Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Demonstrações matemáticas e a Educação Básica: um estudo em Hermenêutica Filosófica

Carlos Alberto Tavares Dias Filho

Orientadora: Profa. Dra. Verilda Speridião Kluth

Diadema

junho, 2020

PROFMAT

Título: Demonstrações matemáticas e a Educação Básica: um estudo em Hermenêutica Filosófica

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da UNIFESP, Campus Diadema/SP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Diadema

junho, 2020

DIAS FILHO, Carlos Alberto Tavares.

Demonstrações matemáticas e a Educação Básica: um estudo em Hermenêutica Filosófica / Carlos Alberto Tavares Dias Filho.
Diadema, 2020.

VIII, 113 f.

Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema. Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientadora: Profa. Dra. Verilda Speridião Kluth

1. Demonstração Matemática 2. Fenomenologia 3. Hermenêutica Filosófica 4.Argumentações e Provas Matemáticas 5.Educação Matemática

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Chefe de Departamento:

Profa. Dra. Patricia Rosana Linardi

Coordenador do Programa de Pós-Graduação

Prof. Dr. Renato de Sá Teles

ATA DA REUNIÃO DA COMISSÃO JULGADORA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO / DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Câmara de Pós-Graduação e Pesquisa

Aos Vinte e Quatro dias do mês de junho do ano de 2020, reuniu-se via **Google meet** (devido a suspensão das atividades em decorrência da pandemia do COVID-19), às 14h00min, a Comissão Julgadora para a DEFESA DE DISSERTAÇÃO , solicitada por **Carlos Alberto Tavares Dias Filho**, aluno(a) do Programa de Pós-Graduação em **Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**, que apresentou a Dissertação intitulada:**Demonstrações matemáticas e a Educação Básica: um estudo em Hermenêutica Filosófica".**

A referida Comissão esteve constituída pelos Professores Doutores:

Prof(a). Dr(a). Saddo Ag Almouloud - da Universidade Federal do Pará;

Prof(a). Dr(a). Tiago Nunes Castilho - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - da Universidade Federal de São Paulo;

Prof(a). Dr(a). Denilson Soares Cordeiro - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - da Universidade Federal de São Paulo;

Prof(a). Dr(a). Verilda Speridião Kluth (orientadora) - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - da Universidade Federal de São Paulo;

O(a) Presidente Prof(a). Dr(a). Verilda Speridião Kluth (orientadora) , inicia a sessão dando a palavra ao(a) candidato(a), que dispõe de um período de tempo entre trinta e cinquenta minutos, para expor sua tese. A seguir dá a palavra aos Professores para a arguição. Cada examinador(a) dispõe de trinta minutos, no máximo, para arguição, bem como o(a) candidato(a) para as respostas. Tendo o(a) candidato(a) respondido todas as arguições em tempo hábil os membros da Banca Examinadora, emitiram seus Pareceres:

Em face dos referidos pareceres, a Comissão Julgadora considera o(a) Sr(a) **Carlos Alberto Tavares Dias Filho** ,habilitado(a) a receber o título de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA pela UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO . E por estarem de acordo, assinam a presente ata.

Diadema, 24 de junho de 2020.

Prof(a). Dr(a) Saddo Ag Almouloud	**(x)APROVADO ( ) REPROVADO**
Prof(a). Dr(a) Tiago Nunes Castilho	**(x)APROVADO ( ) REPROVADO**
Prof(a). Dr(a) Denilson Soares Cordeiro	**(x)APROVADO ( ) REPROVADO**
Prof(a). Dr(a). Verilda Speridião Kluth	Orientadora

Sugestões e Observações:

Documento assinado eletronicamente por **Saddo Ag Almouloud**, **Usuário Externo**, em 25/06/2020, às 14:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Denilson Soares Cordeiro**, **Docente**, em 25/06/2020, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Verilda Speridiao Kluth**, **Docente**, em 25/06/2020, às 16:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Nunes Castilho**, **Docente**, em 25/06/2020, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida clicando aqui, ou pelo endereço: "https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0" informando o código verificador **0349425** e o código CRC **75C77751**.

Nada é tão prático como uma boa teoria.

-Kurt Lewin

Agradecimentos

Sempre deixo esta parte por último para tentar encontrar palavras capazes de medir meus agradecimentos.

À minha orientadora, Verilda, pelo apoio e comentários precisos e preciosos. Não podendo deixar de mencionar todo o apoio para a realização deste trabalho.

À minha família, sempre disposta a conversas para somar ou distrair e servir de cobaia para os capítulos em produção.

Aos meus amigos, que me ouviram falar deste trabalho mais do que de outros assuntos, compreenderam os sumiços e não aguentam mais receber trechos soltos do mesmo.

A meus colegas de turma do PROFMAT e professores do curso, por todo o apoio, trocas e discussões que colaboraram e muito com este trabalho.

Meus sinceros agradecimentos,

Carlos Alberto Tavares Dias Filho

Resumo

Na presente pesquisa realizamos uma investigação numa abordagem fenomenológica ao redor da interrogação norteadora: *Como trabalhar didaticamente as demonstrações matemáticas na educação básica?* A pesquisa foi construída por uma análise em Hermenêutica Filosófica da demonstração matemática, entendida como tradição, ou seja, construção histórica do coletivo humano. No primeiro momento de análise buscamos por indícios de respostas à interrogação norteadora em textos desta tradição que a nos se apresentaram, deste momento construímos o texto-solo, base de nossa análise. O segundo momento de análise consistiu em uma leitura hermenêutica do texto-solo e sua organização no molde de perguntas e respostas daquilo que o texto-solo nos revela referente à interrogação norteadora. As perguntas que se repetem no texto-solo evidenciam aspectos relevantes àquilo que buscamos e compõe as categorias abertas. Temos três categorias abertas que nos falam da tradição das demonstrações matemáticas: P1 – *Qual é o modo de ser da demonstração matemática?*; P2 – *É a demonstração matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?*; P3 – *Como se dão os enunciados matemáticos?*. Explicitamos os trechos do texto-solo que compõe cada categoria aberta, como os trechos se relacionam e o que explicam sobre a demonstração matemática. Da construção e análise das categorias abertas percebemos cinco aspectos do trabalho didático com demonstrações matemáticas:*(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e demonstrações ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática*. Por fim, sintetizamos os nossos entendimentos sobre os aspectos elencados. Em nossas considerações finais, reforçamos a importância da argumentação e da demonstração matemática na educação básica.

Palavras-Chave: Demonstração Matemática. Fenomenologia. Hermenêutica Filosófica. Argumentações e Provas Matemáticas. Educação Matemática.

Abstract

In this research we investigated in a phenomenological approach around the guiding question: *How to do mathematical demonstrations in basic education didactically?* The research was built by an analysis in Philosophical Hermeneutics of mathematical demonstration, understood as tradition, that is, the historical construction of the human collective. In the first moment of analysis, we looked for signs of answers to the guiding question in texts of this tradition that were presented to us, from this moment we built the ground-text, the soil of the analysis. The second moment of analysis consisted of a hermeneutic reading of the ground-text and its organization in the form of questions and answers of what the ground-text reveals to us regarding the guiding question. The questions that are repeated in the ground-text highlight relevant aspects to what we are looking for and make up the open categories. We have three open categories that tell us about the tradition of mathematical demonstrations: P1 - What is the way of being of mathematical demonstration ?; P2 - Is the mathematical proof the only tool that communicates the mathematical truth ?; P3 - How do mathematical statements take place ?. We explain the excerpts of the ground-text that composse each open category, how the excerpts relate to each other and what they explain about the mathematical demonstration. From the construction and analysis of open categories, we perceive five aspects of didactic work with mathematical demonstrations: (a) definition of mathematical demonstration adopted from its purposes; (b) justification for the use of the mathematical demonstration, mainly because of the human limitation of understanding and the temporal limitation; (c) way of constructing the demonstration that is socially accepted as valid today, based on the purpose adopted; (d) the role of argumentation and naive demonstrations compared to formal demonstration and mathematical skills; and (e) the mathematical language, its writing and the language about mathematics. Finally, we summarize our understanding of the listed aspects. In our final remarks, we reinforce the importance of argumentation and mathematical demonstration in basic education.

Keywords: Mathematical Demonstration. Phenomenology. Philosophical Hermeneutics.

Lista de Quadros

Sumário

Introdução

O conhecimento matemático é tido como algo raro, espantoso, ou mesmo místico, para o senso comum. Embora todos tenham passado por um ensino básico obrigatório, muitos mantêm a noção de que a matemática é algo desconexo do mundo ou o jargão de que a matemática "está em tudo". Assim, refletimos sobre o papel docente na construção dessas noções matemáticas e sobre matemática. Que papel é esse?

Podemos buscar por indícios de resposta na filosofia da matemática em interpretações do que é matemática e do que é conhecimento matemático, pois, segundo Meneghetti e Bicudo (2003), as filosofias da matemática refletem na educação matemática. Os autores fizeram uma retomada da história das principais correntes filosóficas da matemática. Apontaram dois vieses principais dentre as correntes filosóficas, um deles diz da matemática enquanto objeto da razão pura e outro de domínio da intuição e dos sentidos. Enquanto objeto de razão pura, sua veracidade só pode ser apontada por meio de argumentos lógico-dedutivos e quando concebida dentro do domínio da intuição deveria descrever o mundo sensível. Kant sugere que o conhecimento parta do sensível para à razão, considerando equilibradamente ambos os aspectos das correntes anteriores, entretanto principais correntes filosóficas do século XIX e XX que influenciam a matemática atual acabaram por interpretar a matemática como razão pura (MENEGHETTI; BICUDO, 2003).

Essas correntes são o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. O Logicismo compreende que a Matemática possa ser reduzida a uma aplicação geral das regras inerentes da lógica. Machado (1991) aponta Leibniz como um dos autores de base desta corrente, onde partindo de pressupostos aristotélicos, divide a verdade em verdades dos fatos, do sensível e empírico, e as verdades da razão que não podem ser negadas sem que hajam erros lógicos, dentre estas a Matemática.

Para o Intuicionismo, a matemática, como o nome sugere, é intuitiva e a lógica e a língua materna são ferramentas de comunicação. Machado (1991) afirma que o Intuicionismo, tomando por base Kant, entende a Matemática como atividade autônoma e autossuficiente que trata da construção de entidades abstratas, não requerendo, necessariamente, uma linguagem especial. Pode-se entender que, diferindo do logicismo, onde paradoxos, por exemplo, são construções que surgem de uma má aplicação dos princípios lógicos, no Intuicionismo, um paradoxo é uma construção que não tem valor lógico[1] verdadeiro ou falso, não sendo possível de ser determinado.

O Formalismo, também toma por base noções de Kant, compreende que a matemática é deduzida a partir de verdades fundamentais lógicas, não demonstráveis e não contraditórias abstratas (escolhidas) ou sensíveis (observadas), ou seja, a partir de um conjunto de axiomas pode-se determinar proposições verdadeiras (método axiomático). Tinha como pressuposto uma formalização a todos os campos da matemática de modo similar ao feito no livro Os Elementos, de Euclides. Entretanto em 1931, o principal fato demonstrado por Gödel em seu artigo “Sobre as Proposições Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos” é que todo sistema de axiomas é essencialmente incompleto, ou seja, existirão sempre proposições não passiveis de demonstração (NAGEL; NEWMAN, 2015).

Embora as correntes filosóficas apresentadas ofereçam concepções de conhecimento matemático, quando questionamos no primeiro parágrafo sobre o papel docente, em particular na educação básica, onde ocorre o primeiro contato com uma matemática organizada e sistematizada, como essas concepções se traduzem em salas de aula? Com relação à educação matemática no Brasil, foram apontadas

> [...] seis tendências em Educação Matemática, a saber, a formalista clássica (vigorou ate final da década de 50), a empírico ativista (difundida nas décadas de 60 e 70), a formalista moderna (após 1950), a tecnicista e suas variações, a construtivista (década de 60 e 70) e a socioetnocultural (mais atual). (MENEGHETTI; BICUDO, 2003, p. 10).

As tendências influenciaram a formação de professores. O que nos leva a pensar nos cursos de formação inicial e continuada de professores de matemática e a visão de matemática (ou matemáticas) adotada(s). Valente (2013) comenta que a discussão sobre a matemática nos cursos de formação de professores não é recente. Fiorentini e Oliveira (2013) apontam três perspectivas distintas e de forte impacto na organização da formação de professores de matemática: (a) uma perspectiva da prática, onde bastaria o

---

[1] Quando dizemos valor lógico, nos referimos ao sentido da lógica clássica, onde uma proposição qualquer será verdadeira ou falsa.

conhecimento do conteúdo matemático a ser ministrado; (b) uma concepção onde se faz necessária uma base sólida do conteúdo a ser ensinado, para depois ser aplicado e transposto como conteúdo a ser ensinado; (c) uma prática onde a matemática é compreendida enquanto sua prática social, ou seja, compreendia em suas complexas relações. Note que as perspectivas relacionam-se com as tendências em educação matemática e correntes filosóficas apontadas anteriormente. Independente da concepção de formação docente, a noção de que um professor de matemática necessita de conhecimentos matemáticos é indiscutível (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013)

Valente (2013) acrescenta ao debate questões epistemológicas da matemática escolar na formação docente e sua relação com a matemática (por vezes adjetivada como científica, outras de acadêmica) sob uma visão da História da Matemática. Para Chervel (Valente, 2013) o senso comum pressupõe que a escola ensine "a matemática dos matemáticos", em outras palavras a escola seria um local de reprodução, porém seus trabalhos apontam que também é um lugar de criação e resultado dos séculos de existência (um produto histórico).

> Assim, este texto considera a matemática escolar como referente fundamental do trabalho didático-pedagógico do professor de matemática, produzido historicamente no embate da cultura escolar com outras culturas, em especial com a cultura matemática, vista como a matemática acadêmica, uma cultura do ensino de matemática em nível superior. (VALENTE, 2013, p. 944).

Com relação à, esta concepção, Valente (2013) sugere que na formação, inicial e continuada, sejam tratados temas da matemática escolar, não como ferramentas para apreender temas da matemática acadêmica, mas com foco na construção histórico-epistemológica desta matemática.

Compreendemos que o fazer docente é um fazer especializado no qual associa saberes matemáticos e saberes pedagógicos. Em concordância, o trabalho de Caldatto *et. al.* (2016), tomando por base diversos pesquisadores, dentre eles os trabalhos de Shulman, descrevem diferentes listas de saberes do(a) docente de matemática. Em comum a todas as teorias é destacado que

> a) o conhecimento matemático se configura como *uma* das dimensões do conhecimento do professor de Matemática. Apesar de os autores se voltarem para o estudo da dimensão matemática do conhecimento do professor de Matemática, *em nenhum momento eles negam a existência ou inferiorizam qualquer das demais dimensões do conhecimento do profissional professor*; b) a dimensão matemática do

> conhecimento do professor de Matemática se configura como uma composição entre o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo*. Ou seja, o professor de Matemática mobiliza, no decorrer de sua atividade profissional, tanto o *conhecimento do conteúdo específico* quanto o *conhecimento pedagógico do conteúdo,* de modo que a qualidade do ensino da Matemática está associada à mobilização, dentre outras, de ambos os conhecimentos, sendo indissociáveis na prática docente; c) a diferenciação entre a Matemática como objeto do trabalho do professor de Matemática na Escola Básica e a Matemática como objeto de trabalho dos matemáticos. (CALDATTO *et. al*, 2016, p. 913)

Assim, pesquisadores em educação matemática de modo geral apontam para o fato de que somente o conhecimento matemático não basta para o docente (relembrando uma das concepções de formação docentes anteriormente apresentadas), bem como a necessidade de um conhecimento pedagógico em conjunção à matemática, não apenas somado, após a formação de matemática, mas a ela integrado.

Com relação à diferença entre a matemática da escola básica e a matemática dos matemáticos, Fiorentini e Oliveira (2013) apontam que a matemática do docente não é mais simples ou superficial, é qualitativamente diferente. Os autores afirmam que o docente de matemática precisa conhecer as matemáticas com profundidade e diversidade. Definem "conhecer com profundidade" as matemáticas não somente conhecer os procedimentos, resoluções de problemas e demonstrações, mas saber justifica-los e apresentar outros procedimentos válidos e histórico-culturamente produzidos.

> Em relação à *diversidade*, queremos destacar que o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925).

Nessa visão tanto o fazer docente como o saber do docente de matemática apresenta-se como único. Entretanto o fazer docente é influenciado por correntes filosóficas da matemática adotadas pelos próprios professores, pelo fazer matemático acadêmico, por um currículo, por diferentes culturas que se encontram na escola e na sala de aula, como visto anteriormente. Nesta pesquisa vamos enfocar um aspecto tido como central da matemática: as demonstrações matemáticas.

Simplificadamente pode-se dizer que as demonstrações matemáticas são sequências de argumentos lógicos com o objetivo de provar que uma proposição é válida. Caldatto et al. (2016) apontam que existem livros da coleção do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que tratam de demonstrações de maneira formal[2] e desvinculadas da prática docente na educação básica. Enquanto Fiorentini e Oliveira (2013) sugerem que estudantes da educação básica conseguem fazer demonstrações não formais, construindo justificativas não formais que validem hipóteses num contexto de uma aula de matemática básica.

Considerando a demonstração matemática em todos seus aspectos da matemática formal, do saber docente sobre ela e seu ensino, das filosofias da matemática que subjazem as ações docentes, enunciamos a Interrogação Norteadora desta pesquisa: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*

Assumindo uma postura fenomenológica de pesquisa, quando enunciamos esta interrogação como norteadora temos a compreensão de que os caminhos a serem traçados partem da interrogação e relacionam-se com a busca de indicações de resposta da mesma. Assim, a seguir, no primeiro capítulo, explicaremos a Interrogação Norteadora e como esta foi enunciada e sendo elaborada a partir da compreensão que aflora do pensar fenomenológico. Adotaremos como regra destacar em itálico termos fundamentais para o assunto tratado no momento.

No segundo capítulo, partindo de nossos entendimentos da Interrogação Norteadora, buscamos métodos de pesquisa que apontam indícios de respostas. Encontramos em Kluth (2005, 2007) uma metodologia de análise em Hermenêutica Filosófica e suas bases teóricas.

O terceiro capítulo apresenta dois momentos da investigação realizada, a construção do texto-solo e sua organização numa estrutura de perguntas e respostas, intencionando os invariantes dos diferentes textos e tradições da demonstração matemática.

---

[2] Cabe aqui destacar ainda outra vez a influência das correntes filosóficas supracitadas.

A partir dos indícios invariantes no texto-solo, no quarto capítulo, organizamos as categorias abertas, que permitem a discussão acerca do fenômeno do trabalho didático das demonstrações matemáticas na educação básica.

No quinto capítulo, exploramos e explicitamos os apontamentos relativos à discussão do capítulo anterior. Por fim, realizamos nossas considerações finais, que de modo algum esgotam a análise e discussão do fenômeno, apontando a direção do que pode ser feito em seguida.

Capítulo 1. Explicitação da Interrogação Norteadora

Adotando uma posição de pesquisa fenomenológica, compreendemos e afirmamos que a maneira com a qual enunciamos a Interrogação Norteadora é intencional no sentido que ela é um algo que surge da unidade natural e antepredicativa do mundo e de nossas vidas cotidianas, o que lhe dá o caráter de orientar a busca da compreensão sobre a demonstração matemática, podendo assumir a orientação de nossa pesquisa. Para isso retomamos nossa Interrogação Norteadora: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*

Ao falarmos de trabalho didático, ou *trabalhar didaticamente*, nos referimos a uma das áreas da Pedagogia que é voltada ao fazer docente. Para Libâneo (1994 *apud* PIMENTA, 2008) a didática estuda os processos de ensino, tomando por base os componentes curriculares, o ensino e a aprendizagem; como também media o "o quê" e o "como" do processo de ensino. Manteremos nosso foco sobre o "como", deste trabalhar didático, como explicitado na Interrogação Norteadora.

A didática no senso comum é algo a ser incorporado pelo docente, porém é uma área de estudo sobre a "[...] *práxis* pedagógica, suas condições e modos de realização, de forma a atingir os objetivos do ensino" (PIMENTA, 2008, p.8). Entretanto as condições e modos de realização não são universais ou de comum conhecimento. Não podemos falar da existência de uma didática sem um contexto educacional.

Nesta pesquisa consideramos o contexto recente da educação brasileira, apoiando-nos documentos orientadores da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3] e o Currículo da Cidade de São Paulo (Currículo da Cidade)[4]. Em ambos os documentos nosso olhar recaiu no componente Curricular de Matemática. Para o Currículo da Cidade

> A Matemática desempenha um papel formativo básico, na medida em que possibilita o desenvolvimento dos diversos tipos de raciocínio, e outro instrumental, que é prático e visa a resolver problemas em situações reais, sendo uma ferramenta para ser usada em outras áreas e permitindo abordar uma grande variedade de situações. (SÃO PAULO, 2019. p.64).

[3] O documento final contendo orientação à para toda educação base foi concluído em 2018.
[4] Utilizamos nesta pesquisa a segunda edição do Currículo da Cidade de São Paulo, publicado em 2019.

Neste momento basta a compreensão de que os currículos dividem os objetos matemáticos em eixos e sugerem estratégias a serem adotadas. É importante destacar que, embora os documentos listem estratégias, objetos matemáticos e competências para a disciplina, não fazem uma relação direta entre estes. Entende-se assim que cada docente pode optar por tratar cada objeto matemático fazendo uso de diferentes estratégias e metodologias.

Como afirmado anteriormente, nosso foco será nas demonstrações matemáticas. Garnica (2002) defende a importância das demonstrações matemáticas para uma visão panorâmica dos modos de construção da matemática na formação docente. Para o autor a demonstração é fundamental para a compreensão da prática científica da matemática.

Silva (2002) afirma que a demonstração matemática possui diversos propósitos, além de determinar a veracidade de uma tese, também serve para convencer-nos da veracidade da tese. O autor explicita que embora relacionadas, as finalidades apresentadas se relacionam. A validade dos métodos de demonstração depende dos acordos e pressupostos tidos como verdadeiros e da lógica que os subjaz.

Sem perdemos o foco da interrogação norteadora, para Garnica (2002, p.94) "a prova[5] rigorosa é elemento essencial para compreendermos o funcionamento do discurso matemático e o modo como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula". Quando refletimos sobre a visão dos dois autores de demonstração matemática e o foco dado à matemática pelo currículo da cidade, a pergunta norteadora de nossa pesquisa ganha força e faz com que a demonstração matemática, sempre vista em seu caráter formal, ganhe um tom didático. Este tom didático, fala do convencimento e da compreensão do discurso matemático que inclui a forma e a organização do corpo do conhecimento matemático.

Neste sentido, em poucas palavras, esta pesquisa reflete sobre o papel do fazer docente e o saber especializado que reflete em seu planejamento de "o quê" e "como" ensinar, atrelado às concepções e orientações da BNCC e do Currículo da Cidade, quando considerada a construção científica da Matemática por meio de demonstrações

[5] Garnica (2002) usa "prova" como sinônimo de demonstração. Existe uma discussão de que "prova" seria uma "evidência de um fato" e não uma comprovação do fato. No presente trabalho entendemos "prova" diferente de "demonstração". Entretanto os verbos "provar", "demonstrar" e "deduzir" são tidos como sinônimos na literatura. (MORAIS FILHO, 2018).

matemáticas formais voltadas à Educação Básica mescladas e tonificadas por uma visão didático-pedagógico sobre as demonstrações matemáticas, que visa não somente a aplicabilidade da matemática, mas também o potencial de seu corpo de conhecimento para o desenvolvimento humano.

Partindo da Interrogação Norteadora e explicitação do seu enunciado, descrevemos e situamos o fenômeno a ser investigado. Entendemos que este possa ser analisado de diferentes formas, assim, a seguir explicamos a trajetória da investigação realizada.

Capítulo 2. Trajetória da Pesquisa

Falar sobre o trajeto da pesquisa, numa abordagem fenomenológica, vai além dos métodos e técnicas utilizados, pois estes revelam nossas concepções de mundo, ciência e verdade. A começar pela interrogação norteadora que não somente enuncia o tema pesquisado, mas é um indicador dos caminhos a serem seguidos no tecer da compreensão do fenômeno investigado.

Segundo Bicudo (2012, p.20) "a interrogação é correlata ao interrogado e ao que interroga", ou seja, a terna *interrogação-interrogado-quem interroga* não é passível de ser dissociada. A interrogação norteadora é uma elaboração intencional de quem interroga que, por sua vez, busca compreender o fenômeno de modo atento e rigoroso.

Na nossa pesquisa o fenômeno é a demonstração matemática quando imersa no sistema escolar, quando interrogada sobre seu potencial educativo por um educador, professor de matemática, que é um agente do próprio sistema, devendo assim prestar-lhe contas das premissas nele postas. Assim, para o presente trabalho encontramos em Kluth (2005, 2007) as bases da Hermenêutica Filosófica para buscar os indícios de resposta à nossa interrogação norteadora. Gadamer, segundo Kluth (2005), em seu estudo sobre o fenômeno da compreensão explicita que não buscou uma doutrina da "arte de compreender" ou investigar os fundamentos das, como chama, ciências do espírito, ao referir-se às ciências humanas. Seu estudo foi na direção daquilo que seria comum a todas as formas de compreensão.

A investigação fenomenológica de Gadamer (1997 *apud* KLUTH, 2005) da *compreensão* e da *maneira de interpretar* perpassa pelas concepções históricas e filosóficas de hermenêutica. Kluth (2005) aborda e explicita brevemente a análise das diferentes hermenêuticas realizada por Gadamer. Esta construção histórica auxilia na concepção e definição da hermenêutica filosófica gadameriana.

Historicamente, conforme Kluth (2005), a hermenêutica tem seu início em dois caminhos. O caminho teológico, no qual entende a existência de uma relação circular entre o todo e as partes de um texto[6] no proceder para a compreensão. E o caminho filológico onde a compreensão do texto ocorre a partir do mesmo. Nestas concepções, que desconsideram o contexto histórico, a "[...] compreensão era tomada como uma doutrina da arte a serviço da práxis do filólogo ou do teólogo" (KLUTH, 2005, p.31).

Diferentemente, Schleiermacher, desenvolve uma hermenêutica com um enfoque na transcendência da linguagem e aproximação do pensamento do autor. Assim "[....] o método da compreensão terá como meta tanto o que for comum a todos, por comparação, quanto o peculiar a cada um por adivinhação". (KLUTH, 2005, p.32). Neste sentido, para a hermenêutica de Schleiermacher a compreensão não é imediata, deve-se aprender a compreender objetivando a compreensão da intenção inconsciente do autor (KLUTH, 2005). A importância do leitor, nesta perspectiva, é superior à do objeto, entendido como fenômeno de expressão disponível para a pretensão de verdade do leitor.

Segundo Gadamer (KLUTH, 2005) os trabalhos de Dilthey, embasados em Schleiermacher, buscaram uma aplicação na historiografia. Dilthey retomou a noção da relação circular entre a parte e o todo, tomando como centro o eu. O conhecimento histórico universal pode ser construído a partir de um núcleo, uma vez que passa a ser considerado como um texto a ser decifrado. Assim, a hermenêutica não é uma ferramenta, mas é o intermédio universal da verdade histórica e nela o conhecimento da verdade, conforme Kluth (2005). A hermenêutica de Dilthey considera a questão da tradição e do contexto histórico do texto a medida que a compreensão ocorreria num padrão do próprio momento histórico e não de um momento atual.

As críticas aos trabalhos de Dilthey, similares às ideias primeiras de Husserl, eram o solipsismo, concepção filosófica de que o mundo e sua realidade existem apenas para o eu individual de que se tem consciência. Heidegger, como nos diz Kluth (2005), projetou uma fenomenologia hermenêutica embasada na intencionalidade e na presença superando tais críticas. Para Heidegger "o ser do ente não é outro ente" (KLUTH, 2005, p. 36), em outras palavras, o ser, em presença, não é passível de debate ou análise, é a base tomada para uma compreensão de um fenômeno dado. A realização da presença

[6] Texto aqui é utilizado de modo amplo, a medida que também pode significar obra humana ou realidade história a depender do contexto próprio.

dá-se no compreender, pois "[...] a compreensão é o modo de ser da pré-sença, na medida em que é poder-ser e "possibilidade" "(GADAMER, 1997 *apud* KLUTH, 2005, p.36). Entende-se que na presença do ser, este não está separado dos outros, a presença efetiva ocorre na compreensão e interação.

Na concepção heideggeriana, conforme a análise de Gadamer (1997 *apud* KLUTH, 2005) o tempo deixa de ser um problema a ser superado, pois é base do acontecer, uma vez que o próprio ser é entendido como o tempo, uma vez que a presença do ser não existe separada do ser. Ou seja, Heidegger compreende que "[...] o ser do ente não é outro ente" (KLUTH, 2005, p. 36), assim a presença é da própria natureza do ente e esta é temporal. Assim, nesta concepção, a ideia de Dilthey, de que seria necessário adotar um "espírito da época", ou tomar um padrão do momento histórico para obter-se uma verdade objetiva da histórica perde o sentido. Tomar o ser como tempo expande a noção de que a distância para com um determinado tempo histórico possibilita uma vantajosa e produtiva forma de compreensão (GADAMER, 1997 *apud* KLUTH, 2005). "A compreensão e a interpretação só se realizam frente à totalidade da estrutura existencial, quer seja no caso do conhecedor ter a intenção de interpretar "o que está aí" ou se extrair das fontes "como realmente foi" " (KLUTH, 2005, p.35).

A distância de uma época histórica produz a abertura a diferentes sentidos contidos para além de um texto, mas presentes em diferentes textos da mesma época. A essa compreensão de abertura, Gadamer chama de *consciência da história efeitual*, um indicativo de uma situação hermenêutica (KLUTH, 2005). "A realidade da história se dá pelos interesses que não se restringem aos fenômenos históricos e as obras transmitidas, mas também ao efeito dos mesmos na história" (KLUTH, 2005, p. 38).

A consciência da história efeitual abrange a compreensão da *experiência* e da *consciência histórica*, que podem ser resumidas como compreensões do indivíduo e do coletivo, respectivamente. A experiência tem caráter fundamental ao ser, pois "[...] a experiência que vivemos transforma o nosso saber, a tal ponto que não é possível passarmos duas vezes pela mesma experiência" (KLUTH, 2005, p.38). Ao ponto que a consciência histórica busca uma compreensão da tradição, portanto também historicamente construída e estendida abarcando a história efeitual. Desta maneira, a consciência da história efeitual apresenta uma abertura à compreensão do outro.

"A consciência hermenêutica tem sua consumação não na certeza metodológica sobre si mesma, mas na própria disposição à experiência que caracteriza o homem experimentado face o que está preso dogmaticamente" (GADAMER, 1997 *apud* KLUTH, 2005, p.40). Esta consciência não é espontânea e nem sem orientação. O sentido, conforme Kluth (2005), da orientação da consciência hermenêutica é a interrogação norteadora. A pergunta aponta a direção a seguir, ela se impõe e a estrutura da pergunta e resposta se faz em compreensão.

Kluth (2007) explicita que a filosofia hermenêutica permitiu tratar as estruturas da Álgebra com uma tradição, ou seja, como experiência humana. Podemos tomar a demonstração matemática de modo análogo e considerá-la uma tradição, lendo-a como textos inseridos na Matemática Ocidental. Entendemos que, na Hermenêutica Filosófica, a tradição

> [...] converte-se em experiência veiculada pela linguagem como uma possibilidade de compreensão/interpretação das obras humanas no modo de proceder no âmbito do círculo hermenêutico gadameriano, que se dá na estrutura da pergunta e da resposta constituindo o que o autor chama de autêntica conversação, que tem como pano de fundo o modo de ser das presenças e a tomada de consciência dos efeitos que a própria História promove constituindo a sua historicidade como forma de compreensão/interpretação. (KLUTH, 2007, p.99)

Tomando por base os trabalhos de Husserl sobre a experiência e a percepção, Kluth (2007) aponta que "a mais simples vivência de Evidência tem a ver com a objetividade científica" (p. 100). Para Husserl a subjetividade trata da experiência do indivíduo com o *mundo-vida*[7] por meio do ato de perceber. O autor toma *sentido*[8] como aquilo que é percebido na vivência em sua esfera não-expressiva e *significado*[9] como a interpretação da vivência também posta na forma de linguagem. Esta distinção ocorre, pois a expressão se dá em forma de linguagem (significado) e esta não é capaz de abarcar o todo da vivência (sentido). Por meio da linguagem o que foi compreendido na subjetividade de um indivíduo pode ser compreendido na subjetividade de outro. A repetição de compreensões nas falas dos indivíduos constitui a intersubjetividade, que ocorre naquilo que é central à fala, em qualquer variação linguística, que se aproxima do

---

[7] Do alemão *Lebenswelt*. Entendido para fenomenologia como solo de todos os seres, vivências e idealidades.
[8] Do alemão *Sinn*.
[9] Do alemão *Bedeutung*.

próprio sentido original da vivência. Uma análise, nestes termos, busca o que é comum às falas e aos textos, visando àquilo que é central, que é sentido na subjetividade e traduzido em significado. Consequentemente, com relação à linguagem, a "[...] maneira de fazer-se presente a muitos, em tempos distintos e de forma genuína é a mesma para todos em termos estruturais" (KLUTH, 2007, p.100) é o que gera a objetividade.

Husserl, conforme descreve Kluth (2007), explica ainda que a objetividade matemática é ideal, pois é possibilitada por uma evidência originária atemporal e não-independência dos indivíduos, em outras palavras, disponível a todos os seres humanos independentemente do momento histórico de modo a permitir a todos a possibilidade de construção, produção e comunicação da matemática, a mesma medida que essas realizações ocorrem somente na presença dos indivíduos. Deste modo, a Matemática difere de objetividades reais, que são temporais e ocorrem conforme sua própria natureza. Esta evidência originária recebe o nome de *apriori universal histórico*. (KLUTH, 2005, 2007).

Conforme descrito por Kluth (2007), a pesquisa que toma por base a hermenêutica filosófica e a tradição como fenômeno a ser analisado, irá buscar em textos desta tradição pelo sentido revelado nestes textos, ou seja, realizará uma descrição do *apriori universal histórico da tradição* de modo retroativo, partindo do momento atual. A descrição será feita em dois momentos de *epoché*[10]. O primeiro momento é uma análise hermenêutica de textos que apresentam indícios de respostas "[...] às questões que vão sendo postas no caminhar da reconstrução retrospectiva [...]" (KLUTH, 2007, p. 102) da tradição. Os textos que a nós se apresentaram versaram sobre a demonstração matemática tanto como fazer do matemático como textos relacionados ao fazer docente do professor que ensina matemática. Desta análise hermenêutica surge o texto que constitui a base para o segundo momento de epoché, aqui chamado de *texto-solo*.

No segundo momento buscamos compreender o texto-solo na estrutura de perguntas e respostas, na abordagem gadameriana de *autêntica conversação*. "Portanto, trata-se de uma leitura hermenêutica do texto-solo, com a intenção de formular as

[10] Epoché trata de uma análise que se efetua conforme aquele que estuda e compreende toma consciência de seus preconceitos e os coloca em suspensão, ou seja, analisa e permanece aberto a possiblidades que surgem da estrutura da pergunta. (Kluth, 2005).

perguntas que ele responde sobre a construção/produção de conhecimento [...], com o intuito de revelar os invariantes desta construção/produção" (KLUTH, 2007, p. 103). Os invariantes expressam, nos termos apresentados anteriormente, aquilo que é central e comum aos textos, o uso recorrente de termos da linguagem que aponta os caminhos para o sentido da vivência.

Os diferentes invariantes expressos ao modo de perguntas quando articulados entre si constituíram as categorias abertas, que buscam explicitar o estrutural da construção histórica/epistemológica da demonstração matemática. Kluth (2007) sintetiza a trajetória teórica de Husserl neste método de investigação por meio das categorias abertas, que tem "[...] como meta investigar a formação da idealidade desde o histórico presente até a sua apresentação primeira que se dá na relação intencional homem-mundo" (KLUTH, 2007, p. 105). A partir da constituição das categorias abertas e das possiblidades que nos abrem discutimos a demonstração matemática em seus invariantes percebidos.

Capítulo 3. A Demonstração Matemática em Epoché: construção do texto-solo e sua análise

Compreendendo a demonstração matemática enquanto tradição transmitida na linguagem que expressa seu *apriori universal histórico*, o que a faz presente a muitos em diferentes tempos, é que construímos o texto-solo na busca da compreensão de seu desenvolvimento. A construção do texto-solo e a análise hermenêutica que se dá na estrutura de perguntas e respostas tem a intenção de uma autêntica conversação que se realiza em compreensão/interpretação da consciência histórica e dos modos de ser do fenômeno, no caso, das demonstrações matemáticas.

Os textos, a linguagem a nós transmitida, que nos apareceram como sugestões de resposta são de diferentes fontes. Dentre os textos analisados tivemos: (a) textos da Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) como Tao (2013) e Morais Filho (2016; 2018); (b) textos e trechos de livros da Coleção PROFMAT também da SBM, como (NETO, 2013), (MORGADO; CARVALHO, 2015) e (HEFEZ, 2016); (c) textos do Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquista Filho" – Campus Rio Claro, principalmente do ano 15, n.18 (set. 2002) edição com seção especial voltada à demonstração matemática; (d) Textos orientadores de Currículo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Currículo da Cidade de São Paulo (Currículo da Cidade), acrescido dos dois volumes de orientações didáticas; (e) um texto de divulgação matemática, explicando os passos da Demonstração de Gödel (NAGEL; NEWMAN, 2015); (f) um texto sobre educação matemática voltado para demonstração e aplicação (HANNA; JAHNKE, 1993); e (g) um texto de um livro didático de Álgebra destinado à, segundo seu prefácio, licenciaturas e/ou bacharelados em matemática de Domingues e Iezzi (2018).

Os textos foram analisados em seus indícios de respostas à nossa interrogação norteadora sobre o fenômeno pesquisado: a demonstração matemática. Os indícios de respostas constituíram o texto-solo que ao ser interrogado também responde a perguntas correlatas. As respostas à essas perguntas são os invariantes da demonstração matemática, ou seja, os indícios de respostas à interrogação norteadora: "*Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*"

Passaremos a apresentar o texto-solo intercortado das perguntas que o mesmo responde sobre a demonstração matemática atrelada a possibilidades didáticas.

3.1. As demonstrações Matemáticas enquanto tradição dos matemáticos

À moda matemática, parece-nos interessante começarmos pela definição de demonstração matemática. Destacamos inicialmente que "definir matematicamente um objeto é dar-lhe um nome mediante determinadas propriedades que o caracterizem e o identifiquem plenamente" (MORAIS FILHO, 2018, p.91). Todos que passaram um curso de matemática, seja na educação básica ou no ensino superior, se depararam com definições. As definições, como explica Morais Filho (2018) surgem para economizar a linguagem agrupando conjuntos de propriedades em termos específicos e conhecidos; não se pode definir um objeto em função de outro desconhecido.

Os objetos matemáticos podem ser definidos de diferentes maneiras que são equivalentes entre si, no caso, <u>as demonstrações matemáticas podem ser definidas por seus usos ou por sua sequência lógica de argumentos [1 P1]</u>. Assim, no caso da demonstração matemática podemos dizer que

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

> Não é fácil definir o que é uma demonstração matemática. Basicamente, é uma sucessão articulada de raciocínios lógicos que permite mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e proposições já estabelecidas. (DOMINGUES; IEZZI, 2018, p. 11-12).

Esta definição foi utilizada como enunciado simplificado na introdução do capítulo sobre lógica matemática. Outros textos, ao invés de tomar definições precisas e embasadas na lógica para demonstrações as definem e discutem com base em suas finalidades. Silva (2002) aponta dois aspectos principais, relacionados e independentes entre si, assim compete à demonstração <u>estabelecer a veracidade</u> de um enunciado e <u>convencer-nos dessa veracidade</u>. Com relação ao aspecto dialético, o trabalho de Hanna e Jahnke (1993) apresentam uma concepção epistemológica relacionando a formalidade da demonstração matemática e suas dimensões pragmáticas, em termos de aplicação.

Outras definições, ditas mais formais, costumam ser dadas após explicações de definições e propriedades da Lógica. Vejamos algumas definições similares, mas escritas de modo diferentes:

> De um ponto de vista da lógica formal moderna, uma demonstração rigorosa é uma sequência finita de fórmulas dentro de um sistema, onde cada fórmula é um axioma ou derivável de uma fórmula anterior por uma regra do sistema. (HANNA; JAHNKE, 1993, p. 423)[11]

Também como:

> Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se $\underline{A}$ for a última fórmula de uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de $\underline{A}$. Uma fórmula $\underline{A}$ de F será um teorema de F se existir uma demonstração $\underline{A}$. (BICUDO, 2002, p.83)

Ou ainda na definição a seguir:

> Dentro de um modelo axiomático, dadas duas proposições *H* e *T*, uma **demonstração** de que a proposição *H* (hipótese) implica a proposição *T* (tese) é uma cadeia dedutiva de raciocínio que usa argumentos válidos e uma sequência finita de sentenças $P_1, P_2, ..., P_k$, tais que cada uma delas é, ou um axioma, ou uma definição, ou uma hipótese H_i, ou uma sentença resultante das sentenças anteriores, deduzida por argumentações válidas. A proposição final P_k da sequência é a proposição *T* (tese), resultado de todo o processo dedutivo. (MORAIS FILHO, 2016, p. 149)

Ambas as definições utilizam termos similares, porém foram utilizadas notações diferentes. Note os termos utilizados: demonstração *P*, fórmula $\underline{A}$, proposição *H*, sentenças $P_1, P_2, ..., P_k$ entre outras. Essas notações dizem muito da escrita matemática atual. Não só, como em todas as definições apresentadas, aparecem diferentes termos referentes a outros objetos, termos como *modelo axiomático, proposições, cadeia dedutiva de raciocínio, argumentos válidos, sentenças, definição, hipótese e tese*.

Os textos analisados de modo geral introduzem primeiro diversos elementos e propriedades da lógica matemática e definem a demonstração a partir destes.

[11] Traduzido do trecho em inglês: “From a viewpoint of modern formal logic, a rigorous proof is a finite sequence of formulae within a given system, each formula being either an axiom or derivable from an earlier formula by a rule of the system.”.

Retornaremos a esses termos em momento oportuno, mas antes, que verdade ou veracidade é essa alcançada pelas demonstrações? O objetivo das ciências de modo geral é a verdade e na matemática não seria diferente.

Domingues (2002) aponta que dada uma proposição acerca de um objeto matemático é de interesse da matemática atribuir a qualidade de "verdade" ou "falsidade". Uma proposição é uma sentença declarativa, obedecendo às regras da linguagem adotada com sujeito, verbo e predicado. A verdade pode ser vista como a validade, sem exceções, de uma proposição. <u>Um exemplo seria a proposição "a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º[12]" sua veracidade ou falsidade não pode ser tão somente demonstrada por uma simples investigação geométrica onde não existe a possibilidade de verificarmos todos os triângulos possíveis [2 P1]</u>. Atualmente, seria necessária uma demonstração para esta proposição, ou uma demonstração de sua falsidade.

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Quando afirmamos que a demonstração matemática é uma tradição, entende-se como uma compreensão do coletivo humano sob seus usos. Entretanto, <u>os povos babilônios e egípcios faziam uso de resultados (proposições) sem a necessidade de demonstração, a veracidade das proposições era dada a partir da confirmação com a realidade</u> [1 P2]. Notemos que mesmo sem a demonstração como a conhecemos nos dias atuais, era necessário um crivo, uma análise, para verificar a veracidade de proposições. Estas eram testadas em conformidade com a realidade vivida e se resolviam problemas de diferentes ordens (DOMINGUES, 2002).

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

O inicio das demonstrações costuma ser atribuído a Tales de Mileto (séc. VII a.C.) por citações de seus trabalhos por outros filósofos gregos, entretanto seus trabalhos não chegaram aos dias de hoje. Diz-se dos conhecimentos obtidos das viagens de Tales ao Egito. <u>Afirma-se que ele se valia de métodos gerais e, para alguns casos, de métodos empíricos, para mostrar a veracidade de proposições, algumas destas já conhecidas e admitidas como verdades no Egito [3 P1]</u>. Na sequência

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

[12]Neste texto pode-se assumir a definição usual de cada símbolo utilizado, a menos que explicitamente definido de outra forma.

histórica, o Sumário Edemiano, relata nos trabalhos de Pitágoras de Samos (séc. VI a.C.), a criação de uma matemática pura, abstrata e com finalidade em si mesma.

Domingues (2002) entende que é razoável supor-se que em maior parte do tempo a escola pitagórica limitou-se a mostrar proposições e resultados partindo de casos particulares, nas áreas de geometria e aritmética. Entretanto, também é possível supor que havia uma sequência e relações entre as proposições, uma demonstração poderia tomar por base outra anteriormente demonstrada [4 P1]. Percebe-se inclusive, que já na escola pitagórica a intuição e a observação não eram as únicas ferramentas adotadas.

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Outra ferramenta utilizada, a lógica, teve sua forma como ciência, trabalhada por Aristóteles (séc. IV a.C.), que a entendia como entidade separada e anterior à matemática. Os métodos dedutivos utilizam de propriedades e noções da lógica, sistematizadas por Aristóteles. Como a Lei[13] da Não Contradição (uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo) e a Lei do Terceiro excluído (uma proposição deve ser verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade) [5 P1]. Pode-se destacar ainda que a Lógica em Aristóteles é expressa em palavras da linguagem usual e permaneceu desta maneira até o século XIX. (DOMINGUES; IEZZI, 2018).

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Aristóteles apresentou uma demonstração da existência de números incomensuráveis (números irracionais)[14] o que levou a uma crise na matemática grega, que considerava apenas a existência de números inteiros positivos. Porém, percebe-se que “[...] a idéia(sic) de utilizar encadeamentos de propriedades articuladas mediante raciocínios lógicos para o desenvolvimento da matemática já era uma realidade nessa época.” (DOMINGUES, 2002, p. 59). Ou seja, um método dedutivo apontou para algo contrário à crença da época.

Dentre as obras mais antigas que chegaram a nós que fazem uso do método dedutivo, destacam-se Os Elementos, de Euclides (300 a.C.) com demonstrações e explicitações de quatrocentas e sessenta e cinco proposições matemáticas.

---

[13] Estas propriedades da Lógica são conhecidas tanto por Leis, como Princípios.

[14] Aristóteles diz que a demonstração que ele apresenta foi realizada pelo pitagórico Hipaso de Metaponto, contrariando uma das maiores crenças da escola pitagórica. (DOMINGUES, 2002).

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

O marco do qual os autores falam são os *conceitos primitivos* e os *postulados (axiomas)* adotados por Euclides. Partindo dos *conceitos fundamentais* de ponto, reta e plano, de modo que não precisem de definições formais (NETO, 2013) [6 P1]. A apresentação formal dos objetos iniciais de Euclides não foi somente uma necessidade formal, mas também para garantir ao leitor que estes correspondiam à realidade (DOMINGUES, 2002).

Já os *postulados (ou axiomas)* são proposições aceitas sem demonstração, são tomados como afirmações verdadeiras e fundamentos para demonstração e argumentação de outras. Os postulados de Euclides são enunciados como:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2.Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos (EUCLIDES, 2009 *apud* SACHS, 2016, p.15).

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Assim como os conceitos fundamentais, os postulados teriam sua validade garantida por uma auto evidência, perceptível e reconhecível pelo leitor [2 P2]. A única exceção seria o quinto postulado, que, como afirma Sachs (2016), Euclides evitou sua adoção, por não ser tão "óbvio" como os outros, ou seja, sua auto evidência foi fortemente questionada. O quinto postulado também pode ser enunciado de forma equivalente como: "para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P" (SACHS, p.15), ou conhecido como o postulado das paralelas.

A partir destes postulados que relacionam os conceitos fundamentais e munidos das regras da lógica conforme em Aristóteles, Os Elementos constrói uma base formal para a Geometria Plana.

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Séculos depois, na Idade Média, a produção matemática mais substancial foi árabe e hindu, porém estes não se interessavam pelas demonstrações como os gregos [3 P2]. O foco deu-se nos sistemas de numeração e de organização de problemas algébricos.

Quando, no Renascimento, houve uma retomada e apreço pelos estudos gregos, Os Elementos ainda teve grande importância por sua organização lógica. A Geometria Analítica de Descartes (1596 – 1650) e o Cálculo de Newton (1643 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716) “[...] não chegaram a satisfazer, sob o ponto de vista do rigor, nem mesmo aos seus criadores” (DOMINGUES, 2002, p.60-61). Mesmo na ausência de um “rigor” matemático, aparentemente entendido como construção lógica a partir de postulados, o atualmente chamado de método dedutivo-axiomático, a matemática avançou muito neste período.

No século XIX houve trabalhos matemáticos voltados à lógica matemática e ao método dedutivo-axiomático. Vejamos primeiro os resultados da lógica matemática, pois, nos textos analisados costuma-se apresenta-los antes das discussões sobre o método dedutivo axiomático.

Em 1854, no trabalho sobre conjuntos *The Laws of Thought* (as leis do pensamento) Boole (1815 –1864) fez uso de letras minúsculas para representar as partes de conjuntos. “Se x,y representavam duas dessas partes, ele denotava o que chamamos de interseção e união dessas partes respectivamente por xy e $x+y$” (DOMINGUES; IEZZI, 2018, p.11). Adotou também a representação de conjunto universo pelo símbolo 1. Assim, o complementar de uma parte x qualquer seria expresso por $1 - x$. W. S. Jevons (1835 – 1882) generalizou este conceito, acrescentando: (a) $xy = yx$;(b) $x + y = y + x$; (c) $(x+y) + z = x + (y + z)$;(d) $(xy)z = x(yz)$;(e) $x^2 = x$; e (f) $x + x = x$. Boole percebeu a possibilidade de realizar uma processo de algebrização diferente nos campos das proposições lógicas, notando construções similares, embora não tenha explorado essa possibilidade. A ideia de notação surge como facilitador das operações de elementos antes descritos em linguagem natural, agora os objetos matemáticos podem ser expressos por uma notação [1 P3]. A validade de diversos argumentos e teoremas passou a ser aceita pelo uso das operações de modo simbólico, uma vez que não se fizesse uso de características particulares de algum número (HANNA; JAHNKE, 1993).

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

O Quadro 1, a seguir, lista diferentes símbolos utilizados atualmente para representar objetos e operações matemáticas. O leitor certamente já teve contato com estes e com outros símbolos menos usuais para representar um mesmo objeto listado no quadro.

Quadro 1 - Notações usualmente utilizadas

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	SÍMBOLO	COMO SE LÊ
$\exists$	Existe; Existe um; Existe pelo menos um; Quantificador de existência	$\Rightarrow$	Implica; Acarreta; (Se ...., Então...)
$\exists!$	Existe um único; Existe um e apenas um; Existe só um	$\Leftrightarrow$	Se, e somente se; Equivalente (no caso de proposições)
$\leq$	Menor (do que) ou igual a	$>$	Maior (do que)
$\geq$	Maior (do que) ou igual a	$<$	Menor (do que)
$\cong \approx$	Aproximadamente igual a	$\forall$	Para todo; Qualquer que seja; Para cada; Quantificador universal
$\sum_{i=1}^{n} P(i)$	Somatório de P(i), em que i varia de 1 a n	$\equiv$	Equivalente a; Côngruo a
R	Conjunto dos números reais	N	Conjunto dos números naturais
Q	Conjunto dos números racionais	Z	Conjunto dos números inteiros
C	Conjunto dos números complexos	$Q^C, R - Q$	Conjunto dos números irracionais
$\prod_{k=1}^{n} Q(k)$	Produtório de Q(k) em que k varia de 1 a n	$;\,\vert$	Tal que; Tais que
∞	Infinito	$\therefore$	Então; Portanto; Logo; Donde
$\subset$	Está contido	$\supset$	Contém
$\in$	Pertence	$\cup$	União
$\cap$	Interseção	$\mp \pm$	Menos ou mais; Mais ou menos
$:= \stackrel{\text{def}}{=}$	Por Definição	e	é ou ê, base do logaritmo neperiano; Número de Euler
i	i, unidade imaginária	π	Pi

Fonte: (adaptado de MORAIS FILHO, 2016, p. 4-5).

A lógica matemática após o século XIX se desenvolveu, então, definindo operações entre proposições. Vejamos algumas dessas propriedades, sejam *p* e *q* duas proposições, não é necessário ter definido seu valor lógico, porém adotando as leis da lógica de Aristóteles sabemos que são ou verdadeiras (V) ou falsas (F), sem uma terceira opção e nem ambas simultaneamente. Podemos definir algumas operações indicadas por conectivos, apresentadas nos quadros a seguir. “[....] A Lógica Formal visa estudar as relações entre as sentenças, sem se preocupar efetivamente com o conteúdo ou em determinar os valores lógicos das sentenças” (MORAIS FILHO, 2016, p.23). <u>Assim, ao assumir proposições *p*,*q* pode-se relacioná-las utilizando qualquer conectivo e obter-se uma sentença composta; uma nova sentença que tem seu valor lógico dependente</u>

> Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

dos valores lógicos de suas partes. Porém, estas partes não precisam ser conhecidas em seus significados, uma vez que importa a relação entre as possibilidades de valores lógicos [7 P1].

Vejamos cinco operações lógicas: negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional. A operação de negação tem o valor lógico contrário ao valor da proposição, se *p* é uma proposição, denotaremos sua negação por “~*p*”.

Quadro 2– Tabela-Verdade da Operação de Negação

p	~*p*
V	F
F	V

Fonte: autoria própria.

Chama-se de tabela verdade a lista de todas as possibilidades lógicas para as proposições envolvidas nas operações desejadas. A partir da notação simplificada e a representação em tabelas pode-se analisar a veracidade ou falsidade de operações entre proposições, observando a última coluna.

O conectivo “e” (conjunção), por vezes também é escrito como “∧”, relacionado à intersecção quando observamos a relação entre a lógica e a Teoria dos Conjuntos. Diremos que a proposição composta “$p \wedge q$” será verdadeira somente quando as proposições *p*,*q* foram ambas, simultaneamente, verdadeiras e podemos representar na tabela-verdade do Quadro 3.

Quadro 3– Tabela-Verdade da Operação

p	*q*	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: autoria própria.

As duas primeiras colunas da tabela-verdade representam todas as combinações possíveis entre os valores lógicos das proposições *p*, *q*.

Analogamente definimos a disjunção, representada por “ou” ou “∨”, a proposição composta “$p \vee q$” ou “p ou q” será verdadeira se ao menos uma das duas for verdadeira. Veja no Quadro 4.

Quadro 4- Tabela-Verdade da operação de disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: autoria própria.

As propriedades de equivalências envolvendo as operações de conjunção e disjunção são análogas, em notação diferente, às propriedades descritas por Boole. Dizemos que proposições são equivalentes quando possuem o mesmo valor lógico, independente do valor lógico das preposições que as compõem, o símbolo para equivalência é "≡". Para o Quadro 5, sejam p,q,r proposições

Quadro 5– Propriedades da equivalência das operações de conjunção e disjunção

IDEMPOTÊNCIA	COMUTATIVIDADE
$(p \wedge p) \equiv p$	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
$(p \vee p) \equiv p$	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
ASSOCIATIVIDADE	DISTRIBUTIVIDADE
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge (p \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$p \vee (p \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Fonte: (Adaptado de MORAIS FILHO, 2016, p.45).

A operação condicional, descrita como "se... então...", representada pelo símbolo " $\rightarrow$ ", escrevemos "$p \rightarrow q$" ou "se p então q". Exploremos os casos a partir do exemplo de Domingues e Iezzi (2018), sejam as proposições p,q, onde *p: "ser paulista"* e *q: "ser brasileira"*. Vejamos as combinações possíveis entre os valores lógicos de p e q:

1º Caso: Vamos assumir que ambas são verdadeiras, olhemos a condicional *"$p \rightarrow q$"*, pode ser traduzida como "Se uma pessoa é paulista, então essa pessoa é brasileira". Essa nova proposição também é verdadeira.

2º Caso: p é verdadeira e q é falsa. Assim, a condicional *"$p \rightarrow q$"*, pode ser traduzida como "Se uma pessoa é paulista, então essa pessoa não é brasileira". Essa afirmação é falsa.

3º Caso: p é falsa e q é verdadeira. Assim, a condicional *"$p \rightarrow q$"*, pode ser traduzida como "Se uma pessoa não é paulista, então a pessoa é brasileira". As decisões sobre o valor lógico deste caso e do seguinte deixam de ser imediatas. Uma pergunta comum em cursos de lógica é sobre a aparente indecisão sobre o valor lógico, um(a) estudante poderia dizer "se a pessoa não for paulista, então ela pode ser ou não brasileira". Só que os princípios lógicos ditam que uma proposição, mesmo que composta, não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente e nem uma terceira opção "talvez". Torna-se necessária uma decisão. Pensemos, se a pessoa não for paulista, é possível que essa pessoa seja brasileira? Sim. Então determinaremos que a sentença "Se uma pessoa não é paulista, então a pessoa é brasileira" é verdadeira, uma vez que o enunciador não poderia ser acusado de mentiroso.

4º Caso: p é falsa e q é falsa. Assim, a condicional *"$p \rightarrow q$"*, pode ser traduzida como "Se uma pessoa não é paulista, então a pessoa não é brasileira". Análoga ao caso anterior, a proposição será verdadeira pois o enunciador não poderá ser acusado de mentiroso.

Domingues e Iezzi (2018) sugerem, de outra forma, que para entender o valor lógico de "$p \rightarrow q$" seja verificado como "$\sim[p \wedge (\sim q)]$", onde, no exemplo fornecido, "[...] é o mesmo dizer que "Se uma pessoa é paulista, então essa pessoa é brasileira" ou "não pode ocorrer de uma pessoa ser paulista e não ser brasileira" "(DOMINGUES; IEZZI, 2018, p. 13). Os autores explicam o caso onde as proposições p,q são verdadeiras, inicialmente "$\sim q$" é falsa (pois, q é verdadeira), assim "p^(~q)", pela regra vista, é falsa, assim conclui-se que "~[p^(~q)]" é verdadeira, na definição dada de negação "~". Esta sugestão é uma maneira de se estudar a definição dada para a operação condicional. Veja no Quadro 6 a tabela-verdade desta operação.

Quadro 6 - Tabela-verdade da operação condicional

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim[p \wedge (\sim q)]$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Fonte: autoria própria.

Traduções para proposições escritas em linguagem natural por vezes não fazem sentido pelas estruturas passíveis de serem construídas, como, por exemplo, "Se a soma de dois números pares for um número par, então vai chover nos dias ímpares". Essa construção não faz sentido para ninguém, então é rapidamente descartada. Para a lógica importam as construções cuja veracidade ou falsidade possam ser determinadas e discutidas, não só como em Aristóteles a Lógica possuía um caráter retórico e uso comum fora da matemática.

Aqui cabe destacar, como explica Morais Filho (2018), a importância de uma notação eficiente é a facilidade de operacionalidade e a ausência de ambiguidades, permitindo a interpretação de resultados de forma simplificada. O autor também destaca que é importante a explicitação dos significados das notações adotadas [2 P3].

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração ?

A operação bicondicional, descrita como "se, e somente se" é representada por "↔". Sua definição pode ser feita como equivalente a "(se p então q) e (se q então p)" ou fazendo uso da notação "(p → q) ∧ (q → p)" (DOMINGUES, IEZZI, 2018). Vejamos no Quadro 7 na tabela-verdade da operação bicondicional "$p \leftrightarrow q$" as convicções de veracidade.

Quadro 7– Tabela-Verdade da Operação Bicondicional

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Fonte: autoria própria.

Com o auxílio do Quadro 7, podemos notar que a operação bicondicional "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira quando as proposições p,q possuem o mesmo valor lógico. A partir da definição dada por Domingues e Iezzi (2018), podemos entender a operação bicondicional como a conjunção da condicional "$p \rightarrow q$" *e* "$q \rightarrow p$". As operações entre as proposições fornecem meios de análise e compreensão de novas definições.

Munidos das propriedades apresentadas no quadro 5 e das cinco operações temos condições para compreender a base lógica das demonstrações matemáticas. Tomemos a operação condicional e a proposição "*se p, então q*"[15], verificamos que esta proposição pode ser verdadeira ou falsa. Vejamos um caso particular, a proposição "$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$", que pode ser interpretada como "Se ocorre (p e q), então ocorre

[15] Perceba a necessidade de uma vírgula antecedendo o "então".

(p ou q)". Em termos do exemplo dado anteriormente "Se uma pessoa é (paulista e brasileira), então uma pessoa é (paulista ou brasileira)". Vejamos a tabela-verdade no Quadro 8 abaixo.

Quadro 8– Tabela-verdade da proposição "(p^q) →(p ∨ q)"

p	*q*	*p^q*	*p ∨ q*	*(p^q) →(p ∨ q)*
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Fonte: (MORAIS FILHO, 2016, p.48)

A proposição "*(p^q) →(p ∨ q)*" é verdadeira independente dos valores lógicos das proposições *p,q,* assim recebendo o nome de tautologia. Diremos que a proposição "*(p^q)" implica logicamente* a proposição *"(p ∨ q)*", e escrevemos em notação, " $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$". A implicação lógica ocorre quando uma proposição composta é uma tautologia.

A *implicação lógica* pode ser definida de outra maneira. Considerando o caso onde "$p \Rightarrow q$"[16], podemos ler como "p é uma condição suficiente para q" ; ou seja, "[...] a veracidade de p basta (é suficiente) para garantir a veracidade de q, uma vez que estamos supondo que "$p \Rightarrow q$" seja verdadeira." (DOMINGUES; IEZZI, 2018, p.15). Perceba que do que definimos anteriormente da operação condicional, onde consideramos que *p* é verdadeira, para que "*se p, então q*", seja verdadeira, *q* é também deve ser verdadeira. Toma-se, nesta definição, a proposição p como verdadeira, assim, para a veracidade da implicação lógico, deve-se determinar uma proposição q, também, verdadeira; observa-se um caso particular das tautologias descritas anteriormente.

Analogamente, podemos afirmar que para o caso "$p \Rightarrow q$", podemos dizer que "q é uma condição necessária para p", "a explicação no caso, é que é necessária a veracidade de *q* quando se tem a veracidade de *p*" (DOMINGUES; IEZZI, 2018, p.15).

É importante destacar que nos dois parágrafos anteriores foi omitida a palavra proposição, este é um recurso utilizado tanto em livros, quanto em aulas de

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

[16] Este caso pode ser lido como "*se p, então q*", de mesmo modo da operação condicional ou como "*p implica q*".

matemática onde, após se definir um objeto, este é referido apenas por seu símbolo (no caso *p,q* para as proposições adotadas). Tal fato prejudicou o entendimento do leitor? [3 P3]. O leitor percebeu tal fato? Morais Filho (2018) lista diversas características para o uso eficiente e correto de notações, desde a escolha, explicitação do uso e momentos onde é preferível usar a língua materna para facilitar a compreensão. Após a definição de uma notação, podemos pensar e utilizá-las em combinação com a língua materna numa compreensão tácita do que está sendo dito, simplificando a comunicação.

Continuando com os resultados lógicos. Analogamente à operação condicional vejamos a bicondicional, sabendo que esta operação é verdadeira no caso "$p \leftrightarrow q$" quando p, q tem o mesmo valor lógico. Ou seja, p e q são proposições equivalentes. Lembremo-nos da sugestão de Domingues e Iezzi (2018) de tomar a condicional "$p \rightarrow q$" como "$\sim[p\wedge(\sim q)]$". Analisando, a bicondicional "$[p \rightarrow q] \leftrightarrow \{\sim[p\wedge(\sim q)]\}$"[17] é possível verificar que é verdadeira independente dos valores lógicos de p e q, conforme o Quadro 9.

Quadro 9– Tabela-verdade da proposição "[p → q] ↔ { ~[p^(~q)]}"

p	q	~q	$p\wedge(\sim q)$	$\sim[p\wedge(\sim q)]$	$p \rightarrow q$	$[p \rightarrow q] \leftrightarrow \{\sim[p\wedge(\sim q)]\}$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Fonte: Autoria Própria.

Diz-se também de modo análogo, no caso onde "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira independente da veracidade de p,q que "p e q são equivalentes", ou ainda, "p, se, e somente, se q" e anotamos "$p \Leftrightarrow q$". Neste caso, afirmamos que "p é uma condição necessária e suficiente para q" de mesmo modo que dizemos "q é uma condição necessária e suficiente para p".

Para a Lógica Formal, as definições de *implicação* e *equivalência*, conforme visto, são válidas quando a condicional e a bicondicional, são tautologias. Retornando a nosso foco, a Matemática em sua busca de provar proposições verdadeiras utiliza casos particulares pressupondo que a proposição que antecede a implicação (ou equivalência) é verdadeira. Na Lógica Matemática, onde assumindo a veracidade de uma proposição

[17] Para simplificar a notação seria possível substituir essa proposição por um único símbolo, no caso seria outra letra minúscula mantendo o padrão de notação adotado.

p, conseguimos deduzir (por meio de argumentos válidos) a veracidade uma proposição *q*, chamamos de *sentença condicional válida* (MORAIS FILHO, 2016). Os argumentos válidos são afirmações verdadeiras sobre a proposição *p* que acarretam na proposição *q*. É o chamado *método dedutivo*, citado anteriormente com relação a trabalhos pitagóricos e euclidianos.

Os Elementos, de Euclides, diferem de outros trabalhos anteriores ao século XIX por apresentar conceitos primitivos e postulados (ou axiomas). A partir dos axiomas, verdades matemáticas tomadas como verdadeiras, são deduzidas de outras proposições matemáticas. Este é o *método axiomático-dedutivo* [8 P1]. "A utilização do método axiomático é uma das características fundamentais da Matemática como ciência". (NETO, 2013, p.2).

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Proposições são enunciados quaisquer e definem-se os *teoremas* como proposições matemáticas válidas cuja validade é garantida por uma demonstração matemática. Por vezes recebem nomes de *lema* quando auxiliam a provar teoremas mais gerais, e *corolário* quando são conclusões imediatas a partir de outros teoremas.

Com base nos termos lógicos definidos anteriormente,

> [...] uma demonstração matemática de uma condicional Se P, então Q [um teorema] é um processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual admitindo-se a sentença P [Hipótese do teorema], se deduz a sentença Q [Tese do Teorema] por meio de uma sequência de argumentações válidas. (MORAIS FILHO, 2016, p.55)[18].

O impacto causado pelo método axiomático na Geometria Plana de Euclides deu-se com relação às possibilidades na forma de inúmeros teoremas apresentadas a este campo da matemática com relativamente poucos axiomas. "Era natural, pois, perguntar se outros ramos do pensamento, afora a geometria, podem ser situados sobre um fundamento axiomático seguro" (NAGEL; NEWMAN, 2015). E foi o que ocorreu no séc. XIX, fazendo uso dos avanços da lógica e de uma linguagem matemática simbólica buscou-se uma formalização de diferentes campos da matemática pelo método axiomático.

[18] Comumente escreve-se $H \Rightarrow T$. Onde, pelas posições com relação à implicação lógica, H é a Hipótese do Teorema e T é a Tese do Teorema.

No século XIX os matemáticos foram fortemente influenciados pelos trabalhos de Immanuel Kant (1724 – 1804), onde argumentava que uma proposição matemática mostrada "[...] não está sujeita a alterações nem a um reforço com novas coletas de dados, visto tratar-se de um conhecimento universal que não comporta exceção alguma." (DOMINGUES, 2002, p.61), assim o conhecimento, em particular geométrico eucludiano, seria um conhecimento *a priori* (anterior). O conhecimento matemático neste sentido se dá antes da experiência, ou seja, é dela independente.

A crença de que os postulados de Euclides seriam auto evidentes era aceita, com exceção do quinto postulado. Várias tentativas de se demonstrar o quinto postulado a partir dos outros foram feitas. Entretanto, um trabalho de Gauss, Riemman, Bolyai, e Lobachewsky demonstrou que é impossível deduzir o postulado das paralelas a partir dos outros.

Dessa maneira surgem geometrias que negam o postulado das paralelas, geometrias não euclidianas (a partir de 1829). Em outros campos houve a axiomatização dos sistemas numéricos, de noções de grupos, corpo e espaço vetorial; bem como surgimento de álgebras não convencionais e a aritmetização da análise.

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

<u>A intuição embora ferramenta chave nos trabalhos de Aristóteles e Euclides em suas deduções e argumentações para convencimento começou a apresentar limitações, próximas ao final do século XIX [9 P1]</u>. A intuição não parecia ser capaz de decidir em aparentes paradoxos demonstrados, assim diversos matemáticos, dentre eles Frege (1848 – 1925) deram forma a um conceito de *demonstração formal* que minimizaria o uso e aceitação de noções intuitivas. Uma demonstração formal pode ser resumida como

> [...] a construção de uma seqüência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma, ; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. Isso pressupõe a formulação de algumas poucas regras de inferência. (DOMINGUES, 2002, p. 62).

Como a auto evidência deixa de ser admitida para axiomas, assim os axiomas definem relações entre os conceitos fundamentais, sem nenhuma intuição externa na escolha de axiomas e muito menos de demonstrações. Tornam-se irrelevantes e dispensáveis quaisquer informações que não aceitas pelos axiomas. Significados externos aos dados pelo sistema, se não provado pelo sistema, são falsos.

O sucesso na tarefa de uma axiomatização formal da Geometria colocou Hilbert (1852 – 1943) como grande nome do formalismo. Em seu trabalho, "Fundamentos da Geometria" (1899), tomou os conceitos fundamentais de "reta", "ponto", "plano", "está em", "entre" e axiomas que diziam de suas relações. O fazer primordial da matemática torna-se por excelência a exploração das implicações lógicas puras (ausentes de outros significados) entre proposições e enunciados (NAGEL; NEWMAN, 2015) [4 P3].

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

Neste sentido, pode-se dizer que

> [...] o problema com o qual o matemático puro se defronta (diferentemente do cientista que emprega a matemática ao investigar um assunto especial) não é se os postulados por ele assumidos ou as conclusões que deles deduz são verdadeiros, mas se as alegadas conclusões são de fato consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais. (NAGEL; NEWMAN, 2015, p. 20)

Para os matemáticos puros importam as implicações lógicas tautológicas (os teoremas) deduzidas, excluindo intuição e noções observáveis. Porém, considere o caso, onde a partir de um conjunto de axiomas se demonstre um teorema e sua negação. Se um teorema é verdadeiro, pelos princípios lógicos, então sua negação deve ser falsa. Entretanto se ambos forem dedutíveis de um sistema formal, diz-se que esse sistema é inconsistente.

A noção de consistência não era um problema anteriormente quando o modelo era algo físico, como no caso da geometria euclidiana, era o espaço comum. A consistência do sistema de *Os Elementos* era pressuposta enquanto os resultados fossem passíveis de visualização no espaço comum. Antes do século XIX, não se havia imaginado a possibilidade de um sistema não ser consistente, ou seja, de deduzirem-se duas proposições de valores lógicos opostos e ambas verdadeiras.

Como se demonstrar a consistência de sistemas formais? Algumas sugestões foram apresentadas. Com base nos trabalhos de lógica e demonstração formal, de Boole e Frege, respectivamente, Whitehead (1861 – 1947) e Russel (1872 – 1970) publicaram os *Principia Mathematica* em 1910, onde a matemática pura é apresentada como um capítulo da lógica formal [5 P3] . Este trabalho teve grande importância para os fundamentos da matemática e para a corrente filosófica do logicismo.

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

Nos *Principia* foi mostrado o caso da aritmética quando descrita e definida em noções da lógica formal, a partir de proposições básicas que são demonstravelmente verdade lógicas. Deste modo, o problema da consistência muda, a aritmética é consistente se, e somente se, a lógica formal for consistente, uma vez que estas são equivalentes. Embora não resolva o problema da consistência o transfere de um sistema para outro, o problema aparece de forma mais ampla. Embora a tese central dos *Principia Mathematica* não tenha sido adotada universalmente, forneceu um sistema padrão de notação para matemática pura e explícita as regras de inferência formal utilizadas (comumente omitidas) em demonstrações

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

"Nos anos 1920, Hilbert e sua escola criaram a teoria da demonstração, um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema formal" (DOMINGUES, 2002, p.64). Para a prova absoluta de consistência de Hilbert, o primeiro passo era uma completa formalização do sistema: (a) eliminam-se todos os significados exteriores à matemática; (b) elege-se um catálogo de símbolos a serem utilizados; (c) são definidas as "Regras de Formação", quais são as combinações válidas entre os símbolos; (d) são definidas as "Regras de Transformação" são: *regra de substituição* de símbolos, permite generalizar casos e substituir sequências de símbolos por outros unitários e *regra de destacamento*, de duas proposições p,q, quando p implica q, sempre é possível deduzir q a partir de p; (e) por fim, a seleção de proposições como axiomas. (NAGEL; NEWMAN, 2015) [10 P1].

Portanto, para Hilbert, uma formalização completa de um sistema matemático é uma abstração que expõe apenas a estrutura específica das deduções lógicas dos axiomas selecionados. E além, chamou de metamatemática asserções a respeito da matemática formalizada. Por exemplo, dizer "eu gostei do teorema", é o uso de uma linguagem sobre a matemática, mas não de uma linguagem matemática. Outro exemplo para explicitar a noção de metamatemática. O enunciado "4 + 5 = 9" é um enunciado matemático da aritmética, e o enunciado " "4 + 5 = 9", é uma fórmula aritmética" pertence à metamatemática, pois afirma algo externo à matemática com relação ao enunciado matemático.

A demonstração absoluta de consistência para Hilbert seria embasada na distinção entre a matemática formal e a metamatemática (descrição da matemática).

Esta distinção explicita a estrutura lógica da formalização adotada, permitindo, “[...] definições exatas das operações e regras lógicas de construção e dedução matemáticas, muitas das quais os matemáticos aplicaram sem consciência explícita do que estavam usando.” (NAGEL; NEWMAN, 2015, p. 36). Em última instância, planejava um processo finito de análise que mostrasse à consistência de todo sistema formal. Entretanto diversas tentativas se mostraram malsucedidas.

Em 1931, Gödel (1906 – 1978) publicou seu trabalho “*Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*” (Sobre as Proposições Indecidíveis dos *Principia Mathematica* e Sistemas Correlatos”) (NAGEL; NEWMAN, 2015) apresentando dois resultados. Ele demonstrou

> [...] que é impossível fornecer uma prova metamatemática da consistência de um sistema suficientemente compreensivo para conter o todo da aritmética a menos que a própria [demonstração] empregue regras de inferência em certos aspectos essenciais diferentes das Regras de Transformação usadas na derivação de teoremas dentro do sistema (NAGEL;NEWMAN, 2015, p. 56).

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

<u>Este resultado afirma que a demonstração finita proposta por Hilbert, torna-se impossível [11 P1].</u> Assim a demonstração absoluta de consistência de Hilbert não pode existir na matemática. Alguns trabalhos em metamatemática ainda são de grande valia lógica ao explicitarem regras de inferência lógica.

No segundo resultado,

> Gödel mostrou que os *Principia*, ou qualquer outro sistema dentro do qual a aritmética possa ser desenvolvida, é essencialmente incompleto. Em outras palavras, dado qualquer conjunto consistente de axiomas aritméticos, há enunciados aritméticos verdadeiros que não podem ser derivados do conjunto (NAGEL; NEWMAN, 2015, p.56).

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

<u>Este resultado tem importância fundamental para a lógica formal e para matemática, pois se esta, nas definições dos séculos XIX e XX, tem como objetivo a construção de demonstrações formais num método axiomático formalizado e abstrato, a existência de proposições verdadeiras não deduzíveis dos axiomas demonstra os limites do método axiomático. Estes limites estendem-se a impossibilidade de provar que diversos ramos matemáticos estão livres de inconsistências [12 P1].</u>

Havia outra sugestão de que resolver problemas nos fundamentos da matemática estariam ligadas a uma boa axiomatização da Teoria dos Conjuntos. Iniciada por Cantor (1845 – 1918) em 1874, onde com uma definição vaga de conjunto e a possibilidade de tratar de um "conjunto de todos os conjuntos" acaba por incorrer em paradoxos[4 P2]. A partir das definições adotadas, as construções obtidas são paradoxais. São proposições sem valor lógico determinável. Um dos paradoxos encontrados é o paradoxo da pertinência e não pertinência de um elemento a um conjunto, representado em termos de linguagem, no Paradoxo de Russell. Neste paradoxo, toma-se um caso, onde para um elemento pertencer a um conjunto, determinado por uma regra, é necessário que ele não possa estar presente neste conjunto. Uma das maneiras mais conhecidas de se enunciar este problema é conhecido como o "paradoxo do barbeiro", é como segue: "Se um único barbeiro na cidade faz a barba de todos os homens que não fazem a própria barba, quem faz a barba do barbeiro?". Ora, se o barbeiro não faz sua barba, por conseguinte, ele deve fazer sua barba. Porém, ao mesmo tempo, ele não pode fazer sua própria barba, sem ir ao barbeiro.

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Uma tentativa bem sucedida de superar o problema dos paradoxos por meio de uma axiomatização foi realizada por Zermelo (1871 – 1953) e aprimorada por Fraenkel (1891 – 1965), criando o sistema formal Z-F. Não se pode discutir que a matemática se desenvolveu muito no século XX, fortemente influenciada pelo formalismo e pelo sistema Z-F. Estas concepções se refletiram nas demonstrações matemáticas e no ensino de matemática.

Por outro lado, Hannah e Jahnke (1993) discutem os trabalhos de Weyl (1924) e J.D. Sneed (1971) com relação à definição dada à matemática e às demonstrações matemáticas por Hilbert e suas influências para concepções e compreensão da matemática. Afirmam que é útil diferenciar entre um sistema matemático num caráter restrito[19] e num caráter amplo[20]. O caráter restrito de um sistema matemático é entendido como o sistema matemático de Hilbert, aquele que trata principalmente da estrutura, regras e derivação de proposições, ausentes de conteúdo. O caráter amplo

[19] Traduzido de "narrow sense". Fizemos uso do termo caráter para não confundir com o uso de sentido e significados adotados anteriormente.
[20] Traduzido de "broad sense".

trataria não somente da estrutura, mas também, ao mesmo tempo, de um conjunto de aplicações, formado pela totalidade de aplicações intra e extramatemática do sistema, sejam estas já vistas ou vagamente reconhecidas como possíveis. Assim, os autores, apontam que a definição formal de demonstração como dedução lógica finita trata do caráter restrito de matemática, enquanto do caráter amplo se perguntam: o que quer dizer o teorema?

Os autores dão o exemplo de equivalência entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos. O leitor com estudos em matemática pode pensar na construção de uma função bijetora, que relacionando os dois conjuntos termo a termo, mostre o isomorfismo entre ambos, ou como se diz popularmente, ambos "têm o mesmo número de elementos". Porém para um estudante, inicialmente, poderia pensar um subconjunto (o conjunto de todos os quadrados perfeitos) ter o mesmo número de elementos do que o conjunto no qual está inserido (o conjunto dos números naturais)? Tal fato é possível uma vez que lidamos com conjuntos infinitos. Mas, no caso de se apresentar esta demonstração

> O estudante certamente não pensará que a demonstração deduziu uma nova verdade de uma anterior. O que o estudante provavelmente fará é procurar a fonte do [aparente] paradoxo e eventualmente perguntar se a definição de equivalência entre conjuntos usada na demonstração (e em que casos de conjuntos finitos chegam ao resultado esperado) é realmente apropriada. Ao invés de transferir a veracidade das condições para o teorema, a demonstração tem o efeito de colocar as próprias condições em questão. É somente ao longo de mais estudo que o significado e a utilidade de equivalência de conjuntos pode ficar clara para o estudante.[21] (HANNA, JAHNKE, 1993, p.427. Tradução nossa).

Para os autores, este exemplo traduz as noções de caráter restrito e caráter amplo de um sistema matemático. A demonstração no caráter restrito é um processo sintático para mostrar que um teorema é derivável do sistema. No caráter amplo, quando se adota um ponto de vista semântico, o teorema adquire sentido na relação do teorema com o conjunto de todas as aplicações do sistema no qual se encontra. Assim, no caráter

---

[21] Traduzido de: "And he will certainly not think the proof has deduces a new truth form an old one. What he will probably do is look for the source of the paradox and eventually ask whether the definition of set-theoretical equivalence used in the proof (and which in case of finite sets does in fact lead to the expected result) is really an appropriate one. Rather than transferring truth from the condition to the proved theorem, the proof actually has the effect of calling the conditions themselves into question. It is only in the course of further work that the meaning and usefulness of the concept f set-theoretical equivalence can become clearer to the student".

amplo, semântico, Hanna e Jahnker (1993) apontam que uma demonstração não somente fornece somente a dedução lógica, mas revela novas dimensões e aspectos do teorema demonstrado [13 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Não existe uma contradição entre esses caráteres, estes apenas falam de diferentes situações. Além disso, os autores afirmam que na prática cotidiana de matemática esses caráteres são mantidos separados, porém aparecem entrelaçados e inseparáveis em duas situações: (a) momentos históricos quando algo novo emerge; (b) em salas de aula [14 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Livros de formação de professores (inicial ou continuada) fazem uso do método axiomático. Estes adotam um conjunto de axiomas útil para seu objetivo e deduzem propriedades por meio das regras de inferência lógica e demonstrações. Um exemplo é o livro de Hefez (2016) que explicita sua adoção de axiomas e diz não ser o menor conjunto possível, adotando algumas proposições como verdadeiras (embora passíveis de demonstração com outros axiomas).

Listas de técnicas de demonstrações com base na lógica são apresentadas, sua validade enquanto método de demonstração é também demonstrável, porém, em geral, não são demonstradas em livros que apresentam teoremas. Veja no Quadro 10 a seguir.

Quadro 10– Resumo das Técnicas de Demonstração

Técnica de Demonstração	**Quando Utilizar**	**O que Admitir**	**O Que Deduzir**
Direta	Geralmente, como uma primeira tentativa.	H	T
Indireta, usando a contrapositiva	Quando a técnica anterior falhar, ou quando em *T* aparecer alguma negação.	*~T*	*~H*
Indireta, por redução ao absurdo	Quando as técnicas anteriores falharem, ou quando em *T* aparecer alguma negação.	*H* e *~T*	Alguma contradição *Q ^ (~Q)*
Método construtivo para provas a existência de um objeto	Quando em *H* afirmar-se a existência de um algum objeto.	H	Que o objeto existe, exibindo um exemplar dele.
Indireta para provas existência	Quando em *H* afirma-se a existência de algum objeto.	Que o objeto não existe	Alguma contradição *Q ^ (~Q)*
Direta, por casos (ou por exaustão), para hipótese especial	Quando *H* for da forma $H = (H_1 \text{ ou } H_2)$	Trabalha com casa um dos dois casos da hipótese: Caso 1: H_1 Caso 2: H_2	Em ambos os casos, deve-se deduzir *T*.
Direta, por casos, para tese especial	Quando *T* for da forma $T = (T_1 \text{ e } T_2)$	H	Dividir a demonstração em dois casos. Caso 1: Deduzir T_1 Caso 2: Deduzir T_2
Indireta, por casos, para tese especial	Quando *T* for da forma $T = (T_1 \text{ ou } T_2)$	Trabalha com apenas uma das condições: $(H \text{ e } {\sim}T_1)$ Ou $(H \text{ e } {\sim}T_2)$	T_2 *ou* T_1, Respectivamente, A depender da condição escolhida.
Indução	Quando em *H* aparecer uma propriedade $P(n)$, em que depende de um número natural $n \geq n_o (n_o \in N)$.	Após demonstrar $P(n_o)$, admiti-se a hipótese de indução: $P(k)$, para algum $k \geq n_o$	Primeiramente P), depois deduzir $P(k + 1)$, usando a hipótese de indução $P(k)$ e o caso provado $P(n_0)$
Direta para provar unicidade	Quando em *H* assegura-se a unicidade de um objeto.	H e que existam dois objetos satisfazendo *H*	Que esses objetos são iguais.
Indireta para provas unicidade	Quando em *H* assegura-se a unicidade de um objeto.	H e que existam dois objetos *diferentes* satisfazendo *H*	Alguma contradição, *Q ^ (~Q)*

Fonte: (MORAIS FILHO, 2016, p. 257-258).

As demonstrações são apresentadas por equivalências lógicas de modo não explícito. Note, por exemplo, a demonstração direta e a demonstração indireta, usando a contrapositiva do Quadro 10, são equivalentes, como vimos anteriormente a equivalência é a operação bicondicional. Em notação, poderíamos escrevê-las, respectivamente, como "$(H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow H)$, ou, em termos das operações lógicas como "$(p \longrightarrow q) \leftrightarrow (q \longrightarrow p)$". Vejamos a tabela-verdade dessa proposição no quadro 11.

Quadro 11– Tabela-Verdade da Proposição "(p ⟶q)⟷(~q ⟶~p)"

p	q	~p	~q	$(p \longrightarrow q)$	$(q \longrightarrow p)$	$(p \longrightarrow q) \leftrightarrow (q \longrightarrow p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Autoria Própria.

Uma vez que as proposições "$(p \longrightarrow q)$" e "$(q \longrightarrow p)$" tem mesmos valores lógicos para cada combinação possível de seus componentes, então, a bicondicional entre elas é uma tautologia, mostrando a implicação lógica entre as proposições. Seria possível construir uma tabela verdade de modo análogo para as provas diretas e indiretas. Provas de Unicidade e de Princípio da Indução Finita possuem regras lógicas diferentes.

Até o momento vimos a construção lógica e histórica das demonstrações e sua importância em conjunto com o método axiomático para a construção da matemática. Analisemos algumas demonstrações. Tomemos como exemplo Hefez (2016), onde os axiomas são apresentados juntamente de sua notação, no Quadro 12 a seguir.

Quadro 12– Axiomas utilizados em Hefez (2016)

Axioma	Notação Adotada
Conjunto dos Números Inteiros	$Z = N \cup \{0\} \cup (-N)$
Operação de Adição e Multiplicação	Adição: $(a, b) \longmapsto a + b$ Multiplicação: $(a, b) \longmapsto a \cdot b$
Adição e Multiplicação são *bem definidas* (Propriedade 1)	Para todos $a, b, a', b' \in Z$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$
Adição e Multiplicação são *comutativas* (Propriedade 2)	Para todos$a, b \in Z$,$a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$
Adição e Multiplicação são *associativas* (Propriedade 3)	Para todos $a, b, c \in Z$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Adição e Multiplicação possuem *elementos neutros* (Propriedade 4)	Para todo $a \in Z, a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$
Adição possui elementos *simétricos* (Propriedade 5)	Para todo $a \in Z$, existe $b = (-a)$, tal que $a + b = 0$
A multiplicação é *distributiva* com relação à adição. (Propriedade 6)	Para todos $a, b, c \in Z$, tem-se $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Fonte: (HEFEZ, 2016, p.3-4)

A construção inicial está de acordo com o formalismo matemático, que define os *objetos a serem utilizados e sua notação*, os elementos do conjunto dos números inteiros, *suas regras de formação de proposições*, as operações de adição e multiplicação, *e os axiomas*, a estrutura básica adotada como verdadeira sem ser demonstrada.

Os axiomas adotados já admitem o conjunto dos números inteiros a partir de uma construção dos números naturais, e as operações de adição de multiplicação usuais e binárias. A numeração das propriedades foi feita conforme em Hefez (2016) onde é utilizada para se referir às propriedades. A primeira proposição a ser demonstrada é "$a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in Z$"[22] e a demonstração é como segue

[22]O trecho entre parênteses é como foi enunciada a proposição em Hefez (2016).

> Temos das propriedades 4 e 6 que
>
> $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
>
> Somando $-(a \cdot 0)$ aos membros extremos da igualdade, pelas Propriedades 5, 3, 2, e 4, obtemos:
>
> $0 \ = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0)$
>
> $\quad = +a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0$
>
> $\quad = a \cdot 0$
>
> (HEFEZ, 2016, p.4)

A demonstração ocorre de forma direta, em termos do quadro 10, parte-se da hipótese para a tese, onde os argumentos utilizados são as propriedades das operações e uma soma pelo oposto de um termo. Porém, o texto não explicita a técnica de demonstração, em termos do quadro 10, utilizada e nem os princípios lógicos utilizados [15 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

> Já a segunda proposição: "A Adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade: $\forall a, b, c, \in Z, a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$" é demonstrada como:
>
> A implicação $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$ é consequência do fato de a adição ser bem definida (Propriedade 1).
>
> Suponha agora que $a + c = b + c$. Somando $(-c)$ a ambos os lados, obtemos o desejado.
>
> (HEFEZ, 2016, p.4)

Aqui a demonstração também se apoia na lógica, onde para provar a equivalência, realiza-se um processo de provar que a hipótese implica logicamente a tese e que a tese também implica logicamente a hipótese. Os argumentos não têm seus pormenores explicados, uma vez que se subentende que apontar a propriedade necessária seja suficiente para o leitor compreender a veracidade da proposição [16 P1]. Esta demonstração possui um caráter mais retórico do que formal matemático [17 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Nagel e Newman (2015) afirmam que uma demonstração é a corporificação de inferências e princípios lógicos, porém muitas vezes omitidos. Para exemplificar, os autores elencam os principais argumentos da demonstração de existência de infinitos números primos pelo método de redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*, em latim, como também é referida comumente). Toma-se como equivalente afirmação de que existem infinitos primos[23] , com a afirmação de que não existe um primo maior do que todos os outro [6 P3]. Então, suponhamos o contrário, que exista um primo maior do que todos os outros e seja esse primo representado pelo signo x.

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstracão?

1. x é o primo maior que todos os primos.
2. Formem o produto de todos os números primos menores ou iguais a x e somem 1 ao produto. Isso produzirá um novo número y, onde $y = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times x) + 1$
3. Se y for primo, então x não é o maior número primo, pois y é obviamente maior do que x.
4. 4. Se y não for primo (composto), então x não é o maior primo. Pois se y for composto, ele deve ter um divisor primo z; e z tem de ser diferente de cada um dos números primos $2,3,5,7, \ldots, x$, menores ou iguais a x; Portanto z tem que ser um número primo maior que x.
5. Mas y ou é primo ou composto.
6. Portanto x não é o número primo, maior que todos os primos.
7. Não há número primo maior que todos os primos.

(NAGEL; NEWMAN, 2015, p. 40)

Os autores admitem que nessa demonstração faltaram explicitações lógicas, tais como, no quinto passo, um número ou é primo ou é composto, é uma escrita diretamente relacionada aos princípios lógicos de não contradição e do terceiro excluído. Não só como existem inferências realizadas com utilizada palavras como “todo”, “existem”, e outros quantificadores, que pode diversas vezes matemáticos não explicitam.

Ian Stewart e David Tall (1977 *apud* BICUDO, 2002) analisam uma demonstração e apontam também que demonstrações não são escritas de modo precisamente lógico. Justificam, dada a capacidade limitada das pessoas de apreender informações, pormenores triviais e o uso de símbolos pode tornar as deduções mais compreensíveis, a medida que amplia a necessidade de conhecimento do leitor, permite que a escrita da demonstração seja focada na estrutura geral da nova construção [18 P1]. A omissão ou

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

[23]A palavra números foi suprimida, sem prejudicar a compreensão da sentença.

inclusão de passos lógicos é uma qualidade de estilo matemático, e será definida de diferentes maneiras por diferentes matemáticos.

Como seria uma demonstração com sua lógica explicitada? Morais Filho (2016) ao explorar a definição e a estrutura lógica de demonstrações resolve o seguinte teorema, como exemplo, "Se $x \in R$ é tal que $3x + 1 > 7$, então $x > 2$". Num primeiro olhar, parece uma resolução de uma inequação, como usualmente se escreve em salas de aula. Pode causar certa estranheza na estrutura apresentada e a nomenclatura de teorema. Entretanto, o exemplo é um teorema, uma vez que, pela definição dada, é uma implicação lógica de sentenças matemáticas. Cabe agora uma demonstração para provar sua veracidade. O autor escreve (enumerando cada proposição P, utilizada) que

> Nesse caso temos a hipótese $H\colon x \in R$ e $3x + 1 > 7$, e a tese $T\colon x > 2$.
>
> Desejamos usar a hipótese H para deduzir a tese T.
>
> P_1 (hipótese H): $H\colon x \in R$ e $3x + 1 > 7$
>
> P_2 (axioma): Existe o inverso aditivo $-x$ de um número real x, tal que$\big(x + (-x)\big) = 0$.
>
> P_3 (teorema a ser provado no Capítulo 20): Dados a, b e $c \in R$, se $a > b$, então $a + c > b + c$
>
> Usando P_2, para $x = 1$ (estamos usando a regra de inferência *particularização*), e P_3 em P_1, temos $(3x + 1) + (-1) > 7 + (-1)$. Daí segue-se a sentença:
>
> P_4 (sentença deduzida de sentenças anteriores): O número x que satisfaz P_1 é tal que $(3x + 1) + (-1) > 7 + (-1)$.
>
> P_5 (definição de subtração a ser formulada no Capítulo 20): $7 + (-1) = 7 - 1$
>
> P_6 (axioma da associatividade): Para todos números reais x, y e z vale $(x + y) + z = x + (y + z)$
>
> Usando essas duas últimas proposições em P_4, temos:[24]
>
> $$(3x + 1) + (-1) > 7 + (-1) \overset{P_6}{\Rightarrow} 3x + \big(1 + (-1)\big) > 7 + (-1) \xRightarrow{P_5\ e\ P_2} 3x + 0 > 7 - 1$$
>
> Portanto, vale:
>
> P_7 (sentença deduzida de sentenças anteriores): O número x que satisfaz P_1 é tal que $3x + 0 > 7 - 1$.
>
> Consideremos
>
> P_8 (axioma da existência do elemento neutro da adição): Existe um número real 0 tal que $x + 0 = 0$ para todo número real x.

[24] Nota de Rodapé no trabalho de Morais Filho (2016): "Acima de cada implicação informamos qual(is) sentença(s) anterior(es) está(ão) sendo usada(s). Adotaremos doravante essa convenção" (p. 148)

Por P_8, segue de P_7 a desigualdade $3x > 7 - 1$. Assim obtemos:

P_9(sentença deduzida de sentenças anteriores): O número x que satisfaz P_1 é tal que $3x > 7 - 1$

Consideremos agora

P_{10} (definição): $7 - 1 = 6$.

P_{11} (teorema a ser provado no Capítulo 20): Caso $a > 0$ e $a.b > c$, então $b > \frac{c}{a}$.

P_{12} (definição): $\frac{6}{3} = 2$.

Finalmente, usando P_{10}, P_{11}, e P_{12} em P_9, resulta em

$3x > 7 - 1 \overset{P_{10}}{\Rightarrow} 3x > 6 \overset{P_{11}}{\Rightarrow} x > \frac{6}{3} \overset{P_{12}}{\Rightarrow} x > 2.$

Dessa forma, concluímos:

P_{13} (tese T, que é a conclusão de nossa argumentação): O número x que satisfaz P_1 é tal que $x > 2$.

(MORAIS FILHO, 2016, p. 147-148)

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

O autor afirma que seu objetivo com esta demonstração foi exemplificar e explicar a estrutura da lógica por detrás de uma demonstração (resolução de inequação no caso), bem como um alerta de toda a teoria envolvida. Nesta forma de demonstração fica claro o processo de dedução a partir de resultados anteriores. Independente dos quão “óbvios” pareçam alguns argumentos, ainda são proposições matemáticas [19 P1]. Veja “P_{10} (definição): $7 - 1 = 6$, é uma proposição matemática e facilmente verificável como verdadeira.

Com objetivos diferentes e fazendo uso do método axiomático formalizado Morgado e Carvalho (2015) sobre matemática discreta, adotam uma versão dos axiomas de Peano, onde já enunciam a notação utilizada. Os axiomas de Peano:

> (1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
> (2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
> (3) Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.
> (4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = N$. [Axioma da Indução].
> (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.2)

Os conceitos fundamentais aqui são os números naturais, o primeiro deles representado pelo símbolo usual 1, o conceito de sucessor e de conjuntos. Os axiomas descrevem as regras de composição destes conceitos. São também definidas as operações de soma e multiplicação e as relações de ordem a partir dos conceitos e dos axiomas. Como Morgado e Carvalho (2015) os enunciaram:

> (1) Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n + 1$
> (2) Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.
> (3) Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in N$.
> (4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n + 1 \in N$, para cada $n \in N$ então $X = N$.
> [Axioma da Indução].
> (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.3)

A noção de sucessor foi reescrita em uma notação algébrica da soma de uma unidade. A Adoção da letra "n" para representar um elemento qualquer, requer o complemento "$n \in N$" (entende-se "n pertence ao conjunto dos números naturais") para sabermos a natureza do objeto e a qual conjunto este pertence. Para a matemática formal, as regras de composição dependem das definições do objeto, é importante que esteja explícito.

Os autores definem as *operações* de adição e multiplicação. Definem a adição: "(i) $m + 1$ é definido, como fizemos antes, como o sucessor de m. (ii) $m + (n + 1)$ é definido como o sucessor de $m + n$, ou seja, como $(m + n) + 1$." (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.5). Entretanto, destacam que "A definição acima corresponde à ideia intuitiva de que o valor de $m + n$ é obtido acrescentando-se n vezes uma unidade a m" (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.5). Similarmente, definem a multiplicação em: "(i) $m.1 = m$. (ii) $m.(n + 1) = m.n + n$" (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.5). Afirmam que as propriedades usuais de adição e multiplicação (as mesmas listadas por Hefez (2016), com exceção do elemento neutro e elemento oposto da adição) podem ser deduzidas utilizando estas definições, porém demonstram apenas a propriedade distributiva (pois, não foi aceita como um axioma).

Enunciam a propriedade distributiva como "Teorema: Para quais números naturais m, n, p, vale $(m + n).p = m.p + n.p$" e demonstram como:

Vamos utilizar indução em p.

i) A propriedade é válida para $p = 1$, já que $(m + n) \cdot 1 = m \cdot 1 + n \cdot 1$ e $m.1 + n.1 = m + n$

ii) Suponhamos que a propriedade seja válida para um certo p, ou seja, $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.
Temos pela definição indutiva da multiplicação: $(m + n).(p + 1) = (m + n).p + (m + n)$
Mas, pela hipótese de indução, $(m + n).p = m.p + n.p$.
Portanto, $(m + n).(p + 1) = m.p + n.p$ (aqui, usamos as Propriedades comutativa e associativa da adição, que deveriam ter sido provadas previamente). Mas, pela definição de multiplicação, temos, $m.p + m = m.(p + 1)$ e $n.p + n = n.(p + 1)$. Logo, $(m + n).(p + 1) = m.(p + 1) + n.(p + 1)$.
Assim, a afirmativa é válida também para $p + 1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução a propriedade é válida para quaisquer m, n e p naturais.

(MORGADO; CARVALHO, 2015, p.6)

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

Esta demonstração admite utilizar resultados não demonstrados, em termos de uma matemática completamente formalizada; no método axiomático, não seriam válidos tais argumentos [7 P3]. É interessante perceber que se assemelha levemente às construções pitagóricas, que encadeavam proposições, porém sem uma base axiomática.

Os livros trazem exercícios (MORGADO; CARVALHO, 2015), (MORAIS FILHO, 2016) ou problemas (HEFEZ, 2016), principalmente, na forma de proposições a serem demonstradas. Tao (2013) traz um trabalho voltado a resolução de problemas matemáticos, dentre os quais se encontram teoremas e demonstrações matemáticas.

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

Resumidamente, uma sugestão de estratégia se dá na ordem, para Tao (2015): (a) Qual é o tipo de problema? Problema de existência, demonstração, encontre, calcule, mostre que, ...(b) Entender os dados. Quais são os objetos matemáticos e as propriedades conhecidas destes objetos? (c) Entender o objetivo. A qual ponto deseja-se chegar? (d) Escolher a notação. Um mesmo objeto matemático pode ser tratado por diferentes notações, é importante escolher uma com relação ao objetivo. (e) Traduzir todos os dados e propriedades conhecidas para a notação adotada. (f) Modificar o problema levemente. Considerando casos particulares, resolvendo problemas similares, imaginar consequências do problema, reformular o problema de modo equivalente, ou usando generalidades. (g) Modificar grandemente o problema. Subtrair dados, ou considerar a recíproca (que costuma falsa) na busca de caminhos. (h) Estabelecer resultados. Pode-se ainda simplificar para explorar os dados e atingir metas parciais. O que se descobriu de novo? Como essas descobertas auxiliam para alcançar o objetivo? Esta é a *parte mais difícil* do processo, porém não se pode perder o foco do objetivo. (i) Passo final é a verificação. No caso de uma falha deve-se retornar a passos anteriores ou recomeçar e tomar outro caminho [8 P3]. Tao (2015) afirma que uma vantagem da matemática, em sua abstração, com relação à ciências e empreendimentos físicos é que se pode sempre recomeçar do zero sem prejuízos de qualquer natureza.

Como exemplo deste método, apresenta o problema “Mostre que, entre quaisquer 18 números consecutivos com três algarismos, há pelo menos um que é divisível pela soma de seus algarismos.” (TAO, 2015, p.16).

Inicia a análise, afirmando que é um problema finito, uma vez que só existem 900 números de três algarismos com o primeiro algarismo diferente de zero, assim poder-se-ia fazer uma lista exaustiva de todas as soluções. Mas resolve buscar outra maneira, menos trabalhosa. Traduz o objetivo na expressão matemática $(a+b+c)|abc_{10}$, onde a, b, c são os algarismos de um número de três algarismos, e a notação utilizada diz que a soma dos algarismos divide o número quando escrito na base 10, ou seja $abc_{10} = 100a + 10b + c$. Assim, como pode-se buscar um padrão nos números entre 100 e 999? Tao (2015) sugere que o número 18 no enunciado seja um indício, não necessariamente o valor mínimo para a ocorrência desta propriedade, mas um indício. Pensa então nos divisores de 18, cuja propriedade se assemelha à do enunciado e chega aos números 3 e 9. Sabendo que a cada 18 números consecutivos existe obrigatoriamente um único múltiplo de 18 e testando os múltiplos de 18, ele verifica que a soma de seus algarismos sempre é 9 ou 18. Assim apresenta a demonstração como:

> Em 18 números consecutivos, um deles, digamos abc_{10}, tem que ser múltiplo de 18. Visto que abc_{10} é também múltiplo de 9, $a+b+c$ tem que ser múltiplo de 9. (Recordemos a regra de divisibilidade por 9 um número é divisível por 9 se e só se sua soma de algarismos for divisível por 9.) Visto que $a+b+c$ varia entre 1 e 27, tem que ser igual a 9, 18 ou 27. O valor 27 só ocorre com 999, que não é múltiplo de 18. Logo $a+b+c$ é 9 ou 18, e portanto $(a+b+c)|18$. Mas,

> $18|abc_{10}$ por definição, e portanto $(a+b+c)|abc_{10}$, como queríamos. ■ (TAO, 2013, p. 18-19).

Tao (2015) conclui uma propriedade para determinar os números, uma vez que a cada 18 números consecutivos existe um número que é múltiplo de 18, e visto que a soma dos algarismos de múltiplos de 18 é 9 ou 18, sabemos que tanto 9, como 18 dividem os múltiplos de 18. A demonstração desta maneira não apresenta uma listagem de todos os números, porém os determina de modo preciso. No caso de uma extensão para os números de quatro dígitos, podemos tomar a generalização demonstrada como base, diferente de um método de listagem. Embora, ambos possam resolver o problema, para a matemática formal a demonstração por meio de argumentações lógicas tem peso maior.

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

A diferença principal entre as demonstrações apresentadas está na linguagem que transmite a mensagem [9 P3] e essa expressa distintas abordagens matemáticas. Olhando as demonstrações, nos termos de Silva (2002), elas cumprem seu *papel lógico-epistemológico*, ao serem construídas em bases lógicas e constroem o conhecimento matemático, enquanto, também cumprem o seu papel *retórico* de convencer o leitor da veracidade de seus fatos. Entretanto fazem uso de diferentes estruturas de linguagem e de retórica.

Morais Filho (2016; 2018) discute como redigir uma demonstração matemática. Ao redigi-la, busca-se não somente verificar a veracidade da proposição, mas esclarecer essa veracidade para outros. "Ninguém deve acreditar em uma demonstração, mas deve ser convencido de que ela vale" (MORAIS FILHO, 2018). A demonstração precisa ser inteligível para outros, então é importante que tenha fim, seja concisa e precisa ao que se propõe.

O autor sugere que seria bom explicar a ideia da demonstração antes de apresentá-la, pois, num processo de demonstração a redação é a parte final. Inicialmente, aquele que demonstra, organiza os argumentos de modo a validar, ou não, o teorema. Só depois, com a noção clara do que se pretende apresentar, dos argumentos a serem utilizados, e da certeza de ter demonstrado que o demonstrante redige a demonstração. Ao final, Morais Filho (2016; 2016) afirma da necessidade de explicitamente informar ao leitor que a demonstração terminou e também é necessário explicar o resultado e como este vale como demonstração.

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Uma redação bem feita de uma demonstração pode ser a diferença entre cumprir ou não suas funções lógico-epistemológicas e retóricas, pois a matemática não se constrói de modo individual [20 P1]. Apenas neste trecho do texto-solo foram elencados diferentes filósofos e matemáticos, cujas ideias contribuíram direta ou indiretamente para a construção do método axiomático dos séculos XIX e XX, que alterou a forma como se concebe e se produz matemática. Refizemos o trajeto histórico, nas apresentações da demonstração como tradição, seja em sua base lógica, sua aparição em Os Elementos, como foram tratados como primazia do conhecimento matemático na idade média e no renascimento, ou seu papel central nas abstrações da matemática formal moderna. As demonstrações se apresentam como feito humano e coletivo.

3.2. As Demonstrações Matemáticas e sua tradição expressa no contexto educacional

Para pensarmos a demonstração matemática no contexto educacional, é necessário explorarmos as diretrizes nacionais do sistema educacional brasileiro, em particular, na disciplina de matemática e as discussões sobre seu ensino.

A palavra currículo comumente aparece quando nos referimos à escola e à educação. Porém, segundo Lopes (2014), não existe uma definição única ou característica explícita para currículo. Ainda segundo a autora, o significado dado à palavra currículo varia dependendo do contexto histórico e social no qual estão os indivíduos. Nota-se, entretanto que, uma noção relacionada a currículos frequentemente é uma organização, seja de horários escolares, seja de conteúdos.

No Brasil, o documento maior referente ao currículo é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que se apresenta como um

> “[...] documento de caráter normativo que define o **conjunto orgânico** e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento [...]” (BRASIL, 2018, p.7).

A BNCC coloca-se como um documento orientador dos currículos dos sistemas de educação a níveis federais, estaduais, municipais e privados da educação básica, visando integrar políticas públicas “[...] referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação” (BRASIL, 2018, p. 8). O documento apresenta uma proposta de dez competências gerais para a Educação Básica. Conforme a tabela abaixo.

Quadro 13– Competências Gerais da BNCC

COMPETÊNCIAS GERAIS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	
1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: (BRASIL, 2018, p.9-10)

Estas competências são para todas as etapas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. O foco do presente trabalho está no Ensino Fundamental, divido em nove anos, sendo os <u>Anos Iniciais</u> do 1º ao 5º ano e

Anos Finais do 6º ao 9º ano. Para explicitar as competências as Áreas do Conhecimento são divididas em: Linguagens; Matemática; Ciências da Natureza; Ciências Humanas e Ensino Religioso. Cada área com suas competências específicas. E cada Área do Conhecimento também engloba diferentes componentes curriculares. Veja no Quadro 14 a seguir.

Quadro 14 - Áreas do Conhecimento e seus Componentes Curriculares

Área do Conhecimento	**Componente Curricular**
Linguagens	Língua Portuguesa
	Arte
	Educação Física
	Língua Inglesa
Matemática	Matemática
Ciências da Natureza	Ciências
Ciências Humanas	História
	Geografia
Ensino Religioso	Ensino Religioso

Fonte: (BRASIL, 2018, p.27)

De mesma forma, cada componente também possui suas competências específicas e Objetos Do Conhecimento que desenvolvem Habilidades implícitas nas competências gerais da Educação Nacional, segundo a BNCC. Em outras palavras foram elencadas habilidades básicas consideradas fundamentais a todos os cidadãos brasileiros a serem tomados por base na criação de planos de ensino em todas as esferas da educação básica.

Enfocando a Área de Matemática a BNCC entende que

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.
>
> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.
> (BRASIL, 2018, p. 265).

A BNCC, ao mesmo tempo em que, entende a matemática em seu método axiomático versando sob temas abstratos, fala também da importância heurística[25] das experimentações e observações empíricas [5 P2]. Entende-se assim o papel de ambos no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

A questão heurística da matemática é também discutida por Silva (2002), com relação às demonstrações matemáticas, e afirma que "[...] Há uma diferença notável entre a apresentação indireta de um objeto por meio de uma descrição e a experiência direta e imediata desse objeto" (SILVA, 2002, p.71) [6 P2], aplica-se à compreensão da BNCC sobre a matemática de modo geral. O que se afirma nos trechos anteriores é que tão somente ter um objeto descrito, não é o mesmo que experimentá-lo.

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

As competências gerais da BNCC se cumprem nas competências específicas de cada área. Abaixo estão as competências gerais para a matemática, para o ensino fundamental no quadro 15.

[25] Heurística é a "ciência ou arte que leva à invenção e descoberta dos fatos" (HEURÍSTICA, 2015, s.p.)

Quadro 15 - Competências Da Matemática para a BNCC para o Ensino Fundamental

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL
1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança. quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 267)

Ao enunciar as competências conforme o quadro 15, a BNCC apresenta também sua concepção de matemática, principalmente nas duas primeiras competências. Entende a construção humana e histórica da matemática e em constante alteração. Aponta como seus fundamentos a construção lógica, investigativa e embasada em argumentos (lógicos) convincentes, só que, ao mesmo tempo, não é desconexa de outras ciências, servindo de ferramenta na criação de modelos [21 P1].

> Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Nesta visão, cabe a(o) docente que ensina matemática desenvolver estratégias que permitam a(o) discente a construção do raciocínio lógico e capacidade de articulação de argumentações convincentes sabendo recorrer à conhecimentos matemáticos, aplicando a contextos matemáticos ou não.

As seguintes competências tratam de relações entre diferentes áreas da matemática e relações com outras áreas do conhecimento, seja na capacidade de reconhecer situações-problemas, modelar problemas cotidianos, ou ainda auxiliar na construção de argumentos para problemas sociais urgentes, fazendo uso de ferramentas matemática aprendidas.

A realização destas competências dá-se por meio dos objetos do conhecimento matemático, axiomas, definições e teoremas, a serem trabalhados na educação básica, discriminados por ano na BNCC. O Currículo da Cidade explicita que os objetos do conhecimento selecionados, exploram algumas das ideias fundamentais da matemática. Para a BNCC e para o Currículo da Cidade, o pensamento matemático é composto por sete Ideias Fundamentais: *Equivalência; Ordem; Proporcionalidade; Interdependência; Representação; Variação e Aproximação*.

Não somente, como os objetos do conhecimento matemático foram elencados de cinco Eixos Temáticos[26], tanto na BNCC, como no Currículo da Cidade, os eixos são os mesmos. Estes eixos são: *Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade Estatística.* Todos os anos possuem objetos do conhecimento e habilidades específicas destes objetos a serem trabalhadas de cada eixo apresentado. O Currículo da Cidade acrescenta também os eixos articuladores, que estruturam possibilidades de relações intramatemática e extramatemática, estes eixos são: J*ogos e brincadeiras*; *Processos Matemáticos*; e *Conexões Matemáticas*.

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

O Currículo da cidade divide os anos do ensino fundamental em três ciclos cada qual com seus objetos do conhecimento e objetivos específicos. Os objetos do conhecimento, na estrutura espiral dada ao currículo, por diversas vezes aparecerem em vários anos [10 P3]. O primeiro é o ciclo de alfabetização, 1º ao 3º ano; voltado à alfabetização matemática, principalmente referente

> [...] ao trabalho que contempla o sentido dos números e das operações, as relações com o espaço e as formas, os processos de mediação, o registro e uso das medidas, além de estratégias de produção de dados, sua organização, registro divulgação, leitura e análise de informações. (SÃO PAULO, 2019ª, p.83)

[26] A BNCC fala em "Eixos Temáticos" e o Currículo da Cidade em "Eixos Estruturantes", porém com as mesmas cinco subdivisões apresentadas.

Os objetivos deste ciclo são a introdução aos estudos de matemática, principalmente na leitura e interpretação de conceitos básicos em situações variadas, conforme o trecho citado acima.

O ciclo interdisciplinar, do 4º ao 6º ano, avança para a descrição dos procedimentos matemáticos, bem como as similaridades e diferenças entre a linguagem matemática e a língua materna. Aqui a alfabetização matemática é expandida para um letramento matemático, onde a matemática passa a ser tratada já com adições de símbolos e um rigor próprio. As intervenções docentes podem vir da forma de questionar os estudantes de como obtiveram um resultado, indicando a necessidade de argumentações.

Para o Currículo da cidade, o ciclo autoral, do 7º ao 9º, tem como objetivo geral a produção do(a) estudante. Especificamente na matemática, considera-se a importância do estudante fazer observações sistemáticas, relacionando diferentes aspectos e estabelecendo relações. Sugere, ainda, o desenvolvimento de uma comunicação matemática, por meio de linguagem simbólica e notacional, bem como o uso de argumentações e uso de lógica matemática.

O Ensino médio, como apresentado na BNCC, mas não no Currículo da Cidade, objetiva reforçar e complementar no mesmo sentido das competências e objetivos do ensino fundamental. Exploram, ainda, a capacidade de investigar e estabelecer conjecturas[27]. No quadro 16 estão listadas as competências para o Ensino Médio, conforme a BNCC.

[27] Teoremas matemáticos de aparente veracidade, porém ainda não demonstradas.

Quadro 16- Competências Da Matemática para a BNCC para o Ensino Médio

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 531)

Nestes ciclos e no Ensino Médio, embora sejam definidos os objetivos e objetos do conhecimento a serem tratados, visando atingir os objetos e competências gerais da matemática (e, por conseguinte da educação básica), não são definidas estratégias para cada objeto [11 P3]. O Currículo da Cidade lista sugestões de estratégia para o ensino de matemática e deixa como responsabilidade docente a escolha para objeto do conhecimento. O Currículo afirma que

Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração?

> Pesquisas na área de Educação Matemática e documentos de orientações curriculares recentes apontam para a importância da diversificação de estratégias no ensino de Matemática, tais como, a resolução de problemas, as tarefas investigativas, o uso de recursos tecnológicos, a etnomatemática, os jogos, a modelagem, entre outras. Por esse motivo, o documento apresenta, nos próximos itens, algumas dessas estratégias para ensinar Matemática. (São Paulo, 2019a, p.71)

As sugestões de estratégias apresentadas são complementadas pelas Orientações Didáticas do Currículo da Cidade de matemática, no volume 1 (São Paulo, 2019b), voltado à gestão de sala de matemática, eixos articuladores e os eixos estruturantes[28] de Números e Álgebra; e no volume 2 (2019c), versando sobre os eixos estruturantes de Geometria, Probabilidade e Estatística, e Grandezas e Medidas.

[28] O mesmo que os eixos temáticos da BNCC.

Os eixos articuladores falam de relação extramatemática e intramatemática, mais especificamente, os Processos Matemáticos são compreendidos como todas as ações que permitem tratar de conceitos da área (SÃO PAULO, 2019b). Nas Orientações Didáticas do Currículo da Cidade, volume 1, com relação aos Processos Matemáticos, são abordados os processos de Representações de Elementos, Comunicação de Resultados, Resolução de Problemas, Investigações Matemáticas e Provas e Demonstrações[29]. No presente trabalho, enfocaremos o trecho de Provas e Demonstrações.

As Orientações Didáticas apontam que analogamente aos objetos do conhecimento, as estratégias se adaptam e possuem diferentes sentidos para cada ciclo do ensino fundamental (e aqui estendemos ao Ensino Médio). O documento entende prova e demonstração como sinônimos. Compreende ainda que

> A necessidade de justificar está vinculada ao "fazer matemático", porém os diferentes significados e interpretações dados à atividade de provar em matemática devem estar relacionados aos conteúdos matemáticos e aos contextos em que a atividade se realiza. (SÃO PAULO, 2019b, p. 48)

Vimos anteriormente, que a construção atual da matemática em sua base lógica e forma são dadas por meio de axiomas e teoremas demonstráveis. Todos esses devem ser justificáveis. Porém, o documento acrescenta a necessidade de pensar-se no contexto onde se realiza a atividade.

Hanna e Jahnke (1993) discutem que nas décadas de 60 e 70 foi discutida uma reforma mundial nos currículos de matemática, baseadas nas mudanças na matemática e na filosofia da matemática, que tentou alinhar a instrução matemática na educação básica com os padrões da prática matemática, colocando uma ênfase na demonstração. Por motivos de formalismo exagerado, experiências educacionais falhas e críticas do público as reformas foram abandonadas, e as pesquisas voltaram-se para o uso de intuição na prática matemática de sala de aula e para o comportamento dos estudantes quando de frente a uma demonstração matemática. E ainda mais, Hanna e Jahnke (1993), ainda apontam que muitas vezes os estudantes não sabem os motivos pelos quais estão demonstrando um teorema, não sabem por que demonstrar teoremas

---

[29] Título adotado no documento.

aparentemente “óbvios”, e, por vezes, não se convencem quando apresentados à uma demonstração formal.

Paralelamente, Silva (2002) explora as funções da demonstração matemática, uma função *lógico-epistemológica*, tratando da capacidade de demonstrar formalmente e de modo logicamente perfeito uma proposição, expandindo o campo matemático; uma função *retórica*, relacionada à capacidade de convencimento da validade da demonstração; e uma função *heurística*, como indutora de ideias matemáticas [22 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Com relação ao foco de Silva (2002), é apontado que uma demonstração matemática logicamente incompleta (ou defeituosa), não cumprindo seu papel lógico-epistemológico, mesmo que cumpra seu papel retórico, pode ter um papel heurístico, ou seja, um papel de indutoras de descobertas matemáticas. O autor explica que os papéis retóricos e heurísticos são todos relativos ao sujeito que escreve e lê as demonstrações.

> Ou seja, além de estabelecer a veracidade de uma asserção, uma demonstração pode ser também vista como indutora de progresso, se for simultaneamente vista como um desafio, um edifício lógico a ser demolido pela variação interessante do significado dos termos ou conceitos nela envolvidos. Isso pode ser feito simplesmente, como usualmente acontece em Matemática, por generalização. (SILVA, 2002, p.70).

Silva (2002) tem seu foco nas demonstrações matemáticas formais, no fazer matemático, porém quando pensamos em relação à BNCC e ao Currículo da Cidade, principalmente no ciclo autoral (7º ao 9º ano) e no ensino médio, as noções de afirmações matemáticas e conjecturas dos estudantes, podem ser verificadas com provas ou demonstrações[30] e generalizadas.

Entretanto, “quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém não dizem o que entendem por “demonstrar”. Tem-se que apreender. Vê-se o que o professor faz, e, então faz-se a mesma coisa.” (BICUDO, 2002, p. 88). Estudantes, quando viram professores, têm o “saber fazer”, mas não o “saber o quê” (BICUDO, 2002). “Para demonstrar teoremas, em geral, o professor concebia idéias(sic), e

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

[30]Aqui a prova e a demonstração aparecem em nosso entendimento: a noção de prova como evidência e demonstração como o processo lógico-dedutivo anteriormente descrito.

artifícios extraordinários, **tirados de não sei onde**, e, magicamente concluía, escrevendo c.q.d." (LOURENÇO, 2002, p. 101). [23 P1]

Neste mesmo sentido, "[...] os estudantes precisam lidar com a demanda – frequentemente paradoxal – de que eles entendem um fato embasado em suposições e definições dos quais não estão em posição de compreender seu escopo e implicações"[31] (HANNA; JAHNKE, 1993, p. 428)[24 P1]. Os autores argumentam que uma demonstração matemática não apresenta uma prova absoluta de certeza em qualquer situação, mas é a ligação de fatos dentro de uma estrutura de um modelo hipotético determinado [25 P1].

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

Ao mesmo tempo, diferentes áreas de pesquisa da educação matemática acreditam que a demonstração[32] matemática rigorosa, é fundamental não somente para um entendimento pleno das práticas e conceitos matemáticos, mas também indispensável na formação docente (GARNICA, 2002).

Em sua tese de doutorado, Garnica (1995 *apud* 2002) observou principalmente que demonstrações, para serem consideradas rigorosas, não poderiam diferir ou distanciar-se de um molde formal, contudo a demonstração

> [...] rigorosa, é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por critérios nitidamente sociais, afirmação essa que rompe tanto com os aspectos lógicos quanto com os aspectos matemáticos que, a julgar as proposições pelas quais a ideologia da certeza trafega, deveriam caracterizá-la. (GARNICA, 2002, p. 95)

Garnica (2002) afirma que o estudo das argumentações pode ser analisado e observado por diferentes perspectivas, não somente, como existem diferentes formas de argumentações presentes em sala de aula.

O autor destaca que a demonstração rigorosa, e formal, com bases lógicas bem definidas e

Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática?

[31] Traduzido de: "[...] learners must cope with the demand –often felt to be paradoxical – that they understand a fact on the basis of assumptions and definitions whose scope and implications they are in no position to grasp."
[32] Garnica (2002) utiliza prova como sinônimo de demonstração.

explícitas é ideal[33] e dirigida a uma justificação científica do conhecimento matemático (Matemática acadêmica, ou profissional; como o autor chama). A demonstração rigorosa passa a ser uma dentre as diferentes formas de se argumentar sobre o conhecimento matemático, dentre as diferentes matemáticas[26 P1].

Na compreensão da existência de diferentes matemáticas, ou Etnomatemáticas, cabe à Educação Matemática compreender e tratar destas diferentes matemáticas no ensino de matemática. Em diferentes matemáticas, cada uma terá seu o conceito de verdade, de demonstração e de argumentações. Assim, Garnica (2002) entende que

> Etnoargumentações – “demonstrações” em sentido amplo – têm sempre, a função de convencer, tomado “convencimento”, aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. A essa ampliação de escopo vincula-se uma ampliação das próprias concepções sobre Matemática. Ao invés de toma “A” Matemática como um conjunto de objetos que pode ser atingido de vários modos, segundo várias práticas, chamaremos de “Matemática” (ou “Matemáticas” ou ainda “Etnomatemática”) um conjunto de práticas (e, conseqüentemente(sic), dos valores vinculados a essas práticas). (p.98).

Esta concepção permite considerar diferentes construções e concepções de verdade em diferentes sistemas. Quando pensamos na matemática antiga egípcia e mesopotâmia, a validade dos enunciados era dada por sua aplicação válida. A questão posta para a educação matemática é a reflexão sistemática sobre como pensar as argumentações e demonstrações, ou etnoargumentações, quando produzidas socialmente em salas de aula e discutidas sua validade [7 P2].

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Lourenço (2002) discute que mesmo a Geometria, área da matemática que costuma receber tratamento dedutivo por excelência, desde Os Elementos, são apresentados a partir “[...] **de definições e postulados que não representam nada para os alunos**” (p.102, grifos do autor). Sugere, então, considerar a história da humanidade e trabalhe-se num caminho similar ao realizado na construção do conhecimento matemático. Entende assim “[...] que a **melhor prova que se pode oferecer para alguém**, sobre qualquer tema, **é o convencimento de que o**

É a demonstração a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

33 Termo utilizado no sentido platônico, ou seja, ideal enquanto pertencente ao mundo das ideias, um objetivo inatingível do qual podemos descrever e tratar sua forma sem reproduzir perfeitamente.

fato é real" (LOURENÇO, 2002, p. 103, grifos do autor) [8 P2]. Por fim, discute as possibilidades apresentadas por softwares geométricos, nos quais entendemos conforme nosso trabalho anterior, (DIAS FILHO, 2014) que já possuem impressos em si uma concepção de matemática, por seu fabricante, e de possiblidades abertas aos usuários.

Com relação a diferentes concepções de matemática e de demonstração matemática, também podemos citar as duas teses de Hanna e Jahnke (1993). Os autores desenvolvem seu trabalho argumentando principalmente com relação a um caráter restrito e um caráter amplo da matemática, comentados anteriormente. Compreendem que em salas de aula um não ocorre na ausência do outro, tornando-se ambos necessários para o ensino e aprendizagem de matemática. Compreendem assim que, ainda que importante, um caráter restrito, de forma e regras de inferência, necessita, para a compreensão de um caráter amplo, incluindo aplicações intra e extramatemática. Tal noção aparece também na BNCC e no Currículo da Cidade.

Os autores afirmam que pesquisadores matemáticos frequentemente ignoram as aplicações e se ocupam com a estrutura da matemática que trabalham. Já os "[...] professores, por outro lado, deveriam levar em consideração a contribuição de um dado teorema para o nosso entendimento da realidade"[34] (HANNA, JAHNKE, 1993, p. 432, tradução nossa). Afirmam ainda que os professores não podem se esquivar da complexidade epistemológica, como chamam os autores, de assuntos desconcertantes adotando uma visão como a de Hilbert dos axiomas despidos de significados. A primeira tese é exposta como: a matemática (feita) na academia[35] lida com uma complexidade matemática enquanto a matemática na escola lida com uma complexidade epistemológica (das aplicações e seus contextos). Afirmam ainda que é na situação de aprendizado que a própria justificativa e o contexto da aplicação podem ser construídos.

O que nos guia à segunda tese de Hannah e Jahnke (1993), que declaram que os estudantes precisam de experiências extensas e coerentes na área de aplicação apropriada para entender o significado de um teorema e o valor da demonstração. "Essa fundamentação pragmática pode e deve ser ensinada em separação consciente da

---

[34] Traduzido de: "Teachers, on the other hand, must take into consideration the contribution which a given proof makes to our understanding of reality".
[35] Os autores, diferentes de Garnica (2002) não falam de matemática acadêmica e escolar, mas falam dos locais onde a matemática é praticada.

derivação formal. Somente assim os estudantes serão capazes de ver o verdadeiro sentido de uma demonstração"[36] (HANNA; JAHNKE, 1993, p. 434, tradução nossa).

Deste trecho do texto-solo, notam-se diferentes concepções de demonstração matemática, seja nos currículos e documentos oficiais brasileiros, seja nas discussões de educação matemática, tanto no ensino básico, ou no ensino superior. Com a estrutura apresentada de perguntas e respostas no texto-solo, construiremos a seguir o próximo momento de análise, apontando os invariantes percebidos e suas relações organizadas em categorias abertas.

[36] Traduzido de: "This pragmatic foundation can and should be taught in conscious separation from the formal derivation. Only then will students be able to see the real point of a proof."

Capítulo 4. Discussão dos Invariantes das Demonstrações Matemáticas

No capítulo anterior apresentamos o texto-solo construído no primeiro momento de análise hermenêutica dos textos que a nós se apresentaram e sua organização em perguntas e respostas, e no segundo momento de análise hermenêutica, análise do texto-solo, que nos oferece como indício as características do fenômeno estudado. As perguntas que se repetem ao longo do texto-solo constituem as Categorias Abertas, estas nos permitem descrever o fenômeno e apontam para uma compreensão de, novamente retomando nossa interrogação norteadora, *como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*

Os trechos respondidos pelas perguntas correlatas à pergunta norteadora da pesquisa estão sublinhados e a pergunta localiza-se numa caixa próxima, para facilitar os comentários, cada resposta foi numerada e anotada juntamente da pergunta respondida. As três Categorias Abertas, numeradas em ordem de aparição, do texto-solo são: P1 – *Qual é o modo de ser da demonstração matemática?*; P2 – *É a demonstração matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?*; P3 – *Como se dão os enunciados matemáticos?*.

"Nos textos que explicitam as categorias abertas, as referências às perguntas e respostas serão feitas utilizando-se os códigos indicados no final dos trechos evidenciados no texto-solo" (KLUTH, 2005, p. 142). Os códigos foram apresentados no texto-solo na forma [1 P1] para a primeira asserção que oferece uma resposta à "*P1 – Qual é o modo de ser da demonstração matemática?*" e de modo análogos para as outras. As asserções foram numeradas em ordem de aparição, com relação à pergunta, no texto-solo e para facilitarmos a busca no Anexo I encontram-se todas as respostas e seus respectivos códigos.

4.1. Qual é o modo de ser da demonstração matemática?

As asserções que compõe esta categoria tratam sobre o modo pelo qual as demonstrações matemáticas se dão. Em nosso entendimento esta categoria trata dos modos pelos quais a demonstração matemática se doa, ou seja, dos modos pelos quais a demonstração é percebida pelos indivíduos.

A definição de demonstração matemática se mostra condicionada a finalidade adotada para a demonstração [1 P1], [12 P1], [14 P1], [16 P1], [22 P1] e [26 P1] uma demonstração não é somente uma dedução lógica, mas revela também novas dimensões e aspectos do teorema demonstrado [13 P1]. Assim, a demonstração matemática possui diferentes definições e funções, em diferentes espaços de construção humana de conhecimento e não desconexa de outros campos do conhecimento humano [21 P1]. Silva (2002) fala de três funções da demonstração matemática, copiando nosso trecho anterior, uma função *lógico-epistemológica*, uma demonstração formal embasada na lógica para expansão do conhecimento matemática, expandindo o campo matemático; uma função *retórica*, relacionada à capacidade de convencimento da validade da demonstração; e uma função *heurística,* como indutora de ideias matemáticas [22 P1].

Para os gregos a demonstração, baseada nos princípios lógicos [5 P1], buscava verdades, primariamente geométricas. A demonstração atestava a veracidade, de modo que uma vez demonstrado, o resultado poderia ser utilizado em outras demonstrações, como era feito já na escola aristotélica [4 P1]. A definição assumida pelos gregos era uma sequência de argumentos, condizentes com os princípios lógicos e com construções anteriormente demonstradas, que mostravam a verdade. Só que, no caso da escola aristotélica, as proposições demonstradas eram casos particulares de teoremas [3 P1], [4 P1]. Não havia uma necessidade de estruturação distante dos elementos visíveis (elementos que, nesta concepção, são sua auto evidência de existência, como ponto e reta, no caso da geometria grega) e que descrevesse problemas genéricos longe da realidade vivida. Justifica-se o uso das demonstrações a partir das limitações humanas, a partir de nosso exemplo anterior, na impossibilidade de se desenhar todos os triângulos possíveis para verificar uma propriedade é necessário um método de argumentação, indissociado da lógica, que nos deixe tratar de propriedades passíveis de verificação no mundo [2 P1].

O marco do trabalho de Euclides foram os postulados, proposições adotadas como verdadeiras que partem de elementos fundamentais, ponto e reta, que para Euclides não requeriam uma definição formal, uma vez que eram visíveis, tinham em si uma auto evidência de que existiam e poder-se-ia compreendê-los intuitivamente [6 P1]. Estes postulados e a forma de construir por argumentos foram as bases para o método axiomático-dedutivo atual [8 P1]. Tanto para Aristóteles, como para Euclides a demonstração cumpre sua função lógico-epistemológica de expandir as proposições verdadeiras logicamente condizentes e ao mesmo tempo a função retórica de convencimento, não dissociado do seu contexto histórico [20 P1], nesta perspectiva, a possibilidade de construção de um objeto implica na existência deste objeto para a matemática.

Com a retomada das demonstrações no continente europeu nos séculos XVIII e XIX, a demonstração apresenta um caráter similar à demonstração grega, porém diferentes à medida que consideravam limitações da intuição e faziam uso de uma linguagem sintética, em oposição a língua natural [9 P1] e [12 P1]. A intuição em Aristóteles e Euclides tinha o papel de servir de argumento em deduções com o objetivo de convencimento, porém quando consideramos problemas de quantidades e conjuntos infinitos a intuição não parece ser capaz de decidir. A intuição foi substituída por análises lógicas, onde, quando se referindo à lógica pura, as relações entre as proposições possuem regras definidas e independem de uma proposição em língua natural, não sendo necessário conhecer seu valor lógico para determinar as relações entre estas [7 P1]. Para alguns matemáticos, a Matemática é tão somente um caso particular da lógica uma vez que a construção do conhecimento matemático se dá a partir de axiomas, verdades estipuladas sobre a composição de signos, assim, tem um valor lógico fixo, ainda que assumido como verdadeiro. Bem como, para a matemática importam apenas as decorrências verdadeiras a partir dos axiomas, não verificando todas as relações possíveis entre a veracidade de seus elementos, como o faz a lógica formal.

Um caso particular de análise lógica trata dos sistemas formais, como propostos por Hilbert e outros formalistas entre os séculos XX e XXI. Um sistema formal é aquele que trata símbolos despidos de significados externos por meio de axiomas que ditam suas regras de composição. Para Hilbert, copiando de nosso trecho anteriormente exposto, o processo de completa formalização do sistema: (a) eliminam-se todos os significados exteriores à matemática; (b) elege-se um catálogo de símbolos a serem utilizados; (c) são definidas as “Regras de Formação”, quais são as combinações válidas entre os símbolos; (d) são definidas as “Regras de Transformação”: a *regra de substituição* de símbolos, permite generalizar casos e substituir sequências de símbolos por outros unitários, e a *regra de destacamento*, de duas proposições p, q, quando p implica q, sempre é possível deduzir q a partir de p; (e) por fim, a seleção de proposições como axiomas. (NAGEL; NEWMAN, 2015) [10 P1].

O processo de formalização perfeito e finito proposto por Hilbert tinha como intuito resolver paradoxos e apontar para a força da demonstração como única ferramenta de verdade matemática. O Teorema da Incompletude de Gödel aponta que a formalização completa é um processo infinito, assim, novamente, pelas limitações humanas, torna-se um processo impossível, incompleto [11 P1]. A justificativa inicial das demonstrações surge da impossibilidade de se verificar infinitos casos. Mostrar que um processo é infinito, implica, em dizer que não pode ser realizado. Para, além disso, o Teorema de Gödel demonstra outras limitações do método axiomático dedutivo, demonstra que existem proposições que não poderão ser demonstradas, dado um conjunto finito de axiomas. Mesmo que se aumentasse a lista de axiomas, ainda haveria teoremas e proposições não demonstráveis. A única possibilidade seria uma lista de axiomas também infinita, porém, como dito anteriormente, não é possível. Nestes termos quando consideramos esta vertente formalista da matemática a demonstração não é uma prova absoluta de veracidade de um teorema para qualquer situação, mas uma decorrência das ligações de axiomas e outros teoremas em um sistema hipotético determinado [25 P1]. Garnica (2002) defende que a demonstração rigorosa, formal e de bases lógicas bem definidas e explícitas, como se pretende no formalismo de Hilbert, é ideal, ou seja, um objetivo inatingível, voltado à produção de conhecimento matemático puro na academia [26 P1].

Destas visões de matemática intuicionista, logicista e formalista prevaleceu aos dias de hoje, seja na matemática feita na academia ou na matemática escolar, a visão formalista de matemática. Existe uma preocupação com as salas de aula de matemática, independente do nível, quando se trata da demonstração matemática e das noções de verdades do conhecimento matemático [14 P1] , [23 P1], [24 P1]. Livros didáticos e livros técnicos, como os analisados, citam explicitamente o método axiomático-dedutivo, alguns listam os axiomas adotados e seus objetivos logo no começo do livro.

Batistela e Bicudo (2018, 2019) mostram em seu trabalho a importância da apresentação do Teorema da Incompletude de Gödel na graduação de matemática, seja no bacharelado ou na licenciatura. Em particular, a importância deste teorema e das limitações do método axiomático-dedutivo para os graduandos em licenciaturas se dá pois, os estudantes “valorizam esse conhecimento e refletem sobre ele, compreendendo a vivacidade da matemática como um todo. Pelas suas exposições, compreendemos que se afastam das ideias ingênuas que tomam essa ciência como soberana e completa.”

(BATISTELA; BICUDO, 2019, p.23). Os estudantes afastam-se de uma concepção ingênua e imediatista sobre a matemática e se aproximam do movimento da construção do corpo de conhecimento matemático.

A depender do livro, as demonstrações apresentadas são construídas e expressas de diferentes maneiras. Existem livros, dentre os analisados, que no lugar de argumentos enunciam as propriedades que justificam as passagens, não explicitam nem a técnica de demonstração utilizada e nem os princípios lógicos utilizados [15 P1]. Deixa-se a cargo do leitor, daquele em contato com a demonstração construída pelo livro, preencher as lacunas e compreender como as propriedades se amarram e se organizam para mostrar a veracidade de uma determinada propriedade ou teorema [16 P1]. Pode-se afirmar que uma demonstração neste molde, e em outros similares, tem mais um caráter de convencimento de que uma propriedade seja verdadeira, função retórica, do que um caráter formal matemático. [17 P1].

Por outro lado, quando vemos uma demonstração logicamente completa que enuncia todas as proposições e regras de inferência lógica utilizadas como a de Morais Filho (2016), onde são expressos até os passos tidos como óbvios, como “7 – 1 = 6”, a demonstração torna-se extensa [19 P1]. Porém, ao mesmo tempo, neste exemplo a demonstração revela elementos para além do teorema demonstrado [13 P1], trata da estrutura argumentativa da lógica e da fundamentação do sistema onde o teorema se encontra.

Apresentamos duas formas de tratar a demonstração de teoremas, uma que força o leitor a preencher as lacunas lógicas e outra que as expõe. Pensando no trabalho em sala de aula de matemática seria necessário escolher uma sobre a outra? Ian Stewart e David Tall (1977 *apud* BICUDO, 2002) retomam o argumento das limitações humanas ao tratar da limitação de compreensão humana. Ao se suprimir regras lógicas e pormenores, tidos como, triviais, bem como substituir um conjunto de símbolos por um único, amplia-se a necessidade de conhecimento do leitor para que a compreensão se dê, ao mesmo tempo em que permite a demonstração focar na estrutura geral da nova construção [18 P1]. Ou seja, novamente, a construção da demonstração também dependerá de sua finalidade. A explicitação dos passos lógicos e da fundamentação do sistema permite que o leitor perceba diferentes aspectos para além da demonstração, e analogamente, a supressão desses passos e fundamentação permite a exploração da forma do novo teorema demonstrado.

Podemos resumir esta categoria a uma discussão em três aspectos a serem considerados em relação aos modos de ser das demonstrações matemáticas: (a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; e (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada.

4.2. É a demonstração matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Apresentamos até o momento a importância e o papel da demonstração matemática tanto na história como para o corpo de conhecimento matemático. Porém temos relatos de povos antigos fazendo uso de proposições matemáticas sem a necessidade de demonstração, a veracidade era garantida tão somente pela possibilidade de aplicação no mundo físico [1 P2]. Não somente, como mesmo os postulados de Euclides inicialmente embasavam-se na auto evidência perceptível pelos outros [2 P2].

Mesmo na ausência de demonstração houve inúmeros avanços no conhecimento matemático, com egípcios, hindus e árabes [3 P2]. Em particular os avanços da matemática árabe na algebrização e resolução de equações com uma ou mais variáveis foram de muita valia para matemáticos do mundo todo.

Entretanto vimos limites para o método axiomático-dedutivo, uma dessas limitações foi encontrada por Cantor em sua Teoria dos Conjuntos ao tratar de um “conjunto de todos os conjuntos” [4 P2]. A teoria acabava por incorrer em paradoxos, proposições de valor lógico indefinível e supunha-se que poder-se-ia evitá-los por meio de uma boa axiomatização. Porém, como apontamos anteriormente, Gödel não apenas reforçou as limitações do método axiomático-dedutivo, como as escancarou.

Atualmente a demonstração é reconhecida como método principal de obtenção de verdades matemáticas, porém, para além das limitações do método axiomático-dedutivo apresentadas, a BNCC (2018) e pesquisadores apontam outros caminhos [5 P2], [6 P2], [7 P2], [8 P2].

A BNCC (2018) entende a importância do método axiomático-dedutivo e também entende a importância heurística, originária de ideias e noções matemáticas, da experimentação e observação [5 P1]. Tanto a BNCC (2018) como o currículo da Cidade (2019) falam de um currículo em espiral e dividido por ciclos, onde nos ciclos iniciais a observação e experimentação são fundamentais para apreensão do mundo pelos estudantes. As demonstrações, como apresentamos, surgem da não possibilidade de se observar todos os casos existentes, porém o valor da observação e listagem de todos os casos possíveis para um determinado problema, conhecido por método da exaustão, também possui sua validade e capacidade de gerar descobertas matemáticas.

Nos Quadros 15 e 16 anteriormente apresentados estão listadas as competências a serem desenvolvidas pela área de matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, respectivamente. Destas podemos destacar do Ensino Fundamental: "2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo." (BRASIL, 2018, p.267) e do Ensino Médio

> "**5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas." (BRASIL, 2018, p. 531).

Ambas abordam as bases lógicas e argumentativas matemáticas, tanto na decisão de conjecturas matemáticas como na atuação no mundo, sejam por meio de demonstrações formais ou investigação e observação. Assim nota-se no documento que, em nível de educação básica, as competências de argumentar e raciocinar logicamente englobam outras ferramentas que não a demonstração matemática, como entendida pelos profissionais matemáticos atualmente.

Nasser e Tinoco (2001) falam de uma "[...] *prova ingênua*, isto é, uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta (p. 4)". As autoras listam ainda alguns tipos de justificativas para as, como chamam, provas ingênuas: *justificativa pragmática*, uma declaração de verdade a partir de poucos casos particulares válidos; *recorrência a uma autoridade*, na qual se supõe que uma afirmação é verdadeira, pois uma autoridade, o livro ou o docente, diz ser; *exemplo crucial*, o uso de um exemplo numérico ao invés de uma propriedade geral; e uma *justificativa gráfica*, a veracidade de uma proposição advém de sua comprovação por meio de uma figura. As autoras entendem como sinônimos os termos prova e demonstração, cabe aqui destacarmos mais uma vez as diferenças. Neste trabalho entendemos "prova" como a "evidência de um fato" e não sua comprovação (MORAIS FILHO, 2018), deste modo, entendemos que as provas ingênuas defendidas pelas autoras englobam tanto evidências de fatos percebidos e tentativas de argumentos pelos estudantes. Ainda que não sejam demonstrações, nas definições apresentadas anteriormente, definitivamente farão parte da trajetória daqueles que se iniciam no processo de aprendizagem das demonstrações. Estas concepções de prova ingênua em conjunção com a demonstração formal são abordadas na competência da BNCC (2018) destacada.

Competência, como explicada por Perrenoud (1999), é a capacidade de agir com eficiência em uma situação específica mobilizando com sinergias diferentes recursos cognitivos, dentre eles, os conhecimentos específicos; savoir-faire[37]; e esquemas complexos da situação, como de percepção, pensamento, ação, reflexão, entre outros; e a capacidade de usar analogias, uma consulta a situações previamente conhecidas. Ao passo que a competência requer diferentes conhecimentos e habilidades, esta não se confunde com os últimos e não é somente a adição de suas partes. A prática de uma competência não acontece de modo espontâneo da potencialidade humana, precisa ser adquirida e praticada. A aquisição de competências ocorre numa multiplicidade de situações que nos coloquem frente à necessidade de desenvolver a competência, situações variadas permitem o desenvolvimento de diferentes aspectos de uma mesma competência.

Silva (2002) trata da questão da experimentação e vivência, fala da diferença de se apresentar um objeto por uma descrição e da experiência direta e imediata com o objeto [6 P2]. Nota-se que no Quadro 15, anteriormente apresentado, todas as competências da BNCC para a matemática do Ensino Fundamental partem da experiência e observação direta, seja no contato com os problemas matemáticos, seja

[37] Saber-fazer, existe no mundo prático, às vezes desatrelado de um conhecimento específico.

com a sociedade na qual se inserem aqueles que estudam e, no ensino médio, apresentam também, demonstrações formais.

Tal noção de competência sugere que para se trabalhar as argumentações matemáticas, seja por demonstrações, seja por observações e investigações, é necessário um contato constante dos discentes com problemas que requerem esta competência. Relaciona-se com a resposta [7 P2] que fala da necessidade de repensarmos as argumentações e demonstrações em sala de aula. Ainda mais quando pensamos nos diferentes níveis de ensino da educação básica. Mesmo dentro da mesma, cada ciclo de aprendizagem possui suas especificidades e necessidades (SÃO PAULO, 2019). Neste sentido Lourenço (2002) argumenta "[...] que a *melhor prova que se pode oferecer para alguém*, sobre qualquer tema, *é o convencimento de que o fato é real*" (p. 103, grifos do autor) [8 P2]. Essa resposta do trecho-solo sugere que a depender do momento, argumentações retóricas e investigações possam ser de mais valia para o convencimento de um fato matemático do que uma demonstração formal. Assim, para o ensino de matemática, devemos levar em consideração se a demonstração matemática de certo conteúdo abrange e favorece o conhecimento matemático em termos de mobilização para uma competência.

4.3. Como se dão os enunciados matemáticos?

A pergunta que permeia esta categoria revela respostas fornecidas pelo texto-solo e trata dos meios pelos quais os enunciados se fazem presentes e percebidos. A linguagem é intencional e traduz aquilo que é sentido pelo indivíduo, assim a linguagem, utilizada nos enunciados, seja na linguagem materna ou na linguagem matemática, tem um sentido e significado.

No caso da linguagem matemática suas notações e símbolos surgem para facilitar elementos antes descritos em linguagem natural [1 P3]. Uma notação eficiente não apresenta ambiguidades e garante a interpretação de forma simplificada do resultado de operações entre os símbolos [2 P3]. Os símbolos traduzem conceitos compreendidos por meio da linguagem materna para uma linguagem matemática e, a partir das regras de composição definidas nos axiomas, como podemos realizar operações entre estes.

Todos que passaram pela educação básica já conhecem uma gama de símbolos matemáticos, alguns tão naturalizados que substituem palavras e conceitos em conversas por meios virtuais. Os símbolos mais simples nos são ensinados desde o primeiro ciclo do ensino fundamental. Ao falar “mais”, “menos”, “igual”, os símbolos respectivos logo nos vêm à mente. Existiria uma diferença entre apresentar uma demonstração em linguagem materna e uma demonstração em linguagem matemática?

As diferentes demonstrações apresentadas variam não somente em forma de construção, como apresentadas na categoria aberta anterior, mas também na linguagem que as expressa [9 P3]. Algumas demonstrações fazem uso apenas de uma linguagem matemática apresentando símbolos cuja definição e significado foram apresentados anteriormente no texto; outras, como a demonstração logicamente explícita, misturam a linguagem matemática e a língua materna ao longo dos passos da demonstração; e ainda outras, como a de Tao (2015) dos múltiplos de 18 [8 P3], usam mais uma argumentação na forma de língua materna com o mínimo de símbolos possível. Percebe-se desta maneira que não somente a forma da demonstração subjaz a percepção do sujeito que a lê, mas, que a linguagem na qual essa forma se embasa também subjaz a percepção. Assim, de modo análogo a categoria anterior, podemos entender que a linguagem na qual uma demonstração se expressa permite perceber diferentes aspectos daquilo que é demonstrado.

Tivemos também um exemplo de demonstração que em sua construção e argumentação explicita fazer uso de resultados que ainda seriam demonstrados no próprio livro num capítulo futuro [7 P3]. Focamos as perguntas: Como tal ação influencia na capacidade de compreensão do leitor sobre o teorema? E sobre a própria construção do conhecimento matemático?

Para pensarmos nesta influência tomemos um exemplo do texto-solo quando falamos da demonstração da infinidade de números primos. Para que essa proposição fosse demonstrada, foi recorrido a reescrever a proposição para se dizer que não há número primo maior do que todos os outros [6 P3]. A alteração no enunciado para outro equivalente abriu portas para outras maneiras de pensar a situação e assim procurar caminhos para demonstração. De modo similar, os passos de Tao (2015) para a resolução de problemas perpassam pelas notações adotadas e pelo enunciado do problema, quando não, sugere-se que este seja reescrito de modo equivalente [8 P3].

Nagel e Newman (2015) apontam também para os excessos de formalização e simbologias na matemática, quando entendem que, a matemática quando apresentada apenas como capítulo da lógica [4 P3] aparenta ser uma exploração das implicações independentes de significados na língua materna [5 P3]. Tem-se que evitar um distanciamento absoluto da língua materna, quando se pensa no leitor para o qual se escreve. Por exemplo, no texto-solo quando após uma repetição incessante do termo *proposição*, suprimimos o termo do texto em alguns parágrafos [3 P3]. Quando acostumados a uma maneira de se referir como *proposições p*, *q* após uma prática de uso, manipulação e um contexto, quando passamos a utilizar apenas os símbolos *p* e *q* , afetaram as compreensões do texto-solo e das relações proposicionais?

Quando voltamos ao contexto educacional em termos da BNCC (2018) e Currículo da Cidade (SÃO PAULO, 2019) e consideramos as especificidades de cada ciclo [10 P3], [11 P3] são traçadas as competências e habilidades necessárias a serem desenvolvidas, bem como uma lista de objetos do conhecimento matemático. Estes objetos aparecem em diferentes anos de um mesmo ciclo ou de outros [10 P3]. Um objeto não se esgota em apenas um bimestre ou semestre um determinado ano escolar. A ideia do Currículo da Cidade (2018) é de que os conhecimentos sobre o objeto se ampliem ao longo de cada ciclo. Embora exista uma lista de objetos por ano e por ciclo, os documentos técnicos de currículo não determinam uma metodologia ou estratégia de abordagem para o objeto do conhecimento [11 P3]. O Currículo da Cidade (2018) lista e sugere diferentes estratégias, mas também não possui nenhuma determinação para cada conteúdo, ficando a cargo do docente o planejamento e escolha de estratégias.

Capítulo 5. Como trabalhar didaticamente as demonstrações matemáticas na educação básica?

Até este momento apresentamos nossa síntese e organização do que foi percebido pela análise hermenêutica realizada na construção das categorias abertas e do que estas nos revelam como indícios de resposta à nossa Interrogação Norteadora: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*

Da análise das categorias, algumas das respostas do texto-solo tratam especificamente do trabalho didático da demonstração matemática, vamos retomá-las:

> Entretanto, "quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que apreender. Vê-se o que o professor faz, e, então faz-se a mesma coisa." (BICUDO, 2002, p. 88). Estudantes, quando viram professores, têm o "saber fazer", mas não o "saber o quê" (BICUDO, 2002). "Para demonstrar teoremas, em geral, o que o professor concebia idéias(sic), e artifícios extraordinários, **tirados de não sei onde**, e, magicamente concluía, escrevendo c.q.d." (LOURENÇO, 2002, p. 101). [23 P1]
>
> Neste mesmo sentido, "[...] os estudantes precisam lidar com a demanda frequentemente paradoxal – de que eles entendem um fato embasado em suposições e definições dos quais não estão em posição de compreender seu escopo e implicações"[38] (HANNA; JAHNKE, 1993, p. 428) [24 P1].

Estas duas respostas falam principalmente de uma preocupação com a compreensão do estudante a respeito das demonstrações matemáticas. Neste aspecto, relembramos que alguns livros, quando apresentam proposições em meio a sua explicação, deixam a demonstração como exercício. Como neste exemplo sobre as propriedades da operação de soma de matrizes.

> Proposição 1.4.
>
> Se A, B e C são matrizes de uma mesma ordem $m \times n$, então:
>
> (i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*associatividade da adição*);
>
> (ii) $A + B = B + A$ (*comutatividade da adição*);

[38] Traduzido de: "[...] learners must cope with the demand –often felt to be paradoxical – that they understand a fact on the basis of assumptions and definitions whose scope and implications they are in no position to grasp."

(iii) $A+0=A$, *onde* 0 *denota a matriz nula* $m \times n$ (*elemento neutro*);

(iv) $A+(-A)=0$ [elemento oposto]

DEMONSTRAÇÃO.

As propriedades acima decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes. Por esta razão provaremos apenas o item (i) e deixaremos (ii), (iii) e (iv) como exercício (veja Problema 1.10).

(i): Se $A = [a_{ij}]$, $B = [\, b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, então

$A + (\, B + C) = [a_{ij}] + [\, b_{ij} + c_{ij}] = \left[[a_{ij}] + (b_{ij} + c_{ij})\right] =$

$[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [\, a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A+B) + C,$

Onde usamos a associatividade da adição de números reais.

(HEFEZ; FERNANDEZ, 2016, p. 14-15, grifos dos autores)

Outro exemplo com relação às propriedades das classes residuais, classes dos possíveis restos de divisões euclidianas nos números inteiros, onde o autor diz que "[...] Deixamos a demonstração desse importante fato a cargo do leitor, para a qual utilizará a Proposição 9.1." (HEFEZ, 2016, p. 227).

Ambos os exemplos sugerem caminhos para a demonstração, mas não a realizam.

Ou ainda, alguns livros que demonstram uma proposição de forma direta, nos termos do Quadro 10, porém deixam a cargo do leitor a compreensão total dos passos, ao qual ocorre o que Lourenço (2002) chama de "artifícios extraordinários", como na demonstração a seguir a respeito das raízes racionais de um polinômio de coeficientes inteiros.

Consideramos um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ com coeficientes inteiros, ou seja, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. A seguinte proposição é útil em muitas situações.

Proposição 9 – Mantida a notação das considerações anteriores, se um número racional $u = \frac{r}{s}$, representado na forma irredutível (isto é, $mdc(r,s) = 1$), é raiz de f, então $r \mid a_0$ e $s \mid a_n$. [$r \mid a_0$ lê-se "r divide a_0]

Demonstração – Como $f(u) = 0$, então:

$a_0 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n = 0$

Multiplicando-se ambos os membros por s^n:

$a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0$ **(6)**

Pondo s em evidência na soma dos primeiros n termos do primeiro membro e passando para o segundo o último termo, temos

$$s(a_0 s^{n-1} + a_1 r s^{n-2} + a_2 r^2 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}) = -a_n r^n$$

Isso mostra que $s \mid a_n r^n$. Como s é primo com r^n(pois é primo com r, por hipótese), então $s \mid a_n$.

A demonstração de que $r \mid a_0$ segue a mesma ideia: colocar r em evidência na soma dos n últimos termos de **(6)**, passar $a_0 s^n$ para o segundo membro e depois usar o fato de que, se um número inteiro divide um produto de dois fatores e é primo com um deles, então esse número divide o outro.

(DOMINGUES; IEZZI, 2018, p. 321)

Esta demonstração apresenta que a partir da definição de raiz de um polinômio, então o valor numérico do polinômio será zero. A partir daí não explica o motivo de multiplicar ambos os membros por s^n. A explicação é que a hipótese fornece a expressão algébrica do polinômio e uma raiz racional desta, já a tese relaciona aspectos de divisibilidade. Cabe aqui destacar que a notação “ $r \mid a_0$” embora facilite dizer que “r divide a_0” não fornece elementos ou propriedades da relação, que foram utilizadas na demonstração. Dizer que “r divide a_0” é o mesmo que dizer que para algum valor, digamos, “n”, temos que “$n.r = a_0$”. Tao (2015) afirma que, as vezes, a chave para resolver um problema é adotar uma notação adequada. Nesta diferente maneira de escrever, temos que se um elemento divide a outro, deve ser possível escrever na forma de um produto. E, é desta maneira que é feita a demonstração. Porém, já pressupõe que o leitor esteja familiarizado e consiga preencher a lacuna de onde saiu a necessidade de se multiplicar ambos os membros por s^n. Mas ainda pode ficar a dúvida por que a multiplicação por s^n e não outro valor.

Aqui entra o papel do planejamento do docente, na questão como trabalhar com as demonstrações sem que pareçam ao aluno truques de mágicas onde tudo se encaixa perfeitamente e lidar com a situação explicitada por Hanna e Jahnke (1993), de que estudantes possam não compreender completamente o escopo e as implicações das proposições demonstradas.

Retomemos para discussão os aspectos da demonstração matemática elencados pela análise das categorias abertas necessários para o trabalho didático, são: *(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática*. Estes aspectos foram enunciados separadamente, embora sejam indissociáveis. Assim, o(a) docente de matemática precisa compreender o que entende e planeja ao considerar cada aspecto.

Vamos explorar um pouco estes aspectos e retomar algumas das discussões apresentadas anteriormente. A começar pela *(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades*. Ao longo do texto-solo foram apontadas diferentes finalidades para as demonstrações matemáticas, onde uma demonstração pode apresentar mais do que uma finalidade, e podem ser resumidas por Silva (2002) como: Lógico-epistemológica; retórica; e heurística.

A finalidade Lógico-epistemológica, como já afirmamos anteriormente, objetiva a enunciação de verdades que irão compor o corpo do conhecimento matemático. Desta finalidade se ocupam os matemáticos profissionais e a matemática desenvolvida nas academias e produções acadêmicas. Para esta finalidade é necessária uma demonstração formalmente conduzida. Ao mesmo passo que, considerando o Teorema da Incompletude de Gödel tem noção da impossibilidade de total formalização da matemática. Assim,

> Sua tarefa [dos matemáticos] está clara agora: não devem eles gastar tempo e energias na busca do fogo fátuo da verdade que constantemente lhes foge das mãos. Ao contrário, deverão encarar suas criações pela óptica da utilidade e da adaptabilidade às

> circunstâncias, com o espírito sempre aberto a possíveis métodos que possam levar a esses fins. O fato de certos métodos levarem a contradições, quando usados indiscriminadamente, não significa que devam ser abandonados; tal situação apenas aponta para a necessidade de determinar as áreas nas quais esses métodos se mostram seguros. (STEEN, 1979 *apud* DOMINGUES, 2002, p. 66)

Essa citação de Steen se mostra condizente com as falas de Silva (2002) e Garnica (2002) de que uma demonstração formal e logicamente completa é ideal. Já Hanna e Jahnke (1993) acrescentam ao argumento que muitas demonstrações “óbvias” quando feitas formalmente não convencem o leitor de sua veracidade.

O que nos leva à segunda finalidade de uma demonstração, sua finalidade retórica, sua capacidade de convencer aos outros da veracidade de um teorema. Nasser e Tinoco (2001) exemplificam ao afirmar que algumas demonstrações ainda que perfeitamente construídas e justificadas não fornecem uma indicação do porquê o resultado é verdadeiro, citando as demonstrações por absurdo e as demonstrações por indução finita. Para aqueles em treinamento matemático, como estudantes da educação básica ou de graduação, a demonstração formal pode não convencer da veracidade.

A finalidade heurística, descrita por Silva (2002), entende que a demonstração pode induzir ideias matemáticas. Hanna e Jahnke (1993) argumentam que a maneira com a qual se apresenta e se argumenta uma demonstração permite que sejam observados diferentes aspectos do teorema. Os autores falam de um caráter restrito (considerando apenas os aspectos formais da matemática) e um caráter amplo (considerando-se as aplicações intra e extra matemática). A escolha de um caráter para tratamento de uma demonstração determinará o que será mostrado aos discentes de um determinado teorema.

Deste aspecto da demonstração, compreendemos que é necessário ao docente conhecer as justificativas, os métodos de demonstração, bem como a lógica que as subjaz. Garnica (2002) descreveu a importância da demonstração como compreensão do próprio fazer matemático. Indo além, é necessário também o discernimento do docente em seu planejamento considerando o nível de ensino e a finalidade desejada para sua a demonstração matemática. Uma demonstração tratada na educação básica deverá ter uma finalidade diferente da demonstração numa graduação em matemática (licenciatura ou bacharelado), e também diferente uma demonstração em formação continuada de professores ou numa pós-graduação.

O papel docente no planejamento didático deve ser o de considerar o nível de ensino e qual finalidade, lógico-epistemológica, retórica, heurística ou uma combinação destas, será dada a demonstração. Deve-se ter clara esta noção em seu planejamento. Em nosso entender com base na análise do capítulo anterior e em nossa prática docente, para a educação básica, o planejamento deve focar as finalidades retóricas e heurísticas; em particular com a função heurística, apresentar demonstrações tanto no caráter restrito, como no caráter amplo, ou seja, ora apresentar a estrutura, ora considerar as aplicações.

Este papel docente dá sequência aos aspectos da demonstração quando consideramos *(b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal*. No Caso da educação básica, considerando a BNCC (2018) e o Currículo da Cidade (2019) o(a) docente pode optar pela abordagem dada a cada objeto do conhecimento, embora visando as competências listadas nos Quadros 13, 15 e 16.

Ao optar pelo uso de demonstrações matemáticas o docente necessita de justificativas. Uma primeira justificativa para o uso de demonstrações é a limitação humana, justificativa essa já encontrada na história da demonstração. Na impossibilidade de se verificar infinitos casos possíveis é necessária uma maneira diferente de se argumentar. Quando temos um número finito de casos, pode-se, por exaustão, verifica-los um a um, ainda que leve tempo é um processo viável, mas com conjuntos infinitos o mesmo não é possível. Assim a demonstração permite-nos falar de casos gerais que não podem ser verificados individualmente. Ainda que com limitações é uma ferramenta extremamente útil. Tal noção é passível de ser discutida com estudantes da educação básica, mesmo com aqueles mais jovens.

Os documentos de orientação dos currículos reconhecem a importância das demonstrações na construção matemática e os relacionam com competências. Uma competência para Perrenoud (1999) requer uma sinergia e capacidade de mobilizar diferentes recursos cognitivos. Nasser e Tinoco (2001) listam habilidades relacionadas

> [...] para a compreensão, construção e avaliação de provas:
>
> (a) entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
>
> (b) detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;

> (c) utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado alcançado;
>
> (d) reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
>
> (e) interpretar corretamente condições e afirmativa;
>
> (f) apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência;
>
> (g) reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição;
>
> (h) ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento. (NASSER; TINOCO, 2001, p. 7)

Esta lista de habilidades se relaciona com a lista de competências descrita, a demonstração se apresenta como mais uma ferramenta do trabalho docente para o ensino da matemática. Em nível de educação básica, compreendemos que embora seja uma estratégia válida, não é necessário que todos os objetos do conhecimento matemático recebam este tratamento. As competências listadas nos documentos orientadores de currículo não podem ser cumpridas em sua totalidade somente fazendo uso das demonstrações matemáticas.

As autoras Nasser e Tinoco (2001) utilizam prova e demonstração como sinônimos. Morais Filho (2018) aponta para a diferença entre prova e demonstração, compreendendo, como nós, prova como evidência de um fato e demonstração como o processo lógico. Tais concepções também precisam ser explicitadas e discutidas com os discentes. Assunto este do qual tratam os aspectos *(c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada* e *(d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas*. Estes pontos são mais próximos entre si do que os outros.

O aspecto *(c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotado*. Historicamente os modos de se demonstrar mudaram a depender da necessidade e do que se considerava como verdadeiro. Na geometria Euclidiana, entre os gregos, a auto evidência do ponto e da reta não era questionada. Métodos Aristotélicos que partiam de casos particulares e anunciavam uma verdade geral também eram considerados como válidos. Com os anos e as mudanças do método axiomático-dedutivo a concepção e o modo de se construir uma demonstração matemática foi se alterando. Atualmente, considerando o método axiomático-dedutivo formal podemos dizer que todo livro técnico possui um papel lógico-epistemológico? Cremos que os exemplos apresentados apontem para uma resposta negativa. Algumas demonstrações omitem passos ou apenas fazem referencias a propriedades e esperam que o leitor complete os passos. Do ponto de vista de um trabalho didático, principalmente focado na educação básica, mas não só, fica a pergunta em quais implicações isto gera no processo de ensino-aprendizagem não só do objeto matemático em questão, mas também da própria cultura de demonstração.

Quando pensamos nos aspectos levantados por Hannah e Jahnke (1993) e por Lourenço (2002), de que muitas vezes as demonstrações se apresentam como ferramentas e os passos são mistificados ou ainda as demonstrações são apresentadas para estudantes que não possuem bases para compreensão dos argumentos ou das implicações do que está sendo demonstrado, qual é o sentido da demonstração nesse caso? Para nós fica claro, que o papel docente frente ao estudante, somando aos anteriores, é explicitar e esclarecer qual é a noção de demonstração e como esta deve ser construída, apresentar os argumentos lógicos e apresentar os métodos, listados anteriormente no Quadro 10. Desta maneira colocando o(a) discente frente a demonstração, numa situação na qual a demonstração se apresenta como algo a ser desvelado ou resolvido, não somente apresentado.

E não cremos que apenas deixar demonstrações como exercícios seja capaz de colocar estudantes frente a demonstração, mas fornecer instrumentos que os levem a pensar e refletir sobre o que significa demonstrar, pensar nos motivos, dentre eles, retomando as justificativas para a demonstração do aspecto apresentado a pouco.

O próximo aspecto, *(d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas,* se relaciona intimamente com a construção da demonstração, pois trata da explicitação da estrutura de argumentação adotada como válida. A construção de uma demonstração requer, como visto nas definições anteriormente, uma sequência lógica de argumentos. É necessário num trabalho didático que o modo de escolha, de encadeamento e de validade dos argumentos seja explicitado ao estudante.

Dentre as demonstrações listadas neste trabalho, algumas consideram afirmar “pela propriedade tal, temos que....” e o leitor precisa entender a relação da propriedade com a demonstração. Ou a noção de demonstração por absurdo, na qual negamos a tese e buscamos pela negação da hipótese. Por quais motivos este método de argumentação vale? Quando devemos fazer uso deste método? Por que usar este método e não outro?

É importante deixar explícita a lista de argumentos válidos e as justificativas de validade destes argumentos. Essa explicitação novamente coloca o aluno frente a demonstração podendo compreender “todas as regras do jogo”, afastando novamente aquela sensação de, ao ver um docente demonstrar uma proposição, que se faz uso de “truques mirabolantes”.

Considerar a capacidade de argumentação e a compreensão de objetos matemáticos por parte dos estudantes também faz parte do papel docente. Ainda que não se vá trabalhar com uma demonstração *per se*, Nasser e Tinoco (2001) defendem a importância de argumentação em todas as atividades matemáticas. Bem como listam estratégias que levam discentes a desenvolverem habilidades de argumentação:

> - após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema;
> - avaliar justificativas apresentadas por outros estudantes;
> - problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico são sempre propostos, não importa o tópico que esteja sendo abordado;
> - o mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas;
> - uso do computador (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la, ou a procurar um contra-exemplo.
> - Atividades que ajudam a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa têm sido usadas em cursos de formação de professores e de especialização. (NASSER; TINOCO, 2001, p. 9-10).

As autoras também falam de provas ingênuas, na forma de justificativas consideradas válidas para o nível de ensino. Por exemplo, um aluno de educação básica ser capaz de perceber uma propriedade por meio de observação e/ou investigação é um avanço. Ainda que seja necessário demonstrar uma propriedade, para a matemática da academia, o estudante encontra-se convencido de sua veracidade. Cabe ao docente conseguir instigar e sugerir ao discente a verificação, os motivos que justificam essa propriedade ou um contraexemplo.

Para realizar esta tarefa é necessário ao docente um conhecimento dos diferentes tipos de argumentação dos quais os estudantes são capazes. Neste sentido, faz-se necessário nos cursos de licenciatura que o futuro docente saiba construir demonstrações formais, mas se familiarize com as possibilidades de argumentações de diferentes níveis de ensino. Conseguir reconhecer no argumento do aluno a noção matemática, verificar sua validade ou falsidade e saber orientar o aluno a partir de seu argumento são competências[39] fundamentais para o docente trabalhar as demonstrações e argumentações em sala de aula.

Nasser e Tinoco (2001) listam diferentes atividades voltadas para treino de argumentação e demonstração matemática, todas testadas com estudantes do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, respostas dos estudantes e comentários para docentes. Um exemplo é enunciado como:

> *Pedrinho tem 6 pares de meias brancas e 6 pares de meias pretas. Como é muito desorganizado, guarda as meias soltas e misturadas na gaveta.*
>
> *Pedrinho queria ir ao Shopping à noite e na sua casa não havia luz. O quarto estava escuro.*
>
> *Quantos pés de meias Pedrinho teve que tirar da gaveta para ter certeza que tirou um par de meias da mesma cor?*
>
> (NASSER; TINOCO, 2001, p. 88, grifo das autoras)

O problema acima é um caso do Princípio das Gavetas de Dirichlet[40], onde tendo 12 meias brancas e 12 meias pretas, se ele quisesse ter a certeza de ter tirado duas meias da mesma cor, bastaria retirar 13 meias quaisquer. Porém, mesmo sem conhecer o princípio, os estudantes podem pensar e argumentar sobre a situação. É possível se argumentar que existe o caso onde ele tiraria duas meias de mesma cor nas duas primeiras tiragens. E realmente existe, porém não é uma certeza. As autoras acrescentam que se pode aumentar o número de cores de meias, ou mesmo, a depender da idade dos estudantes, realizar experimentalmente o problema. Aqui os estudantes

---

[39] Competência no sentido dado a elas por Perrenoud (1999). Neste mesmo trabalho o autor destaca que os currículos da educação básica tem cada vez mais se pautado por competências com o apoio das universidades. Porém, as universidades e seus currículos ainda não se organizam majoritariamente em termos de competências.

[40] Este princípio pode ser enunciado como: “Se $n + 1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto” (MORGADO; CARVALHO, 2015, p. 166).

deveriam perceber que dada uma quantidade n de meias, seriam necessárias sempre $n+1$ tiragens para garantir a certeza da repetição.

Um problema não necessariamente precisa de uma solução, como no caso a seguir:

> *João e Pedro, ao saírem de uma festa, tomaram um mesmo táxi. Pedro saltou no meio do caminho e o valor total da corrida foi R$ 12,00. Quanto deve pagar cada um deles?* (NASSER; TINOCO, 2001, p. 84)

Este problema foi apresentado a vários anos do ensino fundamental e ensino médio e aparecerem diferentes respostas mesmo de uma mesma turma. As três principais respostas são do tipo, "Cada um paga R$ 6,00"; "O que parou no meio do caminho paga a metade de R$ 6,00 ou a metade da metade e o outro paga o que restou [R$ 9,00]"; e "Pedro R$ 4,00 e João R$ 8,00, porque João andou o dobro do Pedro" (NASSER; TINOCO, 2001, p. 84-85). Essas afirmações fazem usos de diferentes argumentos, seja em língua materna, expressão gráfica (desenhos) ou equações. A ausência de resposta fixa para este problema é incômoda tanto para estudantes como professores, segundo as autoras, mas abre espaço as argumentações e uma discussão retórica de convencimento. É um exemplo que abre possibilidades em sala de aula.

Outro exemplo de discussão de argumentação são padrões em sequências numéricas, exercício frequentemente presente em livros didáticos, apresentado como

> *Observe a sequência* *1º* - 1
>
> *2º* - 3
>
> *3º* - 5
>
> *4º* - 7
>
> *5º* - 9
>
> ...., *e responda:*
>
> *Qual é o 10º número ímpar? E o 1000º? Justifique sua resposta.*
>
> (NASSER; TINOCO, 2001, p. 68)

As autoras falam da aplicação desta atividade para alunos da 5ª série (6º ano) e 8ª série (9º ano) e comentam das respostas e dos tipos de argumentos. Para o 10º termo da sequência é viável que se continue a sequência até encontrar o valor 19, mas, ainda que este método também resolva para determinar o 1000º termo, seria trabalhoso.

Alguns alunos do 9º ano apontaram a expressão $(2n - 1)$, onde n é a posição do termo, respondendo o problema de modo algébrico, criando uma regra geral. No 6º ano, as autoras contam de um aluno que acertou o 1000º termo e a professora o testou com outros valores, quando verificou que ele acertava, perguntou como o fez, ao qual a resposta foi "multipliquei por 2 e diminui 1", o que de fato é a generalidade expressa também no 9º ano, porém em língua materna, uma vez que aluno ainda não tinha tido contato com expressões algébricas. Este exemplo mostra a importância de se trabalhar com estudantes problemas e argumentações mesmo que na ausência de uma formalização da linguagem matemática.

Com relação aos exemplos de demonstrações as autoras, Nasser e Tinoco (2001), escrevem que em suas experiências com seu trabalho após desenvolver atividades de argumentação com os estudantes, estes se sentiam mais confiantes para tentar realizar demonstrações formais. E afirmam que com relação a atividades de argumentação e demonstração

> [...] vale salientar a importância de o aluno fazê-las por si. Não faz o menor sentido o professor fazer as demonstrações para o aluno apenas memorizar. Algumas vezes, em demonstrações mais complexas, [...], é importante que o professor leve o aluno a perceber em que ponto está a dificuldade da demonstração ou o porquê de tomar um caminho e não outro. Mas no início, o mais adequado é orientar o aluno que tem dificuldade com perguntas, até que ele consiga alguma prova, mesmo que não seja perfeita ou completa. (NASSER, TINOCO, 2001, p.93)

Como as autoras afirmam, tanto na lista anterior, como nesta citação, a importância do aluno estar frente ao problema e buscar por soluções embasadas em argumentos. Os trabalhos em grupo permitem que os alunos apresentem seus argumentos ao crivo dos colegas, convencendo-os ou não, afirmam que compartilhar suas ideias auxiliam os alunos a organizá-las.

Nasser e Tinoco (2001) apresentam demonstrações de propriedades de triângulos isósceles, bissetriz de ângulos, soma dos ângulos interno, propriedades de quadrados e retângulos. Todas as demonstrações aplicadas a estudantes do 9º ano, a serem realizadas de modo formal e com notações matemáticas usuais. Comentam ainda que em turmas de 7ª série (8º ano), evitaram as expressões "prova" ou "demonstração" nos enunciados, para evitar resistência dos alunos a problemas.

Sobre estas demonstrações as autoras tecem algumas considerações (NASSER; TINOCO, 2001): o erro mais comum cometido por estudantes que começam o aprendizado de demonstrações é “[...]o uso do resultado que se quer provar durante a demonstração” (p.94); Outro erro comum é o de chamar de tese as definições já conhecidas de objetos, no exemplo um aluno tomou as definições de quadrado e retângulo como “teses” para começo de sua argumentação; outro erro constante foi a representação objetos diferentes por uma mesma letra, no caso foram dois ângulos de medidas distintas; Para algumas demonstrações, como determinar a razão entre as áreas de triângulos semelhantes, para os estudantes partir do conhecimento da razão entre os lados e implicar na mesma razão para a altura dos triângulos pode ser um salto muito grande de compreensão, assim as autoras falam do docente estipular passos, na forma de itens do problema, que guiem os estudante, “Este procedimento é recomendável sempre que houver uma etapa da demonstração que não seja clara para os alunos” (p. 100); Embora discutam que muitos estudantes ainda não irão perceber a relação entre os itens de um problema criado desta maneira, “[...] neste caso, o professor deve fazer isto explicitamente, deixando depois que eles escrevam as suas próprias justificativas” (p.101); Em uma das atividades as autoras perceberam uma dificuldade dos estudantes em organizarem as ideias usando a linguagem matemática e a língua materna simultaneamente, apresentam o caso de um estudante que escreveu toda uma demonstração corretamente em linguagem matemática e depois a transcreveu para língua materna; e para uma resposta de um estudante em uma demonstração as autoras escrevem que “[...] embora ainda contenha imperfeições, é bastante satisfatória para um aluno de ensino fundamental. Ela demonstra um nível de raciocínio lógico-dedutivo muito alto” (p. 98).

As considerações elencadas foram principalmente em torno dos erros mais comuns cometidos por principiantes e papel docente, como separar a demonstração por passos, questionar argumentos dos estudantes e avaliar as demonstrações com base no nível de ensino. Dentre os erros, alguns foram abordados quando citamos a necessidade de explicitar aos estudantes as regras e a forma de uma demonstração. Outros erros são relacionados ao uso da linguagem matemática ou da língua materna explicitando ideias matemáticas.

Assim, o último aspecto a ser considerado para o trabalho didático com demonstrações se refere *(e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre* *matemática*, indiretamente já comentamos um pouco deste aspecto em alguns dos exemplos de atividades de argumentação e demonstração. Entendemos que não somente o tratamento dado a uma demonstração revela diferentes dimensões do objeto matemático, mas também a linguagem, na linguagem matemática, ou na língua materna, na qual é escrita afeta a compreensão e as dimensões do objeto. Morais Filho (2018) discute o que chama de redação matemática, como escrever resultados matemáticos e afirma que a escrita, em particular é tão importante quanto o resultado em si, entendemos que trata da construção e da finalidade retórica para as demonstrações. O autor fala da importância de saber comunicar ideias com clareza e concisão.

A maneira de se expressar uma ideia deve-se adaptar ao público para o qual o interlocutor se dirige. Num meio acadêmico, onde os participantes acordam em símbolos específicos para definições específicas e combinam os termos na língua materna o diálogo torna-se facilitado. Em sala de aula cabe ao professor saber balancear o uso de uma linguagem matemática formal, fazendo mais uso da língua materna. Entretanto, professores por diversas vezes possuem uma ânsia de responder e sanar dúvidas e acabam por utilizar explicações que não condizem com definições aceitas. Seria então necessário formalizar mais as aulas de matemática da educação básica, uma vez que símbolos têm suas definições explícitas? Acreditamos que não. Quando, considerando o exposto sobre argumentações válidas e considerando os níveis de ensino da educação básica, a simples ampliação no uso de símbolos apenas passa o problema da língua materna para a linguagem matemática. Principalmente quando consideramos os discentes mais jovens dos primeiros anos do ciclo de alfabetização do 1º ao 3º ano (SÃO PAULO, 2019) que ainda estão adquirindo uma competência leitora na língua materna.

Existe uma necessidade de trabalhos que favoreçam as competências de argumentação para os discentes que podem e devem ser feitos na língua materna introduzindo a linguagem matemática gradualmente. As demonstrações matemáticas podem ser realizadas e argumentadas na língua materna. Tal construção permite ao estudante perceber os aspectos da matemática que entrelaçam com o mundo no qual vive, que novamente se relaciona com as competências da BNCC (2018).

5.1. Síntese de transição de diretrizes didáticas

Os cinco aspectos da demonstração matemática advindos da análise das categorias: *(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática,* quando sob o foco da interrogação norteadora da pesquisa: *Como trabalhar didaticamente as demonstrações matemáticas na educação básica?* nos conduzem a uma síntese de transição de diretrizes didáticas que devem balizar o planejamento didático e o trabalho didático propriamente dito sobre as demonstrações matemáticas na educação básica.

(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades;

- Conhecer as finalidades da demonstração matemática: Lógico-epistomológica, retórica ou heurística (caráter restrito ou caráter amplo);
- Conhecer a definição de demonstração a partir da finalidade;
- Conhecer as diferenças entre prova e demonstração;
- Conhecer as técnicas de demonstração e suas justificativas lógicas;
- Conhecer as limitações do método axiomático-dedutivo;
- Ao escolher uma demonstração para uso em aula saber qual sua finalidade e o que dimensões do objeto do conhecimento serão apresentadas.
- Explicitar para os discentes as concepções, definições, técnicas e limites da demonstração matemática de modo apropriado ao nível.

(b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal;

- Entender e abordar em sala as limitações humanas e a necessidade de demonstrações;

- Entender e explicar aos discentes as diferenças de casos particulares e regras gerais;
- Conhecer as possibilidades do trabalho de demonstrações no desenvolvimento das competências esperadas para o componente de matemática nos documentos orientadores de currículo.

(c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada;

- Reconhecer que a definição e a concepção de demonstração são um processo histórico e social do ser humano;
- Entender que as diferentes finalidades de demonstrações têm seus usos em situações específicas;
- Explicitar aos discentes as técnicas de demonstração e modo de construção de uma demonstração;

(d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas;

- Conhecer os argumentos válidos para a matemática formal;
- Conhecer as provas e argumentações ingênuas que os estudantes podem apresentar;
- Conhecer os erros mais comuns cometidos por estudantes, em particular pelos iniciantes em argumentações e demonstrações;
- Pensar nos problemas apresentados e criar passos nos itens do problema para facilitar o processo de demonstração, sempre que necessário.
- Favorecer trabalhos em grupos e permitir que os alunos exponham suas ideias com o objetivo de que saibam organizá-las;
- Saber reconhecer as noções matemáticas nos argumentos utilizados por alunos e corrigir conforme necessário;
- Explicitar aos discentes quais de seus argumentos são provas ingênuas e quais constituem argumentos válidos na argumentação matemática ou numa demonstração matemática formal.

(e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática.

- Considerar os aspectos a língua materna e as regras gramaticais ao tratar um assunto matemático;
- Evitar uso de palavras fora do uso comum ao se referir a termos matemáticos;
- Tratar a linguagem matemática sempre em comparação com a língua materna, principalmente nos ciclos iniciais;
- Reconhecer a influência da linguagem utilizada pelo docente na compreensão do conhecimento matemático pelos estudantes.

Considerações Finais

Antes de fazermos nossas considerações finais acerca da pesquisa realizada, vamos traçar alguns dos pontos principais da construção e organização deste trabalho.

A construção da interrogação norteadora desta pesquisa deu-se em torno de uma reflexão sobre o conhecimento matemático em suas bases filosóficas e do papel docente na construção do conhecimento de e sobre matemática. A interrogação norteadora surgiu como sugestão de caminho a ser trilhado na busca de respostas para a inquietação que nos moveu a reflexão. Direcionamo-nos à demonstração matemática dada a importância a ela atribuída na construção do corpo de conhecimento matemático. Considerando esses aspectos enunciamos nossa interrogação norteadora: *Como trabalhar didaticamente as demonstrações matemáticas na educação básica?*

Conforme Bicudo (2012) explica, a interrogação norteadora explicita uma complexidade interrogação-interrogado-quem interroga que evidenciamos juntamente com a interrogação norteadora no primeiro capítulo e ao longo de todo o trabalho foi reiterada. "A interrogação se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido" (BICUDO, 2012, p.20). Assim, a todo passo dado voltamos a constatar qual seria o norte percebido na interrogação. Destacamos ainda que

> A interrogação é diferente da pergunta, que indaga, solicitando esclarecimentos e explicitações; do problema, que explicita a pergunta, problematizando uma situação de maneira mais discursiva ou colocando as variáveis já determinadas que o constitua sob a forma de uma equação algébrica; da hipótese colocada sob suspeita, cuja confirmação ou negação fica por conta da pesquisa efetuada. Compreendemos que a interrogação subjaz a essas modalidades e que formular problemas, hipóteses e perguntas são maneiras de assumir perspectivas a partir das quais a interrogação será perseguida. Ela diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, perquirindo, não se conformando com respostas quaisquer. (BICUDO, 2012, p.21)

A partir da construção da interrogação norteadora, traçamos os caminhos da pesquisa embasados na Hermenêutica Filosófica como descrita por Kluth (2005, 2007). Este caminhar hermenêutico na tradição da demonstração matemática expressa nos livros de matemática que usam e explicam demonstrações construiu o texto-solo e revelou os indícios de resposta as perguntas subjacentes a interrogação norteadora, apresentados no terceiro capítulo e organizadas no Anexo I, e consequentemente, no momento seguinte de análise, as categorias abertas e sua análise, no quarto capítulo.

As categorias abertas e o que elas nos revelam do fenômeno do trabalho didático das demonstrações matemáticas na educação básica permitiu a discussão, a luz da tradição matemática e da literatura específica, e nossa síntese das diretrizes didáticas, apresentadas no quinto e último capítulo do presente trabalho. São cinco diretrizes didáticas principais: *(a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática.*

Estas diretrizes foram escritas e expandidas, anteriormente, em termos de aspectos elencados que remetem ao texto-solo e à própria tradição da demonstração matemática, seja passada ou atual, mas sempre de construção humana e coletiva.

Acreditamos que as diretrizes aqui apresentadas possam auxiliar o docente de matemática da escola básica em seu planejamento didático no trato de argumentações e de demonstrações matemáticas em sala de aula na educação básica.

Por outro lado, este trabalho nos releva possibilidades de novas pesquisas, dentre estas, de ordem mais prática, nas quais poderemos elaborar e avaliar atividades de argumentação e demonstração orientadas pelos aspectos elencados em nossa *Síntese de transição de diretrizes didáticas* que reafirmam a importância das argumentações e das demonstrações no ensino da matemática sem desconsiderar a necessidade das diversas naturezas de cada ciclo de ensino e dos parâmetros curriculares estabelecidos pelo sistema educacional e pela sociedade, que vão além daquelas do conhecimento matemático.

Alertamos, no entanto, que cada etapa do ensino de argumentações e demonstrações, quando realizadas como ¨provas ingênuas¨ devem ser coerentes com o rigor do fazer matemático que encaminha ao aprendizado das demonstrações matemáticas, porque, muitas vezes, as ¨provas ingênuas¨ nos enlaçam em um encantamento fantasioso que nos conduzem também à “truques mirabolantes” que podem afastar o aprendizado do conhecimento matemático.

Entendemos, ainda, que nosso trabalho também possa ser utilizado nos cursos de formação inicial e formação continuada de professores de matemática ao considerar aspectos necessários para uma prática docente em conformidade com os documentos de orientação curriculares com os quais os docentes lidam constantemente.

Apesar de tudo que pudemos absorver e afirmar através de nossa análise sobre as demonstrações, temos plena ciência de que este trabalho não responde a todos nossos anseios e que esta pesquisa não esgota as potencialidades do trabalho didático com demonstrações matemáticas, assim como também não esgota nossas inquietudes com o ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

BATISTELA, Rosemeire de Fátima ; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. THE IMPORTANCE OF TEACHING GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREM IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION. In: **Philosophy of Mathematics Education Journal**, v. 1, p. 1-13, 2018.

BATISTELA, Rosemeire de Fátima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. O QUE DIZ O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA. In: **Educete et Educare** (versão eletrônica), v. 14, p. 1-24, 2019.

BICUDO, Irineu. **Demonstração em Matemática**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Rev. Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.** v. 5, n.2, p.15-26, mai./ago, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação É A Base**. Ministério da Educação MEC/ CONSED/UNDIME. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 31/01/2020.

CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina Maria; FIORENTINI, Dario. **O PROFMAT e a Formação do Professor de Matemática: uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 30, n. 56, set./dez. 2016

DIAS FILHO, Carlos Alberto Tavares. **Softwares Livres Sobre Funções Matemáticas: Algumas Potencialidades Educacionais Matemáticas**. 2014. 87p. (Trabalho de Conclusão de Curso, Ciências – Matemática). Orientadora: Profa. Dra. Verilda Speridião Kluth. Universidade Federal de São Paulo, Diadema, 2014.

DOMINGUES, Hygino H. **A Demonstração ao Longo dos Séculos**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa. **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemática e que práticas formativas?**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 27, n. 47, p.917-938, dez. 2013.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **As Demonstrações Em Educação Matemática: Um Ensaio**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002

HANNA, Gila; JAHNKE, H. Niels. **Aspects of Proof**. In: Educational Studies in Mathematics. Vol. 24. n.24. p.421-438. 1993.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. **Introdução À Álgebra Linear**. 2ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEURÍSTICA. In: MICHAELIS MODERNO Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos Ltda, 2015. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/heur%C3%ADstica/> Acesso em: 20 mar. 2020.

KLUTH, Verilda Speridião. **ESTRUTURAS DA ÁLGEBRA:** Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Coorientador: Prof. Dr. Jairo José da Silva. 2005.

______________________. **O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma visada fenomenológica**. In: Bolema, Rio Claro – SP, n. 28. 2007.

LOPES, Alice Casimiro. **Teorias de currículo**. Cortez Editora, 2014.

LOURENÇO, Marcos Luiz. **A Demonstração com Informática Aplicada à Educação**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**. 3. Ed. São Paulo: Cortez, 1991.

MENEGHETTI, R. C. G.; BICUDO, I. O. **Uma discussão sobre a constituição do saber matemático e seus reflexos na educação matemática**. In: BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, ano 16, n. 19, p. 58-72, 2003.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um Convite à Matemática**. 3. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2016.

______________________________. **Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico de palavras usadas na matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NAGEL, James; NEWMAN, James R. **A Prova de Gödel**; tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2015.

NASSER, L. e TINOCO, L. A. A.. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. 1ª edição, 109 p. – UFRJ/Projeto Fundão, Rio de Janeiro, Brasil. 2001.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PERRENOUD, Phellippe. **Construir as Competências Desde a Escola**. 1ed. Porto Alegre: Penso, 1999.

SACHS, Línlya. **O Quinto Postulado de Euclides como História de Problemas**. In:Hipátia, Campos do Jordão –SP, v.1, n.1, dez. 2016.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Currículo da Cidade: Ensino Fundamental: componente curricular: Matemática**. – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED. 2019a. Disponível em: < http://portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/Portals/1/Files/50629.pdf>. Acesso em 07/09/19.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – Volume 1** – 2ed. São Paulo: SME/COPED, 2019b.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – Volume 2** – 2ed. São Paulo: SME/COPED, 2019c.

SILVA, Jairo José da. **Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002.

TAO, Terence. **Como resolver problemas matemáticos – Uma perspectiva pessoal**; tradução de Paulo Ventura. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática**. In: Bolema, Rio Claro – SP, v. 27, n. 47, p.939-953, dez. 2013.

Anexo I – Perguntas Geratrizes das Categorias Abertas e suas Respostas no Texto-solo

P1 - **Qual é o modo de ser da demonstração matemática?**

Código	**Trecho do texto-solo com indicativo de resposta**
[1 P1]	As demonstrações matemáticas podem ser definidas por seus usos ou por sua sequência lógica de argumentos.
[2 P1]	Um exemplo seria a proposição “a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º[41]” sua veracidade ou falsidade não pode ser tão somente demonstrada por uma simples investigação geométrica onde não existe a possibilidade de verificarmos todos os triângulos possíveis.
[3 P1]	Afirma-se que ele se valia de métodos gerais e para alguns casos de métodos empíricos, para mostrar a veracidade de proposições, algumas destas já conhecidas e admitidas como verdades no Egito.
[4 P1]	Domingues (2002) entende que é razoável supor-se que em maior parte do tempo a escola pitagóricas limitou-se a mostrar proposições e resultados partindo de casos particulares, nas áreas de geometria e aritmética. Entretanto, também é possível supor que havia uma sequência e relações entre as proposições, uma demonstração poderia tomar por base uma anteriormente demonstrada.
[5 P1]	Os métodos dedutivos utilizam de propriedades e noções da lógica, sistematizadas por Aristóteles. Como a Lei[42] da Não Contradição (uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo) e a Lei do Terceiro excluído (uma proposição deve ser verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade).
[6 P1]	O marco do qual os autores falam são os *conceitos primitivos* e os *postulados (axiomas)* adotados por Euclides. Partindo dos *conceitos fundamentais* de ponto, reta e plano, de modo que não precisem de definições formais (NETO, 2013).
[7 P1]	Assim, ao assumir proposições *p,q* pode-se relacioná-las utilizando qualquer conectivo e obter-se uma sentença composta, uma nova sentença que tem seu valor lógico dependente dos valores lógicos de suas partes. Porém, estas partes não precisam ser conhecidas em seus significados, uma

41 Neste texto pode-se assumir a definição usual de cada símbolo utilizado, a menos que explicitamente definido de outra forma.
42 Estas propriedades da Lógica são conhecidas tanto por Leis, como Princípios.

	vez que importa a relação entre as possibilidades de valores lógicos.
[8 P1]	A partir dos axiomas, verdades matemáticas tomadas como verdadeiras, são deduzidas outras proposições matemáticas. Este é o *método axiomático-dedutivo.*
[9 P1]	A intuição embora ferramenta chave nos trabalhos de Aristóteles e Euclides em suas deduções e argumentações para convencimento começou a apresentar limitações próximas ao final do século XIX.
[10 P1]	“Nos anos 1920, Hilbert e sua escola criaram a teoria da demonstração, um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema formal” (DOMINGUES, 2002, p.64). Para a prova absoluta de consistência de Hilbert, o primeiro passo era uma completa formalização do sistema: (a) eliminam-se todos os significados exteriores à matemática; (b) elege-se um catálogo de símbolos a serem utilizados; (c) são definidas as “Regras de Formação”, quais são as combinações válidas entre os símbolos; (d) são definidas as “Regras de Transformação” são a *regra de substituição* de símbolos, permite generalizar casos e substituir sequências de símbolos por outros unitários, e a *regra de destacamento*, de duas proposições p,q, quando p implica q, sempre é possível deduzir q a partir de p; (e) por fim, a seleção de proposições como axiomas. (NAGEL; NEWMAN, 2015).
[11 P1]	Este resultado afirma que a demonstração finita proposta por Hilbert, torna-se impossível.
[12 P1]	Este resultado tem importância fundamental para a lógica formal e para matemática, pois se esta, nas definições dos séculos XIX e XX, tem como objetivo a construção de demonstrações formais num método axiomático formalizado e abstrato, a existência de proposições verdadeiras não deduzíveis dos axiomas demonstra os limites do método axiomático. Estes limites estendem-se a impossibilidade de provar que diversos ramos matemáticos estão livres de inconsistências
[13 P1]	uma demonstração não fornece somente a dedução lógica, mas revela novas dimensões e aspectos do teorema demonstrado
[14 P1]	Além disso, os autores afirmam que na prática cotidiana de matemática esses caráteres são mantidos separados, porém aparecem entrelaçados e inseparáveis em duas situações: (a) momentos históricos quando algo novo emerge; (b) em salas de aula.
[15 P1]	A demonstração ocorre de forma direta, em termos do quadro 10, parte-se da hipótese para a tese, onde os argumentos utilizados são as propriedades das operações e uma soma pelo oposto de um termo. Porém, o texto não explicita a técnica de demonstração, em termos do quadro 10, utilizada e

	nem os princípios lógicos utilizados.
[16 P1]	Os argumentos não têm seus pormenores explicados, uma vez que se subentende que apontar a propriedade necessária seja suficiente para o leitor compreender a veracidade da proposição.
[17 P1]	Esta demonstração possui um caráter mais retórico do que formal matemático.
[18 P1]	Justificam, dada a capacidade limitada das pessoas de apreender informações, pormenores triviais e o uso de símbolos pode tornar as deduções mais compreensíveis, a medida que amplia a necessidade de conhecimento do leitor, permite que a escrita da demonstração seja focada na estrutura geral da nova construção.
[19 P1]	O autor afirma que seu objetivo com esta demonstração foi exemplificar e explicar a estrutura da lógica por detrás de uma demonstração (resolução de inequação no caso), bem como um alerta de toda a teoria envolvida. Nesta forma de demonstração fica claro o processo de dedução a partir de resultados anteriores. Independente dos quão "óbvios" pareçam alguns argumentos, ainda são proposições matemáticas.
[20 P1]	Uma redação bem feita de uma demonstração pode ser a diferença entre cumprir ou não suas funções lógico-epistemológicas e retóricas, pois a matemática não se constrói de modo individual.
[21 P1]	Entende a construção humana e histórica da matemática e em constante alteração. Aponta como seus fundamentos a construção lógica, investigativa e embasada em argumentos (lógicos) convincentes, só que, ao mesmo tempo, não é desconexa de outras ciências servindo de ferramenta na criação de modelos.
[22 P1]	Silva (2002) explora as funções da demonstração matemática, uma função *lógico-epistemológica*, tratando da capacidade de demonstrar formalmente e de modo logicamente perfeito uma proposição, expandindo o campo matemático; Uma função *retórica*, relacionada à capacidade de convencimento da validade da demonstração; e uma função *heurística*, como indutora de ideias matemáticas
[23 P1]	Entretanto, "quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que apreender. Vê-se o que o professor faz, e, então faz-se a mesma coisa." (BICUDO, 2002, p. 88). Estudantes, quando viram professores, têm o "saber fazer", mas não o "saber o quê" (BICUDO, 2002). "Para demonstrar teoremas, em geral, o que o professor concebia idéias(sic), e artifícios extraordinários, **tirados de não sei onde**, e, magicamente concluía,

	escrevendo c.q.d." (LOURENÇO, 2002, p. 101).
[24 P1]	Neste mesmo sentido, "[...] os estudantes precisam lidar com a demanda – frequentemente paradoxal – de que eles entendem um fato embasado em suposições e definições dos quais não estão em posição de compreender seu escopo e implicações"[43] (HANNA; JAHNKE, 1993, p. 428) .
[25 P1]	Os autores argumentam que uma demonstração matemática não apresenta uma prova absoluta de certeza em qualquer situação, mas é a ligação de fatos dentro de uma estrutura de um modelo hipotético determinado.
[26 P1]	O autor, ainda destaca que a demonstração rigorosa, e formal, com bases lógicas bem definidas e explícitas é ideal[44] e dirigida a uma justificação científica do conhecimento matemático (Matemática acadêmica, ou profissional; como o autor chama). A demonstração rigorosa passa a ser uma dentre as diferentes formas de se argumentar sobre o conhecimento matemático, dentre as diferentes matemáticas.

[43] Traduzido de: "[...] learners must cope with the deman –often felt to be paradoxical – that they understand a fact on the basis of assumptions and definitions whose scope and implications they are in no position to grasp."
[44] Termo utilizado no sentido platônico, ou seja, ideal enquanto pertencente ao mundo das ideias, um objetivo inatingível do qual podemos descrever e tratar sua forma sem reproduzir perfeitamente.

P2 - *É a demonstração Matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?*

Código	Trecho do texto-solo com indicativo de resposta
[1 P2]	Os povos babilônios e egípcios faziam uso de resultados (proposições) sem a necessidade de demonstração, a veracidade das proposições era dada a partir da confirmação com a realidade.
[2 P2]	Assim como os conceitos fundamentais, os postulados teriam sua validade garantida por uma auto evidência, perceptível e reconhecível pelo leitor.
[3 P2]	Séculos depois, na Idade Média a produção matemática mais substancial foi árabe e hindu, porém estes não se interessavam pelas demonstrações como os gregos.
[4 P2]	Iniciada por Cantor (1845 – 1918) em 1874, onde com uma definição vaga de conjunto e a possibilidade de tratar de um "conjunto de todos os conjuntos" acaba por incorrer em paradoxos.
[5 P2]	A BNCC, ao mesmo tempo em que, entende a matemática em seu método axiomático versando sob temas abstratos, fala também da importância heurística das experimentações e observações empíricas.
[6 P2]	"[...] Há uma diferença notável entre a apresentação indireta deu um objeto por meio de uma descrição e a experiência direta e imediata desse objeto" (SILVA, 2002, p.71).
[7 P2]	Esta concepção permite considerar diferentes construções e concepções de verdade em diferentes sistemas. Quando pensamos na matemática antiga egípcia e mesopotâmia a validade dos enunciados era dada por sua aplicação válida. A questão posta para a educação matemática é a reflexão sistemática sobre como pensar as argumentações e demonstrações, ou etnoargumentações, quando produzidas socialmente em salas de aula e discutidas sua validade.
[8 P2]	Entende assim "[...] que a *melhor prova que se pode oferecer para alguém*, sobre qualquer tema, *é o convencimento de que o fato é real*" (LOURENÇO, 2002, p. 103, grifos do autor).

P3 - *Como se dão os enunciados matemáticos?*

Código	Trecho do texto-solo com indicativo de resposta
[1 P3]	A ideia de notação surge como facilitador das operações de elementos antes descritos em linguagem natural, agora os objetos matemáticos podem ser expressos por uma notação
[2 P3]	A importância de uma notação eficiente é a facilidade de operacionalidade e a ausência de ambiguidades, permitindo a interpretação de resultados de forma simplificada. O autor também destaca que é importante a explicitação dos significados das notações adotadas.
[3 P3]	É importante destacar que nos dois parágrafos anteriores foi omitida a palavra proposição, é um recurso utilizado tanto em livros, quanto em aulas de matemática onde após se definir um objeto este é referido apenas por seu símbolo (no caso p,q para as proposições adotadas). Tal fato prejudicou o entendimento do leitor.
[4 P3]	O fazer primordial da matemática torna-se por excelência a exploração das implicações lógicas puras (ausentes de outros significados) entre proposições e enunciados (NAGEL; NEWMAN, 2015).
[5 P3]	Onde a matemática pura é apresentada como um capítulo da lógica formal.
[6 P3]	Toma-se como equivalente afirmação de que existem infinitos primos[45] , com a afirmação de que não existe um primo maior do que todos os outro.
[7 P3]	Esta demonstração admite utilizar resultados não demonstrados, em termos de uma matemática completamente formalizada, no método axiomático, não seriam válidos tais argumentos.
[8 P3]	Resumidamente, uma sugestão de estratégia se dá na ordem, para Tao (2015): (a) Qual é o tipo de problema? Problema de existência, demonstração, encontre, calcule, mostre que, ...(b) Entender os dados. Quais são os objetos matemáticos e as propriedades conhecidas destes objetos? (c) Entender o objetivo. A qual ponto deseja-se chegar? (d) Escolher a notação. Um mesmo objeto matemático pode ser tratado por diferentes notações, é importante escolher uma com relação ao objetivo. (e) Traduzir todos os dados e propriedades conhecidas para a notação adotada. (f) Modificar o problema levemente. Considerando casos particulares, resolvendo problemas similares, imaginar consequências do problema, reformular o problema de modo equivalente, ou usando generalidades. (g)

45 A palavra números foi suprimida, sem prejudicar a compreensão da sentença.

	Modificar grandemente o problema. Subtrair dados, ou considerar a recíproca (que costuma falsa) na busca de caminhos. (h) Estabelecer resultados. Pode-se ainda simplificar para explorar os dados e atingir metas parciais. O que se descobriu de novo? Como essas descobertas auxiliam para alcançar o objetivo? Esta é a *parte mais difícil* do processo, porém não se pode perder o foco do objetivo. (i) Passo final é a verificação. No caso de uma falha deve-se retornar a passos anteriores ou recomeçar de tomar outro caminho.
[9 P3]	A diferença principal entre as demonstrações apresentadas está na linguagem que transmite a mensagem.
[10 P3]	O Currículo da cidade divide os anos do ensino fundamental em três ciclos cada qual com seus objetos do conhecimento e objetivos específicos. Os objetos do conhecimento, na estrutura espiral dada ao currículo, por diversas vezes aparecerem em vários anos.
[11 P3]	Nestes ciclos e no Ensino Médio, embora sejam definidos os objetivos e objetos do conhecimento a serem tratados, visando atingir os objetos e competências gerais da matemática (e, por conseguinte da educação básica), não são definidas estratégias para cada objeto.