Universidade Estadual de Londrina

LUCIANA MAYUMI UMAKOSHI

EXPLORANDO A MATEMÁTICA QUE SUBSIDIA O ENTENDIMENTO DO ARTIGO KLEIN: FUNÇÕES POLINOMIAIS E O MUNDO DIGITAL

Londrina
2019

LUCIANA MAYUMI UMAKOSHI

EXPLORANDO A MATEMÁTICA QUE SUBSIDIA O ENTENDIMENTO DO ARTIGO KLEIN: FUNÇÕES POLINOMIAIS E O MUNDO DIGITAL

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof. Dra. Ana Lucia da Silva

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

U48 Umakoshi, Luciana Mayumi.
Explorando a matemática que subsidia o entendimento do artigo Klein : funções polinomiais e o mundo digital / Luciana Mayumi Umakoshi. - Londrina, 2019.
152 f. : il.

Orientador: Ana Lucia da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Aproximação de funções - Tese. 2. Funções polinomiais - Tese. 3. Polinômio de Taylor - Tese. 4. Artigos Klein - Tese. I. Silva, Ana Lucia da . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

LUCIANA MAYUMI UMAKOSHI

EXPLORANDO A MATEMÁTICA QUE SUBSIDIA O ENTENDIMENTO DO ARTIGO KLEIN: FUNÇÕES POLINOMIAIS E O MUNDO DIGITAL

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva

Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

Universidade Estadual de Maringá - UEM

____

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires

Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 18 de julho de 2019.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus por estar sempre comigo, na minha vida, nos meus estudos, em tudo que faço e por me proporcionar a realização deste mestrado.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Ana Lucia da Silva, não só pela constante orientação neste trabalho, também por estar sempre à disposição nos momentos em que mais precisei, mas sobretudo pela sua amizade no decorrer da minha graduação em Licenciatura em Matemática aqui na Universidade Estadual de Londrina, nos Projetos, Desatando Nós, GETOM e PIC OBMEP, no qual ela é coordenadora, onde participei e tive experiências únicas no qual levarei o que aprendi neles para a minha vida.

Aos professores do PROFMAT, que transmitiram seus conhecimentos de forma árdua.

Aos amigos que estavam sempre ao meu lado, incentivando e fazendo com que eu não desistisse.

Gostaria de agradecer inclusive algumas pessoas que contribuíram para esta conquista, que são os meus familiares, o qual sempre estão presentes, mesmo longe, me mostrando que, com esforço e dedicação, conseguimos chegar aonde desejamos.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Aquele que ignora a Matemática não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do Mundo

Roger Bacon

UMAKOSHI, Luciana Mayumi. **Explorando a matemática que subsidia o entendimento do artigo Klein**: funções polinomiais e o mundo digital. 2019. 152f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Neste trabalho pretendemos unir os objetivos, tanto das Oficinas Klein, quanto do Conteúdo Estruturante – Funções, nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica e estudar um artigo do Projeto Klein de Matemática em português: Funções Polinomiais e o Mundo Digital de Wanderley Moura Rezende respondendo a vários questionamentos que foram levantados pelo público alvo. O objetivo deste trabalho é produzir um material que forneça ao leitor, uma análise independente, que ele consiga dentro do próprio texto, sanar suas dúvidas de forma a compreender com propriedade o material estudado.

Palavras-chave: Funções trigonométricas. Funções polinomiais. Funções exponenciais. Aproximação de funções. Polinômio de Taylor. Artigos Klein.

UMAKOSHI, Luciana Mayumi. **Exploring the mathematics that supports the understanding of the paper Klein:** polynomial functions and the digital world. 2019. 152f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

In this work we intend to join the objectives of both the Klein Workshops and the Structuring Content - Functions, in the Basic Education Curriculum Guidelines and to study an article from the Klein Mathematics Project in Portuguese: Polynomial Functions and the Digital World of Wanderley Moura Rezende responding to several questions raised by the target audience. The objective of this work is to produce a material that provides the reader with an independent analysis that he can get within the text itself, heal his doubts in order to properly understand the material studied.

Key words: Trigonometric functions. Polynomial functions. Exponential functions. Approximation of functions. Taylor polynomial. Paper Klein.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho nasceu de uma oficina Klein aplicada, em 2013, pela orientadora desta dissertação, com professores de Matemática do Ensino Básico, alunos de Matemática e áreas afins, dentre estes, a autora deste trabalho. Uma das atividades da oficina foi estudar o artigo Klein, *Funções Polinomiais e o Mundo Digital*, com o objetivo de adequá-lo ao público alvo, dando subsídios para uma leitura independente, conectando o trabalho acadêmico com o do Ensino Básico. Este artigo é o objeto principal desta dissertação.

Durante a oficina foram levantadas vários questionamentos, que pretendemos responder nessa dissertação.

Foi entregue um questionário, que se encontra no anexo 1, onde tínhamos que responder, dando sugestões de alteração para o bom entendimento do artigo por completo. A resposta desse questionário voltava para os pesquisadores, onde eles faziam a alteração necessária no artigo, porém isso não foi feito até o momento.

Sobre o Projeto Klein, a Oficina Klein e os artigos Klein, seus propósitos e um pequeno histórico deste trabalho articularemos no capítulo zero, bem como questionamentos a respeito do artigo supracitado.

Nos demais capítulos, exploraremos o objeto desta dissertação que é exatamente o artigo Klein, *Funções Polinomiais e o Mundo Digital*, no qual segue um pequeno trecho:

> Uma função real polinomial é uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa o número real $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\ldots,n$. Esta função, de natureza simples e elementar, tem um papel destacado na matemática e nas ciências...Continuidade e diferenciabilidade são virtudes de funções reais que estão intimamente relacionadas entre si. Se, grosso modo, o gráfico de uma função real $f\colon R \to R$ contínua é uma curva contínua, isto é, “aquela que ao desenhá-la não tiramos o lápis do papel” – alegoria de Euler (1707-1783)-, a curva que descreve o gráfico de uma função diferenciável deve ter outra propriedade geométrica bem interessante: além de ser contínua ela deve ser suave! Quer dizer: o gráfico de uma função diferenciável é uma curva contínua e sem bicos, com formato arredondado. Uma função polinomial é sempre contínua e diferenciável. O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta.

Neste parágrafo do artigo, professores e alunos da oficina levantaram uma série de questionamentos, por exemplo, o conceito de continuidade, de diferenciabilidade, gráfico de funções, aproximação local e suavidade. Sem estes conceitos, torna-se impossível ao leitor, o pleno entendimento dos conteúdos do artigo que na verdade, nos diz que: a família de funções polinomiais é uma classe de funções muito especial, assim como, a função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno, pois elas são infinitamente diferenciáveis. Portanto, estas últimas podem ser aproximadas localmente por funções polinomiais.

Alguns professores do ensino básico, não conseguiram nem sequer identificar o tema central e suas próprias dúvidas sobre o artigo. O que pareceu ser frustrante para eles. No decorrer da leitura até o seu final, foram inúmeras as dificuldades que muitas vezes se mostraram intransponíveis. Assim sendo, dividiremos o trabalho da seguinte forma.

No capítulo 2, daremos um breve histórico do trabalho e do projeto Klein. Já no capítulo 3, abordaremos alguns conceitos fundamentais, porém, necessários para o entendimento do trabalho, tais como intervalos e funções. Terminamos o capítulo definindo limite de funções.

Dedicaremos o capítulo 4 à função contínua, provaremos alguns resultados, daremos uma visualização geométrica do Teorema do Valor Intermediário (T.V.I) e resolveremos alguns exercícios. Encerraremos este capítulo enunciando o Teorema de Weierstrass e o teorema 4, dois dos mais importantes resultados deste trabalho que dá condições e afirma que é possível aproximar uma função por uma função polinomial.

No capítulo 5, definiremos a derivada de uma função, veremos qual é a sua interpretação geométrica, calcularemos a derivada das funções seno, cosseno e exponencial, analisaremos os resultados importantes de continuidade e diferenciabilidade, estudaremos o crescimento e decrescimento de funções a partir do conceito de derivadas e definiremos as derivadas de ordem superior.

No capítulo 6, vamos definir e determinar os polinômios de Taylor de ordem $1, 2, 3, 4, 5$ e n. Em seguida, encontraremos o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno em torno do zero e também em torno de π e o polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno do zero e também em torno de π, analisaremos suas representações gráficas, determinaremos as raízes destes polinômios e também encontraremos uma aproximação para π. No decorrer deste capítulo, resolveremos alguns exercícios utilizando o polinômio de Taylor. Finalizaremos este capítulo determinando o polinômio de Taylor da função exponencial de ordem 5 e encontraremos uma aproximação para o valor de e.

2 UM PEQUENO HISTÓRICO DESTE TRABALHO E DO PROJETO KLEIN

Explanaremos agora, uma pouco sobre o Projeto Klein, que encontra-se na página da SBM https://klein.sbm.org.br/, como é mostrado na figura a seguir:

Figura 1- Página do Projeto Klein

Fonte: site da SBM

O artigo trabalhado nesta dissertação faz parte dos artigos Klein, se entrarmos nesta página, encontraremos este artigo na íntegra e outros artigos Klein também.

Bill Barton, presidente da International Commission on Mathematics Instruction (ICMI), apresentou em finais de 2008, o Projeto Klein, um projeto para celebrar os 100 anos da primeira publicação dos famosos textos de Felix Klein para professores do ensino secundário.

Este projeto foi idealizado pelos comitês executivos da ICMI e International Mathematical Union (IMU) e o objetivo principal é estabelecer conexões entre os tópicos e as abordagens dos professores do ensino médio ou de cursos de graduação e a área da Matemática, levantando discussões em torno deste enfoque. O próprio Felix Klein era motivado pelo que referia como descontinuidade dupla:

> É notável que os desenvolvimentos modernos passaram pelas escolas sem causar mínimo efeito na instrução. A razão é que a instrução matemática e os progressos constantes da pesquisa matemática perderam todo contato entre si após o início do século XIX.

O objetivo de Klein ao escrever seus textos foi exatamente alertar, ampliar e prover requisitos para desafiar os professores secundários a transmitir a riqueza da Matemática contemporânea, usando o currículo escolar. Ele se dirige aos professores da seguinte forma:

> Minha tarefa será sempre mostrar-lhes a mútua conexão entre problemas em variadas áreas. Desta maneira, espero facilitar-lhes a aquisição da habilidade para obter da grande massa de conhecimento um estímulo vivo para seu ensino.

Alguns dos objetivos do Klein Project for the 21st century são:

1. Relacionar uma visão ampla da área da Matemática com conteúdos e suas abordagens no ensino médio e na graduação universitária.
2. Produzir recursos para fornecer continuamente aos professores de Matemática, a estrutura, a profundidade, a conexão, a vitalidade, a aplicabilidade, a beleza e os valores da disciplina, de modo que sejam eles capazes de tanto satisfazer seu próprio gosto pela área como de transmitir a admiração da disciplina a seus estudantes.
3. Organizar as diversas contribuições de modo que todo o matemático, professor ou educador de Matemática possa participar.
4. Produzir um livro de leitura acessível, mas profissional, que transmita a conexão, crescimento, relevância e a beleza da disciplina Matemática, desde suas grandes ideias a fronteiras da pesquisa e aplicações. Este livro será disponibilizado em várias línguas, incluindo o português.

O Projeto Klein de Matemática em português tem como mote coordenar e organizar a contribuição do Brasil ao Klein Project for the 21st century, além de articular a colaboração, nesta área, com pesquisadores, professores e educadores dos demais países de língua portuguesa, para ampliar de forma substancial o alcance dos resultados. O objetivo central do projeto é a produção de material bibliográfico em língua portuguesa que seja de efetiva utilidade para o ensino da matemática em todos os níveis.

Para alcançar os objetivos do Projeto Klein de Matemática em português foram feitas as Oficinas Klein, cuja função é testar os artigos Klein quanto a suas metas, levantar necessidades e sugestões para desenvolver textos complementares, para que as ideias dos Artigos cheguem efetivamente às mãos dos professores. Os objetivos das Oficinas Klein são:

1. Estudar os artigos Klein selecionados a fim de fornecer subsídios para adequação dos artigos ao público alvo do Projeto, constituídos por professores do Ensino Médio;
2. Estabelecer conexões entre os temas dos artigos e a matemática da escola básica, identificando temas secundários necessários para complementar os artigos.

Assim sendo, o intuito de estudar um artigo Klein, por meio das oficinas Klein, é fornecer subsídios para adequação dos artigos ao público alvo do Projeto, constituídos e estabelecer conexões entre os temas dos artigos e a matemática da escola básica, identificando temas secundários necessários para complementar os artigos. Tal estudo deve buscar formas de reconhecimento de temas dos artigos com conteúdo curricular do ensino médio, de modo que permita o aproveitamento dos artigos como fonte de revigoramento do conhecimento do professor, com motivações modernas e estimulantes para o ensino da matemática.

O Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina foi um polo de aplicação da Oficina Klein, cuja coordenadora e a aluna de graduação, participante como público alvo, foram às autoras desta dissertação de mestrado.

Por outro lado, nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica para o Ensino Fundamental, o Conteúdo Estruturante – Funções - engloba:

1. Função afim
2. Função quadrática

Para o Ensino Médio, o Conteúdo Estruturante – Funções - engloba os conteúdos:

1. Função afim
2. Função logarítmica
3. Função quadrática

4. Função trigonométrica
5. Função polinomial
6. Função modular
7. Função exponencial
8. Progressão aritmética e Geométrica

As abordagens do Conteúdo Funções no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. O estudo das Funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que favorece a compreensão do significado das variações das grandezas envolvidas.

Este trabalho pretende unir os objetivos, tanto das Oficinas Klein, quanto do Conteúdo Estruturante – Funções, nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica e estudar um artigo do Projeto Klein de Matemática em português: Funções Polinomiais e o Mundo Digital de Wanderley Moura Rezende.

Este foi um dos artigos aplicado aos professores do Ensino Básico e alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina em 2013. Na oportunidade foram levantados vários questionamentos que pretendemos responder nesta dissertação.

Wanderley Moura Rezende nos fala no artigo sobre a importância da função polinomial e sua utilidade prática. Acerca de sua praticidade pode-se destacar sua simplicidade tendo que para seu cálculo, podemos utilizar as operações algébricas elementares (soma, subtração, multiplicação e divisão) o que pode ser feito até mesmo em um calculadora simples (não científica).

Além disso, podemos compreender duas virtudes interrelacionadas as funções reais, são elas: continuidade e diferenciabilidade.

O gráfico de uma função contínua, segundo Euler, é aquela que ao desenhá-la, não tiramos o lápis do papel, já a função diferenciável é aquela que além de ser contínua , ser suave (com formatos arredondados). Podemos dizer que, o gráfico de uma função diferenciável pode localmente ser aproximado por uma reta, o que equivale a uma função polinomial de grau 1. A partir disso vale questionar, e no caso de uma função polinomial de grau 2.

Com a pesquisa de Taylor, podemos entender que se uma função é n vezes diferenciável, então podemos aproximar esta por uma função polinomial de grau n, em determinado intervalo do seu domínio. Dessa forma, quanto maior o grau do polinômio, maior a precisão na aproximação. Considerando a função exponencial, as funções trigonométricas, seno e cosseno, tais quais a polinomial, são ainda mais especiais, pois são infinitamente diferenciáveis. De forma que todas podem localmente ser aproximada por uma função polinomial de grau n, tal que:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

$$cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{(2j)!}\right)^j x^{2j} = 1 - x + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}\cdot$$

$$sen(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{(2j+1)!}\right)^j x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}\cdot$$

Com o advento da internet e a modernização das comunicações, a digitalização se amplia de forma muito veloz. Dá-se de exemplo para nossa discussão o processador de um computador, que realiza apenas as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Neste contexto, valer-se do uso das funções polinomiais é um trunfo de grande valia. Compreendendo esta contribuição, temos cada vez mais softwares que são capazes de ampliar a gama de possibilidades algébricas. Por incrível que pareça as funções polinomiais e suas operações simples, é que sustentam e dão vida a velocidade digital e estão minuciosamente inseridas em uma grande parte da nossa realidade.

Segue abaixo afirmações retiradas do artigo:

1. A função polinomial de natureza simples e elementar, tem papel destacado na matemática e nas demais ciências.
2. A função polinomial do segundo grau é bastante útil nos contextos da geometria, física, economia e biologia.
3. A simplicidade das funções polinomiais deve-se à sua natureza algébrica, ou seja, ela trabalha apenas com as operações elementares (+,-,×,÷), assim como os computadores.

A partir desse item os professores começaram a ter dúvidas.

4. Um fato interessante dessas funções relaciona-se a visibilidade que elas nos oferece: uma vez conhecidos n+1 valores de uma função polinomial p, a função se revela por completo.

O que significa isso?[1]

5. A continuidade e diferenciabilidade são virtudes de funções reais que estão intimamente relacionadas entre si.

O que é continuidade? O que é diferenciabilidade e de que forma elas estão relacionadas?

6. O gráfico de uma função real $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua é uma curva contínua, isto é, “aquela eu ao desenhá-la não tiramos o lápis do papel”.

O que significa isso rigorosamente falando?

7. O gráfico de uma função diferenciável é uma curva contínua e suave, ou seja, sem bicos e sempre pode, localmente, ser aproximado por uma reta.

Apareceu novamente o conceito de diferenciável, o que significa ser suave, sem bicos, o que significa isso matematicamente?

8. Um função diferenciável sempre pode localmente ser aproximada por uma função polinomial de grau 2.

O que significa uma aproximação local?

9. Uma função polinomial é sempre contínua e diferenciável.

De novo o conceito de continuidade e diferenciabilidade. Por que uma função polinomial é contínua e diferenciável, e mais, se ela é contínua e diferenciável, pode ser não contínua, pode ser não diferenciável?

10. A família de funções polinomiais é uma classe de funções muito especial, assim como as funções trigonométricas seno e cosseno e a função exponencial, pois elas são infinitamente diferenciáveis.

O que é uma família de funções? O que é uma classe de funções? Se não sei o significado de diferenciável, quem dirá infinitamente diferenciável.

---

[1] Os trechos destacados em itálico são os comentários feitos pelos professores.

11. De acordo com Taylor: Se uma função real é n-vezes diferenciável, então podemos aproximar esta função por uma função polinomial de grau n na vizinhança de um ponto do seu domínio.

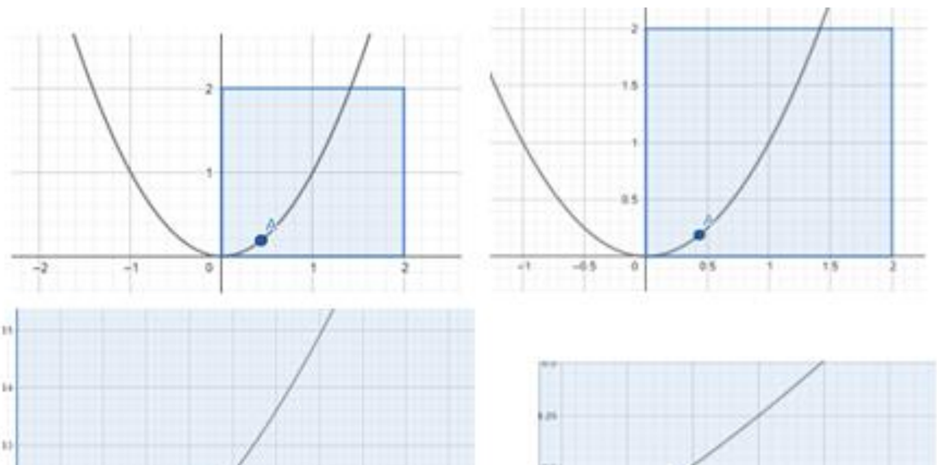
Então relacionamos a quantidade de vezes que uma função pode ser diferenciável com um grau de polinômio e tudo isso tem que ser em torno de um ponto, de uma vizinhança, e também não sei o significado de vizinhança.

12. A função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno, também podem ser representadas por uma série de Taylor.

Como podemos fazer isso?

13. O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Observe que ao ampliarmos o gráfico de uma função diferenciável uma sequência de vezes, este fica similar a uma reta (veja a sequência de *zoom* ilustrada na fig. 2).

Figura 2 - Sequência de zoom dado no gráfico de uma função diferenciável realizado com o software GeoGebra



Fonte: a própria autora

O que significa dizer que o gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta? Como descrever isso matematicamente?

14. Isso é muito bom! Tal fato equivale a dizer que podemos aproximar localmente uma função diferenciável por uma função polinomial de grau um. Assim, podemos calcular valores aproximados de uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio por meio de uma função polinomial de grau um.

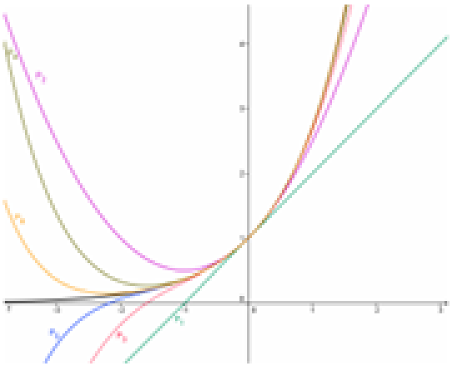
Como podemos calcular valores aproximados de uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio por meio de uma função polinomial de grau um?

Aqui nós já falamos um pouco sobre o artigo Klein e quais foram algumas das dúvidas que os professores tiveram. Baseado nessas dúvidas, nós montamos o quadro a seguir, elencando algumas afirmações feita no artigo com algumas dúvidas levantadas pelos professores.

Quadro 1 - Afirmação feita no Artigo Klein x Questões levantadas

Afirmação feita no Artigo Klein	**Questões levantadas**
Uma função polinomial é sempre contínua e diferenciável.	a) O que significa uma função ser contínua? (resp. pag. 88) b) O que significa uma função ser diferenciável? (resp. pag.98) c) Por que uma função polinomial é sempre contínua e diferenciável? (resp. pag.88)
O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Tal fato equivale a dizer que podemos aproximar localmente uma função diferenciável por uma função polinomial de grau um.	a) O que significa aproximar localmente? (resp. pag. 86) b) Como uma função diferenciável pode ser aproximada localmente por uma reta? (resp. pag.96) c) De outra forma, o que significa aproximar uma função localmente por uma reta? (resp. pag.98)
Continuidade e diferenciabilidade são qualidades de funções reais que estão intimamente relacionadas entre si.	a) Qual a relação entre a continuidade e diferenciabilidade de funções reais? (resp. pag.100)

	b) Toda função contínua é diferenciável? (resp. pag. 102) c) Toda função diferenciável é contínua? (resp. pag. 101)
...calcular valores aproximados de uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio...	a) O que é vizinhança? (resp. pag. 84)
As funções seno, cosseno e exponencial podem ser aproximadas por uma função polinomial (polinômio de Taylor).	a) O que é o polinômio de Taylor? b) Como encontrá-lo? c) Como obter essas aproximações?
...as séries de Taylor convergem pontualmente para o valor da função em todos os pontos do seu domínio.	a) Não trabalharemos com a Série de Taylor, porém, houveram questionamentos sobre a série de Taylor e convergência.
As funções trigonométricas seno e cosseno também podem ser representadas por uma série de Taylor (esse é o nome técnico dado ao nosso polinômio de Taylor de grau infinito): ...	a) Como encontrar o polinômio de Taylor que aproxima a função cosseno por um polinômio de grau 4 em torno de um determinado ponto x_0? b) Qual o erro cometido? c) Como encontrar o polinômio de Taylor de grau n que aproxima uma função n vezes diferenciável em torno de um determinado ponto x_0? d) Qual o erro cometido?
Assim como a função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno também podem ser representadas por uma série de Taylor (esse é o nome técnico dado ao nosso polinômio de Taylor de grau infinito):....	a) Como encontrar o polinômio de Taylor que aproxima a função seno por um polinômio de grau 4 em torno de um determinado ponto x_0? b) Qual o erro cometido?
...Já o polinômio de Taylor de grau 4 ... nos fornece uma aproximação de x e ...	a) Como encontrar o polinômio de Taylor que aproxima a função exponencial por um polinômio de grau 4 em torno de um determinado ponto x_0? b) Qual o erro cometido?

Figura 3 - Representação gráfica das seis primeiras funções polinomiais que aproximam a função exponencial $f(x) = e^x$ na vizinhança de $x = 0$  **Fonte:** retirado do artigo em estudo	a) Como entender a interpretação geométrica destas aproximações?

Fonte: a própria autora

O quadro refere-se à série de Taylor. Os professores não sabiam o que era e nem como encontrá-la. Nós não vamos responder esta questão neste trabalho, pois o tornaria demasiadamente longo. Entretanto colocamos que, ao se depararem com termos desconhecidos como Série de Taylor, Diferenciabilidade, Vizinhança, Aproximação, os professore não só passam a ver o artigo como incompreensível, como também sentem-se inibidos e envergonhados por não entende-lo. Enfatizamos ainda que o gráfico que consta no último item do quadro, gerou a seguinte dúvida: Como entender a interpretação geométrica dessas aproximações?

Após a afirmação de que uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio pode ser aproximada uma função polinomial de grau um, é colocada a seguinte questão: Será que podemos aproximar uma função diferenciável por uma função polinomial de grau dois?

A resposta é dada por:

> Brook Taylor (1685-1793), um dos melhores alunos de Newton (1643-1727) —, percebeu que se uma função real é n-vezes diferenciáveis, podemos aproximá-la por uma função polinomial de grau n na vizinhança de um ponto do seu domínio. Na verdade, como Taylor também observou, quanto maior o grau do polinômio, melhor seria a aproximação realizada. Isso torna a família de funções polinomiais uma classe de funções ainda mais especial. A função exponencial, as funções trigonométricas seno e cosseno, assim como a função polinomial, são de uma classe mais do que especial: elas são infinitamente diferenciáveis. Assim, todas elas podem ser aproximadas localmente por uma função polinomial de grau n onde o erro cometido será tanto menor quanto maior for o grau do polinômio (polinômio de Taylor, esse é o nome) utilizado.

Neste pequeno trecho, várias outras dúvidas surgiram, e as quais precisariam ser respondidas para que o público alvo pudesse, de fato, entender o artigo em toda sua plenitude. Neste viés, esta dissertação seria um texto complementar que traria subsídios para leitura do artigo.

Desta forma, no decorrer deste trabalho, esperamos responder vários dos questionamentos feitos pelos professores de matemática do ensino básico e alunos da graduação em matemática na aplicação da Oficina Klein e que venham a contribuir para uma leitura independente e plena do artigo sugerido.

O objetivo deste trabalho é produzir um material que forneça ao leitor – Professor de Matemática do Ensino Básico em especial do Ensino Médio, uma análise independente, que ele consiga dentro do próprio texto, sanar algumas de suas dúvidas de forma a compreender o artigo do Projeto Klein: *Funções Polinomiais e o Mundo Digital*, de Wanderley Moura Rezende.

Essa dissertação pretende dar ao professor do ensino básico, um material ao qual ele consiga entender o artigo de uma forma um pouco mais compreensível e sem ter que ficar buscando em várias outras bibliografias. Pretendemos, ainda, dentro das colocações dos professores, dar exemplos e aplicações dos conteúdos oriundos do subsidio ao texto proposto.

Até agora, falamos do Projeto Klein, apresentamos um pouco o artigo e falamos de algumas dúvidas dos professores. Vamos começar a falar sobre o trabalho e pra começar falaremos sobre os conceitos básicos que vamos tomar como sabido.

3 CONCEITOS BÁSICOS, SUPOSTOS

Neste capítulo introduziremos alguns tópicos básicos, porém essenciais para a compreensão dos capítulos 4, 5 e 6. Entretanto, ele pode ser omitido para aqueles que já tem familiaridade com intervalos, funções, gráficos de função, função crescente, função decrescente, função par, função ímpar, função polinomial, raiz de polinômio, grau de polinômio, limite de função, função seno, função cosseno e função exponencial, que serão utilizadas neste trabalho.

Apesar de serem conceitos básicos, farão parte deste capítulo por solicitação dos professores que participaram da oficina Klein. Uma das principais dificuldades desses professores é justamente a formalização desses conceitos, o rigor matemático e a escrita. Desta forma, definiremos, por exemplo, intervalos e suas propriedades, pois para estudarmos vizinhança é imprescindível que se tenha uma noção ampla desses conceitos.

No ensino básico, se estuda função polinomial de grau 2, mas e as de grau 3, grau 4, grau n? Se são tão importantes, porque não estuda-las? Para isso, definiremos formalmente função e seus principais resultados, gráfico de função, em especial função polinomial e daremos ainda algumas noções sobre limites. As definições a seguir de intervalos na reta estão conforme Ávila (referência 2).

3.1 INTERVALOS

1. Intervalo aberto em a e b:

Definição 1: Dados dois números reais a e b, com $a < b$, chamamos de intervalo aberto de extremos a e b, designado por (a, b), ao conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}.$$

Exemplo 1: Represente o intervalo $(-1,2)$.

Sabendo que $(-1,2) = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 2\}$, podemos representá-lo como mostra a figura abaixo:

Figura 4 - Representação do intervalo $(-1{,}2)$

Fonte: a própria autora

2. Intervalo fechado em a e b:

Definição 2: Dados dois números a e b, com $a < b$, chamamos de intervalo fechado de extremos a e b, indicado por $[a, b]$, ao conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}.$$

Exemplo 2: Represente o intervalo $[-1{,}2]$.

Sabendo que $[-1{,}2] = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 2\}$, podemos representá-lo como mostra a figura abaixo:

Figura 5 - Representação do intervalo $[-1{,}2]$

Fonte: a própria autora

3. Intervalo semifechado ou semiaberto (fechado em a e aberto em b)

Definição 3: Dados dois números a e b, com $a < b$, chamamos de intervalo fechado em a e aberto em b, indicado por $[a, b)$, ao conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}.$$

Exemplo 3: Represente o intervalo $[-1{,}2)$:

Como $[-1{,}2) = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x < 2\}$, segue abaixo sua representação:

Figura 6 - Representação do intervalo $[-1,2)$

Fonte: a própria autora

4. Intervalo semifechado ou semiaberto (aberto em a e fechado em b)

Definição 4: Dados dois números a e b, com $a < b$, chamamos de intervalo abertoem a e fechado em b, indicado por $(a, b]$, ao conjunto

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}.$$

Exemplo 4: Represente o intervalo $(-1,2]$*:*

Como $(-1,2] = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x \leq 2\}$, sua representação será:

Figura 7 - Representação do intervalo $(-1,2]$

Fonte: a própria autora

Sendo assim, consideremos todo o eixo real como sendo o intervalo indicado por $(-\infty, +\infty)$ ao conjunto$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$.

De modo análogo para os semieixos fechados ou abertos na extremidade finita.

5. Semieixo fechado a direita de $\boldsymbol{a}$:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$$

Exemplo 5: Represente o intervalo $[2, +\infty)$:

$$[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x < +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$$

6. Semieixo aberto a direita de $\boldsymbol{a}$:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$$

Exemplo 6: Represente o intervalo $(2, +\infty)$:

Como $(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$, sua representação será:

Figura 8 - Representação do intervalo $(\mathbf{2}, +\infty)$

Fonte: a própria autora

7. Semieixo fechado a esquerda de b:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$$

Exemplo 7: Represente o intervalo $(-\infty, 2]$:

$$(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$$

8. Semieixo aberto a esquerda de b:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < b\} = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

Exemplo 8: Represente o intervalo $(-\infty, 2)$:

Como $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 2\}$, sua representação será:

Figura 9 - Representação do intervalo $(-\infty, \mathbf{2})$

Fonte: a própria autora

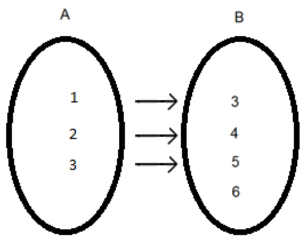
3.2 FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

Definição 5: Uma função f é uma terna $(A, B, x \rightarrow y)$, onde A e B são dois conjuntos não–vazios de $\mathbb{R}$ e $x \rightarrow y$, uma relação que nos permite associar a cada elemento x de A, um único y de B (lê-se: y igual a f de x).

O conjunto A é o domínio de f e denotamos por $Dom(f)$, assim $A = Dom(f)$ e o conjunto B é o contradomínio de f. Chamamos de imagem da função f ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} | y = f(x)\}$, ou seja, o valor da função f no ponto x e denotamos $Im(f) = f(A) \subseteq B.$ Dizemos que x é a variável independente de f e y a variável dependente, pois $y = f(x)$ depende de $x.$ *U*sualmente uma função assim definida é indicada por $f: A \rightarrow B$ (leia: f de A em B).

Para visualizar uma função $f: A \rightarrow B$ de forma concreta, podemos utilizar o diagrama a seguir.

Figura 10 - Diagrama da $f:\ A \rightarrow B$



Fonte: a própria autora

$$f(1) = 3$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 5$$
$$Dom(f) = A = \{1,2,3\}$$
$$Im(f) = \{3,4,5\} \subset B$$
$$ContraDom(f) = B = \{3,4,5,6\}$$

Exemplo 9: O quadro a seguir apresenta o consumo mensal de energia de uma família, durante os 5 primeiros meses de 2018.

Quadro 2 - Consumo de energia de uma família, durante os 5 primeiros meses de 2018

Meses	1	2	3	4	5
Consumo (kWh)	448	437	414	442	404

Fonte: a própria autora

Analisando as informações do quadro acima, vemos que, podemos obter uma relação entre o consumo de energia e o mês por meio de uma função. Para definirmos esta função precisamos do domínio A, contradomínio B e a regra que associa esses elementos. Assim sendo, denotemos por f a função, e uma vez que os dados do quadro estão variando com o passar do tempo dado em meses, chamemos t a variável independente.

O domínio da f é dado pelo conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3, 4, 5\}$ e sua imagem pelo conjunto $B = \{448, 437, 414, 442, 404\}$.

Sendo assim, podemos obter a função $f: A \to B$ da seguinte maneira:

- $f(1) = 448$, que significa que a imagem de 1 pela função f é 448, ou seja, em janeiro o consumo de energia foi de 448 kWh;
- $f(2) = 437$, ou seja, em fevereiro o consumo de energia foi de 437 kWh;
- $f(3) = 414$, ou seja, em março o consumo de energia foi de 414 kWh;

E assim sucessivamente, variando t em A obtemos o consumo de energia de acordo com o mês.

3.3 GRÁFICO DE FUNÇÃO

Definição 6: Dada uma função $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$, o gráfico de f é o subconjunto $Graf(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$, definido por:

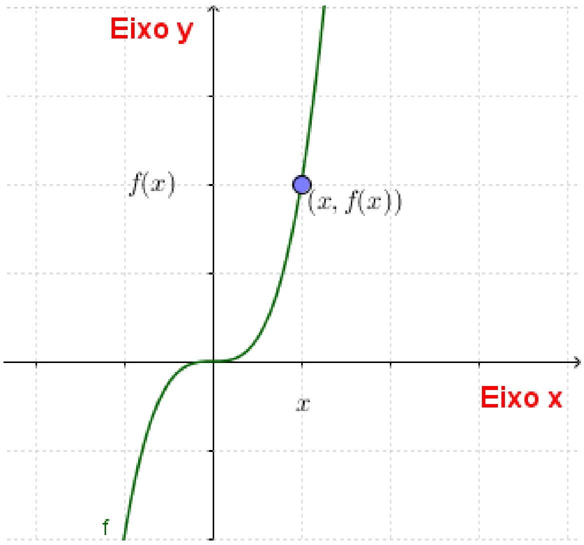
$$Graf(f) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}.$$

Quando $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de variável real, com $A \subset \mathbb{R}$, temos:

$$Graf(f) \subset X \times Y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Como mostra a figura a seguir:

Figura 11 - Gráfico de uma função $f(x)$



Fonte: a própria autora

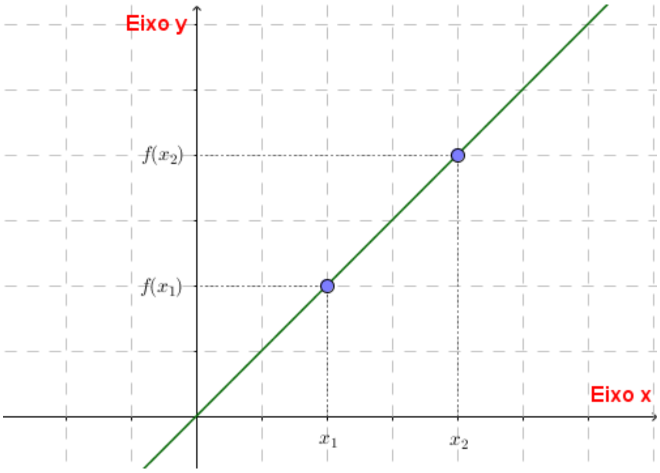
- (x, y) é um par ordenado do plano cartesiano;
- x é a abscissa;
- $y = f(x)$ é a ordenada.

3.4 FUNÇÃO CRESCENTE

Definição 7: Seja a função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e B um subconjunto de $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é crescente em B, se para x_1 e x_2 quaisquer pertencentes a B com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Se f é crescente em todo seu domínio, dizemos simplesmente que f é uma função crescente. Veja o gráfico a seguir:

Figura 12 - Gráfico de uma função crescente



Fonte: a própria autora

Exemplo 10: Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 1$.Verifique se f é uma função crescente em todo seu domínio.

Para que f seja uma função crescente em todo seu domínio, por definição, a f têm que satisfazer a seguinte condição: se x_1 e x_2 pertencem a $\mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, isto implica que $f(x_1) < f(x_2)$.Vejamos:

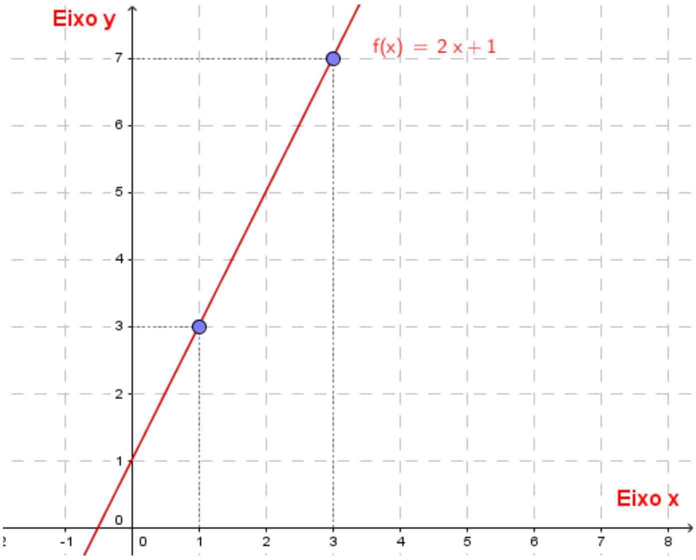
De fato, dado qualquer $x, y \in \mathbb{R} = Dom(f)$

$x_1 < x_2 \longrightarrow 2\,x_1 < 2x_2 \longrightarrow 2\,x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \longrightarrow f(\,x_1) < f(x_2)$.

Logo, f é crescente.

Veja graficamente a representação da $f(x) = 2x + 1$. Notemos que, tomando quaisquer dois valores no eixo x, necessariamente, um estará a esquerda do outro, a imagem do elemento a esquerda será sempre menor que a imagem do elemento a direita. Isto significa que a função é crescente.

Figura 13 - Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$



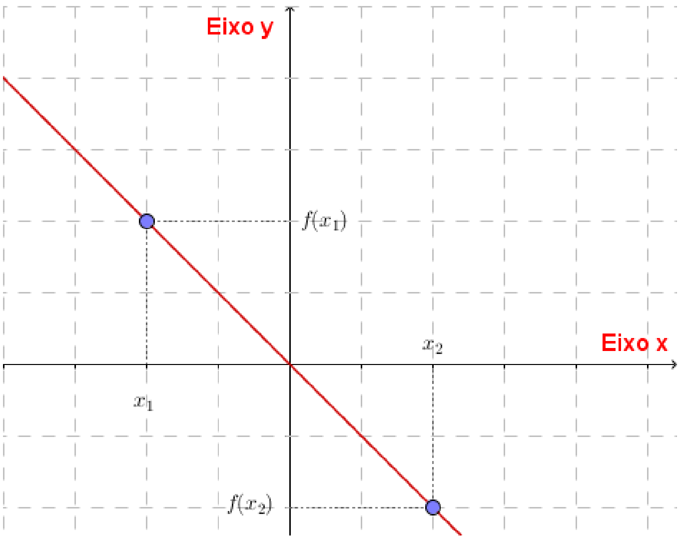
Fonte: a própria autora

3.5 Função decrescente

Definição 8: Seja a função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e B um subconjunto de A. Dizemos que f é decrescente em B, se para x_1 e x_2 pertencentes a B com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Se f é decrescente em todo seu domínio, dizemos simplesmente que f é uma função decrescente.Veja o gráfico a seguir:

Figura 14 - Gráfico de uma função decrescente



Fonte: a própria autora

Exemplo 11: Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -2x + 1$. Verifique se f é uma função decrescente em todo seu domínio.

Para que f seja uma função decrescente em todo seu domínio, por definição, a f têm que satisfazer a seguinte condição: se x_1 e x_2 pertencem a $\mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, isto implica que $f(x_1) > f(x_2)$.Vejamos:

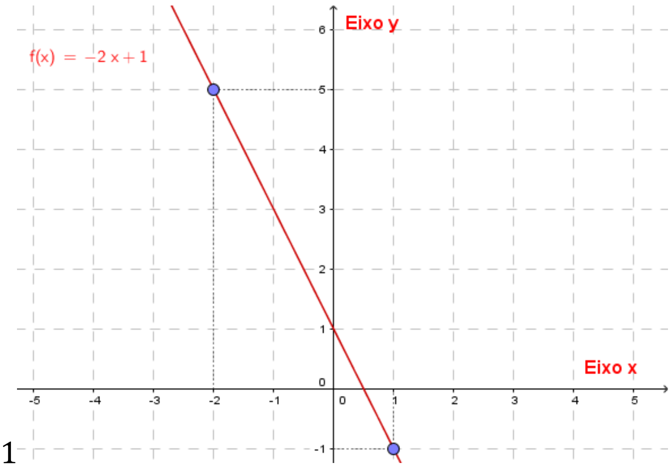
Dado qualquer $x, y \in \mathbb{R} = Dom(f)$

$x_1 < x_2 \longrightarrow -2x_1 > -2x_2 \longrightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Logo, f é decrescente.

Veja graficamente a representação da $f(x) = -2x + 1$, na figura 15. Notemos que, tomando quaisquer dois valores no eixo x, necessariamente, um estará a esquerda do outro, a imagem do elemento a esquerda será sempre maior que a imagem do elemento a direita. Isto significa que a função é decrescente.

Figura 15 - Gráfico da função $f(x) = -2x + 1$



1

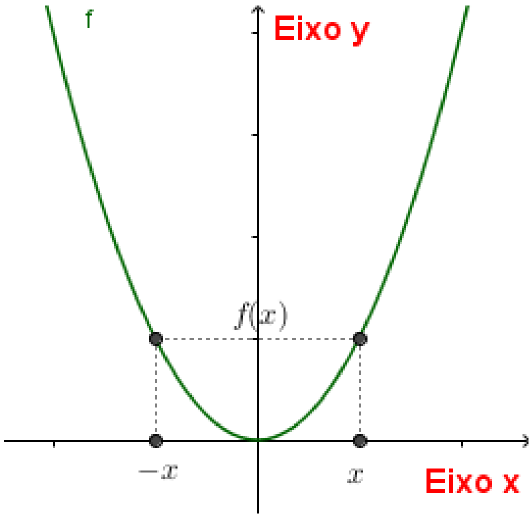
Fonte: a própria autora

3.6 Função par

Definição 9: Dizemos que uma função $f: A \longrightarrow B$ é par se, para todo x no domínio de f, tivermos $f(-x) = f(x)$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y, isto é, uma vez que o ponto $(x, f(x))$ pertence ao gráfico de f, o ponto $(-x, f(x))$ também pertence ao gráfico de f, como é mostrado no gráfico a seguir.

Figura 16 - Gráfico de uma função par



Fonte: a própria autora

Exemplo 12: Verifique se a função $f(x) = x^2$ é uma função par.

De fato: Seja $x \in \mathbb{R}$, então:

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

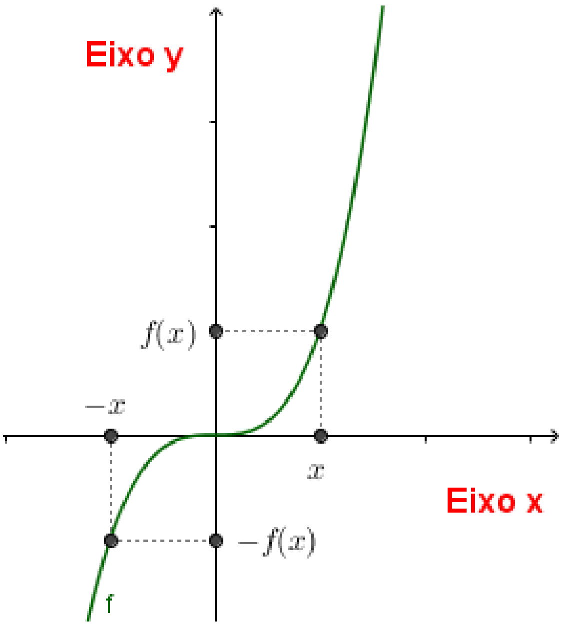
Portanto, a função $f(x) = x^2$ é uma função par.

3.7 Função ímpar

Definição 10: Dizemos que uma função $f: A \longrightarrow B$ é ímpar se, para todo x no domínio de f, tivermos $f(-x) = -f(x)$.

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem, isto é, uma vez que o ponto $(x, f(x))$ pertence ao gráfico de f, o ponto $(-x, -f(x))$ também pertence ao gráfico de f, como é mostrado no gráfico a seguir:

Figura 17 - Gráfico de uma função ímpar



Fonte: a própria autora

Exemplo 13: Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^3$. Verifique se a função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

De fato: Seja $x \in \mathbb{R}$, então:

$f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$.

Portanto, a função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.

3.8 Tipos de função

3.8.1 Função afim ou função polinomial de grau 1

Definição 11: Função do 1° grau é toda função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $ax + b$, $a \neq 0$. O número real a é chamado de coeficiente angular e o número real b, de coeficiente linear. Seu domínio é $Dom(f) = \mathbb{R}$. O gráfico da função polinomial de grau 1 é uma reta, por isso, basta conhecer dois pontos distintos para esboçá-lo.

Exemplo 14: Considere a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$. Represente graficamente esta função.

Para representarmos graficamente a função $f(x) = x + 1$, temos que a função f associa, a cada $x \in \mathbb{R}$ o seu seguinte. Veja o quadro a seguir com alguns pontos:

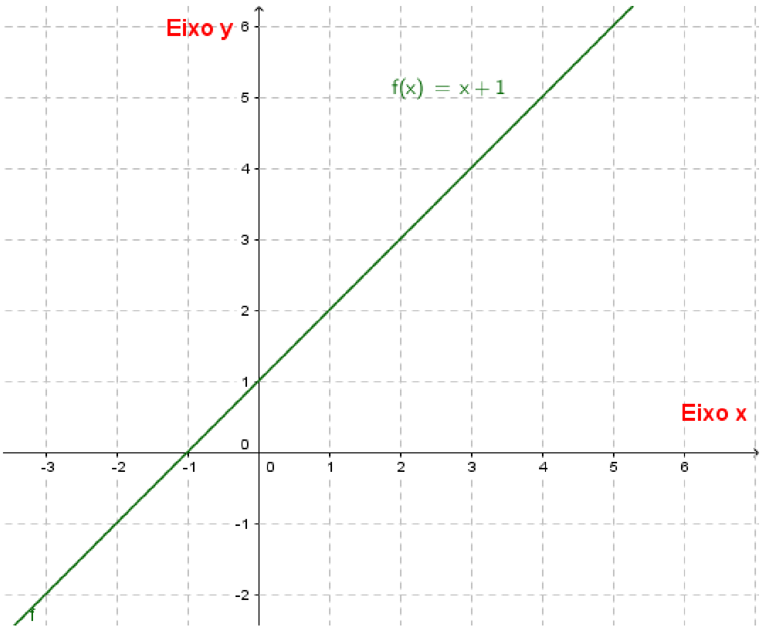
Quadro 3 – Alguns pontos pertencentes à função f

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x + 1}$
-1	$f(-1) = -1 + 1 = 0$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$

Fonte: a própria autora

Localizando e ligando esses pontos no plano cartesiano, temos o gráfico a seguir:

Figura 18 - Gráfico da função $f(x) = x + 1$



Fonte: a própria autora

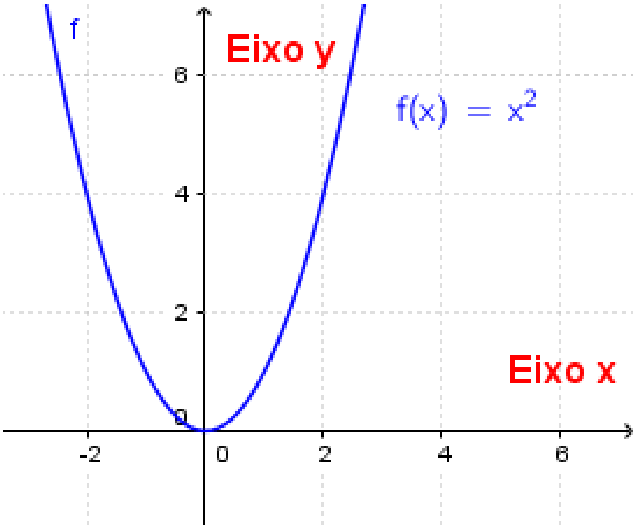
3.8.2 Função quadrática ou função do segundo grau

Definição 12: A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é chamada de função quadrática ou função do segundo grau. O seu domínio $Dom(f)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, bem como seu contradomínio.

Se $a > 0$, o gráfico da função será côncava para cima e se $a < 0$, será para baixo. Isso pode ser visualizado no exemplo 15 onde $a = 1$ e no exemplo 16 onde $a = -1$.

Exemplo 15: Considere a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$. Represente graficamente $f(x) = x^2$.

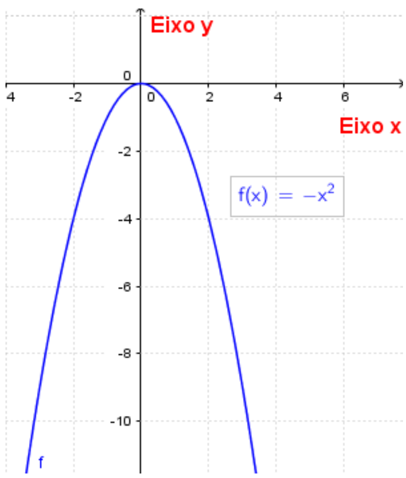
Figura 19 - Gráfico da função $\boldsymbol{f}(x) = x^2$



Fonte: a própria autora

Exemplo 16: Considere a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2$. Represente graficamente $f(x) = -x^2$.

Figura 20 - Gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -x^2$



Fonte: a própria autora

Veremos nessa seção a definição de funções polinomiais e alguns resultados correlatos, esta é uma das partes mais importantes desse trabalho, já que nosso objetivo é aproximar funções, por funções polinomiais.

3.8.3 Função polinomial

Como escrito no artigo, as funções polinomiais são simples e elementares, isso se deve a sua natureza algébrica. Para calcularmos o valor de uma função polinomial precisamos realizar apenas operações algébricas elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Por exemplo, tomemos $f(x) = x^2 + 2x + 1$, temos que, $f(0{,}5) = 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1$ que pode ser calculado facilmente, "à mão" ou utilizando uma "*calculadora padrão*". Esta simplicidade torna essas funções tão atraentes no sentido de atrair a atenção para elas, querer aproximar uma função por funções polinomiais.

Outro fator extraordinário de uma função polinomial f de grau n é que uma vez conhecido $(n+1)$ valores de f, podemos calcular $f(x)$ para qualquer valor de x em $\mathbb{R}$.

De forma simples uma função polinomial real é uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa o número real $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ onde $a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0$ são números reais.

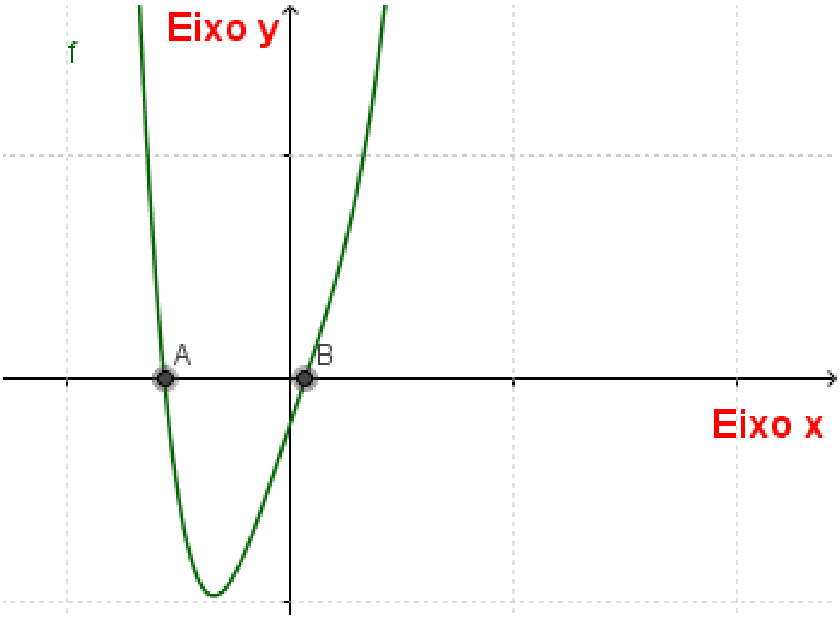
Definição 13: Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, onde $a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0$ são números reais chamados coeficientes do polinômio e $a_n \neq 0$, denomina-se função polinomial de grau n $(n \in \mathbb{N})$.

Definição 14: Consideremos $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, um polinômio não nulo. Chamamos de grau de f o maior expoente de um termo não nulo de f.

Definição 15: Consideremos $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, um polinômio não nulo. Chamamos de raiz de um polinômio, todo o valor de x onde a imagem é nula, ou seja, $f(x) = 0$.

Para determinarmos geometricamente as raízes de um polinômio, basta ver a intersecção de seu gráfico com o eixo x, por exemplo, os pontos A e B são raízes da função polinomial f como podemos ver na figura a seguir.

Figura 21 - Gráfico de uma função polinomial



Fonte: a própria autora

Exemplo 17: Determine as raízes dos polinômios abaixo:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Para encontrarmos a raiz deste polinômio, primeiramente temos que igualar à função a zero, ou seja, $f(x) = 0$. Como este polinômio é de grau 2, para encontrarmos as raízes deste polinômio, vamos aplicar a fórmula de Baskara, vejamos:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Como $a = 1$,$b = 2$ e $c = 1$, temos que:

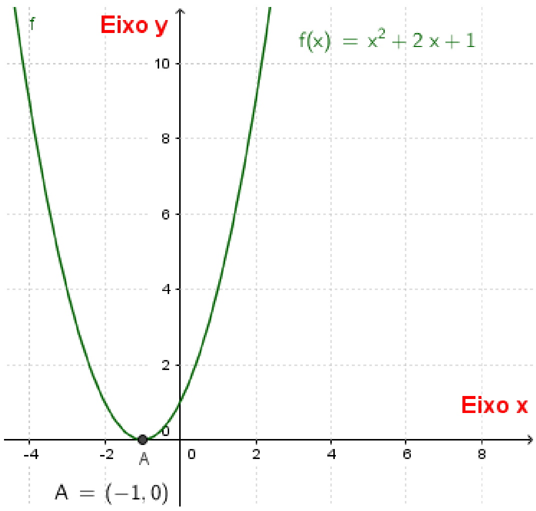
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os valores de a, b e c na equação acima temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, a raiz deste polinômio é $x = -1$, como podemos ver no gráfico a seguir da $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Figura 22 - Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$



Fonte: a própria autora

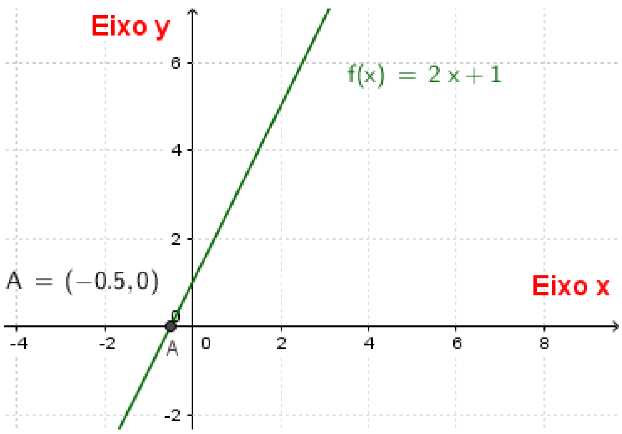
b) $f(x) = 2x + 1$

Para encontrarmos a raiz deste polinômio, primeiramente temos que igualar à função a zero, ou seja, $f(x) = 0$. Como este polinômio é de grau 1, para determinarmos a raiz deste polinômio, basta isolarmos o x, vejamos:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a raiz deste polinômio é $x = -\frac{1}{2}$, como podemos ver no gráfico a seguir da $f(x) = 2x + 1$.

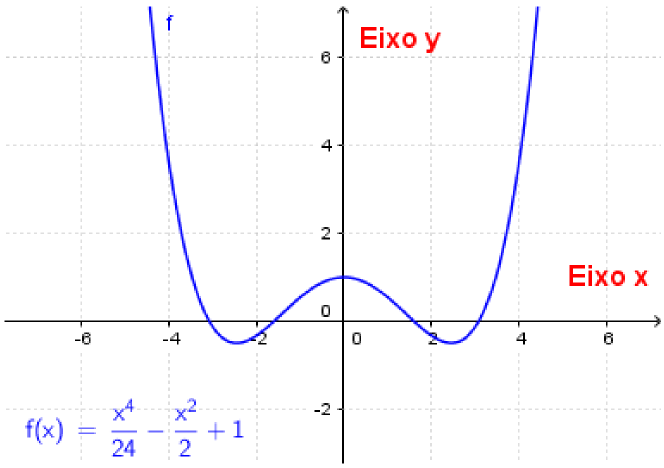
Figura 23 - Gráfico com a raiz da função $f(x) = 2x + 1$



Fonte: a própria autora

Exercício 1: Analise o gráfico da função $f(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1$ a seguir e responda as questões a seguir:

Figura 24 - Gráfico da função $f(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1$

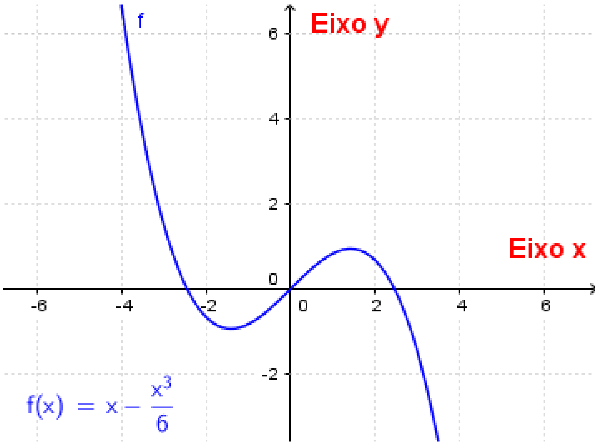


Fonte: a própria autora

1. Determine o grau de f.
2. Determine os coeficientes do polinômio f.
3. Determine as raízes de f.
4. Determine, graficamente, os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

Exercício 2: Analise o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x - \frac{x^3}{6}}$ a seguir e responda as questões:

Figura 25 - Gráfico da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$



Fonte: a própria autora

1. Determine o grau de f.
2. Determine os coeficientes do polinômio f.
3. Determine as raízes de f.
4. Determine, graficamente, os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

Quando estudarmos o conteúdo de derivadas, vamos encontrar com mais facilidade estes intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico de f.

Na próxima seção veremos a função exponencial. De maneira geral uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ onde $\boldsymbol{a}$ é uma constante real, positiva e diferente de 1 é denominada função exponencial.

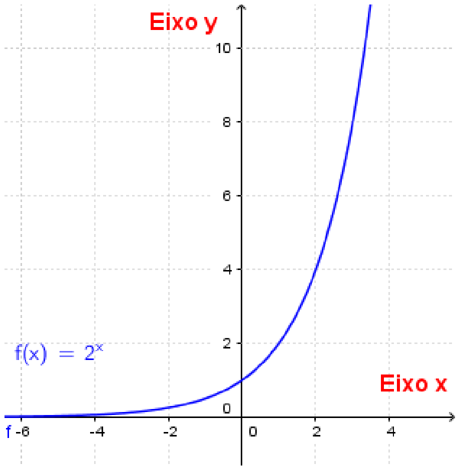
3.8.4 Função exponencial

Definição 16: Chamamos de função exponencial a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x real o número ba^x, sendo a um número real, $a > 0$,$a \neq 1$ e $b \neq 0$, ou seja:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = ba^x$$

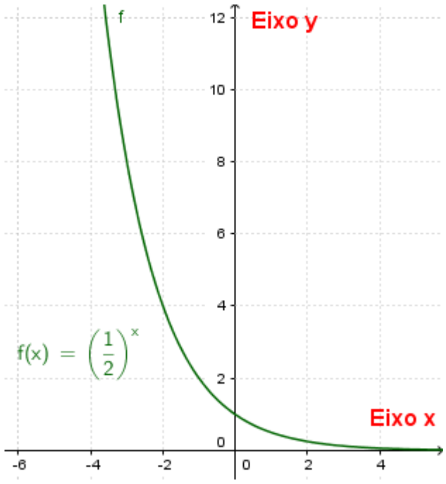
O domínio é o conjunto $Dom(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}_+{}^*$. Se $a > 1$, o gráfico da função $f(x) = a^x$ é crescente e se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ será decrescente. Isso pode ser visualizado na figura 26 onde $a = 2$ e na figura 27 onde $a = \frac{1}{2}$.

Figura 26 - Gráfico da função $f(x) = 2^x$



Fonte: a própria autora

Figura 27 - Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: a própria autora

Enunciaremos agora e não demonstraremos um resultado que será muito útil ao trabalhar com as funções trigonométricas seno e cosseno.

Teorema 1: Existe um único par de funções definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por $sen(x)$ e $cos\ (x)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $sen\, 0 = 0$

ii. $cos\, 0 = 1$

iii. $sen(a \pm b) = sen\, a \cdot cos\, b \pm sen\, b \cdot cos\, a$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

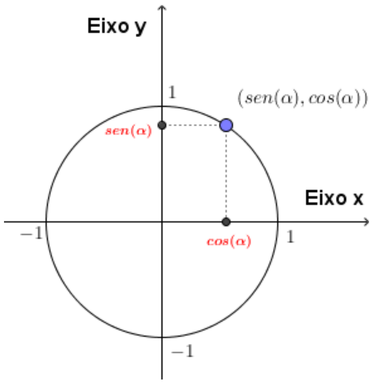
iv. $cos(a \pm b) = cos\, a \cdot cos\, b \mp sen\, a \cdot sen\, b$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

A seguir, veremos outras propriedades que decorrem das quatro mencionadas no teorema anteriormente. Substituindo em (iv) $a = b = \alpha$, obtemos: $cos\, 0 = cos\, \alpha \cdot cos\, \alpha + sen\, \alpha \cdot sen\, \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

v. $cos^2\, \alpha + sen^2\, \alpha = 1$

Deste modo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o ponto $(cos\, \alpha\,,\ sen\, \alpha)$ pertence à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, como pode ser visto no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 28 - Círculo trigonométrico



Fonte: a própria autora

vi. $cos^2\, \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

vii. $sen^2\, \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\, 2\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

viii. $cos\, 2\alpha = cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

ix. $sen\, 2\alpha = 2\, cos\, \alpha \cdot sen\, \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, com esses resultados, definiremos a função cosseno e seno.

3.8.5 Função cosseno

Definição 17: Definimos como função cosseno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que para cada número real x, associamos o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, para cada x temos $cos(x)$.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = cos(x)$$

Para representarmos graficamente a função cosseno, vamos atribuir alguns valores para x e calcular o valor correspondente a ele na $f(x) = y$, como mostra o quadro abaixo:

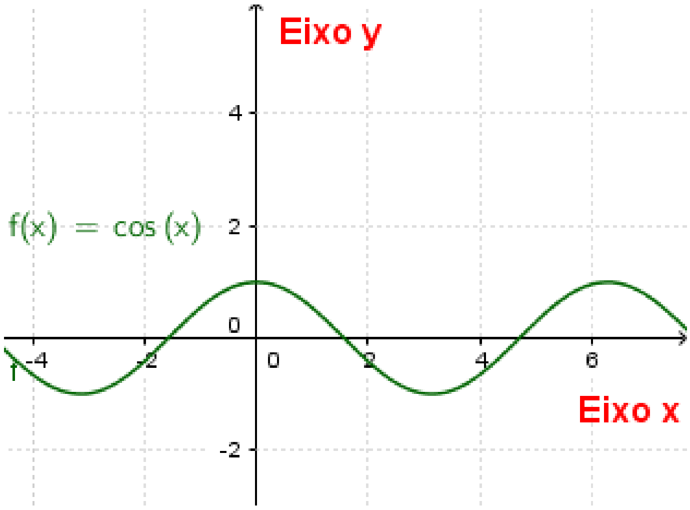
Quadro 4 - $f(x) = cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = cos(x)$	$cos(0) = 1$	$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$cos(\pi) = -1$

Fonte: a própria autora

Logo, o gráfico da função cosseno está representado na figura abaixo:

Figura 29 - Gráfico da função cosseno



Fonte: a própria autora

Baseado no gráfico da figura 29 podemos concluir que:

- O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função cosseno é $Img(f) = [-1,1]$.
- A função cosseno se repete de 2π em 2π, ou seja, seu período é 2π.

Exemplo 18: Verifique se a função $f(x) = cos\ (x)$ é uma função par.

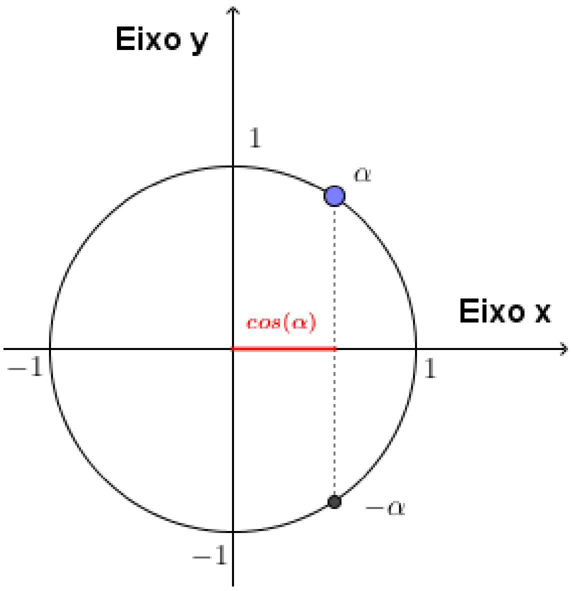
Substituindo $a = 0$ e $b = x$ em $cos(a - b) = cos\, a \cdot cos\, b + sen\, a \cdot sen\, b$, temos:

$$cos(-x) = cos\,0 \cdot cos(x) + sen\,x \cdot sen\,0$$

Sabendo que $sen\,0 = \ 0$ e $cos\,0 = \ 1$ segue que: $cos(-x) = cos\,x$.

Sendo assim, podemos concluir que a função $f(x) = cos\,(x)$ é uma função par. Como pode ser visto no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 30 - Círculo trigonométrico da função $f(x) = cos(\alpha)$



Fonte: a própria autora

Exemplo 19: Calcule $cos\frac{\pi}{4}$.

Sabendo que $cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,(2x)$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Como $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, temos:

$$cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Além disso, $cos\frac{\pi}{4} > 0$, logo, $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106781$.

3.8.6 Função seno

Definição 18: Definimos como função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que para cada número real x, associamos o seno a medida de um arco em x radianos, ou seja, para cada x temos $sen(x)$.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x) = sen(x)$$

Para representarmos graficamente a função seno, vamos atribuir alguns valores para x e calcular o valor correspondente a ele na $f(x) = y$, como mostra o quadro abaixo:

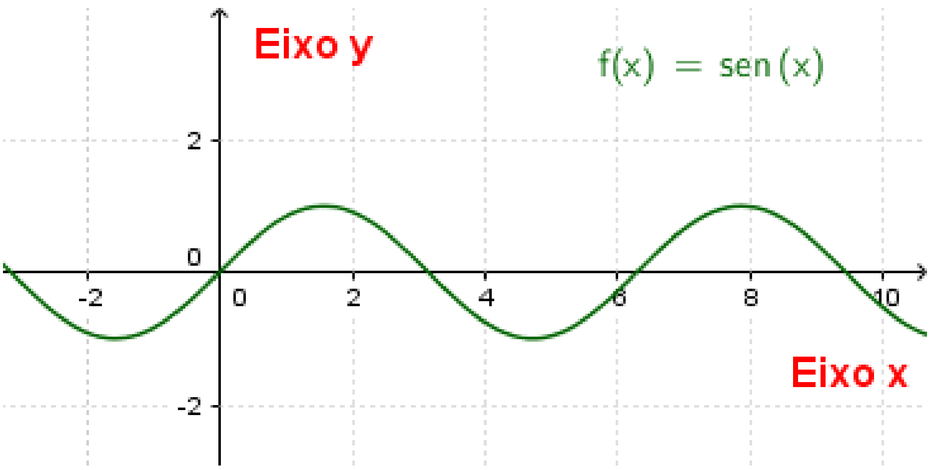
Quadro 5 - $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = sen(x)$	$sen(0) = 0$	$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$sen(\pi) = 0$

Fonte: a própria autora

Logo, o gráfico da função seno esta representado na figura abaixo:

Figura 31 - Gráfico da função seno



Fonte: a própria autora

Baseado no gráfico da função seno podemos tirar algumas conclusões:

- O domínio da função seno é o conjunto dos números reais
- A imagem da função seno é $Img(f) = [-1,1]$.
- A função seno se repete de 2π em 2π, ou seja, seu período é 2π.

Exemplo 20: Verifique se a função $f(\alpha) = sen(\alpha)$ é uma função ímpar.

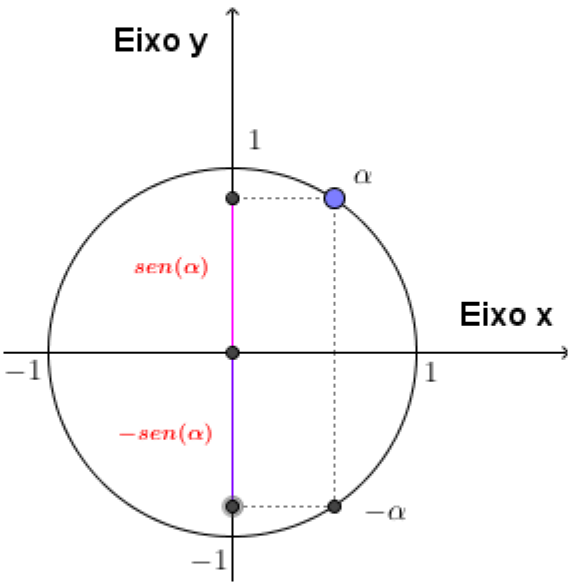
Substituindo $a = 0$ e $b = \alpha$ em $sen(a - b) = sen\, a \cdot cos\, b - sen\, b \cdot cos\, a$, temos:

$$sen(-\alpha) = sen\, 0 \cdot cos\, \alpha - sen\, \alpha \cdot cos\, 0$$

Sabendo que $sen\, 0 = 0$ e $cos\, 0 = 1$ segue que: $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$.

Sendo assim, podemos concluir que a função $f(\alpha) = sen\,(\alpha)$ é uma função ímpar. Isto pode ser visto no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 32 - Círculo trigonométrico da função $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: a própria autora

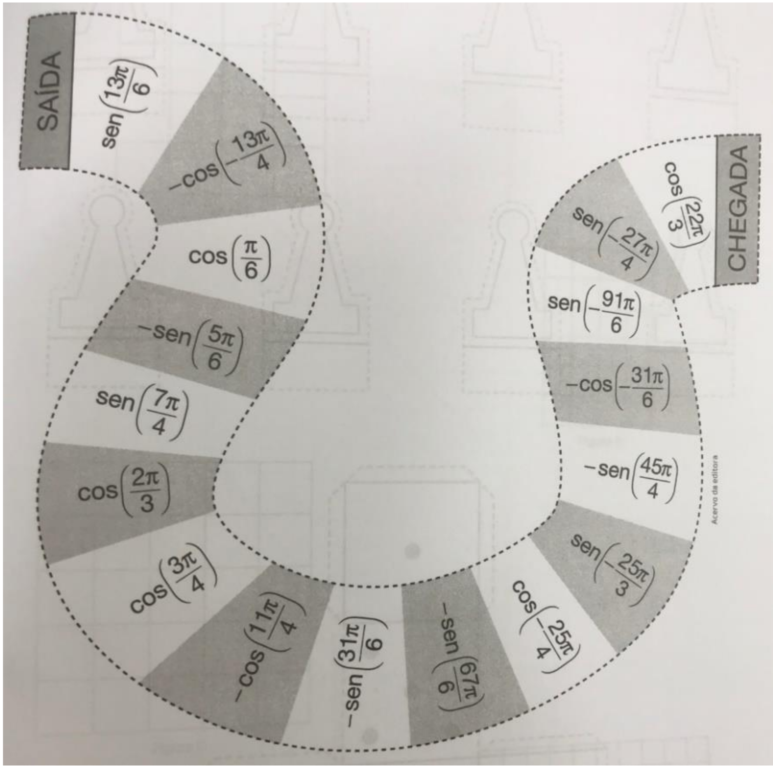
Atividade 01: JOGO

Para a realização do jogo, separe os alunos em grupos de três ou quatro integrantes, entregue um dado e o tabuleiro que se encontra a seguir. Este jogo foi retirado (SOUZA, 2016, p. 308).

Peça para cada aluno escolher um peão e o coloque na casa SAÍDA do tabuleiro. Depois, peça aos alunos que sorteiem a sequência em que os integrantes do grupo irão jogar (essa sequência será mantida até o fim do jogo).

Um integrante de cada equipe joga o dado, para ver quem irá iniciar o jogo. A equipe que tirar o maior valor, inicia o jogo arremessando o dado. O primeiro integrante deste grupo, joga o dado e percorre, sobre o tabuleiro com seu respectivo peão, o número de casas indicado no dado. O aluno deverá calcular o valor do seno (ou cosseno) indicado na casa que parar no máximo em 10 minutos, anotando esse valor em uma folha de papel. Caso o aluno erre a resposta, não deverá anotá-la. A conferência da resposta deve ser feita pelos outros integrantes do grupo. Após a jogada, caso o aluno acerte a resposta, o dado deve ser passado para o próximo jogador da sua equipe, se não deve ser passado para o primeiro jogador da outra equipe, que realizará o mesmo processo. O jogo termina quando um dos alunos percorrer todo o tabuleiro e alcançar a CHEGADA. Em seguida, cada aluno soma os valores anotados na folha. O vencedor será aquele que tiver maior soma.

Figura 33 - Tabuleiro do jogo



Fonte: retirado do livro

Resolução: A seguir calcularemos o valor de algumas casas do tabuleiro em dois modos: o primeiro modo será por redução ao primeiro quadrante e o segundo modo por fórmulas de transformação, ou seja, seno da soma ou da diferença e cosseno da soma ou da diferença. O cálculo das demais casas podem ser encontradas no apêndice A.

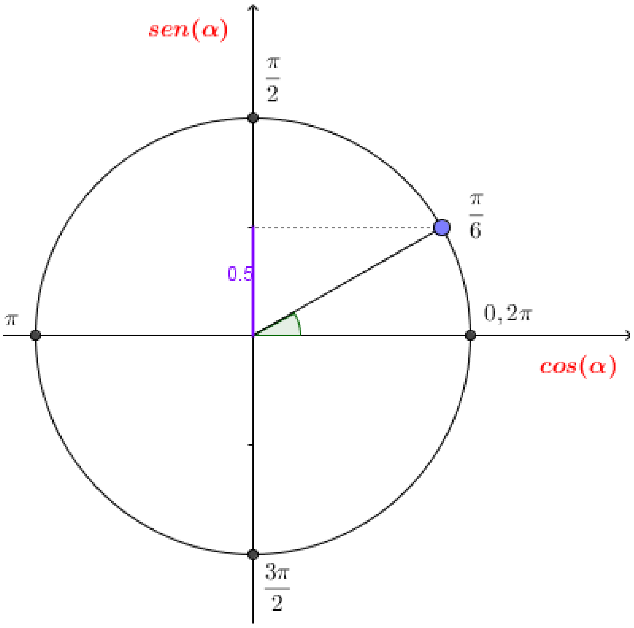
Resolução (1ª possibilidade): Redução ao primeiro quadrante

<u>CASA 1</u>: $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{13\pi}{6}$.

Dividindo 13π por 6, temos que, $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{13\pi}{6}$ equivale a uma volta completa mais $\frac{\pi}{6}$ e como $\frac{\pi}{6}$ está no 1º quadrante, segue que, $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Podemos verificar no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 34 - Representação do $\boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}\right)$



Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo vertical se refere a $sen(\alpha)$ e que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Concluímos que $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 2</u>: $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

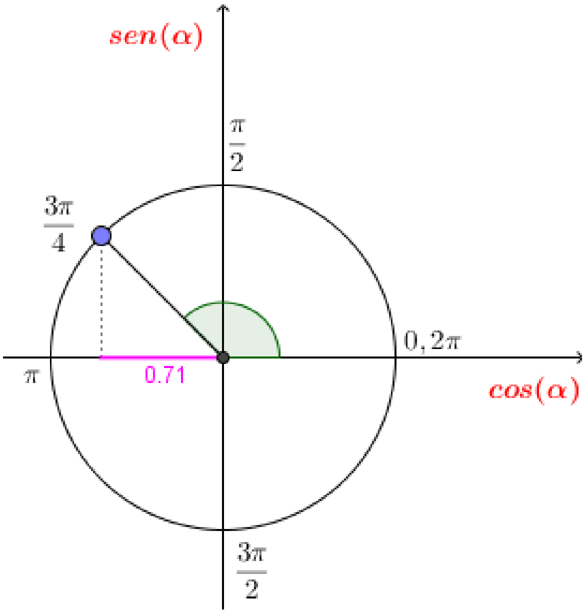
$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$$

Dividindo 13π por 4, temos que, $\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\frac{13\pi}{4}$ equivale a duas voltas e meia mais $\frac{\pi}{4}$ e como $\frac{13\pi}{4}$ está no 3º quadrante, segue que:

$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Podemos verificar no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 35 - Representação do $\boldsymbol{cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



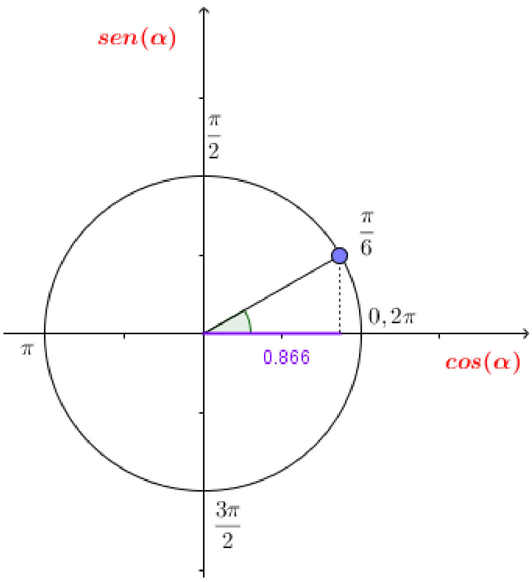
Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo horizontal se refere a $cos(\alpha)$ e que $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0{,}71$. Concluímos que $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = 0{,}71$.

<u>**CASA 3**</u>**:** $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Sabendo que $\frac{\pi}{6}$ é um ângulo notável e que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866$. Podemos verificar no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 36 - Representação do $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$



Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo horizontal se refere a $cos(\alpha)$.

Podemos concluir que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,866$.

A seguir vamos resolver utilizando as fórmulas de transformação da soma ou subtração de dois ângulos da função seno e soma ou subtração de dois ângulos da função cosseno.

Resolução (2ª possibilidade): Fórmula de transformação soma ou subtração de dois ângulos da função seno ou cosseno.

<u>CASA 1</u>: $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Podemos escrever $\frac{13\pi}{6}$ como sendo $2\pi + \frac{\pi}{6}$.

Logo, $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja:

$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos\ (\beta) + sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sen(2\pi).cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ sen\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(2\pi)$$

Como $sen(2\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$, temos:

$$sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$.

Podemos concluir que $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0,5$.

<u>CASA 2</u>: $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$$

Podemos escrever $\frac{13\pi}{4}$ como sendo $3\pi + \frac{\pi}{4}$.

Logo, $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, ou seja:

$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$-\left[cos(3\pi).cos(\frac{\pi}{4}) - sen(3\pi).sen\ (\frac{\pi}{4})\right]$$

Como $sen(3\pi) = 0$ e $cos(3\pi) = -1$, temos:

$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -\left[-cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 3</u>: $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Como $\frac{\pi}{6}$ é um dos ângulos notáveis, sabemos que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866$.

<u>CASA 4</u>: $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Podemos escrever $\frac{5\pi}{6}$ como sendo $\pi - \frac{\pi}{6}$.

Logo, $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -sen\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da subtração de dois ângulos, ou seja: $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha).cos(\beta) - sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -sen\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\left[sen(\pi).cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(\pi)\right]$$

Como $sen(\pi) = 0$ e $cos(\pi) = -1$, temos:

$$-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Podemos concluir que $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}5$.

3.9 LIMITE DE FUNÇÕES

Para entendermos o limite, trabalharemos com uma vizinhança de x em torno de um ponto a e simultaneamente com uma vizinhança de $f(x)$ quando x se aproxima de a.

A pergunta seria: *O que acontece com $f(x)$ quando x se aproxima de a?*

Tomemos a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Vemos que f não esta definida em $x = 0$, aliás, $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$. Porém, o que acontece com $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende a 0, ou seja, numa vizinhança de zero? Analisemos o quadro a seguir:

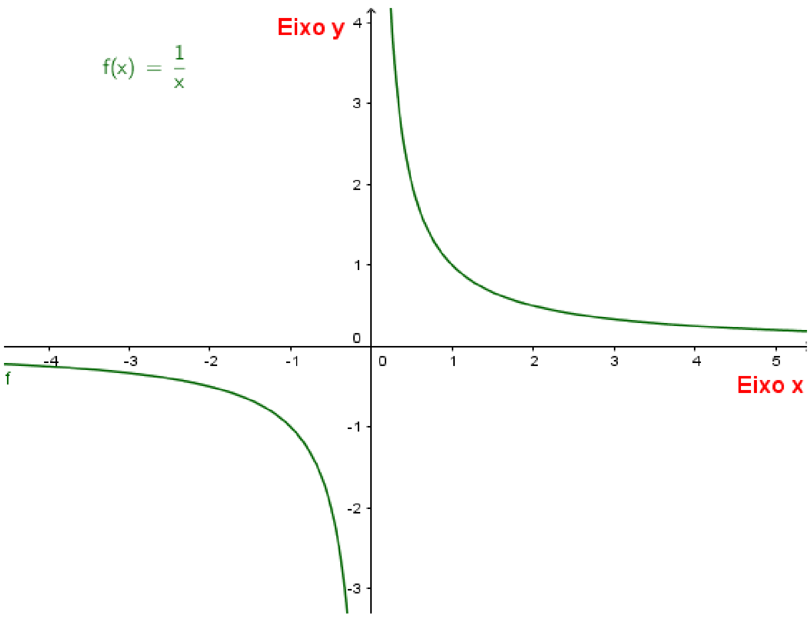
Quadro 6 - $f(x) = \frac{1}{x}$ para valores entre $(-0{,}001,\ 0{,}001)$

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
$-0{,}1$	-10
$-0{,}01$	-100
$-0{,}001$	-1000
$0{,}1$	10
$0{,}01$	100
$0{,}001$	1000

Fonte: a própria autora

Notemos que quanto menor tomarmos o valor de x a direita de zero, maior será o valor da $f(x)$. Por outro lado, quanto mais nos aproximarmos de zero, a esquerda de zero, ou ainda por valores negativos, menor será o valor da $f(x)$. Veja o gráfico a seguir:

Figura 37- Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: a própria autora

Exemplo 21: Complete o quadro a seguir e responda:

Quadro 7 - $f(x) = \frac{1}{x}$ para valores entre $(-1000, \quad 1000)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$
-10	$-0{,}1$
-100	$-0{,}01$
-1000	$-0{,}001$
10	$0{,}1$
100	$0{,}01$
1000	$0{,}001$

Fonte: a própria autora

1. Qual o comportamento da f quando x decresce ilimitadamente?

Analisando o quadro anterior, vimos que, quando x decresce ilimitadamente,o valor da $f(x)$fica cada vez menor, ou seja, o valor da $f(x)$ se aproxima zero.

2. Qual o comportamento da f quando x cresce ilimitadamente?

E quando x cresce ilimitadamente, o valor da $f(x)$ fica cada vez menor, ou seja, o valor da $f(x)$ se aproxima zero.

Definição 19: Seja f uma função definida num intervalo aberto I, contendo p, exceto possivelmente no próprio número p. O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de p é L, que pode ser escrito como:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Separa todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in Dom(f)$,

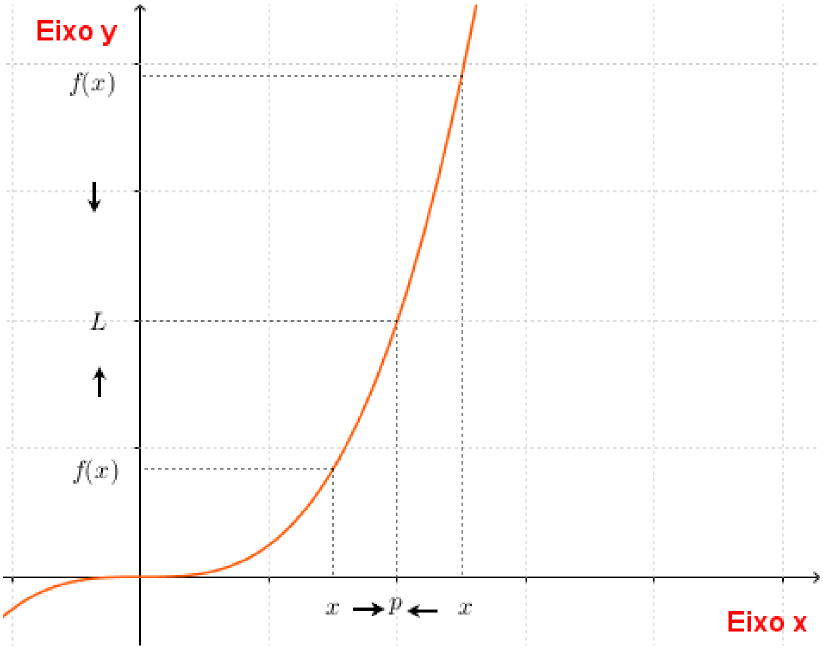
$$0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observações:

- O $\lim_{x \to p} f(x) = L$ existe, quando L for um número e único.
- É importante percebermos que na definição dada, não é mencionado sobre o valor da função quando $x = p$. Isto é, não é necessário que a função seja definida para $x = p$, a fim de que exista $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Veja a seguir o comportamento da função na figura do limite de $\boldsymbol{f}$ no ponto $\boldsymbol{p}$.

Figura 38 - Análise do limite de f no ponto p



Fonte: a própria autora

Neste trabalho não vamos nos ater a teoria de limite de uma função, apenas a noção intuitiva e algumas propriedades, o suficiente para definirmos o conceito de derivada, pois este é o objetivo primeiro. Lembrando que queremos chegar nos polinômios de Taylor.

Exemplo 22: Verifique o comportamento da função $f(x) = x^3$ quando x de aproxima de zero?

Quadro 8 - $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ para valores entre (-0,001, 0,001)

x	$f(x) = x^3$
$-0{,}1$	$-0{,}001$
$-0{,}01$	$-0{,}000001$
$-0{,}001$	$-0{,}000000001$
$0{,}1$	$0{,}001$
$0{,}01$	$0{,}000001$
$0{,}001$	$0{,}000000001$

Fonte: a própria autora

O quadro nos mostra intuitivamente que, quando x se aproxima de zero, a $f(x) = x^3$ também se aproxima de zero, ou seja: $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$.

Exemplo 23: Verifique o comportamento da função $f(x) = x^3$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Quadro 9 - $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ para valores entre $(\mathbf{-10000},\ \mathbf{10000})$

$\boldsymbol{x}$	$f(x) = x^3$
-10	-1.000
-100	-10.000
-1000	-100.000
-10000	$-100.000.000.000$
10	1.000
100	10.000
1000	100.000
10000	$100.000.000.000$

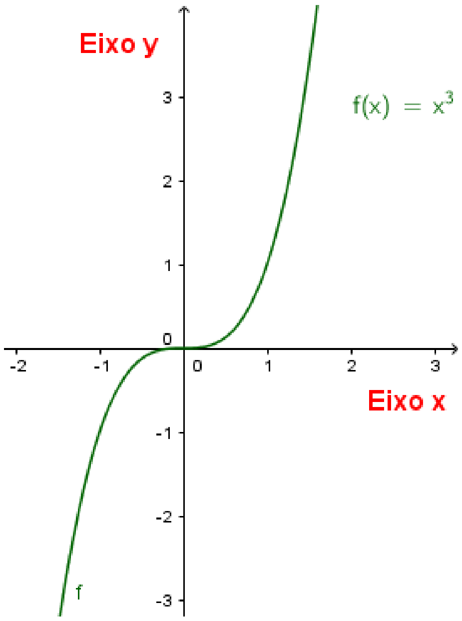
Fonte: a própria autora

De fato, conforme o quadro nos mostra intuitivamente, quando x tende a mais infinito, $f(x) = x^3$ tende a mais infinito e quando x tende a menos infinito, $f(x) = x^3$ tende a menos infinito. Podemos escrever matematicamente da seguinte forma:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Notemos graficamente o comportamento de $f(x) = x^3$.

Figura 39 - Gráfico da função $f(x) = x^3$



Fonte: a própria autora

Exemplo 24: Verifique o comportamento da função $f(x) = x^4$ quando x de aproxima de zero.

Quadro 10 - $f(x) = x^4$ para valores entre $(-0{,}001, \quad 0{,}001)$

$\boldsymbol{x}$	$f(x) = x^4$
$-0{,}1$	$0{,}0001$
$-0{,}01$	$0{,}00000001$
$-0{,}001$	$0{,}000000000001$
$0{,}1$	$0{,}0001$
$0{,}01$	$0{,}00000001$
$0{,}001$	$0{,}000000000001$

Fonte: a própria autora

O quadro nos mostra intuitivamente que, quando x se aproxima de zero, a função $f(x) = x^4$ também se aproxima de zero, ou seja: $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$.

Atividade 02: Sugerimos que faça a atividade que está no apêndice B.

Exercício 3: Preencha o quadro a seguir:

Quadro 11 - Operações com $\boldsymbol{g(x) = x^7}$ e $\boldsymbol{h(x) = x^{20}}$

$\boldsymbol{x}$	$g(x) = x^7$	$h(x) = x^{20}$	$g(x) + h(x)$
-10	$g(-10) = (-10)^7 = -10^7$		
-100	$g(-100) = (-100)^7 = -100^7$		
-1000	$g(-1000) = (-1000)^7 = -1000^7$		
-10000	$g(-10000) = (-10000)^7 = -10000^7$		
10	$g(10) = (10)^7 = 10^7$		
100	$g(100) = (100)^7 = 100^7$		
1000	$g(1000) = (1000)^7 = 1000^7$		
10000	$g(10000) = (10000)^7 = 10000^7$		

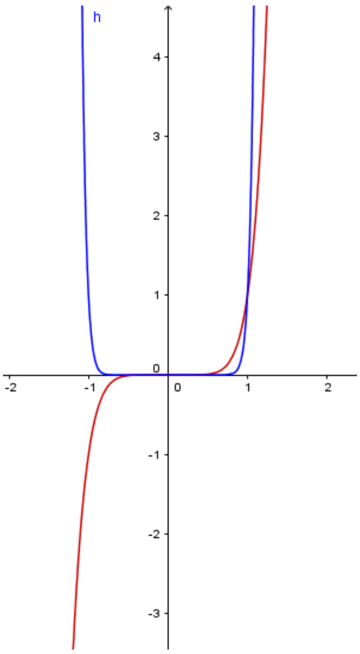
Fonte: a própria autora

Exercício 4: Preencha o quadro a seguir:

Quadro 12 - Cálculo dos limites de $\boldsymbol{g(x) = x^7}$ e $\boldsymbol{h(x) = x^{20}}$

<table>
<tr><td rowspan="4">

Figura 40 - Gráfico de $\boldsymbol{g(x) = x^7}$ e $\boldsymbol{h(x) = x^{20}}$



Fonte: a própria autora

</td><td>$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^7 =$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^7 =$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{20} =$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{20} =$</td></tr>
</table>

Fonte: a própria autora

Observação 1: Neste trabalho não nos fixaremos a funções com comportamento mais elaborado, somente a funções que possui limite em todos os pontos de seu domínio, quais sejam:

1. A função polinomial: $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ são números reais chamados coeficientes do polinômio e $a_n \neq 0$;
2. A função seno, $g(x) = sen(x)$;
3. A função cosseno, $h(x) = cos(x)$;
4. A função exponencial, $F(x) = e^x$.

Observação 2: Mais adiante veremos que estas funções são contínuas e diferenciáveis em todos os pontos de seu domínio.

Para estas funções vale várias propriedades de limites, que não provaremos, por exemplo:

1. O limite de uma constante é sempre a própria constante.
2. O limite da soma é a soma dos limites.
3. O limite do produto é o produto dos limites.
4. O limite do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pelo limite da função.

Exemplo 25: Sejam f, g, h, F quaisquer das funções da *Observação 1*, onde $p \in Dom(f) = Dom(g) = Dom(h) = Dom(F) = \mathbb{R}$ e $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, é sempre válido que:

1. $\lim_{x\to p}\big(f(x) + g(x) + h(x) + F(x)\big) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x) + \lim_{x\to p} h(x) + \lim_{x\to p} F(x)$
2. $\lim_{x\to p}(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot F(x)) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x) \cdot \lim_{x\to p} h(x) \cdot \lim_{x\to p} F(x)$
3. $\lim_{x\to p}(a_1 \cdot f(x) + a_2 \cdot g(x) + a_3.h(x) + a_4 \cdot F(x)) = a_1 \cdot \lim_{x\to p} f(x) + a_2 \cdot \lim_{x\to p} g(x) + a_3 \cdot \lim_{x\to p} h(x) + a_4 \cdot \lim_{x\to p} F(x)$

Exemplo 26: Determine o limite da função $f(x) = 3x^2 + co\,s(x) + \pi x^7$ quando $x \to 1$ (x tende a 1).

$$\lim_{x\to 1} (3x^2 + cos\,(x) + \pi x^7) = 3 \cdot \lim_{x\to 1}\ x^2 + \lim_{x\to 1}\ cos\,(x) + \pi \cdot \lim_{x\to 1}\ x^7 =$$

$$3 \cdot 1^2 + cos(1) + \pi \cdot 1^7 = 3 + cos(1) + \pi$$

Uma vez tendo pressuposto os conteúdos que os professores precisam saber, vamos começar com os conteúdos que nós pretendemos trabalhar nessa dissertação. Iniciaremos com o conceito de vizinhança, pois utilizaremos no trabalho inteiro e que é um dos pontos onde os professores tiveram dificuldades e é um conceito que está no artigo.

4 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS

Neste capítulo trataremos de um conceito muito importante nas funções que é o de continuidade. Este conceito é fundamental para analisarmos o comportamento de uma função numa vizinhança de um determinado ponto x, ou em torno dele. Para falarmos de continuidade precisamos definir vizinhança de um ponto.

Os professores que realizaram a oficina Klein desconheciam o conceito matemático de vizinhança. Então, achamos pertinente introduzir o conceito de vizinhança, sua interpretação geométrica, sua relação com o *epsilon* e o que significa *epsilon* maior que zero.

Enunciaremos, sem demonstração, dois dos mais importantes resultados deste trabalho, que dá condições e afirma que é possível aproximar uma função real por uma função polinomial.

4.1 Vizinhança

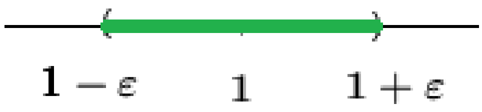
A noção de vizinhança é bem intuitiva. Imagine um ponto x na reta, chamamos uma vizinhança de x a um intervalo aberto que contenha x. Por exemplo, o que é uma vizinhança em torno do 1? É tomar um intervalo um pouquinho a direita de 1 e um pouquinho a esquerda de 1. O que é esse um pouquinho? São, por exemplo, os incrementos 0,1 e 0,01. Como existem infinitas vizinhanças em torno de 1, colocamos algumas no quadro a seguir:

Quadro 13 - Vizinhança de 1

	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{x-\varepsilon}$	$\boldsymbol{x+\varepsilon}$
$\boldsymbol{x=1}$	$0{,}1$	$1-0{,}1=0{,}9$	$1+0{,}1=1{,}1$
	$0{,}01$	$1-0{,}01=0{,}99$	$1+0{,}01=1{,}01$
	$0{,}001$	$1-0{,}001=0{,}999$	$1+0{,}001=1{,}001$

Fonte: a própria autora

Figura 41 - Gráfico da vizinhança de 1

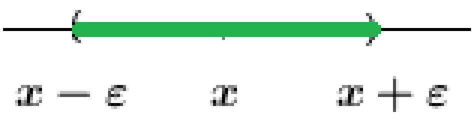


Fonte: a própria autora

Note como $1-\varepsilon$ ou $1+\varepsilon$ fica tão próximo de 1 quanto menor tomarmos o valor de ε. Isto é o que chamamos de vizinhança de 1. Note ainda que 1 tem vizinhança a esquerda e a direita. Formalmente temos:

Definição 20: Dado $\epsilon > 0$ chamamos de vizinhança simétrica ou simplesmente vizinhança de $x \in \mathbb{R}$ ao intervalo aberto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Dizemos que tal intervalo tem raio ϵ.

Figura 42 - Gráfico da vizinhança de x



Fonte: a própria autora

Por que é importante entender o conceito de vizinhança?

- No decorrer do trabalho vamos utilizar o conceito de vizinhança em torno de um ponto.
- Para trabalhar com aproximação de uma função em torno de um ponto, nós precisamos saber o conceito de vizinhança.

Em seguida definiremos função contínua, provaremos resultados importantes como, por exemplo, toda função polinomial é contínua, daremos uma visualização geométrica do Teorema do Valor intermediário (T.V.I) e resolvemos alguns exercícios aplicando o T.V.I. Finalizamos este capítulo provando o Teorema do Anulamento. A próxima seção também precisa do conceito de vizinhança, que é a de funções contínuas.

4.2 Funções contínuas

O objetivo principal aqui é que os professores entendam que as funções: polinomiais, seno, cosseno e exponencial são contínuas. Conforme está escrito no artigo, o gráfico de uma função contínua, pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel. Se analisarmos os gráficos das funções polinomial, seno, cosseno e exponencial, que foram mostrados anteriormente, podemos perceber que conseguimos traçá-los sem tirar o lápis do papel, que é uma das frases que o autor coloca no artigo. Embora ter visto apenas um gráfico, todos os gráficos de funções polinomiais nós fazemos sem tirar o lápis do papel, da função seno, cosseno e exponencial também.

Mas qual é o conceito de função contínua? Como definimos função contínua? Aqui vamos utilizar o conceito de limite. É o que vamos ver nas próximas seções.

Definição 21: Dizemos que uma função f é contínua em p, pertencente ao seu domínio, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. f é definida no ponto p;
2. $\lim\limits_{x \to p} f(x)$existe;
3. $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$

A seguir, explicitaremos algumas propriedades de continuidade que utilizaremos no decorrer deste trabalho, porém não provaremos:

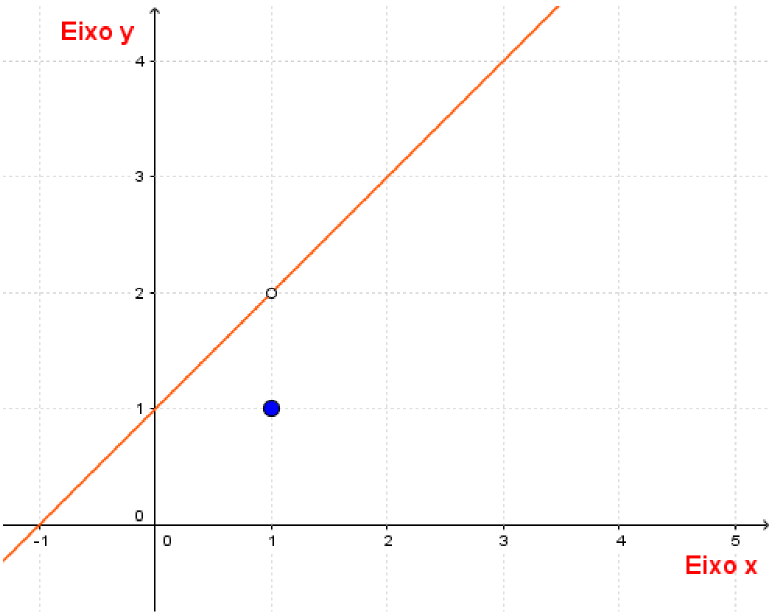
1. A soma de funções contínuas é uma função contínua.
2. O produto de funções contínuas é uma função contínua.
3. O quociente de funções contínuas $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, é uma função contínua, desde que $g(x) \neq 0$.

Como estamos habituados a ver os gráficos de funções traçados por uma curva sem tirar o lápis do papel, o que significa uma função não ser contínua? Para isso, vamos dar um exemplo de uma função que não é contínua, pra vermos que existem funções que não são contínuas.

Exemplo 27: Seja $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se\ x \neq 1 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$. A função g é contínua em $p = 1$?

Temos aqui uma função definida por duas sentenças, cujo o gráfico da função $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se \ \ x \neq 1 \\ 1, & se \ x = 1 \end{cases}$ está a seguir.

Figura 43 - Gráfico da função $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se \ x \neq 1 \\ 1, & se \ x = 1 \end{cases}$



Fonte: a própria autora

O domínio desta função são todos os reais, porém, quando fizemos o gráfico desta função, não conseguimos fazer ele, sem tirar o lápis do papel, então esta função não é contínua de acordo com o artigo.

Como concluímos isso, por meio da definição de função contínua?

- O domínio desta função são todos os reais, o ponto que poderia dar problema é o 1, mas ele está no domínio da função e a $g(1) = 1$.
- O limite da g quando x tende a 1 é igual a dois, ou seja, $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$
- Como $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$, concluímos que g não é contínua em $x = 1$.

Então aqui nós temos um exemplo de uma função que não é contínua, isso é para o leitor verificar que embora nós estejamos trabalhando só com funções contínuas, existe uma infinidade de funções que não são contínuas.

Atividade 03: Plotar no GeoGebra, qualquer função polinomial e, observar que se colocarmos um lápis sobre a curva que a descreve, não o retiramos do papel, isto é, a curva é ininterrupta. Utilizando o gráfico, explicite o domínio da função, a imagem, marque no gráfico os pontos onde a função assume maior e/ou menor valor, intervalos de crescimento e decrescimento, marque no gráfico as raízes da função, intervalos que contém uma única raiz da função, intervalos onde a função é negativa e intervalos onde a função á positiva, intervalo onde a função intercepta o eixo das ordenadas, limites conforme tabela.

SUGESTÃO: Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$, plotar no GeoGebra:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2$

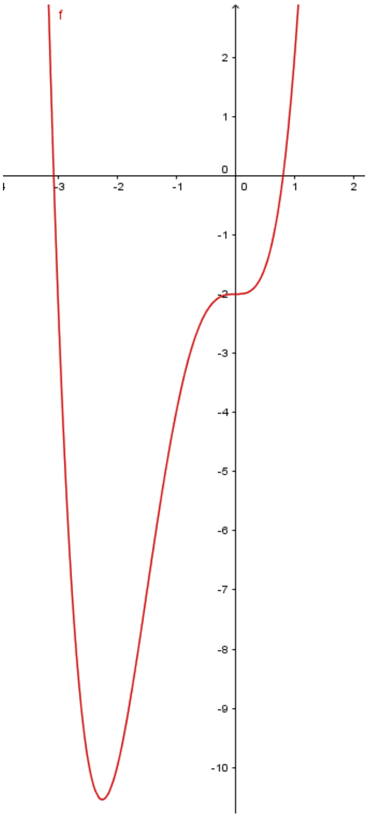
b) $f(x) = 5x^7 + 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{3}{2}x^{10} + x^3 + 2$

Resolução: Façamos o item (a) dado pela função $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2$

Quadro 14 - Análise da função $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 3x^3 - 2}$

<table>
<tr><td colspan="3">$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td>$Dom(f)$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$Im(f)$</td><td>$(f(x_1), +\infty)$</td></tr>
<tr><td>Ponto onde f assume o menor valor – marcar no gráfico</td><td>$(x_1, f(x_1))$</td></tr>
<tr><td>f cresce</td><td>$(x_1, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>f decresce</td><td>$(-\infty, x_1)$</td></tr>
<tr><td>Marcar no gráfico as raízes r_1 e r_2</td><td></td></tr>
<tr><td>(a,b)tal que r_1 , $r_2 \in (a,b)$</td><td>$(-4,-3)$ e $(0,1)$</td></tr>
<tr><td>x tal que $f(x) = 0$</td><td>r_1 e r_2</td></tr>
<tr><td>$f > 0$</td><td>$(-\infty, r_1)$ e $(r_2, +\infty)$</td></tr>
</table>

Figura 44 - Gráfico da $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2$  **Fonte:** a própria autora	$f < 0$	(r_1, r_2)
	Intersecção com eixo y	$\big(0, f(0)\big) = (0, -2)$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$
	Para qualquer $b \in Dom(f)$, temos $\lim\limits_{x \to b} f(x)$	$b^4 + 3b^3 - 2$

Fonte: a própria autora

<u>*Observação 1*</u>*:* Se não tivéssemos o gráfico, como faríamos para encontrar os intervalos que contém uma raiz da função?

DICA: Analise o que acontece quando a função passa de positiva para negativa ou de negativa para positiva.

Nós vimos que para uma função ser contínua, ela é contínua no ponto. Uma função é contínua no seu domínio, se ela for contínua em todos os pontos do seu domínio.

A seguir vamos demonstrar matematicamente que as funções que vamos trabalhar que são as funções: polinomial, seno, cosseno e exponencial são contínuas em todos os reais.

4.2.1 Continuidade da função polinomial

Afirmamos no quadro 1 que toda função polinomial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, onde $a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ é contínua. Provaremos agora este resultado.

De fato, tomando um ponto qualquer $b \in \mathbb{R}$ e considerando

$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, com $a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

A função f será contínua, se e somente se, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$. Vejamos:

Aplicando o limite na f, e utilizando as propriedades de limite, temos que:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b}(a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\,) = \lim_{x \to b} a_n\, x^n + \lim_{x \to b} a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots$$

$$+ \lim_{x \to b} a_0 \;= a_n\; \times \lim_{x \to b} x^n + a_{n-1}\; \times \lim_{x \to b} x^{n-1} + \cdots + a_0 \times \lim_{x \to b} 1 =$$

$$a_n\; \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1\; \times b + a_0\; = f(b).$$

Sendo assim, podemos concluir que toda função polinomial é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$.

4.2.2 Continuidade da função seno

Provaremos agora que a função seno é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$. De fato, tomando um ponto qualquer $b \in \mathbb{R}$ e considerando $f(x) = sen(x)$. A função f será contínua, se e somente se: $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$, ou seja:

$$\lim_{x \to b} sen(x) = sen(b).$$

Vejamos:

Fixando $b \in \mathbb{R}$, e substituindo $x = b + h$ em $\lim\limits_{x \to b} sen(x)$, temos:

$$\lim_{x \to b} sen(x) = \lim_{h \to 0} sen(b + h)$$

Utilizando a propriedade $sen(a\; +\; b) =\; sen\, a \cdot cos\, b + sen\, b \cdot cos\, a$, temos:

$$\lim_{h \to 0} sen(b + h) = \lim_{h \to 0}(sen\, b \cdot cos\, h + sen\, h \cdot cos\, b)$$

Aplicando as propriedades de limites temos:

$$\lim_{h \to 0} sen(b + h) = \lim_{h \to 0}(sen\, b \cdot cos\, h + sen\, h \cdot cos\, b) =$$

$$\lim_{h \to 0} \Big(sen\, b \cdot cos\, h) + \lim_{h \to 0}(sen\, h \cdot cos\, b\Big) = sen\, b \cdot \lim_{h \to 0}(cos\, h) + cos\, b \cdot \lim_{h \to 0}\,(sen\, h)$$

Como $\lim\limits_{h\to 0}(cos\, h) = 1$ e $\lim\limits_{h\to 0}(sen\, h) = 0$ temos que:

$$\lim_{h\to 0} sen(b+h) = sen(b).$$

Portanto, a função seno é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$.

4.2.3 Continuidade da função cosseno

Provaremos agora que a função cosseno é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$. De fato, tomando um ponto qualquer $b \in \mathbb{R}$ e considerando $f(x) = cos(x)$.

A função f será contínua, se e somente se, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$, ou seja:

$$\lim_{x\to b} cos(x) = cos(b)$$

Vejamos:

Fixando $b \in \mathbb{R}$, e substituindo $x = b + h$ em $\lim\limits_{x\to b} cos(x)$, temos:

$$\lim_{x\to b} cos(x) = \lim_{h\to 0} cos(b+h)$$

Utilizando a propriedade $cos(a + b) = cos\, a \cdot cos\, b - sen\, a \cdot sen\, b$, temos:

$$\lim_{h\to 0} cos(b+h) = \lim_{h\to 0}(cos\, b \cdot cos\, h - sen\, b \cdot sen\, h)$$

Aplicando as propriedades de limites temos:

$$\lim_{h\to 0} cos(b+h) = \lim_{h\to 0}(cos\, b \cdot cos\, h - sen\, b \cdot sen\, h) =$$

$$\lim_{h\to 0}\Big(cos\, b \cdot cos\, h) - \lim_{h\to 0}(sen\, b \cdot sen\, h\Big) = cos\, b \cdot \lim_{h\to 0}(cos\, h) - sen\, b \cdot \lim_{h\to 0}(sen\, h)$$

Como $\lim\limits_{h\to 0}(cos\, h) = 1$ e $\lim\limits_{h\to 0}(sen\, h) = 0$ temos que:

$$\lim_{h\to 0} cos(b+h) = cos(b).$$

Portanto, a função cosseno é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$.

4.2.3 Continuidade da função exponencial

Provaremos agora que a função exponencial é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$. De fato, tomando um ponto qualquer $b \in \mathbb{R}$ e considerando $f(x) = e^x$. A função f será contínua, se e somente se, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$, ou seja: $\lim\limits_{x\to b} e^x = e^b$. Vejamos:

Fixando $b \in \mathbb{R}$, e substituindo $x = b + h$ em $\lim\limits_{x\to b} e^x = e^b$, temos:

$$\lim_{x\to b} e^x = \lim_{h\to 0} e^{b+h}$$

Utilizando a propriedade $e^{b+h} = e^b \cdot e^h$, temos:

$$\lim_{h\to 0} e^{b+h} = \lim_{h\to 0}(e^b \cdot e^h)$$

Aplicando a propriedades de limite temos:

$$\lim_{h\to 0} e^{b+h} = e^b \cdot \lim_{h\to 0} e^h$$

Como $\lim_{h\to 0} e^h = 1$, temos que:

$$\lim_{x\to b} e^x = e^b.$$

Portanto, a função exponencial é contínua, para todo $b \in \mathbb{R}$.

Exercício 5: Plotar no GeoGebra o gráfico da função $f(x) = \cos(x) + sen(x)$. Esta função é contínua? Justifique.

Vocês já pararam para pensar como são feitos os programas que geram o gráfico de funções como esta? Pensem...

Exercício 6:

Faça no GeoGebra o gráfico de $f(x) = e^x$.

Faça no GeoGebra o gráfico de $f(x) = e^x + sen(x)$. Esta função é contínua? Justifique.

Vocês já pararam para pensar como são feitos os programas que geram o gráfico de funções como esta? Pensem...

Anteriormente, levantamos a seguinte questão:

<u>*Observação 1*</u>*:* Se não tivéssemos o gráfico, como faríamos para encontrar os intervalos que contém uma raiz da função?

Por outro lado, vocês já pararam para pensar na solução de equações como $cos(x) = x$ ou $ln(x) = \frac{1}{x}$, ou na existência de raízes de polinômios em determinados intervalos?

As equações $cos(x) = x$ e $ln(x) = \frac{1}{x}$, não têm solução algébrica, porém vamos mostrar um resultado que garante a existência de solução para estas equações e está diretamente ligada às funções contínuas.

4.2.4 Teorema do valor intermediário (T.V.I)

Teorema 2: Se f é uma função contínua num intervalo:

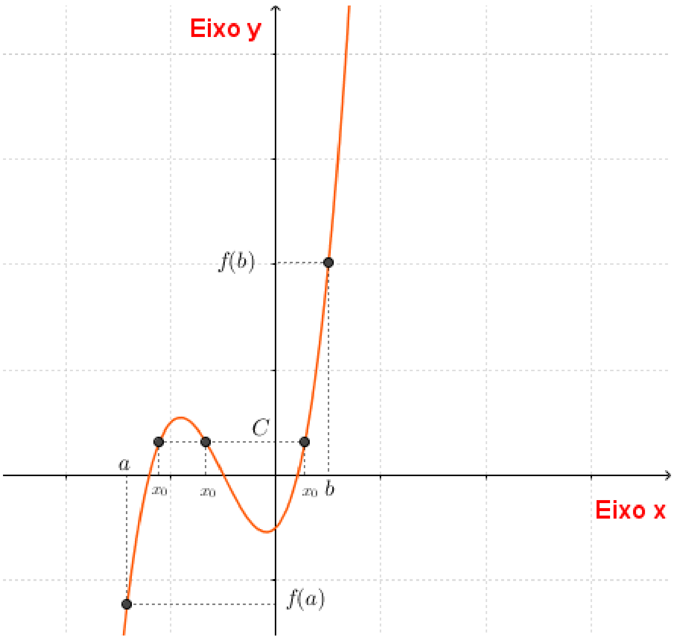
$$[a, b] \text{ e } f(b) < c < f(a) \text{ou } f(a) < c < f(b),$$

então existe um número $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

O teorema nos diz que se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então qualquer número entre os valores de $f(a)$e $f(b)$ pertence à imagem do intervalo $[a, b]$. Ou seja, a equação $f(x) = c$ possui pelo menos uma solução no intervalo $[a, b]$.

Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$, sendo assim f assumirá todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ no intervalo, ou seja, todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ são ordenadas de algum ponto do gráfico. Para qualquer c entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$. Veja graficamente este resultado:

Figura 45 - Gráfico exemplificando o Teorema do Valor intermediário



Fonte: a própria autora

Exemplo 28: Como já provamos $f(x) = cos\,(x)$ é uma função contínua, desta forma:

$$f(x) = cos(x) - x$$

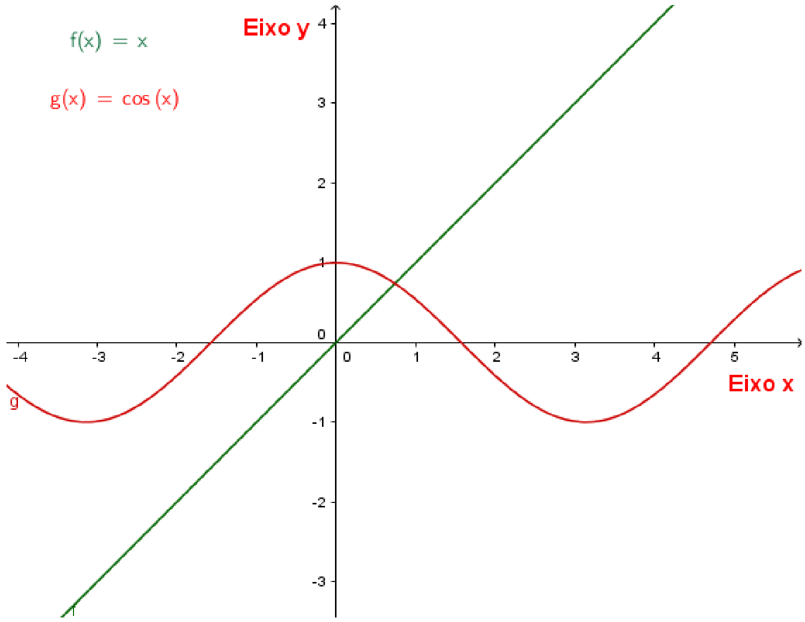
Já vimos que as funções $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = x$ são contínuas e a soma de funções contínuas são contínuas, então existe x_0 em algum intervalo tal que $f(c) = 0$. Vejamos:

$$f(c) = cos(c) - c = 0$$

$$cos(c) = c$$

O teorema garante a existência de x_0, embora não saibamos seu valor, que pode ser encontrado por um método numérico, como é mostrado no gráfico a seguir:

Figura 46 - Gráfico das funções $\boldsymbol{f(x) = x}$ e $\boldsymbol{g(x) = cos(x)}$



Fonte: a própria autora

Exemplo 29: Vamos fazer a mesma análise para $h(x) = ln(x) - \frac{1}{x}$.

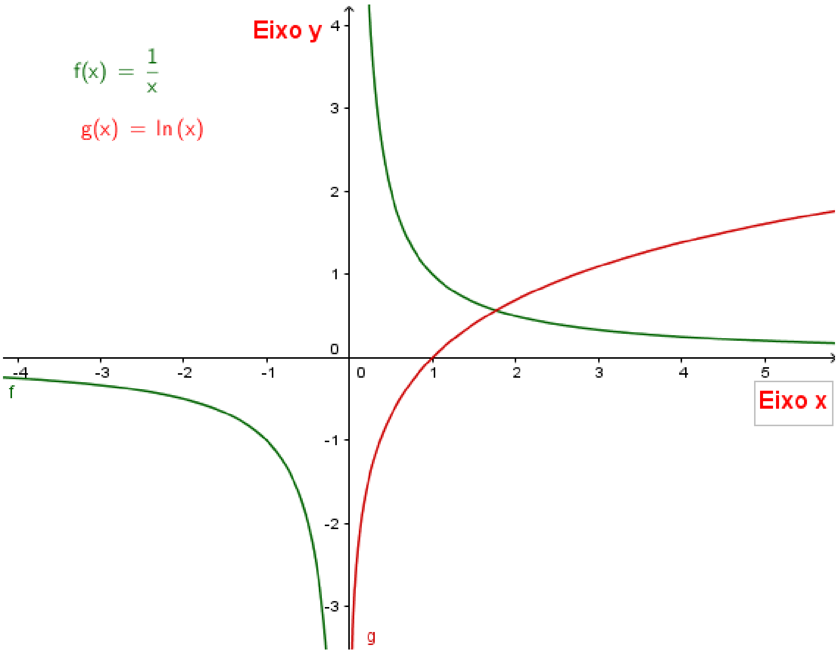
Já vimos que as funções $g(x) = ln(x)$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ são contínuas em todo o seu domínio e a soma de funções contínuas são contínuas, então existe x_0 em algum intervalo tal que $h(c) = 0$. Vejamos:

$$h(c) = ln(c) - \frac{1}{c} = 0$$

$$ln(c) = \frac{1}{c}$$

O teorema garante a existência de x_0, embora não saibamos seu valor, que pode ser encontrado por um método numérico, como é mostrado no gráfico a seguir:

Figura 47 - Gráfico das funções $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ e $\boldsymbol{g(x) = ln(x)}$



Fonte: a própria autora

Exemplos 30: Analise as funções abaixo:

1. $f(x) = x + 1$

Observe o gráfico da função $f(x) = x + 1$ representado na figura 18. Notem que, para todo $x < -1$ a função assume valores negativos, para $x > -1$ a função assume valores positivos e exatamente em $x = -1$ a função se anula, ou seja $f(-1) = 0$,ou ainda, $x = -1$ é uma raíz de f.

2. $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Analisem agora, o gráfico da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e complete o quadro a seguir:

Figura 48 - Gráfico da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ contendo $x_1,\ x_2\ e\ x_3$

Fonte: a própria autora

Quadro 15 - Análise da função $\boldsymbol{f(x) = x - \frac{x^3}{6}}$ contendo $\boldsymbol{x_1, x_2}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{x_3}$

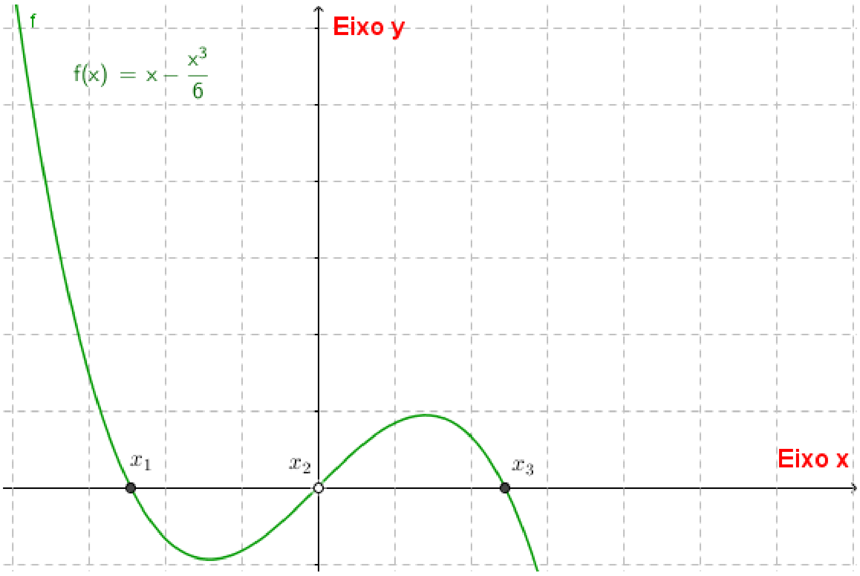
<table>
<tr><td colspan="6">$$f(x) = x - \frac{x^3}{6}$$</td></tr>
<tr><td>$Dom(f)$</td><td>$Im(f)$</td><td>f é contínua</td><td colspan="2">Sinal da f para</td><td>O que ocorre no ponto em que f muda de sinal</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="4">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="4">Analisando graficamente a função f, vemos que ela satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da definição. Logo, a função f é contínua em $p = 0$.</td><td>$x < x_1$</td><td>Positivo</td><td rowspan="4">Ela se anula, ou seja, ela não é positiva e nem negativa.</td></tr>
<tr><td>$x_1 < x < x_2$</td><td>Negativo</td></tr>
<tr><td>$x_2 < x < x_3$</td><td>Positivo</td></tr>
<tr><td>$x > x_3$</td><td>Negativo</td></tr>
</table>

Fonte: a própria autora

3. $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Analisem, agora, o gráfico da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e complete o quadro a seguir:

Figura 49 - Gráfico da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ contendo x_1 e x_3



Fonte: a própria autora

Quadro 16 - Análise da função $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ contendo x_1 e x_3

<table>
<tr><td colspan="6">$f(x) = x - \frac{x^3}{6}$</td></tr>
<tr><td>$Dom(f)$</td><td>$Im(f)$</td><td>f é contínua</td><td colspan="2">Sinal da f para</td><td>O que ocorre no ponto em que f muda de sinal</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\mathbb{R} - \{0\}$</td><td rowspan="4">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="4">Analisando graficamente a função f, vemos que ela não está</td><td>$x < x_1$</td><td>Positiva</td><td rowspan="4">Ela se anula, ou seja, ela não é positiva e</td></tr>
<tr><td>$x_1 < x < x_2$</td><td>Negativa</td></tr>
<tr><td>$x_2 < x < x_3$</td><td>Positiva</td></tr>
<tr><td>$x > x_3$</td><td>Negativa</td></tr>
</table>

		definida em $p = x_2$, sendo assim, não satisfaz a condição (i) da definição. Logo, a função f não é contínua em $p = 0$.			nem negativa.

Fonte: a própria autora

Qual a diferença entre os exemplos 2 e 3?

Analisando os gráficos, percebemos que no primeiro gráfico a f é contínua e já no segundo gráfico a função não é contínua.

O próximo resultado é justamente aquele que nos dá condições e diz que é possível aproximar uma função por um polinômio, portanto um dos mais importantes deste trabalho. O objetivo não é demonstrá-lo, porém, sim compreendê-lo. Notemos que a única condição exigida é que f seja uma função contínua num determinada intervalo fechado.

4.2.5 Teorema de Weierstrass

Teorema 3: Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, \mathrm{b}]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio P de grau n tal que $|P_n(x) - f(x)| < n(\varepsilon)$, $\forall x \in [a, b]$.

É um teorema motivador para usar polinômios, mas, geralmente o valor de $n(\varepsilon)$ não é conhecido. Outro motivo para usar polinômios na aproximação de funções são suas facilidades algébricas, como já dissemos e também de suas derivadas (próximo capítulo). Como encontrar esses polinômios?

Teorema 4: Dados $n + 1$ números reais distintos $x_0,\ x_1, \dots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0,\ y_1, \dots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de $grau \leq n$, tal que:

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_{1,} \dots, p(x_n) = y_n$$

O teorema 4 não fala nada sobre função, então como posso relacionar o teorema de Weierstrass com o Teorema 4. Vamos mostrar como encontrar este polinômio aproximador na prática.

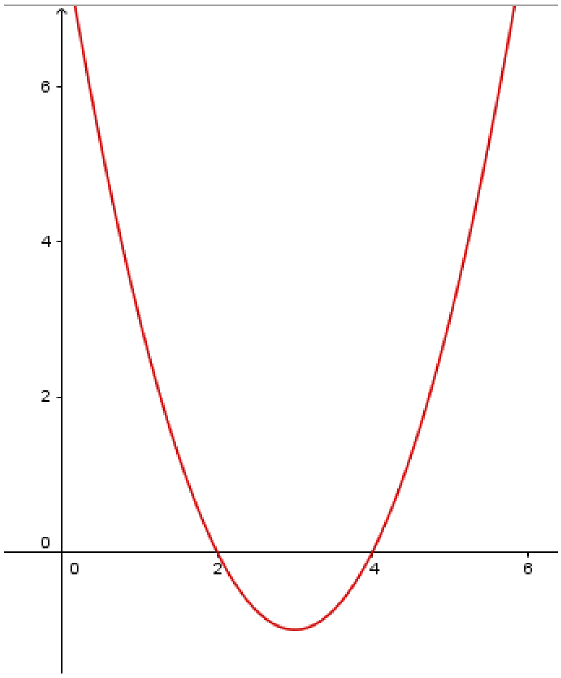
Atividade 04: Determine o polinômio de grau menor do que ou igual a dois cujos valores numéricos conhecidos são $f(-1) = 15$, $f(0) = 8$ e $f(3) = -1$

Resolução: Seja $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 & = & 15 \\ f(0) = a_0 & = & 8 \\ f(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = & -1 \end{cases}$$

Temos então, $a_0 = 8$, $a_1 = -6$ e $a_2 = 1$. Logo, $P_2(x) = 8 - 6x + x^2$ é o polinômio solicitado para função cujos pontos conhecidos são $(-1{,}15)$, $(0{,}8)$ e $(3,-1)$.

Figura 50 - Gráfico do polinômio $P_2(x) = 8 - 6x + x^2$



Fonte: a própria autora

Exercício 7: Sejam $f(x) = e^x - 1$ e $f(0) = 0$, $f(1) = e - 1 \cong 1{,}72$ e $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \cong -0{,}63$. É possivel determinar um polinomio e um intervalo que satisfaça o teorema de Weierstrass para f?

Resolução: Como $f(x) = e^x - 1$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, pois é a soma de funções contínuas, podemos aplicar o teorema de Weierstrass, em particular no intervalo fechado $[-1,1]$. Por outro lado, temos 3 números reais distintos $-1, 0$ e 1 tais que $f(0) = 0$, $f(1) = e - 1 \cong 1{,}72$ e $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \cong -0{,}63$. Assim pelo teorema 4 existe um único polinômio de grau menor do que ou igual a 2 que satisfaça $p(0) = 0$, $p(1) = e - 1 \cong 1{,}72$ e $p(-1) = \frac{1}{e} - 1 \cong -0{,}63$.

Seja o polinômio de grau 2, $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Aquele que satisfaz as condições dadas. Devemos resolver o seguinte sistema:

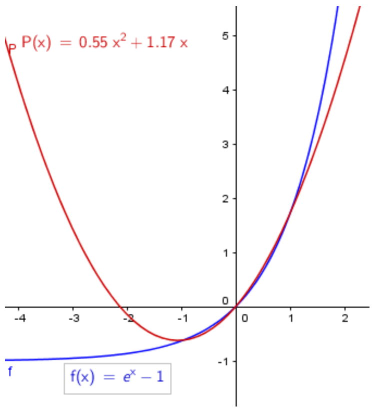
$$\begin{cases} f(-1) = P_2(-1) = a_0 - a_1 + a_2 & = & -0{,}63 \\ f(0) = P_2(0) = a_0 & = & 0 \\ f(1) = P_2(1) = a_0 + a_1 + a_2 & = & 1{,}72 \end{cases}$$

Temos então, $a_0 = 0$, $a_1 = 1{,}17$ e $a_2 = 0{,}55$. Logo, $P_2(x) = 1{,}17x + 0{,}55x^2$ é o polinômio solicitado para função cujos pontos conhecidos são $(-1, -0{,}63)$, $(0{,}0)$ e $(1; 1{,}72)$. A seguir, no mesmo sistema de coordenadas cartesiana, o gráfico de f e P_2.

Atividade 05: Complete o quadro.

Quadro 17 - Análise da $f(x) = e^x - 1$ e $P_2(x) = 1{,}17x + 0{,}55x^2$

Figura 51 - Gráfico da $f(x) = e^x - 1$ e $P_2(x) = 1{,}17x + 0{,}55x^2$



Fonte: a própria autora

x	$P_2(x) = 1{,}17x + 0{,}55x^2$	$f(x) = e^x - 1$	$\lvert P_2(x) - f(x) \rvert$
$0{,}5$	0,72	0,64	0,08
$-0{,}5$	-0,45	-0,39	0,06
$0{,}25$			
$-0{,}25$			
$0{,}1$			
$-0{,}1$			

Fonte: a própria autora

Notemos no gráfico e no quadro 17, como de fato, tivemos uma boa aproximação de f por P_2 no intervalo $[-1,1]$. Até o momento, falamos de continuidade, verificamos que as funções que vamos trabalhar, que são as funções polinomiais, seno, cosseno e exponencial, são contínuas e demos um exemplo de uma função que não é contínua. No próximo capítulo, veremos conceito de diferenciabilidade e suas implicações.

5 DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES REAIS

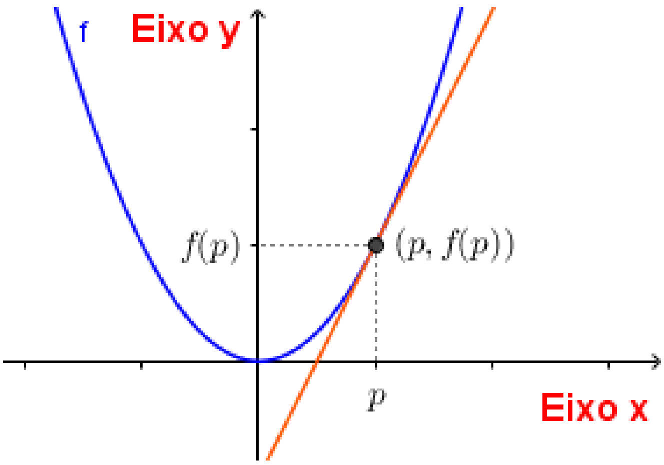
Nessa parte do trabalho, veremos o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto, aproximação local de uma função por uma reta, conceito de derivada e suavidade do gráfico de função. Com isso, responderemos algumas das questões levantadas pelos professores oriundas do artigo.

Neste capítulo, definiremos a derivada de uma função, sua interpretação geométrica, calcularemos a derivada das funções seno, cosseno e exponencial, analisaremos os resultados importantes referentes à continuidade e diferenciabilidade, estudaremos o crescimento e decrescimento da função a partir do conceito de derivadas e definiremos as derivadas de ordem superior.

5.1 Aproximação local de função por uma reta: derivada

Consideremos f como sendo uma função e p um ponto de seu domínio. Podemos ver que os limites do tipo $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ aparecem na geometria e na física, observe a figura a seguir.

Figura 52 - Gráfico da reta tangente de uma função f no ponto $(p, f\ (p))$



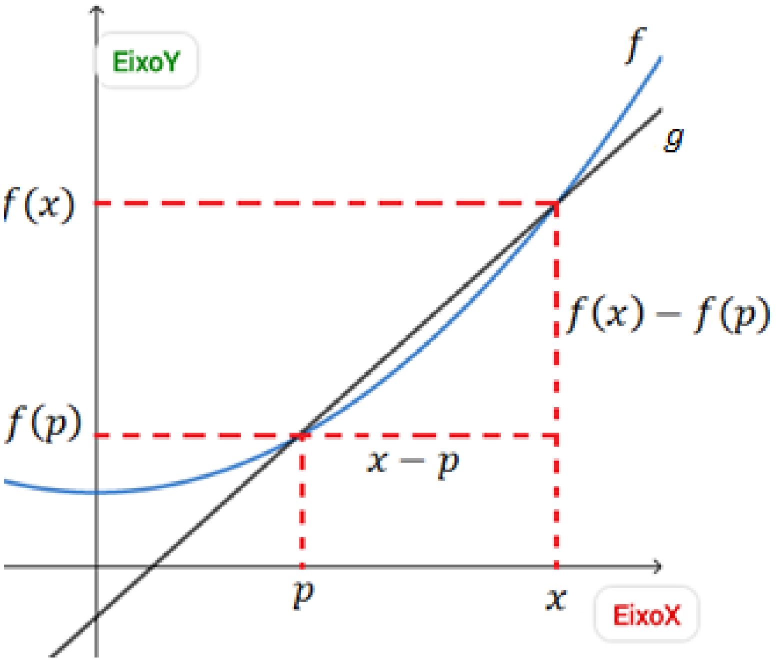
Fonte: a própria autora

A figura 52 apresenta o gráfico de uma função e uma reta tangente a este gráfico no ponto $(p,\ f\ (p))$. Esta reta aproxima a função f por uma função polinomial de grau 1 em torno deste ponto.

Como determinar a reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(p,\ f\ (p))$? Se soubermos o coeficiente angular desta reta, conseguiremos determinar a reta tangente que passa pelo ponto $(p,\ f\ (p))$, pois este ponto é fornecido.

Seja a reta g que passa pelos pontos $(p,\ f\ (p))$ e $(x,\ f\ (x))$, cujo coeficiente angular é $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Então, a equação da reta g é expressa por $y - f(p) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}(x-p)$ e seu gráfico pode ser visto na figura 53.

Figura 53 - Gráfico da reta g que passa pelos pontos $(p, f\ (p))\ e\ (x, f\ (x))$



Fonte: a própria autora

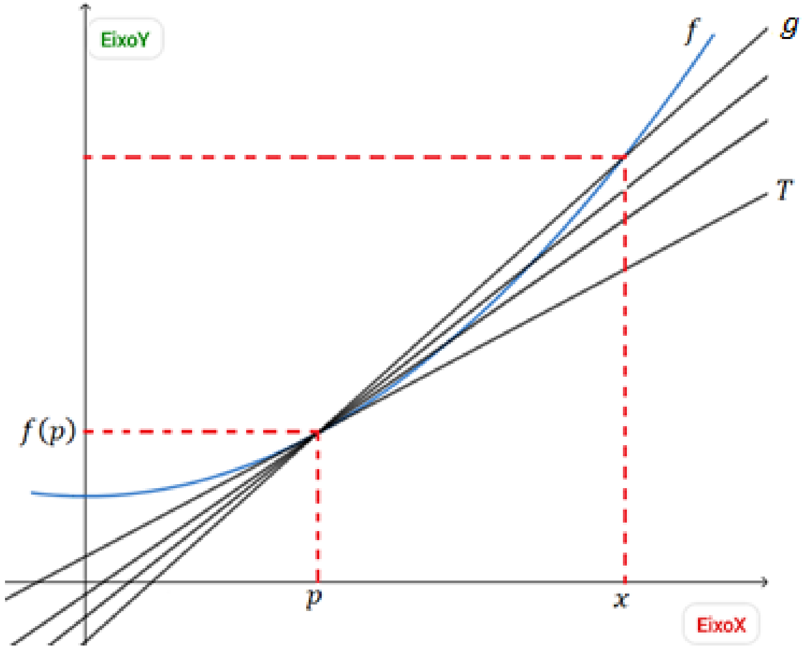
Quando x se aproxima de p, o coeficiente angular da reta g se aproxima de $f'\ (p)$, ou seja:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p).$$

Utilizamos $f'(p)$ para representar o valor do limite calculado anteriormente. Sendo assim, geometricamente, a cada vez que x se aproxima de p, a reta g tende para a posição da reta T cuja equação é:

$$y - f(p) = f'(p)(x-p).$$

Figura 54 - Gráfico das retas g e T que passam no ponto $(p, f\ (p))$



Fonte: a própria autora

Sabendo a função e um ponto pertencente ao seu domínio, é possível calcular a equação da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto. O que significa isso? Os professores tiveram dificuldades em compreender algumas expressões matemáticas ou equivalências, elencamos a seguir algumas:

1. A derivada de uma função num ponto determina o coeficiente angular (equivalentemente: inclinação) da reta tangente ao gráfico desta função nesse ponto.
2. A reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é uma aproximação local desta função por uma função polinomial de grau 1.
3. A reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é uma aproximação desta função por uma função polinomial de grau 1, numa vizinhança (equivalentemente: em torno) desse ponto.
4. O gráfico de uma função polinomial de grau 1 é uma reta.

No quadro 1, há afirmações de que podemos aproximar uma função real, localmente, por uma função polinomial de grau 1. Mostraremos agora como fazer esta “mágica”, por meio de um exemplo.

Exemplo 31: Seja a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$.

Encontraremos a função $g(x) = mx + b$, cujo gráfico é uma reta, que aproxima f em torno do ponto $(2{,}0)$. Temos aqui uma função $f(x) = x^2 - 4$. Como fazer uma aproximação do gráfico dessa função por um polinômio de grau 1 em torno do ponto $(2{,}0)$?

A inclinação da reta dada pela função $g(x) = mx + b$ é a derivada de f em $x = 2$, isto é, $m = f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4 - (2^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Logo, a expressão procurada da reta é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 4(x - 2)$$

$$y = g(x) = 4x - 8$$

Portanto, esta é a função polinomial de grau 1 que aproxima f numa vizinhança de $x = 2$.

O que significa dizer que uma função polinomial 1 aproxima f numa vizinhança de $x = 2$?

Isto quer dizer que, conseguimos aproximar a função polinomial de grau 2 por uma função polinomial de grau 1 nas proximidades de $x = 2$. Para esclarecer essa afirmação, apresentaremos dois quadros com pontos pertencentes à duas vizinhanças em torno de $x = 2$, o primeiro com uma vizinhança de raio $\varepsilon = 0{,}25$, ou seja $x \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$, e o segundo com uma vizinhança de raio $\varepsilon = 0{,}1$.

Quadro 18 – Alguns pontos pertencentes à vizinhança de raio $\varepsilon = 0{,}25$

x	$f(x) = x^2 - 4$	$g(x) = 4x - 8$	$f(x) - g(x)$
$1{,}75$	$1{,}75^2 - 4 = -0{,}9375$	$4 \times 1{,}75 - 8 = -1$	$-0{,}9375 - (-1)$ $= 0{,}0625$
2	$2^2 - 4 = 0$	$4 \times 2 - 8 = 0$	0

$2{,}25$	$2{,}25^2 - 4 = 1{,}0625$	$4 \times 2{,}25 - 8 = 1$	$1{,}0625 - 1$ $= 0{,}0625$

Fonte: a própria autora

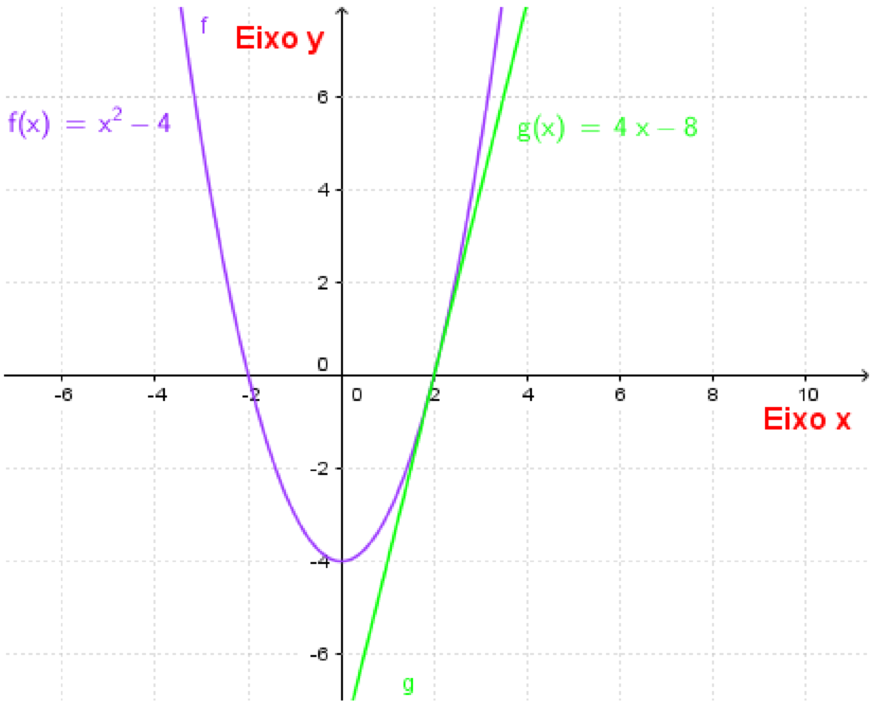
Quadro 19 - Alguns pontos pertencentes à vizinhança de raio $\varepsilon = 0{,}1$

x	$f(x) = x^2 - 4$	$g(x) = 4x - 8$	$f(x) - g(x)$
$1{,}9$	$1{,}9^2 - 4 = -0{,}39$	$4 \times 1{,}9 - 8 = -0{,}4$	$-0{,}39 - (-0{,}4)$ $= 0{,}01$
2	$2^2 - 4 = 0$	$4 \times 2 - 8 = 0$	0
$2{,}1$	$2{,}1^2 - 4 = 0{,}41$	$4 \times 2{,}1 - 8 = 0{,}4$	$0{,}41 - 0{,}4 = 0{,}01$

Fonte: a própria autora

Notemos que, quanto mais próximo tomamos x de 2, mais a f se aproxima de g. Veja o gráfico a seguir:

Figura 55 - Gráfico das funções $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 4x - 8$



Fonte: a própria autora

Até aqui, determinamos o gráfico da reta tangente de uma função em torno de um ponto, fizemos alguns exemplos, algumas equivalências.

Na próxima seção, definiremos funções diferenciáveis.

5.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Se f é diferenciável ou derivável em p , então f admite derivada em p.

Definição 22: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Quando o limite $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existe e é finito, denominamos a derivada de f em p e indicamos por $f'(p)$ (lemos f linha de p), ou seja:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

À partir das propriedades de limites que:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

Assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Ou

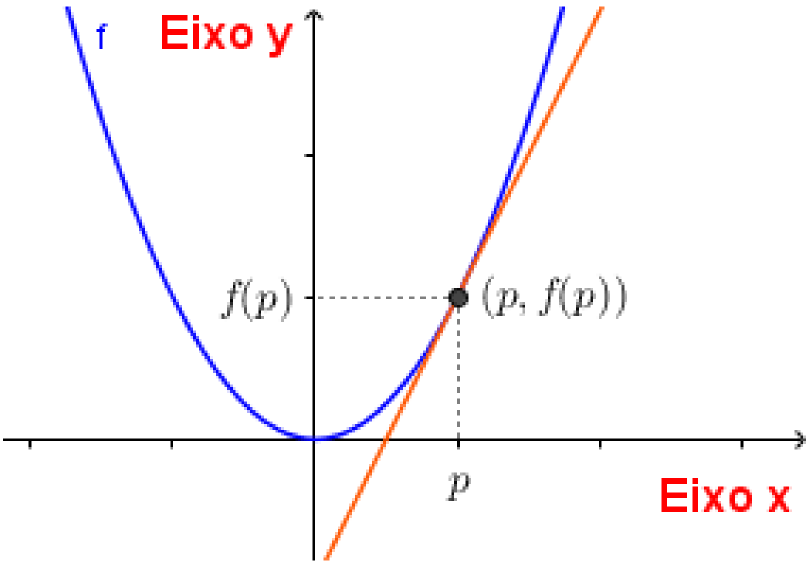
$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Algumas considerações:

1. Se $\boldsymbol{f}$ é derivável ou diferenciável em $\boldsymbol{p}$ então $\boldsymbol{f}$ admite derivada em $\boldsymbol{p}$.
2. Se $\boldsymbol{f}$ é derivável ou diferenciável em $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f})$, podemos dizer que $\boldsymbol{f}$ é derivável em cada $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{A}$.
3. $\boldsymbol{f}$ é uma função derivável ou diferenciável se $\boldsymbol{f}$ for derivável em cada ponto de seu domínio.

Veja o gráfico da derivada de $\boldsymbol{f}$ no ponto $\boldsymbol{p}$:

Figura 56 - Gráfico da derivada de f no ponto p



Fonte: a própria autora

Segue abaixo algumas propriedades de derivadas, que não provaremos, por exemplo:

1. A derivada de uma constante é zero.
2. A derivada da soma é igual à soma derivadas.
3. A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.
4. A derivada do produto de duas funções é igual à derivada da primeira multiplicada pela segunda mais a primeira multiplicada pela derivada da segunda.

Exemplo 32: Sejam f, g deriváveis em p e $k \in \mathbb{R}$, uma constante , é sempre válido que:

1. $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$
3. $(f \cdot g)'(p) = f'(p)\, g(p) + f\,(p)\, g'(p)$

Fizemos até agora a análise geométrica da derivada, falamos o que é aproximar uma função localmente por uma reta e definimos derivada.

Nas próximas seções, vamos calcular as derivadas das funções que utilizaremos neste trabalho, que são as funções polinomiais, seno, cosseno e exponencial.

Exemplo 33: Calcule a derivada da função seno:

$$sen'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

Utilizando as fórmulas de transformações em produto da trigonometria, temos:

$$sen'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2sen\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}$$

Como $\lim_{h \to 0} \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$ e aplicando o limite temos que:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = cos\ (x)$$

Portanto, a derivada da função seno é a função cosseno, ou seja, $(sen\ (x))' = cos(x)$.

Exemplo 34: Calcule a derivada da função cosseno:

$$cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h}$$

Utilizando as fórmulas de transformações em produto da trigonometria, temos:

$$cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2sen\left(\frac{h}{2}\right)sen\ (\frac{2x+h}{2})}{h}$$

Como $\lim_{h \to 0} \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$ e aplicando o limite temos que:

$$\lim_{h \to 0} - \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} sen\left(\frac{2x+h}{2}\right) = -sen\ (x)$$

Portanto, a derivada da função cosseno é menos a função seno, ou seja, $(cos\ (x))' = -sen(x)$.

Exemplo 35*:* Calcule a derivada da função exponencial:

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} =$$

Como $\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$

Temos que: $(e^x)' = \lim_{h \to 0} e^x = e^x$

Portanto a derivada da função exponencial, é a própria função exponencial a menos de uma constante, ou seja, $(e^x)' = e^x$.

Teorema 5: Toda função polinomial é diferenciável.

Demonstração: Afirmamos no quadro 1 que toda função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 \text{ , onde } a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$$

é diferenciável.

Primeiramente, vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Sabemos que $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Considerando $x + h = b$, temos que, $b \to x$ quando $h \to 0$. Logo,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{b \to x} \frac{b^n - x^n}{b - x}$$

Calculando a divisão de polinômios $\frac{b^n - x^n}{b - x}$, para $x \neq b$, temos:

$$f'(x) = \lim_{b \to x} (b^{n-1} + b^{n-2}x + b^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

Aplicando as propriedades de limite, segue que:

$$f'(x) = \lim_{b \to x} (b^{n-1} + b^{n-2}x + b^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1}) =$$

$$\lim_{b \to x} b^{n-1} + \lim_{b \to x} b^{n-2}x + \lim_{b \to x} b^{n-3}x^2 + \cdots + \lim_{b \to x} x^{n-1} =$$

$$x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1} =$$

$$x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Portanto, para $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo x.

Como sabemos que a derivada da soma de funções é a soma das derivadas das funções, e como vimos anteriormente que a derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$. Podemos concluir que toda função polinomial dada por $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, onde $a_n\,, a_{n-1}\,, a_{n-2}\,, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ é diferenciável.

A seguir, vamos mostrar que todas as funções que vamos trabalhar aqui, que são as funções seno, cosseno, exponenciais e polinomiais são infinitamente deriváveis.

5.3 Derivadas de ordem superior

5.3.1 Derivada de ordem superior da função cosseno

As derivadas da função cosseno são:

$$f(x) = cos(x)$$

$$f'(x) = cos'(x) = -sen(x)$$

$$f''(x) = -sen'(x) = -cos(x)$$

$$f'''(x) = -cos'(x) = sen(x)$$

$$f^{(4)}(x) = sen^{(4)}(x) = cos(x)$$

$$\vdots$$

Calculando a derivada da função cosseno infinitas vezes, concluímos que:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n cos(x)$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} sen(x)$$

Portanto, a função cosseno é infinitamente diferenciável.

5.3.2 Derivada de ordem superior da função seno

As derivadas da função seno são:

$$f(x) = sen(x)$$

$$f'(x) = sen'(x) = cos(x)$$

$$f''(x) = cos'(x) = -sen(x)$$

$$f'''(x) = -sen'(x) = -cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = -cos^{(4)}(x) = sen(x)$$

$$\vdots$$

Calculando a derivada da função seno infinitas vezes, concluímos que:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n sen(x)$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n cos(x)$$

Portanto, a função seno é infinitamente diferenciável.

5.3.3 Derivada de ordem superior da função exponencial

As derivadas da função exponencial são:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = (e^x)'(x) = e^x$$

$$f''(x) = (e^x)'(x) = e^x$$

$$f'''(x) = (e^x)'(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = (e^x)^{(4)}(x) = e^x$$

$$\vdots$$

Logo, a derivada da função exponencial, será sempre a própria função exponencial, ou seja,$(e^x)' = e^x$, sendo assim, podemos concluir que a função exponencial é infinitamente diferenciável.

5.3.4 Derivada de ordem superior da função polinomial

Obteremos a derivada de ordem n da função polinomial, ou n-esima derivada de f, representada por $f^{(n)}$, derivando a derivada de ordem $n-1$ de f, visto que já provamos que toda função polinomial é derivável. Veremos que, derivando uma função polinomial de grau n, infinitas vezes, o resultado será a função nula.

Exemplo 36: Seja $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Determine as derivadas de ordem *n*.

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$$

$$f''(x) = 18x + 4$$

$$f'''(x) = 18$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = 0$$

Vimos que as funções polinomiais, a função seno, a função cosseno e a função exponencial são contínuas, que existem funções que não são contínuas e que as funções polinomiais, a função seno, a função cosseno e a função exponencial são infinitamente diferenciáveis.

Veremos agora que *continuidade* e *diferenciabilidade* são virtudes de funções reais que estão intimamente relacionadas entre si. Qual é esta relação?

5.4 RELAÇÃO ENTRE CONTINUIDADE E DIFERENCIABILIDADE

Toda função diferenciável é contínua? Vamos responder isso com um teorema.

Teorema 6: Se f for uma função diferenciável em p, então f será contínua em p.

Demonstração: Por hipótese temos que, f é derivável em p, logo $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existe e é igual a $f'(p)$. Precisamos provar que f é contínua em p, ou seja, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$. Temos que:

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \times (x - p), x \neq p,$$

Logo,

$$\lim_{x \to p}[f(x) - f(p)] = \lim_{x \to p}\left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \times (x - p)\right] = \lim_{x \to p}\left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p}\right] \times \lim_{x \to p}(x - p)$$

Como a função $y = f(x)$ é derivável em p, ou seja, $\lim\limits_{x \to p}\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right] = f'(p)$ e $\lim\limits_{x \to p}(x - p) = 0$, segue que:

$$\lim_{x \to p}[f(x) - f(p)] = f'(p) \times 0 = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

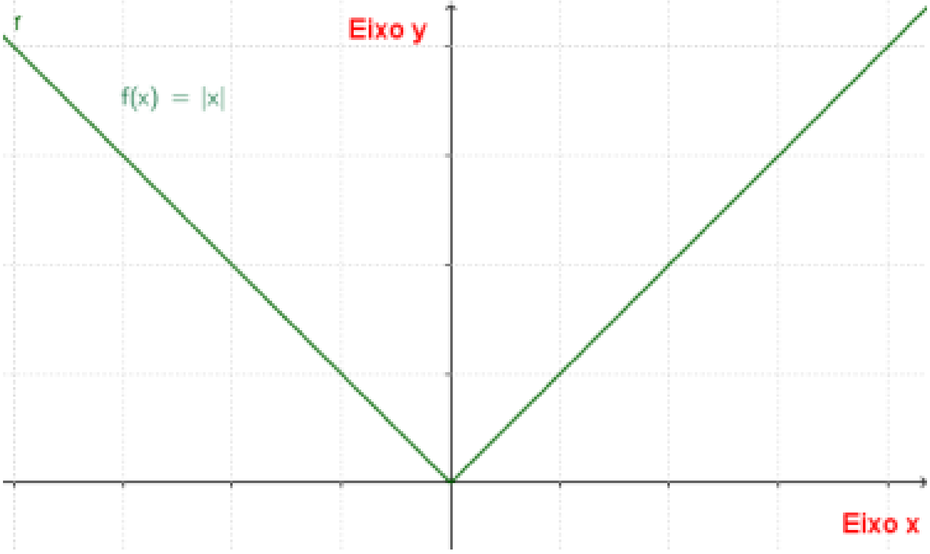
Assim a função $y = f(x)$ é contínua em p, o que conclui a demonstração.

Será que toda função contínua é diferenciável?

Seja a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. O seu domínio é o conjunto $Dom(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = [0, +\infty)$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Figura 57 - Gráfico da função $f(x) = |x|$



Fonte: a própria autora

Essa é a função modular, ela é contínua, mas não é diferenciável., pois de acordo com o artigo, o gráfico de uma função diferenciável é uma curva sem bicos.

Sendo assim, como podemos concluir isso matematicamente? Analisando o gráfico acima, temos que a f é contínua em zero. Note também que, tal função f não é diferenciável em zero, pois os limites laterais a seguir são diferentes:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

Entretanto, uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável neste ponto. Desse modo, continuidade não implica em diferenciabilidade.

No capítulo 4, demos condições para aproximar funções reais contínuas de funções polinomiais. Entretanto, encontrar os coeficientes desses polinômios é a grande dificuldade. Fecharemos o trabalho, definindo no próximo capítulo o Polinômio de Taylor, em que tais coeficientes já estão pré-determinados.

6 POLINÔMIO DE TAYLOR

Iniciamos este capítulo determinando o polinômio de Taylor de ordem 1, em seguida, encontraremos o polinômio de Taylor de ordem $2, 3, 4$ e 5 seguindo o mesmo raciocínio. O polinômio de Taylor de ordem 5 será o polinômio de Taylor de maior grau que iremos abordar no decorrer desta dissertação.

Determinaremos o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno e de ordem 5 da função seno, em torno do zero e também em torno de π. Veremos sua representação gráfica, determinaremos as raízes destes polinômios e também encontraremos uma aproximação para π. Em seguida, resolveremos alguns exercícios utilizando o Polinômio de Taylor.

Finalizaremos este capítulo determinando o Polinômio de Taylor da função exponencial de ordem 5 e encontraremos uma aproximação para o valor de e. Vimos no capítulo 4, dois resultados muito importantes:

1. O teorema de Weierstrass nos diz que, basta que uma função seja contínua num intervalo fechado, para que possamos aproximá-la por um polinômio.
2. O outro resultado nos diz que dado $n+1$ pontos de um polinômio de grau n, é sempre possível encontrar este polinômio.

Mas a grande dificuldade deste segundo resultado, é justamente encontrar os coeficientes deste polinômio, por isso, vamos encontrar a seguir o Polinômio de Taylor, em que tais coeficientes já são pré-determinados.

6.1 POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 1

Sabendo que f é uma função derivável em x_0 e seja T a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ expressa por:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(\mathrm{x} - x_0).$$

Para cada $x \in Dom(f)$, consideremos $E(x)$ como sendo o erro que cometemos ao aproximar $f(x)$por $T(x)$, ou seja, $E(x) = f(x) - T(x)$.

Quando x se aproxima de x_0 o erro é nulo, ou seja, $\lim\limits_{x\to x_0} E(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) - T(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} T(x) = f(x_0) - T(x_0) = 0$,
pois $f(x_0) = T(x_0)$.

Sabendo que $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $E(x) = f(x) - T(x)$ temos que:

$$E(x) = f(x) - T(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) =$$
$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Para $x \neq x_0$ temos:

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

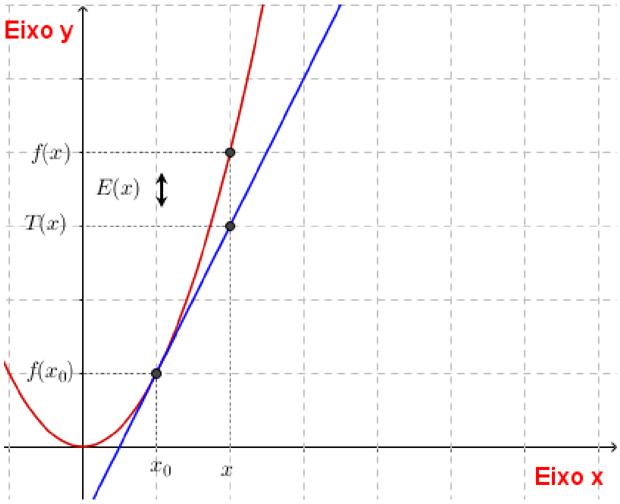
E ainda,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} f'(x_0) =$$
$$f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Logo, quando x se aproxima e x_0, o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $x - x_0$, o que implica, $|E(x)| < |x - x_0|$. Portanto, a $T(x)$ é a única reta que possui esta propriedade.

Sendo assim, se f é uma função derivável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, a função $T(x)$ é o polinômio de grau no máximo 1 que se aproxima melhor localmente a f nas proximidades de x_0. Como os valores de f e T em x_0 são iguais e suas derivadas também, ou seja, $f(x_0) = T(x_0)$ e $f'(x_0) = T'(x_0)$, o polinômio $\boldsymbol{P_1(x) = T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ será denominado o Polinômio de Taylor de ordem 1 de f na vizinhança de x_0.

Figura 58 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 1



Fonte: a própria autora

6.2 POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 2

Consideremos f derivável até a segunda ordem no intervalo I e $x_0 \in I$. Vamos encontrar um polinômio P_2 de grau máximo 2, que satisfaça as condições abaixo:

1. $f(x_0) = P_2(x)$
2. $f'(x_0) = P_2'(x)$
3. $f''(x_0) = P_2''(x)$

Seja $P_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$ o polinômio de segundo grau, onde A, B e C são coeficientes reais. Temos que:

$$P_2(x_0) = A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2 = A.$$

Logo, $A = f(x_0)$.

Calculando as derivadas de $P_2(x)$temos:

$$P_2'(x) = B + 2C(x - x_0)$$

$$P_2''(x) = 2C$$

Logo, substituindo x por x_0 e as condições citadas anteriormente, temos:

$$P_2'(x_0) = B + 2C(x_0 - x_0)$$

$$\Longrightarrow B = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = 2C = f''(x_0)$$

$$\Rightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f próximo de x_0 é

$$\boldsymbol{P_2(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

6.3 POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 3 E 4

Para determinar os Polinômios de Taylor de ordem 3 e 4, vamos fazer da mesma forma que construímos o Polinômio de Taylor de ordem 2.

Primeiramente para encontrar $P_3(x)$, o Polinômio de Taylor de ordem 3 que se aproxima da função f dada, será necessário que f seja derivável até a ordem 3 no intervalo I com $x_0 \in I$ e satisfaça as condições a seguir:

1. $f(x_0) = P_3(x)$

2. $f'(x_0) = P_3'(x)$
3. $f''(x_0) = P_3''(x)$
4. $f'''(x_0) = P_3'''(x)$

Seja $P_3(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3$ o polinômio de terceiro grau, onde A, B, C e D são coeficientes reais. Temos que $P_3(x_0) = A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2 + D(x_0 - x_0)^3 = A$. Logo, $A = f(x_0)$.

Calculando as derivadas de $P_3(x)$temos:

$$P_3'(x) = B + 2C(x - x_0) + 3D(x - x_0)^2$$

$$P_3''(x) = 2C + 6D(x - x_0)$$

$$P_3'''(x) = 6D$$

Logo, substituindo x por x_0 e as condições citadas anteriormente, temos:

$$P_3'(x_0) = B + 2C(x - x_0) + 3D(x_0 - x_0)^2$$

$$\Rightarrow B = f'(x_0)$$

$$P_3''(x_0) = 2C + 6D(x_0 - x_0)$$

$$\Rightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P_3'''(x) = 6D = f'''(x_0)$$

$$\Rightarrow D = \frac{f'''(x_0)}{6}$$

Portanto, o Polinômio de Taylor de ordem 3 de f próximo de x_0 é

$$\boldsymbol{P_3(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3}$$

Repetindo o mesmo procedimento pra determinar $P_4(x)$, o Polinômio de Taylor de ordem 4 que se aproxima da função f dada, será necessário que f seja derivável até a ordem 4 no intervalo I com $x_0 \in I$ e satisfaça as condições a seguir:

1. $f(x_0) = P_4(x)$
2. $f'(x_0) = P_4'(x)$
3. $f''(x_0) = P_4''(x)$
4. $f'''(\mathrm{x}_0) = P_4'''(x)$
5. $f^{(4)}(x_0) = P_4^{(4)}(x)$

Seja $P_4(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3 + E(x - x_0)^4$ o polinômio de quarto grau, onde A, B, C, D e E são coeficientes reais. Temos que:

$$P_4(x_0) = A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2 + D(x_0 - x_0)^3 + E(x_0 - x_0)^4 = A$$

Logo , $A = f(x_0)$.

Calculando as derivadas de $P_4(x)$ temos:

$$P_4'(x) = B + 2C(x - x_0) + 3D(x - x_0)^2 + 4E(x - x_0)^3$$

$$P_4''(x) = 2C + 6D(x - x_0) + 12E(x - x_0)^2$$

$$P_4'''(x) = 6D + 24E(x - x_0)$$

$$P_4^{(4)}(x) = 24E$$

Logo, substituindo x por x_0 e as condições citadas anteriormente, temos:

$$P_4'(x_0) = B + 2C(x_0 - x_0) + 3D(x_0 - x_0)^2 + 4E(x_0 - x_0)^3$$

$$\Longrightarrow B = f'(x_0)$$

$$P_4''(x_0) = 2C + 6D(x_0 - x_0) + 12E(x_0 - x_0)^2$$

$$\Longrightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P_4'''(x_0) = 6D + 24E(x_0 - x_0)$$

$$\Longrightarrow D = \frac{f'''(x_0)}{6}$$

$$P_4^{(4)}(x_0) = 24E$$

$$\Longrightarrow E = \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 4 de f próximo de x_0 é

$$\boldsymbol{P_4(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4}$$

6.4 POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 5

Realizando o mesmo procedimento pra determinar $P_5(x)$, o Polinômio de Taylor de ordem 5 que se aproxima da função f dada, será necessário que f seja derivável até a ordem 5 no intervalo I com $x_0 \in I$ e satisfaça as condições a seguir:

1. $f(x_0) = P_5(x)$
2. $f'(x_0) = P_5'(x)$
3. $f''(x_0) = P_5''(x)$
4. $f'''(x_0) = P_5'''(x)$
5. $f^{(4)}(x_0) = P_5^{(4)}(x)$
6. $f^{(5)}(x_0) = P_5^{(5)}(x)$

Seja $P_5(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3 + E(x - x_0)^4 + F(x - x_0)^5$ o polinômio de quinto grau, onde A, B,C, D, E e F são coeficientes reais. Temos que:

$$P_5(x) = A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2 + D(x_0 - x_0)^3 + E(x_0 - x_0)^4 + F(x - x_0)^5 = A$$

Logo, $A = f(x_0)$.

Calculando as derivadas de $P_5(x)$ temos:

$$P_5'(x) = B + 2C(x - x_0) + 3D(x - x_0)^2 + 4E(x - x_0)^3 + 5F(x - x_0)^4$$

$$P_5''(x) = 2C + 6D(x - x_0) + 12E(x - x_0)^2 + 20F(x - x_0)^3$$

$$P_5'''(x) = 6D + 24E(x - x_0) + 60F(x - x_0)^2$$

$$P_5^{(4)}(x) = 24E + 120F(x - x_0)$$

$$P_5^{(5)}(x) = 120F$$

Logo, substituindo x por x_0 e as condições citadas anteriormente temos:

$$P_5'(x) = B + 2C(x - x_0) + 3D(x_0 - x_0)^2 + 4E(x - x_0)^3 + 5F(x - x_0)^4$$

$$\Longrightarrow B = f'(x_0)$$

$$P_5''(x) = 2C + 6D(x - x_0) + 12E(x - x_0)^2 + 20F(x - x_0)^3$$

$$\Longrightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P_5'''(x) = 6D + 24E(x - x_0) + 60F(x - x_0)^2$$

$$\Longrightarrow D = \frac{f'''(x_0)}{6}$$

$$P_5^{(4)}(x) = 24E{+}120F(x - x_0)$$

$$\Longrightarrow E = \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}$$

$$P_5^{(5)}(x) = 120F = f^{(5)}(x_0)$$

$$\Rightarrow F = \frac{f^{(5)}(x_0)}{120}$$

Portanto, o Polinômio de Taylor de ordem 5 de f próximo de x_0 é

$$\boldsymbol{P_5(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{120}(x - x_0)^5}$$

6.5 Polinômio de Taylor de ordem n

Baseado no procedimento anterior para determinar os polinômios de ordem $1, 2, 3,4$ e 5, podemos generalizar para obter o polinômio de ordem n.

Repetindo o mesmo procedimento pra determinar $P_n(x)$, o Polinômio de Taylor de ordem n que se aproxima da função f dada, será necessário que f seja derivável até a ordem n no intervalo I com $x_0 \in I$ e satisfaça as condições a seguir:

1. $f(x_0) = P_n(x)$
2. $f'(x_0) = P_n'(x)$
3. $f''(x_0) = P_n''(x)$
4. $f'''(x_0) = P_n'''(x)$
5. $\vdots$
6. $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x)$

Logo, o Polinômio de Taylor de ordem n será:

$$\boldsymbol{P_n(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3 + E(x - x_0)^4 + \cdots + T(x - x_0)^n}$$

Fazendo o mesmo procedimento anterior, temos que $A = f(x_0)$ e derivando $P_n(x)$ obtemos $B = f'(x_0)$, $C = \frac{f''(x_0)}{2}$ e assim sucessivamente. Ao calcular a *n*-esima derivada de P_n encontramos:

$$P_n^{(n)}(x) = n.(n-1).(n-2) \ldots (2).(1).T$$

Sabendo que $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x)$ temos que:

$$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x) = n.(n-1).(n-2) \ldots (2).(1).T = n!\,T$$

Logo, $T = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Sendo assim, o Polinômio de Taylor de ondem n próximo de x_0 pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{P_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.}$$

6.6 Definição do erro do polinômio de Taylor

Consideremos $E(x)$ como sendo o erro que cometemos ao aproximar $f(x)$ por $T\,(x)$, ou seja, $E(x) = f(x) - T(x)$. Quando x se aproxima de x_0 o erro é nulo, ou seja, $\lim_{x \to x_0} E(x) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - T(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} T(x) = f(x_0) - T(x_0) = 0$, pois $f(x_0) = T(x_0)$.

Sabendo que $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $E(x) = f(x) - T(x)$ temos que:

$$E(x) = f(x) - T(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Para $x \neq x_0$ temos:

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

Outra maneira de determinar o erro do Polinômio de Taylor de grau n.

$$\boldsymbol{E_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)}$$

6.7 Polinômio de Taylor da função cosseno

Vimos que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cos(x)$ possui derivada de todas as ordens em torno de um ponto qualquer de seu domínio, logo podemos determinar o Polinômio de Taylor de f numa vizinhança de qualquer $x_0 \in Dom(f) = \mathbb{R}$. Desta forma temos que as derivadas da função cosseno são:

$$f(x) = cos(x)$$
$$f'(x) = cos'(x) = -sen(x)$$
$$f''(x) = -sen'(x) = -cos(x)$$
$$f'''(x) = -cos'(x) = sen(x)$$
$$f^{(4)}(x) = sen^{(4)}(x) = cos(x)$$
$$\vdots$$

Logo,

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n cos(x)$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} sen(x)$$

Substituindo $x = 0$ temos:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n cos(0) = (-1)^n$$
$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} sen(0) = 0$$

Polinômio de Taylor da função cosseno em torno de $x = 0$:

$$P_{2n}(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x - 0)^3 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{2n!}(x - 0)^{2n}$$

$$= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x)^3 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{2n!}(x)^{2n}$$

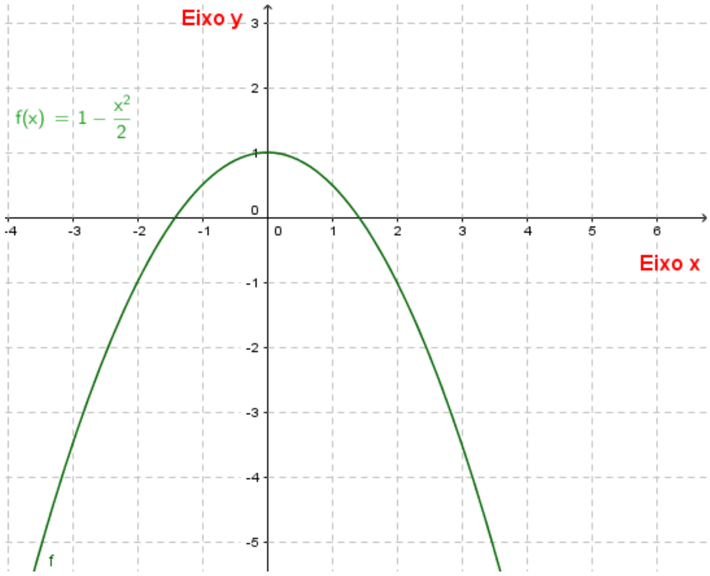
$$= f(0) + 0.(x) + \frac{-1}{2}(x)^2 + \frac{0}{6}(x)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}(x)^{2n}$$

$$= \mathbf{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n!}(x)^{2n}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2 da função cosseno em torno de $x = 0$:

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Figura 59 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 2 da função cosseno em torno de $x = 0$

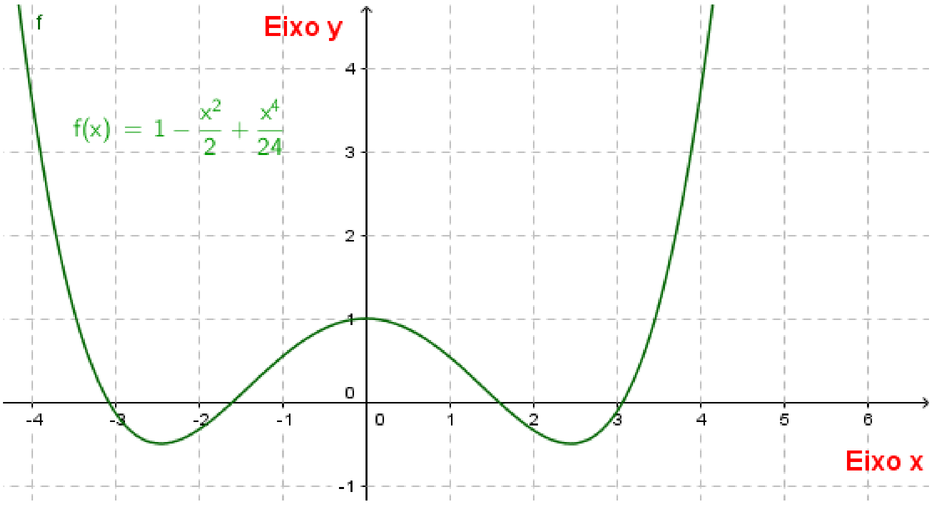


Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno em torno de $x = 0$:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Figura 60 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno em torno de $x = 0$



Fonte: a própria autora

Vamos determinar as raízes do Polinômio de Taylor da função cosseno de ordem 4. Sabendo que o Polinômio de Taylor de grau 4 da função cosseno é:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Para determinarmos as raízes deste polinômio, temos que considerar $P_4(x) = 0$. Substituindo na equação acima temos:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$$

Como $x^4 = (x^2)^2$, vemos que o polinômio acima é uma função biquadrada, sendo assim, para encontrarmos as raízes deste polinômio , vamos aplicar a fórmula de Baskara.

$$\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{(x^2)^2}{24} - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$$

Substituindo $x^2 = t$, temos:

$$\frac{(t)^2}{24} - \frac{t}{2} + 1 = 0$$

Como $a = \frac{1}{24}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = 1$ temos que:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{1}{24}.1}}{2.\frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}}{\frac{1}{12}} = 12.\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}\right) =$$

$$6 \pm 12\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = 6 \pm 12\sqrt{\frac{3}{12}-\frac{2}{12}} = 6 \pm 12\sqrt{\frac{1}{12}} = 6 \pm \frac{12}{2\sqrt{3}} = 6 \pm \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Logo:

$$t_1 = 6 + \frac{6}{\sqrt{3}} = 9{,}464101615$$

$$t_2 = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 2{,}535898385$$

Como $x^2 = t$, temos que:

$$x^2 = t_1 = 9{,}464101615 \rightarrow$$

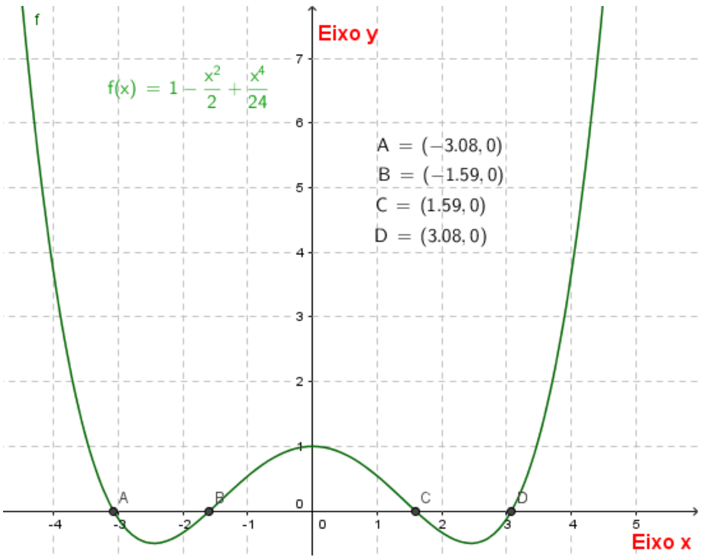
$$x = \pm\sqrt{9{,}464101615} = \pm 3{,}076378003$$

$$x^2 = \mathrm{t}_2 = 2{,}535898385 \rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{2{,}535898385} = \pm 1{,}592450434$$

Portanto, as raízes do polinômio de ordem 4 do cosseno são $\pm 1{,}592450434$ e $\pm 3{,}076378003$ e estão demarcadas no gráfico a seguir pelos pontos A,B,C e D.

Figura 61 - Gráfico com as raízes do polinômio de ordem 4 da função cosseno



Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor da função cosseno em torno de $x = \pi$:

$$P_{2n}(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{6}(x-\pi)^3 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(\pi)}{2n!}(x-\pi)^{2n}$$

$$= f(\pi) + f'(\pi)(x) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{6}(x-\pi)^3 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(\pi)}{2n!}(x-\pi)^{2n}$$

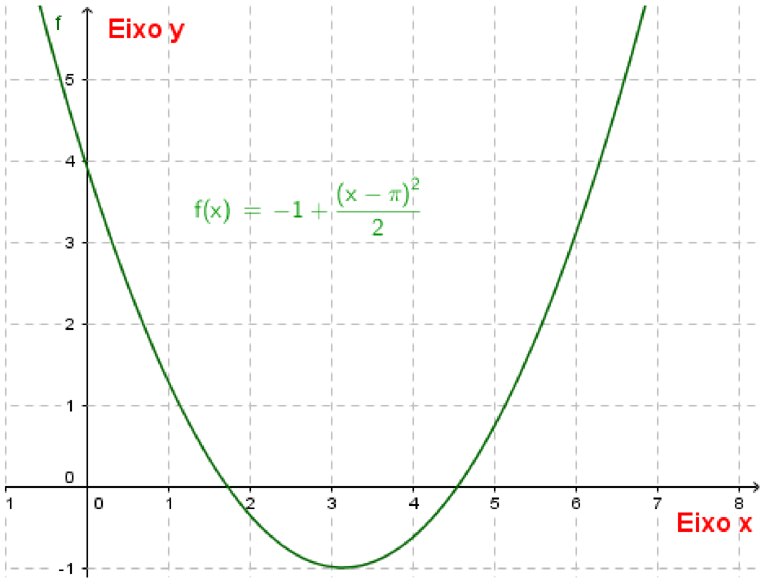
$$=f(\pi)+0.(x)+\frac{1}{2}(x-\pi)^2+\frac{0}{6}(x-\pi)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n!}(x-\pi)^{2n}$$

$$=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2!}+\frac{(x-\pi)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n!}(x-\pi)^{2n}$$

Polinômio de Taylor de ordem 2 da função cosseno em torno de $\boldsymbol{x=\pi}$:

$$P_2(x)=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Figura 62 - Gráfico do polinômio de Taylor de ordem 2 da função cosseno em torno de $x=\pi$

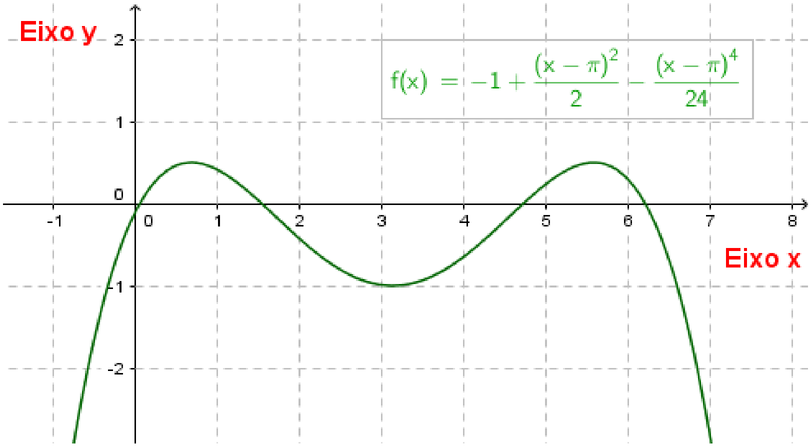


Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno em torno de $\boldsymbol{x=\pi}$:

$$P_4(x)=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2}-\frac{(x-\pi)^4}{24}$$

Figura 63 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno em torno de $x = \pi$



Fonte: a própria autora

Existe $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *, tal que* $cos\,(x) = \frac{1}{2}$*? Se sim, como encontrá-la?*

Queremos encontrar o menor x real que satisfaça a equação abaixo:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P_4(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Como $x^4 = (x^2)^2$, vemos que o polinômio acima é uma função biquadrada, sendo assim, para encontrarmos as raízes deste polinômio , vamos aplicar a fórmula de Baskara.

$$\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(x^2)^2}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Substituindo $x^2 = t$, temos:

$$\frac{(t)^2}{24} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Como $a = \frac{1}{24}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{2}$ temos que:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{1}{24}.\frac{1}{2}}}{2.\frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}}}{\frac{1}{12}} =$$

$$12.\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}}\right) = 6 \pm 12\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = 6 \pm \frac{12}{\sqrt{6}}$$

Logo ,

$$t_1 = 6 + \frac{12}{\sqrt{6}} = 10{,}89897949$$

$$t_2 = 6 - \frac{12}{\sqrt{6}} = 1{,}101020514$$

Como $x^2 = t$, temos que:

$$x^2 = t_1 = 10{,}89897949 \rightarrow$$

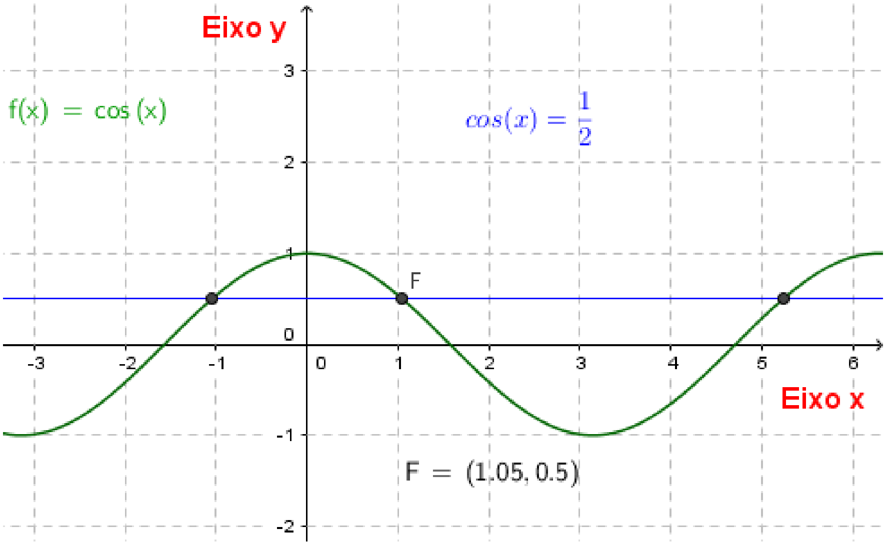
$$x = \pm\sqrt{10{,}89897949} = \pm 3{,}301360248$$

$$x^2 = t_2 = 1{,}101020514 \rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{1{,}101020514} = \pm 1{,}049295247$$

Logo, o menor número real positivo é $1{,}049295247$, valor bem próximo de $\frac{\pi}{3} = 1{,}047197551$, que é o ângulo cujo $\cos(x) = \frac{1}{2}$, no intervalo de $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Verifique no gráfico a pertinência desta questão.

Figura 64 - Gráfico da intersecção de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ e $f(x) = \cos(x)$



Fonte: a própria autora

Quadro 20 - Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno × função cosseno × erro

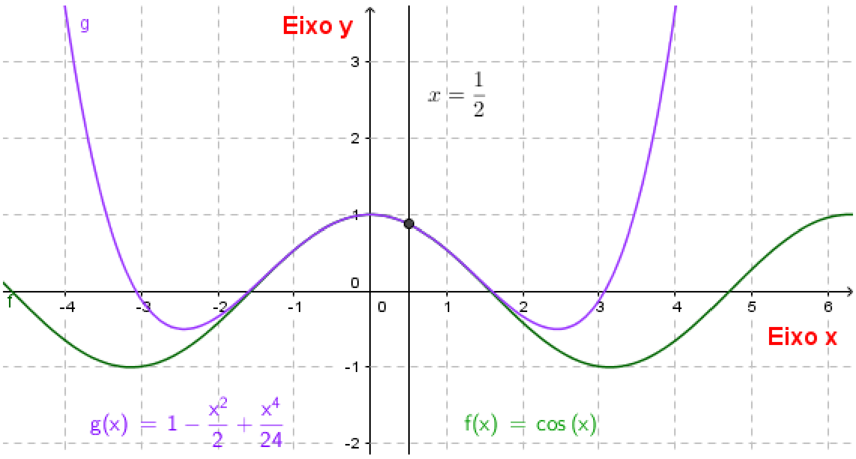
x	$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	$f(x) = cos(x)$	$E(x)$
-1	$0{,}5417$	$0{,}5403$	$0{,}0014$
$-0{,}75$	$0{,}7319$	$0{,}7317$	$0{,}0002$

$-0{,}5$	$0{,}8776$	$0{,}8776$	0
$-0{,}25$	$0{,}9689$	$0{,}9689$	0
0	1	1	0
$0{,}25$	$0{,}9689$	$0{,}9689$	0
$0{,}5$	$0{,}8776$	$0{,}8776$	0
$0{,}75$	$0{,}7319$	$0{,}7319$	0
1	$0{,}5417$	$0{,}5417$	0

Fonte: a própria autora

Como estamos trabalhando com alguns valores em torno do zero, calcular o valor da função cosseno pelo polinômio de ordem 4, dá um erro pequeno e ao mesmo tempo na sala de aula você não precisa de uma calculadora científica para isso, basta você utilizar uma calculadora comum, porque na verdade estamos utilizando somente a soma e a multiplicação e pelo quadro anterior notamos como conseguimos uma boa aproximação da função cosseno por um polinômio de ordem 4, isso pode ser visto também no gráfico a seguir.

Figura 65 - Gráfico das funções $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, x = \frac{1}{2}$ e $f(x) = \cos(x)$



Fonte: a própria autora

Exemplo 37: Calcule $cos\frac{\pi}{4}$ pelo Polinômio de Taylor de ordem 4.

Sabendo que $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$P_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} =$$

$$1 - 0{,}308425137 + 0{,}015854344 = 0{,}707429207$$

Portanto, $cos\frac{\pi}{4} \cong 0{,}707$.

Exemplo 38: O pêndulo cônico consiste em um corpo de massa m que gira em um círculo horizontal com velocidade v constante na ponta de uma corda de comprimento C, em metros. À medida que o corpo gira, o movimento da corda descreve a superfície de um cone imaginário, daí o nome "pêndulo cônico". O tempo T que o corpo demora para dar uma revolução completa, chamado de período, é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{C.cos\theta}{g}},$$

em que θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, e g é a aceleração da gravidade. (Dado:$\sqrt{2} = 1{,}4.$)

Suponha que o movimento de um pêndulo cônico de $2{,}5\,m$ de comprimento, e considere a aceleração da gravidade igual a $10\ m/s^2$.

1. Escreva a função que expressa o período T do movimento em função do ângulo θ em que o movimento é realizado.
2. Qual é o domínio da função que você escreveu no item 1?
3. Qual é, aproximadamente, em segundos, o período do movimento do pêndulo cônico cujo ângulo da corda com a vertical é de $60°$? (SOUZA, 2016, p. 33)

Vamos resolver este exemplo, utilizando o polinômio de Taylor de grau 4 em torno do zero. É possível fazê-lo, pois, $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

1. Sabendo que o polinômio de Taylor de grau 4 da função cosseno é $cos\,(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$, então:

$$T = \pi\sqrt{cos\theta} = \pi\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}} = \pi\sqrt{24 - 12 \times \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{24}} = \pi\sqrt{\frac{24 - 12\theta^2 + \theta^4}{24}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24 - 12\theta^2 + \theta^4}{6}}$$

2. Pelo item 1, $T(\theta) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24-12\theta^2+\theta^4}{6}}$. Para determinar o domínio desta função, basta analisar aonde $\frac{24-12\theta^2+\theta^4}{6} > 0$. Substituindo $\theta^2 = x$ em $24 - 12\theta^2 + \theta^4 = 0,$ temos:

$$24 - 12\theta^2 + \theta^4 = 24 - 12\theta^2 + (\theta^2)^2 = 24 - 12x + x^2 = 0$$

$$\triangle = (-12)^2 - 4 \times 24 = 144 - 96 = 48$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = 6 + 2\sqrt{3} = 9{,}464101615137755$$

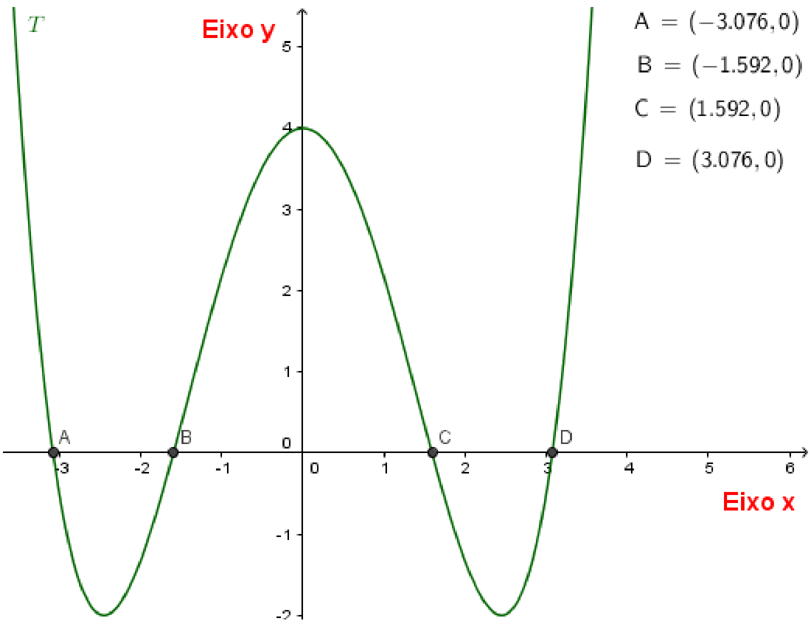
$$x_2 = 6 - 2\sqrt{3} = 2{,}535898384862245$$

Como $\theta^2 = x$, temos que:

$$\theta_1 = \pm\sqrt{x_1} = \pm\sqrt{9{,}464101615137755} = \pm 3{,}076378002641703$$

$$\theta_2 = \pm\sqrt{x_2} = \pm\sqrt{2{,}535898384862245} = \pm 1{,}592450434036251$$

Figura 66 - Gráfico da função $f(x) = 24 - 12x + x^2$ com suas raízes



Fonte: a própria autora

Portanto, como queremos saber aonde $\theta > 0$, analisando o gráfico acima, concluímos que $0 < \theta < 1{,}59245$.

3. Para descobrir o período do movimento do pêndulo cônico cujo ângulo da corda com a vertical é de $60°$, basta substituirmos $\theta = 60°$. Pelo item 1,:

$$T(\theta) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24 - 12\theta^2 + \theta^4}{6}}$$

Como $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$T(\theta)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24-12\theta^2+\theta^4}{6}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24-12(\frac{\pi}{3})^2+\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{6}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24-12\times\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi^4}{81}}{6}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{24-4\times\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi^4}{81}}{6}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{4-2\times\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi^4}{486}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1944}{486}-\frac{108\pi^2}{486}+\frac{\pi^4}{486}}=$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1944}{486}-\frac{1065{,}917275317651}{486}+\frac{97{,}40909103400244}{486}}=2{,}225428048438346$$

6.8 Polinômio de Taylor da função seno

Vimos que a função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=sen(x)$ possui derivada de todas as ordens em torno de um ponto qualquer de seu domínio, logo podemos determinar o Polinômio de Taylor de f numa vizinhança de qualquer $x_0\in Dom(f)=\mathbb{R}$. As derivadas da função seno são:

$$f(x)=sen(x)$$
$$f'(x)=sen'(x)=cos(x)$$
$$f''(x)=cos'(x)=-sen(x)$$
$$f'''(x)=-sen'(x)=-cos(x)$$
$$f^{(4)}(x)=-cos^{(4)}(x)=sen(x)$$
$$\vdots$$

Logo,

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n sen(x)$$
$$f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n cos(x)$$

Substituindo $x=0$ temos:

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n sen(0)=0$$
$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n cos(0)=(-1)^n$$

Portanto, o Polinômio de Taylor da função seno em torno de $x=0$ será:

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{6}(x-0)^3+\cdots$$
$$+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}(x-0)^{2n+1}=$$

$$f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2}(x)^2+\frac{f'''(0)}{6}(x)^3+\cdots+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}(x)^{2n+1}=$$

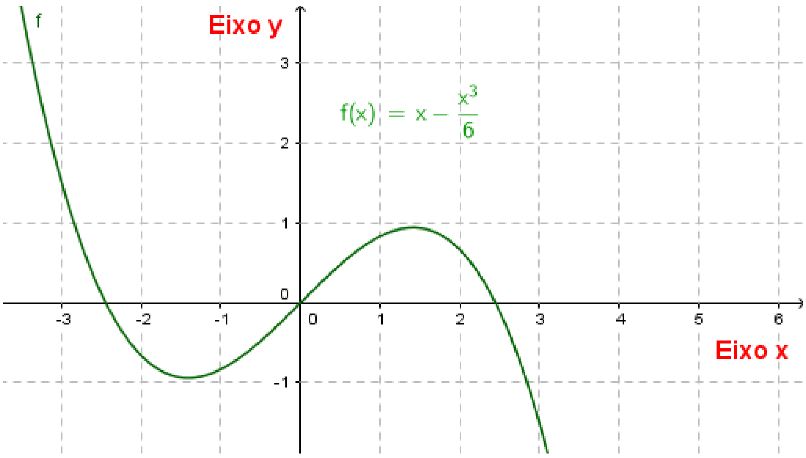
$$f(0)+1.(x)+\frac{0}{2}(x)^2+\frac{-1}{6}(x)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x)^{2n+1}=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x)^{2n+1}$$

Polinômio de Taylor da função seno de ordem 3 em torno de $x=$ 0:

$$P_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}=x-\frac{x^3}{6}$$

Figura 67 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 3 da função seno em torno de $x=0$

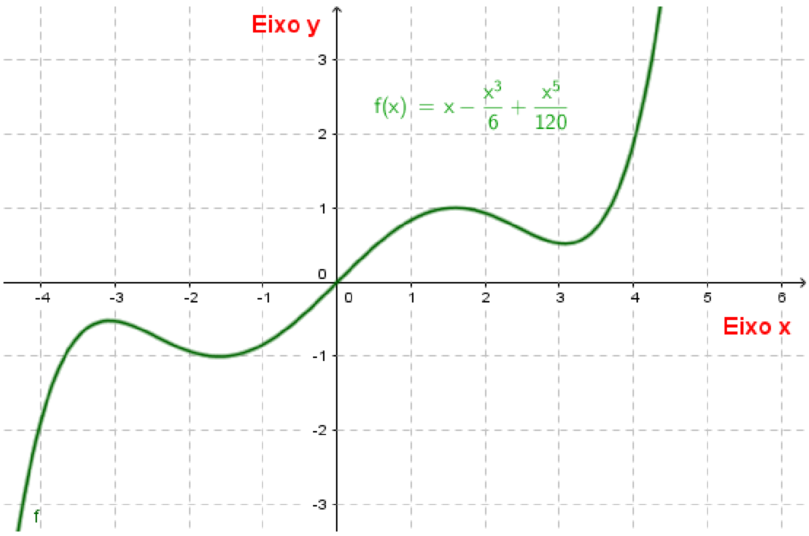


Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor da função seno de ordem 5 em torno de $x=$ 0:

$$P_5(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

Figura 68 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno de $x = 0$



Fonte: a própria autora

Vamos determinar as raízes do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno de $x = 0$. O Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é:

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0 \Rightarrow \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x = 0$$

Colocando x em evidência temos:

$$x(\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1) = 0$$

Logo $x = 0$ é uma das raízes deste polinômio.

Como $x^4 = (x^2)^2$, vemos que o polinômio acima é uma função biquadrada, sendo assim, para encontrarmos as outras raízes deste polinômio, vamos aplicar a fórmula de Baskara.

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1 = \frac{(x^2)^2}{120} - \frac{x^2}{6} + 1 = 0$$

Substituindo $x^2 = t$, temos:

$$\frac{(t)^2}{120} - \frac{t}{6} + 1 = 0$$

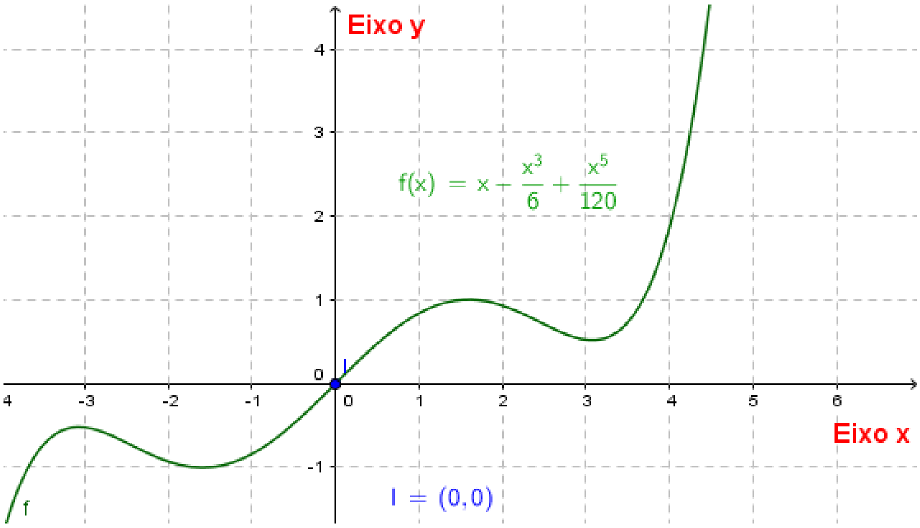
Como $a = \frac{1}{120}$, $b = -\frac{1}{6}$ e $c = 1$ temos que:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{6}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 4.\frac{1}{120}.1}}{2.\frac{1}{120}} = \frac{\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{30}}}{\frac{1}{60}} =$$

$$60.\left(\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{30}}\right) = 10 \pm 60\sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{30}} = 10 \pm 60\sqrt{\frac{5}{180} - \frac{6}{180}} = 10 \pm 60\sqrt{\frac{-1}{180}}$$

Como não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais, a única raiz do polinômio de ordem 5 da função seno é $x = 0$ e está demarcada no gráfico pelo ponto I.

Figura 69 - Gráfico com a raiz do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno de $x = 0$



Fonte: a própria autora

Como estamos trabalhando com alguns valores em torno do zero, calcular o valor da função seno pelo polinômio de ordem 5, dá um erro pequeno e ao mesmo tempo na sala de aula você não precisa de uma calculadora científica para isso, basta você utilizar uma calculadora comum, porque na verdade estamos utilizando somente a soma e a multiplicação e pelo quadro a seguir notamos como conseguimos uma boa aproximação da função seno por um polinômio de ordem 5.

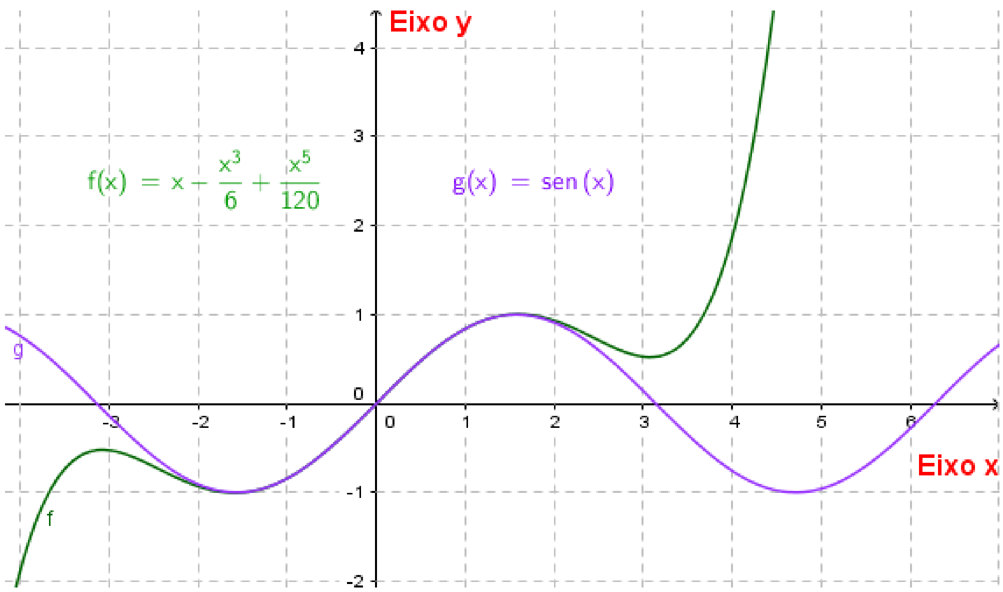
Quadro 21 - Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno × função seno × erro

x	$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = sen(x)$	$E(x)$
-1	$-0{,}84167$	$-0{,}84147$	$0{,}0002$
$-0{,}75$	$-0{,}68167$	$-0{,}68164$	$0{,}00003$
$-0{,}5$	$-0{,}47943$	$-0{,}47943$	0
$-0{,}25$	$-0{,}24740$	$-0{,}24740$	0
0	0	0	0
$0{,}25$	$0{,}24740$	$0{,}24740$	0
$0{,}5$	$0{,}47943$	$0{,}47943$	0
$0{,}75$	$0{,}68167$	$0{,}68164$	$0{,}00003$
1	$0{,}84167$	$0{,}84147$	$0{,}0002$

Fonte: a própria autora

Isso pode ser visto também no gráfico a seguir.

Figura 70 - Gráfico das funções $P_{5(x)} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e $g(x) = sen(x)$



Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor da função seno em torno de $x = \pi$

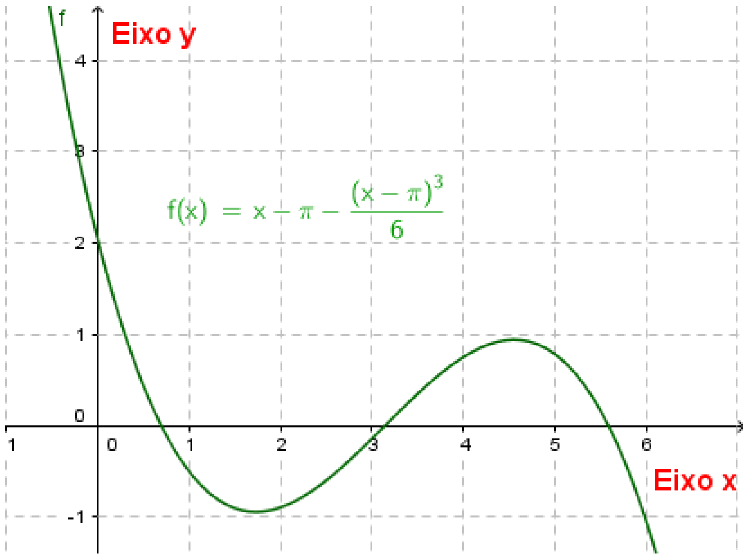
O Polinômio de Taylor da função seno em torno de $x = \pi$ será:

$$P_{2n}(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{6}(x-\pi)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(2n+1)}(\pi)}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1} =$$
$$f(\pi) + 1.(x-\pi) + \frac{0}{2}(x-\pi)^2 + \frac{-1}{6}(x-\pi)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1} =$$
$$x - \pi - \frac{(x-\pi)^3}{3!} + \frac{(x-\pi)^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$$

Polinômio de Taylor de ordem 3 da função seno em torno de $x = \pi$

$$P_3(x) = x - \pi - \frac{(x-\pi)^3}{3!} = x - \pi - \frac{(x-\pi)^3}{6}$$

Figura 71 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 3 da função seno em torno de $x = \pi$

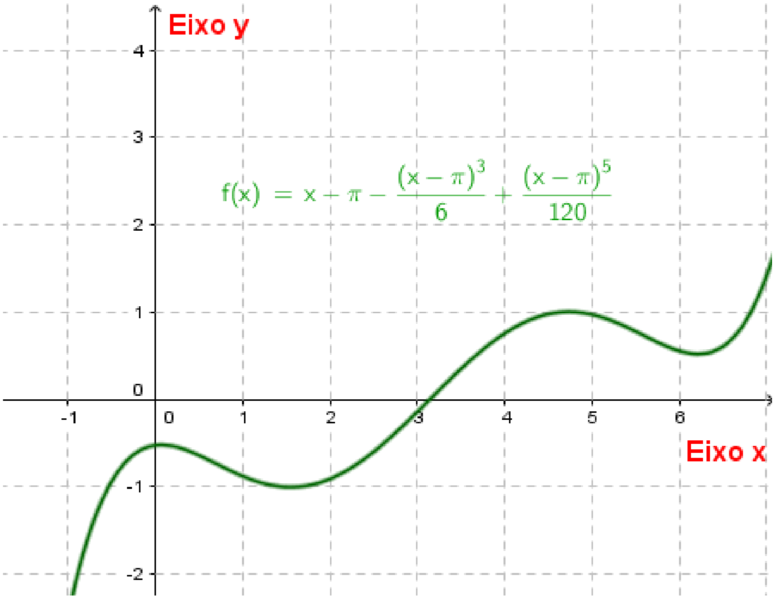


Fonte: a própria autora

Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno de $x = \pi$.

$$P_5(x) = x - \pi - \frac{(x-\pi)^3}{6} + \frac{(x-\pi)^5}{120}$$

Figura 72 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno em torno de $x = \pi$



Fonte: a própria autora

6.8 Resolução do jogo por meio dos Polinômios de Taylor

A seguir vamos resolver o jogo que foi mostrado anteriormente, por meio do Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno e Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno. Como vimos no decorrer deste capítulo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e o polinomio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é : $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Vamos utilizar os mesmos para resolver algumas casas. As resoluções das demais estão no anexo.

<u>**CASA 1**</u>**:** $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Como $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sen(2\pi)\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)cos\,(2\pi)$, e que $sen(2\pi) = 0$ e $cos\,(2\pi) = 1,$ temos que:

$$sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é: $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^{\ 3}}{6^4} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120} =$$

$$\frac{6^4 \times 120 \times \pi}{6^5 \times 120} - \frac{6 \times 120 \times \pi^3}{6^5 \times 120} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120} =$$

$$\frac{155520\pi - 720\pi^3 + \pi^5}{933120} = 0{,}5$$

Podemos concluir que $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 2</u>: $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 2, podemos escrever:

$$-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} = \frac{6144 - 192\pi^2 + \pi^4}{6144} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $-cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 3</u>: $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^4}{31104} = \frac{31104 - 432\pi^2 + \pi^4}{31104} = 0{,}866$$

Podemos concluir que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866$.

<u>CASA 4</u>: $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 4, podemos escrever:

$$-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos:

$$-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120}\right] = -\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6^4}^3 + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}\right] =$$

$$-\left[\frac{6^4 \times 120 \times \pi}{6^5 \times 120} - \frac{6 \times 120 \times \pi^3}{6^5 \times 120} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}\right] =$$

$$-\left[\frac{155520\pi - 720\pi^3 + \pi^5}{933120}\right] = -0{,}5.$$

6.9 POLINÔMIO DE TAYLOR DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$ possui derivada de todas as ordens em torno de um ponto qualquer de seu domínio, logo podemos determinar o Polinômio de Taylor de f numa vizinhança de qualquer $x_0 \in Dom(f) = \mathbb{R}$. As derivadas da função exponencial são:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = (e^x)'(x) = e^x$$
$$f''(x) = (e^x)'(x) = e^x$$
$$f'''(x) = (e^x)'(x) = e^x$$
$$f^{(4)}(x) = (e^x)^{(4)}(x) = e^x$$
$$\vdots$$

Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial em torno de $x = 0$:

Portanto, o Polinômio de Taylor da função exponencial em torno de $x = 0$ será:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x-0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

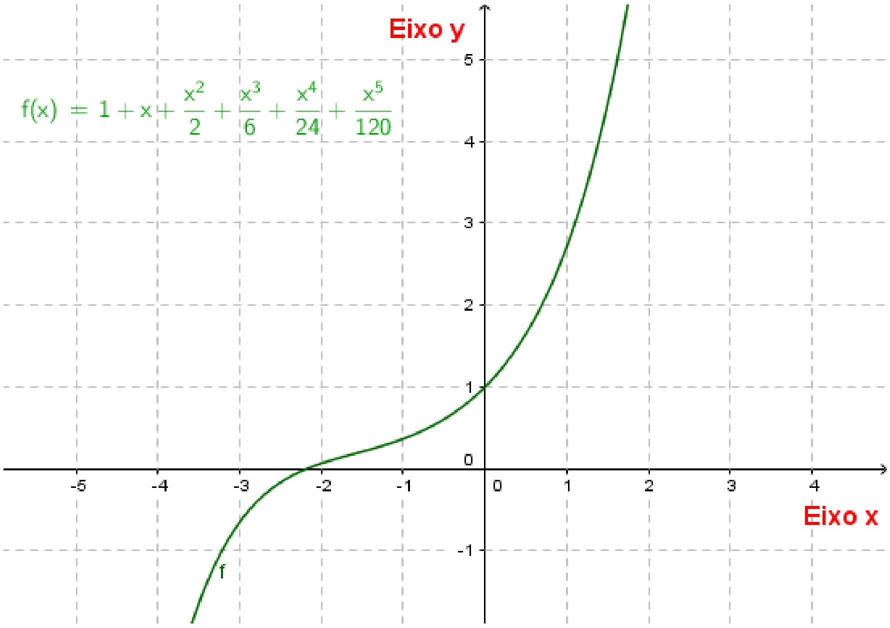
$$= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n =$$

$$\mathbf{1 + 1(x) + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(x)^n}$$

O Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial é:

$$\boldsymbol{P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \frac{1}{24}(x)^4 + \frac{1}{120}(x)^5}$$

Figura 73 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial



Fonte: a própria autora

O Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial é:

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \frac{1}{24}(x)^4 + \frac{1}{120}(x)^5$$

O cálculo do valor da função exponencial utilizando o polinômio Taylor de ordem 5, em torno do zero, apresenta um erro pequeno.

Comparação do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial e função exponencial

Quadro 22 - Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial × função exponencial × erro

x	$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \frac{1}{24}(x)^4 + \frac{1}{120}(x)^5$	$f(x) = e^x$	$E(x)$
-1	0,3667	0,3679	0,0012
$-0{,}75$	0,4721	0,4723	0,0002

$-0,5$	$0,6065$	$0,6065$	0
$-0,25$	$0,7788$	$0,7788$	0
0	1	1	0
$0,25$	$1,2840$	$1,2840$	0
$0,5$	$1,6487$	$1,6487$	0
$0,75$	$2,1167$	$2,1170$	$0,0003$
1	$2,7167$	$2,7183$	$0,0016$

Fonte: a própria autora

Notemos que, para o trabalho na sala de aula, não é necessário a utilização de uma calculadora científica, basta uma calculadora comum, pois na verdade estamos utilizando somente as operações de adição e multiplicação.

A partir do quadro 22, notamos que é possível obter uma boa aproximação da função exponencial por um polinômio de Taylor de ordem 5. Essa “boa” aproximação em torno de $x = 0$ pode ser vista no gráfico a seguir:

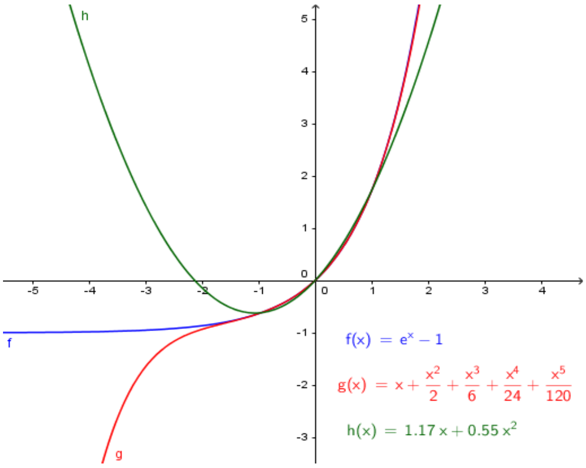
Figura 74 - Gráfico do Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial e a função exponencial

Fonte: a própria autora

Comparação da função $f(x) = e^x - 1$ com os dois polinômios aproximadores $h(x) = 1.17x + 0.55x^2$ e $P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \frac{1}{24}(x)^4 + \frac{1}{120}(x)^5$

No capítulo 4, determinamos um polinômio aproximador pra função $f(x) = e^x - 1$ e agora temos o Polinômio de Taylor para esta função. Na figura 75, apresentamos uma comparação geométrica da função $f(x) = e^x - 1$ com esses dois polinômios.

Figura 75 - Gráfico das funções $f(x) = e^x - 1$, $h(x) = 1.17x + 0.55x^2$ e $P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + \frac{1}{24}(x)^4 + \frac{1}{120}(x)^5$



Fonte: a própria autora

Aproximação de *e*

Uma vez dado o polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial , se calcularmos $P_5(1)$, vamos ter uma aproximação de e.

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{1}{24}(1)^4 + \frac{1}{120}(1)^5 = 2{,}716666667$$

Notemos que, $e \approx 2{,}718281828$. Desta forma, $P_5(1)$ é uma aproximação de e com duas casas decimais.

7 CONCLUSÃO

Com este trabalho pude sanar várias dúvidas e entender mais a fundo os conceitos de vizinhança, derivadas, limites, e suas aplicações, pois na disciplina de cálculo que tive na graduação estes conceitos foram apenas expostos e demonstrados, de forma bem mecanizada, não mostrando uma forma intuitiva de entender determinado conteúdo. Percebi que várias dúvidas expostas neste trabalho, foram minhas dúvidas também. Às vezes, vários conteúdos matemáticos nos são ensinados, porém não nos é mostrado a fundamentação daquele conteúdo. Para mim, explanar as aproximações de funções via funções polinomiais foi uma novidade e bem interessante, pois estas funções são simples de serem trabalhadas, porque utilizamos somente as quatros operações básicas: soma, subtração, multiplicação e divisão, e estas são fáceis de ser manuseadas algebricamente e de calcular suas derivadas, até porque os computadores utilizam somente dessas operações.

Se pedissem para calcular os valores de $e^{1,5}, sen\left(\frac{11\pi}{6}\right) e\ cos\ (\frac{7\pi}{3})$, antes desta dissertação, com certeza iria recorrer ao uso da calculadora científica, ou mesmo à valores tabelados, para obter esses resultados, porém com esta dissertação, pude obter boas aproximações para eles pelo Polinômio de Taylor sem utilizar a calculadora científica. Por meio do estudo deste polinômio, professores de matemática podem produzir atividades em salas de aula, onde seus alunos aprimoram e aplicam seus conhecimentos matemáticos relacionados a funções, como por exemplo, as funções exponenciais, polinomiais e funções trigonométricas, que são tratadas superficialmente, ou dependendo do professor, nem ensinam, que foi o meu caso.

Pretendemos no segundo semestre deste ano, aplicar este material aos professores de matemática que faz parte do projeto GETOM - Grupo de Estudos e Trabalho da Olimpíada de Matemática, os quais alguns fizeram parte da Oficina Klein em 2013. Estamos ávidas para testar o material e o jogo e ver se com ele o público alvo consegue ainda que parcialmente, compreender o artigo e/ou este trabalho, isto é:

- entender o conceito de vizinhança;
- encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto;

- encontrar o Polinômio de Taylor de alguma das funções aqui discutidas;
- compreender o que é aproximar uma função por um polinômio de Taylor seja ele de ordem 1, 2, 3, 4 ou 5;
- usar, aplicar e brincar com o jogo trigonométrico utilizando as funções seno e cosseno e também suas aproximações polinomiais com as propriedades cabíveis.

Na verdade, fizemos um pequeno teste de aplicação deste trabalho no evento I Encontro Paranaense do PROFMAT, em 2018. O público participante da oficina ficou muito interessado e pediram para que houvesse uma continuação da mesma. Vide apêndice C.

Esta tarefa pareceu bem mais árdua do que se mostrava. Eram vários conceitos, definições, resultados. Tanto que o capítulo limites passou para introdutório, como conceito já sabido e não a ser explicado.

Entendemos que todos nós professores, no caso da disciplina de Matemática, temos que estar constantemente em formação. Percebemos que os professores do ensino básico se dispõem a formação continuada, porém muitas vezes o material proposto está acima de sua compreensão e isto é desanimador. Esperamos que este trabalho seja de leitura compreensível a um professor de matemática do ensino médio.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática.**2ª ed.: Edgard Blucher.

CAMINHA, A. **Fundamentos de Cálculo.** 1ªed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção PROFMAT),2015.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo.** 5ª ed. Vol.1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos Científicos S.A., 2001.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática.** Paraná, 2008.

REZENDE,M.W.**Funções Polinomiais e o Mundo Digital.** https://klein.sbm.org.br/

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato Matemática.**1ª ed.Vol.2. São Paulo: FTD,2016.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato Matemática.**1ªed.Vol.1. São Paulo: FTD,2016.

VIANA, M.; SOUZA, F. H. T**. Aproximação Polinomial de Funções.**2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)-IMPA,2016.

GeoGebra- disponível gratuitamente na internet.

APÊNDICES

APÊNDICE A

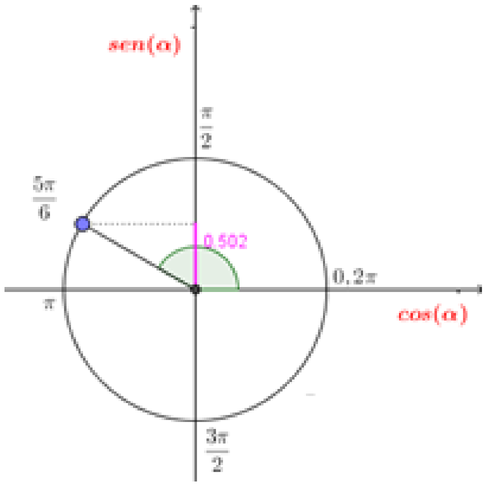
Atividade 01: jogo

Resolução das demais casas pelo modo 1

CASA 4: $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Primeiramente vamos localizar no círculo trigonométrico o ângulo $\frac{5\pi}{6}$:

Figura 81 - Representação do $\boldsymbol{sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$



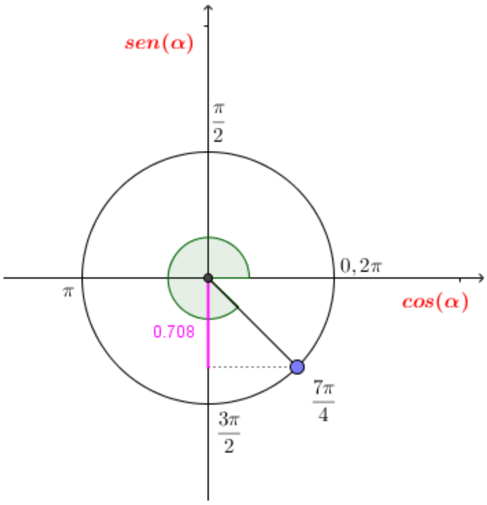
Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo vertical se refere a $sen(\alpha)$ e que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}502$. Concluímos que $-sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}502$.

CASA 5: $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Primeiramente vamos localizar no círculo trigonométrico o ângulo $\frac{7\pi}{4}$:

Figura 82 - Representação do $\boldsymbol{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$



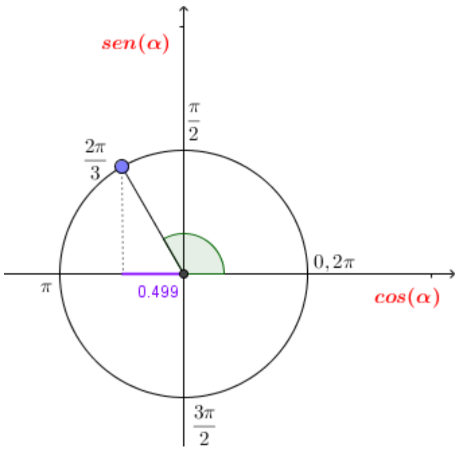
Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo vertical se refere a $sen(\alpha)$ e que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}708$. Concluímos que $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -0{,}708$.

<u>**CASA 6**</u>**:** $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Primeiramente vamos localizar $\frac{2\pi}{3}$ no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 83 - Representação do $\boldsymbol{cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo horizontal se refere a $cos(\alpha)$ e que $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}499$. Concluímos que $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}499$.

<u>**CASA 7**</u>**:** $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Pela figura 38 concluímos que $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0{,}71$.

<u>CASA 8</u>: $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

Dividindo 11π por 4, temos que, $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, ou seja, $\frac{11\pi}{4}$ equivale a uma volta completa mais $\frac{3\pi}{4}$ e como $\frac{11\pi}{4}$ está no 2º quadrante, segue que, $cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Como vimos anteriormente que $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0{,}71$. Concluímos que $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 0{,}71$.

<u>CASA 9</u>: $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{13\pi}{6}$.

Dividindo 13π por6, temos que, $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{13\pi}{6}$ equivale a uma volta completa mais $\frac{\pi}{6}$ e como $\frac{\pi}{6}$ está no 1º quadrante, segue que, $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Concluímos que $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -0{,}5$.

<u>CASA 10</u>: $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right)$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{67\pi}{6}$.

Dividindo 67π por 6, temos que, $\frac{67\pi}{6} = 11\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{67\pi}{6}$ equivale a 5 voltas e meia mais $\frac{\pi}{6}$ e como $\frac{67\pi}{6}$ está no 3º quadrante, segue que, $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)$. E como $sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Concluímos que $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 11</u>: $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$$

Dividindo 25π por 4, temos que, $\frac{25\pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\frac{25\pi}{4}$ equivale a três voltas completas mais $\frac{\pi}{4}$ e como $\frac{25\pi}{4}$ está no 1º quadrante, segue que:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Sabendo que o eixo horizontal se refere a $cos(\alpha)$ e que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Concluímos que $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 12</u>: $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{25\pi}{3}$.

Dividindo 25π por 3, temos que, $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$, ou seja, $\frac{25\pi}{3}$ equivale a quatro voltas completa mais $\frac{\pi}{3}$ e como $\frac{25\pi}{3}$ está no 1º quadrante, segue que:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Sabendo que o eixo vertical se refere a $sen(\alpha)$ e que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}865$. Concluímos que $sen\left(\frac{-25\pi}{3}\right) = -0{,}865$.

<u>CASA 13</u>: $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right)$

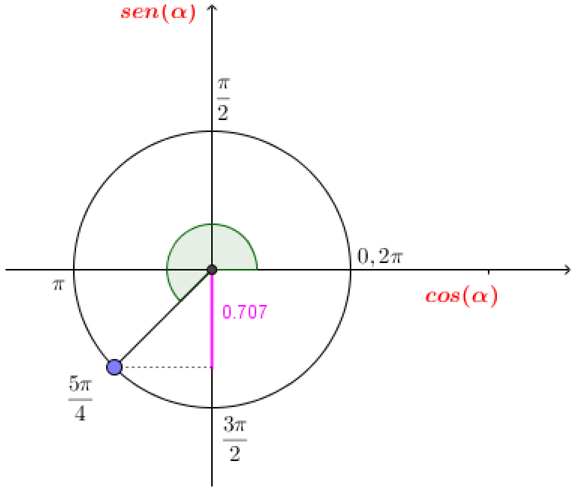
Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{45\pi}{4}$.

Dividindo 45π por 4, temos que, $\frac{45\pi}{4} = 11\pi + \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\frac{45\pi}{4}$ equivale a cinco voltas e meia mais $\frac{\pi}{4}$ e como $\frac{45\pi}{4}$ está no 3º quadrante, segue que:

$$-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Podemos verificar no círculo trigonométrico a seguir:

Figura 84 - Representação do $\boldsymbol{sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$



Fonte: a própria autora

Sabendo que o eixo vertical se refere a $sen(\alpha)$ e que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Concluímos que $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 14</u>: $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$$

Dividindo 31π por 6, temos que, $\frac{31\pi}{6} = 5\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{31\pi}{6}$ equivale a duas voltas e meia mais $\frac{\pi}{6}$ e como $\frac{31\pi}{6}$ está no 3º quadrante, segue que:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Sabendo que o eixo horizontal se refere a $cos(\alpha)$ e que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866$. Concluímos que $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = 0{,}866$.

<u>CASA 15</u>: $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{91\pi}{6}\right)$$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{91\pi}{6}$.

Dividindo 91π por 6, temos que, $\frac{91\pi}{6} = 15\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{91\pi}{6}$ equivale a 7 voltas e meia mais $\frac{\pi}{6}$ e como $\frac{91\pi}{6}$ está no 3º quadrante, segue que:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Como $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Concluímos que $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 16</u>: $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right)$$

Primeiramente vamos obter a 1ª determinação positiva de $\frac{27\pi}{4}$.

Dividindo 27π por 4, temos que, $\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$, ou seja, $\frac{27\pi}{4}$ equivale a três voltas completa mais $\frac{3\pi}{4}$ e como $\frac{27\pi}{4}$ está no 2º quadrante, segue que:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Como $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

Concluímos que $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -0{,}707$.

<u>CASA 17</u>: $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

Dividindo 22π por 3, temos que,$\frac{22\pi}{3} = 7\pi + \frac{\pi}{3}$, ou seja, $\frac{22\pi}{3}$ equivale a três voltas e meia mais $\frac{\pi}{3}$ e como $\frac{22\pi}{3}$ está no 3º quadrante, segue que:

$$cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Como $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}499$.

Concluímos que $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = -0{,}499$.

<u>Resolução das demais casas pelo modo 2</u>

<u>CASA 5</u>: $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Podemos escrever $\frac{7\pi}{4}$ como sendo $2\pi - \frac{\pi}{4}$.

Logo, $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = sen\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da subtração de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha).cos\ (\beta) - sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = sen\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = sen(2\pi).cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right).cos(2\pi)$$

Como $sen(2\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$, temos:

$$sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\,0{,}707$.

<u>CASA 6</u>: $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Podemos escrever $\frac{2\pi}{3}$ como sendo $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$.

Logo, $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, ou seja $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right).cos(\frac{\pi}{3}) - sen(\frac{\pi}{3}).sen\ (\frac{\pi}{3})\right]$$

$$= \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

Como $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$ e $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}866$, temos:

$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (0{,}5)^2 - (0{,}866)^2 = 0{,}25 - 0{,}75 = -0{,}5$$

Podemos concluir que $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \ -0{,}5$.

<u>CASA 7</u>: $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Podemos escrever $\frac{3\pi}{4}$ como sendo $\pi - \frac{\pi}{4}$.

Logo, $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da subtração de dois ângulos, ou seja:

$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) + sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos(\pi).cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen(\pi).sen\ (\frac{\pi}{4})$$

Como $sen(\pi) = 0$ e $cos(\pi) = -1$, temos:

$$cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\ (\frac{\pi}{4})$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$ e $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

<u>CASA 8</u>: $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

Podemos escrever $\frac{11\pi}{4}$ como sendo $3\pi - \frac{\pi}{4}$.

Logo, $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da subtração de dois ângulos, ou seja:

$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) + sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left[cos(3\pi).cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen(3\pi).sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Como $sen(3\pi) = 0$ e $cos(3\pi) = -1$, temos:

$$-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 9</u>: $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Podemos escrever $\frac{13\pi}{6}$ como sendo $2\pi + \frac{\pi}{6}$.

Logo, $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -sen\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja:

$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos\ (\beta) + sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -sen\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\left[sen(2\pi).cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(2\pi)\right]$$

Como $sen(2\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$, temos:

$$-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Podemos concluir que $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -0{,}5$.

<u>CASA 10</u>: $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right)$

Podemos escrever $\frac{67\pi}{6}$ como sendo $11\pi + \frac{\pi}{6}$.

Logo, $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = -sen\left(11\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos\ (\beta) + sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = -sen\left(11\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\left[sen(11\pi).cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(11\pi)\right]$$

Como $sen(11\pi) = 0$ e $cos(11\pi) = -1$, temos:

$$-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Podemos concluir que $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 11</u>: $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$$

Podemos escrever $\frac{25\pi}{4}$ como sendo $6\pi + \frac{\pi}{4}$.

Logo, $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, ou seja $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen\,(\beta)$, temos que:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \left[cos(6\pi).cos(\frac{\pi}{4}) - sen(6\pi).sen\,(\frac{\pi}{4})\right]$$

Como $sen(6\pi) = 0$ e $cos(6\pi) = 1$, temos:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 12</u>: $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

Podemos escrever $\frac{25\pi}{3}$ como sendo $8\pi + \frac{\pi}{3}$.

Logo, $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos\,(\beta) + sen(\beta).cos\,(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left[sen(8\pi).cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \ sen\left(\frac{\pi}{3}\right).cos(8\pi)\right]$$

Como $sen(8\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$, temos:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}866$. Podemos concluir que $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -0{,}866$.

<u>CASA 13</u>: $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right)$

Podemos escrever $\frac{45\pi}{4}$ como sendo $11\pi + \frac{\pi}{4}$.

Logo, $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = -sen\left(11\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha).cos\ (\beta) + sen(\beta).cos\ (\alpha)$, temos que:

$$-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = -sen\left(11\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\left[sen(11\pi).cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ sen\left(\frac{\pi}{4}\right).cos(11\pi)\right]$$

Como $sen(11\pi) = 0$ e $cos(11\pi) = -1$, temos:

$$-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 14</u>: $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

Como a função cosseno é uma função par, ou seja, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, temos que:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$$

Podemos escrever $\frac{31\pi}{6}$ como sendo $5\pi + \frac{\pi}{6}$.

Logo, $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, ou seja $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\left[cos(5\pi).cos(\frac{\pi}{6}) - sen(5\pi).sen\ (\frac{\pi}{6})\right]$$

Como $sen(5\pi) = 0$ e $cos(5\pi) = -1$, temos:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866$. Podemos concluir que $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = 0{,}866$.

<u>CASA 15</u>: $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{91\pi}{6}\right)$$

Podemos escrever $\frac{91\pi}{6}$ como sendo $15\pi + \frac{\pi}{6}$.

Logo, $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(15\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos\,(\beta) + sen(\beta).cos\,(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{91\pi}{6}\right) =$$

$$= -sen\left(15\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\left[sen(15\pi).cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ sen\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(15\pi)\right]$$

Como $sen(15\pi) = 0$ e $cos(15\pi) = -1$, temos:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Como $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Podemos concluir que $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 16</u>: $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$

Como a função seno é uma função ímpar, ou seja, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right)$$

Podemos escrever $\frac{27\pi}{4}$ como sendo $7\pi - \frac{\pi}{4}$.

Logo, $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Aplicando a fórmula do seno da subtração de dois ângulos, ou seja $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha).cos\,(\beta) - sen(\beta).cos\,(\alpha)$, temos que:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left[sen(7\pi).cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ sen\left(\frac{\pi}{4}\right).cos(7\pi)\right]$$

Como $sen(7\pi) = 0$ e $cos(7\pi) = -1$, temos:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707$. Podemos concluir que $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 17</u>: $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

Podemos escrever $\frac{22\pi}{3}$ como sendo $7\pi + \frac{\pi}{3}$.

Logo, $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = cos\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, ou seja $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen\ (\beta)$, temos que:

$$cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = cos\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left[cos(7\pi).cos(\frac{\pi}{3}) - sen(7\pi).sen\ (\frac{\pi}{3})\right]$$

Como $cos(7\pi) = -1$ e $sen(7\pi) = 0$, temos que:

$$cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = -\ cos(\frac{\pi}{3})$$

Sabendo que $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$. Podemos concluir que $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \ -0{,}5$.

Resolução de algumas casas por meio do Polinômio de Taylor

<u>CASA 5</u>: $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 5, podemos escrever:

$$sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{120} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{384}^{3} + \frac{\pi^5}{122880}$$

$$= \frac{30720 \times \pi}{122880} - \frac{320 \times \pi^3}{122880} + \frac{\pi^5}{122880} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\ 0{,}707$.

<u>CASA 6</u>: $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 6, podemos escrever:

$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right).cos(\frac{\pi}{3}) - sen(\frac{\pi}{3}).sen\ (\frac{\pi}{3})\right]$$

$$= \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, o polinômio de Taylor de grau 5 da função seno é

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{3}$ em ambas, temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^4}{1944} = \frac{1944 - 108\pi^2 + \pi^4}{1944} = 0{,}5$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{3})^5}{120} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{162}^3 + \frac{\pi^5}{29160}$$

$$= \frac{9720\pi - 180\pi^3 + \pi^5}{29160} = 0{,}866$$

Logo, $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = (0{,}5)^2 - (0{,}866)^2 = -0{,}5.$

Podemos concluir que $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5.$

<u>CASA 7</u>: $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 7, podemos escrever:

$$cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\,(\frac{\pi}{4})$$

Sabendo que o polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, o polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ em ambas, temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} = \frac{6144 - 192\pi^2 + \pi^4}{6144} = 0{,}707$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{120} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{384}^3 + \frac{\pi^5}{122880}$$

$$= \frac{30720 \times \pi}{122880} - \frac{320 \times \pi^3}{122880} + \frac{\pi^5}{122880} = 0{,}707$$

Logo, $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}707 + 0{,}707 = 0.$

Podemos concluir que $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.$

<u>CASA 8</u>: $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 8, podemos escrever:

$$-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} = \frac{6144 - 192\pi^2 + \pi^4}{6144} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $-cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 9</u>: $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 9, podemos escrever:

$$-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^{\ 3}}{6^4} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$
$$= \frac{6^4 \times 120 \times \pi}{6^5 \times 120} - \frac{6 \times 120 \times \pi^3}{6^5 \times 120} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$
$$= \frac{155520\pi - 720\pi^3 + \pi^5}{933120} = 0{,}5$$

Podemos concluir que $-sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = -0{,}5$.

<u>CASA 10</u>: $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 10, podemos escrever:

$$-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^{\ 3}}{6^4} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$
$$= \frac{6^4 \times 120 \times \pi}{6^5 \times 120} - \frac{6 \times 120 \times \pi^3}{6^5 \times 120} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$
$$= \frac{155520\pi - 720\pi^3 + \pi^5}{933120} = 0{,}5$$

Podemos concluir que $-sen\left(\frac{67\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

CASA 11: $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 11, podemos escrever:

$$cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{6144} = \frac{6144 - 192\pi^2 + \pi^4}{6144} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

CASA 12: $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 12, podemos escrever:

$$sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -sen\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{3}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{3})^5}{120} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{162}^3 + \frac{\pi^5}{29160}$$
$$= \frac{9720\pi - 180\pi^3 + \pi^5}{29160} = 0{,}866$$

Podemos concluir que $sen\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -0{,}866$.

CASA 13: $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 13, podemos escrever:

$$-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{120} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{384}^3 + \frac{\pi^5}{122880}$$

$$= \frac{30720 \times \pi}{122880} - \frac{320 \times \pi^3}{122880} + \frac{\pi^5}{122880} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $-sen\left(\frac{45\pi}{4}\right) = 0{,}707$

<u>CASA 14</u>: $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 14, podemos escrever:

$$-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^4}{31104} = \frac{31104 - 432\pi^2 + \pi^4}{31104} = 0{,}866$$

Podemos concluir que $-cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = 0{,}866$.

<u>CASA 15</u>: $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 15, podemos escrever:

$$sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6^4}^3 + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$

$$= \frac{6^4 \times 120 \times \pi}{6^5 \times 120} - \frac{6 \times 120 \times \pi^3}{6^5 \times 120} + \frac{\pi^5}{6^5 \times 120}$$

$$= \frac{155520\pi - 720\pi^3 + \pi^5}{933120} = 0{,}5$$

Podemos concluir que $sen\left(-\frac{91\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

<u>CASA 16</u>: $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 16, podemos escrever:

$$sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{27\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno é $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{4}$ temos que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{120} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{384}^3 + \frac{\pi^5}{122880}$$

$$= \frac{30720 \times \pi}{122880} - \frac{320 \times \pi^3}{122880} + \frac{\pi^5}{122880} = 0{,}707$$

Podemos concluir que $sen\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = 0{,}707$.

<u>CASA 17</u>: $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

Como vimos na resolução pelo modo 2 da CASA 17, podemos escrever:

$$cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = -\,cos(\frac{\pi}{3})$$

Sabendo que o Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno é $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ e substituindo $x = \frac{\pi}{3}$ temos que:

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{24} = 1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^4}{1944} = \frac{1944 - 108\pi^2 + \pi^4}{1944} = 0{,}5$$

Podemos concluir que $cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = -0{,}5$.

APÊNDICE B

Atividade 02

Verifique o comportamento da função $f(x) = x^4$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$?

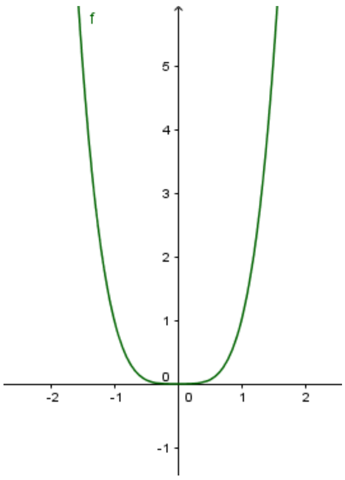
Quadro 23 – $f(x) = x^4$ para valores entre $(-10000, 10000)$

$\boldsymbol{x}$	$f(x) = x^4$
-10	10000
-100	$1.000.000$
-1000	$1.000.000.000.000$
-10000	$10.000.000.000.000.000$
10	10000
100	$1.000.000$
1000	$1.000.000.000.000$
10000	$10.000.000.000.000.000$

Fonte: a própria autora

De fato, conforme o quadro nos mostra intuitivamente, quando x tende a mais infinito, $f(x) = x^4$ tende a mais infinito e quando x tende a menos infinito, $f(x) = x^4$ tende também a mais infinito, como pode ser visto no gráfico a seguir. Podemos escrever matematicamente da seguinte forma: $\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$.

Figura 76 - Gráfico da função $f(x) = x^4$



Fonte: a própria autora

APÊNDICE C

Quadros utilizados na oficina do I Encontro Paranaense do PROFMAT

Quadro 24 - Polinômio de Taylor de ordem 5 da função seno × função seno × erro

x	$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = sen(x)$	$E(x)$
-1			
$-0,75$			
$-0,5$			
$-0,25$			
0			
$0,25$			
$0,5$			
$0,75$			
1			

Quadro 25 - Polinômio de Taylor de ordem 4 da função cosseno × função cosseno × erro

x	$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	$f(x) = cos(x)$	$E(x)$
-1	0,5417	0,5403	0,0014
$-0,75$			
$-0,5$			

$-0,25$			
0			
$0,25$			
$0,5$			
$0,75$			
1			

Quadro 26 - Polinômio de Taylor de ordem 5 da função exponencial × função exponencial × erro

x	$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = cos(x)$	$E(x)$
-1	0,3667	0,3679	0,0012
$-0,75$			
$-0,5$			
$-0,25$			
0			
$0,25$			
$0,5$			
$0,75$			
1			

ANEXOS

ANEXO A

Questionário Projeto Klein de Matemática, em Português Oficina para Professores

Roteiro para o Estudo: as questões são individuais, mas são discutidas em grupo, e no final, devem ser compiladas num único relatório de grupo; logo cada item deve ser escrito à medida que a leitura avança. Um relator deve ser apontado no início para registrar as respostas aos itens:

I) Identifique o problema central motivador do artigo e comente sobre sua importância, sob ponto de vista de conteúdo matemático segundo sua formação e conhecimento, assim como sob ponto de vista de professor de ensino médio. Em seguida, opine se o problema é acessível, justificando brevemente a resposta.

II) Identifique o resultado e/ou questões que o artigo conseguiu transmitir no desenvolvimento do artigo e sua conclusão. Comente se o artigo foi esclarecedor em relação ao problema motivador.

III) Enumerar ordenadamente quais conteúdos em que sentiu dificuldades em acompanhar o texto. Identifique no texto o termo ou passagem em que sentiu dificuldade, especificando o tipo se foi de técnica, de conceito, de notação, de linguagem, ou de outra natureza. Comente brevemente a possível causa da dificuldade. *[Durante a leitura, recomenda-se que não pare na primeira dificuldade, mas que procure completar a leitura, sempre atento a levantar os tipos e as causas da dificuldade e não perder de vista o objetivo do artigo.]*

IV) Destaque uma ou mais partes do artigo que mais apreciou e aproveitou, identificando no texto e justificando brevemente.

V) Contribua com sugestões que tornem o texto analisado acessível ao público alvo, especialmente sobre necessidades de textos complementares (sobre qual conteúdo?) e de referências (livros, textos, artigos, sites, programas, etc.) que conhece sobre o tema do artigo. Comente também conteúdos que podem ser incluídos nos cursos de formação/capacitação de professores que auxiliem a apreciação do artigo estudado.

VI) Este item se refere à conexão do tema com o currículo escolar: a) identifique um ou mais tópicos do currículo do ensino médio em que o tema/resultados do artigo possam se conectar, justificando brevemente; b) comente de que maneira o tema do artigo poderia ser trabalhado numa sala de aula de ensino médio; c) comente a validade deste artigo no conhecimento de um professor de ensino médio na sua formação, mesmo que não leve o assunto diretamente para sua prática.

Questão que deve ser respondida individualmente por cada participante, em folha separada e entregue ao(s) coordenador(es) da Oficina (entrega OBRIGATÓRIA):

- ✓ Como aproveitou a Oficina, como colaborador(a) do projeto Klein? Comente com referências a sua formação e a sua prática profissional atual.

ANEXO B

Resumo e carta de aceite de minicurso para o II Encontro Paranaense do PROFMAT

FUNÇÕES POLINOMIAIS E FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS: UM ESTUDO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Ana Lúcia da Silva [2]& Luciana Mayumi Umakoshi[3]

Área/Subárea: Matemática/Análise

Resumo:

Esse mini curso é oriundo da dissertação de mestrado escrita pelas autoras. Nele será explanado parte do artigo Klein - Funções Polinomiais e o Mundo Digital - que inspirou o TCC e versa sobre qualidades peculiares das funções polinomiais e algumas aplicações.

De forma rudimentar, o gráfico de uma função real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua é uma curva sem descontinuidades, ininterrupta, isto é, “aquela que ao desenhá-la não tiramos o lápis do papel”, já o gráfico de uma função diferenciável é uma curva contínua e suave, ou seja, sem bicos e que sempre pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Uma função polinomial é sempre contínua e diferenciável.

Na verdade, a família de funções polinomiais é uma classe de funções muito especial, assim como as funções trigonométricas seno e cosseno e a função exponencial, pois elas são infinitamente diferenciáveis, o que garante a estas últimas poderem ser aproximadas, localmente, por funções polinomiais. Perguntamos então: Como efetuar estas aproximações e qual sua importância? Qual o conceito de continuidade, de diferenciabilidade, gráficos de funções, aproximação local, curva suave, curva sem bicos? O que é um artigo Klein? Estas questões e outras serão respondidas nesse mini curso.

Referências

1) REZENDE, M. W. Funções Polinomiais e o Mundo Digital. https://klein.sbm.org.br/artigos/artigos-klein/funcoes-polinomiais-e-o-mundo-digital#more-23

---

[2] Orientador. Departamento de Matemática, UEL, PR, e-mail: analucia@uel.br
[3] Profmat, UEL, PR, e-mail: lumakoshi@hotmail.com

2) ÁVILA, G.Introdução à Análise Matemática.2ª ed.: Edgard Blucher.

3) GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo. 5ª ed. Vol.1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos Científicos S.A., 2001.

Figura 77 - Carta de aceite de minicurso

11 e 12 de outubro de 2019

II encontro Paranaense do Profmat

UTFPR - Curitiba

Curitiba, 24 de junho de 2019.

CARTA DE ACEITE

Informamos que o trabalho intitulado

Funções Polinomiais E Funções Transcendentais: Um Estudo E Algumas Aplicações

de autoria de

Ana Lúcia da Silva e Luciana Mayumi Umakoshi

foi aceito para ser apresentado no II Encontro Paranaense do Profmat

na forma de **Minicurso no dia 11/10 das 9h às 12h**.

Atenciosamente,

Comitê organizador do evento