em diversas unidades escolares dos municípios de Araruama, Macaé e Rio Bonito. Também cinquenta pessoas de profissões diversas destes mesmos municípios.

No capítulo 1, apresentaremos o conceito de função e alguns exemplos. Também abordaremos os conceitos de função sobrejetora, injetora e bijetora, assim como a noção de composta de funções e de função inversa.

No capítulo 2 trataremos de conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Neste capítulo teremos um ponto importante que é uma avaliação de diversos livros didáticos no tratamento destes conjuntos e sugestão de atividades aos professores.

No capítulo 3 trataremos dos conjuntos infinitos enumeráveis e conjuntos infinitos não enumeráveis.

O capítulo 4 explicaremos os resultados da pesquisa e apresentaremos alguns gráficos. Além disso, apresentaremos também os resultados da análise das respostas dadas nos questionários.

1. FUNÇÃO

1.1. Definições e exemplos

Para introduzir o conceito de função para meus alunos do Ensino Médio (que geralmente já viram o conceito no nono ano do Ensino Fundamental II), peço para eles formarem dois conjuntos: o conjunto dos meninos da turma e o conjunto das meninas da turma. Depois digo que cada menino deve escolher uma única menina para formar o par. Vamos escrevendo no quadro os pares formados. Se o número de meninos for menor do que o número de meninas, então algumas meninas ficarão sem par. E se o número de meninos for maior do que o número de meninas, então haverá menina que formará par com mais de um menino. Dessa forma, os alunos costumam entender melhor a diferença entre relação e função.

A ideia de função está presente no cotidiano e é inegável sua importância nas áreas da Física, Química, Ciências Contábeis, Economia, Ciência da Computação entre outras.

A partir daí, começo a formalização do conceito de função. Primeiro, relembro os conceitos de produto cartesiano e de relação. Segundo, observo que no exemplo da formação de pares foi importante definir dois conjuntos. Com este mesmo exemplo, observamos que algumas relações possuem uma propriedade especial: cada elemento de um dado conjunto se relaciona com um único elemento noutro conjunto. Isto não ocorre sempre. Isto nos conduz a definição de função, que daremos a seguir.

Suponha X e Y conjuntos. Uma função $f\colon X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra ou correspondência que associa a cada elemento $x \in X$ exatamente um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$.

Denotamos por $D(f)$ o domínio de f, denotamos por $CD(f)$ o contradomínio de f e por $Im(f)$ a imagem de f.

Para que uma relação f: X → Y seja uma função, esta deve satisfazer a duas condições:

(I) estar definida em todo elemento do domínio;

(II) a cada elemento do domínio, não associar mais de um elemento do contradomínio.

Como uma função é uma relação, podemos representá-la por um diagrama de flechas ou por um gráfico cartesiano:

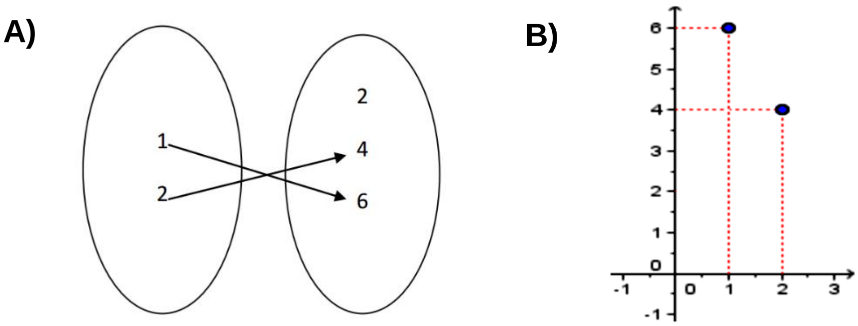


Figura 1: Representações de uma função: **A)** Diagrama de flechas; **B)** Gráfico cartesiano

Neste exemplo temos:

Domínio: D(f) = {1, 2}

Contradomínio: CD(f) = {2, 4, 6}

Imagem: Im(f) = {4, 6}

Na figura abaixo, temos os gráficos de duas relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que não representam uma função do tipo f(x) = y.

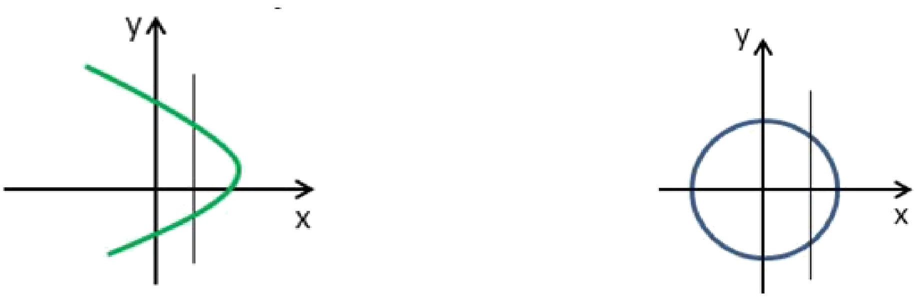


Figura 2: Exemplos de gráficos que não representam uma função do tipo f(x) = y

Já na figura abaixo, temos o gráfico que representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ do tipo $f(x) = y$.

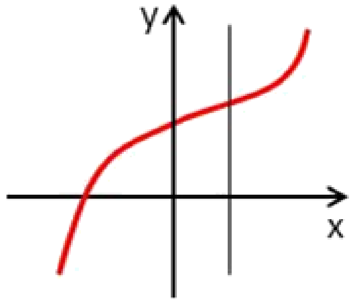


Figura 3: Exemplo de gráfico que representa uma função do tipo $f(x) = y$.

Considere a função que leva cada número real x ao seu quadrado. Podemos escrever:

$f(x) = x^2$ ou $x \rightarrow x^2$ ou $y = x^2$.

Na primeira notação, x é dito a variável, e a letra f denota a função. Na segunda notação, a seta $\rightarrow$ é lida "vai em". Na última notação, x é dita a variável independente e y a variável dependente, já que o valor de y depende do de x.

Neste exemplo temos:

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$; Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$; Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Esta função é representada pelo gráfico abaixo. O gráfico que representa uma função quadrática é uma parábola.

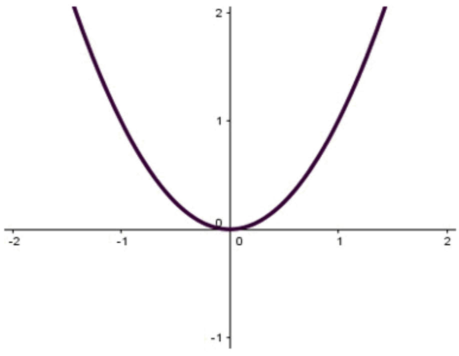


Figura 4: Gráfico que representa uma função quadrática

Devemos observar para os alunos que uma função é definida por três elementos: domínio, contradomínio e a forma como os elementos do domínio e do contradomínio se relacionam; esta forma é chamada por alguns autores de lei de correspondência. Por exemplo, as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, e $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, com $g(x) = x^2$ são diferentes. Nos livros didáticos, costuma-se dar muita ênfase nas expressões algébricas na apresentação do conceito de função. Claramente, não se deve adotar uma abordagem muito abstrata na Escola Básica, porém, no caso do conceito de função, limitar-se a apresentação do mesmo por uma fórmula algébrica pode prejudicar enormemente a aprendizagem deste conceito tão importante da Matemática. De fato, nem tudo que pode ser expresso por uma equação ou expressão algébrica é uma função. Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ que definem a circunferência de raio 1 e centro na origem são expressos pela fórmula $x^2 + y^2 = 1$, que não representa uma função. Para cada x diferente de 1 ou –1 do domínio [–1, 1] existe mais de uma imagem y que forma par com aquele valor particular de x, contrariando a definição de função. Se restringirmos $y \geq 0$ (contradomínio sendo os reais não negativos), então teremos y em função de x. Isto mostra a importância do contradomínio na definição de uma função. Por outro lado, nem toda função pode ser definida expressão algébrica. Como exemplo, considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde para x em $\mathbb{R}$ tem-se $h(x) = 3$ se $x > 2$ e $h(x) = 1$ se $x \leq 2$. A função h não está definida por uma expressão algébrica, porém está definida em todo o seu domínio e a cada elemento do domínio não associa mais de um elemento do contradomínio. Temos que:

Domínio: $D(h) = \mathbb{R}$, Contradomínio: $CD(h) = \mathbb{R}$ e Imagem: $Im(h) = \{1, 3\}$.

O gráfico que representa esta função é:

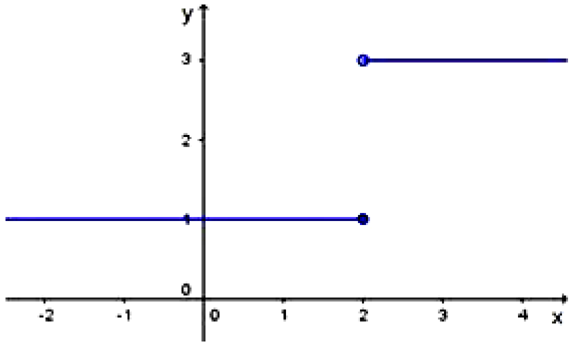


Figura 5: Gráfico que representa a função h (x)

A próxima seção vai tratar das noções de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, que serão necessárias para formalizarmos o conceito de conjuntos finitos e conjuntos infinitos.

1.2. Tipos de funções

1.2.1. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Tomemos dois conjuntos X e Y, onde X é um conjunto de crianças e Y é o conjunto formado pelas mães dessas crianças. Seja f a função que associa cada criança x do conjunto X a sua mãe f(x) do conjunto Y; se no conjunto X não houver nenhum par de irmãos, então temos que para a e b crianças diferentes do conjunto X, as suas mães f(a) e f(b) são diferentes. Este é um exemplo de uma função injetora, propriedade que definiremos a seguir.

Função **injetora** (ou função **injetiva**, ou uma **injeção**) é aquela na qual dois elementos diferentes no domínio correspondem sempre a elementos diferentes no contradomínio. Na demonstração do Teorema, na página 26, usaremos a contra positiva desta definição. De maneira equivalente, dizemos que, f é injetiva quando dados a, b em D(f), se f(a) = f(b), então a = b.

Sejam X e Y dois conjuntos onde X é um conjunto de mães e Y é o conjunto formado pelos primogênitos das mulheres em Y. Seja g a função que leva cada mãe a seu filho. Note que para todo y em Y, existe x em X tal que g(x) = y. Nesse caso, a função g é dita sobrejetora[1].

Função **sobrejetora** (ou função **sobrejetiva** ou uma **sobrejeção**) é aquela na qual o contradomínio é igual à imagem, ou seja, cada elemento do contradomínio é correspondido por ao menos um do domínio.

Agora se não houver irmãos em X e o conjunto Y for formado de mães, então existe uma correspondência perfeita entre crianças e suas mães. A função f é dita ser **bijetora.**

---

[1] Note que g também é injetora!

Função **bijetora** (ou função **bijetiva** ou uma **bijeção**) é aquela que é injetora e sobrejetora.

Em outras palavras, uma função $f: X \to Y$ é dita

- **injetora** quando para quaisquer x_1 e x_2 em X, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- **sobrejetora** quando para todo y em Y, existe x em X tal que $f(x) = y$;
- **bijetora** quando é injetora e sobrejetora.

Vamos considerar as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ para x em $\mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ com $g(x) = x^2$ para x em $\mathbb{R}$ e $h: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ para x em $[0, +\infty)$ com $h(x) = x^2$. Temos que f não é injetora e não é sobrejetora. A função g não é injetora, mas é sobrejetora. E a função h é bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.

Associado ao conceito de função bijetora, temos o conceito de função inversa. Antes, porém, precisamos conhecer o que é a composição de funções. É sobre composta de funções e o conceito de função inversa que trata a próxima seção.

1.2.2. Composição de funções e função inversa

Exemplo. *Laboratório de provas*

Um laboratório de provas submeteu um determinado carro a um teste de consumo relacionado com o custo do combustível. Os resultados foram tabulados da seguinte forma:

Tabela 1: Relação percurso X consumo do exemplo Laboratório de provas

Percurso (km)	Consumo (L)
10	1
20	2
30	3
40	4

A lei que define o consumo em função do percurso é: $f(x) = \frac{1}{10}x$.

Tabela 2: Relação consumo X custo do exemplo Laboratório de provas

Consumo (l)	Custo (R$)
1	12,00
2	24,00
3	36,00
4	48,00

A lei que define o custo em função do consumo é: $g(x) = 12x$.

Observe agora a próxima tabela:

Tabela 3: Relação percurso X custo do exemplo Laboratório de provas

Percurso (km)	Custo (R$)
10	12,00
20	24,00
30	36,00
40	48,00

A partir das funções obtidas pelas tabelas 1 e 2, temos a relação percurso e custo, que chamaremos de **função composta**.

Observe os valores da tabela 3 e note ainda que a lei que define esta função é: $h(x) = 1{,}2x$.

A função $h(x) = 1{,}2x$ foi obtida fazendo-se a composição entre as funções $f(x)$ e $g(x)$, isto é, aplicando a função f a x e depois aplicando a função g a $f(x)$.

Ou seja:

$$h(x) = (gof)(x) = g[f(x)] = 12[f(x)] = 12[\frac{1}{10}x] = 1{,}2x.$$

Em diagramas:

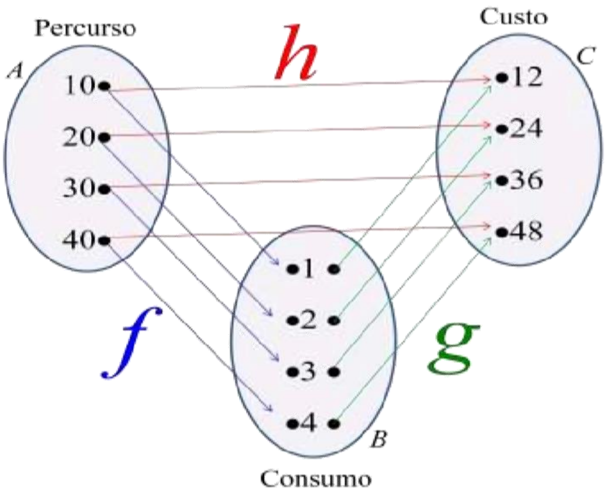


Figura 6: Diagrama da função composta $h(\mathrm{x}) = (gof)(\mathrm{x})$

$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{10}\mathrm{x}$ $\qquad g(\mathrm{x}) = 12\mathrm{x}$ $\qquad h(\mathrm{x}) = 1{,}2\mathrm{x}$

Observemos que $CD(f) = D(g)$. Estas ideias nos permitem definir a composição de duas funções.

Tomemos duas funções $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ e $g\colon \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$, sendo $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$. A função denotada por gof, com domínio em X e contradomínio em W, em que cada elemento $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ faz corresponder o elemento $\mathrm{y} = gof(\mathrm{x}) = g(f(\mathrm{x})) \in \mathrm{W}$ é dita a **função composta** de g com f.

Em símbolos:

$gof\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y} \subset \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$

$\mathrm{x} \mapsto f(\mathrm{x}) \mapsto g(f(\mathrm{x}))$

Denote por Id_Z a função identidade do conjunto Z, ou seja, $Id_Z\colon \mathrm{x} \in \mathrm{Z} \to \mathrm{x} \in \mathrm{Z}$. dizemos que uma função $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é **invertível** se existe uma função $g\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tal que $fog = Id_Y$ e $gof = Id_X$.

A função g é dita **função inversa** de f e é denotada por $g = f^{-1}$.

Dado o gráfico que representa uma função f : X → Y, temos que cada x ∈ X está associado a um valor f(x) ∈ Y, ou seja, o gráfico que representa a função f é o conjunto formado pelos pares da forma (x, f(x)). Denominamos relação inversa de f a relação g: Y → X formada por todos os pares da forma (y, x), onde x ∈ X, y ∈ Y e y = f(x). Em outras palavras, os pares ordenados da relação inversa de f são obtidos invertendo-se as coordenadas de cada um dos pares da função f.

g é a relação inversa de f

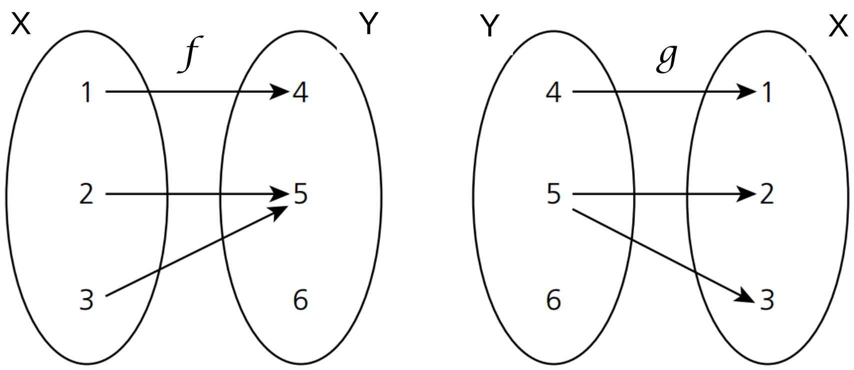


Figura 7: Diagrama de flecha da relação f : X → Y e de sua inversa g : Y → X

Seja f: X → Y uma função. Considere f^{-1} : Y → X sua relação inversa.

Das definições de função sobrejetiva e função injetiva e da definição de relação inversa, podemos verificar que:

(i) f é sobrejetiva ⇔ f^{-1} está definida em todo elemento do domínio Y.

(ii) f é injetiva ⇔ f^{-1} não associa, a cada elemento do domínio Y, mais de um elemento do contradomínio X.

No exemplo a seguir, f é invertível, pois sua relação inversa g é uma função.

f é invertível $\Leftrightarrow$ f é bijetora

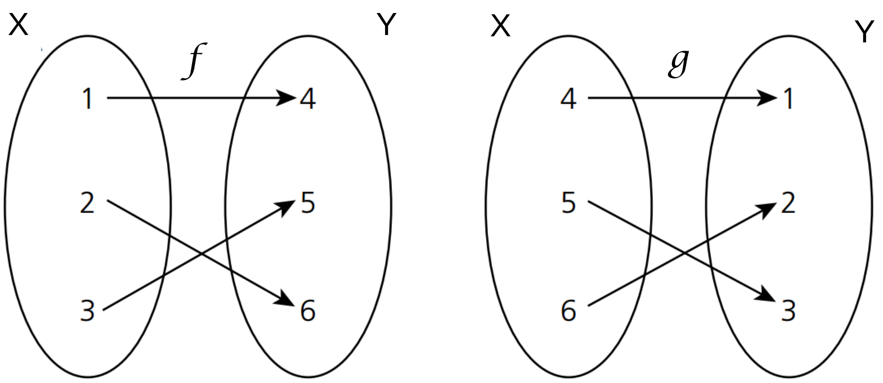


Figura 8: Diagrama de flecha da função $f : X \rightarrow Y$ e de sua inversa $g : Y \rightarrow X$

Teorema 1: Uma função $f : X \rightarrow Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

($\Rightarrow$) Por hipótese, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que (a) $fog = Id_Y$ e $gof = Id_X$. Supomos um $y \in Y$ qualquer. Seja $x = g(y)$. Da condição (i) acima, segue que $f(x) = f(g(y)) = fog(y) = Id_Y(y) = y$. Logo, f é sobrejetiva. Supomos $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $gof(x_1) = gof(x_2)$. Da condição (ii), segue que $Id(x_1) = Id(x_2)$, logo $x_1 = f(x_2$. Logo, f é injetiva.

($\Leftarrow$) Por hipótese, f é bijetiva. Desejamos construir uma função g*:* $Y \rightarrow X$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição de função invertível. Dado $y \in Y$ qualquer, como f é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e, como f é injetiva, o único elemento com esta propriedade é x. Desta forma definimos $g(y)$ como único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, as duas condições desejadas decorrem diretamente da construção de g.

Teorema 2. *Sejam X*, *Y*, *Z conjuntos,* $f : X \rightarrow Y$ *e* $g : Y \rightarrow Z$ *funções.*

(*a*) *Se* f *e* g *forem injetivas, então a composta* gof *é injetiva.*

(*b*) *Se* f *e* g *forem sobrejetivas, então a composta* gof *é sobrejetiva.*

(*c*) *Se* f *e* g *forem bijetivas, então a composta* gof *é bijetiva.*

Prova. Suponha que f e g sejam injetivas. Sejam x, y $\in$ S e x $\neq$ y. Como f e g são injetivas, temos f(x) $\neq$ f(y), como g é injetiva, temos g(f(x)) $\neq$ g(f(y)), o que mostra que $g \to f$ é injetiva.

Suponha que f e g sejam sobrejetivas. Dado arbitrariamente y $\in$ U, mostraremos que existe x em S, tal que f(g(x)) = y. De fato, como g é sobrejetiva, dado y $\in$ U, existe z $\in$ T, tal que g(z) = y. Como f é sobrejetiva, existe x $\in$ S, tal que f(x) = z.

Então, g(f(x)) = g(z) = y, portanto, gof é sobrejetiva.

O item (c) segue de (a) e (b). ■

Em geral para determinarmos a lei de formação da função inversa de uma função f, podemos proceder da seguinte forma:

1º passo: na lei y = f(x), devemos substituir x por y e y por x.

2º passo: a partir da relação obtida, escrever y em função de x, encontrando, então, a lei de formação de f^{-1}.

Exemplo 1:

Seja $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ definida por y = f(x) = $\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Vamos encontrar a lei de f^{-1}.

Substituindo x por y e y por x na lei de formação de f, temos:

$$x = \frac{2y+3}{y-1}.$$

A partir desta relação, devemos escrever y em função de x:

$$x\cdot(y-1) = 2y+3$$

$$xy - x = 2y + 3$$

$$xy - 2y = x + 3$$

$$y\cdot(x-2) = x+3$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}.$$

Exemplo 2:

Tomemos f: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ e g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Temos $f(g(y)) = y$ para todo $y \geq 0$ porém $g(f(x)) = x$ quando $x \geq 0$. Se $x \in \mathbb{R}_-^* \to g(f(x)) = -x$, concluindo que g não é a inversa de f. Considerando a restrição de f a $[0, +\infty)$, ou seja $\mathcal{F}$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, e $\mathcal{F}(x) = x^2$, temos que $\mathcal{F}$ é uma correspondência biunívoca, e sua inversa é a função $\mathcal{G}$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $\mathcal{G}(y) = \sqrt{y}$, pois

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{G}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

e

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(y)) = \mathcal{F}(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

para quaisquer $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

2. CONJUNTOS FINITOS, INFINITOS E LIMITADOS

2.1. Conjuntos finitos

Tomemos um número $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais, e vamos indicar com a notação I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n. Assim sendo, teremos $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ e, generalizando, um número natural k pertence a I_n se, e somente se, $1 \leq k \leq n$.

Vamos supor X um conjunto. Dizemos que X é finito quando X é vazio ou quando se pode estabelecer uma bijeção $f\colon I_n \to X$. No caso do conjunto vazio, dizemos que ele tem 0 elementos. No outro caso, dizemos que X tem uma quantidade n de elementos. O número n é chamado de cardinalidade do conjunto X ou o número de elementos de X. A correspondência $f\colon I_n \to X$ chama-se contagem dos elementos de X. Se colocarmos $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$, podemos escrever, pela enumeração dos seus elementos, o conjunto $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n\}$. Para todo n, o conjunto I_n é finito e seu número cardinal é n. Assim, todo número natural n é o número cardinal de algum conjunto finito. Observe-se que zero é o número cardinal do conjunto vazio.

Quando X é um conjunto que não é vazio e que independente de qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe correspondência biunívoca $f\colon I_n \to X$, dizemos que esse conjunto X é infinito.

Observemos os dois conjuntos a seguir: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Definiremos uma função $f\colon X \to Y$ pela regra $f(n) = 2n$, e temos uma correspondência biunívoca, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$ e $f(5) = 10$.

Temos que $X = I_5$ e $f\colon X \to Y$ é uma contagem dos elementos de Y. Assim, Y é um conjunto finito, com 5 elementos. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. Com efeito, dada qualquer função $f\colon I_n \to \mathbb{N}$, não importa qual n se fixou, pomos $k = f(1) + f(2) + ... + f(n)$ e vemos que, para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, é impossível cumprir a condição de que não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y, da definição de correspondência biunívoca. Na verdade vemos aqui a impossibilidade de f ser sobrejetora, pois k não pertence ao conjunto imagem de f. Logo, não existe bijeção entre I_n e $\mathbb{N}$, seja qual for o natural n.

Vamos apresentar algumas propriedades de n(X) que representa o número cardinal de um conjunto finito X:

I. *O número de elementos de um conjunto finito é o mesmo, seja qual for a contagem que se adote*. Isto significa que se $f: I_m \to X$ e $g: I_n \to X$ são correspondências biunívocas então m = n.

II. *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e* $n(Y) \le n(X)$*. Tem-se* $n(Y) = n(X)$ *somente quando* $Y = X$*.*

III. *Se X e Y são finitos então* $X \cup Y$ *é finito e tem-se que* $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$*.;*

IV. Sejam X, Y conjuntos finitos. Se $n(X) > n(Y)$*, nenhuma função* $f: X \to Y$ *é injetiva e nenhuma função* $g: Y \to X$ *é sobrejetiva.*

Podemos utilizar o princípio da indução ou da boa-ordenação para as demonstrações destes fatos. A primeira do item IV acima é conhecida como *princípio das casas de pombos*: se há mais pombos do que casas num pombal, qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles na mesma casa. Às vezes, o mesmo fato é chamado *princípio das gavetas:* se $m > n$, qualquer maneira de distribuir *m objetos* em *n gavetas* deverá pôr ao menos dois desses objetos na mesma gaveta.

Vejamos duas aplicações do princípio das casas de pombos:

Exemplo 1: Tomemos um número natural de 1 a 9. Para fixar as ideias, seja 3 esse número. Vamos provar que todo número natural m possui um múltiplo cuja representação decimal contém apenas os algarismos 3 ou 0. Para isso, consideremos o conjunto X = {3, 33, ..., 33...3}, cujos elementos são os m primeiros números naturais representados somente por algarismos iguais a 3. Se algum dos elementos de X for múltiplo de m, nosso trabalho acabou. Caso contrário, formamos o conjunto Y = {1, 2, ..., m – 1} e definimos a função $f: X \to Y$ pondo, para cada $x \in X$, $f(x)$ = resto da divisão de x por m.

Como X tem mais elementos do que Y, o princípio das casas de pombos assegura que existem elementos $x_1 < x_2$ no conjunto X tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isto significa que x_1 e x_2, quando divididos por m deixam o mesmo resto. Logo $x_2 - x_1$ é múltiplo de m. Mas é claro que se x_1 tem p algarismo e x_2 tem p + q algarismos então a representação decimal de $x_2 - x_1$ consiste em q algarismos iguais a 3 seguidos de p algarismos iguais a 0.

Exemplo 2: Vamos usar o princípio das gavetas para provar que, numa reunião com n pessoas ($n \geq 2$), há sempre duas pessoas (pelo menos) que têm o mesmo número de amigos naquele grupo. Para ver isto, imaginemos n caixas, numeradas com 0, 1, ..., n – 1. A cada uma das n pessoas entregamos um cartão e pedimos para depositar na caixa correspondente ao número de amigos que ela tem naquele grupo. As caixas de números 0 e n – 1 não podem ambas receber cartões pois se houver alguém que não tem amigos ali, nenhum dos presentes pode ser amigo de todos, e vice-versa. Portanto temos, na realidade, n cartões para serem depositados em n – 1 caixas. Pelo princípio das gavetas, pelo menos uma das caixas vai receber dois ou mais cartões. Isto significa que duas ou mais pessoas ali têm o mesmo número de amigos entre os presentes. [Morgado, et al. Matemática Discreta – Coleção Profmat – Sociedade Brasileira de Matemática. Cap. 2, Exemplo 12, Pág. 9]

2.2. Conjuntos infinitos

> *"O infinito! Nenhuma outra questão tem tocado tão profundamente o espírito humano."*
> David Hilbert

A noção de contagem de conjuntos é essencial para a Matemática e relativamente simples quando os conjuntos são finitos. A cardinalidade de um conjunto, nesse caso, é apenas o número de elementos distintos que o compõem. Entretanto, a comparação entre conjuntos infinitos, como o conjunto dos números naturais, ou o conjunto dos números reais, é uma tarefa complexa. A primeira ideia que vem à mente é a de que os conjuntos infinitos deveriam ter a mesma cardinalidade, ou total de elementos. Pensar na existência de conjuntos infinitos maiores que outros parece insano. A concepção de infinito é uma abstração do homem. Em nossa realidade não se vê o infinito. Logo, o homem, ao construir o conceito de infinito, ao imaginar que um subconjunto pode ter o mesmo número de elementos do conjunto do qual ele faz parte, permite-se que os fatos escapem do senso comum. Existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades. Não pode haver uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e nenhum conjunto X pode estar em correspondência biunívoca com o conjunto P(x) cujos elementos são os subconjuntos de X. A reta, o plano e o espaço tridimensional têm o mesmo número cardinal. Em meados do século dezenove, estes fatos, que atualmente são considerados corriqueiros entre os matemáticos, causaram forte impacto (Revista Superinteressante, edição de março de 1994). Observemos a função $f\colon X \to X$ de um conjunto em si mesmo. Quando X é finito, f é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. Mas isto não é verdadeiro para X infinito. Se definirmos a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ = número de fatores primos distintos que ocorrem na decomposição de n, veremos que f é sobrejetiva, mas não é injetiva. Além disso, as funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definidas por

$$f(n) = n + 3$$

$$g(n) = n + 22$$

$$h(n) = 3n \text{ e}$$

$$t(n) = 4n$$

são injetivas mas não são sobrejetivas.

Definição 2. *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que eles têm a mesma cardinalidade se existir uma bijeção entre eles.*

Veremos no Capítulo 3 que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, têm a mesma cardinalidade.

Alguns exemplos de conjuntos infinitos:

Exemplo 1. O conjunto dos números primos é infinito. De fato, suponhamos que exista um número finito n de números primos; digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considere o número $x = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, ou seja, x é o produto dos n primos somado com 1. Esse número pode ser primo ou não. Se for, então encontramos um número primo diferente dos *n* números primos inicialmente apresentados. Se não for, então pelo Teorema Fundamental da Aritmética, é divisível por algum p_i, $1 \leq i \leq n$. Mas p_i não divide x pois a divisão deixa resto 1. Logo, x seria divisível por um número primo diferente dos n números primos inicialmente dados. Como n foi tomado de modo arbitrário, provamos que o conjunto dos números primos é infinito.

Exemplo 2. Seja $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais pares, $\{2k: k \in \mathbb{N}\}$. Considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{E}$ definida por $f(n) = 2n$, onde n está em $\mathbb{N}$. A função f é uma bijeção do conjunto dos naturais no conjunto dos números pares. Portanto, a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é a mesma que $\mathbb{E}$.

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é chamada de Aleph-zero e denotada por $\aleph_0$. Na teoria dos conjuntos os números Aleph, representados pela letra hebraica $\aleph$, são usados para representar os cardinais de conjuntos infinitos. Foi o matemático russo Georg Cantor (1845-1918) que provou que existem infinitos maiores do que outros. Foi ele quem provou que o conjunto dos números irracionais não é enumerável, descobrindo, portanto, um infinito maior que o infinito dos números naturais. A noção de enumerabilidade vai ser apresentada no capítulo 3.

Figura 9: Georg Cantor

Fonte: BELL, Eric Temple. Los Grandes Matemáticos. Por Patrícia Barros. Sítio: <https://issuu.com/abelgalois/docs/grandes_matematicos__et_bell>. Acesso em 03/06/2020.

Exemplo 3. Considere a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(n) = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2} = \begin{cases} k \ \ se\ n\ é\ \ par,\ \ n = 2k \\ -(k+1)\ \ se\ \ n\ \ é\ \ ímpar,\ \ n = 2k+1 \end{cases}$$

A tabela abaixo ilustra a função f.

Tabela 4: Função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por duas sentenças

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
f(n)	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	…

Esta função é uma bijeção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e portanto $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Exemplo 4. Considere a função f: [0, 1] → [0, 2] definida por f(x) = 2x para x em [0,1]. Verifica-se que esta função é uma bijeção do intervalo [0, 1] para o intervalo [0, 2], portanto concluímos que [0, 1] e [0, 2] têm a mesma cardinalidade. Considere dois intervalos [a, b] e [c, d] e escolha f uma função afim cujo gráfico é o segmento que vai do ponto (a, c) ao ponto (b, d), no plano cartesiano, podemos concluir que todos os intervalos fechados [a, b] de números reais têm a mesma cardinalidade.

É possível mostrar que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números reais têm a mesma cardinalidade. A cardinalidade do conjunto dos números reais é denotada por c. Assim,

$$\text{cardinalidade de } P(\mathbb{N}) = c = 2^{\aleph_0}.$$

Um importante teorema de George Cantor afirma que a cardinalidade de um conjunto é sempre menor do que a cardinalidade do conjunto de suas partes. Daí,

$$\text{cardinalidade de } \mathbb{N} < \text{cardinalidade de } P(\mathbb{N}).$$

Temos então a famosa *Hipótese do Contínuo,* que afirma que não existe número cardinal X entre $\aleph_0$ e c. Em outras palavras, a *Hipótese do Contínuo* afirma que não existe conjunto A tal que

$$\aleph_0 < \text{cardinalidade de A} < c.$$

Pode ser demonstrado que os menores números cardinais formam uma sequência infinita de números Aleph*:*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdot \cdot \cdot \cdot .$$

Se assumirmos a *Hipótese do Contínuo* como verdadeira, segue que $c = \aleph_1$, ou seja $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A *Hipótese do Contínuo* é um dos problemas em aberto mais importantes da Teoria dos Conjuntos. Um problema matemático em aberto é uma questão não resolvida, ou seja, uma questão em que a solução não foi encontrada ou não se provou que a questão não tem solução. Apesar dos esforços de Georg Cantor para prová-la, ele não conseguiu e o problema permanece até hoje. Sua importância para a Matemática é tanta que Hilbert o apresentou em sua famosa lista de problemas em aberto que deveriam ser investigados no século XX. Os *Problemas de Hilbert* são uma lista de 23 problemas em Matemática propostos por Hilbert na conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris em 1900. Nenhum dos problemas havia tido solução até então, e vários deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. Nessa conferência, ele publicou 10 dos problemas, sendo o restante da lista publicado mais tarde.

2.3. Conjuntos limitados

Nesta seção, vamos apresentar o conceito de conjuntos limitados no contexto dos números reais.

Definição: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente quando existe algum b em $\mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo x em $\mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que b é uma cota superior de X. Analogamente, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado inferiormente quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo x em $\mathbb{R}$. O número a é dito uma cota inferior de X. Se X for limitado inferiormente e superiormente, X é dito limitado.

X é dito um conjunto ilimitado, quando não for limitado.

O conjunto X= {1, 3, 5, 7, 9} é um conjunto limitado pois, qualquer número real maior ou igual a 9 é uma cota superior de X e qualquer número real menor ou igual a 1 é uma cota inferior de X. Já o conjunto $\mathbb{N}$ é um conjunto ilimitado pois não possui uma cota superior.

Definição: Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Diz-se que um número real x é o supremo de X, e denota-se por sup X, quando x é a menor das cotas superiores de X. Se X for limitado inferiormente, diz-se que um número real x é o ínfimo de X, e denota-se por inf X, quando x é a maior das cotas inferiores de X.

O conjunto X = {1, 3, 5, 7, 9} tem inf X = 1 e sup X = 9. Já o conjunto X = $\{\frac{1}{n}$; n em $\mathbb{N}\}$ tem inf X = 0 e sup X = 1. Pelo último exemplo, pode-se notar que o inf X e o sup X podem não pertencer ao conjunto X.

O seguinte resultado é conhecido como o Axioma do Supremo. Ele pode ser encontrado em LIMA, E.L. Análise Real, Volume 1.

Axioma do Supremo: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.

Sejam a e b números reais com $a \leq b$. Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são os chamados intervalos reais ou, simplesmente, intervalos:

$\{ x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b \}$, denotado por [a, b];

$\{ x \in \mathbb{R}; a < x < b \}$, denotado por (a, b);

$\{ x \in \mathbb{R}; a \leq x < b \}$, denotado por [a, b);

$\{ x \in \mathbb{R}; a < x \leq b \}$, denotado por (a, b];

$\{ x \in \mathbb{R}; x \leq b \}$, denotado por, $(-\infty, b]$;

$\{ x \in \mathbb{R}; x < b \}$, denotado por, $(-\infty, b)$;

$\{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$, denotado por $[a, +\infty)$;

$\{ x \in \mathbb{R}; a < x\}$, denotado por $(a, +\infty)$;

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é o intervalo real $(-\infty, +\infty)$.

Os quatro primeiros intervalos são chamados de intervalos limitados. E os demais intervalos são chamados de ilimitados. Os números reais a e b são chamados de extremos do intervalo; a é chamado de extremo inferior e b é chamado de extremo superior. Todo intervalo limitado é um conjunto limitado, já que os extremos a e b são cotas inferior e superior, respectivamente. Já o intervalo $(-\infty, b)$, por exemplo, é um conjunto ilimitado. Ele é limitado superiormente, mas não é limitado inferiormente.

Podemos observar que um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é limitado quando ele está contido em algum intervalo limitado. De fato, se X é limitado, então existem a e b números reais tais que $a < x < b$ para todo x em X. Logo, X está contido no intervalo limitado (a, b).

A noção de limitação não pode ser confundida com a noção de finitude. De fato, é possível verificar que se X é um subconjunto finito de números reais, então X é um conjunto limitado. Mas, a recíproca é falsa. Para vermos isso, basta tomar o conjunto $X = \{\frac{1}{n}; n \text{ em } \mathbb{N}\}$. Ele é infinito (existe uma bijeção dele com o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$) e é limitado (X está contido no intervalo $(-1, 2)$).

O próximo resultado será utilizado para provarmos a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$.

Teorema dos Intervalos Encaixantes: Para cada n em $\mathbb{N}$, seja $I_n = [a_n , b_n]$, onde os extremos de cada I_n são números reais. Se I_n contém I_{n+1}, para todo n em $\mathbb{N}$, então existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo n em $\mathbb{N}$.

Demonstração: Como I_n contém I_{n+1}, para todo n em $\mathbb{N}$, segue que

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_n \,;\, n \text{ em } \mathbb{N}\}$ é, portanto, limitado superiormente. Pelo Axioma do Supremo, existe c = sup A. Da definição de supremo, temos que $a_n \leq c$ para todo n em $\mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, segue que $c \leq b_n$ para todo n em $\mathbb{N}$. Portanto, $c \in I_n$ para todo n em $\mathbb{N}$.

Como vimos, um conjunto de números reais é limitado quando está contido em algum intervalo real. No caso de estarmos no plano ou no espaço, ou seja em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, observamos que a noção de conjunto limitado de números reais se generaliza quando o conjunto está contido num círculo (caso $\mathbb{R}^2$) ou está contido numa esfera (caso $\mathbb{R}^3$). Para o leitor interessado em ler mais sobre a noção de conjunto limitado, indicamos a seção 1.3 de FERNANDEZ, C.S. e SILVA, L.A.V.

2.4. Comentário: definição de conjuntos finitos e infinitos nos livros didáticos e sugestão para os professores

Nessa seção vamos apresentar um panorama de como as noções de finitude e limitação são apresentadas em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio. De modo geral, podemos afirmar que os autores se valem de uma visão intuitiva para definir conjuntos finitos, conjuntos infinitos e conjuntos limitados.

Vale ressaltar “Todas as obras foram aprovadas na avaliação pedagógica do Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Nessa avaliação, que visa garantir o padrão de qualidade dos materiais distribuídos pelo governo federal às escolas públicas, é verificada a observância das obras inscritas aos critérios listados no Decreto 9.099, de 18 de julho de 2017 e aos previstos no Edital 01/2018 - CGPLI, tais como a adequação à Base Nacional Comum Curricular; a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; a correção e a atualização de conceitos. Para cada edital do PNLD é composta comissão técnica específica e equipe de avaliação (avaliadores; coordenadores-adjuntos; coordenadores-pedagógicos) constituídas por docentes das redes públicas e privadas de ensino superior e da educação básica, inscritos no Banco de Avaliadores do MEC. A comissão orienta, supervisiona e valida os resultados da avaliação que é documentada em pareceres e resenhas.” (https://pnld.nees.com.br/pnld_2020/apresentacao) conforme descrito no anexo A.

2.4.1. Os livros didáticos

2.4.1.1. Apoema: matemática – Ensino Fundamental – Adilson Longen

6º ano – A palavra infinito aparece pela primeira vez nas Orientações aos professores quando trata de múltiplos de um número natural, na p.98. Aparece novamente na p.183 na seção *Conviver* que trata da representação de frações por pontos na reta numérica.

7º ano – A palavra infinito aparece na p.19, nas Orientações aos professores quando trata da não existência do menor número inteiro. Quando o assunto é *Transformações Geométricas*, na p.252 na Orientações aos professores, destaca o exercício que solicita que os alunos tracem os eixos de simetria de um círculo.

8º ano – O capítulo 1 do livro tem como título Os Números Racionais e na p.15 para definir decimal exato e dízima periódica são tratadas as quantidades finitas ou infinitas de casas decimais. Na seção Conviver na p.19 é explorado com os alunos a investigação de dízimas periódicas que envolvem números primos. Mais uma vez a noção de infinito aparece na p.47 quando o assunto é retas, semirretas e segmentos de reta, seguindo durante o capítulo. A circunferência é tratada no capítulo 11 e na p.112, seção *De Olho no Legado*, falando sobre Mandalas, o autor afirma existir “[...] infinitas possibilidades de desenhos de mandalas, que ficam a cargo da imaginação”. O conceito de infinito continua a ser tratado na p. 199 tratando da interpretação geométrica de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas quando são representadas por duas retas em um mesmo plano cartesiano e essas retas são coincidentes por terem infinitos pontos em comum; e segue caracterizando o sistema como possível e indeterminado quando tem infinitas soluções

9º ano – A unidade 1 trata de Números reais e insere novamente a definição de decimal exato e dízimas periódicas de acordo com o número finito ou infinito de casas decimais na p.10; bem como para a representação decimal dos números irracionais nas páginas subsequentes. Na p.15 o conjunto dos números irracionais é caracterizado como infinito. Na p. 19 o número π é definido como irracional e algumas frações são apresentadas com valores aproximados para π.

2.4.1.2. A Conquista da Matemática – Ensino Fundamental – José Ruy Giovanni Júnior ... [et. al.]

6º ano – Na p. 22 na sessão Pense e Responda, questão “1. O que representa a ponta de seta na reta numérica? Quantos números podemos representar na reta numérica?” A resposta esperada do aluno é que a ponta de seta represente que na reta numérica podem ser representados infinitos números.

7º ano – A palavra finito aparece pela primeira vez na p. 132 na questão 1, item “a) Qual sequência apresenta um número finito de elementos?” Na p. 79 lemos: “A **reta**[2] é imaginada sem espessura, não tem começo nem fim, ou seja, é ilimitada nos dois sentidos.” Porém nas orientações didáticas aos professores lemos: “É importante aos alunos [...] compreender as retas como um conjunto infinito de pontos [...]. No capítulo 3 desse mesmo livro, Divisores e Múltiplos de um Número Natural, nas orientações didáticas, deseja-se que os alunos possam perceber que o conjunto de divisores de um número natural é finito e o conjunto de múltiplos de um número natural é infinito. No livro do aluno, p.118 podemos ler: “O zero tem infinitos divisores”. Em outro trecho da mesma página “[...] existem infinitos números primos”. Nas orientações didáticas é dada a informação ao professor sobre a demonstração de Euclides sobre a infinidade dos números primos, e uma curiosidade: a descoberta de um número primo com 17 milhões de dígitos e que se escreve $2^{57885161} - 1$, em fevereiro de 2013.

8º ano – A palavra infinito aparece pela primeira vez na p.58 para relembrar a definição de dízima periódica se referindo a quantidade de casas decimais do número 0,454545... exemplificando-o como número racional e logo em seguida na definição de número irracional. Nas orientações didáticas da p. 82 temos a

---

[2] (grifo do autor)

sugestão de uma atividade que busca a percepção dos alunos quanto a possibilidade de construção de infinitos triângulos não congruentes.

9º ano – Não há registros.

2.4.1.3. Matemática: ciência e aplicações–Ensino Médio – Gelson Iezzi...[et.al.]

1º ano – O infinito aparece na p.18 como uma característica do conjunto dos números naturais. Na p. 23 estamos estudando os decimais exatos como aqueles que tem uma quantidade de casas decimais finitas e segue nas páginas posteriores com a representação geométrica do conjunto dos números racionais; passando então a definição de conjunto dos números irracionais, destacando o número π a partir da p. 27. Quando o assunto é construção de gráficos, na p. 55 temos o uso da palavra finito para definir o domínio e exemplificar essa construção e logo em seguida a construção de um gráfico com domínio infinito. Para se destacar a importância de um número irracional em matemática, é apresentado na p. 138 o número e; que só teve sua importância reconhecida com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal; apresentando em seguida na p. 153 Sistemas de logaritmos. O capítulo 9, dedicado a Progressões, trata na p. 171 de sequência numérica finita e infinita; também estuda a progressão aritmética finita e infinita, bem como a soma dos termos na progressão geométrica infinita na p. 188

2º ano – Na p. 46 a palavra “infinitos” aparece para afirmar a percepção de “que um determinado ponto da circunferência trigonométrica é imagem de infinitos números reais”. Para apresentar o conteúdo de Sistemas lineares, o exercício resolvido da p. 98 tem uma equação que apresenta infinitas soluções; seguindo assim por todo o capítulo 6. Dedicado a Geometria Espacial de Posição, o capítulo 7 trata das Proposições primitivas, p. 128 apresentando os postulados da existência: Numa reta e fora dela existem infinitos pontos; num plano e fora dele existem infinitos pontos. O capítulo segue apresentando postulados e propriedades que necessitam da compreensão de infinito. O capítulo 9, dedicado a Corpos Redondos se encerra na seção Aplicações definindo fractal com duas características essenciais, dentre elas a Complexidade infinita. A p. 257 trata de espaço amostral finito na definição de probabilidade e segue assim durante todo o capítulo 11.

3º ano – A palavra “infinitos” aparece na p. 29 para associar os valores da imagem da equação do tipo $x = k$ com $k \in \mathbb{R}$, contrariando assim a definição de função. Na p. 30 temos a resolução de um sistema com infinitas soluções definindo-o como possível e indeterminado e caracterizando no plano como duas retas que possuem infinitos pontos comuns, isto é, coincidentes. No exemplo 11 da p. 38, é relembrado ao leitor que existem infinitas retas que passam por um determinado ponto, para então formular a questão. Para finalizar, na p. 128 é introduzido o símbolo de somatório e a definição de sua representação como “a soma de um número finito de parcelas [...]”.

2.4.2. CONCLUSÃO

Nestas três coleções apresentadas aqui, não diferem entre si no que tange ao uso e significado de conjuntos finitos ou conjuntos infinitos. Em nenhuma delas houve uma base conceitual adequada. Em todas são definidas como tendo ou não fim. O fato de não ter sido conceituado antes de ser usado causou inúmeras dúvidas aos professores e alunos conforme pudermos comprovar analisando as respostas da pesquisa apresentada no capítulo 4 desse trabalho, que quis saber de alunos, professores e pessoas de profissões diversas o que é conjunto infinito, se cada um poderia apresentar um exemplo de um conjunto infinito, se entende o que seria conjunto limitado, apresentando um exemplo, se saberia responder se todo conjunto limitado é finito e se todo conjunto finito é limitado.

Para compreender a definição de conjunto finito ou infinito, é necessária apreensão do conceito de função e algumas de suas propriedades.

2.4.3. SUGESTÃO PARA OS PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

2.4.3.1. Vídeos

Podemos introduzir a definição de conjuntos finitos e infinitos para alunos do ensino médio passando um vídeo para os alunos partido do paradoxo conhecido como Hotel de Hilbert (apresentado na introdução deste trabalho) que se encontra no sítio *http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117*.

O gerente do Hotel Hilbert, que possui infinitos quartos, tratando o problema de acomodar novos hóspedes quando o hotel já tem infinitos hóspedes. Cada hóspede em um quarto. Observe que o gerente fala que o hotel está lotado, no sentido de que há infinitos hóspedes, mas não no sentido de que não caiba mais hóspedes. Num primeiro momento, ele gera mais uma vaga deslocando cada hóspede de seu quarto atual para o seguinte. Quando um ônibus com infinitos passageiros procura o hotel, o gerente realoca novamente seus hóspedes, mas desta vez cada hospede vai para um quarto cujo número é o dobro do número do seu quarto atual. Agora, todos os quartos de número ímpar estão vagos, portanto o Hotel Hilbert dispõe de infinitas vagas e pode hospedar todos os passageiros do ônibus. Então, um desafio ainda maior se apresenta ao gerente do Hotel Hilbert: acomodar os passageiros de uma excursão com infinitos ônibus cada um com infinitos passageiros. O gerente resolve este problema realocando seus hóspedes - desta vez, um hóspede que esteja no quarto n deverá se mudar para o quarto 2^n. O gerente dispõe de infinitas vagas novamente. Depois, o gerente associa a cada ônibus um número primo diferente de dois. Então, ele acomoda os passageiros segundo a seguinte regra: o passageiro que está na cadeira n do ônibus p ocupará o quarto de número p^n.

Conversando com os alunos, vamos mostrar que é impossível tampar 20 canetas com 15 tampas, estacionar 7 carros em 5 vagas etc. Mostre que, matematicamente, isso significa que não existe função bijetora de um conjunto finito em um subconjunto próprio. O argumento desta demonstração é bastante intuitivo e o exemplo das canetas e tampas dá uma boa noção do porquê desta impossibilidade; porém, caso o professor queira apresentar uma prova formal, ela pode ser feita como apresentado no tópico 2.2.

Pode-se presentar uma consequência da definição de conjunto infinito:

Consequência da definição: Um conjunto é infinito se existe uma função injetora dele em um subconjunto próprio.

Demonstração: Seja X infinito e $f\colon \mathbb{N} \to X$ injetiva. E, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Tomemos $Y = X - \{x_1\}$ subconjunto próprio. Vamos definir função bijetiva $g\colon X \to Y$ colocando $g(x) = x$, se x não é um dos x_n, e $g(x_n) = x_n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Analogamente, se há uma função bijetiva de X em um subconjunto próprio seu, então X é infinito. ■

Exemplo: Se $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} - \{1\}$, então $g(n) = n + 1$, é uma bijeção de $\mathbb{N}$ em seu subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, \ldots\}$. Generalizando, fixando $k \in \mathbb{N}$, pode-se considerar $\mathbb{N}_k = \{k + 1, k + 2, \ldots\}$ e definir a bijeção $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_k$, $g(n) = n + k$. Se $K = \{2, 4, 6, \ldots\}$ é o conjunto dos números pares, então $g\colon \mathbb{N} \to K$, dada por $g(n) = 2n$, é uma bijeção.

O professor deve alertar que o infinito não é um número real.

Para comparar a “quantidade” de elementos de dois conjuntos infinitos, devemos verificar se existe alguma função bijetora entre eles. Caso exista, dizemos que estes conjuntos têm a mesma cardinalidade. Até agora, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais foi o único que abordamos, porém existem outros conjuntos infinitos que se conhece, como o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, e que diferem significativamente do conjunto dos números naturais. De fato, o conjunto dos números reais possui uma cardinalidade maior do que a dos números naturais e, portanto é um infinito “maior” do que ele.

2.4.3.2. Software

Uma outra estratégia de ensino poderia ser utilizar um software gráfico, como o GeoGebra. O professor pode ter uma interação mais direta com o aluno e este com a construção de gráficos que representam funções, bem como aprofundar seus conceitos. A facilidade de visualização no software é um diferencial, pois pode ampliar ou reduzir a escala dos eixo Ox e Oy, trazendo melhora significativa na habilidade de visualização dos alunos e do próprio docente quanto a limitação, finitude ou infinitude dos conjuntos.

É uma forma de enriquecer o trabalho do professor com uma gama de funcionalidades disponíveis. O uso de software potencializará o processo de aprendizagem. Vale ressaltar que pelo fato desta geração já estar totalmente imersa em meios digitais, o professor deve estar preparado para ampliação até limites inimagináveis, pois o aluno traz a capacidade de compartilhar grande quantidade de informação com cada vez mais rapidez e lidar com as tecnologias de forma mais natural. É uma excelente forma de interagir com os alunos e estar aberto a aprender e se adaptar com o que desperta interesse dos alunos. Os alunos e professores podem baixar aplicativos do GeoGebra gratuitamente para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux através do link geogebra.org/download

2.4.3.3. Trechos de filmes

O despertar interesse dos alunos ao tema finito e infinito pode ser introduzido também com filmes que tratam o tema de forma intuitiva ou biográfica.

O filme **"O Homem que Viu o Infinito"** foi uma história levada às telas pelo cineasta Matt Brown que retrata a vida de Srinivasa Ramanujan. Um indiano pobre, sem estudos, responsável por revoluções na matemática abstrata, que fez avanços consideráveis nas frações continuadas e nas séries infinitas. O filme não tem objetivo de esclarecer estas questões pois aqueles que não conhecem bem a matemática, também conhecem bem Ramanujan, que é visto por muitos como um gênio incompreendido.

O Homem Que Viu O Infinito - Trailer Oficial Legendado em https://www.youtube.com/watch?v=mfyAyfGrA4A

Trechos pertinentes ao trabalho e os minutos do filme em que eles ocorrem (tradução própria)**:**

11:23

Ramanujan:

- O que vê?

Janaki:

- Areia.

Ramanujan:

- Imagina que poderíamos vê-la tão de perto que veríamos cada grão, cada partícula.

Sabe, há padrões em tudo: nas cores da luz, nos reflexos da água; na matemática esses padrões se revelam da forma mais incrível que existe. É bonito de se ver.

15:29

Proƒ. Hardy:

Realmente impressionante, alguém se esforçou bastante. Um escrivão Hindu, e que está afirmando ter dado significado aos valores negativos da função Gama.

18:33

Littlewood:

- Integrais, séries infinitas. Deus sabe o que mais.

Proƒ. Hardy:

- Nunca vi nada parecido.

"O ser inexperiente levar em consideração qualquer conselho que der. Sinceramente, S. Ramanujan."

Littlewood:

- S. de quê?

Proƒ. Hardy:

- Pergunte direto a ele.

30:15

Ramanujan:

- Até encontrei uma função que representa o número exato de números primos menores que x na forma de séries infinitas.

1:31:30

Proƒ Hardy:

“Então, agora viram o trabalho sobre partições e o incrível avanço que ele alcançou. Lembrem-se que tudo feito por um homem com limitações de conhecimento tão assustadores quanto sua profundidade.

“Podem existir opiniões distintas sobre a importância do trabalho de Ramanujan e a influência que pode ou não exercer na matemática do futuro.

“Mas sua grande dádiva é a profundidade e a inacreditável originalidade.

“O senhor Littlewood um dia disse que cada número inteiro positivo é amigo próximo de Ramanujan. Acredito que é verdade. Ele me disse que uma equação não tem significado a não ser que expresse um pensamento de Deus. Bem, apesar de tudo em mim afirmar o contrário, talvez ele tenha razão.

“Afinal não é exatamente essa a nossa justificativa da matemática pura?

“Somos meros exploradores do infinito em busca da perfeição absoluta. Nós não inventamos essas fórmulas, elas já existem, e apenas esperam algumas das mentes mais brilhantes, com a de Ramanujan para dizer e provar.

“Então, no fim, fui forçado a considerar:

“Quem somos nós para duvidar de Ramanujan? Muito menos de Deus.”

“A Culpa é das Estrelas” é um filme adaptado do livro infanto-juvenil de mesmo nome do autor John Green. Atraiu o público por contar a história do câncer na adolescência. O filme traz a fala da protagonista incluindo em seu discurso o infinito e pode ser passado aos alunos como forma de chamar atenção antes de introduzir a explicação.

A Culpa é das Estrelas - Trailer Estendido Legendado em:

https://www.youtube.com/watch?v=khMc449NHgc

Trecho pertinente ao trabalho e o minuto do filme em que ele ocorre (tradução própria)**:**

2:16:51

“Não vou falar da nossa história de amor porque eu não posso, então ao invés disso, eu vou falar de Matemática. Eu não sou formada em Matemática, mas eu sei de uma coisa, há uma infinidade de números entre 0 e 1: tem 0,1; 0,12; 0,112 e uma infinidade de outros. Obviamente existe uma infinidade ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1000000. Alguns infinitos são simplesmente maiores do que outros. Um escritor de quem costumávamos gostar nos ensinou isso. Pois é, eu queria mais números do que provavelmente vou ter. Eu queria mais números para o Augusto Whater do que os que ele teve. Mas, Gus, meu amor, não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito. “Você me deu uma eternidade dentro dos dias numeráveis, e por isso, eu sou eternamente grata.”

2.4.3.5. Músicas

A música **“Meu Infinito”** de Geovanna Jainy fala de infinito e pode ser ouvida em sala de aula de forma a atrair a atenção dos alunos, trazendo significado e memória do que for tratado em sala.

Trechos pertinentes ao trabalho:

“É como olhar para o infinito/Vejo você como meu infinito (...)

“Eu gostaria que você pudesse ver o mesmo infinito em mim quando eu olho pra você (...) Isso é infinito

“Infinito como olhar pro mar (...) Isso é infinito.”

Da mesma forma a música **“Infinito”** do Fresno também pode trazer discussão entre o que é ou não é infinito.

Trechos pertinentes ao trabalho:

“(...) Mas se eu pintar um horizonte infinito e caminhar (...).”

3. CONJUNTOS INFINITOS ENUMERÁVEIS E CONJUNTOS INFINITOS NÃO ENUMERÁVEIS

3.1. Conjuntos infinitos enumeráveis

Seja A um conjunto. A é dito um conjunto enumerável se ele é finito ou se existe uma bijeção entre A e o conjunto dos números naturais. Se existir uma bijeção entre A e o conjunto dos números naturais, então A é dito um *conjunto infinito enumerável*. Um conjunto é dito não enumerável se for um conjunto infinito para o qual não existe uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais.

Exemplo 1. *Observemos que o conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável, pois a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = n$, com n em $\mathbb{N}$, é bijetiva*.

Exemplo 2. *O conjunto {2, 4, 6, . ., 2n,... } é enumerável*.
Vamos montar um esquema que pode nos auxiliar a definir uma função $f: \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$, para que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & \ldots & 2n, & \ldots \end{array}$$

Observe que $f(n) = 2n$, n em $\mathbb{N}$. A função f é bijetiva.

Exemplo 3. *O conjunto −1, −2, −3, −4, . . . , −n,... é enumerável*.

Vamos montar outro esquema que pode nos auxiliar a definir uma função $f: \mathbb{N} \to \{-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots\}$ para que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots, & -n, & \ldots \end{array}$$

Observe que $f(n) = -n$, n em $\mathbb{N}$. A função f e bijetiva.

Exemplo 4. *O conjunto dos inteiros* $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *é enumerável*.

Vamos montar outro esquema que pode nos auxiliar a definir uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de modo que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & ... & 2n & 2n+1 & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow & \downarrow & ... \\ 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & ..., & n, & -n, & ... \end{array}$$

Observamos que podemos definir f da seguinte forma $f(1) = 0$, $f(2n) = n$ e $f(2n + 1) = -n$. É fácil observar que f é bijetiva.

A seguir, vamos apresentar alguns resultados sobre a noção de enumerabilidade.

Teorema 1. *Se* $A \subset \mathbb{N}$*, então A é enumerável*.

Prova. Suponha que A seja infinito. Como A é infinito, então A e qualquer subconjunto de A obtido ao retirarmos do mesmo uma quantidade finita de elementos será não-vazio. Pelo princípio da boa-ordenação, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, seja a_1 o menor elemento de A, a_2 o menor elemento de $A_1 = A - \{a_1\}$, a_3 o menor elemento de $A_2 = A - \{a_1, a_2\}$, procedendo desta forma, definimos a_n como o menor elemento de $A_{n-1} = A - \{a_1,..., a_{n-1}\}$. Como $a_{n+1} > a_n$, a função $f\colon \mathbb{N} \to A$, definida por $f(n) = a_n$ é injetiva. Para mostrarmos que ela é sobrejetiva, basta mostrarmos que $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$. Suponhamos que houvesse algum $a \in A$, tal que $a \neq a_n$, para todo n. Então a pertenceria a A_n para todo n, o que implica que $a > a_n$, para todo n. Portanto **a** seria um número natural maior do que todos os elementos de um conjunto infinito de números naturais $\{a_1, ..., a_n, ...\}$, o que é impossível. ■

Corolário1. *Seja g: A → B uma bijeção, onde B é um subconjunto de $\mathbb{N}$, então A é enumerável*.

Prova. Se B for finito, como g é uma bijeção, então A também será finito, portanto, enumerável.

Se B for infinito, como ele é enumerável, vimos na demonstração do Teorema acima que existe uma bijeção f: B → $\mathbb{N}$. Como gof: A → $\mathbb{N}$ é uma bijeção, por ser composta de bijeções, portanto, A é enumerável. ■

Corolário 2. *Seja f: A → B injetiva. Se B for enumerável, então A também será*.

Prova. Se B for finito, como f é injetiva, então A também será finito, portanto, enumerável.

Se B for infinito, como B é enumerável, então existe uma bijeção g: B → $\mathbb{N}$. Como f e g são injetivas, então pelo Teorema 2, do Capítulo 1 a composta gof: A → $\mathbb{N}$ também é injetiva. Portanto gof é uma bijeção de A sobre a sua imagem, a qual é enumerável por ser um subconjunto de $\mathbb{N}$, isto decorre do Teorema 1. Portanto, mostramos que existe uma bijeção de A sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$ e pelo Corolário 1, temos que A é enumerável. ■

Exemplo 5. *O subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável*.

De fato, seja B um conjunto enumerável e A um subconjunto de B. Considere a função f: A → B definida por f(x) = x. Então f é injetiva e, pelo Corolário 2, A também é enumerável.

Corolário 3. *Seja f:A → B sobrejetiva. Se A for enumerável, então B também será.*

Prova. Como f é sobrejetiva, dado b ∈ B, podemos tomar a ∈ A tal que f(a) = b. Isto permite-nos definir uma função g: B → A tal que g(b) = a, portanto $f(g(b))$ = f(a) = b, para todo b ∈ B. Se $b_1 \neq b_2$, então $g(b_1) \neq g(b_2)$; pois $g(b_1) = g(b_2)$ implicaria

$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$, o que seria um absurdo, pois $f(g(b_1)) = b_1$ e $f(g(b_2)) = b_2$ e, por hipótese, $b_1 \neq b_2$. Logo, g é injetiva. Como A é enumerável, então pelo Corolário 2, B é enumerável. ■

Exemplo 6. *O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Para demonstrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável seja $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(m, n) = 2^m.3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número inteiro positivo em fatores primos, f é injetiva e pelo Corolário 2, segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Exemplo 7. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f: \mathbb{N} \to A$ e $g: \mathbb{N} \to B$. Defina $\mathcal{F}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\mathcal{F}(m, n)=(f(m), g(n))$. Como f e g são sobrejetivas, então $\mathcal{F}$ também será sobrejetiva. Sendo $\mathcal{F}$ sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ enumerável, pelo Corolário 3, concluímos que $A \times B$ é enumerável.

Corolário 4. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Prova. Sejam $A_1, A_2, ..., A_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f_1 : \mathbb{N} \to A_1, f_2 : \mathbb{N} \to A_2, \ldots, f_n : \mathbb{N} \to A_n, \ldots$

Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, defina $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, fazendo $f(m, n) = f_n(m)$, então f é sobrejetiva, pois dado $a \in A$, então $a \in A_n$ para algum n, portanto, $a = f_n(m) = f(m, n)$, para algum m. Sendo f sobrejetiva e como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então pelo Corolário 3, concluímos que A é enumerável. ■

Exemplo 8. *O conjunto $Q = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$ é enumerável.*

Seja $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, então sendo $\mathbb{Z}^*$ um subconjunto de $\mathbb{Z}$ que é enumerável, ele é enumerável. Por outro lado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, sendo o produto de dois conjuntos enumeráveis, ele é enumerável. A função $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(m, n) = \frac{m}{n}$ é sobrejetiva, pelo Corolário 3, concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

3.2. Conjuntos infinitos não-enumeráveis

Definição 2. *Um conjunto infinito X é dito não enumerável quando não é possível apresentar uma bijeção entre X e* $\mathbb{N}$.

Muitos conjuntos que aparecem em Matemática são não enumeráveis.

Exemplo 9: *Seja A o conjunto de todas as funções* $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$*, então A é não enumerável.*

Observemos que, se A fosse enumerável, então poderíamos escrever A = $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$, onde para cada i $\in \mathbb{N}$, f_i é uma função de $\mathbb{N}$ em {0, 1}. Dado arbitrariamente uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, então deveríamos ter $f = f_i$, para algum i $\in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, tal que $f \neq f_i$, para todo i $\in \mathbb{N}$, o que nos levaria a um absurdo. Este absurdo surgiu da nossa hipótese de A ser enumerável, com isso concluiremos que A e não enumerável.

Observamos que, para cada i $\in \mathbb{N}$ definindo

$$f(i) = \begin{cases} 0, \text{ se } f_i(i) = 1 \\ 1, \text{ se } f_i(i) = 0 \end{cases},$$

então por construção temos $f(1) \neq f_1(1)$, $f(2) \neq f_2(2)$,..., $f(i) \neq f_i(i)$, ... Dado i $\in \mathbb{N}$, como $f(i) \neq f_i(i)$, então f e f_i diferem pelo menos no ponto i, portanto $f \neq f_i$.

Vamos demostrar que o conjunto dos números reais é não enumerável.

Teorema: O conjunto dos números reais é não enumerável.

Demonstração: Mostraremos que nenhuma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode ser sobrejetiva. Para isso, vamos usar o teorema dos intervalos encaixantes, apresentados na Seção 2.3.

Consideremos $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função. Escolha a_1 e b_1 em $\mathbb{R}$ tais que $f(1) < a_1 < b_1$. Chame $I_1 = [a_1, b_1]$. Se $f(2) \notin I_1$, tome $I_2 = I_1$. Se $f(2) \in I_1$, pelo menos um dos extremos de I_1, digamos a_1, é diferente de $f(2)$. Nesse caso, defina $I_2 = [a_2, b_2]$ com $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1 + f(2)}{2}$. Note que $f(2) \notin I_2$. Mais ainda, note que em ambos os casos a construção garante que $I_2 \subset I_1$. Agora, se $f(3) \notin I_2$, tome $I_3 = I_2$. Se $f(3) \in I_2$, pelo menos um dos extremos de I_2, digamos b_2, é diferente de $f(3)$. Nesse caso, defina $I_3 = [a_3, b_3]$ com $a_3 = \dfrac{b_2 + f(3)}{2}$ e $b_3 = b_2$. Observe que $f(3) \notin I_3$. Mais ainda, $I_2 \supset I_3$ em ambos os casos. Prosseguindo indutivamente, dado *n* em $\mathbb{N}$ com $n \geq 2$, temos um intervalo limitado e fechado $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$ e $f(n) \notin I_n$. Pelo teorema dos intervalos encaixantes, existe um número real $\alpha \in I_n$, para todo n em $\mathbb{N}$. Pela construção feita acima, $\alpha \neq f(n)$ para todo n em $\mathbb{N}$, provando que f não é sobrejetiva. ■

Corolário: Todo intervalo não degenerado de números reais é não enumerável.

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração, lembremos que um intervalo não degenerado é aquele que não se reduz ao conjunto vazio e nem a um único ponto. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1: I é um intervalo não degenerado limitado.

Suponhamos que a e b são extremos de I e suponhamos a < b. (note que I = [a, b] ou [a, b) ou (a, b] ou (a, b)). Claramente, I contém o intervalo aberto (a, b) com a < b. Como a função f: (– 1, 1) → (a, b) dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b],$$

x em (– 1, 1), é uma bijeção[3], basta mostrar que o intervalo aberto (– 1, 1) é não enumerável. De fato, como pelo Teorema acima, vimos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é não enumerável e a função f: (– 1, 1) → $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x / (1 - |x|)$ é uma bijeção, segue que (– 1, 1) é não enumerável.

Caso 2: I é um intervalo ilimitado.

2.1. I = (– ∞, + ∞) = $\mathbb{R}$.

Segue do teorema.

2.2. I = (1, + ∞).

Consideremos a função f: (0, 1) → (1, + ∞) dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ com x em (0, 1). Como f é bijetiva e (0, 1) é não enumerável (caso 1), segue que (1, + ∞) é não enumerável.

2.3. I = (a, + ∞) com a qualquer em $\mathbb{R}$.

Consideremos a função f: (1, + ∞) → (a, + ∞) dada por $f(x) = x + (a - 1)$ com x em (1, + ∞). Como f é bijetiva e (1, + ∞) é não enumerável (por 2.2), segue que (a, + ∞) é não enumerável.

2.4. I = (– ∞, – 1).

Basta considerar a função bijetiva f: (1, + ∞) → (– ∞, – 1) dada por $f(x) = -x$, em (1, + ∞), e o caso 2.2.

---

[3] O gráfico que representa a função f com x em $\mathbb{R}$ é geometricamente a reta que passa pelos pontos (– 1, a) e (1, b). Como a função linear é bijetiva, f restrita a (– 1, 1) é bijetiva.

2.5. I = $(-\infty, b)$ com b qualquer em $\mathbb{R}$.

Basta considerar a função bijetiva f: $(-\infty, -1) \rightarrow (-\infty, b)$ dada por $f(x) = x + (b + 1)$, x em $(-\infty, -1)$, e o caso 2.4.

2.6. I = $[a, +\infty)$ com $a \in \mathbb{R}$ ou I = $(-\infty, b)$ com $b \in \mathbb{R}$.

Se $[a, +\infty)$ fosse enumerável, $(a, +\infty) = [a, +\infty)$ também o seria. O mesmo raciocínio para $(-\infty, b)$ pode ser aplicado.

Exemplo 10. O *conjunto dos irracionais, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, é não enumerável.*

Sabemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, sendo a união de dois conjuntos enumeráveis, concluiríamos que $\mathbb{R}$ seria enumerável, o que seria falso, tendo em vista que o conjunto dos números reais é não enumerável. ■

Como o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos irracionais é não enumerável, segue-se que, em termos de cardinalidade, existem muitos mais números irracionais do que racionais.

Vamos destacar um parágrafo do livro A Matemática do Ensino Médio, Vol 1, Elon Lages Lima (2012, p.56, grifo do autor), que diz:

“Não confunda conjunto infinito com aquele que tem um número muito grande (porém finito) de elementos. Quando, na linguagem comum, se diz algo como “– Já ouvi isto uma infinidade de vezes”, trata-se de uma mera força de expressão. Não há distâncias infinitas (mesmo entre duas galáxias bem afastadas) e até o número de átomos do universo é finito. (O físico Arthur Eddington estimou o número de prótons do universo em 136×2^{256}. O número de átomos é certamente menor pois todo átomo contém ao menos um próton.) É importante ter sempre em mente que nenhum número natural *n* é maior do que todos os demais: tem-se sempre $n < n + 1$.” (Lima, 2012).

4. PESQUISA

4.1. Objetivo

Objetivando compreender a visão de alunos, professores de Matemática e pessoas de profissões diversas sobre os conceitos de conjunto finito, infinito, limitado e ilimitado foi feita uma pesquisa com trinta professores de Matemática, setenta alunos e cinquenta pessoas de profissões diversas que moram, trabalham ou estudam nos municípios de Araruama, Rio Bonito e Macaé, todos do interior do Estado do Rio de Janeiro. Foram escolhidos os alunos da Escola Estadual Edmundo Silva, que estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio, lotados nas turmas 3003 e 3004, no turno da manhã.

O maior intuito é produzir conhecimento, bem como investigações para poder colaborar com definições, conceitos e sugestões relacionadas à prática dos processos de ensino-aprendizado.

Acreditando que este contato serviria para a construção de novos conhecimentos, bem como para ampliar algum conhecimento pré-existente, foi forte a motivação para colaborar com esse desenvolvimento tanto do indivíduo, quanto do grupo de indivíduos em que esta pesquisa se envolve, e daqueles que tiverem acesso aos resultados.

“A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não pode temer o debate. A análise de realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa.” (Freire, 1967)

4.2. Curiosidades no campo

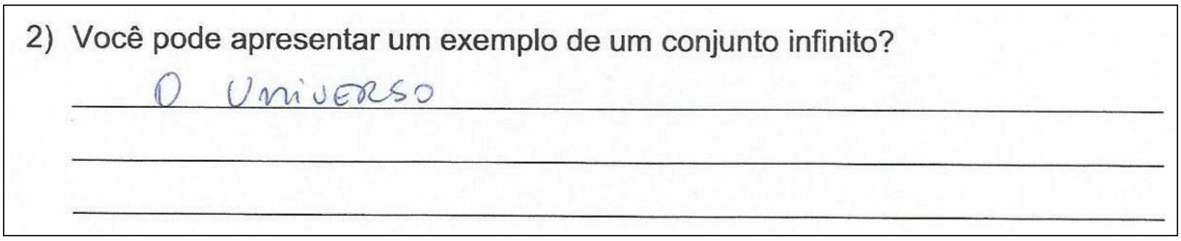
Quando abordados para responder à pesquisa, o intuito de colaboração era evidente, até o momento em que liam as perguntas e, em sua maioria, não queriam mais responder. “Você quer que eu faça prova de Matemática?”, “Eu não sei nada disso!”, “Eu nunca estudei isso!”, “Acho que não lembro mais nada.”

Também era frequente a atitude de querer fazer uma pesquisa na internet para responder, levar para sua residência para entregar depois, pedir ajuda ao pesquisador ou a quem estivesse por perto. E recebiam a negativa imediata.

Muitos queriam que as respostas fossem corrigidas e outros, após responder, queriam discutir o assunto; o que foi bastante enriquecedor.

Surgiram dúvidas a respeito do aspecto não formal da definição de infinito e infinito não-enumerável para: as estrelas do céu, as areias do mar, a produção de frutas de uma árvore, entre outras respostas.

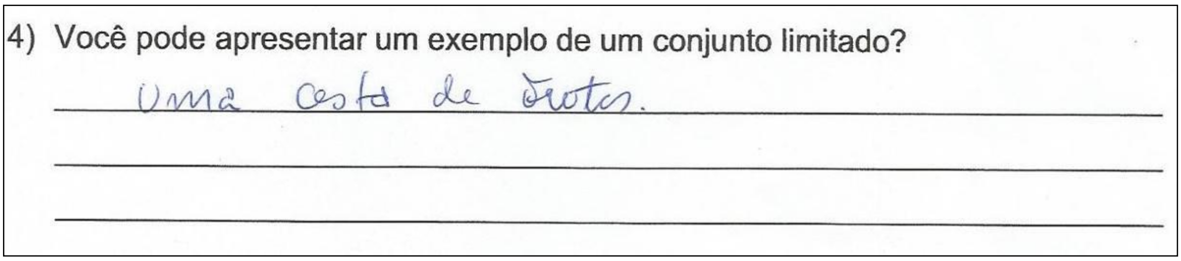
Observe abaixo algumas das respostas.


2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

O Universo

Figura 10: Recorte de resposta da folha de pesquisa, q. 2

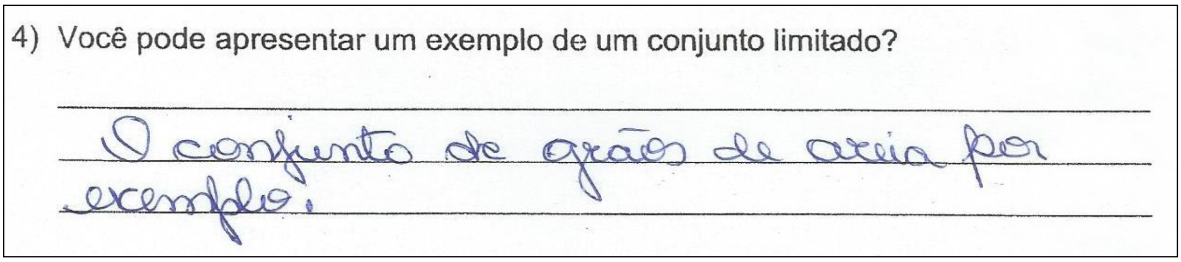
Fonte: Autor


4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

Uma cesta de frutas.

Figura 11: Recorte de resposta da folha de pesquisa, q. 4 (1)

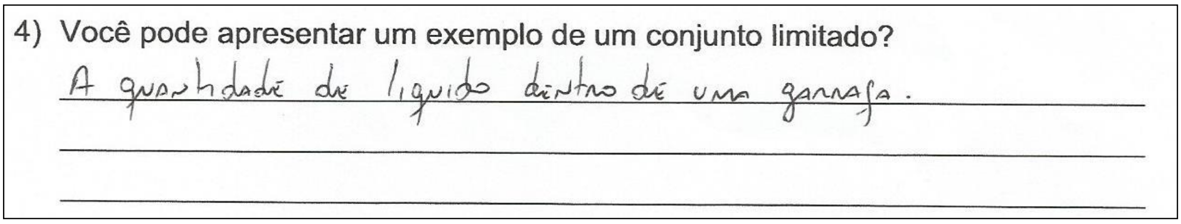
Fonte: Autor


4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

O conjunto de grãos de areia por exemplo.

Figura 12: Recorte de resposta da folha de pesquisa, q. 4 (2)

Fonte: Autor


4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

A quantidade de liquido dentro de uma garrafa.

Figura 13: Recorte de resposta da folha de pesquisa, q. 4 (3)

Fonte: Autor

Consultamos a Mestra em Ensino em Biociências e Saúde pelo Instituto Oswaldo Cruz, a Sra. Izabel Cristina Nunes de Araújo, que nos esclareceu que todo ser vivo, como nasce, cresce, se reproduz e morre, como os animais (inclusive o homem), fungos, plantas, algas, protozoários e bactérias são finitos. Os seres não vivos são aqueles inanimados, que não possuem vida, mas que também são da natureza, como o ar, a água, o solo e as pedras, possuem seu ciclo; podem ter seu fim através de algum fenômeno da natureza ou alguma ação do homem. Observou que as areias da praia podem ser consumidas por larvas de um vulcão; que algumas estrelas que vemos hoje, já morreram e que não podemos dar esses exemplos para algo infinito.

4.3. Tabulação dos dados e análise dos resultados

Decide-se por ler as respostas com atenção para captar os padrões entre elas, fazendo isso com cada uma das seis questões separadamente.

4.3.1. Pessoas com profissões diversas

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

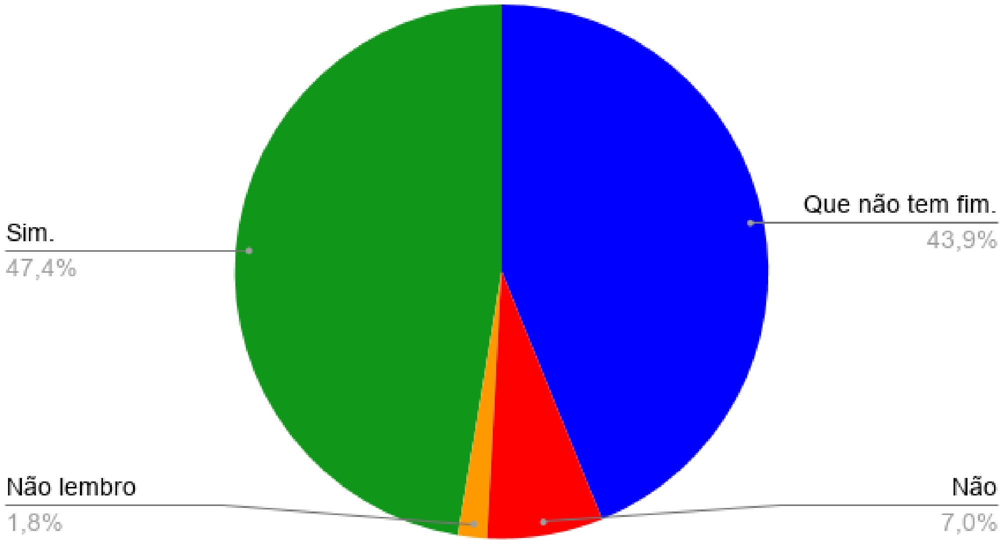


Figura 14: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 1 feitas a pessoas de profissões diversas

Fonte: Autor

Dentre as pessoas com diversos tipos de profissões 47,4% disseram que *sim*, porém sem dar detalhes ou explicação para sua posição. Também sem dar maiores detalhes 7% disseram que *não* e 1,8% que *não lembram*. Um grande percentual de entrevistados, que totalizou 43,9% respondeu ser *um conjunto que não tem fim*.

Na análise destas respostas é possível observar que os entrevistados não fizeram análise e interpretação crítica da questão. Nem a educação formal e nem a educação cotidiana trouxeram real significado de conjunto infinito. Eles não tinham conhecimento teórico e nem uma ideia intuitiva.

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

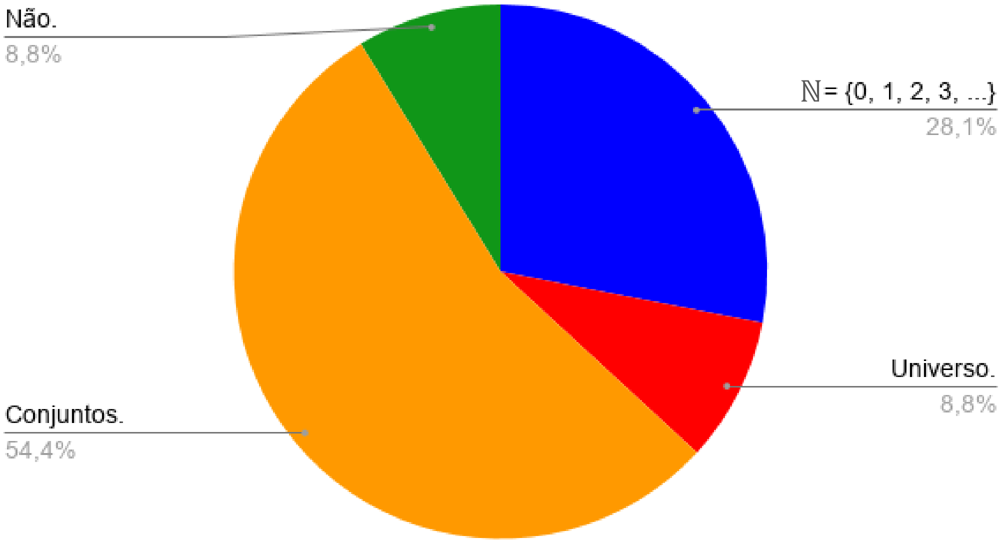


Figura 15: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 2 feitas a pessoas de profissões diversas

Fonte: Autor

Analisando as respostas pode-se observar que 8,8% dos entrevistados se declara sem condições de apresentar um exemplo de conjunto infinito. Tem-se 28,1% que exemplificou algum conjunto com números ou letras e incluiu reticências, variando entre números pares, ímpares, porém em sua maioria, foi uma sequência com os quatro primeiros números naturais. 54,4% citou conjunto de números naturais, inteiros ou pares e até sequências numéricas. O universo ou as estrelas do céu foram citados por 8,8% dos entrevistados.

O que chama atenção nas respostas deste item é o fato de a maioria citar exemplos teóricos sem ligação com a realidade da maioria dos entrevistados, visto que as definições dos livros didáticos se distanciam da realidade dos discentes. Mas explica-se pelo fato de a palavra infinito ser inserida no momento em que se apresentam os conjuntos numéricos, porém sem definição formal. Penso que a curiosidade sobre elementos da natureza serem ou não infinitos não foi abordada no ambiente escolar e nem tão pouco tratada pelos professores de Matemático ou de outras disciplinas.

3) O que você entende por conjunto limitado?

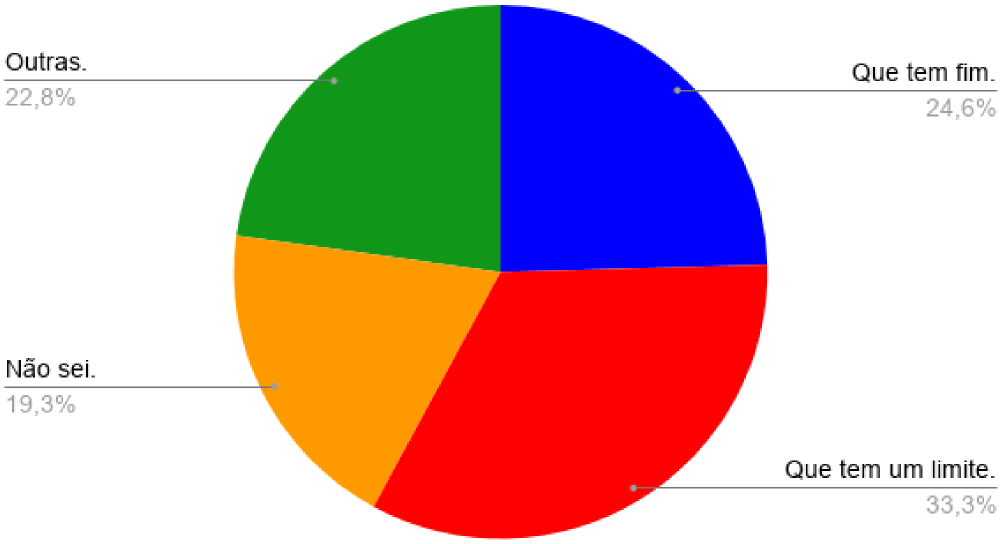


Figura 16: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 3 feitas a pessoas de profissões diversas

Fonte: Autor

Organizando os dados da pesquisa, percebe-se que 19,3% *não sabe* o que é conjunto limitado, 33,3% acredita que é um conjunto que *tem um limite*, 24,6% que é um conjunto que *tem fim*, enquanto 22,8% explicaram ser subconjuntos numéricos, conjuntos com quantidades específicas de elementos, intervalos e até definições não formais para conjuntos.

Responder com palavras usadas na pergunta demostrou insegurança na resposta ou até mesmo falta de conhecimento do assunto abordado.

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

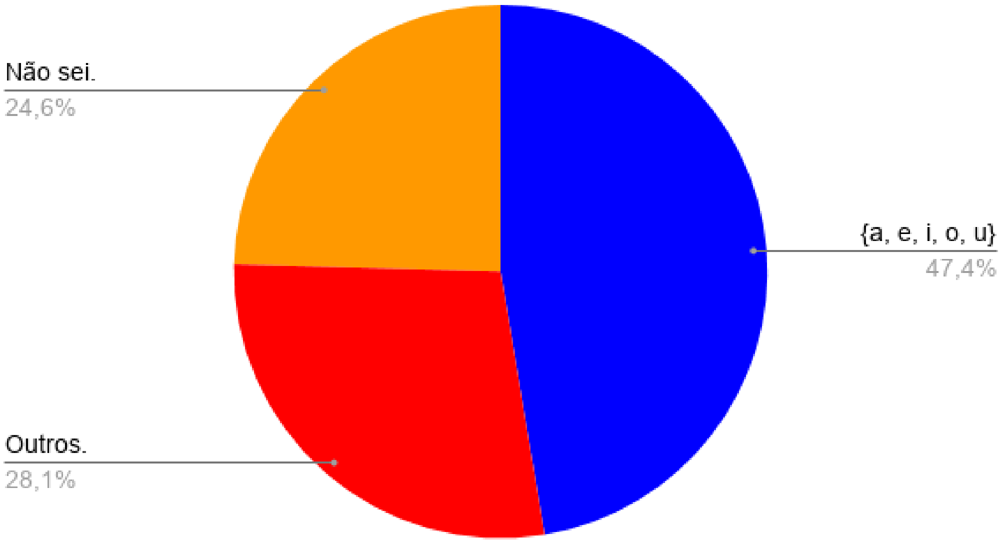


Figura 17: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 4 feitas a pessoas de profissões diversas - Fonte: Autor

Em sua maioria, 47,4% apresentou conjuntos de vogais, conjuntos numéricos variados e intervalos numéricos; enquanto 24,6% *não sabia* apresentar um exemplo e 28,1% deu exemplos de conjuntos do cotidiano, dentre esses foram citados uma cesta de frutas, uma banda musical, um conjunto de copos, uma caixa de dominó, pessoas em um evento, alunos em uma sala de aula, uma dúzia de ovos, uma família, um time de futebol, numeração de vestuário, as sete notas musicais e as cores secundárias e primárias.

As respostas demostraram conhecimento empírico e conceitual.

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

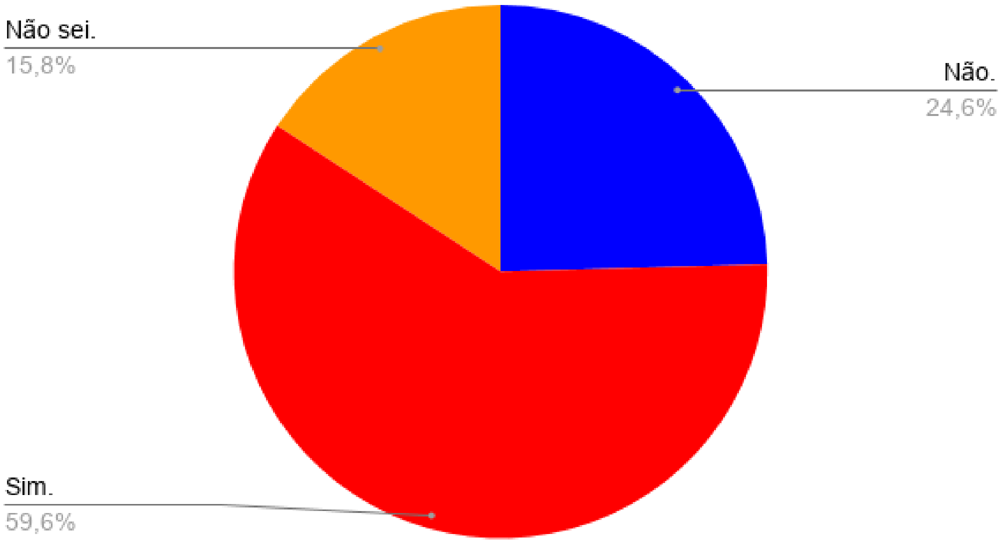


Figura 18: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 5 feitas a pessoas de profissões diversas - Fonte: Autor

Responderam que *não sabiam* 15,8% dos entrevistados; 59,6% afirmaram que *sim*, que todo conjunto limitados é finito e que *não*, 24,6%.

Mais uma pergunta em que se desejava que o respondente expressasse com suas próprias palavras e que sua definição fosse levada em consideração, porém as respostas foram somente, em sua maioria, “sim” ou “não” sem detalhamento.

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

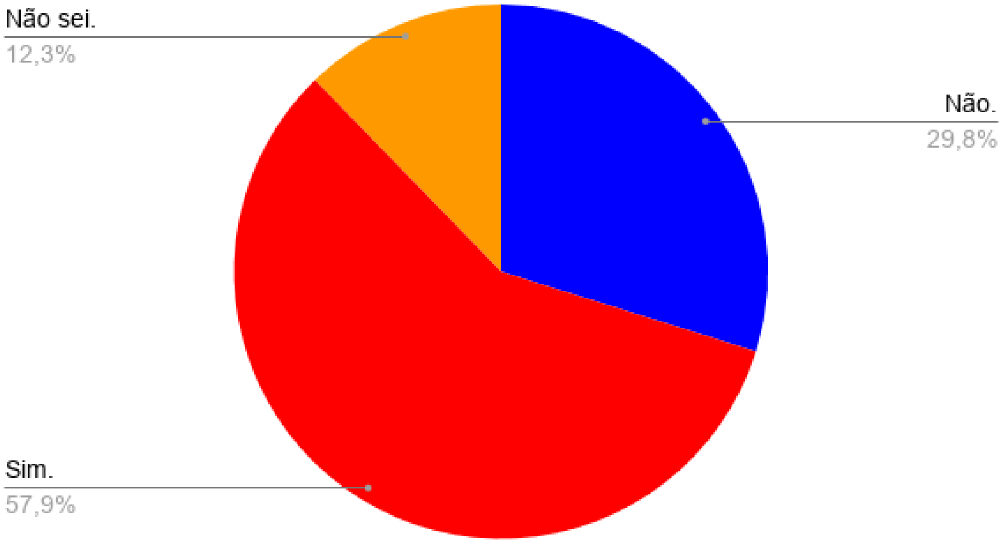


Figura 19: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 6 feitas a pessoas de profissões diversas

Fonte: Autor

Para 57,9% dos entrevistados *sim*, todo conjunto finito é um conjunto limitado, enquanto 29,8% disseram que *não é* e 12,3% *não sabiam* responder.

Essa pergunta também foi respondida de forma evasiva e não detalhada pela grande maioria dos entrevistados.

4.3.2. Alunos do terceiro ano do EM da escola pública

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

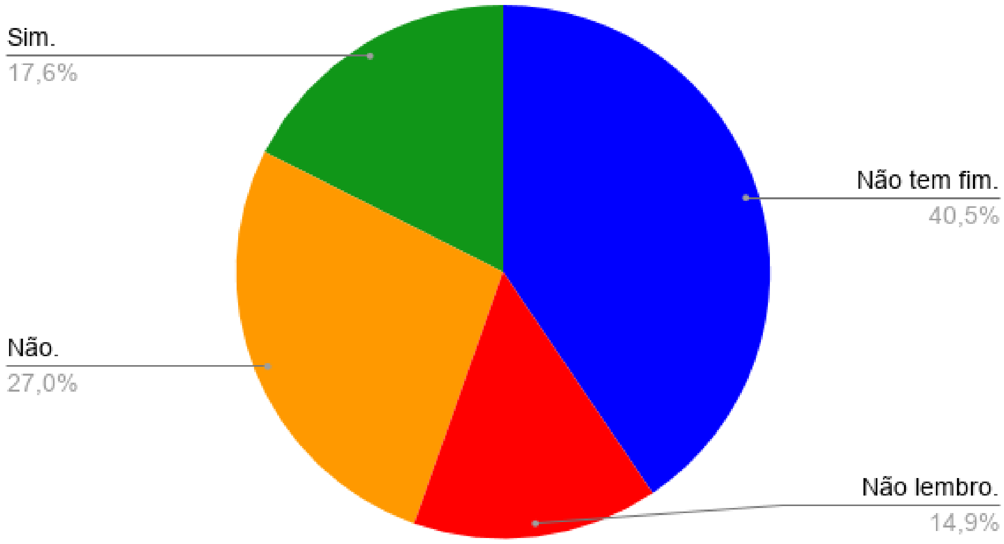


Figura 20: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 1 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

Observa-se o percentual de 40,5% dos entrevistados que responderam afirmando que é aquele conjunto que *não tem fim*. Um percentual de 17,6% representa aqueles alunos que disseram *sim*, mas não deram exemplos ou fizeram qualquer tipo de observação que levasse a definição do que seria conjunto infinito. Obtivemos ainda 27% dizendo *não* saber a resposta e ainda 14,9% relatando que já tinham estudado, mas não lembravam o que era.

Quando foram analisadas resposta a resposta pode ser observado que alguns alunos classificaram conjunto infinito como ilimitado e até mesmo limitado. Também como um conjunto que possui todos os números existentes (uma definição bastante primária).

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

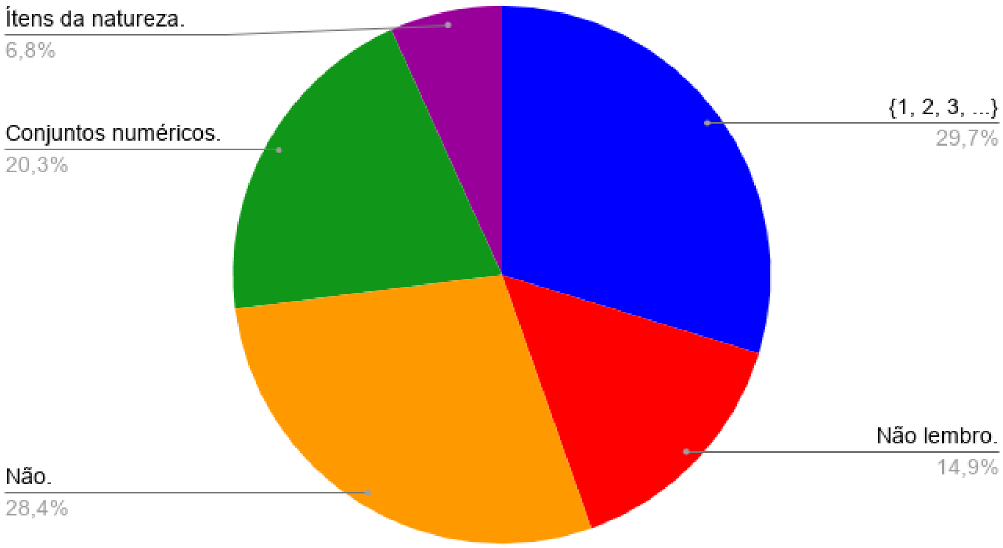


Figura 91: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 2 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

Como pode ser observado 29,7% dos alunos entrevistados apresentaram o exemplo do conjunto dos números naturais não nulos pela enumeração de seus elementos, uns com três, quatro ou mais elementos, porém sempre seguidos de reticências; neste mesmo grupo foram apresentados exemplos semelhantes considerando o zero também como elemento do conjunto. Obteve-se 6,8% que citaram itens da natureza, tais como estrelas do céu, areias do mar, frutas que uma árvore possa dar e afins. Um grupo de 20,3% citou conjunto de números naturais, racionais, irracionais, reais ou ambos, assim como simplesmente colocavam uma letra maiúscula do nosso alfabeto para representar um conjunto qualquer de números. 28,4% declarou não saber apresentar um exemplo e quase 14,9% disse não lembrar.

3) O que você entende por conjunto limitado?

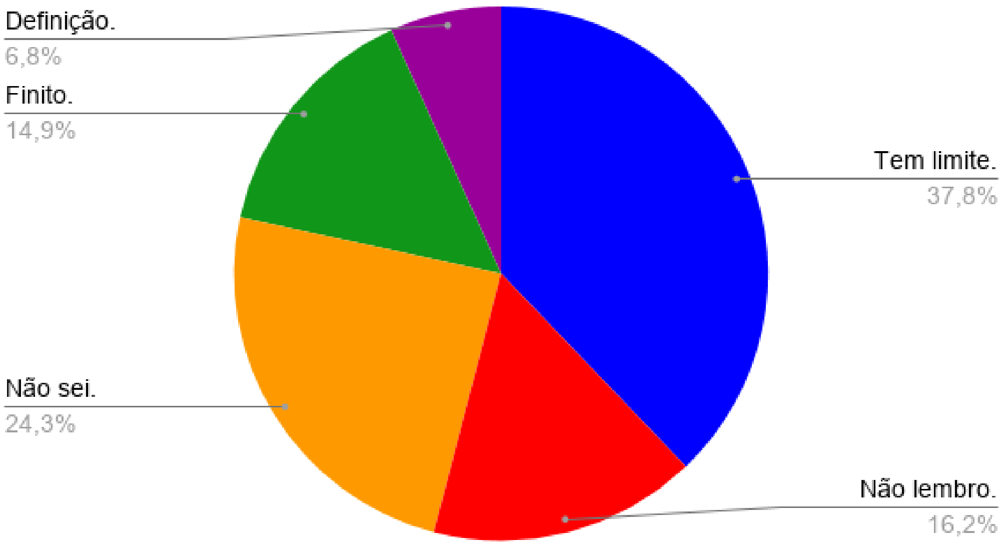


Figura 102: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 3 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

Temos em torno de 37,8% respondendo que é um conjunto que tem limite de “coisas” ou números, sem definir exatamente o que é esse limite. 24,3% afirmaram não saber responder e 16,2% não lembrar. Observa-se 6,8% que deu uma definição não formal e geral sobre conjunto. Respondendo que conjunto limitado é um conjunto finito tivemos cerca de 14,9%.

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

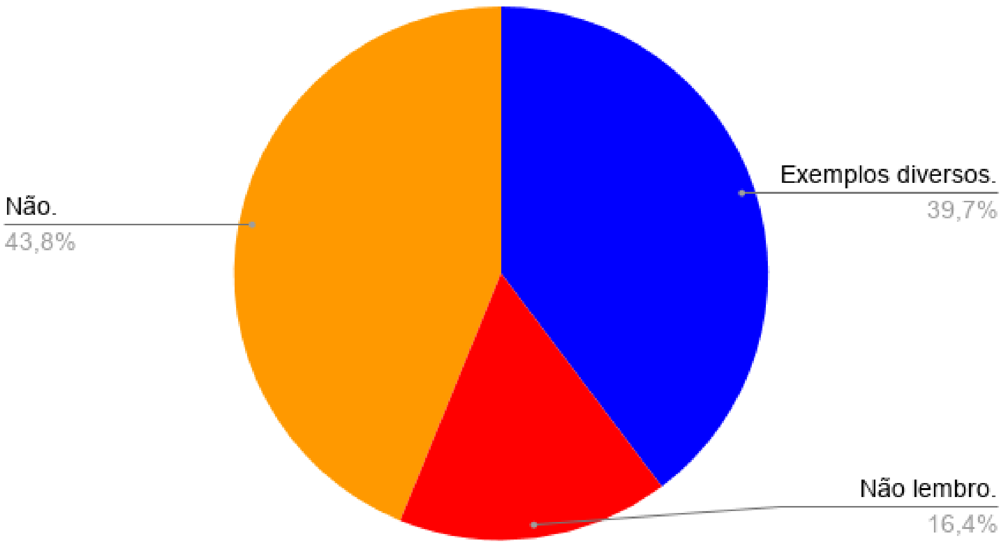


Figura 113: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 4 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

Ao analisar as respostas dos alunos tem-se que 43,2% responderam não saber apresentar um exemplo de um conjunto limitado, outros 16,2% registraram não lembrar e 40,5% apresentaram exemplos que foram conjuntos pela enumeração de seus elementos em ordem crescente, a saber: alguns números naturais, naturais não nulos, inteiros, pares, ímpares, primos, divisores de determinado número, intervalos reais ou exemplos de grupos de pessoas.

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

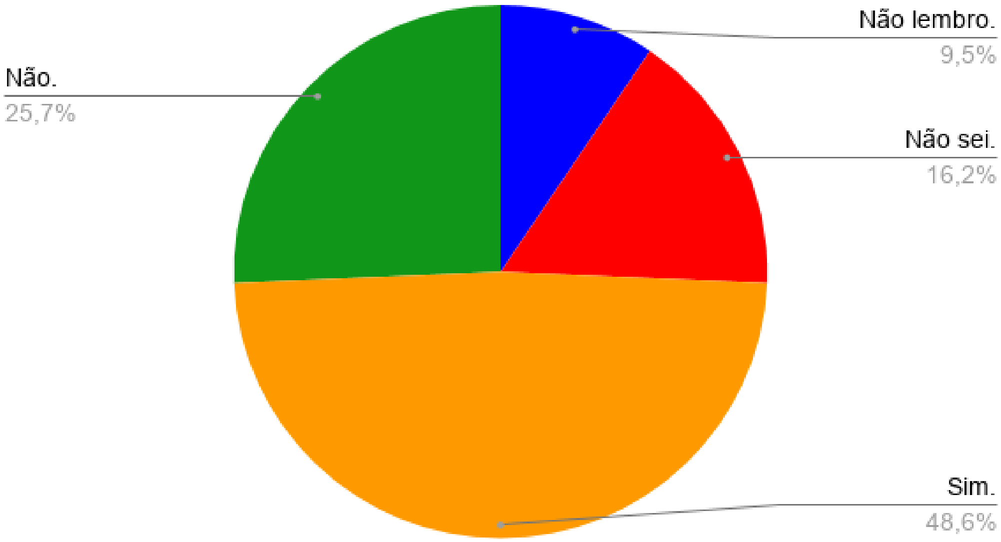


Figura 124: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 5 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

As respostas a essa pergunta foram mais diretas e 48,6% respondeu que sim, 25,7% respondeu que não, e alguns desses citaram os exemplos dados nas respostas anteriores, 16,2% respondeu que não sabia e 9,5% cita que não lembra.

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

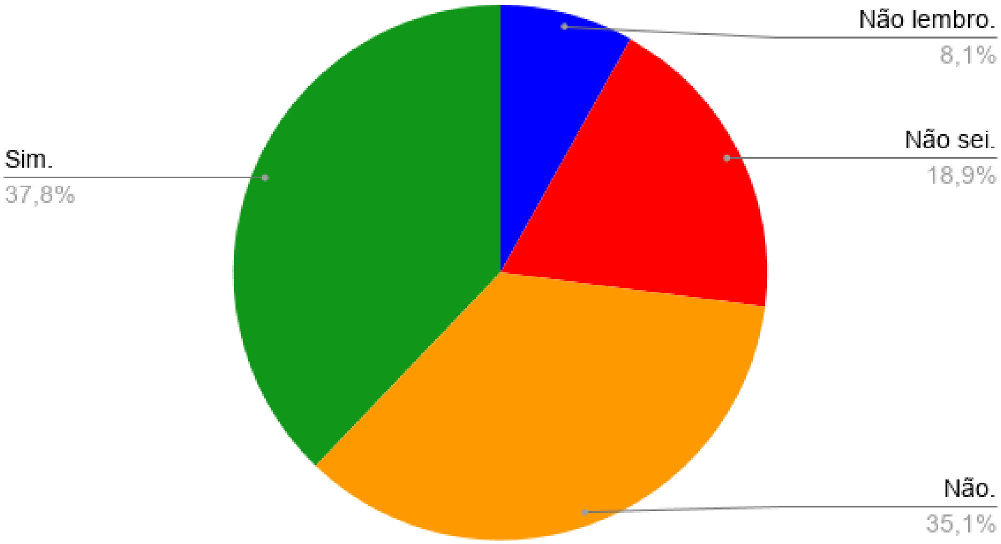


Figura 135: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 6 feitas a alunos do terceiro ano do EM da escola pública

Fonte: Autor

Na resposta a esta pergunta os pesquisados também foram diretos e 37,8% deles responderam que sim, 35,1% que não, 18,9% afirmaram ter visto alguma vez, mas não lembravam e 18,9% que não sabiam.

4.3.3. Professores de matemática

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

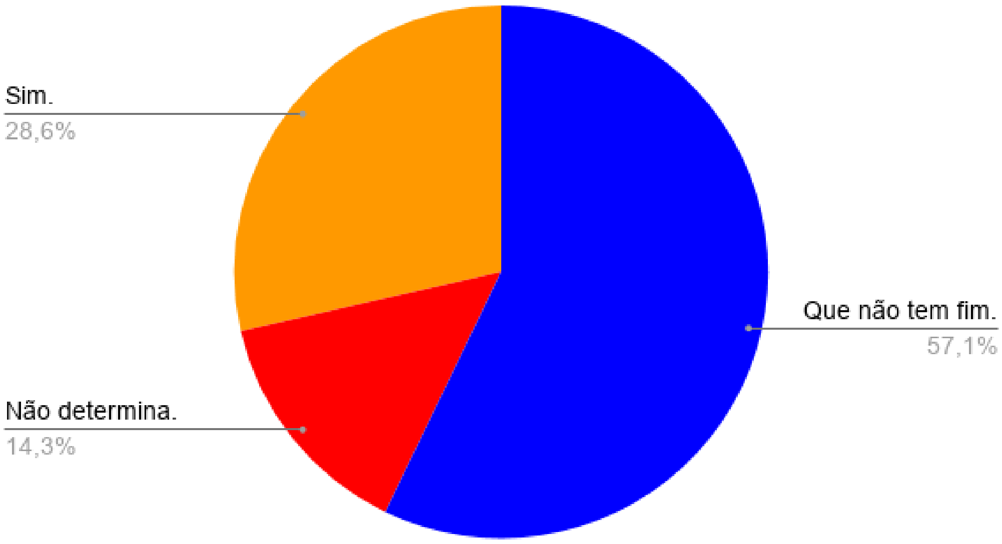


Figura 146: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 1 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

Um percentual de 28,6% dos professores de Matemática entrevistados respondeu que *sim*, sabiam o que era conjunto infinito sem explicações específicas. 57,1% responderam dizendo ser um conjunto *que não tem fim*. Tivemos 14,3% dos entrevistados respondendo que é um conjunto que não se determina o número de elementos.

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

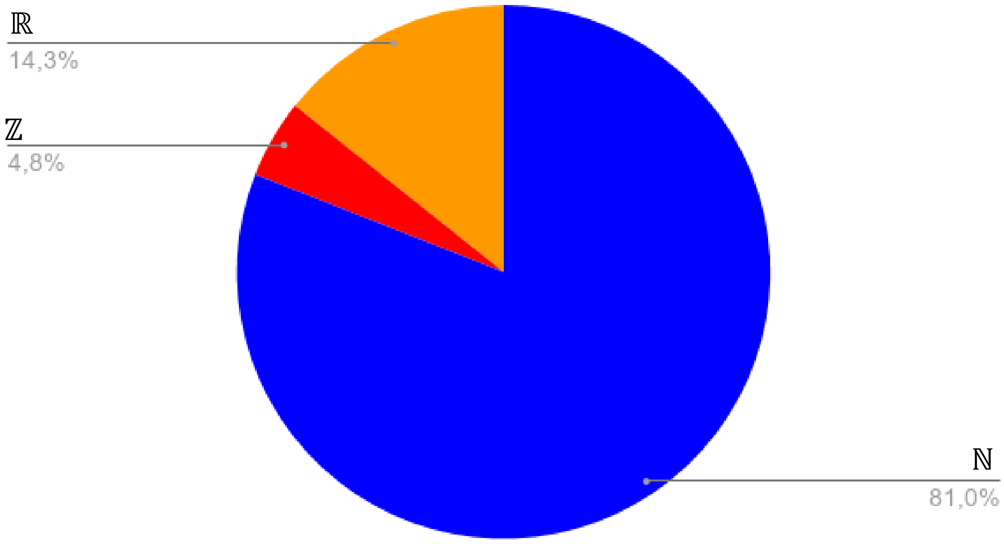


Figura 157: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 2 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

A maior parte dos entrevistados, 81% apresentou o conjunto dos números naturais como exemplo para conjunto infinito; seguido de 14,3% que apresentou como exemplo o conjunto dos números reais e 4,8% exemplificando como conjunto infinito o conjunto dos números inteiros.

3) O que você entende por conjunto limitado?

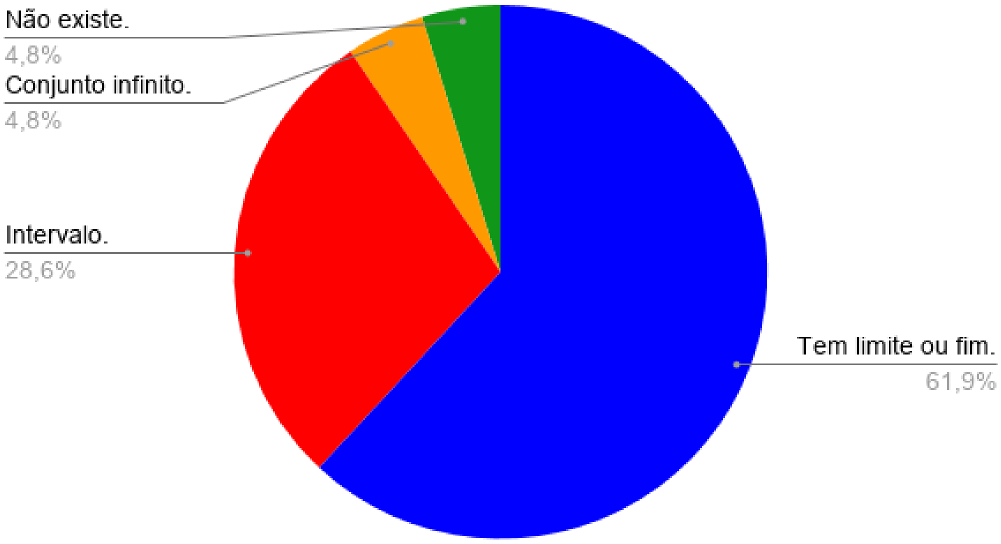
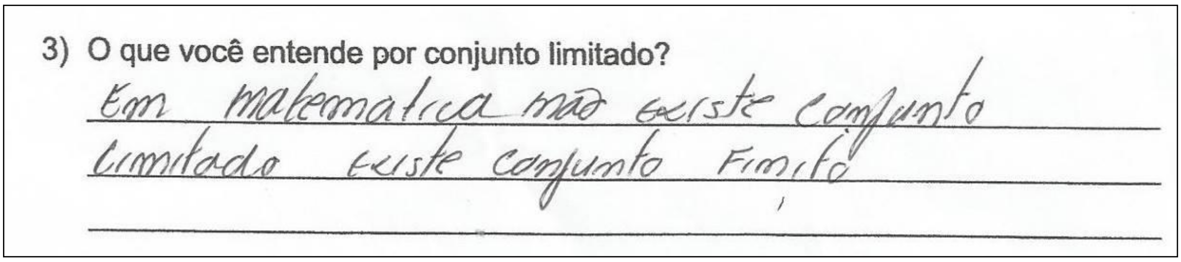


Figura 168: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 3 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

Dos professores de Matemática pesquisados 61,9% respondeu que conjunto limitado é um conjunto que *tem limite ou fim*; enquanto 28,6% exemplificaram com intervalos numéricos, 4,8% definiu conjunto limitado como sendo o mesmo que conjunto infinito, enquanto outros 4,8% acredita que não exista conjunto limitado.

Respostas dadas por professores de Matemática:


3) O que você entende por conjunto limitado?

Em matematica não existe conjunto limitado existe conjunto Finito

Figura 179: Recorte de resposta da folha de pesquisa, q. 3

Fonte: Autor

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

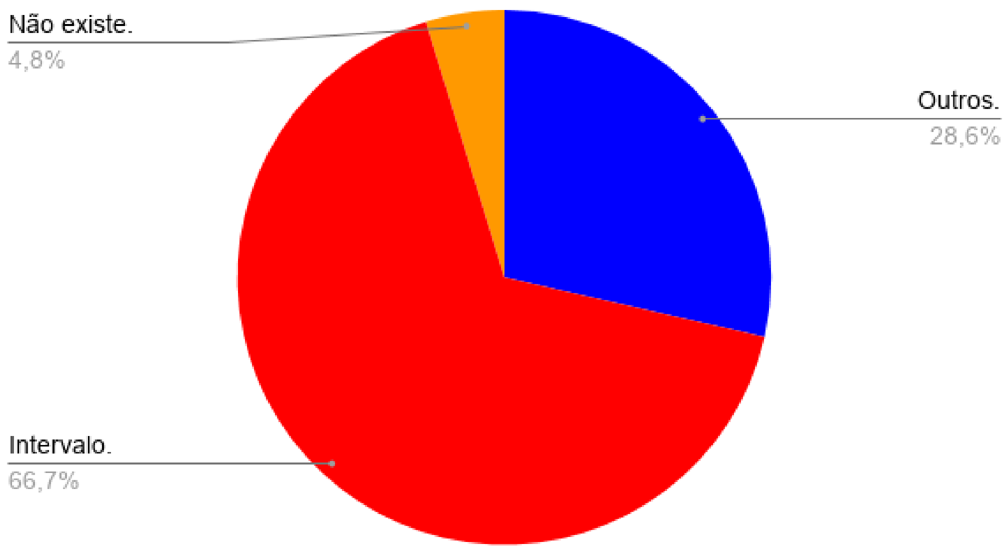


Figura 30: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 4 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

A grande maioria que representou 66,7% dos respondentes apresentou exemplos de intervalos numéricos; enquanto 28,6% apresentou exemplo de um grupo de alunos de uma sala, o conjunto das vogais, das letras do alfabeto. Tivemos ainda 4,8% dizendo não existir conjunto limitado.

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

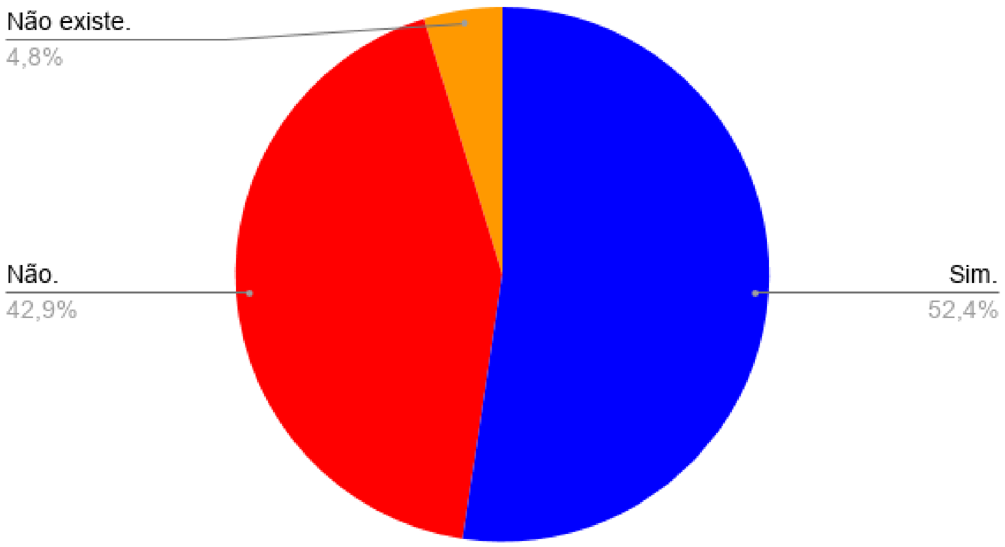


Figura 31: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 5 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

Na análise das respostas constatou-se que 4,8% seguiram afirmando que não existe conjunto limitado; enquanto 42,9% afirmou que *não* e 52,4% que *sim* sem justificar suas afirmações.

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

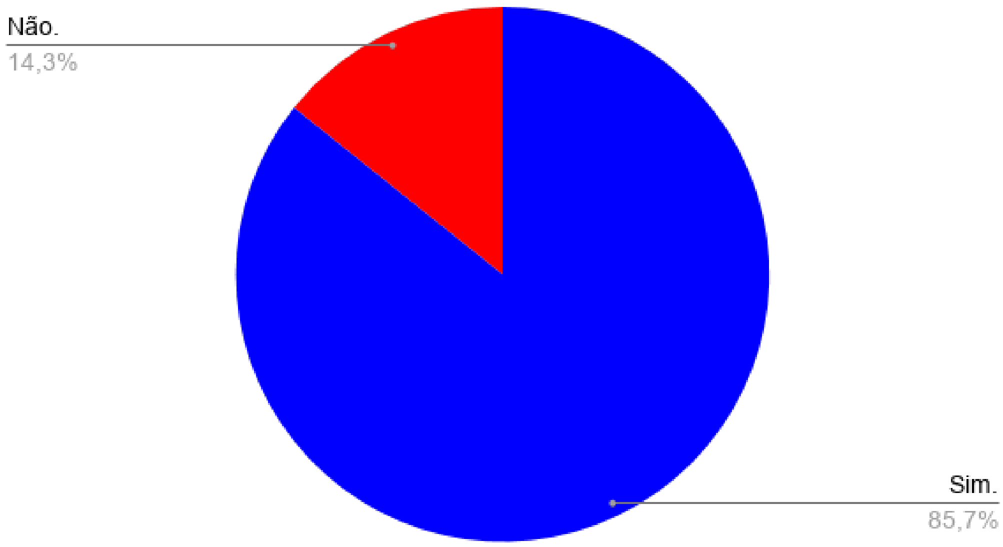


Figura 32: Apresentação gráfica dos dados obtidos com as respostas à q. 6 feitas a professores de Matemática

Fonte: Autor

A essa pergunta 14,3% respondeu que *não* e 85,7% respondeu que *sim*. O que demostra coerência com as respostas anteriores, que demostravam confusão de definição de finitude e limitação.

4.4. Conclusão da análise dos resultados

Ao analisar os dados e observar muitas respostas em monossílabos, como um grande número de respostas somente com um “sim” ou um “não”, principalmente por parte dos alunos, mas não somente estes, em seus questionários é possível perceber a dificuldade de elaboração de hipóteses e de expressão de opiniões.

Cada um dos pesquisados, com raras exceções, demostra não ter construído esse conhecimento. Sabemos que o estudo de funções é fundamental para continuidade do trabalho em outras áreas do conhecimento pela Matemática, e esse embasamento não foi necessário ou muito provavelmente adequadamente trabalhado, visto que em nenhum livro didático que tive acesso até o presente momento definiu conjunto finito ou conjunto infinito. Em nenhuma das publicações do ensino fundamental e médio houve qualquer citação a um conjunto limitado ou ilimitado.

“Estou convicto de que a Matemática pode e deve ser ensinada de forma espontânea, leve, humana e, em alguns casos até mesmo alegre, para que se torne fonte de prazer intelectual e conquiste um número cada vez maior de adeptos.” (Garbi, 2010)

Neste trabalho apresentamos não só o conceito formal, mas sugestões de introdução do assunto foram feitas no capítulo 2 de forma a despertar o interesse dos alunos. Sabemos que o estímulo deve se relacionar com algo que esteja acontecendo na vida deles ou na atualidade. Assim sendo torna-se extremamente importante que se esteja atento aos acontecimentos atuais, às novas descobertas científicas, a filmes e músicas que estejam tratando temas que, se não forem exatamente aqueles que pretendemos tratar, que nos permitam fazer uma associação de forma clara, coerente e eficaz. Também e principalmente, questionando as definições e conceitos errados e fazendo desafios aos educandos para o entendimento correto.

REFERÊNCIAS

A CULPA É DAS ESTRELAS. Diretor: J. Green. Estados Unidos: Temple Hill Entertainment. 2014.

BELL, Eric Temple. Los Grandes Matemáticos. Por Patrícia Barros. Sítio: <https://issuu.com/abelgalois/docs/grandes_matematicos__et_bell>. Acesso em 03/06/2020.

CANTOR, G. *Contributions to the Theory of Transfinite Numbers*. Dover Publications, Inc., New York, 1952.

DIEGUEZ, Flávio. Georg Cantor e o álefe-zero: O homem que colocou o infinito no bolso. SUPERINTERESSANTE, São Paulo, número 3, ano 8, páginas 70-75, março de 1994.

FERNANDEZ, C. S. e SILVA L.A.V. Sobre a noção de compacidade. Coleção Colóquio de Matemática das Regiões. Sociedade Brasileira de Matemática. 2020.

FREIRE, Paulo. Educação como prática da liberdade. Editora Paz e Terra, 1967.

GARBI, G. G. O romance das equações algébricas. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 25/01/2020

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. A conquista da matemática – Vol. Coleção. São Paulo: FTD, 4ª ed., 2018.

HEFEZ, A. Elementos da aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2ª ed., 2011

IEZZI, G. et al. Matemática ciência e aplicações Vol. I. São Paulo: Saraiva, 9 ed., 2016.

IEZZI, G. et al. Matemática ciência e aplicações Vol. II. São Paulo: Saraiva, 9 ed., 2016.

IEZZI, G. et al. Matemática ciência e aplicações Vol. III. São Paulo: Saraiva, 9 ed., 2016.

IMPA. Dez filmes sobre matemática que você precisa assistir. Disponível em: <https://impa.br/noticias/dez-filmes-sobre-matematica-que-voce-precisa-assistir/>. Acesso em 07/04/2020.

KLINE, Morris. *Mathematics, The Loss of Certainty*. University Press, NY, 1980.LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio – volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 10 ed., 280p., 2012.

LIMA, E.L. Análise Real, Volume 1. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

LONGEN, A. Apoema: matemática coleção – Vol. Coleção. São Paulo: Editora do Brasil, 1 ed., 2018.

MENESES, P. B. Matemática discreta para computação e informática. Porto Alegre: Bookman, 4 ed., 348 p., 2013.

MOURA, M. O.; MORETTI, V. D. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. Ciência & Educação (Bauru), p. 67-82, 2003.

O HOMEM QUE VIU O INFINITO. Direção: M. Brown. Estados Unidos: Animus Films. 2015.

UNICAMP. Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio – Hotel de Hilbert. Disponível em:< ttp://m3.ime.unicamp.br/recursos/1117>. Acesso em: 03/04/2020.

VERMA, S. Ideias geniais na matemática: teoremas, teorias e curiosidades. São Paulo: Editora Gutenberg, 175p., 2013.

WIKILIVROS. Matemática elementar/Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras. Disponível em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Fun%C3%A7%C3%B5es _sobrejetoras,_injetoras_e_bijetoras>. Acesso em: 02/04/2020.

WIKILIVROS. Matemática elementar/Trigonometria/Funções trigonométricas. Disponível em: <https://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Trigonometria/Fun%C3%A7%C3%B5es_trigonom%C3%A9tricas>. Acesso em: 02/04/2020.

WIKIPÉDIA. Espaço compacto. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Espa%C3%A7o_compacto>. Acesso em: 06/04/2020.

WIKIPÉDIA. Nicolas Bourbaki. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki>. Acesso em: 04/04/2020.

WIKIPÉDIA. Infinito. Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Infinito>. Acesso em: 06/04/2020.

Woodin, ℏ "The Continuum Hypothesis. Part I." *Not. Amer. Math. Soc.* **48**, Number 6, 567-576, 2001a.

APÊNDICE A – Questionário para os alunos

ALUNO

Escolaridade: ____

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

____

____

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

____

____

3) O que você entende por conjunto limitado?

____

____

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

____

____

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

____

____

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

____

____

APÊNDICE B – Questionário para pessoas de profissões diversas

PESSOAS DE PROFISSÕES DIVERSAS

Escolaridade: ____

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

____

____

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

____

____

3) O que você entende por conjunto limitado?

____

____

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

____

____

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

____

____

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

____

____

APÊNDICE C – Questionário para professores de Matemática

PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Escolaridade: ____

1) Você sabe o que é conjunto infinito?

____

____

2) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

____

____

3) O que você entende por conjunto limitado?

____

____

4) Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

____

____

5) Para você, todo conjunto limitado é finito?

____

____

6) E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

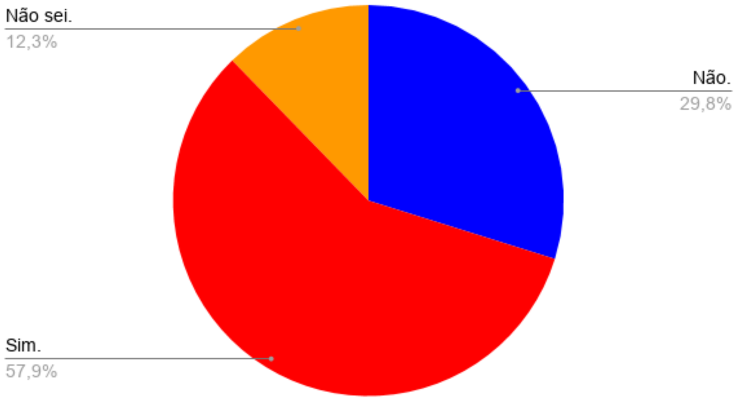
____

____

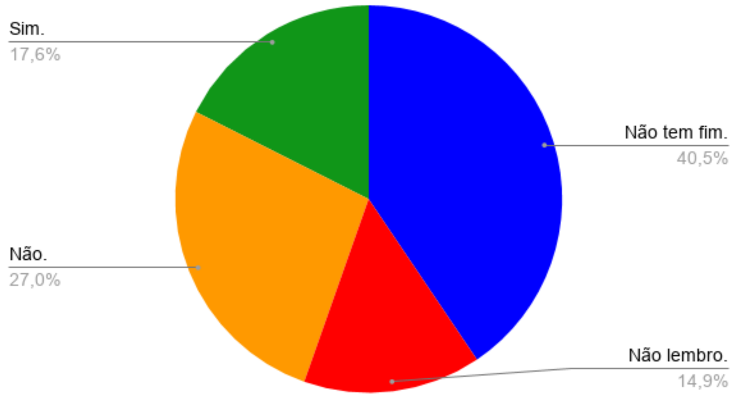
APÊNDICE D – Gráficos comparativos por questão – Questão 1

Você sabe o que é conjunto infinito?

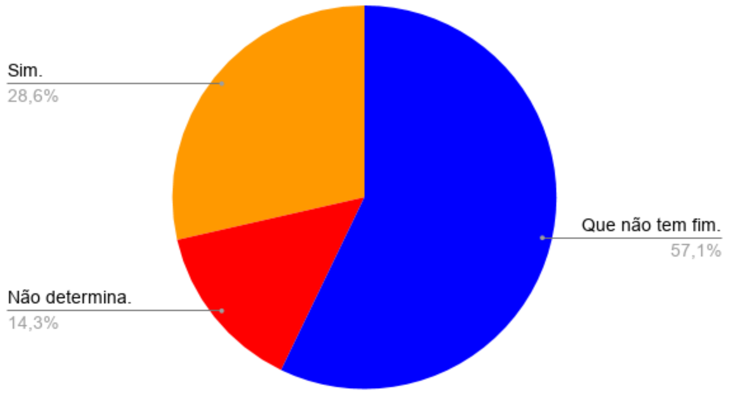
Pessoas com profissões diversas



Alunos



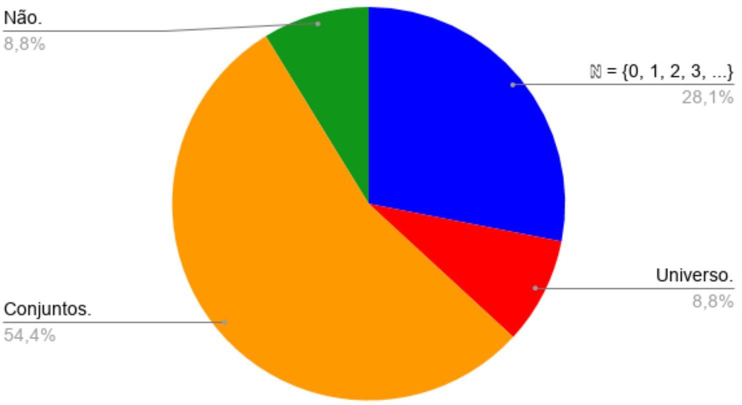
Professores de Matemática



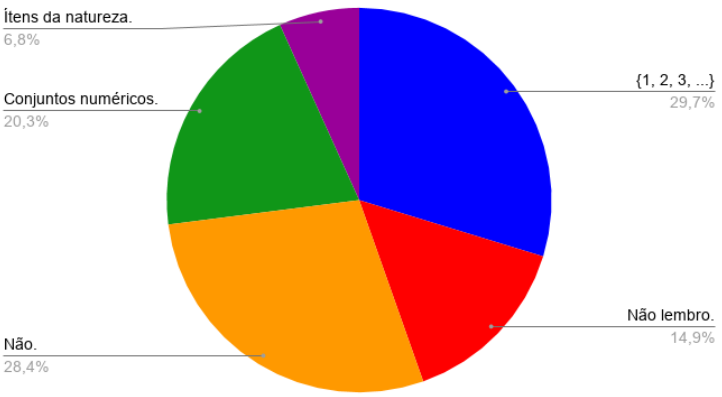
APÊNDICE E – Gráficos comparativos por questão – Questão 2

Você pode apresentar um exemplo de um conjunto infinito?

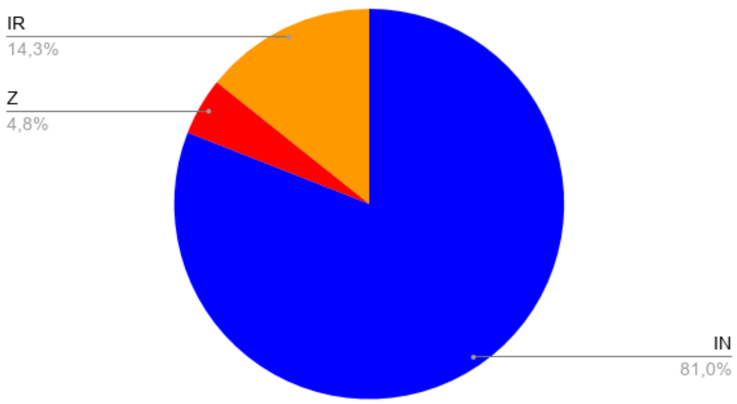
Pessoas com profissões diversas



Alunos



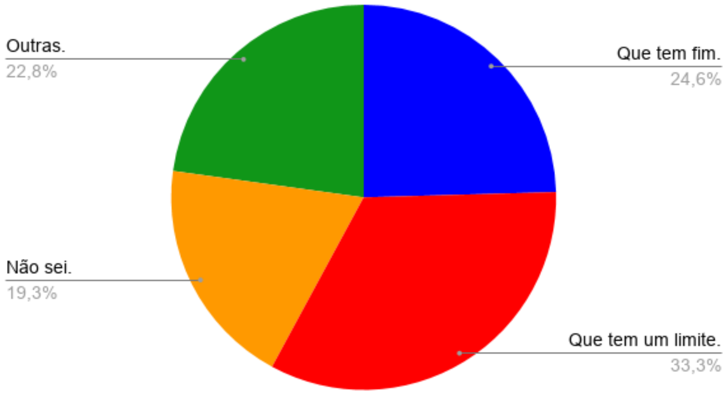
Professores de Matemática



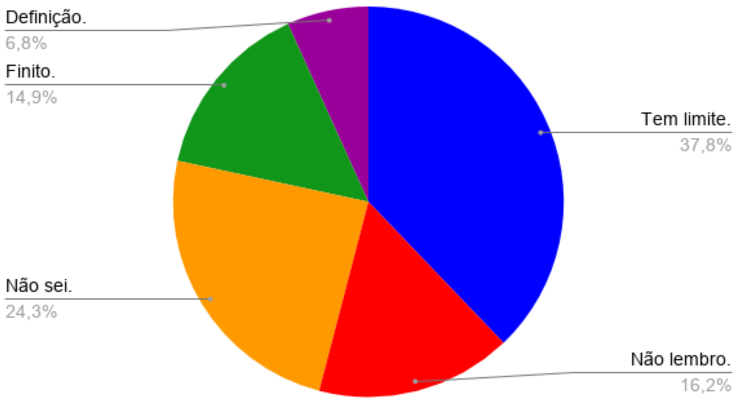
APÊNDICE F – Gráficos comparativos por questão – Questão 3

O que você entende por conjunto limitado?

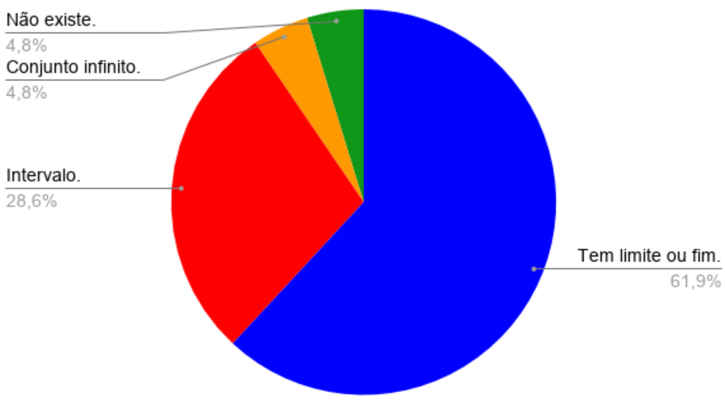
Pessoas com profissões diversas



Alunos



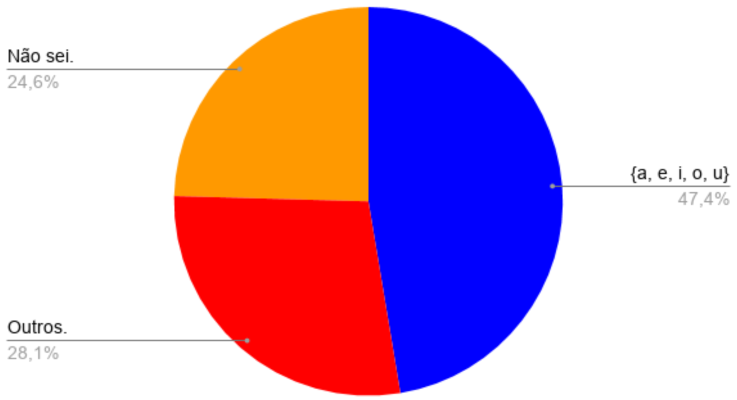
Professores de Matemática



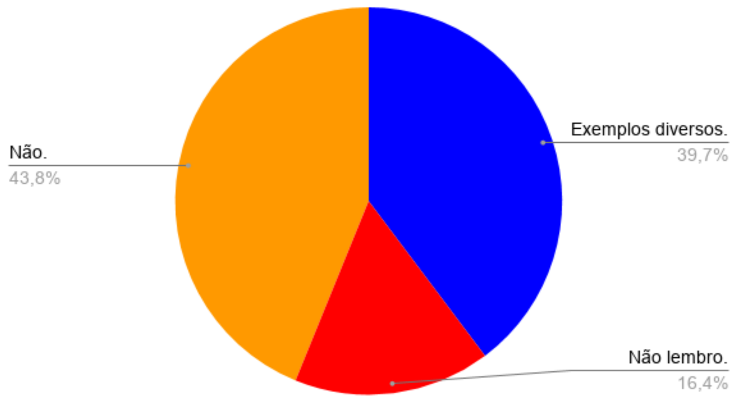
APÊNDICE G – Gráficos comparativos por questão – Questão 4

Você pode apresentar um exemplo de um conjunto limitado?

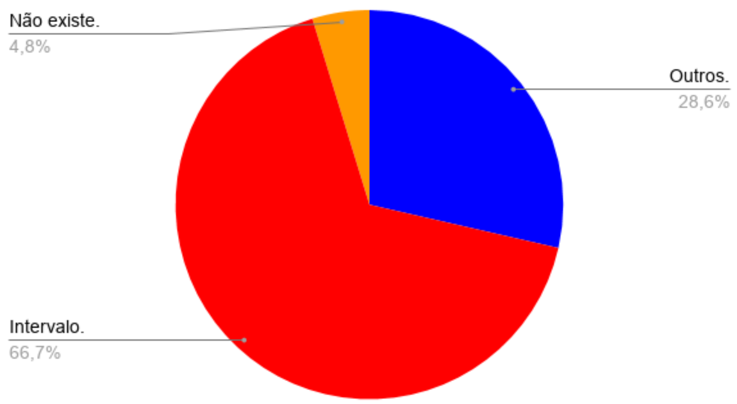
Pessoas com profissões diversas



Alunos



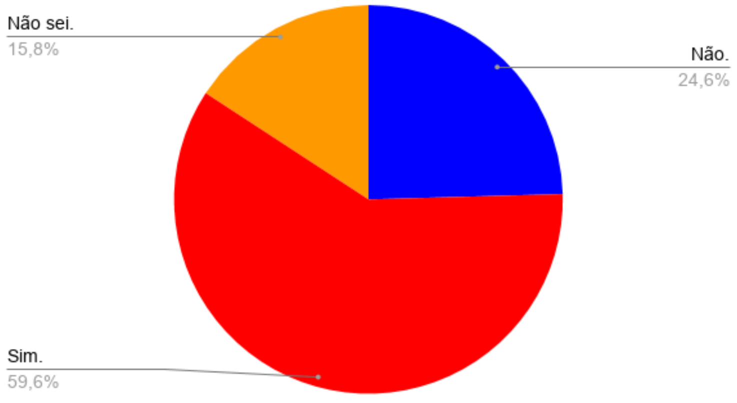
Professores de Matemática



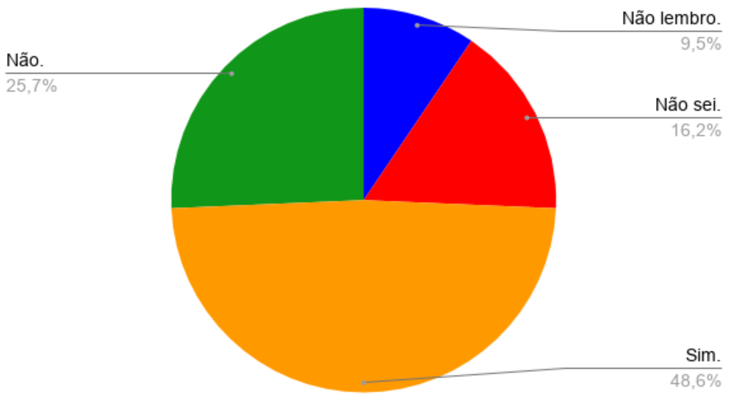
APÊNDICE H – Gráficos comparativos por questão – Questão 5

Para você, todo conjunto limitado é finito?

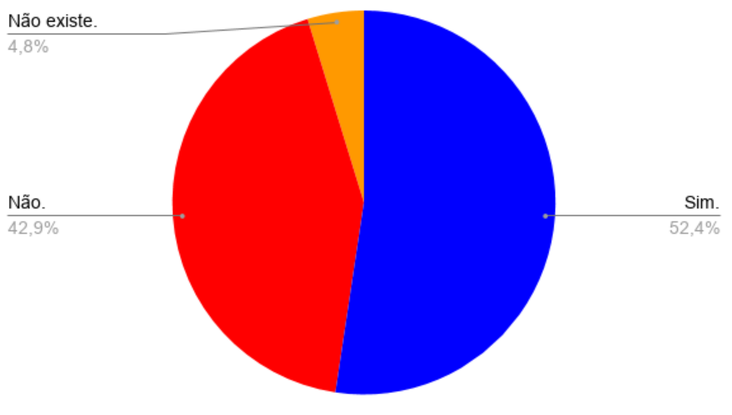
Pessoas com profissões diversas



Alunos



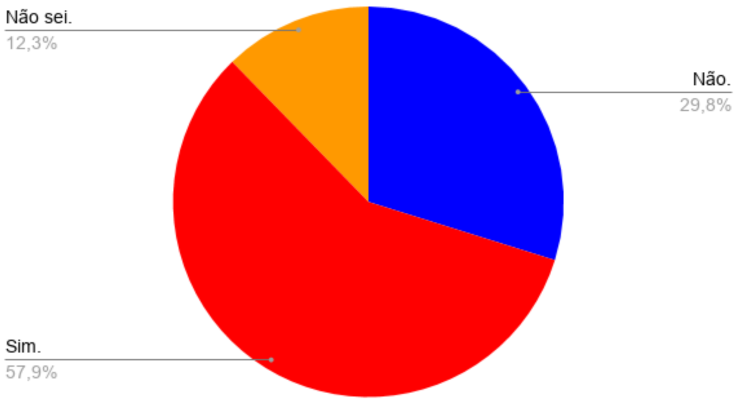
Professores de Matemática



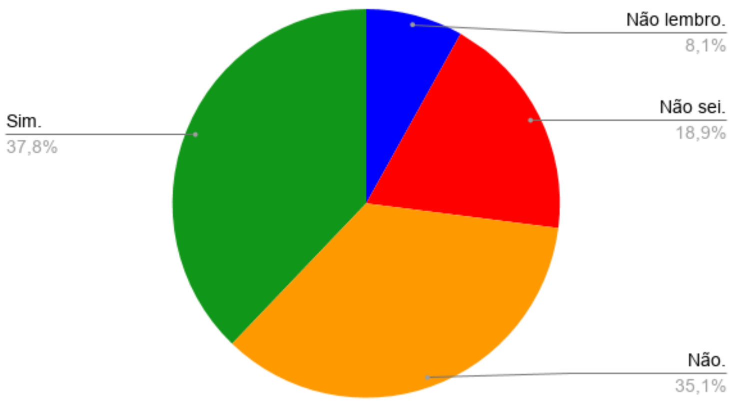
APÊNDICE I – Gráficos comparativos por questão – Questão 6

E todo conjunto finito é um conjunto limitado?

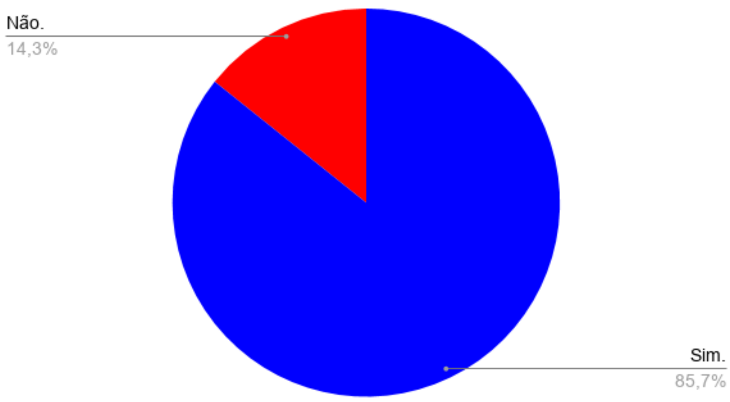
Pessoas com profissões diversas



Alunos



Professores de Matemática



ANEXO A – Guia Digital PNLD, Apresentação, página 1

Apresentação

Professora, Professor,

Este é o Guia Digital do PNLD 2020. Nele estão disponíveis para escolha de sua escola as obras didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental. São livros de Língua Portuguesa, Arte, Educação Física, Língua Inglesa, Matemática, Ciências, Geografia e História; obras Interdisciplinares de Linguagens, contando com Língua Portuguesa e Arte; e obras de Projetos Integradores, destinadas aos estudantes e professores do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Todas as obras foram aprovadas na avaliação pedagógica do Programa Nacional do Livro e do Material Didático.

Nessa avaliação, que visa garantir o padrão de qualidade dos materiais distribuídos pelo governo federal às escolas públicas, é verificada a observância das obras inscritas aos critérios listados no Decreto 9.099, de 18 de julho de 2017 e aos previstos no Edital 01/2018 - CGPLI, tais como a adequação à Base Nacional Comum Curricular; a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; a correção e a atualização de conceitos.

Para cada edital do PNLD é composta comissão técnica específica e equipe de avaliação (avaliadores; coordenadores-adjuntos; coordenadores-pedagógicos) constituídas por docentes das redes públicas e privadas de ensino superior e da educação básica, inscritos no Banco de Avaliadores do MEC. A comissão orienta, supervisiona e valida os resultados da avaliação que é documentada em pareceres e resenhas.

Este Guia Digital é o documento oficial, disponibilizado pelo Governo Federal para orientar a escolha dos livros didáticos pelas escolas brasileiras. Leia-o com atenção. O Guia contém as resenhas das obras aprovadas, os princípios e critérios, o modelo das fichas avaliativas e a equipe responsável pela avaliação pedagógica. Durante o período de escolha, também é possível visualizar a íntegra dos manuais do professor por meio de chave de acesso fornecida ao diretor ou diretora de cada escola no sistema PDDE Interativo. Além disso, são apresentadas orientações sobre o registro da escolha, modelo de ata para as reuniões da sua escola, informações sobre acesso ao sistema de escolha, e também sobre o acompanhamento da distribuição dos livros.

Apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor é um dos objetivos do PNLD. Durante a etapa de escolha, cabe ao conjunto de professores definir as coleções didáticas a serem enviadas a cada escola.