UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

MARCELLO OLIVEIRA BARBOZA

TÉCNICAS DE CONTAGEM PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO SOMA DE PRODUTOS

JUAZEIRO – BA
2020

MARCELLO OLIVEIRA BARBOZA

TÉCNICAS DE CONTAGEM PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO SOMA DE PRODUTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Evando Santos Araújo
(Orientador)

JUAZEIRO – BA

2020

B238t

Barboza, Marcello Oliveira.

Técnicas de contagem para a resolução de problemas de análise combinatória envolvendo soma de produtos / Marcello Oliveira Barboza. - Juazeiro, 2020.

viii, 81 f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2020.

Orientador (a): Prof. Dr. Evando Santos Araújo.

1. Matemática - Ensino. 2. Análise combinatória. 3. Técnicas de contagem. I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves, CRB 5-1458

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Marcello Oliveira Barboza

TÉCNICAS DE CONTAGEM PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO SOMA DE PRODUTOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 29 de janeiro de 2020.

Banca Examinadora

Evando Santos Araújo

Prof. Dr. Evando Santos Araújo, PROFMAT/UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira, Lic. Mat/UPE

Aníbal L. S. Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto, Cenmec/UNIVASF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me iluminado, me guiado, me assistido em toda a trajetória do meu mestrado e na realização deste trabalho.

Agradeço à minha esposa (Ana Paula do Nascimento Oliveira) por ter me apoiado e ter me estimulado a ter perseverança para concluir este trabalho e à minha filha (Anna Sophia do Nascimento Oliveira) que me deu forças com seu lindo olhar e sorrisos para perceber que eu tinha um grande motivo para sempre perseverar em tudo na minha vida.

Agradeço a minha família, especialmente a minha Mãe por ter dedicado sua vida a me fornecer a melhor educação possível, não tendo praticamente nenhum supérfluo para si, e fornecendo o máximo que podia para seus filhos, também de forma especial a meu irmão (Márcio Oliveira Barboza) por ter sempre me estimulado nos estudos não perdendo um momento oportuno sequer de me elogiar.

Agradeço a todos Professores que já tive, que se dedicaram a me ensinar e perceber o quanto é bela essa profissão, aplico de cada um deles ensinamentos na minha vida e na minha profissão.

Agradeço a meu orientador Evando Santos Araújo por ter tido paciência, me apoiado e me orientado para a realização deste trabalho.

Agradeço a amigos como Sostenes Ronmel da Cruz e Sergio de Carvalho Paes de Andrade por terem me encorajado e me apoiado na realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Processos que levam em consideração a combinação entre os elementos de um dado conjunto (em que estes caracterizam tipos de eventos possíveis) e entre suas respectivas quantidades de opções disponíveis (ou de subtipos) podem ser modelados matematicamente por soma de produtos. O estudo dessa problemática se mostra como um tema atual de ensino e pesquisa em matemática, dada sua potencial aplicação na solução de problemas em diversas áreas do conhecimento. Embora seja de grande importância para o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo do aluno diante de situações-problema, esse tema de pesquisa é pouco explorado no ensino básico e nos cursos superiores de formação de professores de matemática. Neste trabalho, é proposto um estudo bibliográfico sobre o tema, com o desenvolvimento de técnicas de contagem usando diagramas e sequências lógicas de cálculo, baseados no princípio fundamental da contagem e em estratégias alternativas de solução. O objetivo da pesquisa foi fornecer informações relevantes que pudessem auxiliar o professor no planejamento e execução de atividades/ projetos interdisciplinares de matemática no ensino médio. Em adição, o trabalho propôs uma série de problemas aplicados que remetem à ampliação dos conceitos de análise combinatória usuais no ensino básico.

Palavras-chave: Análise combinatória, soma de produtos, técnicas de contagem, ensino de matemática, matemática aplicada.

ABSTRACT

Processes that are explained by the combination of the elements of a given set (in which they characterize types of possible events) and between their respective quantities of available options (or subtypes) can be modeled mathematically by sum of products. The study of this problem appears to be a current theme of teaching and research in mathematics, given its potential application in solving problems in several areas of knowledge. Although it is of great importance for the development of the student's logical-deductive thinking in the face of problem situations in today's society, this research topic is little explored in basic education and in higher education courses for mathematics teachers. In this work, a bibliographic study on the subject is proposed, with the development of counting techniques using diagrams and logical sequences of calculation, based on the fundamental principle of counting and on alternative solution strategies. The objective of the research was to provide relevant information that could assist the teacher in the planning and execution of interdisciplinary activities/ projects in mathematics in high school. In addition, the work proposed a series of applied problems that refer to the expansion of the concepts of usual combinatorial analysis in basic education.

Keywords: Combinatorial analysis, sum of products, counting techniques, mathematics teaching, applied mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória (ou Combinatória) é um ramo da Matemática Discreta definida como uma série de procedimentos que possibilita a construção de subconjuntos formados por um número finito de elementos de um conjunto dado, a partir de certas características definidas. O estudo das propriedades matemáticas dessas estruturas está diretamente relacionado à solução de problemas de contagem e, consequentemente, ao desenvolvimento de métodos computacionais que aperfeiçoem o processamento de informações.

A depender das possibilidades de combinação entre os elementos desse conjunto (ou dos grupos formados) os problemas de contagem podem ser classificados em Princípio de Contagem, Arranjo, Permutação ou Combinação. Esses problemas modelam uma gama de situações práticas tais como: em processos na indústria, em computação gráfica e em problemas matemáticos em abertos. Por outro lado, os livros didáticos, nos diferentes níveis e subáreas de conhecimento relatadas à matemática, muitas vezes apresentam esses conceitos tão somente a partir de "fórmulas-aplicação", em detrimento da análise dos padrões que levam à solução do problema de contagem. Essa abordagem superficial pode gerar lacunas na compreensão do leitor (aluno/pesquisador) e, consequentemente, restringir o debate, o desenvolvimento e a análise de novos algoritmos/ métodos que possam melhorar processos nessas áreas.

A combinação da soma de produtos entre elementos de um conjunto numérico se insere nesse contexto e é de fundamental importância para a análise combinatória, uma vez que pode proporcionar o entendimento de novas propriedades e métodos combinatórios, o que reflete diretamente na solução de problemas atuais. Mesmo com essa importância destacada, são desconhecidas na literatura, técnicas de contagem que generalizem a combinação de soma de produtos entre os m elementos de um conjunto numérico, com parcelas de n fatores, sendo $n \leq m$. Como consequência, a exploração desse tipo de problema no ensino de matemática também é escassa. Dessa forma, o desenvolvimento de estratégias de solução para estes problemas se apresenta como um campo aberto de pesquisa e ensino em análise combinatória, com aplicação direta na resolução de problemas de ordem prática.

Nesse contexto, este trabalho de dissertação apresenta um estudo bibliográfico sobre esse tema de pesquisa, com o objetivo de fornecer um conhecimento relevante ao professor para auxiliá-lo no desenvolvimento de estratégias e técnicas de contagem para a análise desses problemas combinatórios no ensino básico. Em adição, são propostas situações-problema que podem ser trabalhadas pelo professor em atividades interdisciplinares no currículo do Ensino Médio, com vista à ampliação do raciocínio lógico-dedutivo matemático e do conhecimento em Combinatória para a abordagem de problemas práticos, com consequência direta em um ensino-aprendizagem significativo dos conteúdos.

No Capítulo 1 é apresentada a fundamentação teórica do trabalho em que são discutidos aspectos históricos e teóricos em Combinatória. No Capítulo 2 é apresentada a metodologia utilizada na pesquisa bibliográfica que direcionou o desenvolvimento de métodos/ técnicas de contagem e de propostas de situações-problema para a solução de problemas práticos envolvendo soma de produtos (descritos no Capítulo 3). No Capítulo 4 são apresentadas as considerações finais sobre os resultados obtidos na pesquisa e as perspectivas futuras relativas ao tema em estudo.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

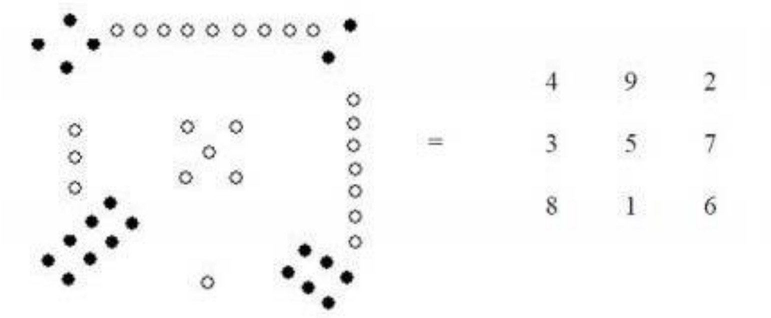
Nesse capítulo, inicialmente será apresentado um breve histórico da análise combinatória, referenciando problemas que deram origem ao seu estudo e cientistas que contribuíram para o avanço dessa área com relatos de diversas aplicações.

Em um segundo momento, serão descritas as principais estruturas da análise combinatória, a saber, o Princípio Fundamental da Contagem, o Arranjo, a Permutação e a Combinação. Essas estruturas são a base desse ramo da matemática.

1.1 BREVE HISTÓRICO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Segundo Wieleitner (1928), os primeiros problemas de contagem foram os quadrados mágicos, quadrados em que se coloca números variando de $[1, A] \in N$, sendo A sua área, com o propósito de que a soma dos números das linhas, colunas e diagonais fosse a mesma. De acordo com Berge (1971), o primeiro quadrado mágico, chamado de Lo Shu, ocorreu na china por volta de 2000 a.C. Trata-se de um quadrado mágico de ordem 3, representado por símbolos encontrados nas nove salas do palácio mítico de Ming Thang, na China Antiga. Substituindo estes símbolos por números é possível formar o quadrado mágico Saturn, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1. Esquema representativo do Lo shu (à esquerda) e do quadrado mágico Saturn (à direita).



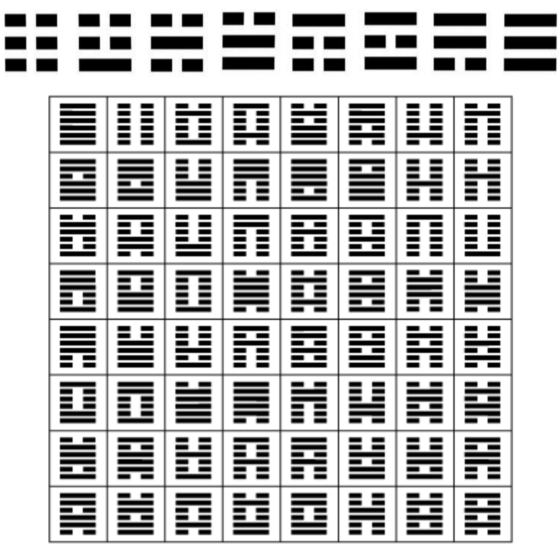
Fonte: Vazquez (2011).

Os árabes deram continuidade ao estudo dos quadrados mágicos começado pelos chineses, desenvolvendo quadrados maiores que o Lo Shu. Um grupo de estudantes chineses conhecidos como os Ikhwan-al-Safa, encontraram e publicitaram quadrados de ordem quatro a nove (MELLO, 2017).

Diversos outros problemas matemáticos com a intenção de instigar os leitores quanto aos princípios de adição e multiplicação da análise combinatória foram formulados ao longo do tempo. Como exemplo, é possível citar o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (por volta de 1650 a.C.), o Problema do Lobo da Cabra e do Repolho (por volta de 775 d.C.) de Alcuíno de York e um problema escrito por Fibonacci em 1202 no seu livro *Líber Abaci* (BIGGS,1979; EVES, 1997; VAZQUEZ, 2011; WILSON, 1990).

Dando continuidade aos problemas combinatórios da antiguidade, está o sistema *I Ching* (1182-1135 a.C.), que assim como os primeiros quadrados mágicos, também foi desenvolvido na china antiga (BIGGS, 1979). Esse sistema é visto como um oráculo ou um livro de sabedoria. Na china é estudado por religiosos, eruditos, e na filosofia taoísta (OLIVEIRA, 2015). Esse sistema baseia-se em 2 símbolos, o Yang (linhas inteiras) e o Yin (linhas partidas), que são combinadas em trigramas (conjunto de três símbolos) ou hexagramas (conjunto de seis símbolos), como esquematizado na Figura 2.

Figura 2. Representação do sistema I Ching, com símbolos organizados em trigramas (acima) e em hexagramas (abaixo).



Fonte: Adaptado de Oliveira (2015).

Os chineses sabiam da existência de 8 trigramas e 64 hexagramas diferentes (OLIVEIRA, 2015). Chaui (2000) descreve que as linhas inteiras nessas gravuras representam “o princípio masculino ativo na natureza”, enquanto as linhas partidas remetem ao “princípio feminino passivo na natureza, representado pela escuridão, o frio e a umidade”. A autora ainda destaca a simbologia dessas gravuras quando informa que “os dois princípios se combinam e formam todas as coisas, que, por isso, são feitas de contrários ou de oposições. O mundo, portanto,é feito da atividade masculina e da passividade feminina”.

O trabalho de Morgado *et al.* (2006) também descreve a evolução da análise combinatória ao longo do tempo quando cita que por volta de 300 a.C. Euclides fez uso de combinatória para solucionar o caso particular do binômio $(1+x)^n$ com $n=2$. Esse é um dos primeiros registros do uso da combinatória para a resolução de um problema algébrico. O famoso matemático Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), também realizou estudos em combinatória. Segundo Tavares e Brito (2005), Arquimedes desenvolveu o jogo Stoma-chion, jogo que contém quatorze peças que encaixadas de forma correta monta-se um quadrado, precisando de raciocínio-lógico para sua solução. Por trás desse jogo, havia uma suspeita que Arquimedes estava procurando solucionar de quantas formas diferentes era possível montar o Stoma-chion (OLIVEIRA, 2015). Esse intuito de Arquimedes, foi confirmado no artigo de título *In Archimedes Puzzle, A New Eureka Moment* publicado no jornal *The New York Times* em 2003, pelo historiador Dr. Reviel Next, apresentando a solução de 17152 formações possíveis para o Stoma-chion, que sem as soluções simétricas, contabilizam 268 possibilidades. O autor do artigo ressalta não haver informações se Arquimedes solucionou o problema (OLIVEIRA, 2015).

Entre os séculos X e XI, ocorreu um grande avanço no estudo dos conhecidos quadrados mágicos. No século XII, já haviam sido desenvolvidos sequências lógicas para a solução do problema (partindo de um quadrado inicial) as quais serviram como base para o desenvolvimento de algoritmos geradores de quadrados mágicos, independentes de quadrados iniciais (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004).

Entre os problemas combinatórios de destaque na história também está o Triângulo de Pascal, que embora tenha ganhado bastante atenção entre os séculos XVII e XVIII com os trabalhos de arranjos de Blaise Pascal (1623-1662), já era conhecido na China por volta do século XII (MORGADO *et al.,* 2006). Em meados do século XVII, grandes matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665) e o próprio Pascal contribuíram com grandes avanços na área a partir de estudos sobre probabilidades de sucesso em jogos de azar. No ano de 1654, Pascal publicou a obra intitulada *Traité du triangle arithmétique* (Tratado do Triângulo Aritmético), que aborda as propriedades dos coeficientes binomiais e o estudo das relações existentes entre eles (CATALDO, 2013). Outra contribuição para a Combinatória no século XVIII foi o problema das pontes de Königsberg. A problemática se baseava em determinar se era possível cruzar todas as sete pontes que uniam duas ilhas da cidade de Königsberg, sem passar novamente por qualquer uma delas. Este problema foi solucionado pelo matemático Leonard Euler no ano de 1736 e a estrutura matemática usada por ele para desenvolver a solução ajudou a estabelecer a chamada teoria dos grafos (GONÇALVES, 2014).

Gonçalves (2014) ainda destaca que vários pesquisadores construíram teorias matemáticas consistentes nos séculos XVII e XVIII, que serviram de base para a formalização da Análise Combinatória e da Teoria da Probabilidade, constituída de volumes como o *Traité du Trianglearithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666) de Leibniz, *Ars Magna Sciendi Sive Combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher, Ars Conjectandi (1713) de Jakob Bernoulli e *Doutrina da Probabilidade* de Abraham de Moivre (1667-1754).

No livro Doutrina da Probabilidade, Abraham de Moivre, apresenta mais de 50 questões envolvendo soluções de probabilidades de jogos de dados e outros jogos de azar. Ele foi o primeiro matemático a tratar de independência estatística, com a definição de que dado dois eventos de um espaço amostral, dizemos que esses eventos são independentes se a ocorrência do primeiro evento não interfere na probabilidade de ocorrência do segundo. Como consequência, a probabilidade desses dois eventos ocorrerem simultaneamente depende apenas do produto entre as probabilidades dos dois eventos constituintes.

Diversas definições da análise combinatória foram citadas por Vaszquez (2011). O autor descreve que em 1666, Leibniz definiu a análise combinatória como o “estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”. Já Nicholson, em 1818, descreveu a Combinatória como sendo “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas, através das quais um dado número de objetos pode ser associado e misturado entre si”. Com o desenvolvimento formal da análise combinatória construído nesse período, ela passou a ser reconhecida como um ramo da ciência e trouxe contribuições para outros campos da matemática, tais como: o Cálculo, a Teoria das Probabilidades, a Estatística, entre outros (GONÇALVES, 2014).

No século XIX, o matemático Peter Gustav Lejeune Dirichlet formulou pela primeira vez o princípio das gavetas, ou princípio das casas dos pombos. Trata-se de uma das estruturas da análise combinatória que soluciona diversos problemas nesse ramo cientifico. Atualmente, a análise combinatória mostra ainda mais sua força com aplicações em vários campos da matemática, segundo Mello (2017, p. 22). Entre eles estão: a análise matemática, as probabilidades, os determinantes, a teoria dos números, a teoria dos grupos e a topologia. De acordo com Bose e Manvel (1984), a teoria combinatória assumiu rapidamente a posição de um dos maiores e mais importantes ramos da matemática, visto suas inúmeras aplicações para a solução de problemas das áreas específicas citadas.

Para esses autores, a combinatória é fonte de análise para soluções de problemas em várias áreas da ciência como em: geologia, química, gestão empresarial, informática e engenharias, além de aplicações em outros ramos da matemática. Estas aplicações têm relação direta com a evolução da Matemática Discreta a partir do século XX, impulsionada pelo crescente desenvolvimento da ciência da computação. Esse ramo da matemática estuda objetos e estruturas matemáticas finitas (que remetem a elementos distintos e desconexos entre si) que, entre outros aspectos, podem ser utilizados em criptografia e no desenvolvimento e (ou) melhoria de processos computacionais em *softwares* (OLIVEIRA, 2015).

1.2 PRINCIPAIS ESTRUTURAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

1.2.1 Fundamentos da Análise Combinatória

Existem dois princípios que fundamentam os cálculos em análise combinatória. O primeiro é o princípio aditivo e o segundo, o princípio multiplicativo. O princípio aditivo afirma que se um dado evento ocorre de n maneiras e um segundo evento pode ocorrer de m formas, então um evento ou outro podem ser realizados de $n+m$ formas. Já no princípio multiplicativo, dado que um evento pode existir de n formas enquanto outro pode ocorrer de m maneiras, então um evento e outro podem ocorrer de $n.m$ formas (BOSEL; MANVEL, 1984, p. 2).

Analiticamente, o princípio aditivo retorna que se temos n conjuntos cada um composto por q_i subconjuntos com $i \in [1,n]$, com todos subconjuntos de mesma família, o total de subconjuntos é $q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n$. Por sua vez, o princípio multiplicativo afirma que se existem grupos de d_i objetos, com $i \in [1,n]$, com cada objeto de d_i associado a cada objeto de d_{i+1}, $i \in [1,n-1]$, o total de subconjuntos ordenados de n objetos (cada um de um dos grupos de d_i, respectivamente, com $i \in [1,n]$), será dado por $d_1.d_2.d_3.\ldots.d_n$. A união desses dois princípios é o fundamento para as estratégias de solução da grande maioria dos problemas em combinatória apresentados em livros didáticos do ensino médio (MORGADO *et al.*, 2006).

Com a aplicação desses princípios em modelos de questões de contagem, regidos pela espécie, ordem e natureza dos objetos envolvidos nos subconjuntos de suas soluções, diversos problemas de combinatória podem ser classificados em problemas de Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Permutação e Combinação. Segundo Morgado *et al.* (2006, p. 2), estes são os principais tipos de problemas da análise combinatória que colaboram relevantemente para compreensão da manipulação de objetos em subconjuntos.

1.2.2 Princípio Fundamental da Contagem

Considere um conjunto $D=\{D_1,D_2,D_3,\ldots,D_i,\ldots,D_n\}$, em que os D_i, $1 \le i \le n$, representam subconjuntos de D, com $D_1=\{e_{11},e_{12},e_{13},\ldots,e_{1(d_1-1)},e_{1d_1}\}$, $D_2=\{e_{21},e_{22},e_{23},\ldots,e_{2(d_2-1)},e_{2d_2}\}$, $D_3=\{e_{31},e_{32},e_{33},\ldots,e_{3(d_3-1)},e_{3d_3}\}$, ..., $D_i=\{e_{i1},e_{i2},e_{i3},\ldots,e_{i(d_i-1)},e_{id_i}\}$ e $D_n=\{e_{n1},e_{n2},e_{n3},\ldots,e_{n(d_n-1)},e_{nd_n}\}$, com seus elementos representados por eventos ou objetos de espécies iguais ou diferentes.

Considere também d_i $(1 \leq i \leq n)$ como o número de elementos do subconjunto D_i $(1 \leq i \leq n)$.

O princípio fundamental da contagem (PFC) pode ser definido como uma estrutura combinatória que fornece o total de subconjuntos com n objetos, sendo cada um desses subconjuntos formados por um objeto de cada um dos D_i descritos, com $i \in [1, n]$. É possível utilizar o conjunto N, definido por $N = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$, com o auxílio de diagramas de árvore (como o usado na Figura 3 para a análise do primeiro bloco de sequências lógicas necessárias) para demonstrar a expressão matemática do PFC.

Fazendo-se a distribuição dos elementos dos D_i, com $i \in [1, n]$, utilizando um diagrama de árvore, pode-se verificar que cada elemento de um subconjunto D_i, contido em uma coluna do diagrama, vai ser ligado por galhos a todos os elementos do subconjunto D_{i+1}, em que as junções dos galhos que estão conectados compõem ramos. Dessa forma, as ligações das colunas do diagrama, sugerem:

1ª e 2ª colunas

$(nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 = d_2;\ nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2 = d_2);$

2ª e 3ª colunas

$(nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 + d_2.\, d_3;\ nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2.\, d_3);$

3ª e 4ª colunas

$(nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 + d_2.\, d_3 + d_3.\, d_4;\ nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2.\, d_3.\, d_4);$

4ª e 5ª colunas

$(nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 + d_2.\, d_3 + d_3.\, d_4 + d_4.\, d_5;\ nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2.\, d_3.\, d_4.\, d_5);$

(n -1)ª e nª colunas

$\left(nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\, d_{i+1};\ nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2.\, d_3.\, d_4.\, d_5.\, \dots\, .\, d_{(n-1)}.\, d_n\right).$

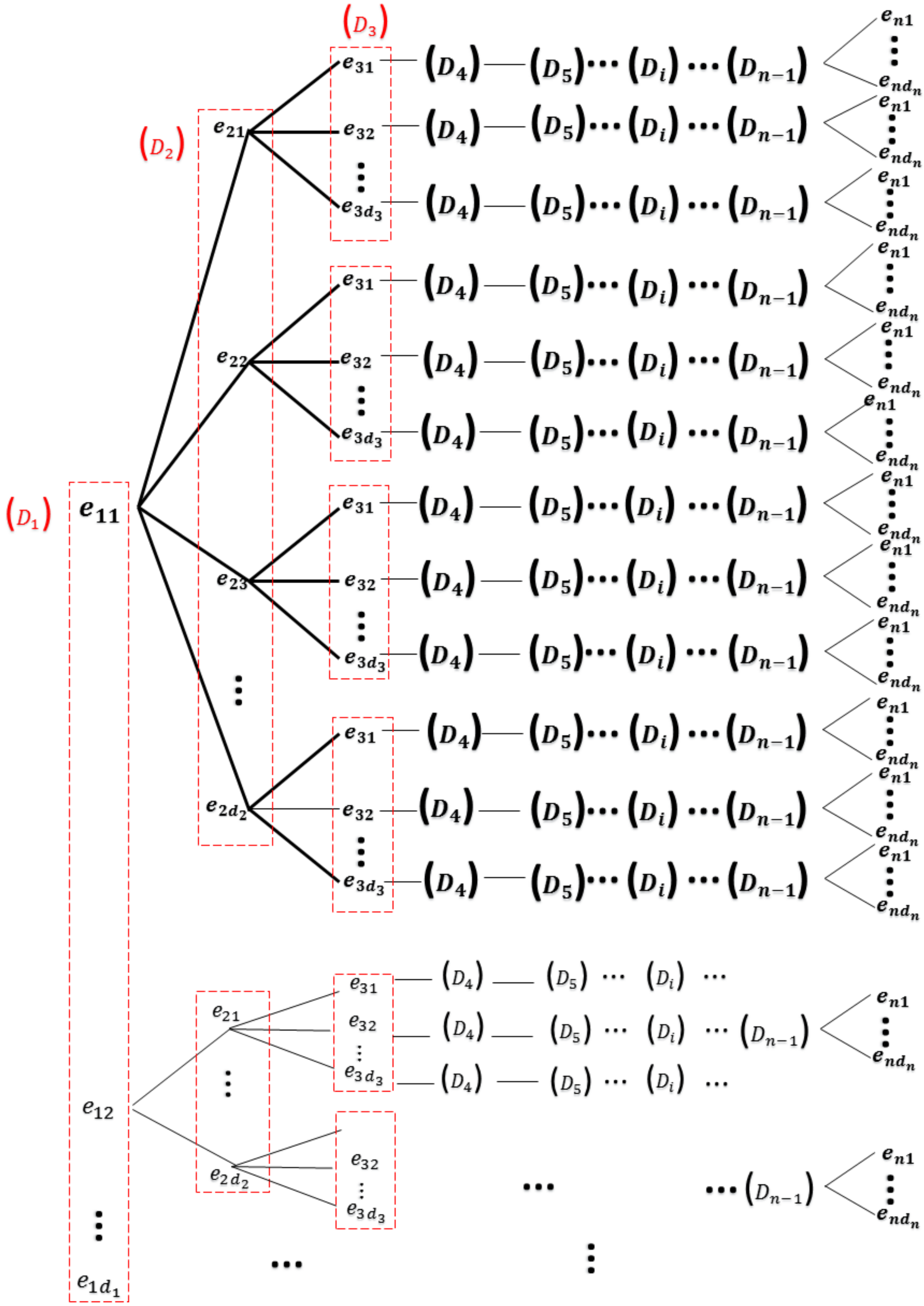
De forma análoga, forma-se um segundo bloco de combinações substituindo-se e_{12} por e_{11} na primeira coluna do diagrama de árvore da Figura 3, mantendo-se as outras colunas inalteradas. Dessa forma, para este segundo bloco, também teremos, da 1ª coluna à nª coluna:

$$nº\ de\ galhos: 1\,.\, d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\, d_{i+1}$$

e

$$nº\ de\ ramos: 1\,.\, d_2.\, d_3.\, d_4.\, d_5.\, \dots\, .\, d_{(n-1)}.\, d_n.$$

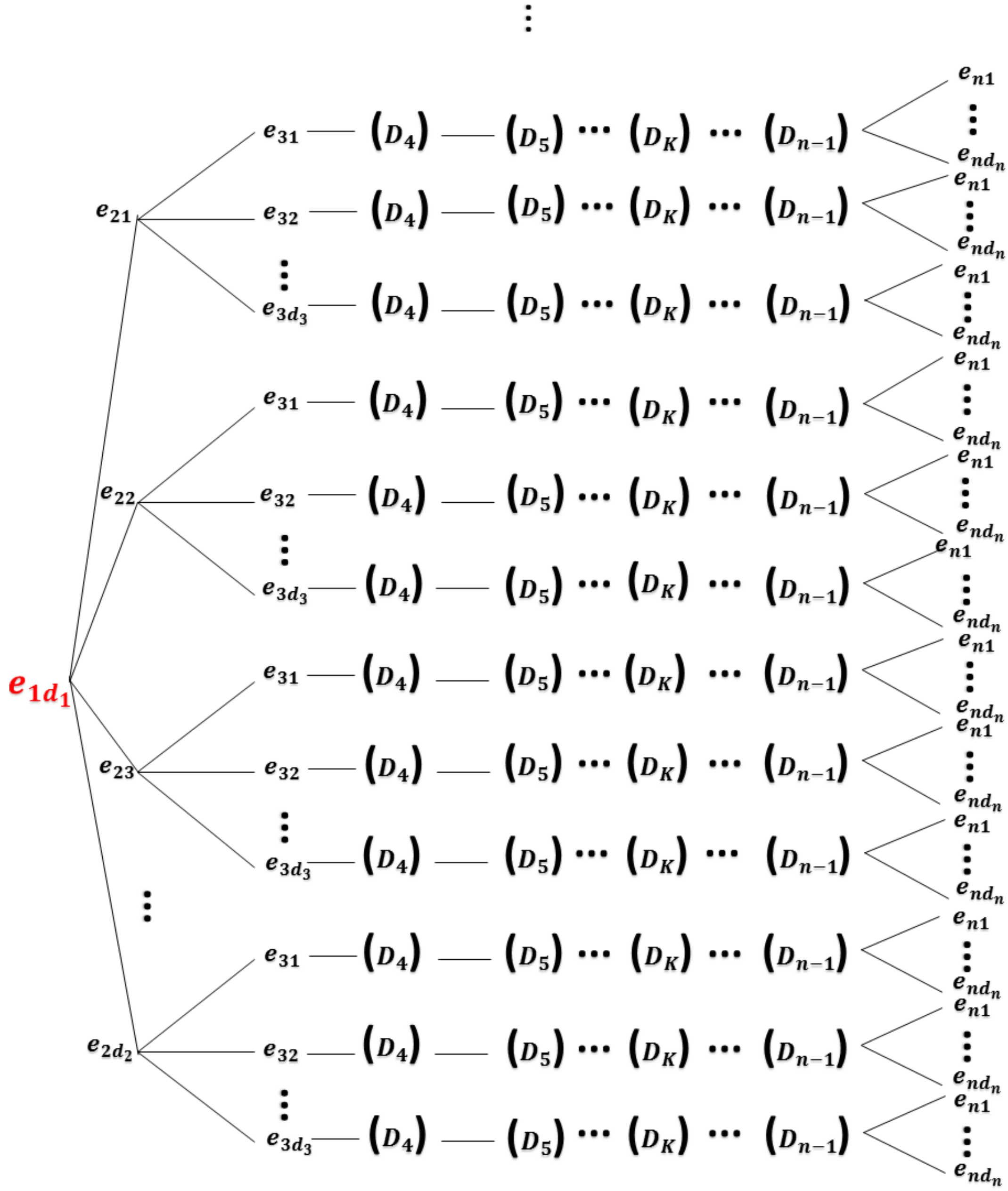
Figura 3. Diagrama de árvore para o primeiro bloco de sequências lógicas para a demonstração do PFC.



Fonte: Próprio autor.

Este comportamento irá se repetir até o último bloco de combinações possíveis, representado por um diagrama de árvore semelhante ao mostrado na Figura 3, mas com o elemento e_1d_1 na 1ª coluna (Figura 4). De forma representativa, a quantidade total de galhos e de ramos (usados para formar todas as combinações possíveis), pode ser dada pela soma de galhos e de ramos obtidos em cada um dos blocos de combinações, respectivamente.

Figura 4. Diagrama de árvore representativo do último bloco de combinações possíveis na demonstração do PFC.



Fonte: Próprio autor.

Assim, um “diagrama geral” para a demonstração do PFC é formado por um total de d_1 blocos de combinações, iniciados de forma ordenada por cada um dos elementos do subconjunto D_1. Com isso, o número total de galhos pode ser dado por:

$$n^{\underline{o}}\ de\ galhos =$$

$$\underbrace{1\,.\,d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1} + 1\,.\,d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1} + \cdots + 1\,.\,d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1}}_{(\mathrm{d_1\ vezes})}$$

Usando o princípio multiplicativo, o número total de galhos pode ser reescrito como:

$$n^{\underline{o}}\ de\ galhos =$$

$$d_1\,.\left(d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1} + 1\,.\,d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1} + \cdots + 1\,.\,d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i.\,d_{i+1}\right).$$

Por sua vez, o número total de ramos é dado por:

$$n^{\underline{o}}\ de\ ramos =$$

$$\underbrace{1\,.\,d_2.\,d_3.\,d_4.\,d_5.\,\ldots\,.\,d_{(n-1)}.\,d_n + \cdots + 1\,.\,d_2.\,d_3.\,d_4.\,d_5.\,\ldots\,.\,d_{(n-1)}.\,d_n}_{(\mathrm{d_1\ vezes})}$$

$$= d_1.\,d_2.\,d_3.\,d_4.\,d_5.\,\ldots\,.\,d_{(n-1)}.\,d_n.$$

Cada ramo nos diagramas de árvore representa a formação de um subconjunto composto por n elementos ordenados, em que o elemento da i-ésima posição é um elemento do i-ésimo D_i, com $i \in [1, n]$. A junção de todos os ramos fornece todos os subconjuntos ordenados que podem ser formados, como descrito anteriormente. Dessa forma, tem-se o total de subconjuntos, dado pelo total de ramos, o que representa a fórmula matemática para o princípio fundamental da contagem (PFC).

Por meio da análise do diagrama geral para o PFC, é possível inferir que cada elemento do conjunto D_i está ligado a cada elemento do conjunto D_{i+1}, com $i \in [1, n-1]$, que é a condição suficiente para se utilizar o princípio multiplicativo no cálculo do total de subconjuntos ordenados que irão conter n elementos, com cada um dos elementos pertencentes a um dos subconjuntos D_i, com $i \in [1, n]$.

Dessa forma, pode-se utilizar o agrupamento de casas para solucionar de forma mais prática problemas regidos pelo princípio multiplicativo, tal como no caso do PFC. O agrupamento de casas consta de uma estrutura organizativa compactada em que cada casa c_i é representada por um traço, onde podemos colocar a quantidade de elementos d_i, de cada subconjunto D_i, na casa c_i respectiva, com $i \in [1, n]$. Cada objeto do grupo d_i deve está associado a cada objeto do grupo d_{i+1}, para a utilização do método de agrupamento de casas e, assim, é possível aplicar o princípio multiplicativo para o cálculo de todos os subconjuntos das soluções de problemas combinatórios desse tipo. No caso do princípio fundamental da contagem, utilizando o agrupamento de casas, sua expressão será dada por:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\underline{c_1} & , & \underline{c_2} & , & \underline{c_3} & , & \underline{c_4} & , & \underline{c_5} & , & \dots & , & \underline{c_i} & , \dots, & \underline{c_{n-1}}, & \underline{c_n} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\underline{d_1} & . & \underline{d_2} & . & \underline{d_3} & . & \underline{d_4} & . & \underline{d_5} & . & \dots & . & \underline{d_i} & . \dots & .\underline{d_{n-1}}. & .\underline{d_n}
\end{array}$$

$$= d_1 . d_2 . d_3 . d_4 . d_5 . \dots . d_{(n-1)} . d_n .$$

1.2.3 Arranjo

Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, o arranjo é uma estrutura combinatória que calcula o total de subconjuntos de m elementos distintos do conjunto A, com $m \leq n$. Geralmente, essa estrutura é simbolizada por $A_{n,m}$.

Santos *et al.* (2008, p. 42), “arranjos simples de n elementos tomados m a m, onde $n \geq 1$ e m é um número natural, com m$\leq n$, são todos os grupos de m elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos m elementos que compõem cada grupo”. Desta forma, é possível utilizar do agrupamento de casas para a demonstração da técnica de contagem para o arranjo, em que, cada elemento da casa c_i vai estar relacionado com cada elemento da casa c_{i+1}, obedecendo ao seguinte critério: $d_{i+1} = d_i - 1$, com $i \in [1, m-1]$, pois, o elemento escolhido em uma casa c_k, deve ser diferente dos elementos escolhidos nas casas c_j, com $j \in [1, k-1]$. Com isso, $d_1 = n$, $d_2 = n - 1$, $d_3 = n - 2$, e assim por diante até $d_m = n - (m - 1)$. A fórmula que define a técnica de contagem para o caso de arranjo pode então ser dada por:

$$\underline{c_1}\ ,\ \underline{c_2}\ ,\ \underline{c_3}\ ,\ \ldots,\quad \underline{c_n}$$

$$n\ .\ (n-1)\ .\ (n-2)\ .\ [n-(m-1)] = n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-m+1) =$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2).(n-m+1).(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

De forma resumida, $A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$.

1.2.4 Permutação

Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, a permutação é uma estrutura combinatória que calcula o total de subconjuntos que contém todos os elementos de A, diferindo-os somente pela ordem dos elementos. Geralmente, essa estrutura é representada por p_n.

Santos *et al.* (2008, p. 32) define que “uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos.” Desse modo, a permutação é um caso particular de arranjo para $n = m$, em que, todo subconjunto do arranjo vai conter os n elementos do conjunto A.

Assim, a demonstração da fórmula de permutação se torna simples uma vez que se trata do caso em que $n = m$ na fórmula de arranjo, o que retorna:

$$p_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$p_n = n!$$

1.2.5 Combinação

Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, a combinação é uma estrutura combinatória que calcula o total de subconjuntos de *m* elementos distintos do conjunto A, com $m \leq n$, em que, os subconjuntos diferem somente pela natureza dos elementos, não sendo modificados pela ordem dos seus elementos.

Segundo Santos *et al.* (2008, p. 46), “combinações simples de n elementos tomados m a m, onde $n \geq 1$ e m é um número natural que $m \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de m desses n elementos”.

A demonstração da técnica de contagem para uma combinação, pode ser desenvolvida em dois passos: i) calcular o arranjo do conjunto A e; ii) eliminar os subconjuntos que contém os mesmos elementos (subconjuntos repetidos) no arranjo de A.

Desse modo,

$i)$ $A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$

$ii)$ A quantidade de subconjuntos que contém os mesmos elementos vai ser dada pela permutação dos elementos destes subconjuntos. Como os mesmos contém m elementos, a quantidade de repetições é $m!$. Para fazermos a eliminação desses subconjuntos repetidos, divide-se a fórmula de $A_{n,m}$ por $m!$. Desse modo, a fórmula de combinação pode ser dada por: $C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

2 METODOLOGIA

Este trabalho de pesquisa se caracteriza como um estudo bibliográfico, de caráter exploratório-descritivo, com o objetivo de melhorar definições e construir conceitos importantes para o desenvolvimento do objeto de pesquisa (LIMA; MIOTO, 2007; MARCONI; LAKATOS, 2003).

Inicialmente, na fase de investigação das soluções (LIMA; MIOTO, 2007, p.40), buscou-se por trabalhos acadêmicos (teses, dissertações, livros e artigos científicos) no Portal de Periódicos CAPES, com o objetivo de investigar o estado da arte, tanto da matemática aplicada como de ensino de matemática, relacionado ao tema de pesquisa. Para isso, como critério semântico de busca utilizou-se as seguintes palavras-chaves principais: “estratégias de ensino de análise combinatória”, “análise combinatória no ensino básico”, “aplicações da análise combinatória”, “soma de produtos”, “metodologias alternativas para o ensino de matemática” e “resolução de problemas”. Adicionalmente, utilizou-se o Google Acadêmico como fonte de busca, adotando-se o mesmo critério semântico.

Nesse sentido, na fase de análise explicativa das soluções (LIMA; MIOTO, 2007, p. 41), buscou-se analisar a contribuição de diversos autores para o avanço nas pesquisas e no ensino da análise combinatória, em especial o estudo de eventos que tratam do caso da soma de produtos entre elementos de um dado conjunto numérico, com vista ao desenvolvimento de uma nova técnica de contagem que solucionasse problemas dessa natureza. Já na etapa de síntese integradora (LIMA; MIOTO, 2007, p. 41), foram propostas situações-problema relacionadas ao tema de pesquisa, bem como técnicas de solução dessas questões, com base no PFC e em estratégias alternativas desenvolvidas neste trabalho. Estas soluções foram ilustradas a partir da interpretação de diagramas de sequência lógicos de cálculos sugeridos pelo autor, com o objetivo de auxiliar o professor no planejamento e execução de atividades/ projetos interdisciplinares de matemática no ensino médio.

3 ESTRATÉGIAS PARA A ANÁLISE COMBINATÓRIA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA MODELADAS POR SOMA DE PRODUTOS

3.1 DISPOSIÇÕES PRELIMINARES

Nos livros didáticos são encontrados problemas de análise combinatória nos quais as escolhas para a formação dos grupos da solução são elementos de um só conjunto. Conjunto este, no qual denominamos neste trabalho como “conjunto de tipos” de eventos possíveis, nos quais tais grupos podem ou não levar em consideração a repetição de elementos deste conjunto.

Geralmente, são encontradas situações-problema que envolvem repetição de elementos do conjunto dado, como: quantas placas de automóveis podemos compor com um número determinado de escolhas para sua formação? Quantas senhas podem ser desenvolvidas em um *website* obedecendo critérios para sua formação? De quantos modos podem ser distribuídos brindes na realização de um sorteio? Entre outros. Há também problemas que não envolvem repetição, como por exemplo: quantas filas indianas podemos compor com uma certa quantidade de pessoas? Quantos sucos podemos montar escolhendo uma certa quantidade de frutas na sua composição, entre uma quantidade determinada de frutas para as escolhas? Quantas chapas partidárias podem compor a formação de uma bancada de vereadores de uma cidade?

O que há em comum nos enunciados desses problemas em combinatória é que eles restringem outras análises possíveis para a solução de problemas atuais da sociedade. Quando se tem a inclusão de “subtipos” para cada tipo de evento, a abordagem de resolução é expandida e, consequentemente, requer uma análise mais detalhada da situação. Por exemplo, em uma situação em que é pedido para se escolher três cores diferentes, entre uma determinada quantidade possível de cores. Se cada cor possuir uma quantidade conhecida de tons, de quantas formas poderíamos fazer a escolha do trio de cores? Neste caso, existiria o conjunto dos “tipos” que seria formado pelas cores e o conjunto dos “subtipos” que levaria em consideração os tons relativos a cada uma dessas cores.

Essa é uma situação que remete à ampliação das discussões quanto às novas demandas da sociedade e quanto às aplicações da análise combinatória para a modelagem e resolução desses problemas. Em adição, esse tópico de pesquisa pode abrir novas possibilidades para o desenvolvimento de ferramentas de ensino e de projetos interdisciplinares que relacionem diferentes áreas do conhecimento com o objetivo de significar o processo de ensino-aprendizagem de matemática. Dorox e Ploharski (2015) destacam essa ideia quando discutem que

> a realidade social, cada vez mais dinâmica e complexa, exige o desenvolvimento da autonomia intelectual de todos os cidadãos. Com isso, compreende-se que o ensino da matemática precisa viabilizar a verdadeira vinculação de seu emprego no cotidiano do educando, proporcionando assim, o real aprendizado matemático.

Diversos outros eventos/ processos envolvem este modelo de situação-problema com tipo e subtipo, como é possível verificar nos exemplos a seguir:

i) Uma indústria fabrica ligas metálicas escolhendo três tipos de metais para composição de cada uma de suas ligas, em que cada metal tem uma quantidade diferente de escolhas no mercado de acordo com a sua resistência. A indústria possui um catálogo de fornecedores que disponibilizam metais para a empresa com diversos tipos de resistências para cada um dos metais. Quantas ligas diferentes essa indústria pode produzir para introduzi-las no seu catálogo de vendas?

ii) Uma indústria que fabrica tintas naturais de cabelo para seus clientes mistura três cores diferentes de tintas produzidas com plantas encontradas na natureza. Havendo para cada cor, tons diferentes formulados no processo de fabricação, observou-se diferenças sutis e a criação de novos tons naturais para os cabelos. Quantas tintas diferentes essa empresa pode fornecer ao mercado?

iii) Uma indústria farmacêutica de produtos naturais comercializa um produto chamado tri-ômega, suplemento composto por três ômegas diferentes, entre vários tipos de ômegas encontrados em alimentos da natureza. Para cada tipo desses ômegas, a empresa possui subtipos, classificados pelo teor de qualidade e eficiência da matéria prima utilizada. Quantos suplementos tri-ômegas esta empresa pode produzir, para testes e análises de qualidade?

A modelagem desses problemas combinatórios com tipos e subtipos de eventos pode envolver sequências lógicas de cálculo de rápida articulação para as soluções em questão. A quantidade de cálculos pode aumentar significativamente à medida que a situação-problema aborda uma quantidade maior de tipos de eventos e de seus respectivos subtipos (número de opções para um dado evento). Nesse sentido, surge a possibilidade de desenvolvimento de técnicas de contagem que possam fazer uso de sequências lógicas de cálculo bem definidas para auxiliar o educando no desenvolvimento de soluções adequadas aos objetivos que estas situações se propõem. Como discutido anteriormente, o ensino de matemática através de resolução de problemas e da conscientização da importância da linguagem lógica neste processo pode favorecer o aprendizado do aluno, além de mostrar-lhe novas possibilidades para interpretação e solução de problemas atuais que fazem parte do cotidiano das pessoas.

Serão apresentadas algumas situações que se caracterizam com tipos e subtipos de eventos, com as respectivas análises das combinações possíveis (que levam a identificação da natureza do problema) e dos cálculos necessários às soluções dos problemas para que uma discussão sobre técnicas de resolução desses problemas possa ser inicializada.

Situação 1. Em uma cidade haverá eleição para a escolha de 3 vereadores. Os candidatos estão distribuídos em 4 chapas partidárias (A, B, C, D), que por sua vez possuem 5, 8, 6 e 10 candidatos inscritos respectivamente em cada uma dessas chapas. De quantas formas pode ser constituída a bancada de vereadores desta cidade nessa eleição, sendo que, os vereadores eleitos têm que ser de chapas partidárias diferentes?

É possível desenvolver uma solução para esta situação-problema, descrevendo inicialmente quais as composições possíveis para a bancada, levando-se em consideração apenas as chapas partidárias (tipos). Aplicando-se a técnica de contagem de combinação, tem-se: $C_{4,3} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$ diferentes composições para a bancada. Simbolicamente, as bancadas possíveis podem ser representadas pelos trios de partidos $ABC, ABD, ACD\ e\ BCD$.

Uma vez que a solução do problema deve envolver as quantidades de candidatos em cada partido, pode-se substituir cada simbologia, presente em cada uma das quatro combinações, pelas respectivas quantidades de candidatos informados no problema. Deve-se aplicar o princípio fundamental da contagem em cada um dos quatro termos resultantes e somar os resultados obtidos. Dessa forma, a solução pode ser dada por: $5.8.6 + 5.8.10 + 5.6.10 + 8.6.10 = 1420$

possibilidades para a composição da bancada de vereadores da cidade, levando em consideração os partidos e a quantidade de candidatos em cada um deles.

Neste contexto, pode ser definido um conjunto A como o conjunto dos subtipos (o qual seus elementos representam a quantidade de candidatos em cada partido). Analisando a solução, observa-se que esta pode ser modelada pela soma dos produtos entre os elementos de posições diferentes do conjunto $A = \{5, 8, 6, 10\}$, tomados 3 a 3, sem permutação destes produtos na soma. De modo geral, esta solução é dada pela soma dos produtos entre os quatro elementos ($m = 4$) de posições diferentes do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tomados n a n ($n = 3$), sem permutação destes produtos na soma: $a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4$.

Situação 2. Situação similar à primeira, mas com uma quantidade maior de chapas partidárias. Neste segundo caso, considera-se 8 chapas partidárias (A, B, C, D, E, F, G, H) e o conjunto A é dado por $A = \{5, 4, 6, 10, 8, 12, 9, 15\}$.

Explorando a análise do exemplo anterior, tem-se: $C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ diferentes composições para a bancada, considerando apenas as opções de partidos possíveis em cada combinação. Estas 56 possibilidades podem ser representadas simbolicamente por 56 termos, como a seguir:

$ABC, ABD, \ldots, ABH, ACD, ACE, \ldots, ACH, \ldots, AGH, BCD, BCE, \ldots, BCH, BDE, BDF, BDH, \ldots, BGH, \ldots, EFG, EFH, EGH, FGH.$

Aplicando-se o princípio fundamental da contagem em cada um desses termos, substituindo cada partido pela respectiva quantidade de candidatos inscritos, pode-se expressar a solução para o problema na forma:

$ABC + ABD + \ldots + ABH + ACD + ACE + \cdots + ACH + \cdots + AGH + BCD + BCE + \cdots + BCH + BDE + BDF + BDH + \cdots + BGH + \cdots + EFG + EFH + EGH + FGH = 5.4.6 + 5.4.10 + 5.4.8 + 5.4.12 + 5.4.9 + 5.4.15 + \cdots + 5.6.9 + 5.6.15 + 5.10.8 + \cdots + 5.8.12 + 5.8.9 + \ldots + 4.6.10 + 4.6.8 + 4.6.12 + 4.6.9 + \cdots + 4.12.9 + 4.12.15 + 4.9.15 + 6.10.8 + 6.10.12 + 6.10.9 + 6.10.15 + 6.8.12 + \cdots + 10.8.12 + 10.8.9 + 10.8.15 + \ldots + 8.12.9 + 8.12.15 + 8.9.15 + 12.9.15 = 33495$ possibilidades de resultados para a eleição.

Da forma como está escrita, esta solução pode ser vista como a soma dos produtos entre elementos diferentes do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, tomados 3 a 3, sem permutação destes produtos na soma, com $m = 8$ e $n = 3$. De forma geral, a solução é dada por:

$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + a_1a_2a_6 + a_1a_2a_7 + a_1a_2a_8 + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 +$
$+ a_1a_3a_6 + a_1a_3a_7 + a_1a_3a_8 + a_1a_4a_5 + a_1a_4a_6 + a_1a_4a_7 + a_1a_4a_8 + a_1a_5a_6 + a_1a_5a_7$
$+ a_1a_5a_8 + a_1a_6a_7 + a_1a_6a_8 + a_1a_7a_8 + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_3a_6 + a_2a_3a_7 + a_2a_3a_8$
$+ a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 + a_2a_4a_7 + a_2a_4a_8 + a_2a_5a_6 + a_2a_5a_7 + a_2a_5a_8 + a_2a_6a_7 + a_2a_6a_8$
$+ a_2a_7a_8 + a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_4a_7 + a_3a_4a_8 + a_3a_5a_6 + a_3a_5a_7 + a_3a_5a_8 + a_3a_6a_7$
$+ a_3a_6a_8 + a_3a_7a_8 + a_4a_5a_6 + a_4a_5a_7 + a_4a_5a_8 + a_4a_6a_7 + a_4a_6a_8 + a_4a_7a_8 + a_5a_6a_7$
$+ a_5a_6a_8 + a_5a_7a_8 + a_6a_7a_8.$

Analisando-se uma terceira situação semelhante às anteriores, agora com 10 chapas partidárias (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}) e as quantidade de candidatos por partido dadas pelos elementos do conjunto A, com $A = \{4, 5, 8, 6, 10, 12, 9, 5, 7, 14\}$, tem-se $C = \frac{10!}{3!.7!} = 120$ possibilidades de combinações entre os partidos para formar as bancadas. Levando-se em consideração a quantidade de candidatos em cada chapa, tem-se a soma de 120 produtos entre elementos de posições diferentes no conjunto A, tomados 3 a 3, como solução para o problema de contagem: $4.5.8 + 4.5.6 + \cdots + 4.5.14 + 4.8.6 + 4.8.10 + \cdots + 4.8.14 + \cdots + 4.5.7 + 4.5.14 + 4.7.14 + 5.8.6 + 5.8.10 + \cdots + 5.8.14 + 5.6.10 + 5.6.12 + \cdots + 5.6.14 + \cdots + 5.5.7 + 5.5.14 + 5.7.14 + \cdots + 9.5.7 + 9.5.14 + 9.7.14 + 5.7.14.$

Com $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, a_{10}\}$, m=10 e n=3, a solução para o problema pode ser generalizada pela expressão:

$$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots + a_1a_2a_{10} + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + \cdots + a_1a_3a_{10} +$$
$$\cdots + a_1a_9a_{10} + +a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + \cdots + a_2a_3a_{10} + a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 + \cdots + a_2a_4a_{10} +$$
$$+ \cdots + a_2a_9a_{10} + a_7a_8a_9 + a_7a_8a_{10} + a_7a_9a_{10} + a_8a_9a_{10}.$$

Como observado, a solução analítica para um problema que trata de combinações com tipos e subtipos de eventos requer a descrição exata de todas as combinações possíveis. À medida que a quantidade de tipos e de opções (subtipos) desses tipos aumenta, essa descrição se torna mais complexa de se estabelecer.

Com base no que foi discutido, nas próximas seções serão apresentadas estratégicas de resolução (representadas a partir de diagramas de sequências lógicas de operações matemáticas) e técnicas de contagem que foram desenvolvidas neste trabalho para auxiliar a descrição e execução dos cálculos necessários à solução. Em adição, outras situações-problema foram propostas e solucionadas com base nas técnicas apresentadas, com o objetivo de fornecer ao professor de matemática um material de consulta adequado para o desenvolvimento de projetos interdisciplinares nas séries finais do ensino médio que tenham essa temática como foco.

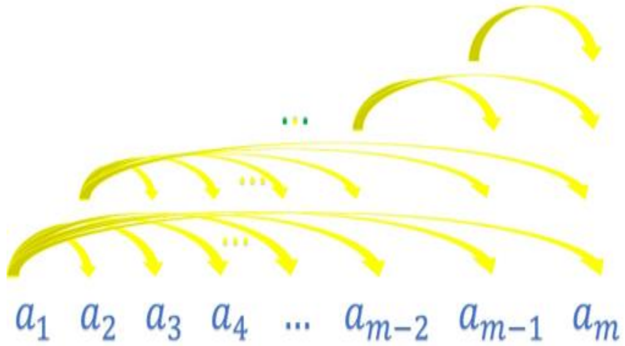
3.2 ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO BASEADA NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Considerando a possibilidade de aplicação da temática em estudo em projetos interdisciplinares de matemática no ensino médio, esse trabalho considerou estratégias de solução baseadas no princípio fundamental da contagem para situações-problema modeladas através de soma de produtos entre elementos de posições diferentes em um conjunto numérico com m elementos, tomados dois a dois ou três a três.

Para os problemas que envolvam soma de produtos entre elementos de um conjunto numérico, tomados dois a dois, será possível apresentar o conjunto dos tipos de eventos em questão, definido neste trabalho como conjunto T. O conjunto T possui m elementos, com $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_m\}$. Nesse contexto, t_i representa o i-ézimo tipo, com $i \in [1, m]$. Para cada tipo de evento, pode haver uma quantidade de subtipos (ou opções) disponíveis. Assim, também é possível definir o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, onde o elemento a_i, com $i \in [1, m]$, representa a quantidade de subtipos do tipo t_i. Nestes casos, para determinar quantas são as combinações possíveis entre dois dos m tipos de eventos do conjunto T, sem permutação e repetição, se faz necessário partir para o conjunto A e realizar todas as combinações entre os seus m elementos, tomados dois a dois, aplicando o princípio fundamental da contagem e somando os resultados dos produtos obtidos. A conclusão destas operações matemáticas representa a solução do problema em destaque.

Para facilitar o entendimento dos processos envolvidos na solução destes problemas, foi desenvolvido um diagrama de sequências lógicas de operações matemáticas. Pelo diagrama (**Figura 5**), dado o conjunto A, inicialmente se deve manter o elemento a_1 fixo e multiplicá-lo por cada um dos elementos subsequentes em *A*.

Figura 5. Diagrama genérico de sequências lógicas de cálculos necessárias para a solução de problemas tipo e subtipo, com elementos do conjunto A tomados 2 a 2, sem permutação e repetição.



Fonte: Próprio autor.

A primeira etapa da solução é finalizada com a soma dos resultados de todas as multiplicações obtidas. O segundo passo é manter o próximo elemento (a_2) fixo e executar o mesmo procedimento descrito na primeira etapa. O processo se repete até o passo $(m - 1)$, com a última multiplicação possível definida por $a_{m-1}.\, a_m$. No diagrama, essas ações sucessivas estão representadas por setas que iniciam em um elemento a_i e terminam em seus elementos subsequentes.

Por fim, basta somar todos os resultados das multiplicações entre os elementos tomados 2 a 2, em cada passo da solução, para obter a solução geral para o problema.

De forma analítica, tem-se:

Passo 1: $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m$

Passo 2: $a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-1} + a_2a_m$

Passo $(m-2)$: $a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + a_{m-1}a_m$

Passo $(m-1)$: $a_{m-1}a_m$

Somando-se os resultados obtidos em cada passo, tem-se:

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-1} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-1} + a_3a_m + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + a_{m-1}a_m + a_{m-1}a_m$$

Esta soma de produtos entre elementos diferentes do conjunto A tomados 2 a 2, sem permutação destes produtos na soma, é a solução genérica para o caso discutido.

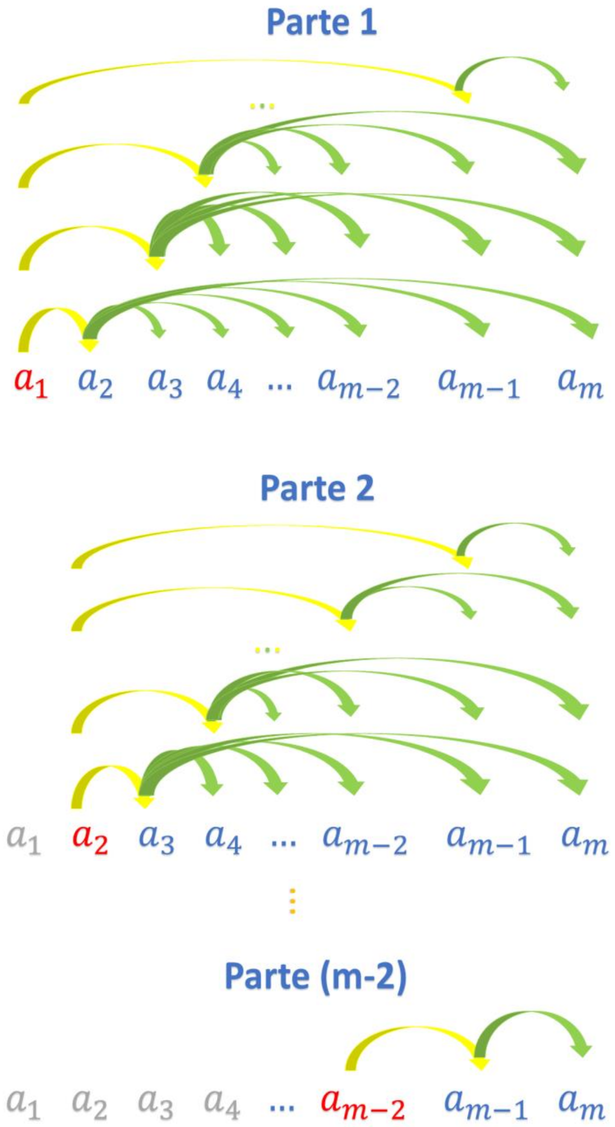
De forma análoga, para facilitar o entendimento dos passos necessários à solução dos problemas que envolvam as combinações entre elementos de *A,* tomados 3 a 3, foi desenvolvido um segundo modelo de diagrama de sequências de cálculos (**Figura 6**).

A sequência lógica a partir do diagrama é descrita a seguir. Observe que para estes problemas, serão contabilizadas somas de produtos entre três elementos distintos do conjunto *A*, sem permutação e repetição dos elementos. No diagrama da **Figura 6**, as ações para a solução são divididas em partes.

Inicialmente, o a_1 deve ser mantido fixo, e fazer com que o a_2 também se torne fixo (temporário) para que o par a_1a_2 possa ser multiplicado por cada a_i subsequente a a_2 (elementos de a_3 a a_m). Da mesma forma, para continuar a sequência das ações de combinação de três elementos de A, agora o par a_1a_3 é mantido fixo, enquanto se varia o terceiro elemento (de a_4 a a_m) na multiplicação. O cálculo da multiplicação entre o par de elementos a_1a_{m-1} combinado com a_m define a última multiplicação a ser executada na parte 1 da solução.

Seguindo a mesma ideia, a parte 2 da sequência de cálculos se inicia com a multiplicação entre a_2a_3 fixos e os elementos variáveis (de a_4 a a_m). Em outras palavras, a cada par fixo de elementos, faz-se a cominação deste par com cada um dos a_i posteriores. O cálculo da multiplicação entre o par de elementos a_2a_{m-1} combinado com a_m define a última multiplicação a ser executada na parte 2 da solução.

Figura 6. Diagrama genérico de sequências lógicas de cálculos necessárias para a solução de problemas tipo e subtipo, com elementos do conjunto A tomados 3 a 3, sem permutação e repetição.



Fonte: Próprio autor.

Este processo continua até a última parte da solução, com a multiplicação entre o par $a_{m-2}a_{m-1}$ e a_m.

As setas amarelas destacam os pares de elementos que ficarão fixos em cada passo, enquanto as setas verdes representam a multiplicação do par fixo com os elementos subsequentes (considerados variáveis em um dado passo).

De forma analítica, os cálculos a serem realizados são descritos a seguir:

Parte 1

Passo 1.1: $a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots + a_1a_2a_{m-1} + a_1a_2a_m$

Passo 1.2: $a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_3a_6 + \cdots + a_1a_3a_{m-1} + a_1a_3a_m$

Passo 1.3: $a_1a_4a_5 + a_1a_4a_6 + a_1a_4a_7 + \cdots + a_1a_4a_{m-1} + a_1a_4a_m$

(...)

Último passo da parte 1: $a_1a_{m-1}a_m$

Parte 2

Passo 2.1: $a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_3a_6 + \cdots + a_2a_3a_{m-1} + a_2a_3a_m$

Passo 2.2: $a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 + a_2a_4a_7 + \cdots + a_2a_4a_{m-1} + a_2a_4a_m$

Último passo da parte 2: $a_2a_{m-1}a_m$

(...)

Parte $(m-2)$

Único passo: $a_{m-2}a_{m-1}a_m$.

Somando-se os resultados obtidos nas $(m-2)$ partes, se tem a soma dos produtos entre elementos em posições distintas no conjunto A, tomados 3 a 3, sem permutação destes produtos na soma, descrito de forma literal como:

$$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots + a_1a_2a_{m-1} + a_1a_2a_m + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 +$$
$$+a_1a_3a_6 + \cdots + a_1a_3a_{m-1} + a_1a_3a_m + a_1a_4a_5 + a_1a_4a_6 + a_1a_4a_7 + \cdots +$$
$$+a_1a_4a_{m-1} + a_1a_4a_m + \cdots + a_1a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_{m-2}a_m + a_1a_{m-1}a_m +$$
$$a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_3a_6 + \cdots + a_2a_3a_{m-1} + a_2a_3a_m + a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 +$$
$$+a_2a_4a_7 + \cdots + a_2a_4a_{m-1} + a_2a_4a_m + a_2a_5a_6 + a_2a_5a_7 + \cdots +$$
$$+a_2a_5a_{m-1} + a_2a_5a_m + \cdots + a_2a_{m-2}a_{m-1} + a_2a_{m-2}a_m + a_2a_{m-1}a_m +$$
$$a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_4a_7 + \cdots + a_3a_4a_{m-1} + a_3a_4a_m + a_3a_5a_6 + a_3a_5a_7 +$$
$$+a_3a_5a_8 + \cdots + a_3a_5a_{m-1} + a_3a_5a_m + a_3a_6a_7 + a_3a_6a_8 + \cdots +$$
$$+a_3a_6a_{m-1} + a_3a_6a_m + \cdots + a_3a_{m-2}a_{m-1} + a_3a_{m-2}a_m + a_3a_{m-1}a_m + \cdots +$$
$$+a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-3}a_{m-2}a_m + a_{m-3}a_{m-1}a_m + a_{m-2}a_{m-1}a_m.$$

Dessa forma, tem-se uma primeira alternativa para desenvolver os cálculos necessários à solução de problemas desta natureza.

3.3 ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA A SOMA DE PRODUTOS ENTRE ELEMENTOS DE POSIÇÕES DISTINTAS DE UM CONJUNTO NUMÉRICO TOMADOS $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{n}$, SEM REPETIÇÃO E PERMUTAÇÃO DOS ELEMENTOS

Dado um conjunto A, com m elementos, sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, como visto anteriormente, é possível formar produtos tomados n a n $(n \in N)$ entre elementos distintos ou repetidos deste conjunto e assim buscar técnicas de contagem alternativas àquelas baseadas no princípio fundamental da contagem com o objetivo de generalizar a solução das situações em destaque neste trabalho. Esta seção apresenta algumas definições que guiarão o desenvolvimento de uma técnica de contagem alternativa para resolver estes problemas.

$\gamma_{n\times r}$: estrutura combinatória que representa a soma dos produtos dos elementos do conjunto A, tomados n a n, tendo r elementos repetidos deste conjunto, em cada um dos produtos da soma, sem permutações destes produtos, com $r \leq n$.

$B(n)$: estrutura combinatória que é a soma dos produtos de elementos diferentes do conjunto A, tomados n a n, sem permutações destes produtos na soma. $B(n)$ é um caso específico de $\gamma_{n\times r}$, para $r = 1$ e representa a solução dos problemas que estão sendo tratados neste trabalho.

Um ponto importante para o desenvolvimento de uma técnica de contagem para $B(n)$ é definir um padrão de escrita para a sua forma analítica. Dado um valor de n, a escrita de $B(n)$ será dada da seguinte forma: os índices dos elementos em um dado produto serão dados sempre em ordem crescente e, em adição, nenhum dos produtos subsequentes terá um elemento com índice menor considerando-se uma mesma posição desse elemento no produto (comparado com qualquer um dos produtos antecedentes). De forma geral, a escrita analítica de $B(n)$ pode ser dada por:

$$B(n) = \sum_{j_1=1}^{m-(n-1)} a_{j_1}.\left(\sum_{j_2=j_1+1}^{m-(n-2)} a_{j_2}.\left(\sum_{j_3=j_2+1}^{m-(n-3)} a_{j_3}.\dots.\sum_{j_k=j_{k-1}+1}^{m-(n-k)} a_{j_k}\right)\right).\dots$$

$$\dots.\left(\sum_{j_{n-1}=j_3+1}^{m-1}\left(a_{j_{(n-1)}}.\left(\sum_{j_n=j_{n-1}+1}^{m} a_{j_n}\right)\right)\right) \quad (Eq. 3.1)$$

As escritas de casos particulares de $B(n)$ são explicitadas a seguir para facilitar o entendimento do leitor. Para $n = 1$, tem-se a soma dos produtos dos elementos do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, tomados 1 a 1, sem permutação destes produtos, que é o mesmo que a operação de soma dos elementos do conjunto A. Assim, tem-se que:

$$B(1) = \gamma_{1\times 1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1} + a_m \quad (Eq. 3.2)$$

Por sua vez, $B(2)$ corresponde à soma dos produtos entre os elementos de posições diferentes do conjunto A, tomados 2 a 2, sem as permutações destes produtos na soma, e é dado por:

$$B(2) = \gamma_{2\times 1} = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_1a_6 + \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m + a_2a_3 +$$
$$+a_2a_4 + a_2a_5 + a_2a_6 + \ldots + a_2a_{m-1} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots +$$
$$+a_3a_{m-1} + a_3a_m + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + a_{m-1}a_m \quad (Eq. 3.3)$$

Pela definição de $B(n)$, $B(3)$ é a soma dos produtos entre os elementos de posições diferentes no conjunto A, tomados 3 a 3, sem permutações destes produtos na soma, e tomando a escrita sugerida na $Eq. 3.1$ tem-se:

$$B(3) = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + \cdots + a_1a_4a_5 + a_1a_4a_6 + \cdots$$
$$+ a_1a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_{m-2}a_m + a_1a_{m-1}a_m + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + \cdots$$
$$+ a_2a_{m-2}a_{m-1} + a_2a_{m-2}a_m + a_2a_{m-1}a_m + a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + \cdots$$
$$+ a_3a_4a_{m-1} + a_3a_4a_m + a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-3}a_{m-2}a_m$$
$$+ a_{m-2}a_{m-1}a_m \quad (Eq. 3.4)$$

Seguindo o mesmo padrão de escrita sugerido para os casos anteriores, $B(4)$ pode ser dado por:

$$B(4) = a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2a_3a_5 + \cdots + a_1a_2a_3a_m + a_1a_2a_4a_5 + a_1a_2a_4a_6 + \cdots$$
$$+a_1a_2a_4a_m + \cdots + a_1a_2a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_2a_{m-2}a_m + a_1a_2a_{m-1}a_m + a_1a_3a_4a_5 +$$
$$+a_1a_3a_4a_6 + \cdots + a_1a_3a_4a_m + a_1a_3a_5a_6 + a_1a_3a_5a_7 + \cdots + a_1a_3a_5a_m + \cdots$$
$$a_1a_3a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_3a_{m-2}a_m + a_1a_3a_{m-1}a_m + \cdots + a_1a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} +$$
$$+ \ldots + a_1a_{m-3}a_{m-2}a_m + a_1a_{m-3}a_{m-1}a_m + a_1a_{m-2}a_{m-1}a_m + \cdots +$$
$$+a_{m-4}a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-4}a_{m-3}a_{m-2}a_m + a_{m-4}a_{m-3}a_{m-1}a_m +$$
$$+a_{m-4}a_{m-2}a_{m-1}a_m + a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1}a_m \quad (Eq. 3.5)$$

De forma resumida, a escrita de $B(n)$ a partir da $Eq. 3.1$ pode ser aplicada para todo n, $n \in N$. Desse modo, observando o formato de apresentação dos dados, objetivou-se uma associação entre $B(n)$ e o seu antecessor $B(n-1)$, levando-se em consideração a expressão $\gamma_{n\times r}$ definida anteriormente, para desenvolver uma técnica de contagem para $B(n)$ e consequentemente uma estratégia alternativa para solucionar problemas de tipo e subtipo explanados neste trabalho. Todo o desenvolvimento da técnica de contagem para $B(n)$ é apresentado a seguir.

3.3.1 Desenvolvimento de expressão matemática para $\boldsymbol{B(n)}$

Observa-se que ao multiplicar o $B(1)$ da Eq. 3.2 por ele mesmo, e aplicarmos a propriedade distributiva desse operador, é gerada a expressão para $B(2)$ dada na Eq. 3.3, como uma das partes do resultado. Do mesmo modo, ao multiplicarmos o $B(2)$ da Eq. 3.3 por $B(1)$, observa-se o aparecimento da expressão para $B(3)$ (Eq. 3.4) na solução. Da mesma forma, a expressão para $B(4)$ surge como parte do resultado da multiplicação de $B(3)$ por $B(1)$. Pelo formato escolhido para escrita dessas expressões, esse comportamento será notado para todo n subsequente. De forma geral, pode-se verificar que ao multiplicarmos $B(n-1)$ por $B(1)$, para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, será gerado $B(n)$ como parte da solução.

Deste modo, substituindo $B(1)$ pela Eq. 3.2 na expressão a seguir, tem-se:

$$B(n-1).B(1) = B(n-1).(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_m)$$

$$B(n-1).B(1) = B(n-1).a_1 + B(n-1).a_2 + B(n-1).a_3 + B(n-1).a_4 + \cdots + B(n-1).a_m \quad (Eq.3.6)$$

A fim de relacionarmos de uma forma mais direta cada um dos $B(n-1)$ do 2º membro da Eq. 3.6 com cada elemento de posição a_i no conjunto A (a_i associado), pode-se reescrever $B(n-1)$ em relação ao seu a_i associado, aplicando-se a Eq. A9 do Apêndice A, para $n-1$. Dessa forma, segue que:

$$B(n-1).B(1) = (a_1.[B(n-2)]_1 + [B(n-1)]_1).a_1 + (a_2.[B(n-2)]_2 + [B(n-1)]_2).a_2 + (a_3.[B(n-2)]_3 + [B(n-1)]_3).a_3 + (a_4.[B(n-2)]_4 + [B(n-1)]_4).a_4 + \cdots + (a_m.[B(n-2)]_m + [B(n-1)]_m).$$

Efetuando-se a propriedade distributiva e reorganizando a solução tem-se:

$$B(n-1).B(1) = [\,[B(n-2)]_1.{a_1}^2 + [B(n-2)]_2.{a_2}^2 + [B(n-2)]_3.{a_3}^2 + [B(n-2)]_4.{a_4}^2 + \cdots + [B(n-2)]_m.{a_m}^2\,] + [\,[B(n-1)]_1.a_1 + [B(n-1)]_2.a_2 + [B(n-1)]_3.a_3 + [B(n-1)]_4.a_4 + \cdots + [B(n-1)]_m.a_m\,] =$$

$$\sum_{i=1}^{m}[B(n-2)]_i.a_i{}^2+\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i.a_i \quad (Eq.3.7)$$

A solução do primeiro termo da $Eq.3.7$ ($\sum_{i=1}^{m}[B(n-2)]_i.a_i{}^2$) é apresentada no **Apêndice B**, enquanto a solução do segundo termo ($\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i.a_i$) é descrita no **Apêndice C**.

Desse modo, para $r=2$ na Eq. B9 do **Apêndice $\boldsymbol{B}$**, tem-se que:

$$\gamma_{n\,x\,2}=\sum_{i=1}^{m}[B(n-2)]_i.a_i{}^2 \quad (Eq.3.8)$$

E da Eq. C19 do **Apêndice $\boldsymbol{C}$**, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i.a_i=n.B(n) \quad (Eq.3.9)$$

Substituindo as Eq. 3.8 e 3.9 na Eq. 3.7, chega-se a expressão:

$$B(n-1).B(1)=\gamma_{n\,x\,2}+n.B(n) \quad (Eq.3.10)$$

O desenvolvimento da solução para o termo $\gamma_{n\,x\,2}$ é apresentado nos **Apêndices D** e **E**. Assim, fazendo $r=2$, na Eq. E18, $\gamma_{n\,x\,2}$ pode ser escrito como:

$$\gamma_{n\,x\,2}=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-2}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j} \quad (Eq.3.11)$$

Substituindo a Eq. 4.11 na Eq. 4.10,

$$B(n-1).B(1)=nB(n)+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-2}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}$$

Assim,

$$nB(n)=B(n-1).B(1)-\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-2}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}$$

Pode-se acrescentar o termo $B(n-1)\gamma_{1\,x\,1}$ no somatório $\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-2}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}$, para fazê-lo iniciar de $j=1$ e, em seguida, retirar este termo excedente, escrevendo a equação acima da seguinte forma:

$$nB(n)=B(n-1).B(1)+\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}\right]-B(n-1)\gamma_{1\,x\,1}$$

$$nB(n) = B(n-1).B(1) + \left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}\right] - B(n-1)B(1)$$

$$nB(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}$$

Desta forma, uma expressão preliminar para $B(n)$ pode ser dada pela Eq. 3.12.

$$B(n) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}}{n} \quad (Eq. 3.12)$$

Pode-se verificar que o termo $\gamma_{j\,x\,j}$ é parte integrante da solução de $B(n)$. Em adição, a Eq. D2 do **Apêndice D** mostra que $\gamma_{j\,x\,j}$ é dado por:

$$\gamma_{j\,x\,j} = \sum_{k=1}^{m}(a_k)^j \quad (Eq. 3.13)$$

Analisando-se esta Equação, $\gamma_{j\,x\,j}$ pode ser escrito em função apenas dos k elementos do conjunto A, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, com j elementos repetidos nos produtos tomados $j\;x\;j$, o que facilita as operações matemáticas para o cálculo de $B(n)$.

Então, substituindo a Eq. 3.13 na Eq. 3.12, tem-se uma expressão matemática analítica para o cálculo de $B(n)$ desenvolvida a partir dos pressupostos discutidos ao longo do trabalho:

$$B(n) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,B(n-j)\sum_{k=1}^{m}(a_k)^j}{n} \quad (Eq. 3.14).$$

3.3.2 Estratégias de resolução baseado em $B(n)$ para os casos n =2 e n =3

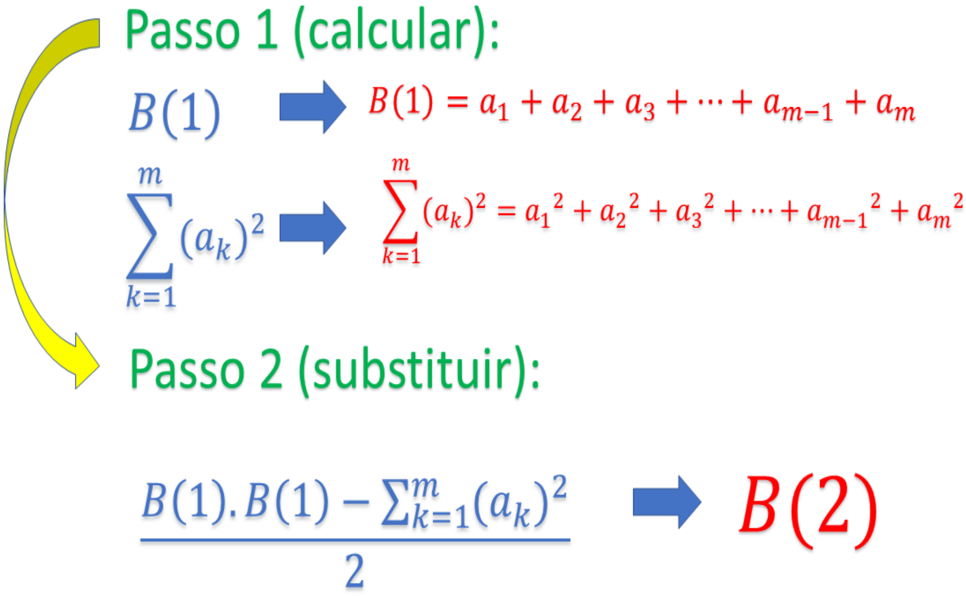
Uma alternativa para a solução dos problemas citados anteriormente, é usar as formas particulares $B(2)$ e $B(3)$ de $B(n)$ desenvolvido neste trabalho, para os casos das combinações 2 a 2 e 3 a 3, respectivamente.

Como discutido nos capítulos anteriores, $B(2)$ é a soma dos produtos entre elementos distintos do conjunto A, tomados 2 a 2, sem a permutação destes produtos na soma. A descrição análoga pode ser realizada para B(3), que leva em consideração os casos tomados 3 a 3. Dadas essas condições, pode-se calcular

$B(2)$ como solução para problemas combinatórios dessa natureza, utilizando a expressão matemática $B(2) = \frac{B(1).B(1) - \sum_{k=1}^{m} a_k{}^2}{2}$.

Observe que para o cálculo de $B(2)$ é preciso calcular os valores de $B(1)$ e do somatório $\sum_{k=1}^{m} a_k{}^2$. A seguir, é mostrado um diagrama de sequências lógicas (Figura 7) que foi desenvolvido neste trabalho para o cálculo de $B(2)$.

Figura 7. Diagrama de sequências lógicas para o cálculo de B(2).



Fonte: Próprio autor.

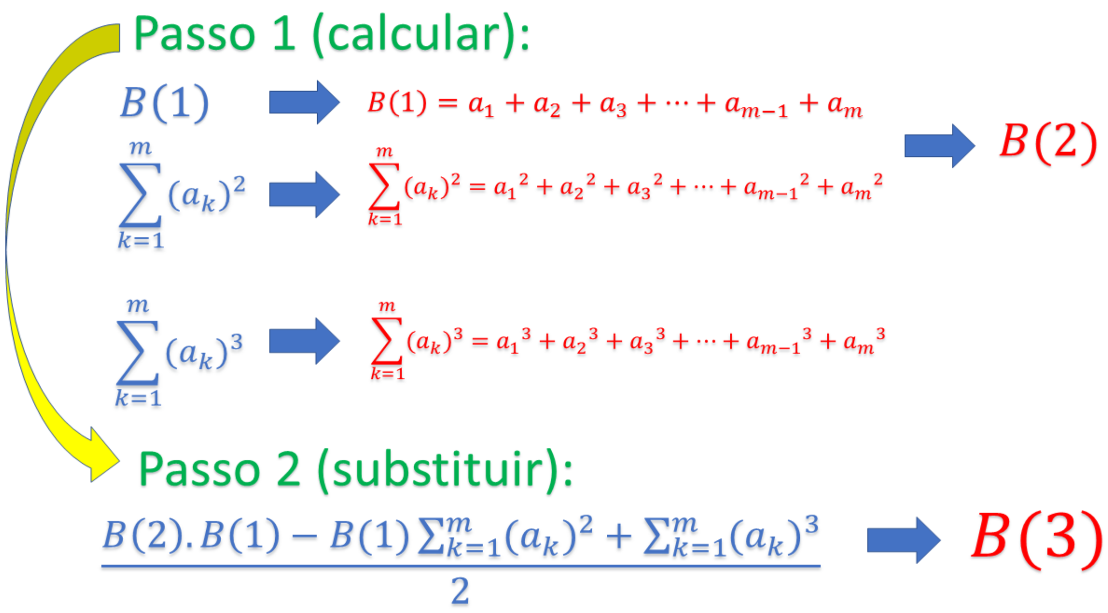
De forma análoga a B(2), B(3) é a soma dos produtos entre elementos distintos do conjunto A, tomados 3 a 3, sem permutação destes produtos na soma. Pode-se calcular o $B(3)$ utilizando a seguinte expressão:

$$B(3) = \frac{B(2).B(1) - B(1).\sum_{k=1}^{m} a_k{}^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k{}^3}{3}.$$

Como apresentado, o cálculo de $B(n)$ depende do cálculo dos *B(n)* anteriores. Assim, o $B(3)$ depende dos cálculos de $B(2)$ e de $B(1)$, os quais podem ser calculados pelos passos descritos anteriormente na Figura 7.

Para finalizar o processo para $B(3)$, se faz necessário também calcular o somatório $\sum_{k=1}^{m} a_k{}^3$. Todos os passos necessários para o cálculo de B(3) estão ilustrados no diagrama de sequências lógicas, disponível na Figura 8.

Figura 8. Diagrama de sequências lógicas para o cálculo de B(3).



Fonte: Próprio autor.

A seguir, são apresentadas situações-problema representativas do tema de pesquisa em questão, bem como suas resoluções baseadas nos métodos discutidos nesta seção e na Seção 3.2.

3.4 RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA EM COMBINATÓRIA MODELADOS POR SOMA DE PRODUTOS

Com base no que foi discutido anteriormente, esta seção apresenta situações-problema em análise combinatória, caracterizados por combinações de tipos e subtipos, nas quais suas soluções podem ser modeladas por soma de produtos entre elementos de posições distintas em um conjunto numérico, tomados 2 a 2 ou 3 a 3, sem repetições e permutação dos produtos na soma. Esses problemas merecem atenção especial pelo fato de representarem uma extensão dos problemas tradicionais de análise combinatória disponíveis nos livros didáticos.

Serão utilizadas duas estratégias de solução para os problemas de tipos e subtipo. O primeiro método é centrado em aspectos da literatura usual da análise combinatória, enquanto a segunda opção de solução sugere os casos particulares

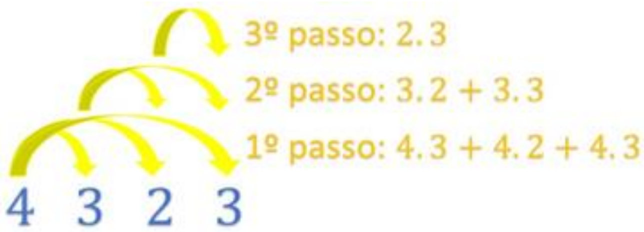
B(2) e *B(3)* da técnica de contagem para *B(n),* desenvolvida neste trabalho, como alternativa para abordar estas questões.

De forma resumida, esse material visa auxiliar o professor no desenvolvimento de atividades/ projetos interdisciplinares que signifiquem a aplicação da análise combinatória e da linguagem lógica como ferramentas essenciais para abordar e solucionar problemas inerentes ao dia-a-dia da sociedade atual.

PROBLEMA 1. Um médico naturopata desenvolveu remédios bi-ação, compostos por duas ervas, cada uma delas usadas para tratar um dos casos de saúde a seguir: indisposição física (f), desnutrição (n), inflamação (i) e intoxicação (d). Na clínica, para tratar cada caso de saúde listado, há a disponibilidade de 4, 3, 2 e 3 diferentes opções de ervas, respectivamente. A partir da consulta médica, o médico decide qual remédio bi-ação pode disponibilizar para o paciente. Quantos remédios bi-ação este médico naturopata pode disponibilizar?

Solução. Nessa situação-problema, o conjunto dos tipos de doenças pode ser dado por $T = \{f, n, i, d\}$. Assim, pode-se apresentar o conjunto $A = \{4, 3, 2, 3\}$, o qual seus elementos são, respectivamente, o número de opções de ervas disponíveis para cada caso de saúde em T. Dessa forma, para solucionar este problema, se faz necessário realizar a soma de todos os produtos entre os elementos de *A*, tomados dois a dois, sem repetição ou permutação desses produtos na soma. Seguindo o método de resolução baseado no princípio fundamental da contagem, a solução para este problema pode ser entendida a partir de um diagrama de sequências lógicas de cálculos necessários para tal fim (Figura 9).

Figura 9. Diagrama de sequências lógicas de cálculos para a solução do Problema 1.



Fonte: Próprio autor.

Somando-se os resultados dos cálculos realizados em cada passo, tem-se como solução do problema, a soma a seguir:

$$4.3 + 4.2 + 4.3 + 3.2 + 3.3 + 2.3 = 53$$

Assim, o médico naturopata pode produzir 53 tipos diferentes de remédios bi-ação.

Este problema também pode ser solucionado de forma alternativa, baseado em $B(n)$, através do cálculo de $B(2)$. Tem-se a informação sobre o conjunto $A = \{4, 3, 2, 3\}$ e sobre a quantidade de elementos desse conjunto ($m = 4$). Dessa forma, $B(2)$ é dado por:

$$B(2) = \frac{B(1).B(1) - \sum_{k=1}^{4}(a_k)^2}{2}.$$

Seguindo as orientações disponíveis na Figura 7, tem-se:

$$B(1) = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 38$$

Substituindo os resultados de $B(1)$ e $\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2$ em $B(2)$, tem-se:

$$B(2) = \frac{12.12 - 38}{2} = 53 \text{ tipos de remédios bi-ação.}$$

PROBLEMA 2. Uma mulher está escolhendo as joias que vai utilizar para ir a uma festa de casamento. Entre os quatro tipos de joias que possui (anéis (a), colares (c), brincos (b) e pulseiras (p)), ela só deve utilizar duas joias de diferentes tipos para esta ocasião. Sabendo-se que ela possui 2, 3, 5 e 2 opções para as joias a, c, b e p, respectivamente, determine de quantas formas essa mulher pode compor seu *look* de joias para ir à festa de casamento.

Solução. Neste problema, o conjunto dos tipos de joias pode ser dado por $T = \{a, c, b, p\}$ e o conjunto A, cujos elementos representam a quantidade de opções (subtipos) dos tipos disponíveis em T, dado por $A = \{2, 3, 5, 2\}$. Dessa forma, a solução deste problema pode ser dada a partir do método baseado no princípio fundamental da contagem ou no método fundamentado em $B(n)$, de forma semelhante à discutida no Problema 1.

Utilizando-se o primeiro método, se faz necessário somar todos os produtos entre os elementos de *A*, tomados dois a dois, sem repetição ou permutação desses produtos na soma. O diagrama apresentado na Figura 10 pode ser utilizado para facilitar a visualização da sequência lógica de cálculos necessários à solução.

Assim, seguindo os passos descritos, a mulher pode ter $2.3 + 2.5 + 2.2 + +3.5 + 3.2 + 5.2 = 51$ diferentes possibilidades de compor seu *look* de joias para o casamento.

Figura 10. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 2.

Fonte: Próprio autor.

Pelo método baseado em $B(n)$, o problema pode ser modelado por $B(2)$. Seguindo a sequência lógica de cálculos descrita na Figura 7, com $A = \{2, 3, 5, 2\}$ e $m = 4$ elementos, tem-se:

$$B(1) = 2 + 3 + 5 + 2 = 12$$

$$\sum_{k=1}^{4} (a_k)^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 2^2 = 42$$

Substituindo esses dados em $B(2)$, tem-se $B(2) = \frac{12.12 - 42}{2} = 51$ diferentes combinações de joias possíveis.

PROBLEMA 3. Em uma empresa, os dois novos diretores serão escolhidos a partir dos candidatos inscritos, pertencentes a cada um dos cinco setores da agência. O número de candidatos aptos a participarem da eleição em cada um dos cinco setores é: 4, 5, 4, 6, 3. Pergunta-se: teoricamente, de quantas formas essas chapas poderiam ser formadas, sabendo-se que obrigatoriamente deve conter funcionários de setores diferentes?

Solução. Chamando os 5 setores da empresa de s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5, o conjunto dos tipos pode ser dado por $T = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. O conjunto A, representado com a quantidade de inscritos de cada setor de *T*, respectivamente, é dado por $A =$

$\{4, 5, 4, 6, 3\}$. Este se caracteriza como outro problema de tipo e subtipo que pode ser solucionado a partir das noções do PFC e do método alternativo com o cálculo do B(n) equivalente.

Utilizando o método baseado no PFC, pode-se usar o diagrama de setas da Figura 11 para elaborar os passos para a solução. Somando-se os resultados dos cálculos obtidos em cada passo, tem-se: $4.5 + 4.4 + 4.6 + 4.3 + 5.4 + 5.6 + 5.3 + +4.6 + 4.3 + 6.3 = 191$ possibilidades de formação das chapas, dadas as condições do problema.

Figura 11. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 3.

Fonte: Próprio autor.

Uma vez que o problema em questão remete à operação matemática que envolve a soma dos produtos entre os elementos do conjunto A, tomados 2 a 2, sem permutação e sem repetição destes produtos na soma, ele também pode ser modelado a partir da técnica de contagem para $B(2)$, desenvolvida neste trabalho.

Utilizando-se o esquema do cálculo do $B(2)$ (Figura 7), com $A = \{4, 5, 4, 6, 3\}$ e $m = 5$, é possível calcular $B(1)$ e $\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2$ para a posterior substituição em $B(2)$:

$$B(1) = 4 + 5 + 4 + 6 + 3 = 22$$

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2 = 4^2 + 5^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2 = 102$$

Como $B(2) = \frac{B(1).B(1) - \sum_{k=1}^{5}(a_k)^2}{2}$, então $B(2) = \frac{22.22 - 102}{2} = 191$ possibilidades de formação das chapas para a eleição da diretoria da empresa.

PROBLEMA 4. Um garoto deseja comprar dois peixes ornamentais, cada um de uma cor predominante diferente, para criá-los em um aquário em sua casa.

Chegando na loja, ele verificou que havia peixes de seis cores predominantes disponíveis, tais como na cor azul (a), vermelho (v), preto (p), cinza (c), branco (b) e lilás (l). Sabendo-se que para cada cor predominante, respectivamente, existem 3, 2, 2, 2, 3 e 2 espécies de peixes disponíveis, de quantos modos a criança pode escolher os peixes que irá levar para casa?

Solução. Temos o conjunto T dos tipos que são as possíveis cores dos peixes, com $T = \{a, v, p, c, b, l\}$. O conjunto A, da quantidade de subtipos (ou de opções) de cada tipo, representa aqui a quantidade de espécies respectivas a cada cor predominante, com $A = \{3, 2, 2, 2, 3, 2\}$.

Semelhante aos problemas anteriores, para a solução do problema com base no PFC, é aconselhável utilizar o diagrama de setas da Figura 12.

Figura 12. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 4.

Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, tem-se como solução do problema a seguinte soma de produtos: $(3.2 + 3.2 + 3.2 + 3.3 + 3.2) + (2.2 + 2.2 + 2.3 + 2.2) + (2.2 + 2.3 + 2.2) + (2.3 + 2.2) + (3.2) = 81$ possibilidades de escolhas dos peixes.

Como é possível notar, este problema também pode ser modelado por $B(2)$, pois a solução pode ser dada como a soma dos produtos entre elementos diferentes do conjunto A, sem permutação destes produtos na soma. Usando-se o diagrama com a sequência lógica de passos para o cálculo do $B(2)$ (**Figura 7**), com $A = \{3, 2, 2, 2, 3, 2\}$ e $m = 6$:

$$B(1) = 3 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14$$

$$\sum_{k=1}^{6}(a_k)^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 = 34$$

Como $B(2) = \frac{B(1).B(1)-\sum_{k=1}^{6}(a_k)^2}{2}$, temos $B(2) = \frac{14.14-34}{2} = 81$ possibilidades de escolha.

PROBLEMA 5. Uma fábrica de móveis rústicos utiliza misturas de pigmentos naturais, extraídos de plantas da natureza, para pintar suas mesas e bancos para venda. Atualmente, a empresa trabalha com sete pigmentos (nas cores azul (a), branco (b), vermelho (v), marrom (m), lilás (l), roxo (r) e cinza (c)), com 3, 1, 2, 3, 2, 2, 1 diferentes tons para cada cor informada, respectivamente. Quantas combinações de cores podem ser formuladas pela empresa para pintar os móveis, se forem misturados dois tons de cores diferentes?

Solução

O conjunto dos tipos (T) de cores de pigmentos disponíveis na empresa é dado por $T = \{a, b, v, m, l, , r, c\}$. Já o conjunto A é composto pela quantidade de tons de cada uma das cores disponíveis em T respectivamente, com $A = \{3, 1, 2, 3, 2, 2, 1\}$.

Para solucionar este problema com base no princípio fundamental da contagem, pode-se utilizar o diagrama de setas mostrado na Figura 13 para organizar a sequência lógica de cálculos necessários.

Figura 13. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 5.

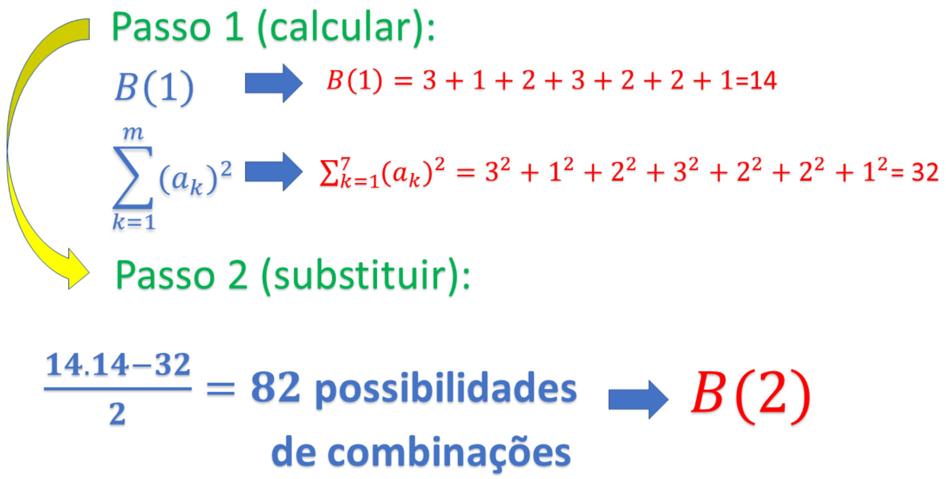
Fonte: Próprio autor.

De forma análoga às questões anteriores, a solução para esta situação-problema pode ser dada por:

$(3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.2 + 3.2 + 3.1) + (1.2 + 1.3 + 1.2 + 1.2 + 1.1) + (2.3 + 2.2 + 2.2 + 2.1) + (3.2 + 3.2 + 3.1) + (2.2 + 2.1) + (2.1) = 82$ novas cores formuladas.

Como a solução é dada pela soma dos produtos entre os elementos do conjunto A, tomados dois a dois, sem permutação destes produtos na soma, também é possível utilizar o cálculo de $B(2)$ como solução alternativa para este problema de contagem. A Figura 14 mostra o diagrama de sequências lógicas de cálculos necessários para este fim, com base no diagrama genérico descrito anteriormente para $B(2)$ na Figura 7.

Figura 14. Diagrama de sequências lógicas para o cálculo de B(2) como solução para o Problema 5.



Fonte: Próprio autor.

PROBLEMA 6. Uma empresa montará uma comissão de ética para a fiscalização de condutas de trabalho de seus funcionários. Decidiu-se formar esta comissão com funcionários que trabalham em um dos quatro setores da empresa, a saber: o administrativo (a), o de compras (c), o de logística (l) e o de manutenção (m), cada um com 6, 3, 2 e 4 funcionários por setor, respectivamente. Sabendo-se que os membros da comissão devem ser obrigatoriamente de setores diferentes da empresa, determine quantas comissões diferentes podem ser formadas a partir de um sorteio aleatório?

Solução. Para esta situação-problema, o conjunto dos tipos T é composto pelos quatro setores participantes do sorteio, onde $T = \{a, c, l, m\}$. O conjunto A é formado pela quantidade de funcionários inscritos em cada um dos setores do conjunto T, respectivamente, com $A = \{6, 3, 2, 4\}$.

Este se caracteriza como outro problema de tipo e subtipo que pode ser solucionado a partir das noções do PFC e do método alternativo com o cálculo do B(n) equivalente.

Utilizando o método baseado no PFC, faz-se necessário realizar a soma de todos os produtos entre os elementos de A, tomados três a três, sem permutação e repetição desses produtos na soma. Pode-se então seguir as orientações descritas e usar o diagrama de setas da **Figura 15** para apreender a sequência lógica de cálculos para a solução do problema.

Figura 15. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 6.

Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, a solução pode ser dada a partir da soma dos resultados obtidos com as operações matemáticas realizadas em cada passo do diagrama:

$$(6.3.2 + 6.3.4 + 6.2.4) + (3.2.4) = 180.$$

Ou seja, existem 180 combinações possíveis de três componentes para formar a comissão de ética na empresa.

Também é possível resolver este problema aplicando a técnica de contagem para $B(3)$, uma vez que a solução envolve a soma dos produtos entre os elementos de A, tomados 3 a 3, sem permutação dos produtos na soma. Pode-se calcular $B(3)$ utilizando a sequência lógica de cálculos descrita no diagrama de setas da **Figura 6**, com $A = \{6, 3, 2, 4\}$ e $m = 4$.

Seguindo as orientações, como $B(3) = \frac{B(2).B(1)-B(1).\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{4}(a_k)^3}{3}$, inicialmente é possível calcular $B(2)$, com $A = \{6,3,2,4\}$ e $m = 4$:

$$B(2) = \frac{B(1).B(1) - B(0).\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2}{2}.$$

Uma vez que $B(1) = 6 + 3 + 2 + 4 = 15$ e $\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 = 65$, tem-se:

$$B(2) = \frac{15.15 - 65}{2} = 80.$$

O próximo e último passo para o cálculo de $B(3)$ é determinar o valor da expressão $\sum_{k=1}^{4}(a_k)^3$, que neste problema pode ser descrito na forma que segue:

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k)^3 = 6^3 + 3^3 + 2^3 + 4^3 = 315.$$

Com estes resultados, basta substituí-los na expressão de $B(3)$ para obtermos a solução em destaque:

$$B(3) = \frac{80.15-15.65+315}{3} = 180 \text{ combinações possíveis.}$$

PROBLEMA 7. Uma lanchonete é especializada em sanduiches estilo *self-service*, os quais o cliente pode escolher três diferentes itens entre os descritos a seguir para compor este lanche: carne (c), queijo (q), molho (m) e salada (s). Sabendo-se que a lanchonete oferece 5, 4, 2 e 4 opções para cada item descrito acima, respectivamente, determine de quantas formas o cliente pode montar o seu sanduiche?

Solução. Semelhante ao problema anterior, o Problema 7 se caracteriza como um problema combinatório que envolve tipo e subtipo. Pode-se definir aqui o conjunto dos tipos T como o conjunto formado pelos itens disponíveis para montar o sanduiche, com $T = \{c, q, m, s\}$. Já o conjunto A, cujos elementos representam a quantidade de opções relativa a cada item em T respectivamente, pode ser dado por $A = \{5, 4, 2, 4\}$.

Como discutido anteriormente, usando a proposta baseada no PFC, a sequência lógica de cálculos necessários à solução pode ser explorada com o diagrama de setas mostrado na Figura 16 (desenvolvido a partir das orientações gerais disponíveis no diagrama da Figura 8).

Usando essa técnica, a solução para a situação-problema em destaque pode ser dada pela soma dos resultados obtidos em cada passo da sequência de cálculos. Assim, tem-se: $(5.4.2 + 5.4.4 + 5.2.4) + (4.2.4) = 192$ opções de montagem do sanduiche.

Figura 16. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 7.

Fonte: Próprio autor.

Como visto, a solução é dada pela soma dos produtos de elementos diferentes do conjunto A, tomados três a três, sem permutação destes produtos na soma. Assim, também é possível solucionar a questão seguindo a sequência de cálculos para $B(3)$ (disponível no diagrama de setas proposto, Figura 8), com $A = \{5, 4, 2, 4\}$ e $m = 4$. As expressões e cálculos necessários são descritos a seguir:

$$B(1) = 5 + 4 + 2 + 4 = 15,$$

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2 = 5^2 + 4^2 + 2^2 + 4^2 = 61$$

e

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k)^3 = 5^3 + 4^3 + 2^3 + 4^3 = 261.$$

Como $B(2) = \frac{B(1).B(1) - \sum_{k=1}^{4}(a_k)^2}{2}$, então $B(2) = \frac{15.15-61}{2} = 82$.

E, como $B(3)$ pode ser escrito pela expressão $B(3) = \frac{B(2).B(1) - B(1).\sum_{k=1}^{4}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{4}(a_k)^3}{3}$, então:

$B(3) = \frac{82.15-15.61+261}{3} = 192$ opções de montagem do sanduiche.

PROBLEMA 8. Em uma eleição para a escolha de três vereadores de uma pequena cidade, participam cinco chapas partidárias (a, b, c, d, e), com 8, 6, 5, 9 e 7 candidatos inscritos em cada uma dessas chapas, respectivamente. Como critério para a eleição, foi decidido que os três candidatos eleitos deveriam ser de chapas diferentes. Quantos são os resultados possíveis para esta eleição? Em outras palavras, quantas combinações possíveis de vereadores podem ser formadas, dadas as regras?

Solução. Este é outro tipo de situação-problema que pode ser modelado por técnicas de contagem que levam em consideração a característica de tipo e subtipo na combinação entre os elementos. Aqui, $T = \{a, b, c, d, e\}$ e o conjunto $A = \{8, 6, 5, 9, 7\}$.

Pode-se montar a sequência lógica de cálculos necessários à solução, com o apoio do diagrama de setas da Figura 17.

Figura 17. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 8.

Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, pode-se resolver o problema somando-se os resultados dos produtos obtidos em cada passo da solução:

$(8.6.5 + 8.6.9 + 8.6.7 + 8.5.9 + 8.5.7 + 8.9.7) + (6.5.9 + 6.5.7 + 6.9.7) + (5.9.7) = 3325$ possibilidades de trios de vereadores eleitos na cidade.

Este problema também pode ser explorado com o cálculo de $B(3)$, uma vez que ele representa a soma dos produtos entre elementos diferentes do conjunto A

tomados três a três, sem permutação destes produtos na soma. Com base no diagrama da **Figura 8**, os cálculos necessários são descritos a seguir, utilizando-se $A = \{8, 6, 5, 9, 7\}$ e $m = 5$:

$$B(1) = 8 + 6 + 5 + 9 + 7 = 35$$

$$\sum_{k=1}^{16} (a_k)^2 = 8^2 + 6^2 + 5^2 + 9^2 + 7^2 = 255$$

$$B(2) = \frac{35.35 - 255}{2} = 485$$

$$\sum_{k=1}^{5} (a_k)^3 = 8^3 + 6^3 + 5^3 + 9^3 + 7^3 = 1925$$

Como $B(3) = \frac{B(2).B(1) - B(1).\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{5}(a_k)^3}{3}$, então:

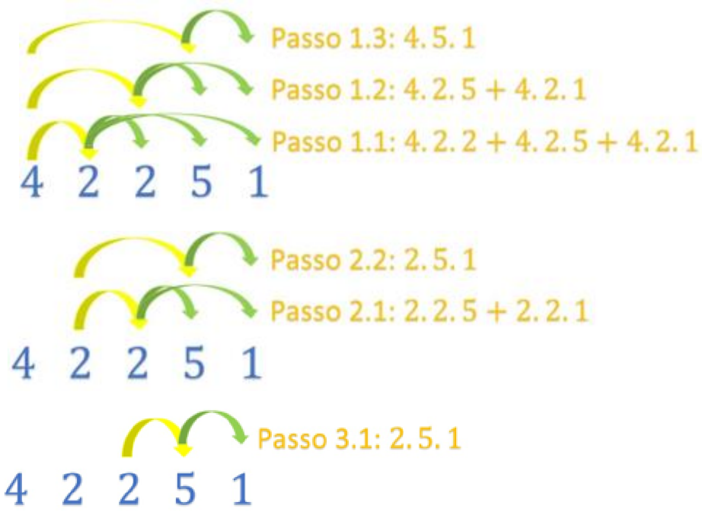
$$B(3) = \frac{485.35 - 35.255 + 1925}{3}$$ = 3 325 possibilidades.

PROBLEMA 9. Uma empresa de turismo de uma cidade, oferece um pacote turístico no qual os clientes podem escolher três tipos de destinos entre os seguintes: clube aquático (a), parque de diversão (d), chapada (c), praia (p) e rio (r), com 4, 2, 2, 5 e 1 opções para cada tipo de passeio, respectivamente. Sabendo-se que cada destino tem um horário fixo no dia e que os três destinos escolhidos devem ser de tipos de passeio diferentes, determine quantas opções de passeios a empresa pode fornecer aos clientes neste pacote turístico.

Solução. Para esta situação-problema, o conjunto dos tipos de passeio que a empresa oferece é dado por $T = \{a, d, c, p, r\}$. O conjunto A, cujos elementos representam as quantidades de opções (subtipos) de cada tipo de passeio, é dado por $A = \{4, 2, 2, 5, 1\}$.

A partir dos cálculos orientados pelo diagrama de setas mostrado na Figura 1**8**, tem-se a seguinte soma de produtos como solução do problema: $4.2.2 + 4.2.5 + 4.2.1 + 4.2.5 + 4.2.1 + 4.5.1 + 2.2.5 + 2.2.1 + 2.5.1 + 2.5.1 = 137$. Ou seja, a empresa oferece 137 diferentes opções para cliente montar o seu pacote turístico.

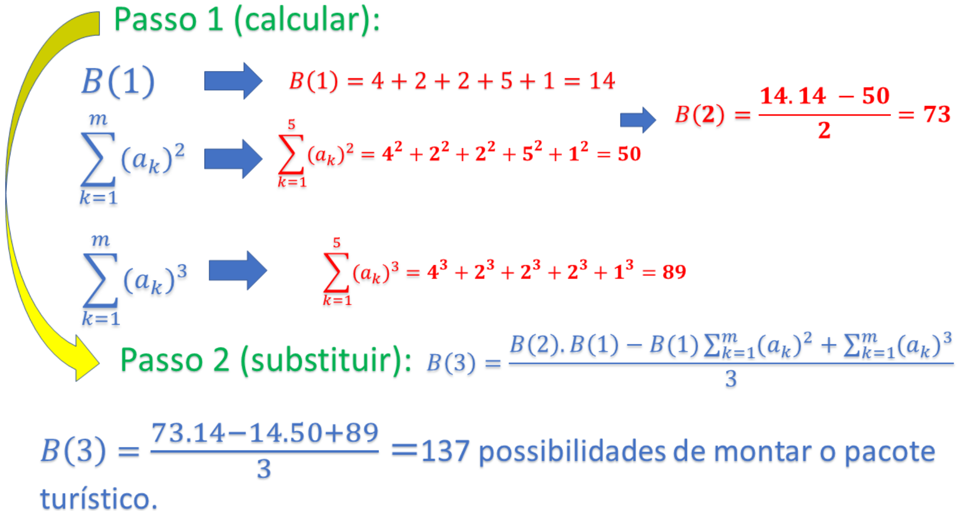
Figura 18. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 9.



Fonte: Próprio autor.

Já com a solução a partir de $B(3)$ (**Figura 17**), com $A = \{4, 2, 2, 5, 1\}$ e $m = 5$, tem-se:

Figura 17. Diagrama de sequência lógica de cálculos para solução do Problema 9, a partir de $B(3)$.

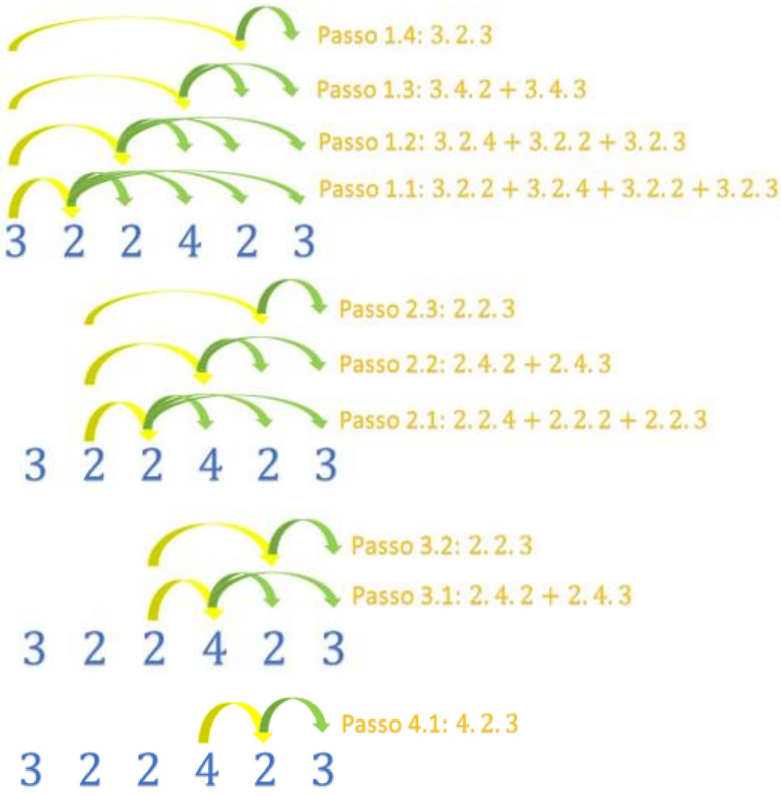


Fonte: Próprio autor.

PROBLEMA 10. Uma rede de farmácias de manipulação criou o produto Tri-Vit, um composto de três vitaminas diferentes que podem ser escolhidas entre as vitaminas disponíveis A, B9, B12, C, D e E na empresa, de acordo com a necessidade do cliente atestada via receituário médico. O laboratório da rede consegue extrair essas vitaminas a partir de 3, 2, 2, 4, 2 e 3 matérias-primas diferentes (cada quantidade é relativa a uma vitamina, na ordem com que foram citadas), de acordo com a pureza exigida. Decidindo-se trabalhar com todas essas matérias-primas, quantos tipos de Tri-Vit este laboratório pode desenvolver?

Solução. Pela característica da situação-problema, temos uma questão que envolve a combinação entre os elementos de um conjunto numérico, da forma tipo e subtipo. O conjunto dos tipos (T) de vitaminas é dado por $T = \{A, B9, B12, C, D, E\}$. O conjunto A (com as quantidades de opções de matéria-prima disponíveis para cada vitamina descrita em T, respectivamente) pode ser dado por $A = \{3, 2, 2, 4, 2, 3\}$. O uso do diagrama de setas da **Figura 18** mostra a sequência de cálculos para a solução do problema *via* PFC.

Figura 18. Diagrama de sequência lógica de cálculos para a solução do Problema 10.



Fonte: Próprio autor.

Seguindo as orientações, tem-se: $(3.2.2 + 3.2.4 + 3.2.2 + 3.2.3 + 3.2.4 + 3.2.2 + 3.2.3 + 3.4.2 + 3.4.3 + 3.2.3) + (2.2.4 + 2.2.2 + 2.2.3 + 2.4.2 + 2.4.3 + 2.2.3) + (2.4.2 + 2.4.3 + 2.2.3) + (4.2.3) = 362$.

Assim, é possível disponibilizar 362 formulações do Tri-Vit ao consumidor.

De forma alternativa, o mesmo resultado pode ser obtido a partir do cálculo de $B(3)$, com $m = 6$, conforme os passos descritos no diagrama da **Figura 6**. Essa analogia é possível uma vez que a solução pode ser modelada pela soma dos produtos entre elementos diferentes do conjunto A, três a três, sem permutação destes produtos na soma. Com os dados da questão, tem-se:

$$B(1) = 3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 3 = 16$$

$$\sum_{k=1}^{6}(a_k)^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 3^2 = 46$$

$$B(2) = \frac{B(1).B(1) - \sum_{k=1}^{6}(a_k)^2}{2} = \frac{16.16 - 46}{2} = 105$$

$$\sum_{k=1}^{6}(a_k)^3 = 3^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 2^3 + 3^3 = 142$$

$$B(3) = \frac{B(2).B(1) - B(1).\sum_{k=1}^{6}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{6}(a_k)^3}{3} = \frac{105.16 - 16.46 + 142}{3} = 362.$$

A empresa pode produzir 362 opções de Tri-Vit, considerando todas as matérias-primas disponíveis.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de um estudo bibliográfico e exploratório foram desenvolvidas estratégias para solucionar situações-problemas envolvendo soma de produtos entre elementos de um conjunto numérico, baseadas no PFC e em técnicas de contagem propostas.

Essas estratégias foram ilustradas através de diagramas de sequências lógicas de cálculos, utilizados para auxiliar a modelagem de situações-problema em combinatória (diretamente relacionado a problemas práticos) que foram desenvolvidas neste trabalho.

Espera-se que este trabalho possa servir como referência para trabalhos futuros em Combinatória envolvendo o tema de pesquisa trabalhado e que o material aqui desenvolvido possa ser utilizado por professores e pesquisadores em ensino no desenvolvimento de atividades interdisciplinares que tenham como foco o ensino de análise combinatória, com vista ao ensino-aprendizagem de matemática contextualizado e significativo.

REFERÊNCIAS

BERGE, C. **Principles of combinatorics.** New York: Academic Press, 1971.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics.** Revista Historia Mathemática, v.6, p. 109-136, 1979.

BOSE, R.C.; MANVEL, B. **Introduction to combinatorial theory.** New York: Wiley, 1984.

CATALDO, J.C. **Análise Combinatória:** a importância dos métodos de contagem. Parte 1. Revista eletrônica do vestibular da UERJ, ano 6, n. 18, 2013. Disponível em:

http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=31. Acesso em: 08 jan. 2019.

CHAUI, M. **Convite à Filosofia**. São Paulo: Ática, 2000.

DOROX, G. C.; PLOHARSKI, N. R. B. **Conceitos Matemáticos e Interdisciplinaridade:** uma experiência no pibid/subprojeto pedagogia. XII Congresso Nacional de Educação. In: Anais do XII Congresso Nacional de Educação. Pontifícia Universidade Católica, Curitiba-PR, 2015.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática.** Tradução: Hygino Hugueros Domingues. 2. ed. São Paulo: Unicamp, 1997.

GONÇALVES, R. R. S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-RJ, 2014.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico:** a pesquisa bibliográfica. Rev. katálysis, Florianópolis , v. 10, p. 37-45, 2007 .

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MELLO, H. P. de M. **Desmistificando o ensino de análise combinatória.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-RJ, 2017.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, C. A. L. S. **Análise Combinatória:** Raciocínio recursivo e processos de enumeração. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes, Rio de Janeiro-RJ, 2015.

SANTOS, J. P. *et al.* **Introdução à Análise Combinatória**. São Paulo: Ciência Moderna, 2008.

TAVARES, C. S.; BRITO, F. R. M. **Contando a História da Contagem.** Revista do Professor de Matemática SBM, v.57, 2005.

VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista.**

Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2011.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise Combinatória:** Alguns Aspéctos históricos e uma Abordagem Pedagógica. Tese (VIII Encontro Nacional de Educação Matemática) — UFPE, Recife, 2004.

WIELEITNER, H. **História de La Matemática.** Labor, 1928.

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. **Combinatorics.** 1990.

APÊNDICE A - ESCRITA DE B(n) EM RELAÇÃO A QUALQUER ELEMENTO a_i

Pode-se escrever $B(n)$ em relação a qualquer elemento a_i, com $i \in [1, m]$, $i \in \mathbb{N}$, como a soma das partes que tem ou não tem este elemento. Definindo uma outra estrutura combinatória de soma de produtos de elementos de um conjunto numérico, tomados n a n, na qual é uma das partes de $B(n)$, dada por:

$[B(n)]_i$: soma dos produtos de $B(n)$ que não tem o elemento a_i, com $i \in [1, m]$, $i \in \mathbb{N}$, ou seja, um novo $B(n)$ dos elementos do conjunto $A_1 = A - \{a_1\}$.

Segue a escrita de $B(n)$ em relação a alguns elementos a_i.

Para $i = 1$

Temos que $B(n)$ é a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto $A = \{a_{1,} a_2, a_3, \dots, a_m\}$, sem permutação destes produtos, uma parte destes produtos vai ter o elemento a_1 como um dos seus fatores, ao agruparmos estes produtos, colocando o a_1 em evidência neles, o a_1 vai ser multiplicado pela soma de todos os produtos de $(n - 1)$ elementos diferentes do conjunto $A_1 = A - \{a_1\}$, que de acordo com a definição de $[B(n)]_i$, esta soma é o $[B(n-1)]_1$. Ainda sobra de $B(n)$ a parte de seus produtos que não tem o elemento a_1, que é dada pela soma de todos os produtos de n elementos diferentes do conjunto A_1, que de acordo com a definição de $[B(n)]_i$, é o $[B(n)]_1$. Deste modo, pode-se escrever $B(n)$ em reação ao a_1 como:
$B(n) = [B(n-1)]_1 . a_1 + [B(n)]_1$

Para $i = 2$

Procedendo de forma análoga ao valor de i anterior, pode-se agrupar os produtos de $B(n)$ que tem o elemento a_2, colocar o a_2 em evidência nestes produtos, resultando no a_2 multiplicado pela soma de todos os produtos de $(n - 1)$ elementos diferentes do conjunto $A_2 = A - \{a_2\}$, sem as permutações destes produtos, que pela definição de $[B(n)]_i$, está soma corresponde ao $[B(n-1)]_2$; a outra parte de $B(n)$ é dada pela soma dos produtos que não contém o elemento a_2, que pela definição de $[B(n)]_i$, é o $[B(n)]_2$. Desta forma, $B(n)$ também pode ser escrito como

$$B(n) = [B(n-1)]_2 . a_2 + [B(n)]_2$$

Deste modo, observando os exemplos acima, pode-se compreender melhor o caso geral, em que podemos escrever $B(n)$ em relação a qualquer a_i. Procedendo do seguinte modo: Agrupando a parte dos produtos de $B(n)$ que tem o elemento a_i, colocando este elemento em evidência nestes produtos, ficando assim o a_i, multiplicado pela soma de todos os produtos de $n-1$ elementos diferentes do conjunto $A_i = A - \{a_i\}$, sem permutações destes produtos na soma, que de acordo com a definição de $[B(n)]_i$, esta soma é o $[B(n-1)]_i$; a outra parte de $B(n)$ é a parte dos produtos que não tem o elemento a_i, que corresponde a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A_i, sem as permutações destes produtos na soma, que pela definição de $[B(n)]_i$, é o $[B(n)]_i$. Dessa forma, temos o caso geral, em que:

$$B(n) = [B(n-1)]_i . a_i + [B(n)]_i \quad (Eq. A9)$$

APÊNDICE B - ESCRITA DE $\boldsymbol{\gamma_{n\,x\,r}}$ para $\mathbf{2 \leq r < n}$

Pode-se ter três situações diferentes de modelagens de escrita do $\gamma_{n\,x\,r}$, ao depender do valor de r, divididas em:

i) Para $r = 1$. Tem-se $\gamma_{n\,x\,1}$ que é $B(n)$, a análise de escrita de $B(n)$ está apresentada no **apêndice C**.

ii) Para $r = n$. Temos que $\gamma_{n\,x\,r} = \gamma_{n\,x\,n}$, a escrita $\gamma_{n\,x\,n}$ está analisada e generalizada no **Apêndice D**.

iii) Resta somente, a condição para, $2 \leq r < n$. Que é a situação de escrita para $\gamma_{n\,x\,r}$ analisada neste apêndice. Seguindo com esta análise tem-se:

Observando a formação dos produtos da soma dos $\gamma_{n\,x\,r}$ de acordo com sua definição, para $2 \leq r < n$, $n, r \in N$, cada um destes produtos tem n elementos no total, sendo, r repetidos (iguais), deste modo, cada um deles vai ter $(n - r)$ elementos diferentes em sua composição.

Desta forma, apresentando de uma forma mais didática esta análise, alguns $\gamma_{n\,x\,r}$, serão descritos com alguns valores de n, para $2 \leq r < n$. Vai ser adotado o padrão de escrita destes $\gamma_{n\,x\,r}$, de tal modo que todos os seus produtos tenham os r fatores iniciais sendo os elementos iguais e nos $(n - r)$ fatores diferentes seguintes, os índices dos elementos destes fatores fiquem em ordem crescente.

Para $\boldsymbol{n = 1}$

Não há valor de r $(2 \leq r < n)$ que obedeça a sentença iii);

Para $\boldsymbol{n = 2}$

Não há valor de r $(2 \leq r < n)$ que obedeça a condição iii), uma vez que $\gamma_{n\,x\,r}$ recai na sentença (ii);

Para $\boldsymbol{n = 3}$

Tem-se para r, o valor $2 \leq r < 3$. Segue:

Para $r = 2$

$$\begin{aligned}\gamma_{3\times 2} = {} & a_1a_1a_2 + a_1a_1a_3 + a_1a_1a_4 + a_1a_1a_5 + a_1a_1a_6 + \cdots + a_1a_1a_{m-1} + a_1a_1a_m \\ & + a_2a_2a_1 + a_2a_2a_3 + a_2a_2a_4 + a_2a_2a_5 + a_2a_2a_6 + \cdots + a_2a_2a_{m-1} + a_2a_2a_m \\ & + a_3a_3a_1 + + a_3a_3a_2 + + a_3a_3a_4 + a_3a_3a_5 + a_3a_3a_6 + \cdots + a_3a_3a_{m-1} + \cdots + \\ & + a_{m-1}a_{m-1}a_1 + a_{m-1}a_{m-1}a_2 + a_{m-1}a_{m-1}a_3 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-2} + \\ & + a_{m-1}a_{m-1}a_m + a_ma_ma_1 + a_ma_ma_2 + a_ma_ma_3 + \cdots + a_ma_ma_{m-2} +\end{aligned}$$

$$+a_m a_m a_{m-1} \quad (Eq.B1)$$

Para $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$

Tem-se para r, os valores, $2 \leq r < 4$. Deste modo:

Para $r = 2$

$\gamma_{4\times2} = a_1a_1a_2a_3 + a_1a_1a_2a_4 + a_1a_1a_2a_5 + \cdots + a_1a_1a_2a_{m-1} + a_1a_1a_2a_m +$
$+a_1a_1a_3a_4 + a_1a_1a_3a_5 + a_1a_1a_3a_6 + \cdots + a_1a_1a_3a_{m-1} + a_1a_1a_3a_m +$
$+a_1a_1a_4a_5 + a_1a_1a_4a_6 + +a_1a_1a_4a_7 + \cdots + a_1a_1a_4a_{m-1} + a_1a_1a_4a_m +$
$+ \cdots + a_1a_1a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_1a_{m-2}a_m + a_1a_1a_{m-1}a_m + a_2a_2a_1a_3 +$
$+a_2a_2a_1a_4 + a_2a_2a_1a_5 + a_2a_2a_1a_6 \ldots + a_2a_2a_1a_{m-1} + a_2a_2a_1a_m +$
$+a_2a_2a_3a_4 + a_2a_2a_3a_5 + a_2a_2a_3a_6 + \cdots + a_2a_2a_3a_{m-1} +$
$+a_2a_2a_3a_m + a_2a_2a_4a_5 + a_2a_2a_4a_6 + a_2a_2a_4a_7 + \cdots + a_2a_2a_4a_{m-1} +$
$+a_2a_2a_4a_m + a_2a_2a_5a_6 + a_2a_2a_5a_7 + a_2a_2a_5a_8 + \cdots + a_2a_2a_5a_{m-1} +$
$+a_2a_2a_5a_m + \cdots + a_2a_2a_{m-2}a_{m-1} + a_2a_2a_{m-2}a_m + \cdots + a_2a_2a_{m-1}a_m +$
$+ \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_1a_2 + a_{m-1}a_{m-1}a_1a_3 + a_{m-1}a_{m-1}a_1a_4 + \cdots +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_1a_{m-2} + a_{m-1}a_{m-1}a_1a_m + a_{m-1}a_{m-1}a_2a_3 + a_{m-1}a_{m-1}a_2a_4 +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_2a_5 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_2a_{m-2} + a_{m-1}a_{m-1}a_2a_m +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_3a_4 + a_{m-1}a_{m-1}a_3a_5 + a_{m-1}a_{m-1}a_3a_6 + \cdots +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_3a_{m-2} + a_{m-1}a_{m-1}a_3a_m + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-4}a_{m-3} +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_{m-4}a_{m-2} + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-4}a_m + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-3}a_{m-2} +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_{m-3}a_m + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-2}a_m + a_ma_ma_1a_2 +$
$+a_ma_ma_1a_3 + a_ma_ma_1a_4 + \cdots + a_ma_ma_1a_{m-2} + a_ma_ma_1a_{m-1} +$
$+a_ma_ma_2a_3 + a_ma_ma_2a_4 + a_ma_ma_2a_5 + \cdots + a_ma_ma_2a_{m-2} +$
$+a_ma_ma_2a_{m-1} + a_ma_ma_3a_4 + a_ma_ma_3a_5 + a_ma_ma_3a_6 + \cdots +$
$+a_ma_ma_3a_{m-2} + a_ma_ma_3a_{m-1} + \cdots + a_ma_ma_{m-3}a_{m-2} +$
$+a_ma_ma_{m-3}a_{m-1} + a_ma_ma_{m-2}a_{m-1} \quad (Eq.B2)$

Para $r = 3$

$\gamma_{4\times3} = a_1a_1a_1a_2 + a_1a_1a_1a_3 + a_1a_1a_1a_4 + \cdots + +a_1a_1a_1a_{m-1} +$
$+a_1a_1a_1a_m + a_2a_2a_2a_1 + a_2a_2a_2a_3 + a_2a_2a_2a_4 + \cdots + a_2a_2a_2a_{m-1} +$
$+a_2a_2a_2a_m + a_3a_3a_3a_1 + a_3a_3a_3a_2 + a_3a_3a_3a_4 + \cdots +$
$+a_3a_3a_3a_{m-1} + a_3a_3a_3a_m + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1}a_1 + +a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1}a_2 +$
$+a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1}a_3 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1}a_{m-2} + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1}a_m +$
$+a_ma_ma_ma_1 + a_ma_ma_ma_2 + a_ma_ma_ma_3 + \cdots + a_ma_ma_ma_{m-2} +$

$$+a_m a_m a_m a_{m-1} \quad (Eq.B3)$$

Simplificando a escrita das estruturas combinatórias apresentadas nas Equações $B1$ à $B3$, é possível colocar em evidência os elementos que se repetem em seus produtos e os escrevendo numa só potência, da seguinte forma:

$$\gamma_{3\times2} = (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} + a_m).\, {a_1}^2 + (a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} + a_m).\, {a_2}^2 +$$
$$+(a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{m-1} + a_m).\, {a_3}^2 + \cdots +$$
$$+(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-2} + a_m).\ {a_{m-1}}^2 + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1}).\, {a_m}^2 (Eq.B4)$$

$$\gamma_{4\times2} = (a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-1} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots +$$
$$+a_3a_{m-1} + a_3a_m + +a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_7 + \cdots + a_4a_{m-1} + a_4a_m +$$
$$+a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + a_{m-1}a_m).\, {a_1}^2 + (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_1a_6 +$$
$$+ \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-1} + a_3a_m +$$
$$+a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_7 + \cdots + a_4a_{m-1} + a_4a_m + a_5a_6 + a_5a_7 + a_5a_8 +$$
$$+ \cdots + a_5a_{m-1} + a_5a_m + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + \cdots + a_{m-1}a_m).\, {a_2}^2 +$$
$$+ \cdots + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-2} + a_1a_m + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 +$$
$$+ \cdots + a_2a_{m-2} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-2} + a_3a_m + \cdots +$$
$$+a_{m-4}a_{m-3} + a_{m-4}a_{m-2} + a_{m-4}a_m + a_{m-3}a_{m-2} + a_{m-3}a_m + a_{m-2}a_m).\, {a_{m-1}}^2 +$$
$$+a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-2} + a_1a_{m-1} + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots +$$
$$+a_2a_{m-1} + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-2} + a_3a_{m-1} + \cdots + a_{m-3}a_{m-2} +$$
$$+a_{m-3}a_{m-1} + a_{m-2}a_{m-1}).\, {a_m}^2 \qquad (Eq.B5)$$

$$\gamma_{4\times3} = (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} + a_m).\, {a_1}^3 + (a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} +$$
$$+a_m).\, {a_2}^3 + (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{m-1} + a_m).\, {a_3}^3 + (a_1 + a_2 +$$
$$+a_3 + \cdots + a_{m-2} + a_m).\, {a_{m-1}}^3 + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-2} +$$
$$+a_{m-1}).\, {a_m}^3 \quad (Eq.B6)$$

Para $\boldsymbol{n = 5}$

Seguindo com este modo de escrita, temos para r os valores, $2 \leq r < 5$, sendo:

Para $r = 2$

$$\gamma_{5\times2} = \ (a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_3a_6 + \cdots + a_2a_3a_{m-1} + a_2a_3a_m + a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 +$$
$$a_2a_4a_7 + \cdots + a_2a_4a_{m-1} + a_2a_4a_m + \cdots + a_2a_{m-2}a_{m-1} + a_2a_{m-2}a_m + a_2a_{m-1}a_m +$$

$a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_4a_7 + \cdots + a_3a_4a_{m-1} + a_3a_4a_m + a_3a_5a_6 + a_3a_5a_7 + a_3a_5a_8 + \ldots + a_3a_5a_{m-1} + a_3a_5a_m + \cdots + a_3a_{m-1}a_m + \cdots + a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-3}a_{m-2}a_m + a_{m-3}a_{m-1}a_m + a_{m-2}a_{m-1}a_m).a_1{}^2 + (a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_3a_6 + \cdots + a_1a_3a_{m-1} + a_1a_3a_m + a_1a_4a_5 + a_1a_4a_6 + a_1a_4a_7 + \cdots + a_1a_4a_{m-1} + a_1a_4a_m + \cdots + a_1a_{m-2}a_{m-1} + a_1a_{m-2}a_m + a_1a_{m-1}a_m + a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_4a_7 + \cdots + a_3a_4a_{m-1} + a_3a_4a_m + a_3a_5a_6 + a_3a_5a_7 + a_3a_5a_8 + \ldots + a_3a_5a_{m-1} + a_3a_5a_m + \cdots + a_3a_{m-1}a_m + \cdots + a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-3}a_{m-2}a_m + a_{m-3}a_{m-1}a_m + a_{m-2}a_{m-1}a_m).a_2{}^2 + \cdots + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots + a_1a_2a_{m-2} + a_1a_2a_{m-1} + a_1a_3a_4 + a_1a_3a_5 + a_1a_3a_6 + \cdots + a_1a_3a_{m-2} + a_1a_3a_{m-1} + \cdots + a_1a_{m-3}a_{m-2} + a_1a_{m-3}a_{m-1} + a_1a_{m-2}a_{m-1} + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_5 + a_2a_3a_6 + \cdots + a_2a_3a_{m-2} + a_2a_3a_{m-1} + a_2a_4a_5 + a_2a_4a_6 + a_2a_4a_7 + \cdots + a_2a_4a_{m-2} + a_2a_4a_{m-1} + \cdots + a_2a_{m-2}a_{m-1} + \cdots + a_{m-4}a_{m-3}a_{m-2} + a_{m-4}a_{m-3}a_{m-1} + a_{m-4}a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-3}a_{m-2}a_{m-1}).a_m{}^2 \quad (Eq.B7)$

Para $r = 3$

$\gamma_{5\times 3} = (a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-1} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + + \cdots + a_3a_{m-1} + a_3a_m + a_4a_5 + +a_4a_6 + a_4a_7 + \cdots + a_4a_{m-1} + a_4a_m + + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + a_{m-1}a_m).a_1{}^3 + (a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + + \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-1} + a_3a_m + +a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_7 + \cdots + a_4a_{m-1} + a_4a_m + a_5a_6 + a_5a_7 + +a_5a_8 + \cdots + a_5a_{m-1} + a_5a_m + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_{m-1} + +a_{m-1}a_m).a_2{}^3 + (a_1a_2 + a_1a_4 + a_1a_5 + \cdots + a_1a_{m-1} + a_1a_m + +a_2a_4 + a_2a_5 + a_2a_6 + \cdots + a_2a_{m-1} + a_2a_m + a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_7 + + \cdots + a_4a_{m-1} + a_4a_m + a_5a_6 + a_5a_7 + a_5a_8 + \cdots + a_5a_{m-1} + a_5a_m + +a_6a_7 + a_6a_8 + a_6a_9 + \cdots + a_6a_{m-1} + a_6a_m + \cdots + a_{m-2}a_{m-1} + a_{m-2}a_m + +a_{m-1}a_m).a_3{}^3 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-2} + a_1a_m + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-2} + a_2a_m + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-2} + a_3a_m + \cdots + a_{m-3}a_{m-2} + a_{m-3}a_m + a_{m-2}a_m).a_{m-1}{}^3 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_1a_{m-2} + a_1a_{m-1} + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + \cdots + a_2a_{m-2} + a_2a_{m-1} + a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + \cdots + a_3a_{m-2} + a_3a_{m-1} + \cdots + a_{m-3}a_{m-2} + a_{m-3}a_{m-1} + a_{m-2}a_{m-1}).a_m{}^3 \quad (Eq.B8)$

Para $r = 4$

$\gamma_{5\times 4} = (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} + a_m).a_1{}^4 + (a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m-1} +$

$$+a_m).a_2{}^4 + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{m-1} + a_m).a_3{}^4 +$$
$$+ \cdots + \ (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-2} + a_m).a_{m-1}{}^4 +$$
$$+a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-2} + a_{m-1}).a_m{}^4 \quad (Eq.B9)$$

Observando as equações ($B4$ à $B9$), é possível compreender de uma forma mais precisa o caso geral, em que podemos escrever qualquer $\gamma_{n\,x\,r}$, para $2 \leq r < n$, do seguinte modo:

$$\gamma_{n\,x\,r} = \gamma_{n\,x\,r_1} + \gamma_{n\,x\,r_2} + \gamma_{n\,x\,r_3} + \cdots + \gamma_{n\,x\,r_m}, \quad (Eq.B10)$$

Definindo $\gamma_{n\,x\,r_i}$, como sendo:

$\gamma_{n\,x\,r_i}$: Estrutura combinatória que é a soma dos produtos de elementos de um conjunto numérico, tomados n a n, tendo em cada um deles, o elemento a_i repetido como fator r vezes, e os $(n - r)$ fatores restantes, sendo diferentes de a_i, e diferentes entre si. Deste modo, podemos ver $\gamma_{n\,x\,r_i}$ como a parte dos produtos de $\gamma_{n\,x\,r}$ que tem como fatores repetidos o elemento a_i.

Podemos escrever a (Eq. B10) como:

$$\gamma_{n\,x\,r} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{n\,x\,r_i}$$

Observando os parênteses do 2º membro da (Eq. $B4$), cada um deles está sendo multiplicado por um a_i, no qual chamamos de seu a_i associado, escrevendo cada um desses parênteses em relação ao seu a_i associado, utilizando-se da definição de $[B(n)]_i$, tem-se que:

$$y_{3x2} = [B(1)]_1.a_1{}^2 + [B(1)]_2.a_2{}^2 + [B(1)]_3.a_3{}^2 + \cdots + [B(1)]_{m-1}.a_{m-1}{}^2 +$$
$$+[B(1)]_m.a_m{}^2$$

Então:

$$y_{3x2} = \sum_{i=1}^{m} [B(1)]_i.a_i{}^2 \quad (Eq.B11)$$

Do mesmo modo, observando os parênteses do 2º membro da (Eq. $B5$), nos quais, estão multiplicados por seu a_i associado, escrevendo cada um desses parênteses em relação ao seu a_i associado, tem-se que:

$$y_{4x2} = [B(2)]_1.a_1{}^2 + [B(2)]_2.a_2{}^2 + [B(2)]_3.a_3{}^2 + \cdots + [B(2)]_{m-1}.a_{m-1}{}^2 +$$

$$+[B(2)]_m.a_m{}^2$$

Desta forma:

$$y_{4x2} = \sum_{i=1}^{m}[B(2)]_i.a_i{}^2 \quad (Eq.B12)$$

De forma análoga vai ocorrer para as equações ($B6$ à $B9$) as quais pode-se reescrevê-las como:

A (Eq. $B6$), sendo:

$$y_{4x3} = [B(1)]_1.a_3{}^2 + [B(1)]_2.a_2{}^3 + [B(1)]_3.a_3{}^3 + \cdots + [B(1)]_{m-1}.a_{m-1}{}^3 +$$
$$+[B(1)]_m.a_m{}^3$$

Que é o mesmo que:

$$y_{4x3} = \sum_{i=1}^{m}[B(1)]_i.a_i{}^3 \quad (Eq.B13)$$

A $(Eq.B7)$, sendo:

$$y_{5x2} = [B(3)]_1.a_1{}^2 + [B(3)]_2.a_2{}^2 + [B(3)]_3.a_3{}^2 + \cdots + [B(3)]_{m-1}.a_{m-1}{}^2 +$$
$$+[B(3)]_m.a_m{}^2$$

Então:

$$y_{5x2} = \sum_{i=1}^{m}[B(3)]_i.a_i{}^2 \quad (Eq.B14)$$

A $(Eq.B8)$:

$$y_{5x3} = [B(2)]_1.a_1{}^3 + [B(2)]_2.a_2{}^3 + [B(2)]_3.a_3{}^3 + \cdots + [B(2)]_{m-1}.a_{m-1}{}^3 +$$
$$+[B(2)]_m.a_m{}^2$$

Portanto:

$$y_{5x3} = \sum_{i=1}^{m}[B(2)]_i.a_i{}^3 \quad (Eq.B15)$$

A $(Eq.B9)$:

$$y_{5x4} = [B(1)]_1.a_1{}^4 + [B(1)]_2.a_2{}^4 + [B(1)]_3.a_3{}^4 + \cdots + [B(1)]_{m-1}.a_{m-1}{}^4 +$$
$$+[B(1)]_m.a_m{}^4$$

Então:

$$y_{5x4} = \sum_{i=1}^{m}[B(1)]_i.a_i{}^4 \quad (Eq.B16)$$

Tomando como exemplos a modelagem das escritas dos y_{nxr} das equações ($B11$ à $B16$) para melhor compreensão do caso geral da escrita dos y_{nxr}, para $2 \leq r < n$, em que, pode-se escrever estes y_{nxr}, colocando os ${a_i}^r$ em evidência, aos quais cada um deles, vai ser multiplicado pela soma de todos os produtos de $(n-r)$ elementos diferentes do conjunto $A_i = A - \{a_i\}$, que pela definição de $[B(n)]_i$, esta soma corresponde à $[B(n-r)]_i$. Desta forma, pode-se escrever de modo geral y_{nxr}, para $2 \leq r < n$, como sendo:

$$y_{nxr} = [B(n-r)]_1.{a_1}^r + [B(n-r)]_2.{a_2}^r + [B(n-r)]_3.{a_3}^r + \cdots + \\ +[B(n-r)]_{m-1}.{a_{m-1}}^r + [B(n-r)]_m.{a_m}^r$$

Que é o mesmo que:

$$y_{nxr} = \sum_{i=1}^{m} [B(n-r)]_i.{a_i}^r \quad (Eq. B17)$$

APÊNDICE C - CÁLCULO DO $\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i . a_i$

Para analisar o somatório $\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i . a_i$, precisa-se generalizar uma forma de escrita para $B(n)$, em que descrimine todos os seus produtos, para em seguida, com esta forma, estruturar o padrão de escrita de $[B(n)]_i$, para assim, analisar o $\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i . a_i$.

Para fazer esta análise, pode-se começar observando a descrição de $B(n)$ para ter uma melhor visualização do caso geral da escrita de $B(n)$. Pode-se reescrever essas equações da seguinte forma:

$$B(1) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$B(2) = \sum_{p=1}^{C_{m,2}} \left(a_{j_1} a_{j_2}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,2}} \left(\prod_{k=1}^{2} a_{j_k}\right)_p , \quad (Eq. C1)$$

com $j_1 \in [1, m-1]$, e $j_2 \in [2, m]$, sendo, $j_1 < j_2$, nos quais, $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$; sendo, $a_{j_k} \in A$, com $k \in [1,2]$ e $k \in \mathbb{N}$. Para mantermos o mesmo padrão de escrita, adotado na descrição do $B(2)$, vejamos $\left(a_{j_1} a_{j_2}\right)_p = a_{(j_1)_p} a_{(j_2)_p}$, para $p \in [1, C_{m,2}]$, sendo, $C_{m,2}$ o total de produtos de n elementos que tem na soma de $B(2)$ e $\left(a_{j_1} a_{j_2}\right)_p$ cada um desses produtos; de modo que, $(j_k)_p \le (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,2]$, e $p \in [1, C_{m,2} - 1]$, com $k, p \in \mathbb{N}, (j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in [1, C_{m,2}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

$B(3)$pode ser escrito como:

$$B(3) = \sum_{p=1}^{C_{m,3}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,3}} \left(\prod_{k=1}^{3} a_{j_k}\right)_p , \quad (Eq. C2)$$

com $j_1 \in [1, m-2]$, $j_2 \in [2, m-1]$, e $j_3 \in [3, m]$, sendo, $j_1 < j_2 < j_3$, com $j_k \in \mathbb{N}$, para $k \in [1,3]$, sendo, $k \in \mathbb{N}$, com $a_{j_k} \in A$ e $k \in [1,3]$. Para manter o padrão de escrita dos produtos de $B(3)$,assim como, o da Eq. 3, pode-se ver, $\left(\prod_{k=1}^{3} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{3} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m,3}]$, sendo, $C_{m,3}$ o número de produtos que tem na soma do $B(3)$, e $\left(\prod_{k=1}^{3} a_{j_k}\right)_p$ com $p \in [1, C_{m,3}]$, cada um desses produtos e sendo $(j_k)_p \le (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,3]$, e $p \in [1, C_{m,3} - 1]$, com $k, p \in \mathbb{N}, (j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in [1, C_{m,3}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Pode-se reescrever a descrição das variáveis das equações ($C1$ e $C2$), da seguinte forma:

$$B(2) = \sum_{p=1}^{C_{m,2}} \left(a_{j_1} a_{j_2}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,2}} \left(\prod_{k=1}^{2} a_{j_k}\right)_p \quad (Eq. C3)$$

com $j_k \in [k, k+m-2]$, para $k \in [1,2]$, sendo, $j_1 < j_2$, com $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A$, para $k \in [1,2]$; de modo que: $\left(\prod_{k=1}^{2} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{2} a_{(j_k)_p}$, para $p \in \left[1, C_{m,2}\right]$, sendo, $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,2]$, e $p \in \left[1, C_{m,2} - 1\right]$, com $k, p \in \mathbb{N}, (j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in \left[1, C_{m,2}\right]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Por sua vez, $B(3)$ pode ser reescrito como:

$$B(3) = \sum_{p=1}^{C_{m,3}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,3}} \left(\prod_{k=1}^{3} a_{j_k}\right)_p \quad (Eq. C4)$$

com $j_k \in [k, k+m-3]$, para $k \in [1,3]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, para $k \in [1,2]$, com $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A$, para $k \in [1,2]$; de modo que: $\left(\prod_{k=1}^{3} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{3} a_{(j_k)_p}$, para $p \in \left[1, C_{m,3}\right]$, sendo, $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,3]$, e $p \in \left[1, C_{m,3} - 1\right]$, $(j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in \left[1, C_{m,3}\right]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Seguindo com este modelo de descrição, pode-se reescrever $B(4)$ como:

A (Eq. 4): $B(4) = \sum_{p=1}^{C_{m,4}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} a_{j_4}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,4}} \left(\prod_{k=1}^{4} a_{j_k}\right)_p \quad (Eq. C5)$

com $j_k \in [k, k+m-4]$, com $k \in [1,4]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, para $k \in$ [1,3], com $j_k \in \mathbb{N}$ e $a_{j_k} \in A$, para $k \in [1,4]$. Para descrever $B(4)$, utilizando a identidade $\left(\prod_{k=1}^{4} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{4} a_{(j_k)_p}$, para $p \in \left[1, C_{m,4}\right]$, sendo, $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,4]$, e $p \in \left[1, C_{m,4} - 1\right]$, sendo, $C_{m,4}$ o número de produtos que tem na soma de $B(4)$ e $\left(\prod_{k=1}^{4} a_{j_k}\right)_p$ para $p \in \left[1, C_{m,4}\right]$, cada um desses produtos, e $(j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in \left[1, C_{m,4}\right]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Já para $B(5)$, temos:

$$B(5) = \sum_{p=1}^{C_{m,5}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} a_{j_4} a_{j_5}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,5}} \left(\prod_{k=1}^{5} a_{j_k}\right)_p \quad (Eq. C6)$$

com $j_k \in [k, k+m-5]$, sendo $k \in [1,5]$, $j_k < j_{k+1}$, para $k \in [1,4]$, sendo, $j_k \in \mathbb{N}$ e $a_{j_k} \in A$, com $k \in [1,5]$. Mantendo o mesmo padrão de escrita de $B(5)$, tem-se $\left(\prod_{k=1}^{5} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{5} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m,5}]$ e sendo $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,5]$ e $p \in [1, C_{m,5} - 1]$, sendo, $C_{m,5}$ o número de produtos da soma de $B(5)$, e $\left(\prod_{k=1}^{5} a_{j_k}\right)_p$ para $p \in [1, C_{m,5}]$, cada um deles, e $(j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in [1, C_{m,4}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Observando as equações (C_3 à C_6), e as descrições de suas variáveis, pode-se visualizar e entender melhor o caso geral da escrita de $B(n)$ descrevendo todos os seus produtos, como sendo:

$$B(n) = \sum_{p=1}^{C_{m,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_n}\right)_p = \sum_{p=1}^{C_{m,n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p \quad (Eq. C7)$$

com $j_k \in [k, k+m-n]$, com $k \in [1,n]$, sendo, $j_k < j_{k+1}, k \in [1, n-1]$, sendo, $j_k \in \mathbb{N}$ e $a_{j_k} \in A$, com $k \in [1,n]$. Vejamos $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m,n}]$, sendo, $C_{m,n}$ o número de produtos da soma do $B(n)$ e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ cada um desses produtos, sendo $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,n]$ e $p \in [1, C_{m,n} - 1]$, sendo, $C_{m,n}$ o número de produtos da soma de $B(n)$, e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ para $p \in [1, C_{m,n}]$, cada um deles, e $(j_k)_t \in [1, m]$, para $t \in [1, C_{m,n}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Feito a análise da escrita do $B(n)$, conforme apresentada acima, pode-se analisar a escrita do $[B(n)]_i$, para $i \in [1, m]$, e $i \in \mathbb{N}$.

Para continuar de modo didático, vai ser escrito de forma analítica alguns $[B(n)]_i$, para alguns valores de i:

Para $i = 1$

Da definição de $[B(n)]_i$, $[B(n)]_1$ é um novo $B(n)$, só que associado ao conjunto $A_1 = A - \{a_1\}$. Desta forma, o padrão geral de escrita do $[B(n)]_1$ é o mesmo do $B(n)$ da (Eq.C7) só que ao invés de $a_{j_k} \in A$, $a_{j_k} \in A_1$, tendo A_1, $m-1$ elementos; deste modo, temos que:

$$[B(n)]_1 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n} \right)_p \right]_1 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k} \right)_p \right]_1 \quad (Eq. C8)$$

com $j_k \in [k, k+m-n]$, com $k \in [2, n]$, com $k \in \mathbb{N}$, e $j_k < j_{k+1}$, para $k \in [1, n-1]$, com, $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A_1$, para $k \in [1, n]$; mantendo para o $[B(n)]_1$, o mesmo modelo de padrão de escrita utilizado para o $B(n)$, vejamos $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m-1,n}]$, fazendo, $(j_k)_p \le (j_k)_{p+1}$, para $p \in [1, C_{m-1,n}]$, com $k \in [1, n]$, e $p \in [1, C_{m-1,n} - 1]$, e sendo, $C_{m-1,n}$ a quantidade de produtos da soma do $[B(n)]_1$ e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ para $[1, C_{m-1,n}]$, cada um desses produtos, e $(j_k)_t \in [2, m]$, para $t \in [1, C_{m-1,n}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

De forma análoga:

Para $i = 2$

De acordo com a definição de $[B(n)]_i$, $[B(n)]_2$ corresponde a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A_2, sendo $A_2 = A - \{a_2\}$. Que é como se fosse um novo $B(n)$ só que associado ao conjunto A_2, sendo, $n(A_2) = m - 1$. Deste modo, $[B(n)]_2$ vai ter a mesma modelagem do $B(n)$ da $(Eq. C7)$, só que com $a_{j_k} \in A_2$, sendo:

$$[B(n)]_2 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n} \right)_p \right]_2 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k} \right)_p \right]_2 \quad (Eq. C9)$$

com $j_k \in [k, k+m-n]$, $j_k \neq 2$, com k $\in [1,2[\cup]2, n]$, sendo, $j_k < j_{k+1}, k \in [1, n-1]$, e, $j_k \in \mathbb{N}$, com $a_{j_k} \in A_2$, para $k \in [1, n]$. Mantendo o padrão de escrita de $[B(n)]_2$ assim como o adotado para a escrita do $B(n)$, vejamos $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m-1,n}]$, e fazendo $(j_k)_p \le (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1, n]$, e $p \in [1, C_{m-1,n} - 1]$; sendo, $C_{m-1,n}$ o número de produtos da soma do $[B(n)]_2$ e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ cada um desses produtos, e $(j_k)_t \in [1, 2[\cup]2, m]$, para $t \in [1, C_{m-1,n}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Para $i = 3$

Da definição de $[B(n)]_i$, $[B(n)]_3$ é um novo $B(n)$ que está associado ao conjunto junto $A_3 = A - \{a_3\}$, em que, $n(A_3) = m - 1$. Desta forma, pode-se modelar a escrita de $[B(n)]_3$ utilizando da $(Eq. C7)$, sendo, $a_{j_k} \in A_3$, deste modo, tem-se que:

$$[B(n)]_3 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n}\right)_p\right]_3 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p\right]_3 \quad (Eq. C10)$$

com $j_k \in [k, k+m-n]$, $j_k \neq 3$, com $k \in [1,3[\, \cup\,]3,n]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, com $k \in [1, n-1]$, sendo, $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A_3$, com $k \in [1,n]$, mantendo para o $[B(n)]_3$ o mesmo padrão de escrita do $B(n)$, vejamos, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, para $p \in [1, C_{m-1,n}]$ e fazendo $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,n]$, e $p \in [1, C_{m-1,n} - 1]$, e $(j_k)_t \in [1,3[\, \cup\,]3,m]$, para $t \in [1, C_{m-1,n}]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Observando as equações ($C8$ à $C10$) como uma forma auxiliar de compreensão para o caso geral de escrita do $[B(n)]_i$, para $i \in [1,m]$, analisando este caso geral: por definição $[B(n)]_i$ é a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto $A_i = A - \{a_i\}$, deste modo $[B(n)]_i$ é como se fosse um novo $B(n)$, só que associado ao conjunto A_i, sendo, $n(A_i) = m - 1$; desta forma, pode-se modelar a escrita de $[B(n)]_i$, utilizando da modelagem do $B(n)$ da (Eq. $C7$), sendo, $a_{j_k} \in A_i$. Deste modo, tem-se que $[B(n)]_i$ pode ser escrito de modo geral como:

$$[B(n)]_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n}\right)_p\right]_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p\right]_i \quad (Eq. C11)$$

com $j_k \in [i, i+m-n]$, sendo, $j_k \neq i$, com $i \in [1,i[\, \cup\,]i,n]$, sendo, $j_k < j_{k+1}, k \in [1, n-1]$, com $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A_i$, sendo, $A_i = A - \{a_i\}$. Mantendo o mesmo padrão de escrita, conforme o adotado para $B(n)$, vejamos, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, sendo, $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1,n]$, e $p \in [1, C_{m-1,n} - 1]$; em que, $C_{m-1,n}$ é o número de produtos da soma do $[B(n)]_i$ e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ para $\left[1, C_{m-1,n}\right]$ cada um desses produtos, e $(j_k)_t \in [1, i[\ \cup\ ]i, m]$, para $i \neq 1$ e $(j_k)_t \in [2, m]$para $i = 1, t \in \left[1, C_{m-1,n}\right]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Com a $(Eq. C11)$ pode-se dar continuidade a análise do $\sum_{i=1}^{m} [B(n-1)]_i . a_i$, analisando $[B(n-1)]_i$, fazendo $n \to n-1$ na (Eq. $C11$), desta forma:

$$[B(n-1)]_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_{n-1}}\right)_p\right]_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{j_k}\right)_p\right]_i \quad (Eq. C12)$$

com $j_k \in [i, i+m-n+1]$, sendo, $j_k \neq i$, com $i \in [1, i[\ \cup\ ]i, n]$, sendo, $j_k < j_{k+1}, k \in [1, n-2]$, com $j_k \in \mathbb{N}$, e $a_{j_k} \in A_i$, sendo, $A_i = A - \{a_i\}$. Mantendo o mesmo padrão de escrita, conforme o adotado para $B(n)$, vejamos, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p = \prod_{k=1}^{n} a_{(j_k)_p}$, sendo, $(j_k)_p \leq (j_k)_{p+1}$, para $k \in [1, n-1]$, e $p \in \left[1, C_{m-1,n-1} - 1\right]$; em que, $C_{m-1,n-1}$ é o número de produtos da soma do $[B(n)]_i$ e $\left(\prod_{k=1}^{n} a_{j_k}\right)_p$ para $p \in \left[1, C_{m-1,n-1}\right]$ cada um desses produtos, e $(j_k)_t \in [1, i[\ \cup\ ]i, m]$, para $i \neq 1$ e $(j_k)_t \in [2, m]$, para $i = 1, t \in \left[1, C_{m-1,n-1}\right]$, t e $(j_k)_t \in \mathbb{N}$.

Seguindo com a análise do $\sum_{i=1}^{m} [B(n-1)]_i . a_i$, analisando o produto $[B(n-1)]_i . a_i$, substituindo a $(Eq. C12)$ neste produto, e observando o que este produto representa para cada um dos valores de i, com $i \in [1, m]$. Deste modo tem-se que:

$$[B(n-1)]_i . a_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_{n-1}}\right)_p\right]_i . a_i = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{j_k}\right)_p\right]_i . a_i \ (Eq. C13)$$

com $j_k \in [k, k+m-n+1]$, $j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \neq i$, com k $\in [1, n-1]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, $k \in [1, n-2]$ e $a_{j_k} \in A_i$, sendo, $A_i = A - \{a_i\}$.

Para $i = 1$ na (Eq. $C13$), tem-se que:

$$[B(n-1)]_1 . a_1 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_{n-1}}\right)_p\right]_1 . a_1 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{j_k}\right)_p\right]_1 . a_1, (Eq. C14)$$

com $j_k \in [k, k+m-n+1]$, $j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \neq 1$, com k $\in [1, n-1]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, $k \in [1, n-2]$ e $a_{j_k} \in A_1$, sendo, $A_1 = A - \{a_1\}$.

Observa-se que $[B(n-1)]_1 . a_1$ corresponde a soma dos produtos com n elementos diferentes do conjunto A terminados em a_1, em que os $(n-1)$ fatores antecedentes de a_1 em cada um deles, estão em ordem crescente de índices, conforme padrão de escrita adotado para $[B(n-1)]_1$.

Para $i = 2$ na (Eq. $C13$), tem-se que:

$$[B(n-1)]_2 . a_2 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_{n-1}}\right)_p\right]_2 . a_2 == \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{j_k}\right)_p\right]_2 . a_2,$$

(Eq. $C15$)

com $j_k \in [k, k+m-n+1]$, $j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \neq 2$, com k $\in [1, n-1]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, $k \in [1, n-2]$ e $a_{j_k} \in A_2$, sendo, $A_2 = A - \{a_2\}$.

Pode-se ver $[B(n-1)]_2 . a_2$ como sendo a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A, os quais tem como último fator o elemento a_2, e os $(n-1)$ fatores antecedentes a a_2 em cada um deles, estão em ordem crescente de índices, conforme padrão de escrita adotado para $[B(n-1)]_2$.

Para $i = 3$ na (Eq. $C13$), tem-se que:

$$[B(n-1)]_3 . a_3 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_{n-1}}\right)_p\right]_3 . a_3 = \left[\sum_{p=1}^{C_{m-1,n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_{j_k}\right)_p\right]_3 . a_3, (Eq. C16)$$

com $j_k \in [k, k+m-n+1]$, $j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \neq 3$, com k $\in [1, n-1]$, sendo, $j_k < j_{k+1}$, $k \in [1, n-2]$ e $a_{j_k} \in A_3$, sendo, $A_3 = A - \{a_3\}$.

Observa-se que $[B(n-1)]_3 . a_3$ é a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A, os quais terminam com o fator a_3, estando os $(n-1)$ fatores antecedentes a a_3 nestes produtos em ordem crescente de índices.

Deste modo, observando as equações ($C14$ à $C16$) e suas análises, pode-se visualizar melhor o $\sum_{i=1}^{m} [B(n-1)]_i . a_i$, para $i \in [1, m]$ e assim, fazer a análise dele pela (Eq. $C13$), dizendo que ele corresponde a soma dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A, os quais, pelo menos os primeiros $(n-1)$ fatores estão em ordem crescente de índice, conforme o padrão de escrita adotado para $[B(n-1)]_i$, para $i \in [1, m]$; que é o mesmo que dizer que é a soma das permutações dos produtos de n elementos diferentes do conjunto A, as quais, estão com pelo menos seus primeiros $(n-1)$ fatores em ordem crescente de índices; que, deste modo, pela definição de $B(n)$, é a soma das permutações dos produtos de $B(n)$, as quais estão, com pelo menos os seus primeiros $(n-1)$ fatores em ordem crescente de índices, desta forma, de forma analítica tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i . a_i = \sum_{p=1}^{C_{m,n}} P_{n_{(n-1)_c}} . \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n}\right)_p = P_{n_{(n-1)_c}} . \sum_{p=1}^{C_{m,n}} \left(a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_n}\right)_p =$$

$$= P_{n_{(n-1)_c}} . B(n) \quad (Eq. C17)$$

Sendo $P_{n_{(n-1)_c}}$ o número de permutações de cada um dos produtos de $B(n)$, as quais, estão com pelo menos os seus primeiros $(n-1)$ fatores em ordem crescente de índices, em que $P_{n_{(n-1)_c}}$ é o mesmo valor para quaisquer um dos produtos de $B(n)$, pois, é modelada com os mesmos critérios e mesmas variáveis para todos eles.

A permutação $P_{n_{(n-1)_c}}$ pode ser calculada aplicando o princípio fundamental da contagem, para qualquer produto de $B(n)$, fazendo o arranjo de seus n elementos, de modo que, pelo menos os $n-1$ primeiros elementos fiquem em ordem crescente de índices, a cada vez que alterarmos o último fator do produto, que pode ser quaisquer um de seus n elementos; deste modo, de modo analítico tem-se que:

$P_{n_{(n-1)_c}} = 1.1.1.1.1.1.1. \dots . n = 1^{n-1}. n = n$ (Eq. $C18$)

Observa-se que no momento que posiciona quaisquer um dos n elementos do produto como último fator dele, só temos uma forma de posicionar os $(n-1)$ elementos diferentes restantes em ordem crescente de índices, conforme apresentado analiticamente pelo princípio fundamental da contagem acima.

Substituindo a (Eq. $C18$) na (Eq. $C17$), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{m}[B(n-1)]_i . a_i = n . B(n) \quad (Eq. C19)$$

Apêndice D - RELAÇÃO ENTRE $B(n)$, γ_{nxr}, e γ_{rxr}

Conforme mencionado na sentença (ii) do apêndice B, vai ser analisada a escrita de γ_{nxr} para $r = n$, neste apêndice. Para início dessa análise, como forma auxiliar para compreensão do caso geral de escrita de γ_{nxr}, para $r = n$, vai ser escrito alguns γ_{nxr}, nesta condição, ou seja, alguns γ_{nxn}, para alguns valores de n.

Para $n = 1$, tem-se que:

$$\gamma_{1x1} = B(1) = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad (Eq.D1)$$

Para $n = 2$, tem-se:

$$\gamma_{2\times 2} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1} + a_ma_m$$

Desta forma:

$$\gamma_{2\times 2} = \sum_{i=1}^{m} {a_i}^2 \quad (Eq.D2)$$

Para $n = 3$

$$\gamma_{3\times 3} = a_1a_1a_1 + a_2a_2a_2 + a_3a_3a_3 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1} + a_ma_ma_m$$

Então:

$$\gamma_{3\times 3} = \sum_{i=1}^{m} {a_i}^3 \quad (Eq.D3)$$

Observando as equações $(D1$ à $D3)$, pode-se compreender de forma mais didática a análise geral da escrita de $\gamma_{n\times n}$, na qual é a soma dos produtos de n elementos iguais do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, desta forma,

$$\gamma_{n\times n} = a_1a_1a_1 \dots a_1 + a_2a_2a_2 \dots a_2 + a_3a_3a_3 \dots a_3 + \cdots + a_{m-1}a_{m-1}a_{m-1} \dots a_{m-1} + \\ + a_ma_ma_m \dots a_m$$

Portanto:

$$\gamma_{n\times n} = \sum_{i=1}^{m} {a_i}^n \quad (Eq.D4)$$

Como pode-se calcular $\gamma_{n\times n}$ pela (Eq. D4),pode-se procurar relacionar os $\gamma_{n\times r}$, com $r \neq n$, e os $B(n)$, com esta estrutura $\gamma_{n\times n}$, em que fazendo $n = r$ na (Eq. D4), tem-se que:

$$\gamma_{r\times r} = \sum_{i=1}^{m} a_i{}^r \quad (Eq. D5)$$

Como foi visto tem-se que $\gamma_{n\times r}$ tem r elementos iguais e $(n-r)$ elementos diferentes em cada um de seus produtos, constituintes de sua soma, pode-se ver a estrutura $\gamma_{r\times r}$ como a responsável pelas repetições dos elementos nestes produtos dessa soma, e a estrutura $B(n-r)$ como sendo a responsável pelos elementos diferentes de cada um desses produtos, ao fazer $B(n-r).\ \gamma_{r\times r}$, unimos estas duas estruturas, e uma parte deste produto corresponde a $\gamma_{n\times r}$.

Deste modo, fazendo a análise do produto $B(n-r).\ \gamma_{r\times r}$, segue:

Tem-se

$$B(n-r). \gamma_{r\,x\,r}$$

Substituindo a (Eq. D5) neste produto, segue

$$B(n-r). \gamma_{r\,x\,r} = B(n-r). \sum_{i=1}^{m} a_i{}^r$$

Desenvolvendo o somatório, tem-se:

$$B(n-r). \gamma_{r\,x\,r} = B(n-r). (a_1{}^r + a_2{}^r + a_3{}^r + \cdots + a_{m-1}{}^r + a_m{}^r)$$

Segue:

$$B(n-r). \gamma_{r\,x\,r} = B(n-r). a_1{}^r + B(n-r). a_2{}^r + B(n-r). a_3{}^r + \cdots + B(n-r). a_{m-1}{}^r +$$
$$+B(n-r). a_m{}^r \quad (Eq. D6)$$

Aplicando a (Eq. A9) fazendo, $n \rightarrow n-r$, na (Eq. D6), para cada um dos $B(n-r)$ do 2º membro da $(Eq. D6)$, os quais, cada um, está sendo multiplicado por um $a_i{}^r$ (seu a_i associado), com $i \in [1, n]$, escrevendo cada um desses $B(n-r)$ em relação ao seu a_i associado, tem-se que:

$$B(n-r). \gamma_{r\,x\,r} = ([B(n-r-1)]_1. a_1 + [B(n-r)]_1). a_1{}^r +$$
$$([B(n-r-1)]_2. a_2 + [B(n-r)]_2). a_2{}^r + ([B(n-r-1)]_3. a_3 + [B(n-r)]_3). a_3{}^r +$$
$$+ \cdots + ([B(n-r-1)]_{m-1}. a_{m-1} + [B(n-r)]_{m-1}). a_{m-1}{}^r +$$
$$+([B(n-r-1)]_m. a_m + [B(n-r)]_m). a_m{}^r$$

Desenvolvendo o 2º membro desta equação, e o agrupando em produtos que contenham fatores ${a_i}^{r+1}$ e ${a_i}^{r}$, com $i \in [1, m]$, deste modo, tem-se que:

$$B(n-r).\gamma_{r\,x\,r} = \sum_{i=1}^{m}[B(n-r-1)]_i.{a_i}^{r+1} + \sum_{i=1}^{m}[B(n-r)]_i.{a_i}^{r} \quad (Eq.D7)$$

Da (Eq. B17), para $r \to r+1$, tem-se:

$$y_{nxr+1} = \sum_{i=1}^{m}\big[B\big(n-(r+1)\big)\big]_i.{a_i}^{r+1}$$

Então:

$$y_{nxr+1} = \sum_{i=1}^{m}[B(n-r-1)]_i.{a_i}^{r+1}, \quad (Eq.D8)$$

para os valores de r, $1 \leq r < n-1$, em que, $B(0) = 1$, para $r = n-1$.

Sendo este domínio de $y_{n-1xr+1}$ analisado da seguinte forma:

Pelo domínio da (Eq. B17), para y_{nxr}, tem-se que:

$$2 \leq r < n$$

Para análise do domínio de y_{nxr+1}, a partir do domínio de y_{nxr}, pode-se fazer $r \to r+1$ na inequação acima, desta forma:

$$2 \leq r+1 < n$$

$$2-1 \leq r+1-1 < n-1$$

$$1 \leq r < n-1$$

Substituindo as equações (D8 e B17) na (Eq. D7), tem-se que:

$$B(n-r).\gamma_{r\,x\,r} = y_{nxr+1} + y_{nxr} \quad (Eq.D9)$$

APÊNDICE E - EXPRESSÃO MATEMÁTICA PARA $\boldsymbol{y_{nxr}}$, $\mathbf{2 \leq r < n}$

Precisa-se calcular $\gamma_{n\,x\,2}$ para solucionar a (Eq. 10), na qual é o objetivo principal do nosso trabalho; desta forma, buscando modelar uma fórmula para calcular os y_{nxr}, a partir da (Eq. D9), pode-se isolar o y_{nxr} nesta equação, em que:

$$y_{nxr} = B(n-r).\gamma_{r\,x\,r} - y_{nxr+1} \quad (Eq.E1)$$

Descriminando os possíveis $\gamma_{n\times r}$, para alguns valores de n, que a (Eq. E1) pode fornecer, de acordo com o seu domínio, $2 \leq r < n$, tem-se:

Para $\boldsymbol{n = 3}$

Para $r = 2$

$y_{3x2} = B(1).\gamma_{2\,x\,2} - y_{3x3} \quad (Eq.E2)$

Para $\boldsymbol{n = 4}$

Para $r = 3$

$$\gamma_{4\times3} = B(1)\gamma_{3\times3} - \gamma_{4\times4} \quad (Eq.E3)$$

Para $r = 2$

$$\gamma_{4\times2} = B(2)\gamma_{2\times2} - \gamma_{4\times3} \quad (Eq.E4)$$

Substituindo a $(Eq.E3)$ na $(Eq.E4)$

$\gamma_{4\times2} = B(2)\gamma_{2\times2} - B(1)\gamma_{3\times3} + \gamma_{4\times4} \quad (Eq.E5)$

Para $\boldsymbol{n = 5}$

Para $r = 4$

$$\gamma_{5\times4} = B(1)\gamma_{4\times4} - \gamma_{5\times5} \quad (Eq.E6)$$

Para $r = 3$

$$\gamma_{5\times3} = B(2)\gamma_{3\times3} - \gamma_{5\times4} \quad (Eq.E7)$$

Substituindo a $(Eq.E6)$ na $(Eq.E7)$

$$\gamma_{5\times3} = B(2)\gamma_{3\times3} - B(1)\gamma_{4\times4} + \gamma_{5\times5} \quad (Eq.E8)$$

Para $r = 2$

$\gamma_{5\times2} = B(3).\gamma_{2\times2} - \gamma_{5\times3} \quad (Eq.E9)$

Substituindo a $(Eq.E8)$ na $(Eq.E9)$

$\gamma_{5\times2} = B(3).\gamma_{2\times2} - B(2)\gamma_{3\times3} + B(1)\gamma_{4\times4} - \gamma_{5\times5} \quad (Eq.E10)$

Para $\boldsymbol{n = 6}$

Para $r = 5$

$$\gamma_{6\times5} = B(1).\gamma_{5\times5} - \gamma_{6\times6} \quad (Eq.E11)$$

Para $r = 4$

$$\gamma_{6\times4} = B(2).\gamma_{4\times4} - \gamma_{6\times5} \quad (Eq.E12)$$

Substituindo a $(Eq.E11)$ na $(Eq.E12)$

$$\gamma_{6\times4} = B(2).\gamma_{4\times4} - B(1)\gamma_{5\times5} + \gamma_{6\times6} \quad (Eq.E13)$$

Para $r = 3$

$\gamma_{6\times3} = B(3).\gamma_{3\times3} - \gamma_{6\times4} \quad (Eq.E14)$

Substituindo a $(Eq.E14)$ na $(Eq.E13)$

$$\gamma_{6\times3} = B(3).\gamma_{3\times3} - B(2).\gamma_{4\times4} + B(1)\gamma_{5\times5} - \gamma_{6\times6} \quad (Eq.E15)$$

Para $r = 2$

$$\gamma_{6\times2} = B(4).\gamma_{2\times2} - \gamma_{6\times3} \quad (Eq.E16)$$

Substituindo a $(Eq.E16)$ na $(Eq.E15)$

$$\gamma_{6\times2} = B(4).\gamma_{2\times2} - B(3).\gamma_{3\times3} + B(2).\gamma_{4\times4} - B(1)\gamma_{5\times5} + \gamma_{6\times6} \quad (Eq.17)$$

Desta forma, listando as equações (E2, E3, E5, E6, E8, E10, E11, E13, E15 e E17) abaixo, para observa se há um padrão geral de formação nestas equações, tem-se:

$\gamma_{3\times2} = B(1)\gamma_{2\times2} - \gamma_{3\times3}$

$\gamma_{4\times3} = B(1)\gamma_{3\times3} - \gamma_{4\times4}$

$\gamma_{4\times2} = B(2)\gamma_{2\times2} - B(1)\gamma_{3\times3} + \gamma_{4\times4}$

$\gamma_{5\times4} = B(1)\gamma_{4\times4} - \gamma_{5\times5}$

$\gamma_{5\times3} = B(2)\gamma_{3\times3} - B(1)\gamma_{4\times4} + \gamma_{5\times5}$

$\gamma_{5\times2} = B(3).\gamma_{2\times2} - B(2)\gamma_{3\times3} + B(1)\gamma_{4\times4} - \gamma_{5\times5}$

$\gamma_{6\times5} = B(1).\gamma_{5\times5} - \gamma_{6\times6}$

$\gamma_{6\times4} = B(2).\gamma_{4\times4} - B(1)\gamma_{5\times5} + \gamma_{6\times6}$

$\gamma_{6\times3} = B(3).\gamma_{3\times3} - B(2).\gamma_{4\times4} + B(1)\gamma_{5\times5} - \gamma_{6\times6}$

$\gamma_{6\times2} = B(4).\gamma_{2\times2} - B(3).\gamma_{3\times3} + B(2).\gamma_{4\times4} - B(1)\gamma_{5\times5} + \gamma_{6\times6}$

Dessa forma, observa-se que podemos escrever $\gamma_{n\times r}$ de modo geral, para $2 \leq r < n,$ como:

$$\gamma_{n\,x\,r} = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r}\, B(n-j)\gamma_{j\,x\,j}, \quad (Eq. E18)$$

fazendo, $B(0) = 1$.

Como esta fórmula foi gerada por análise de formação de padrão recursivo de equações, tem-se que provar a recursividade da mesma, para $n \to n+1$, no qual esta prova está apresentada no apêndice seguinte.

APÊNDICE F - DEMONSTRAÇÃO DA RECURSIVIDADE DA Eq. E18 PARA $n + 1$

Pode-se fazer esta prova por identidade, substituindo-se n por $n + 1$ na Eq. $E18$, e verificando se irá ocorrer uma identidade, utilizando para esta verificação a (Eq. $D9$) que é verdadeira; pois esta equação foi gerada por meio de identidade, buscando só outras formas de reescrever está identidade em todo o seu processo de desenvolvimento, sem utilizar de nenhuma álgebra que necessite de uma prova num campo discreto da matemática. Desta forma, tem-se

Fazendo $n \to n + 1$ na (Eq. $E18$)

$$\gamma_{n+1\,x\,r} = \sum_{j=r}^{n+1} (-1)^{j-r}\, B(n+1-j)\gamma_{j\,x\,j}$$

Explicitando o último termo do somatório do 2º membro desta equação, tem-se:

$$\gamma_{n+1\,x\,r} = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r}. B(n+1-j)\gamma_{j\,x\,j} - B(0). \gamma_{n+1\,x\,n+1} \quad (Eq. F1)$$

Fazendo $n \to n + 1$, na (Eq. D9)

$$B(n+1-r). \gamma_{r\,x\,r} = y_{n+1xr+1} + y_{n+1xr} \quad (Eq. F2)$$

Analisando o domínio do r desta equação, que para n era $1 \leq r < n - 1$, para $n \to n + 1$, se torna,

$$1 \leq r < n + 1 - 1$$

$$1 \leq r < n$$

Deste modo, substituindo a $(Eq. F2)$ na $(Eq. F1)$, fazendo, $r \to j$,

$$\gamma_{n+1\,x\,r} = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r}. \left(\gamma_{n+1\,x\,j} + \gamma_{n+1\,x\,j+1}\right) - B(0). \gamma_{n+1\,x\,n+1}$$

Desenvolvendo o somatório, para analisar se vai haver a identidade idealizada, segue:

$$\gamma_{n+1\,x\,r} = \gamma_{n+1\,x\,r} + \gamma_{n+1\,x\,r+1} - \gamma_{n+1\,x\,r+1} - \gamma_{n+1\,x\,r+2} + \gamma_{n+1\,x\,r+2} + \gamma_{n+1\,x\,r+3} + \cdots +$$
$$-\gamma_{n+1\,x\,n-1} - \gamma_{n+1\,x\,n} + \gamma_{n+1\,x\,n} + \gamma_{n+1\,x\,n+1} - \gamma_{n+1\,x\,n+1} - \gamma_{n+1\,x\,n+2}$$

Desta forma, tem-se: $\gamma_{n+1\,x\,r} = \gamma_{n+1\,x\,r}$.

Ocorrendo assim, a identidade idealizada no 1º parágrafo deste apêndice, comprovando assim, a recursividade da Eq. $E18$ para $n + 1$, o que atesta sua veracidade no campo discreto.