UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DAYANE DE ANDRADE OLIVEIRA PAULINO

ORIGAMIS MODULARES E OS POLIEDROS DE PLATÃO

PONTA GROSSA

2020

DAYANE DE ANDRADE OLIVEIRA PAULINO

ORIGAMIS MODULARES E OS POLIEDROS DE PLATÃO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profª. Dra. Elisangela dos Santos Meza

PONTA GROSSA

2020

P328

Paulino, Dayane de Andrade Oliveira

Origamis Modulares e os Poliedros de Platão / Dayane de Andrade Oliveira Paulino. Ponta Grossa, 2020.

139 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Elisangela dos Santos Meza.

1. Origami modular. 2. Poliedros de platão. 3. Geometria. I. Meza, Elisangela dos Santos. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 -
Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

DAYANE DE ANDRADE OLIVEIRA PAULINO

“ORIGAMIS MODULARES E OS POLIEDROS DE PLATÃO”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 08 de Maio de 2020.

Membros da Banca:

Dra. Elisangela dos Santos Meza (UEPG) – Presidente

Dra. Marli Terezinha Van Kan (UEPG)

Dr. Sebastião Romero Franco (UNICENTRO)

Documento assinado eletronicamente por **Elisangela dos Santos Meza**, **Professor(a)**, em 08/05/2020, às 10:12, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Marli Terezinha Van Kan**, **Professor(a)**, em 08/05/2020, às 10:12, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **0212114** e o código CRC **E6C8D0AB**.

Dedico este trabalho, *in memorian* aos meus pais Jair de Oliveira e Severina Lourenço de Andrade, principalmente a minha mãe que acompanhou parte da minha jornada no curso e sempre me apoiou nesta caminhada, abdicando de muitas coisas para me ajudar a realizar este sonho.

A minha filha Ana Beatriz, meu milagre de Deus, presente Dele concedido a mim para me trazer alegria e a realização do sonho de ser mãe.

Por fim, ao meu esposo, amigo e amor Edson Paulino, por compreender os momentos em que estive ausente e que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, acreditando em mim e incentivando a concretização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que durante esta caminhada de estudos iluminou o meu caminho e sempre me fortaleceu, concedendo-me fé, saúde e paz para que eu pudesse alcançar meu objetivo.

Agradeço à minha família que sempre esteve ao meu lado, me incentivando e apoiando, nos momentos em que pensei que não conseguiria, e que com muito carinho e apoio não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Agradeço a minha orientadora e querida Professora Elisangela dos Santos Meza, pela atenção a mim desempenhada, pelo auxilio e paciência, estando sempre disposta a dar o melhor de si.

Agradeço aos professores do PROFMAT da UEPG, que foram mais que professores, sempre repassando seus conhecimentos com a finalidade de formar professores melhores, que repensam sua prática.

Agradeço também aqueles que marcaram minha vida neste período de caminhada e que com certeza vou levar para todo sempre, amigos que ganhei através do PROFMAT.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que não mede esforços para melhorar o ensino de matemática na educação básica, desta forma viabilizou a implementação do PROFMAT.

E por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para esta pesquisa.

“*Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”*

(Platão)

RESUMO

Este trabalho visa propor uma nova forma de aplicação do Origami Modular no ensino da Geometria, principalmente no tocante a introdução dos Poliedros Regulares, os Sólidos de Platão, visto que existem obras que abordam a aplicação do Origami com os Poliedros de Platão, entretanto destacam o Origami apenas como um recurso metodológico para possibilitar o material concreto, a fim de propiciar ao estudante uma melhor visualização, não explorando os recursos geométricos de construção. Importante destacar que o Origami tem a finalidade de motivar e auxiliar o desenvolvimento cognitivo, possibilitando uma melhor compreensão da Matemática através da manipulação de pedaços de papel, entretanto é necessário relacionar cada dobra realizada no papel com as propriedades matemáticas existentes. Ressalta-se que no ensino de Geometria, os problemas exercem fundamental importância, haja vista que permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e espacial e não apenas o uso de fórmulas. Nesta perspectiva, neste trabalho de uma maneira diferente da que vem sido utilizada, apresentando como proposta a utilização do passo a passo disponível na apostila número 11 do PIC (Programa de Iniciação Científica), presente no acervo da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas), bem como a proposta de construção sem o uso de régua graduada para cortar o papel no tamanho ideal, a fim de estruturar melhor os conceitos matemáticos envolvidos na arte do Origami, partindo inicialmente dos Axiomas dos Origamis, destacando as construções preliminares para obtenção do papel nas proporções matemáticas ideais sem o uso de régua graduada, frisando as propriedades matemáticas, para a construção dos módulos de faces triangulares, quadradas e pentagonais, para após montarmos os cinco Poliedros de Platão. O Origami modular é uma maneira para enriquecer as aulas com um baixo custo, pois além de apresentar objetos manipuláveis que tornam o processo de ensino-aprendizagem mais atrativo e significativo, podem fornecer aos estudantes um aprofundamento bem maior em Geometria.

Palavras-chave: Origami modular. Poliedros de Platão. Geometria.

ABSTRACT

This work aims to propose a new form of application of Modular Origami in the teaching of Geometry, especially with regard to the introduction of Regular Polyhedra, Plato Solids, since there are works that address the application of Origami with Plato's Polyhedra, however they highlight Origami only as a methodological resource to enable concrete material, in order to provide the student with a better visualization , not exploiting geometric building resources. It is important to highlight that Origami aims to motivate and assist cognitive development, enabling a better understanding of mathematics through the manipulation of pieces of paper, however it is necessary to relate each fold performed on paper with the existing mathematical properties. It is emphasized that in the teaching of Geometry, problems exert fundamental importance, given that they allow the student to put himself before questions and think for himself, enabling the exercise of logical and spatial reasoning and not only the use of formulas. In this perspective, in this work in a different way from what has been used, presenting as a proposal the use of the step by step available in apostille number 11 of the PIC (Scientific Initiation Program), present in the collection of OBMEP (Brazilian Public Schools Olympics), as well as the proposal for construction without the use of a graduated ruler to cut the paper to the ideal size , in order to better structure the mathematical concepts involved in the art of Origami, starting initially from the Axioms of Origamis, highlighting the preliminary constructions to obtain the paper in the ideal mathematical proportions without the use of graduated ruler, emphasizing the mathematical properties, for the construction of modules of triangular, square and pentagonal faces, for after assembling the five Plato Polyhedra. Modular Origami is a way to enrich classes at a low cost, because in addition to presenting manipulable objects that make the teaching-learning process more attractive and meaningful, they can provide students with a much greater in-depth geometry.

Keywords: Modular origami. Plato's polyhedra. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tipos de Poliedros 28
Figura 2 - Sólidos de Platão 30
Figura 3 - Mapa mental dos Sólidos de Platão 31
Figura 4 - Tetraedro e sua planificação 35
Figura 5 - Hexaedro e sua planificação 36
Figura 6 - Dodecaedro e sua planificação 37
Figura 7 - Octaedro e sua planificação 38
Figura 8 - Icosaedro e sua planificação 39
Figura 9 - Construções elementares com Origamis 52
Figura 10 - Primeiro Axioma de Huzita - Hatori 53
Figura 11 - Segundo Axioma de Huzita-Hatori 53
Figura 12 - Terceiro Axioma Huzita-Hatori 53
Figura 13 - Quarto Axioma Huzita-Hatori 54
Figura 14 - Quinto Axioma de Huzita-Hatori 54
Figura 15 - Sexto Axioma de Huzita-Hatori 55
Figura 16 - Sétimo Axioma Huzita-Hatori 55
Figura 17 - Linguagem das dobraduras...58
Figura 18 - Linguagem das dobraduras...58
Figura 19 - Linguagem das dobraduras...59
Figura 20 - Linguagem das dobraduras...59
Figura 21 - Triângulo equilátero 82
Figura 22 - Construção Preliminar - Passo 1..82
Figura 23 - Construção Preliminar - Passo 2..83
Figura 24 - Construções Preliminares: Primeiro Caso 83
Figura 25 - Construções Preliminares: Segundo Caso 84
Figura 26 - Dividindo o Papel A4...85
Figura 27 - Dividindo o Papel A4...85
Figura 28 - Dividindo o Papel A4...86
Figura 29 - Dividindo o Papel A4...86
Figura 30 - Dividindo o Papel A4...87
Figura 31 - Construção do copo - Passo 1 87
Figura 32 - Construção do copo - Passo 2 88
Figura 33 - Construção do copo - Passo 3 88
Figura 34 - Construção copo - Passo 4 89
Figura 35 - Construção do copo - Passo 5 89
Figura 36 - Construção do copo - Passo 6 90
Figura 37 - Construção do copo - Passo 7 90
Figura 38 - Copo Pronto...90
Figura 39 - Medidas para o módulo do Pentágono Regular 91
Figura 40 - Módulo A - Passo 1...92
Figura 41 - Módulo A - Passo 2...92
Figura 42 - Módulo A - Passo 3...93

Figura 43 - Módulo A - Passo 4.....93
Figura 44 - Módulo A - Passo 5.....93
Figura 45 - Módulo A - Passo 6.....94
Figura 46 - Módulo A - Passo 7.....94
Figura 47 - Módulo A - Passo 8.....95
Figura 48 - Módulo A - Passo 9.....95
Figura 49 - Módulo A - Passo 10.....96
Figura 50 - Módulo A - Passo 11.....96
Figura 51 - Módulo A.....96
Figura 52 - Módulo B - Passo 1.....97
Figura 53 - Módulo B - Passo 2.....97
Figura 54 - Módulo B - Passo 3.....98
Figura 55 - Módulo B - Passo 4.....98
Figura 56 - Módulo B - Passo 5.....99
Figura 57 - Módulo B - Passo 6.....99
Figura 58 - Módulo B - Passo 7.....99
Figura 59 - Módulo B - Passo 8.....100
Figura 60 - Módulo B - Passo 9.....100
Figura 61 - Módulo B - Passo 10.....101
Figura 62 - Módulo B.....101
Figura 63 - Hexágono - Passo 1.....102
Figura 64 - Hexágono - Passo 2.....102
Figura 65 - Hexágono - Passo 3.....103
Figura 66 - Hexágono - Passo 4.....103
Figura 67 - Hexágono - Passo 5.....104
Figura 68 - Hexágono - Passo 6.....104
Figura 69 - Hexágono - Passo 7.....104
Figura 70 - Hexágono - Passo 8.....105
Figura 71 - Hexágono - Passo 9.....105
Figura 72 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 1.....106
Figura 73 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 2.....106
Figura 74 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 3.....107
Figura 75 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 4.....107
Figura 76 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 5.....108
Figura 77 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 6.....108
Figura 78 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 7.....109
Figura 79 - Retângulo para faces pentagonais.....109

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Fotografia 1 - Livro didático Contexto e Aplicações p.132 41
Fotografia 2 - Livro didático Contexto e Aplicações p. 133 41
Fotografia 3 - Sugestões do livro.. 42
Fotografia 4 - Enunciado da questão 66... 43
Fotografia 5 - Solução para a questão 66 44
Fotografia 6 - Unidades dos módulos de sonobe 56
Fotografia 7 - União de três módulos 57
Fotografia 8 - Módulos agrupados de 3 em 3 57
Fotografia 9 - União de todos os módulos - Octaedro estrelado 57
Fotografia 10 - Módulo A - passo 1 60
Fotografia 11 - Módulo A - passo 2 60
Fotografia 12 - Módulo A - passo 3 61
Fotografia 13 - Módulo A - passo 4 61
Fotografia 14 - Módulo A - passo 5 62
Fotografia 15 - Módulo A - passo 6 62
Fotografia 16 - Módulo A - passo 7 63
Fotografia 17 - Módulo A - passo 8 63
Fotografia 18 - Módulo A - passo 9 64
Fotografia 19 - Módulo A - passo 10 64
Fotografia 20 - Módulo A - passo 11 65
Fotografia 21 - Módulo B - passo 8 65
Fotografia 22 - Módulo B - passo 9 66
Fotografia 23 - Módulo B - passo 10 66
Fotografia 24 - Módulo B - passo 11 67
Fotografia 25 - Módulos A e B... 67
Fotografia 26 - Tetraedro 68
Fotografia 27 - Octaedro 68
Fotografia 28 - Icosaedro 68
Fotografia 29 - Módulo quadrangular - passo 1 69
Fotografia 30 - Módulo quadrangular - passo 2 69
Fotografia 31 - Módulo quadrangular - passo 3 70
Fotografia 32 - Módulo quadrangular - passo 4 70
Fotografia 33 - Módulo quadrangular - passo 5 71
Fotografia 34 - Módulo quadrangular - passo 6 71
Fotografia 35 - Módulo quadrangular - passo 7 72
Fotografia 36 - Módulo quadrangular - passo 8 72
Fotografia 37 - Módulo quadrangular - passo 9 73
Fotografia 38 - Módulo quadrangular - passo 10 73
Fotografia 39 - Módulo quadrangular - passo 11 74
Fotografia 40 - Módulo quadrangular - passo 12 74
Fotografia 41 - Hexaedro montado... 74
Fotografia 42 - Módulo quadrangular 75
Fotografia 43 - Módulo pentagonal - passo 1 76

Fotografia 44 - Módulo pentagonal - passo 2 76
Fotografia 45 - Módulo pentagonal - passo 3 76
Fotografia 46 - Módulo pentagonal - passo 4 77
Fotografia 47 - Módulo pentagonal - passo 5 77
Fotografia 48 - Módulo pentagonal - passo 6 78
Fotografia 49 - Módulo pentagonal - passo 7 78
Fotografia 50 - Módulo pentagonal - passo 8 79
Fotografia 51 - Módulo pentagonal concluído.. 79
Fotografia 52 - Transformando papel tamanho A4 em um quadrado 110
Fotografia 53 – Passo a Passo - Retângulos especiais...................................... 110
Fotografia 54 - Retângulo de proporção.. 110
Fotografia 55 - Retângulo de proporção.. 111
Fotografia 56 - Dividindo o A4 111
Fotografia 57 - 12 retângulos especiais.. 111
Fotografia 58 – Passo a Passo - Módulo A 112
Fotografia 59 - Módulo A.. 112
Fotografia 60 - Módulo B.. 112
Fotografia 61 - Módulos A e B.. 113
Fotografia 62 - Módulos A e B unidos 113
Fotografia 63 - Tetraedro 114
Fotografia 64 - Módulos de unidades A e B 114
Fotografia 65 - Módulos encaixados 115
Fotografia 66 - Módulos encaixados 115
Fotografia 67 - Octaedro 116
Fotografia 68 - Faixa cilíndrica 117
Fotografia 69 - Icosaedro 117
Fotografia 70 - Módulo face quadrangular.. 118
Fotografia 71 - Encaixando os módulos 118
Fotografia 72 - Hexaedro 119
Fotografia 73 - Obtendo retângulo proporcional a 6x4 120
Fotografia 74 - Retângulo proporcional a 6x4.. 120
Fotografia 75 - Passo a passo 121
Fotografia 76 - Retângulo ideal para os módulos de faces pentagonais 121
Fotografia 77 – Passo a passo do módulo de face pentagonal 122
Fotografia 78 - Módulo de face pentagonal regular 122
Fotografia 79 - Módulos faces pentagonais.. 122
Fotografia 80 - Encaixando os módulos 123
Fotografia 81 - Dodecaedro 123
Fotografia 82 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 132
Fotografia 83 Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão.................. 133
Fotografia 84 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 134
Fotografia 85 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 135
Fotografia 86 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 136
Fotografia 87 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 137
Fotografia 88 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 138

Fotografia 89 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão 139

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Poliedros com 3 arestas em cada vértice 33
Quadro 2 - Poliedros com faces triangulares 34
Quadro 3 - Cinco Poliedros encontrados 34
Quadro 4 - Poliedros de Platão e seus elementos 39
Quadro 5 - Livros de Matemática PNLD 2018 40
Quadro 6 - Dissertações sobre Origami 45
Quadro 7 - Dissertações sobre Origami – BDTD 48

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..17
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA...21
2.1 A HISTÓRIA DO ORIGAMI...21
2.2 BREVE HISTÓRICO DO ORIGAMI NO BRASIL..23
2.3 ORIGAMIS NA MATEMÁTICA...24
3 POLIEDROS...28
3.1 POLIEDROS REGULARES...29
3.1.1 Poliedros de Platão..29
4 REVISÃO DE LITERATURA..40
4.1 LIVROS DIDÁTICOS..40
4.2 DISSERTAÇÕES DO PROFMAT...44
4.3 BIBLIOTECA DIGITAL BRASILEIRA DE TESES E DISSERTAÇÕES...............47
5 SÓLIDOS DE PLATÃO COM ORIGAMI MODULAR...51
5.1 AXIOMAS DE HUZITA-HATORI...51
5.2 MÓDULOS...56
5.3 CONSTRUÇÕES DOS POLIEDROS DE PLATÃO A PARTIR DA REVISÃO DE LITERATURA...59
6 ESTUDO DOS POLIEDROS DE PLATÃO PELA PERSPECTIVA PROPOSTA NA APOSTILA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP.......................................81
6.1 CONSTRUÇÕES PRELIMINARES...81
6.1.1 Construção das Unidades básicas: Retângulos Especiais.........................82
6.1.2 Dividindo a folha A4 em unidades básicas para construção dos módulos.......84
6.1.3 Construção do copo..87
6.2 CONSTRUÇÃO DOS MÓDULOS...91
6.2.1 Módulos para as faces triangulares...91
6.2.2 Módulos para faces quadrangulares...101
6.2.3 Módulos para faces pentagonais..105
6.3 MONTAGEM DOS POLIEDROS..109
6.3.1 Poliedros de faces triangulares..109
6.3.2 Montagem do Hexaedro...117
6.3.3 Retângulo ideal sem uso de régua graduada para os módulos de faces pentagonais regulares...119
6.3.4 Montagem do Dodecaedro...121

REFERÊNCIAS 126
APÊNDICE - PROPOSTA DE ATIVIDADE 130
ANEXO A – FRAGMENTO DO LIVRO CONTEXTO & APLICAÇÕES 132
ANEXO B – FRAGMENTO DO LIVRO QUADRANTE MATEMÁTICA 133
ANEXO C – FRAGMENTO DO LIVRO MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES 134
ANEXO D – FRAGMENTOS DO LIVRO MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO 135
ANEXO E – FRAGMENTO DO LIVRO MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA 136
ANEXO F – FRAGMENTO DO LIVRO #CONTATO MATEMÁTICA 137
ANEXO G – FRAGMENTOS DO LIVRO MATEMÁTICA PAIVA........................... 137
ANEXO H – FRAGMENTO DO LIVRO CONEXÕES COM A MATEMÁTICA 139

1 INTRODUÇÃO

Ao analisarmos a história da Matemática, percebemos que as primeiras aplicações relacionadas a Geometria foram em relação a divisão de terras e também na Astronomia.

A partir daí a Geometria passou a ser uma constante no cotidiano humano, sendo que atualmente ela faz parte de uma das cinco unidades temáticas proposta na Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017), com seu estudo a partir do Ensino Fundamental.

Entretanto, é notória a dificuldade apresentada pelos alunos no aprendizado da Geometria, que por vezes acontece por falta de motivação.

Destaca-se que no ensino de Geometria, os problemas exercem fundamental importância, haja vista que permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e espacial e não apenas o uso de fórmulas.

Lorenzatto justifica a importância do ensino de Geometria:

> A necessidade do ensino de Geometria pelo fato de que, um indivíduo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. Não poderá ainda utilizar-se da Geometria como facilitadora para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. (LORENZATO, 1995, p.5).

Deste modo a Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração e da criatividade, pois através dela os alunos conseguem ampliar a sua habilidade de visualização e percepção da beleza e harmonia das formas.

Cabe ressaltar que no Ensino Médio, o aluno deve perceber a Matemática como uma ciência, de forma que ele deve estar apto a adquirir conhecimentos técnico-científicos e, através desses conhecimentos, formular hipóteses, construir conjecturas, aplicar teorias, desenvolvendo, assim, um raciocínio lógico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000, p.41), destaca que:

> Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida.

Assim, através do que foi supracitado, percebe-se a importância do trabalho matemático no Ensino Médio, no que tange ao ensino da Geometria, pois ela é responsável por relacionar o espaço e suas formas com outras áreas, o que possibilita a formação do pensamento Matemático.

Ainda segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000, p.41) "A aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar Matemático".

O objetivo geral deste trabalho é propor a aplicação do Origami Modular no ensino da Geometria, principalmente no tocante a introdução dos Poliedros Regulares, os Sólidos de Platão, destacando as propriedades matemáticas existentes em cada dobra realizada no papel. Desta forma, mostra-se aos estudantes que é possível realizar as construções e obter proporções ideais do tamanho do papel, bem como dos polígonos a serem construídos sem utilizar régua, somente com o uso de construções geométricas por meio de dobras no papel, a fim de motivar e auxiliar o desenvolvimento cognitivo, possibilitando uma melhor compreensão da Matemática através da manipulação de pedaços de papel.

O Origami aparece como uma ferramenta lúdica poderosa para motivar o aprendizado da Geometria, visto que estudiosos perceberam que as dobras feitas no Origami são capazes de transmitir de forma clara alguns conteúdos matemáticos. França, Martins e Almeida (2010, p. 2), em seu trabalho apresentado na Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática sobre o aprendizado da Matemática com Origami, mencionam que:

> A geometria, disciplina que pertence à Matemática e é responsável pelo estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo, é na qual está apoiado axiomas, postulados e corolários, usados para demonstrar a validade de cada teorema, também fazem o uso do origami.
>
> Como exemplo do uso do origami na geometria, temos os mais comuns que são os sólidos platônicos, poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares. Na Matemática, é possível associar muitos assuntos a essa arte, até frações que é, no início de seu estudo um pouco rejeitado, pode ser ensinado com o manuseio desse material de apoio. O essencial é promover uma Matemática compreensível e interativa.

Assim, a utilização do Origami no ensino de Geometria traz diversos benefícios, sendo eles: o incentivo a criatividade, habilidades motoras, senso de organização, entre outros, promovendo no estudante uma maior percepção do material lúdico com o conteúdo em estudo.

No segundo Capítulo, apresentaremos todo o contexto histórico do Origami, como ele surgiu, e um breve histórico desta técnica no Brasil e sua relação com a Matemática.

No terceiro Capítulo, apresentaremos os Poliedros, em especial os Poliedros Regulares, também conhecidos como Poliedros de Platão. Partindo de um breve relato histórico a respeito da nomenclatura, mostrando sua definição Matemática e a partir da definição demonstraremos porque só existem cinco, e somente cinco Poliedros de Platão.

No quarto Capítulo, faremos uma revisão bibliográfica a respeito do tema, visto que existem muitas obras que abordam as aplicações do Origami com os Poliedros de Platão, entretanto destacam o Origami apenas como um recurso metodológico para possibilitar o material concreto, a fim de propiciar aos estudantes uma melhor visualização, e as que exploram os recursos geométricos de construção não dão ênfase ao tema objeto desta pesquisa.

No quinto Capítulo, abordaremos as formas que têm sido apresentado os Origamis no do estudo de Poliedros de Platão a partir da revisão bibliográfica realizada e a contextualização destas construções com a Matemática.

No sexto Capítulo, apresentaremos os Sólidos de Platão com Origami Modular, partindo de uma perspectiva diferente da que vem sendo utilizada, destacando como proposta a utilização do passo a passo disponível na apostila do PIC (Programa de Iniciação Científica Jr), presente no acervo da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas), a fim de estruturar melhor os conceitos matemáticos envolvidos na arte do Origami, partindo inicialmente dos Axiomas dos Origamis, mais conhecidos como Axiomas de Huzita-Hatori, mostrando as construções preliminares para obtenção do papel nas proporções matemáticas ideais sem o uso de régua graduada, frisando as propriedades matemáticas para a construção dos módulos de faces triangulares, quadradas e pentagonais, para após montarmos os cinco Poliedros de Platão. Por fim, no sétimo Capítulo apresentaremos a conclusão deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A HISTÓRIA DO ORIGAMI

A palavra origami é de origem japonesa composta do verbo dobrar (折り=*ori*) e do substantivo papel (紙=*kami*), ou seja, dobrar o papel.

Atualmente o Origami é uma arte disseminada pelo mundo todo e embora seja um patrimônio da cultura japonesa, em razão de ter enraizado em suas tradições por séculos, ele pode ter surgido na China, visto que a China é considerada o "berço do papel", no Egito ou na Europa (Mouros).

Entretanto, Hatori Koshiro (2020), em K's Origami, explica que a ideia de que o Origami teria surgido na China junto com a invenção do papel foi descartada, haja vista que as evidências sugerem que o papel só foi utilizado na China para escrever.

A técnica foi introduzida no Japão pelos monges budistas coreanos, sendo atribuída a Tonchyo, monge budista de Koma (antiga Coréia), no século VI d.C., onde Estado e religião eram unificados, o origami era usado nas comemorações religiosas xintoístas. (UENO, 2003, p.12)

Os japoneses desenvolveram sua própria tecnologia para fabricar o papel por volta do ano de 610, criando o papel conhecido por washi, que poderia ser usado de forma diversa, inclusive para Origami.

Ressalta-se que no período do Edo[1] (1603 a 1867) o papel tornou-se popular, com isto a popularização do Origami que começou a ser desenvolvido em atividades recreativas e familiares, passando de geração a geração.

No texto "Pequena história do Origami", os autores relatam as primeiras publicações específicas a respeito dos origamis, entre elas está o livro "Hidem Sembazuru Orikata" (O segredo dos mil "tsurus"), considerado por muitos o livro mais antigo de origami já publicado, vejamos:

> Foram publicadas duas obras contendo as orientações para a execução de origamis: "*Hidem Sembazuru Orikata*" por Akisato Rito (1797) e "*Kayaragusa*" por Adachi Kazuyuki (1845). Essa última obra ficou conhecida como "*Kan no*

[1] Período Edo: poder para Tokugawa Ieyasu e mudança do centro político para Edo (atual Tóquio). Período de isolamento do Japão para com o resto do mundo. A sociedade japonesa dividia-se da seguinte maneira: nobres, samurais, fazendeiros e comerciantes (UENO, 2003, p.40)

> *Mado*". O grou-japonês ou *tsuru*, uma ave considerada tradicionalmente sagrada, tornou-se o símbolo do origami. (HAYASAKA; NISHIDA [...], 2020).

Na mesma linha, conforme se extrai do artigo Origami: Matemática e Sentimento:

> (...) A popularização do Origami se deu no período Tokugawa (1603- 1867). Aí surgiu a dobradura original do tsuru (cegonha), sem dúvida a mais popular no Japão. Dois livros são os que fornecem as primeiras instruções dos diagramas utilizados no Origami: Como dobrar mil pássaros de Sembazuru Orikata (1797) e Janela aberta e a estação de inverno de Kan no Mado (1845), neste último aparece pela primeira vez a base da rã, uma outra dobradura muito utilizada. (OLIVEIRA, 2004, p. 03)

O primeiro documento de Origami produzido foi Ocho Mecho, vejamos:

> O mais antigo documento inequívoco de origami é um pequeno poema composto por Ihara Saikaku em 1680. Diz: Rosei-ga yume-no cho-wa orisue (As borboletas no sonho de Rosei seriam origami.) Aqui ele se referiu a um modelo de origami chamado Ocho Mecho (borboletas masculinas e femininas) como "orisue". Usamos para embrulhar garrafas de saquê principalmente na cerimônia de casamento (HATORI [...], 2020, tradução nossa[2]).

Os Mouros, no Norte da África, já conheciam a produção do papel e também eram exímios dobradores de papel, influenciando a cultura espanhola eles criavam figuras geométricas, pois a religião proibia-os de criarem formas animais. A partir da Espanha espalhou-se para a América do Sul, entrando posteriormente através das rotas comerciais marítimas na Europa e mais tarde nos Estados Unidos.

O Origami japonês é muito diferente do europeu, de modo que nos leva a acreditar que foram desenvolvidos de forma independente. Em a história do Origami, encontramos a seguinte descrição:

> Apenas alguns modelos de origami europeu do século XIX podem ser encontrados em fontes japonesas contemporâneas. Mesmo agora, pouquíssimos japoneses conhecem Pajarita (passarinho), embora todo espanhol saiba. Por outro lado, Orizuru não era conhecido na Europa naquela época, embora fosse típico do origami clássico japonês. Os modelos de origami clássico europeu foram baseados em vincos de 45 graus, enquanto os japoneses, como Orizuru ou Frog, foram baseados em 22,5 graus. Eles usavam apenas papel quadrado ou retangular e não usavam dobras ou cortes profundos. O origami clássico europeu e japonês era tão diferente que parece ter se desenvolvido independentemente. A origem do origami europeu não é conhecida, mas pode estar relacionada ao certificado batismal do século XVI

---

[2] Texto Original: The oldest unequivocal document of origami is a short poem composed by Ihara Saikaku in 1680. It reads: Rosei-ga yume-no cho-wa orisue (The butterflies in Rosei's dream would be origami.) Here he referred to an origami model called Ocho Mecho (Male and Female Butterflies) as "orisue." We use it to wrap sake bottles mainly at the wedding ceremony.

> ao XVII. Naquela época, eles dobraram os certificados de batismo em blintz duplo ou na mesma forma do modelo japonês chamado Menko ou Thread Holder. Dizem que esse "origami cerimonial" pode remontar ao século XV. (HATORI [...], 2020, tradução nossa”[3]).

Com a restauração Meiji em meados do século XIX, onde o Japão deixou de ser um estado feudal e passou a ser um estado moderno, com a abertura de suas fronteiras, houve uma fusão de origami do Oriente com o Origami do Ocidente, formando assim o Origami tradicional, o qual transmitia os modelos de mão em mão, ou seja, de geração em geração.

No início do século XX, Uchiyama Koko, conhecido como pai do Origami moderno, patenteou seus modelos de origami, dando início ao origami moderno com a ideia da propriedade intelectual em sequências dobráveis.

Os Origamis foram popularizados por criadores como Yoshizawa Akira, Takahama Toshie, Honda Isao, Robert Harbin, Gershon Legman, Lillian Oppenheimer, Samuel Randlett, Vicente Solórzano-Sagredo, entre outros, os quais nos anos 50 e 60 formaram um círculo internacional.

Por seguinte abordaremos como esta técnica do Origami adentrou no Brasil e como se popularizou.

2.2 BREVE HISTÓRICO DO ORIGAMI NO BRASIL

No Brasil acredita-se que a arte do Origami possa ter sido introduzida de duas formas, sendo a primeira através do nosso país vizinho, Argentina, o qual foi influenciado pela cultura espanhola, e a segunda forma através dos imigrantes japoneses que vieram ao Brasil a partir de 1908.

---

[3] Texto Original: Only a few models of 19th century European origami can be found in contemporary Japanese sources. Even now, very few Japanese know Pajarita (Little Bird,) though every Spanish knows it. On the other hand, Orizuru was not known in Europe at that time though it was typical of Japanese classic origami.
The models of European classic origami were based on creases of 45 degrees, whereas Japanese ones such as Orizuru or Frog were based on those of 22.5 degrees. They used only square or rectangular paper, and they did not use judgement folds or cuts very much. European and Japanese classic origami were so different that they seem to have developed independently.
The origin of European origami is not known, but it may relate to the baptismal certificate of 16th to 17th century. At that time, they folded baptismal certificates into double blintz or the same shape as Japanese model called Menko or Thread Holder. It is said that this "ceremonial origami" may date back to 15th century.

Em o Histórico do Origami no Brasil, encontramos como se deu estas duas formas de introdução do origami no Brasil.

> Na Argentina, uma das heranças culturais trazidas pelos espanhóis foi a tradição de dobrar papel, que na época foi influenciada pelos artigos escritos pelo filósofo espanhol Miguel Unamuno, que era reitor da Universidade de Salamanca. Mais tarde dois europeus emigraram para a Argentina: Dr. Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo que publicaram livros no final da década de 30 sobre o assunto. Estes conhecimentos acabaram se espalhando por alguns países da América do Sul. Por outro lado, quando os japoneses emigraram para o Brasil, trouxeram com eles vários costumes japoneses que aqui procuraram preservar, entre eles, o Origami. Um destes imigrantes, chamado Takao Kamikawa, chegou com a família no ano 9 da era Showa para trabalhar nas fazendas de café. Dizem que ele costumava aos domingos reunir as crianças na Fazenda Barracão na cidade de Bauru e com pedaços de jornais que ele ajuntava e cortava em quadrados, entretia a criançada com figuras como "damashibune, hakama, tsuru, etc". Trouxe consigo do Japão, um livro chamado "Konreikagami" de Matsuaki Futaba, da editora Dainipon Reisetsu Gakuin Shupan-bu sobre todo o cerimonial religioso do casamento, onde aparece o modo de dobrar algumas figuras como noshi e outros ornamentos feitos de papel ultilizados na cerimônia. Ele costumava fazer todos estes enfeites e em festas decorava o salão com vários tsurus. (KANEGAE [...], 2020).

Destaca-se que na década de 60, a professora Yachiyo Koda passou a ensinar origami com o apoio do Consulado Geral do Japão em São Paulo pela Aliança Cultura Brasil-Japão em várias cidades do Brasil.

A partir daí, também devido ao avanço da internet, difundiu-se muito as técnicas de dobraduras e aumentou o interesse dos brasileiros pelo Origami.

Mas como o Origami pode ser usado como uma ferramenta no ensino de Geometria? Esta questão responderemos na seção 2.3, elencando como o uso de Origami pode ser motivador para as aulas de Matemática.

2.3 ORIGAMIS NA MATEMÁTICA

Atualmente a Matemática tem sido encarada pelos estudantes como chata e muito difícil de se aprender, bem como acreditam que não irão usar os conceitos em seu cotidiano, principalmente no tocante a Geometria, de forma que muitos não entendem os axiomas e propriedades necessárias para as construções geométricas. Ademais, percebe-se que a Geometria vem sendo trabalhada de forma mecanizada e não de forma significativa como deveria ser.

No trabalho sobre Origami: A Geometria das Dobraduras, apresentado no V CONEDU (Congresso Nacional de Educação), verifica-se os recursos didáticos que facilitam o ensino da Geometria, entre eles o Origami, vejamos:

> A Geometria surgiu a partir das necessidades do homem de se localizar, dimensão do espaço onde está inserido, dentre outras. Logo, o ensino de Geometria no âmbito escolar é de extrema importância para o desenvolvimento cognitivo do discente. Diante das limitações em aprender e ensinar Geometria surgiu alguns recursos didáticos com o intuito de facilitar o processo de ensino-aprendizagem desse campo matemático. Dentre elas o Origami, arte de dobrar papel, possibilitando tanto a aquisição de conceitos geométricos quanto coordenação motora, controle emocional e concentração. (SILVA e MASSARANDUBA, 2018, p. 4)

Assim, é notório que o Origami é uma ferramenta poderosa para auxiliar na aprendizagem da Geometria. Também importante mencionar que as relações entre a Geometria e o Origami são várias, destacamos a escolha do formato do papel (quadrado, círculo, retângulo, triângulo, etc.), bem como suas dobras, as quais levam diferentes divisões de planos e ângulos.

Os Origamis, através dos sete Axiomas de Huzita-Hatori, Axiomas estes que serão explicados detalhadamente na seção 4.1, também são utilizados para resolver problemas clássicos da trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, que não são possíveis de resolver com a Geometria Euclidiana, bem como resolver equações com grau igual ou inferior a três, e também permite a construção de um número irracional.

Os Axiomas de Huzita-Hatori surgiram na década de 1970, vejamos:

> Na década de 1970 começaram a realizar-se estudos para enumerar as possíveis dobragens em Origami e a estudar combinações entre elas. Destacou-se nesta área Humiaki Huzita, que descreveu seis operações básicas para definir um único vinco que, por si só, alinha várias combinações de pontos e rectas já existentes. Estas seis operações tornaram-se conhecidas por Axiomas de Huzita e forneceram a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com origami. Mais tarde, em 1989, Jacques Justin publicou um artigo em que apresentava não seis, mas sim sete combinações possíveis com uma única dobragem. No entanto, foi apenas em 2002, quando Koshiro Hatori apresentou uma dobragem que não era descrita pelos axiomas de Huzita, que surgiu formalmente um sétimo axioma. Os sete axiomas tornaram-se conhecidos por Axiomas de Huzita-Hatori e vieram abalar o mundo científico do origami relativamente à completude da lista. Em 2003, o físico americano Robert Lang dá a dúvida por terminada. Afirma que não existem mais axiomas e publica, na sua página da internet, um estudo que demonstra a sua convicção. Dentro da teoria matemática de construções geométricas do origami, os sete axiomas de Huzita-Hatori definem o que é possível construir com uma única dobragem, fazendo incidir combinações de pontos e rectas. (MONTEIRO, 2008, p. 16)

Em seu artigo Origami: Matemática e Sentimento (OLIVEIRA, 2004, p. 6), elenca as primeiras obras referentes a dobra e corte em um contexto matemático, são elas:

- Wakoku Chiyekurabe, by Kan Chu Sen, publicado em 1721, livro com vários problemas envolvendo raciocínio matemático;
- T Sundara Row Geometric Exercises in paper folding, (Exercícios geométricos em origami), livro raro publicado em Madras, Índia em 1893, editado em 1905 pela The Open Court Publishing Company e reeditado em 1966 pela Dover Publications, Inc, New York., nesta obra o autor mostra a possibilidade de construção de Polígonos Regulares por Origami e demonstra certas proposições geométricas através das dobraduras.

Segundo Oliveira (2004, p. 6), podemos elencar alguns livros nacionais sobre a aplicação do Origami no ensino da Matemática, sendo eles:

- Vivendo a Matemática geometria das dobraduras, (IMENES, 1996), o qual traz a construção de polígonos, poliedros, ângulos e retas;
- Atividades de geometria (MACHADO,1996), o qual apresenta problemas que envolvem técnicas de composição e decomposição de figuras geométricas;
- Origamis Matemáticos – Dobragens de Papel para fazer figuras geométricas, (MICHEL, 1997), apresenta uma série de dobraduras de sólidos geométricos de fácil execução ;
- A geometria do Origami: Atividades de ensino através de dobraduras, (REGO, REGO e GAUDÊNCIO JR, 2004), apresenta uma grande variedade de atividades para o uso em sala de aula.

Com relação ao uso de Origami no ensino de Geometria, Albuquerque reforça tudo que já fora mencionado, frisando os benefícios de usar os Origamis, a Geometria das dobras:

> A geometria das dobras no plano e espaço, a paciência, o relaxamento, a memorização, a exatidão e a coordenação motora necessárias, contribuem para a integração de grupos, para criar histórias, poemas, dramatizações, construções coletivas, analisar a qualidade de processos e outros benefícios. (ALBUQUERQUE, 2006, p. 1)

Vejamos algumas habilidades que o Origami pode propiciar ao estudante:

> O origami desenvolve nas crianças habilidades que são muito evidentes, tais como a habilidade manual, o conceito de volume, a coordenação de movimentos e a psicomotricidade fina, além de ajudá-las a tomar consciência do uso das mãos. Desenvolve também o espírito criativo, ensina a seguir instruções e estimula o trabalho em grupo. (ROBLES, 2010, *apud* TRIDAPALLI, 2017, p. 31)

Destacamos ainda, a importância do uso do Origami como ferramenta para as aulas de Matemática:

> O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte.(RÊGO E OUTROS 2003, *apud* TRIDAPALLI, 2017, p. 31)

Portanto, a utilização de Origami no ensino da Matemática é uma forma atraente e inovadora para ensinar Geometria, visto que estimula o pensamento geométrico e a visão espacial, propiciando ao estudante uma experiência diferente daquela a qual está habituado, tornando a Matemática mais leve e de fácil compreensão.

Este trabalho tem como tema central o uso dos Origamis nos Poliedros Regulares, sendo assim, abordaremos ao estudo dos Poliedros.

3 POLIEDROS

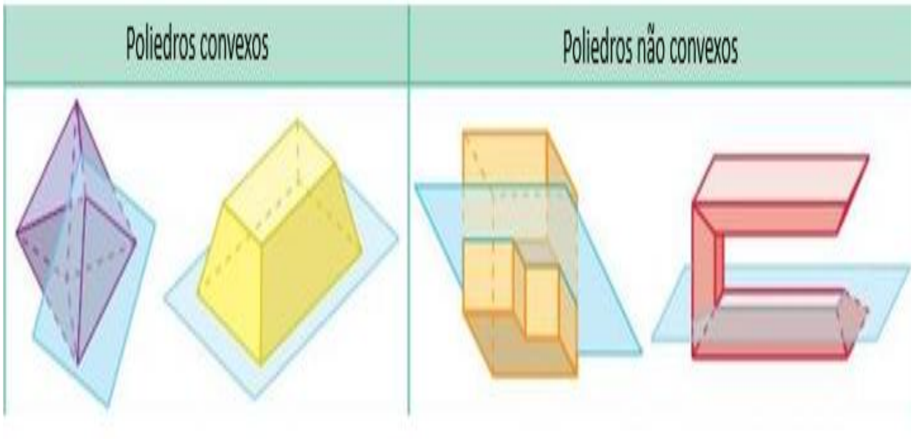
Tendo em vista que o objetivo deste trabalho é usar Origamis no ensino dos Poliedros de Platão, primeiramente necessitamos realizar um prévio estudo sobre os Poliedros.

A palavra **poliedro** vem do grego e quer dizer *poly* = muitos e *edros* = faces, ou seja, muitas faces.

No livro didático Conexões com a Matemática em seu volume 2, é destacado os principais elementos de um poliedro, bem como a forma como é formada a sua nomenclatura:

> Em um poliedro destacamos os seguintes elementos:
>
> Face – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.
>
> Aresta – lado comum a duas faces.
>
> Vértice – ponto comum a três ou mais arestas.
>
> Um poliedro costuma ser nomeado de acordo o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição edro. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: tetra (4), 1 edro (face). (...) Os poliedros que não apresentam "reentrâncias" em sua superfície são denominados convexos; os que têm "reentrâncias" são denominados não convexos ou côncavos). (LEONARDO, 2016, p. 104)

Figura 1 - Tipos de Poliedros



Fonte: DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

Define-se Poliedro Convexo da seguinte maneira:

> "Consideramos um número finito *n*, (*n*≥ *4)* de polígonos planos convexos

> (ou regiões poligonais convexas) tais que :
>
> a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
>
> b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
>
> c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.”
>
> Nessas condições, ficam determinados *n* desses semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semiespaços é chamada *poliedro convexo*. (DOLCE, 2005, p.124).

Desta maneira os Poliedros que serão aprofundados neste trabalho, são os Poliedros Convexos Regulares, os quais serão detalhados nas seções 3.1 e 3.1.1.

3.1 POLIEDROS REGULARES

Dante (2013, p. 188), define que “Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas”.

O tipo de poliedro que a ser dado ênfase é o convexo e regular, mais conhecido como Poliedros de Platão ou Sólidos de Platão, conforme iremos explanar na seção 3.1.1.

3.1.1 Poliedros de Platão

Antes de falarmos propriamente dos Poliedros de Platão, é necessário entender porque eles receberam este nome.

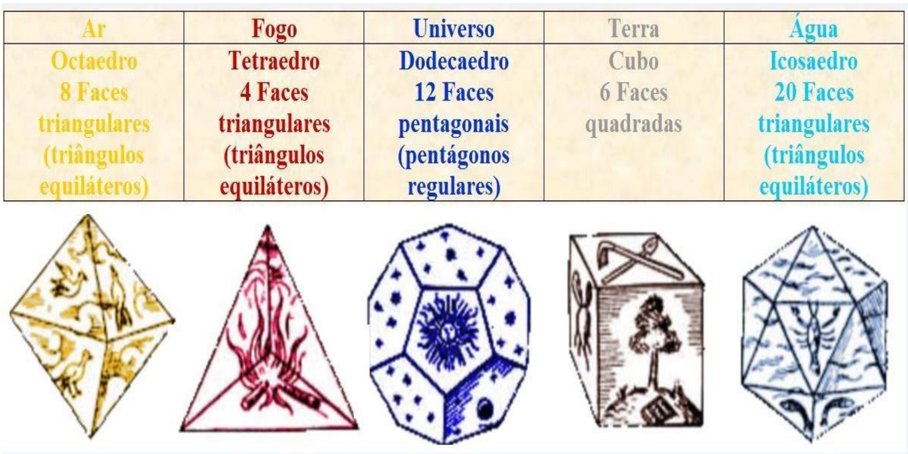
Segundo Williams (2000, p. 7), Platão nasceu entre 429 e 427 a.C., e foi um filósofo grego, sendo seguidor de Sócrates e posteriormente fora seguido por Aristóteles.

Platão teve interesse pela Matemática, mesmo sendo filósofo, foi fundador da Academia, em Atenas, escola de ensino superior, que segundo Boyer (1974, p. 63), a faixada da Academia trazia a seguinte frase “ Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”.

Ainda segundo Boyer (1974, p. 63), Platão colocou suas ideias sobre os sólidos regulares em um diário denominado *Timaeus,* onde chamou os poliedros regulares de “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos”. Platão os nomeou assim devido a maneira que aplicou a explicação de fenômenos científicos.

Platão associou os cinco sólidos regulares a elementos da natureza.

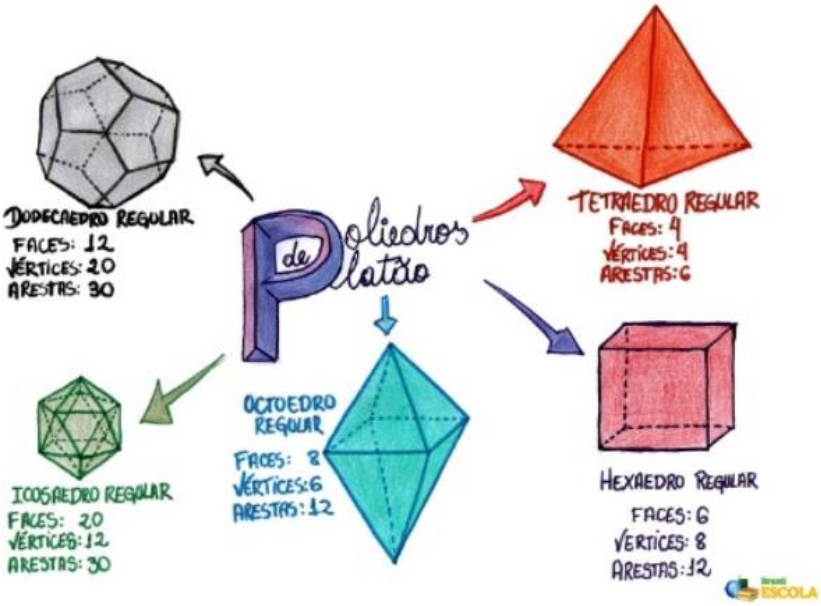
Figura 2 - Sólidos de Platão



Fonte: https://i.pinimg.com/originals/56/f7/c4/56f7c44832409852d53743808270e633.jpg

Desta forma, os “Poliedros de Platão” ou “Sólidos de Platão”, nos remete aos cinco Poliedros Regulares, sobre os quais vamos usar o recurso do Origami, são eles: o Tetraedro, o Hexaedro, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro, conforme o mapa mental abaixo extraído da página do Brasil escola.

Figura 3 - Mapa mental dos Sólidos de Platão



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-poliedros-platao.htm

Entretanto, antes de aprofundar nos estudos dos sólidos, é importante mencionar a contribuição de Euler, visto que a Relação criada por ele faz parte da definição dos Poliedros de Platão.

O matemático e físico suíço Leonard Paul Euler nasceu na Basiléia em 15 de abril de 1707, também se dedicou ao estudo dos poliedros e ao longo de sua vida fez contribuições muito importantes para a Matemática. Uma dessas obras é a Fórmula ou Relação de Euler, relação esta de suma importância para determinar o número de arestas, faces e vértices de qualquer poliedro regular e de alguns não regulares.

Euler provou a Relação envolvendo os vértices, faces e arestas nos Poliedros.

> Euler fez observações gerais a respeito de poliedros, iniciou sua discussão da relação entre os números de vértices (V), arestas (A) e faces (F), provou vários teoremas que relacionam V, A e F e verificou que $V - A + F = 2$ ocorre em vários casos especiais. (MIALICH, 2013 p. 13)

Logo, a **Relação de Euler** é dada por ***V – A + F = 2***. Onde V representa o vértice, *A* representa a aresta e o *F* representa a face de um poliedro.

Agora conhecendo a relação de Euler, podemos passar adiante e definir os Sólidos de Platão, vejamos a seguinte definição:

> Um poliedro é chamado de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número *(n)* de arestas,
b) todos os ângulos poliedricos tem o mesmo número *(m)* de arestas,
c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$). (DOLCE, 2005, p.130)

Diante desta definição, sabemos que existem cinco, e somente cinco, classes de Poliedros de Platão, que será demonstrada na sequência.

Utilizando as três condições da definição de Poliedros de Platão acima, temos que:

a) cada uma das *F* faces, tem *n* arestas (*n* ≥ *3*), e como cada aresta está em duas faces temos que:

$$n.F = 2.A \Rightarrow F = \frac{2.A}{n} \tag{1}$$

b) cada um dos *V* ângulos poliédricos tem *m* arestas (*m* ≥ *3*), e como cada aresta contém dois vértices, segue que:

$$m \cdot V = 2 \cdot A \Rightarrow \quad V = \frac{2 \cdot A}{m} \tag{2}$$

c) por definição vale a relação de Euler

$$V - A + F = 2 \tag{3}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), teremos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Dividindo por 2A, vem que:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \tag{4}$$

Sabemos que *n* ≥ *3 e m* ≥ *3,* porém se ambos forem maiores que 3 simultaneamente, isto contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo. Vejamos.

$$\left.\begin{array}{r} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

Portanto, concluímos que nos Poliedros de Platão, *m = 3 ou n = 3*, o que significa que o Poliedro de Platão possui obrigatoriamente triedro ou triângulo.

Assim, temos dois casos, onde para o primeiro supondo que tem triedro e para o segundo supondo que tem triângulos.

1º) Para *m = 3*, supondo que tem triedro.

A partir de (4), vem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad n < 6$$

Então, *n = 3*, ou *n = 4* ou *n = 5*, logo serão faces triangulares, ou quadrangulares ou pentagonais.

Quadro 1 - Poliedros com 3 arestas em cada vértice

M	***n***
3	3
3	4
3	5

Fonte: DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10**, 6ª Ed,7ª reimpressão, p. 131. São Paulo Ed. Atual, 2005.

2º) Para *n = 3*, supondo que tem triângulos.

A partir de (4), vem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad m < 6$$

Então, m = *3*, ou m = *4* ou m = *5*, logo serão ângulos triédricos, ou tetraédricos, ou pentaédricos.

Quadro 2 - Poliedros com faces triangulares

M	***n***
3	3
4	3
5	3

Fonte: DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10**, 6ª Ed,7ª reimpressão, p. 131. São Paulo Ed. Atual, 2005.

A partir do primeiro e segundo caso, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m,n) dos quadros 1 e 2 acima, sendo portanto, cinco, e somente cinco, as classes dos Poliedros de Platão.

Quadro 3 - Cinco Poliedros encontrados

M	***n***
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Fonte: Fonte: DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10**, 6ª Ed,7ª reimpressão, p.131. São Paulo Ed. Atual, 2005.

Como consequência, para saber o número de arestas A, o número de faces

F e o número de vértices V, de cada poliedro de Platão,basta substituir em (4) os valores de m e n encontrados no quadro 3, e posteriormente em (1) e (2). Conforme será exposto a seguir.

Para determinarmos o primeiro Poliedro de Platão, com *m = 3 e n = 3*, teremos da equação (4) que:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad A=6 \tag{5}$$

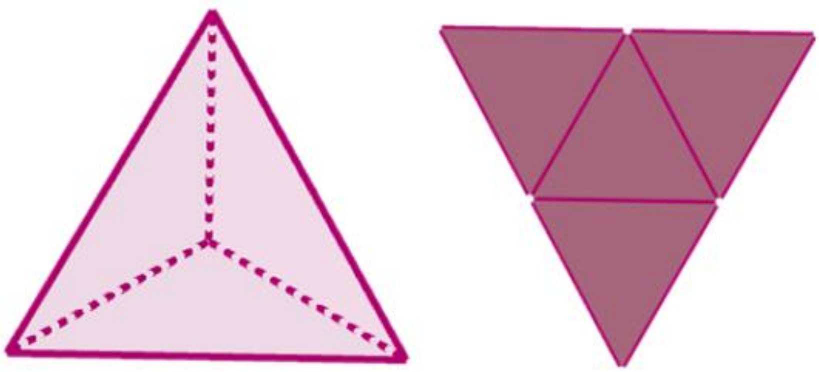
Agora a partir de (1) e (2), segue que:

$$F=\frac{2.A}{n} \quad \Rightarrow \quad F=\frac{2.6}{3} \quad \Rightarrow F=4 \tag{6}$$

$$V=\frac{2A}{m} \quad \Rightarrow \quad V=\frac{2.6}{3} \quad \Rightarrow \quad V=4 \tag{7}$$

Como é o número de faces que determina o nome do Poliedro, o Poliedro para m= 3 e para n = 3 é o Tetraedro.

Figura 4 - Tetraedro e sua planificação



Fonte: Criada pela autora no Geogebra.

Conforme deduzido acima, temos V = 4, F = 4 e A = 6, logo aplicando a Relação de Euler: V – A + F = 2 4 – 6 + 4 = 2.

Agora para determinarmos o segundo, em que *m = 3 e n = 4*, teremos da equação (4) $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}\right)$ que:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad A = 12 \tag{8}$$

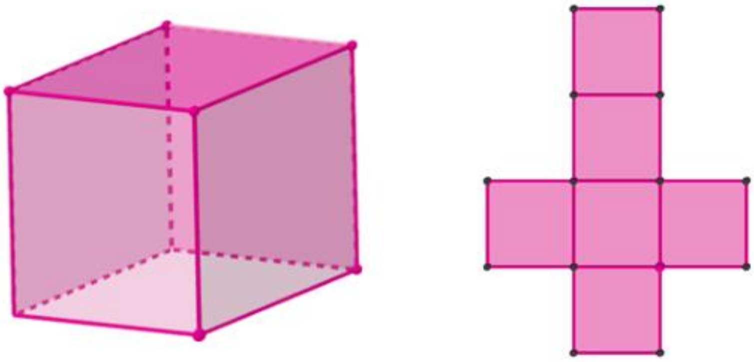
Agora a partir de (1) e (2), temos:

$$F = \frac{2.A}{n} \quad \Rightarrow F = \frac{2.12}{4} \quad \Rightarrow \quad F = 6 \tag{9}$$

$$V = \frac{2A}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2.12}{3} \quad \Rightarrow V = 8 \tag{10}$$

Logo, o poliedro para *m = 3, n = 4, V = 8, F = 6 e A = 12,* é o Hexaedro.

Figura 5 - Hexaedro e sua planificação



Fonte: Criada pela autora no Geogebra.

A partir dos valores encontrados, *V = 8, F = 6 e A = 12*, temos a Relação de Euler: $V - A + F = 28 - 12 + 6 = 2$.

Seguindo os cálculos para determinar o terceiro Poliedro, com *m = 3 e n = 5*, teremos da equação (4) que:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad A = 30 \tag{11}$$

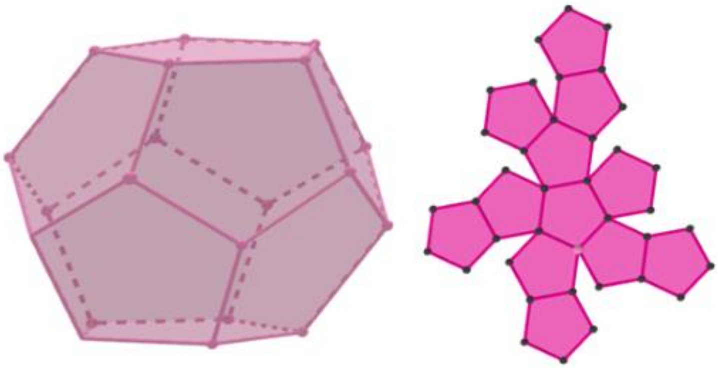
Agora a partir de (1) e (2), temos:

$$F = \frac{2.A}{n} \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{2.30}{5} \qquad \Rightarrow \qquad F = 12 \tag{12}$$

$$V = \frac{2A}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2.30}{3} \quad \Rightarrow \quad V = 20 \tag{13}$$

Assim, para *m = 3, n = 5, V = 20, F = 12 e A = 30*, o Poliedro é o Dodecaedro.

Figura 6 - Dodecaedro e sua planificação



Fonte: Criada pela autora no Geogebra.

Assim, como realizado com os poliedros encontrados acima, para o dodecaedro temos *V = 20, F = 12 e A = 30*, portanto a Relação de Euler: *V – A + F = 20 – 30 + 12 = 2.*

Nosso quarto Poliedro terá *m = 4 e n = 3*, teremos da equação (4) que:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad A = 12 \tag{14}$$

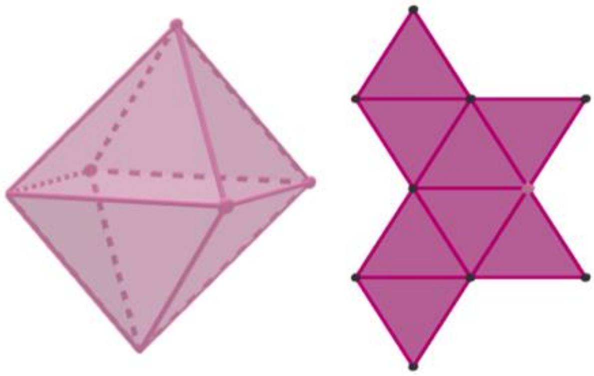
Agora a partir de (1) e (2), vem que:

$$F = \frac{2.A}{n} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2.12}{3} \quad \Rightarrow \quad F = 8 \tag{15}$$

$$V = \frac{2A}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2.12}{4} \quad \Rightarrow \quad V = 6 \tag{16}$$

Logo, o Poliedro para *m = 4, n = 3, V = 6, F = 8 e A = 12* é o Octaedro.

Figura 7 - Octaedro e sua planificação



Fonte: Criada pela autora no Geogebra.

Para o Octaedro do mesmo modo dos anteriores, sabemos que *V = 6, F = 8 e A = 12,* assim a Relação de Euler: *V – A + F = 2 8 – 12 + 6 = 2*

E por fim, o quinto Poliedro, com *m = 5 e n = 3*, teremos da equação (4) que:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad A = 30 \tag{17}$$

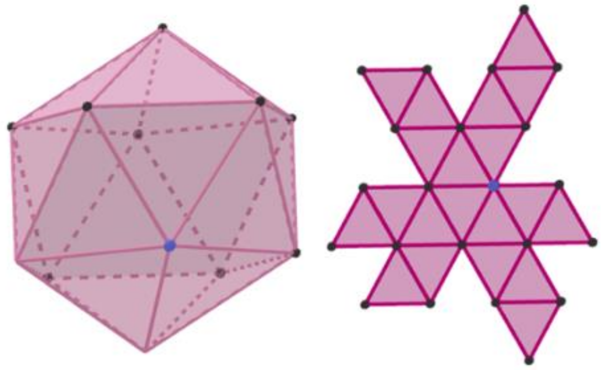
Agora a partir de (1) e (2), temos:

$$F = \frac{2.A}{n} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2.30}{3} \quad \Rightarrow \quad F = 20 \tag{18}$$

$$V = \frac{2A}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2.30}{5} \quad \Rightarrow \quad V = 12 \tag{19}$$

Portanto, nosso último Poliedro encontrado é o Icosaedro.

Figura 8 - Icosaedro e sua planificação



Fonte: Criada pela autora no Geogebra.

Conforme realizado com os anteriores, diante das informações de que $V = 12$, $F = 20$ e $A = 30$, colocando na Relação de Euler temos: $V – A + F = 2$ $12 – 30 + 20 = 2$

A partir dos cálculos acima, podemos montar o seguinte quadro:

Quadro 4 - Poliedros de Platão e seus elementos

M	***N***	***A***	***V***	***F***	***Nome***
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Fonte: DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10**, 6ª Ed,7ª reimpressão, p. 132. São Paulo Ed. Atual, 2005.

Todavia, conforme demonstrado acima, claro que existem cinco, e somente cinco Poliedros de Regulares de Platão.

Logo, será abordado conseguinte a aplicação dos Origamis a estes Poliedros Regulares.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Com o intuito de verificar os trabalhos existentes sobre Origami relacionado com os Poliedros de Platão, consultamos o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em vigor para o Ensino Médio, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e apresentamos alguns neste Capítulo.

4.1 LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático serve de suporte ao docente em sua prática de trabalho, constituindo-se para o contexto escolar como um meio importante de apoio a qualificação do ensino.

Desta maneira, ao consultar o PNLD em vigor para o Ensino Médio, através do Guia do PNLD 2018, verificamos as obras aprovadas para serem utilizadas no Ensino Médio para a Matemática.

As obras aprovadas são as seguintes apresentadas no quadro 5:

Quadro 5 - Livros de Matemática PNLD 2018

TÍTULO DA COLEÇÃO	**EDITORA**
MATEMÁTICA CONTEXTO & APLICAÇÃO (VOLUMES 1, 2 e 3)	EDITORA ÁTICA
QUADRANTE – MATEMÁTICA (VOLUMES 1, 2 e 3)	SM
MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES (VOLUMES 1, 2 e 3)	SARAIVA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO (VOLUMES 1, 2 e 3)	SARAIVA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA (VOLUMES 1, 2 e 3)	LEYA
#CONTATO MATEMÁTICA (VOLUMES 1, 2 e 3)	FTD
MATEMÁTICA PAIVA (VOLUMES 1, 2 e 3)	MODERNA
CONEXÕES COM A MATEMÁTICA (VOLUMES 1, 2 e 3)	MODERNA

Fonte: Adaptado de Brasil. Ministério da Educação. PNLD 2018: apresentação – guia de livros didáticos – ensino médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. 39 p.

Destacamos que tais obras são de nosso alcance, assim ao analisarmos o estudo dos Poliedros propostos nos livros citados acima (imagens dos livros nos anexos), verificamos que apenas duas obras fazem menção ao uso de Origami.

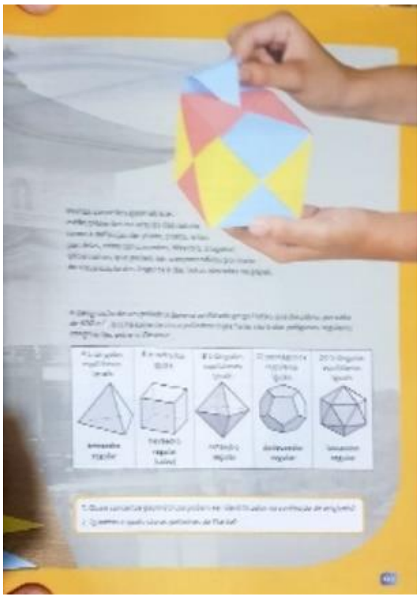
O primeiro livro que aborda o tema Origami é o livro didático Matemática Contexto & Aplicação (2013), em seu segundo volume introduz a ideia do uso de Origami para introduzir os Poliedros de Platão.

Entretanto, mostra apenas a realização de um tipo de peça, denominada módulo e menciona que ao encaixa-las obtém-se os Sólidos de Platão, mostrando como exemplo a construção do hexaedro, e deixa duas questões para responderem após esta atividade, conforme é possível observar das fotografias 1 e 2.

Fotografia 1 - Livro didático Contexto e Aplicações p.132

Fonte: DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

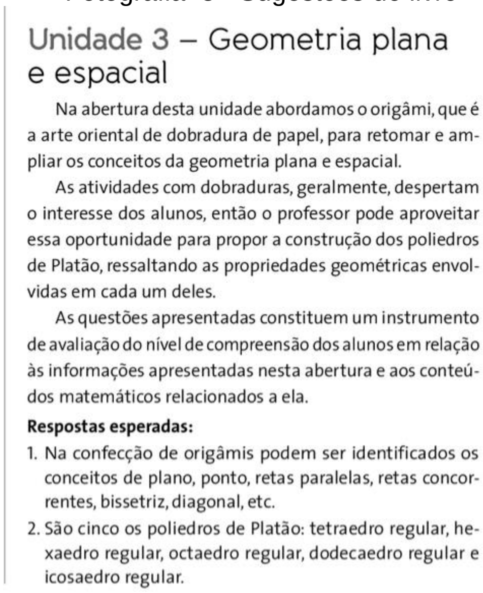
Fotografia 2 - Livro didático Contexto e Aplicações p. 133



Fonte: DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

Nas observações e sugestões (DANTE, 2013, p.376), o autor sugere que o professor proponha a construção dos Poliedros de Platão, e reforça que as questões apresentadas na página 133 avaliam o nível de compreensão dos alunos em relação as informações apresentadas, conforme podemos observar na fotografia 3.

Fotografia 3 - Sugestões do livro



Unidade 3 – Geometria plana e espacial

Na abertura desta unidade abordamos o origâmi, que é a arte oriental de dobradura de papel, para retomar e ampliar os conceitos da geometria plana e espacial.

As atividades com dobraduras, geralmente, despertam o interesse dos alunos, então o professor pode aproveitar essa oportunidade para propor a construção dos poliedros de Platão, ressaltando as propriedades geométricas envolvidas em cada um deles.

As questões apresentadas constituem um instrumento de avaliação do nível de compreensão dos alunos em relação às informações apresentadas nesta abertura e aos conteúdos matemáticos relacionados a ela.

Respostas esperadas:

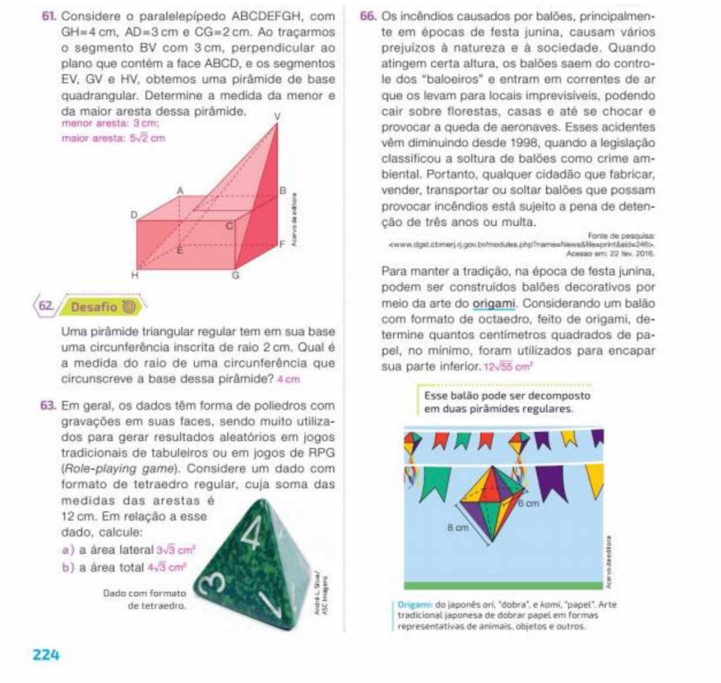
1. Na confecção de origâmis podem ser identificados os conceitos de plano, ponto, retas paralelas, retas concorrentes, bissetriz, diagonal, etc.
2. São cinco os poliedros de Platão: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Fonte: DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

O segundo livro que faz menção a utilização de Origami no tema Poliedros de Platão é o livro didático #Contato Matemática, em seu volume 2 (2016), onde tal menção é feita para a resolução da questão número 66, proposta na página 224.

Contudo, Souza e Garcia (2016) não indica como deve ser feita esta construção, vejamos o enunciado proposto na questão através da fotografia 4.

Fotografia 4 - Enunciado da questão 66



61. Considere o paralelepípedo ABCDEFGH, com GH=4 cm, AD=3 cm e CG=2 cm. Ao traçarmos o segmento BV com 3 cm, perpendicular ao plano que contém a face ABCD, e os segmentos EV, GV e HV, obtemos uma pirâmide de base quadrangular. Determine a medida da menor e da maior aresta dessa pirâmide.
menor aresta: 3 cm;
maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm

62. Desafio

Uma pirâmide triangular regular tem em sua base uma circunferência inscrita de raio 2 cm. Qual é a medida do raio de uma circunferência que circunscreve a base dessa pirâmide? 4 cm

63. Em geral, os dados têm forma de poliedros com gravações em suas faces, sendo muito utilizados para gerar resultados aleatórios em jogos tradicionais de tabuleiros ou em jogos de RPG (*Role-playing game*). Considere um dado com formato de tetraedro regular, cuja soma das medidas das arestas é 12 cm. Em relação a esse dado, calcule:

a) a área lateral $3\sqrt{3}$ cm²

b) a área total $4\sqrt{3}$ cm²

Dado com formato de tetraedro.

André L. Silva/ ASC Imagens

66. Os incêndios causados por balões, principalmente em épocas de festa junina, causam vários prejuízos à natureza e à sociedade. Quando atingem certa altura, os balões saem do controle dos "baloeiros" e entram em correntes de ar que os levam para locais imprevisíveis, podendo cair sobre florestas, casas e até se chocar e provocar a queda de aeronaves. Esses acidentes vêm diminuindo desde 1998, quando a legislação classificou a soltura de balões como crime ambiental. Portanto, qualquer cidadão que fabricar, vender, transportar ou soltar balões que possam provocar incêndios está sujeito a pena de detenção de três anos ou multa.

Fonte de pesquisa: <www.dgst.cbmerj.rj.gov.br/modules.php?name=News&file=print&sid=246>. Acesso em: 22 fev. 2016.

Para manter a tradição, na época de festa junina, podem ser construídos balões decorativos por meio da arte do origami. Considerando um balão com formato de octaedro, feito de origami, determine quantos centímetros quadrados de papel, no mínimo, foram utilizados para encapar sua parte inferior. $12\sqrt{55}$ cm²

Esse balão pode ser decomposto em duas pirâmides regulares.

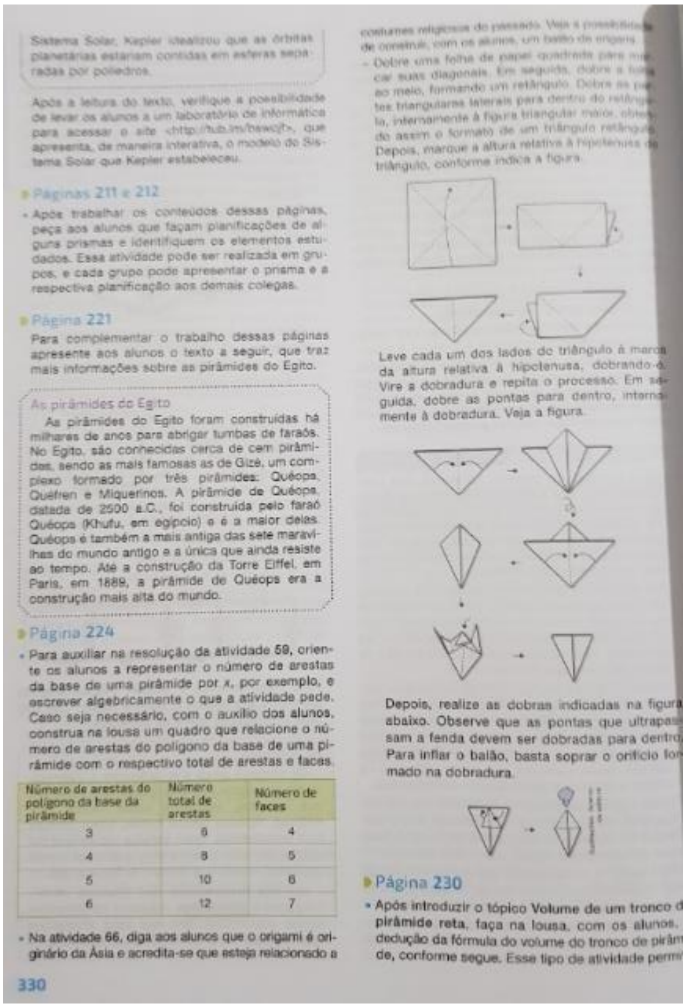
Origami: do japonês *ori*, "dobra", e *kami*, "papel". Arte tradicional japonesa de dobrar papel em formas representativas de animais, objetos e outros.

224

Fonte: SOUZA, J. R. de.; GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática, 2º ano**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016.

Percebemos ainda que, nas orientações ao professor na página 330 (SOUZA; GARCIA, 2016), como sugestão para a resolução da questão proposta na página 224, é destacado uma possibilidade de construção com Origami para que o docente possa construir um balão com o formato de um octaedro para a resolução da questão fotografia 5.

Fotografia 5 - Solução para a questão 66



Sistema Solar, Kepler idealizou que as órbitas planetárias estariam contidas em esferas separadas por poliedros.

Após a leitura do texto, verifique a possibilidade de levar os alunos a um laboratório de informática para acessar o site <http://tub.im/bawcjf>, que apresenta, de maneira interativa, o modelo do Sistema Solar que Kepler estabeleceu.

Páginas 211 e 212

- Após trabalhar os conteúdos dessas páginas, peça aos alunos que façam planificações de alguns prismas e identifiquem os elementos estudados. Essa atividade pode ser realizada em grupos, e cada grupo pode apresentar o prisma e a respectiva planificação aos demais colegas.

Página 221

Para complementar o trabalho dessas páginas apresente aos alunos o texto a seguir, que traz mais informações sobre as pirâmides do Egito.

As pirâmides do Egito

As pirâmides do Egito foram construídas há milhares de anos para abrigar tumbas de faraós. No Egito, são conhecidas cerca de cem pirâmides, sendo as mais famosas as de Gizé, um complexo formado por três pirâmides: Quéops, Quéfren e Miquerinos. A pirâmide de Quéops, datada de 2500 a.C., foi construída pelo faraó Quéops (Khufu, em egípcio) e é a maior delas. Quéops é também a mais antiga das sete maravilhas do mundo antigo e a única que ainda resiste ao tempo. Até a construção da Torre Eiffel, em Paris, em 1889, a pirâmide de Quéops era a construção mais alta do mundo.

Página 224

- Para auxiliar na resolução da atividade 59, oriente os alunos a representar o número de arestas da base de uma pirâmide por x, por exemplo, e escrever algebricamente o que a atividade pede. Caso seja necessário, com o auxílio dos alunos, construa na lousa um quadro que relacione o número de arestas do polígono da base de uma pirâmide com o respectivo total de arestas e faces.

Número de arestas do polígono da base da pirâmide	Número total de arestas	Número de faces
3	6	4
4	8	5
5	10	6
6	12	7

- Na atividade 66, diga aos alunos que o origami é originário da Ásia e acredita-se que esteja relacionado a costumes religiosos do passado. Veja a possibilidade de construir, com os alunos, um balão de origami.

– Dobre uma folha de papel quadrada para marcar suas diagonais. Em seguida, dobre a folha ao meio, formando um retângulo. Dobre as partes triangulares laterais para dentro do retângulo, internamente à figura triangular maior, obtendo assim o formato de um triângulo retângulo. Depois, marque a altura relativa à hipotenusa do triângulo, conforme indica a figura.

Leve cada um dos lados do triângulo à marca da altura relativa à hipotenusa, dobrando-o. Vire a dobradura e repita o processo. Em seguida, dobre as pontas para dentro, internamente à dobradura. Veja a figura.

Depois, realize as dobras indicadas na figura abaixo. Observe que as pontas que ultrapassam a fenda devem ser dobradas para dentro. Para inflar o balão, basta soprar o orifício formado na dobradura.

Página 230

- Após introduzir o tópico **Volume de um tronco de pirâmide reta**, faça na lousa, com os alunos, a dedução da fórmula do volume do tronco de pirâmide, conforme segue. Esse tipo de atividade perm

330

Fonte: SOUZA, J. R. de.; GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática, 2º ano**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016.

Portanto, de todas as obras analisadas do PNLD 2018 para o Ensino Médio, apenas duas abordam o uso de Origami no estudo dos Poliedros, de modo que não aprofundam as propriedades matemáticas existentes no Origami, possibilitando uma variedade de conceitos geométricos.

4.2 DISSERTAÇÕES DO PROFMAT

Sabemos que o PROFMAT é um programa de mestrado profissional, semipresencial na área de Matemática com oferta nacional e com a finalidade de atender de maneira prioritária os professores de Matemática em exercício na Educação Básica, em especial os professores da escola pública, para que obtenham o aprimoramento em sua formação e domínio aprofundado de conteúdo Matemático relevante para a sua docência.

O PROFMAT possui um acervo diverso de dissertações, visto que o programa teve início no ano de 2012.

Importante frisar que os temas das dissertações são pertinentes ao currículo da Educação Básica.

Realizando uma pesquisa no acervo de dissertações do PROFMAT, definido como critério de busca a palavra “origami”, tanto no singular, quanto no plural, no campo títulos, encontramos 21 registros com esta palavra, conforme o quadro 6, com o propósito de analisarmos se vem de encontro ao tema objeto deste trabalho.

Quadro 6 - Dissertações sobre Origami

(continua)

Ano da defesa	**Autor**	**Título**	**Instituição**
2019	FLEISCHMANN, S. O.	O origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.	UTFPR
2019	MONTEIRO, L. F. A.	Origami e geometria: uma experiência com a formação de professores na modalidade normal em nível médio	UNIRIO
2019	QUEIROZ, G. T.	Ensino da geometria: uma abordagem a partir do uso do origami.	UFAM
2018	VICTÓRIO, J. R. S.	Abordagens do origami e dobraduras no ensino de geometria	UFRJ
2017	TRIDAPALLI, M. P.	Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular	USP
2016	MILANI, S. M.	Fractais, pipas tetraédricas e origami: uma proposta metodológica para o ensino da geometria	UNIR
2016	BONFIM, M.	Construções geométricas e origami	UFABC
2016	FREITAS, A.C. de	Origami: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria	UNESP

Quadro 7 - Dissertações sobre Origami

(continuação)

2015	DIAS, M. C. de O.	O uso do origami como recurso didático-metodológico para o ensino de geometria	UFJF
2015	ARAÚJO, O. R. de	Contribuições pedagógicas do ensino de pontos notáveis de um triângulo por meio do origami	UFG
2015	RODRIGUES, B. M. B.	O estudo das cônicas através do origami	PUC
2015	PASSARONI, L. C. de S.	Construções geométricas por dobradura (origami) - aplicações ao ensino básico	UERJ
2014	ALMEIDA, M. R. de	Introdução dos pontos notáveis de um triângulo utilizando origami	UENF
2014	SILVA, M. S.	A influência do Origami no processo de ensino – aprendizagem da geometria do 9º ano – Ensino Fundamental	UNB
2014	SILVA, M. W. X.	"Ensino básico de frações utilizando origami."	UFF
2013	SILVA, A. S.	Construções de polígonos regulares em origami e com régua e compasso	UNIRIO
2013	FREITAS, B. A. de	Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com auxílio do origami	UNIRIO
2013	BARRETO, C. A.	A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na educação básica	FUFS
2013	FERREIRA, F. E.	Ensino e aprendizagem dos poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami	UNESP

Quadro 8 - Dissertações sobre Origami

(conclusão)

2013	BRAZ, L. H. C.	Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami	UFLA
2013	LUCAS, E. dos S.C.	Uma abordagem didática para a construção dos Poliedros Regulares e Prismas utilizando Origami	UFLA

Fonte: Adaptado do site do PROFMAT. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=1>.Acesso em 29 de abril de 2020.

Ao realizarmos uma análise dos resumos dos trabalhos elencados no quadro 6, verificamos que em seis deles é abordado o tema proposto, de forma que, Milani (2016), Victório (2018), Tridapalli (2017), Dias (2015), Ferreira (2013) e Lucas (2013), apontam o uso de Origami no ensino da Geometria e sugerem como atividade a construção dos Poliedros de Platão através de Origami Modular, entretanto de forma diversa do que apresentaremos.

O único autor que mostra as construções que utilizaremos é Barreto (2013), no entanto ele não aprofunda no tema Poliedros, só sugere como possibilidade de aplicação, visto que seu trabalho tem ênfase a utilização do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.

4.3 BIBLIOTECA DIGITAL BRASILEIRA DE TESES E DISSERTAÇÕES

O IBICT (Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia) desenvolveu e coordena a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que compõe os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil, desta forma estimula o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico, dando maior visibilidade à produção científica nacional.

Realizando a pesquisa com a palavra “origami”, no mecanismo de busca, do acesso e visibilidade às teses e dissertações brasileiras do BDTD, definindo como critério todos os campos (título, autor e assunto), encontramos diversos registros, entretanto daremos ênfase somente as obras da área de Matemática, as quais estão elencadas no quadro 7, totalizando 17 obras, onde, para evitar duplicidade, não foram citadas novamente as que já haviam sido mencionadas na pesquisa das dissertações do PROFMAT apresentadas anteriormente no quadro 6.

Quadro 9 - Dissertações sobre Origami – BDTD

(continua)

Ano de defesa	**Autor**	**Título**	**Instituição**
2016	FRANÇA, E. M. de	Origami Euclidiano	UFPE
2007	BUSKE, N.	Uma contribuição para o ensino da geometria utilizando origami e caleidoscópio	UNESP
2011	RANCAN, G.	Origami e tecnologia: investigando possibilidades para ensinar geometria no ensino fundamental	PUCRS
2014	QUEIROZ, M. L. de	Clube da matemática: jogando com múltiplas inteligências	UFPel
2015	GUIMARÃES, V. G.	Ensinando a geometria euclidiana no ensino fundamental por meio de recursos manipuláveis	UFV
2014	MENEZES, D. B	O Uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: histórias, teoremas e problemas	UFC
2015	GLOWECKI, K.C. B. D.	O uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos	UFRPE
2005	OLIVEIRA, J. S. de	A comunidade surda: perfil, barreiras e caminhos promissores no processo de ensino-aprendizagem em matemática	CEFET-RJ
2014	FROLINI, S.	Estudando geometria através de dobraduras	UNESP

Quadro 10 - Dissertações sobre Origami – BDTD

(conclusão)

2018	DELLAQUILA, A. J.	O problema da trissecção	UFSM
2017	PAIXÃO, T. C. dos S.	As interações discursivas no ensino de geometria por meio de técnicas de dobradura e outras atividades lúdicas: um estudo de caso em uma turma do 3º ano do ensino fundamental	UFS
2018	SOUZA, J. K. da C.	Percepções docentes sobre o ensino e aprendizagem de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: reflexos e reflexões de uma experiência formativa	UFPA
2010	MOTA, E. F. C.	Transtorno do déficit de atenção e hiperatividade infantil (TDAH): trabalho com jogos e materiais manuseáveis	UFG
2017	ALBUQUERQUE, E. S. da C.	Geometria e arte: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no sexto ano	UFAL
2014	FREITAS, J. M.	Os três problemas clássicos da Matemática grega	UNESP
2015	LANGONI, D. P.	A formação continuada e o uso das frações voltadas para a construção do conhecimento,	UFMS
2015	LEMOS, W. G.	O uso de uma sala interativa para a aprendizagem de poliedros estrelados no ensino médio	UFRJ

Fonte: Adaptado do site BDTD. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Search/Results?page=3&lookfor=origami&type=AllFields>. Acesso em 01 de maio de 2020.

Da mesma maneira que fizemos a análise do resumo das dissertações do PROFMAT, realizamos com as informações do quadro 7, de modo que apenas duas obras abordam a temática deste trabalho, Buske (2007) e Glowecki (2015).

Contudo, destacamos que Buske (2007) trabalha os Poliedros através de Origami modular com ênfase no caleidoscópio, e Glowecki (2015), realiza uma oficina para construir figuras espaciais, tais como Poliedros, pirâmides e prismas para explorar os conceitos básicos relacionados a figuras Geométricas, tais como: ângulos, vértices, bissetrizes, planos, semelhanças e noções de proporcionalidade e álgebra.

Desta forma, reforçamos que após todas as análises realizadas verifica-se que são poucas obras que aborda o uso de Origami Modular no estudo dos Poliedros de Platão.

No Capítulo 5, passaremos para a parte prática com os Origamis.

5 SÓLIDOS DE PLATÃO COM ORIGAMI MODULAR

Antes de aprendermos a construir os módulos, precisamos compreender os Axiomas aplicados a arte dos Origamis, visto que tais Axiomas são a Geometria dos Origamis.

Neste Capítulo será apresentado os módulos com o passo a passo e suas relações com a Matemática, e na sequência a montagem dos Poliedros Regulares de Platão, a partir das análises realizadas no Capítulo 4.

5.1 AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

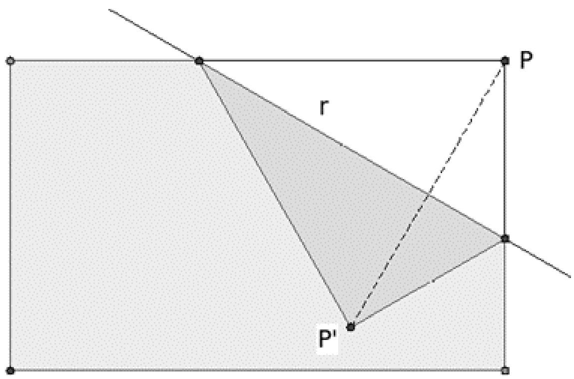
Os Axiomas de Huzita-Hatori, mostram como este recurso tem muito mais Matemática do que pensávamos, pois suas construções elementares são conceitos geométricos, embora algumas pessoas realizem como forma de artesanato ou terapia, não percebendo que estão utilizando Matemática em cada dobra.

Ademais, importante frisar que, por mais que seja possível realizar dobras em linhas curvas, este trabalho abordará somente as dobras com as linhas retas.

No livro Explorando Geometria com Origami, de Eduardo Cavacami e Yolanda Kioko Saito Furuya (2010, p. 2), o qual está disponível no material da OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), os autores destacam as bissetrizes, mediatrizes, paralelas e perpendiculares, que são construções elementares dos Origamis.

> Cada dobra efetuada gera uma linha reta e os pontos de um dos semiplanos são refletidos no outro semiplano, ou seja, se r é a linha de dobra, e P é um ponto da folha a ser dobrada, P é levado no seu simétrico P′ em relação a r. Ou seja, a linha de dobra r é a mediatriz de cada par P, P′ , onde P′ é o refletido de P (onde P é levado).

Figura 9 - Construções elementares com Origamis



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Além disso, a linha de dobra r também é a bissetriz de cada ângulo $\boldsymbol{P\widehat{V}P'}$ formado por um raio $\boldsymbol{VP}$ com origem V em r e seu raio refletido $\boldsymbol{VP'}$, onde o raio é levado. Com isso, vê-se que mediatrizes e bissetrizes são construções elementares com Origami, assim como perpendiculares e paralelas. Construções elementares não serão detalhadas todas as vezes que forem utilizadas, para não desviar a atenção da construção central. Todas as construções utilizadas no texto são consequências dos Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos como os Axiomas de Huzita (ou Huzita-Hatori, ou Huzita-Justin).

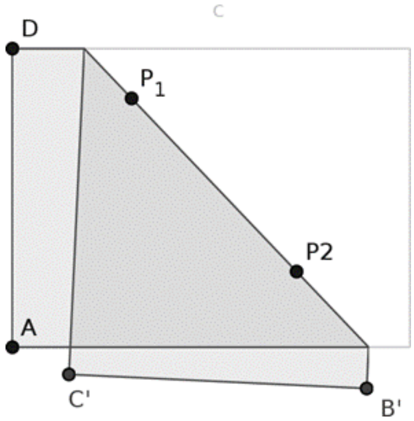
Todas as construções utilizadas decorrem dos axiomas de Huzita-Hatori, ou seja, Axiomas da Geometria dos Origamis.

Ressalta-se que de todos as obras analisadas no Capítulo 4, as que abordam as construções geométricas planas, também exploram os Axiomas da Geometria do Origami.

Cavacami e Furuya (2010, p. 2 a 8), explicam o passo a passo dos Axiomas do Origamis, conforme é possível observar:

1. Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.

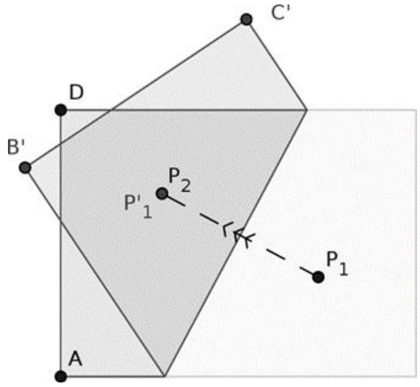
Figura 10 - Primeiro Axioma de Huzita - Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2. Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que coloca P_1 sobre P_2.

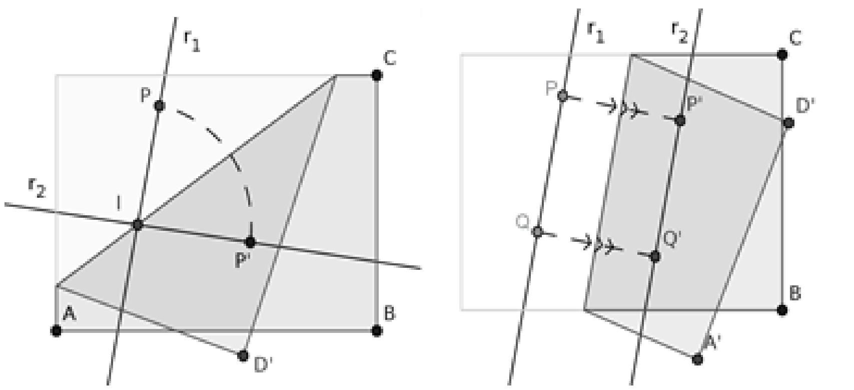
Figura 11 - Segundo Axioma de Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3. Dadas as retas r_1 e r_2, existe uma dobra que coloca r_1 sobre r_2.

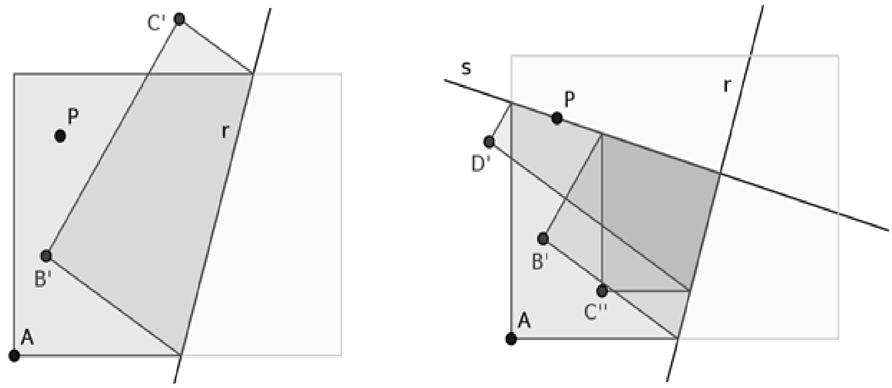
Figura 12 - Terceiro Axioma Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4. Dados um ponto P e uma reta r, existe uma dobra única que é perpendicular a r e que passa por P .

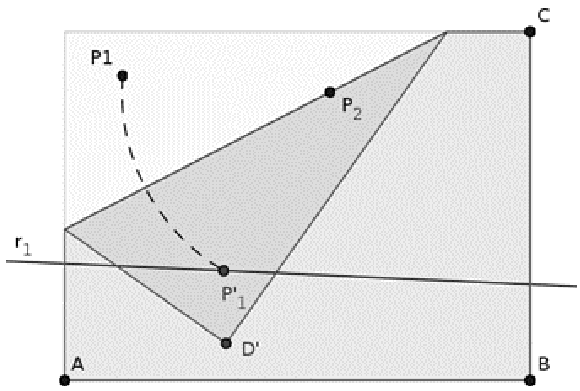
Figura 13 - Quarto Axioma Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5. Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1, existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que passa por P_2.

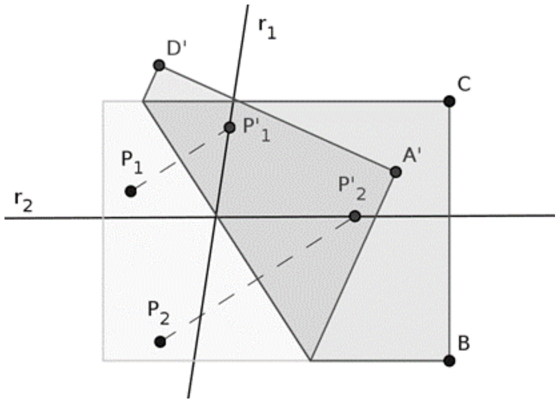
Figura 14 - Quinto Axioma de Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6. Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.

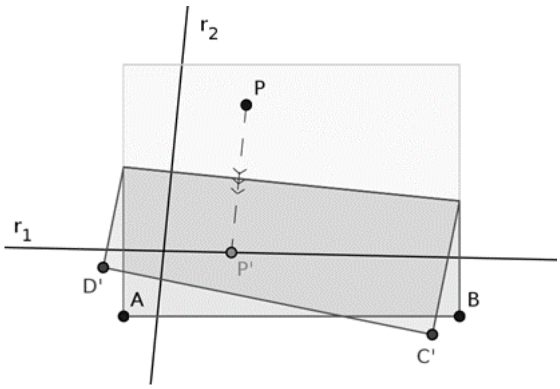
Figura 15 - Sexto Axioma de Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7. Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que é perpendicular a r_2.

Figura 16 - Sétimo Axioma Huzita-Hatori



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Nesta axiomática, o papel tem o tamanho suficientemente grande para conter todas as construções necessárias (suponha-o ilimitado). Além disso, por "existe uma dobra" entende-se que se a solução geométrica existir, então pode ser realizada através de uma dobra.

Por exemplo, a quantidade de soluções do Axioma 5 pode ser 0, 1 ou 2, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois o problema é equivalente a encontrar a intersecção da reta r_1 com a circunferência de centro P_2 passando por P_1.

Não há garantia de independência entre os axiomas. Mas pode- se garantir que o sexto axioma (de Humiaki Huzita) não é consequência dos cinco primeiros, pois os cinco primeiros geram somente construções possíveis com régua e compasso e, com o sexto axioma, podemos obter resultados não construtíveis com régua e compasso como veremos adiante.

O sétimo axioma, acrescentado por Koshiro Hatori, em 2001, e supostamente independente dos cinco primeiros, deixa uma dúvida:

Observe na construção geométrica do Axioma 7, que o ponto P é levado em $P' \in r_1$. Ora PP' deve ser paralelo a r_2 para que a dobra seja perpendicular a r_2. Assim, efetuando os seguintes passos:

Dobre perpendicularmente a r_2 por P obtendo como vinco a reta s_1 (Axioma 4).

Dobre perpendicularmente a s_1 por P obtendo s_2 (Axioma 4). Chame o ponto em $r_1 \cap s_2$ de P'.

Dobre levando o ponto P a P' (Axioma 2), obtendo a reta ℓ.

Temos que a reta ℓ é a mediatriz de PP' e, portanto, é perpendicular a $r_2 \parallel PP'$. Assim, a construção do Axioma 7 é consequência dos axiomas 4 e 2. Ou seja, o Axioma 7 decorre dos cinco primeiros axiomas de Huzita. Pergunta-se: existe algum "furo" nesta argumentação? O fato é que a dobra do Axioma 7 pode ser construída com um único movimento, o de deslizar um ponto Q de r_2, mais distante que P de r_1, sobre r_2 até que P encontre r_1.

Um estudo mais avançado, de Robert J. Lang, sobre estes axiomas e construções geométricas com *Origami* pode ser obtido gratuitamente em: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf (em inglês). Nele é demonstrado inclusive a completude do conjunto de axiomas, isto é, que não há mais axiomas a se acrescentar. E tal estudo é feito com o envolvimento de outra grande área da Matemática: a *Álgebra*.

Estes são os Axiomas de Huzita-Hatori, prosseguindo, iremos trabalhar os módulos para a construção dos Poliedros Regulares de Platão.

5.2 MÓDULOS

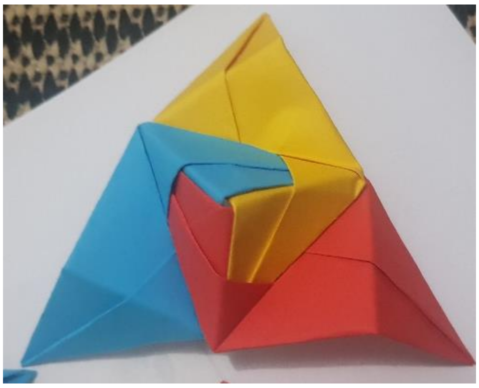
O Origami modular é uma modalidade de dobradura onde são confeccionadas pequenas peças de papel denominadas módulos que, serão unidas, através de encaixes, cola ou outros meios, com a finalidade de formar um único objeto.

Como exemplo de módulo de Origami, vejamos as fotografias 6 a 9. Na Fotografia 6 temos as unidades dos módulos de sonobe, nas fotografias 7 e 8 a junção dos módulos de três em três, para depois unir todos os módulos formando um octaedro estrelado, como monstra fotografia 9.

Fotografia 6 - Unidades dos módulos de sonobe

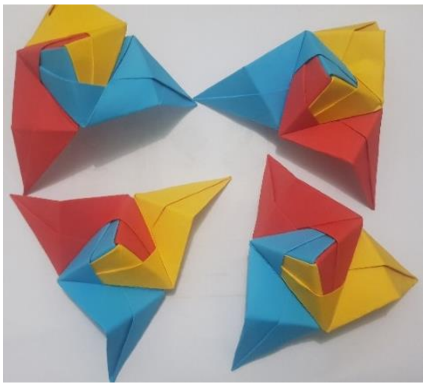
Fonte: A autora.

Fotografia 7 - União de três módulos



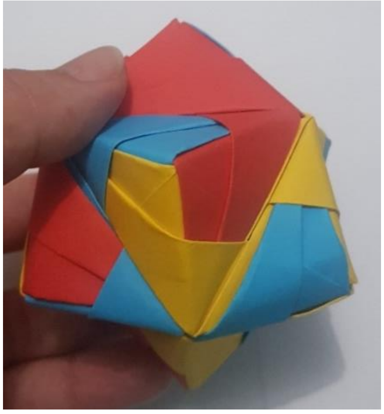
Fonte: A autora.

Fotografia 8 - Módulos agrupados de 3 em 3



Fonte: A autora.

Fotografia 9 - União de todos os módulos - Octaedro estrelado

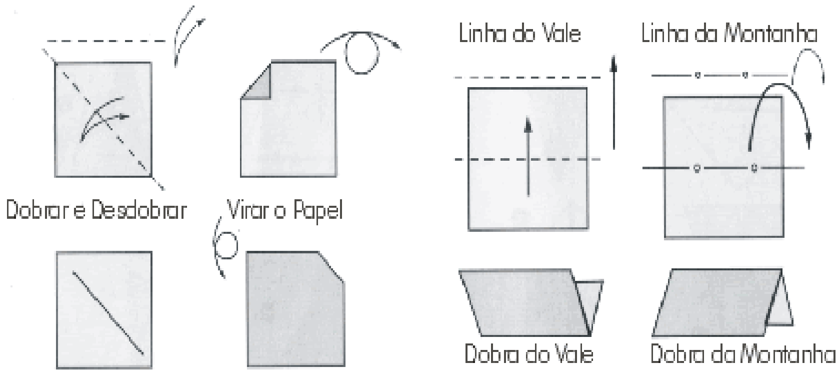


Fonte: A autora.

Assim, usaremos os módulos para montar os Poliedros de Platão. Ao considerar estes sólidos, sabemos que em três deles as faces são triangulares (tetraedro, octaedro e icosaedro), em um as faces são quadrangulares (hexágono) e, por último, temos um com faces pentagonais (dodecaedro). Sendo assim, para construir tais Poliedros iremos montar os módulos das faces triangulares, quadrangulares e pentagonais.

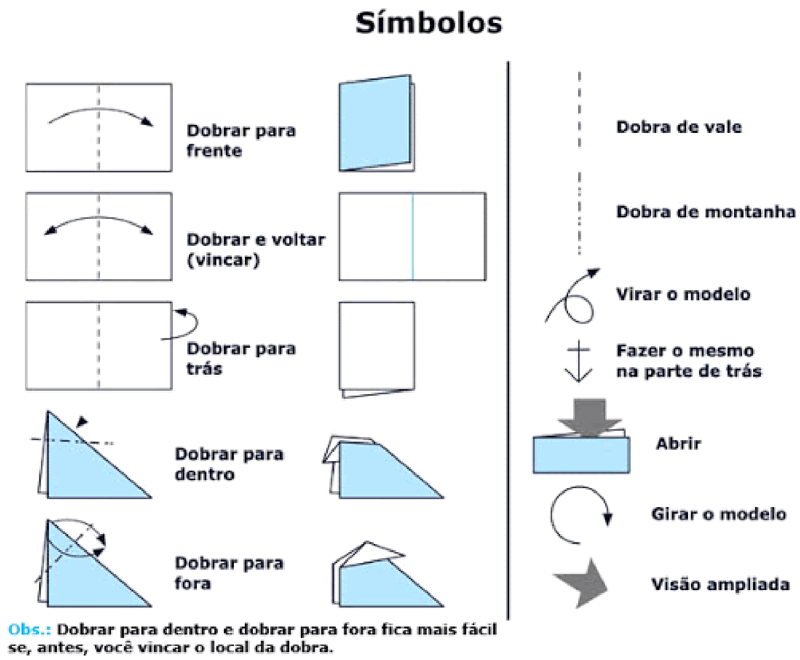
Entretanto para prosseguir com as construções dos módulos, é necessário conhecer a linguagem das dobraduras, em função disto teremos as figuras 17, 18, 19 e 20, as quais demonstram a linguagem das dobraduras.

Figura 17 - Linguagem das dobraduras



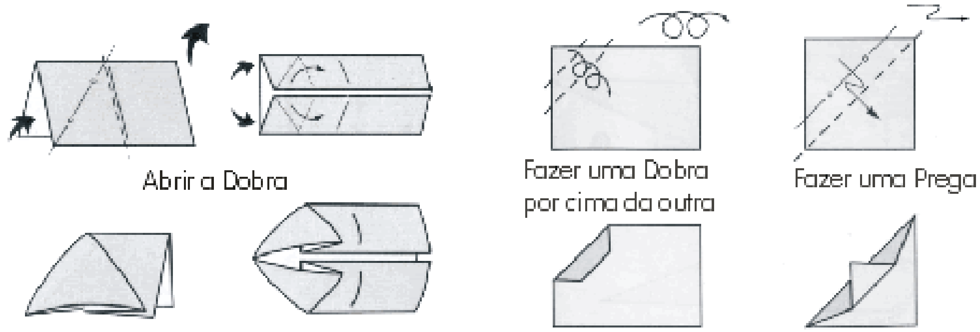
Fonte: http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/simbolos-do-diagrama.html

Figura 18 - Linguagem das dobraduras



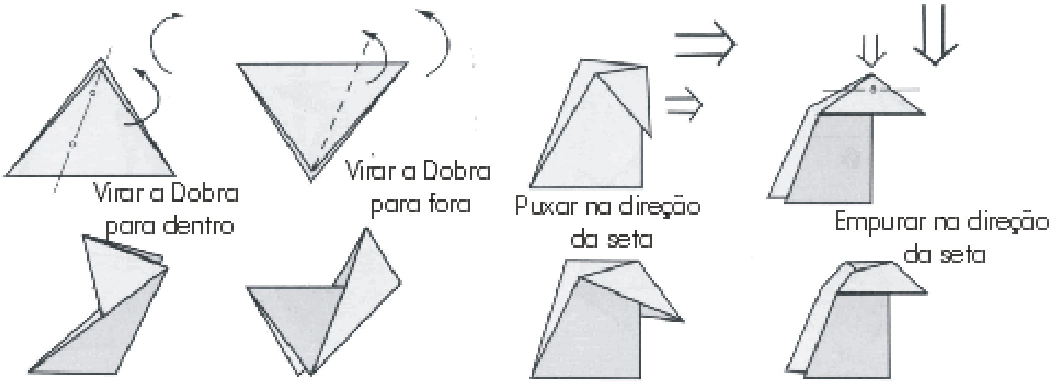
Fonte: http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/simbolos-do-diagrama.html

Figura 19 - Linguagem das dobraduras



Fonte: http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/simbolos-do-diagrama.html

Figura 20 - Linguagem das dobraduras



Fonte: http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/simbolos-do-diagrama.html

5.3 CONSTRUÇÕES DOS POLIEDROS DE PLATÃO A PARTIR DA REVISÃO DE LITERATURA

Verificamos que os módulos podem ser montados de maneiras diferentes para a confecção dos Poliedros de Platão.

A partir da análise realizada no Capítulo 4, observamos que com exceção de duas obras, todas as demais abordam a construção dos Poliedros de Platão usando a mesma forma para confeccionar os módulos. Diante disto, iremos destacar Tridapalli (p. 42 a 47, 2017), no seu estudo sobre o tema, com relação aos módulos para os Poliedros que possuem faces triangulares. Vejamos.

> Módulos triangulares: os módulos triangulares são utilizados na construção dos poliedros de Platão com faces triangulares (tetraedro regular, octaedro regular e icosaedro regular).
>
> Módulo A: Tome uma folha de papel, como a sugerida, e siga os seguintes

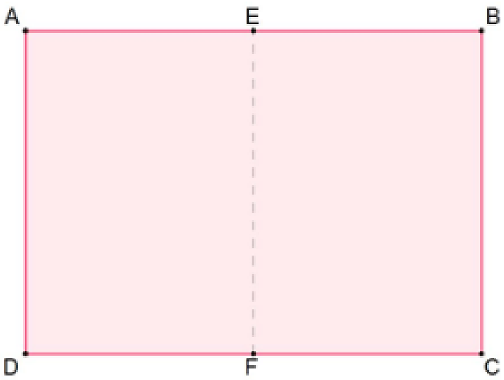
passos:
Passo 1. Iniciar com a folha no modo retrato (maior dimensão na horizontal), onde marcamos seus vértices com as letras A, B, C e D.

Fotografia 10 - Módulo A - passo 1

Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 2. Dobrar o maior lado da folha ao meio e marcar o vinco formando o segmento EF.

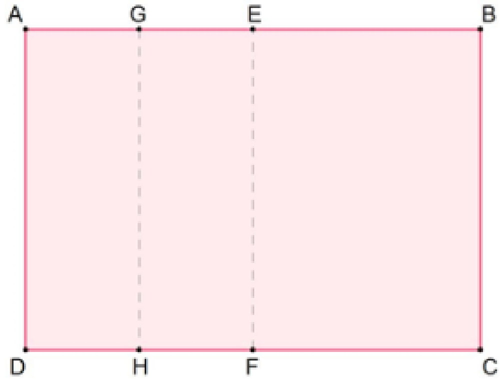
Fotografia 11 - Módulo A - passo 2



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 3. Dobrar uma das metades obtidas ao meio novamente, por exemplo, a metade esquerda, obtendo um quarto da folha, e marcar o vinco formando o segmento GH.

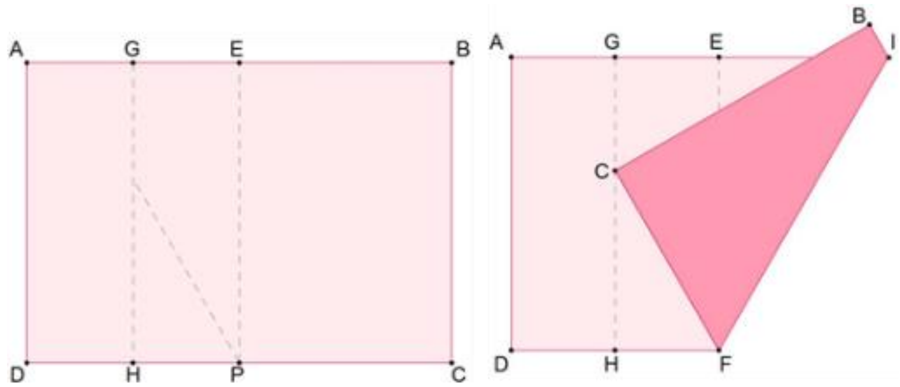
Fotografia 12 - Módulo A - passo 3



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 4. Colocar o dedo sobre o ponto F e dobrar o vértice C até encostar no segmento GH, obtendo o segmento FI.

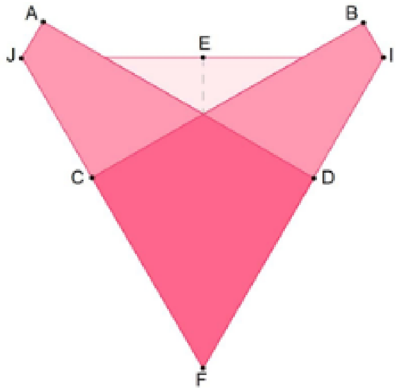
Fotografia 13 - Módulo A - passo 4



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 5. Colocar o dedo sobre o ponto F e dobrar o vértice D sobre o segmento FI, obtendo o segmento FJ.

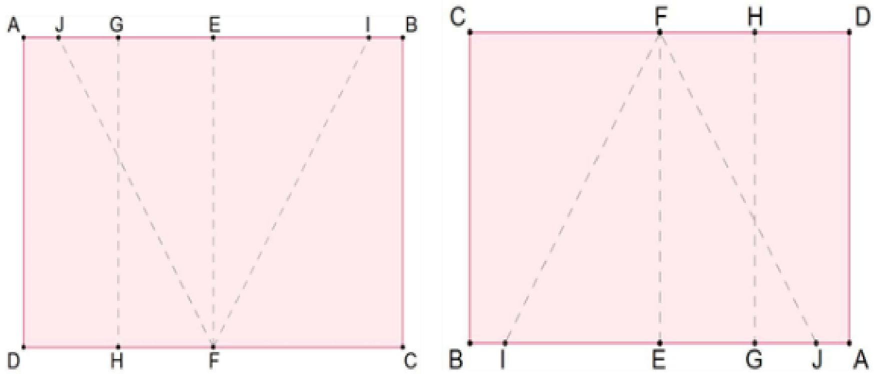
Fotografia 14 - Módulo A - passo 5



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 6. Abrir o papel e girá-lo 180^{o}.

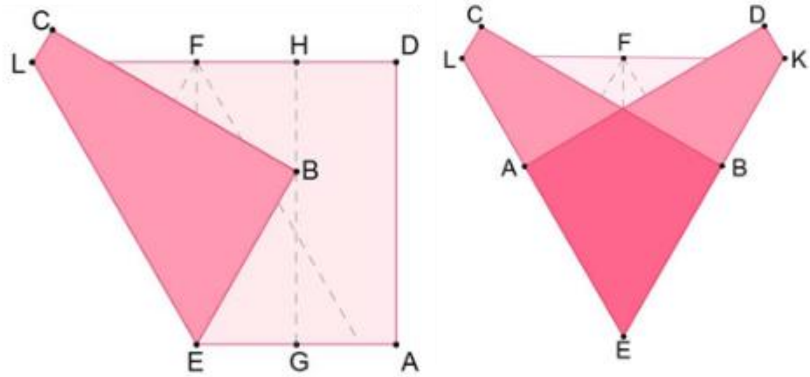
Fotografia 15 - Módulo A - passo 6



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 7. Repetir os passos 4 e 5 (colocar o dedo sobre o ponto E e dobrar o vértice B até encostar no segmento GH, obtendo o segmento EL; dobrar o vértice A sobre o segmento BE, obtendo o segmento EK).

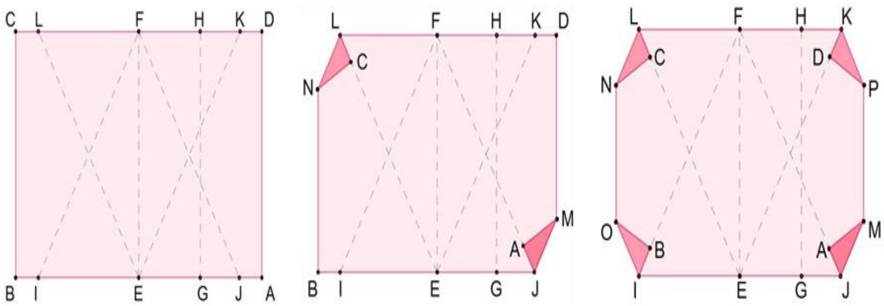
Fotografia 16 - Módulo A - passo 7



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 8. Abrir o papel e dobrar o vértice A sobre o segmento FJ, o vértice C sobre o segmento EL, o vértice B sobre o segmento FI e o vértice D sobre o segmento EK, obtendo, respectivamente, os segmentos JM, IO, LN e KP.

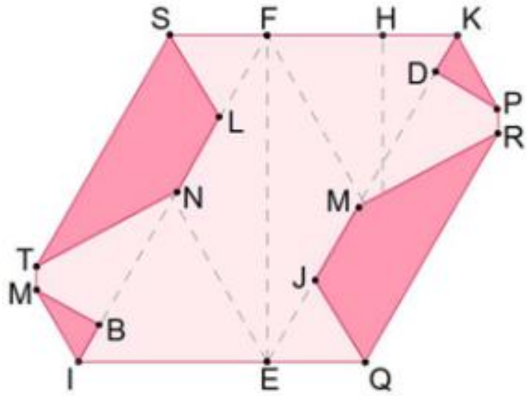
Fotografia 17 - Módulo A - passo 8



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 9. Dobrar o segmento LN sobre o segmento FI, obtendo o segmento ST, e sobrar o segmento JM sobre o segmento EK, obtendo o segmento QR.

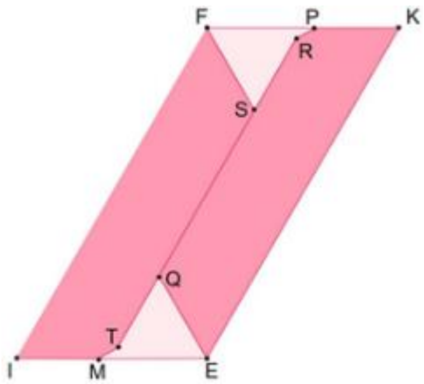
Fotografia 18 - Módulo A - passo 9



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 10. Dobrar o segmento ST em torno do segmento LN e dobrar o segmento QR em torno do segmento JM.

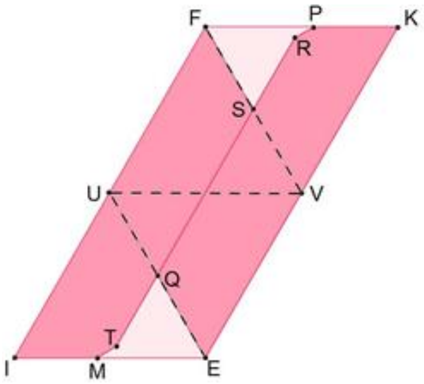
Fotografia 19 - Módulo A - passo 10



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 11. Dobrar o vértice K sobre o segmento FI e o vértice I sobre o segmento EK, formando quatro triângulos equiláteros (KFV, FVU, VUE e UEI) apenas para vincar

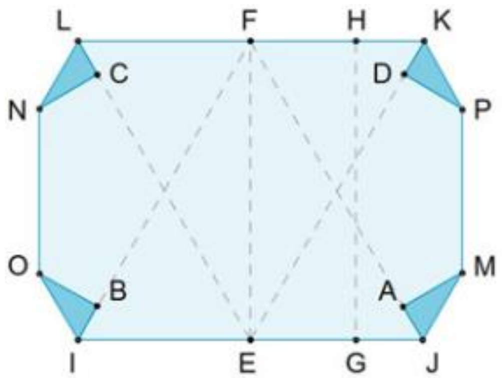
Fotografia 20 - Módulo A - passo 11



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Módulo B: O módulo B é simétrico ao módulo A e sua construção só difere a partir do passo 9. Tome uma folha de papel como a recomendada e siga os passos de 1 a 8 do Módulo A, até obter um papel com os vincos e dobraduras como este:

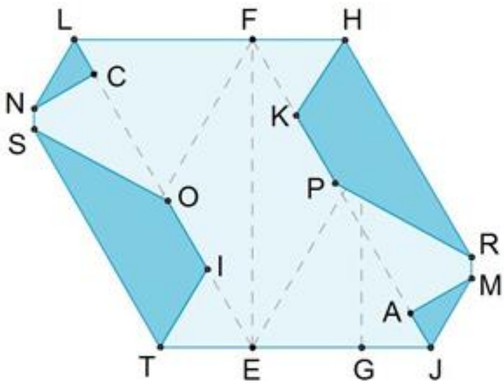
Fotografia 21 - Módulo B - passo 8



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Considerando os oito primeiros passos contidos nas instruções do módulo A, para dar continuidade e obter o módulo B, a partir do passo 9, siga as seguintes instruções: Passo 9. Dobrar o segmento KP sobre o segmento FJ e dobrar o segmento IO sobre o segmento EL, obtendo, respectivamente, os segmentos HR e ST.

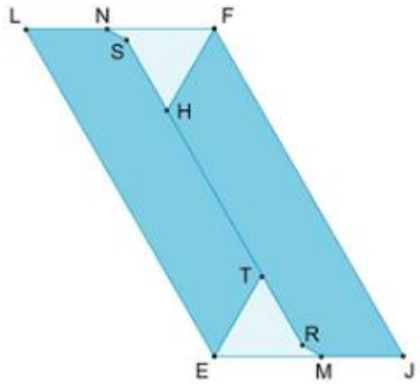
Fotografia 22 - Módulo B - passo 9



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 10. Dobrar o segmento HR em torno do segmento KP e dobrar o segmento ST em torno do segmento IO.

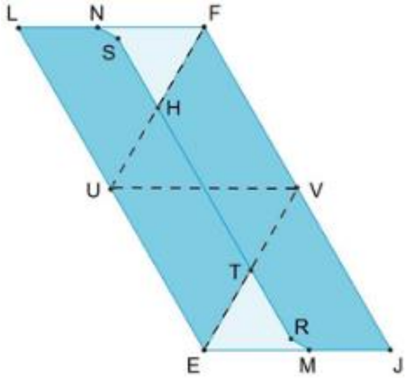
Fotografia 23 - Módulo B - passo 10



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 11. Dobrar o vértice L sobre o segmento FJ e o vértice E sobre o segmento FJ, formando quatro triângulos equiláteros (LFU, FUV, UVE e VEJ) apenas para vincar.

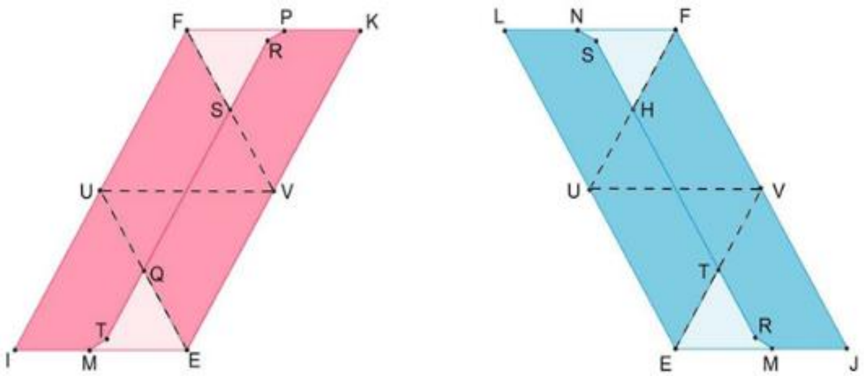
Fotografia 24 - Módulo B - passo 11



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Comparando o módulo A e o módulo B teremos:

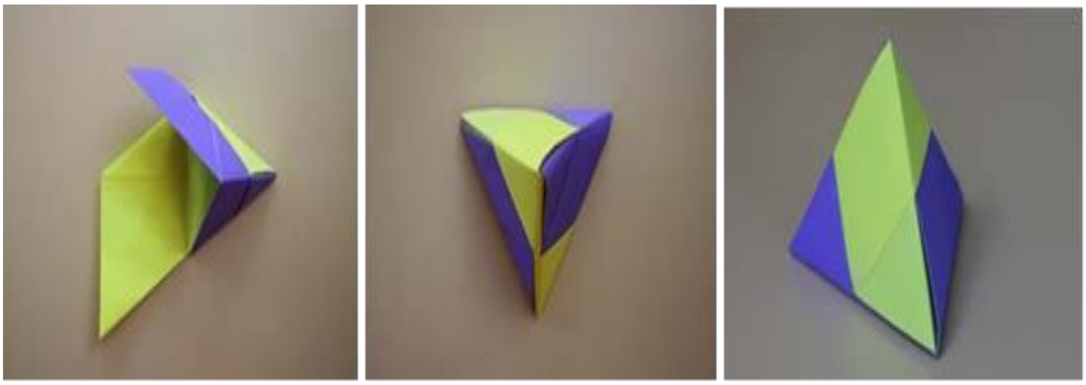
Fotografia 25 - Módulos A e B



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Como resultado da aplicação destes módulos nos Poliedros de Platão de faces triangulares, Tridapalli (p. 60, 2017) mostra o resultado da construção do tetraedro, do octaedro e do icosaedro, conforme fotografias 26 a 28.

Fotografia 26 - Tetraedro



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Fotografia 27 - Octaedro

Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Fotografia 28 - Icosaedro

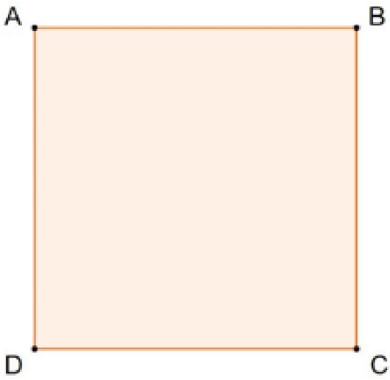
Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Para a construção do hexaedro, é comum a utilização do módulo de sonobe.

Continuaremos mostrando os passos de contrução do módulo de sonobe, apresentados pela autora Tridapalli (p. 47 a 52, 2017), frisando que de todos os trabalhos analisados, quando se trata da construção do hexaedro a maioria das obras utiliza este módulo para a construção.

Passo 1. Iniciar com a folha no formato quadrado e marcar os vértices com as letras A, B, C e D.

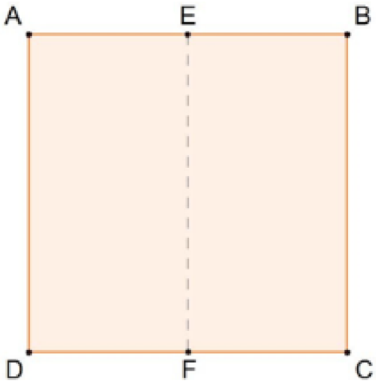
Fotografia 29 - Módulo quadrangular - passo 1



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 2. Dobrar a folha ao meio e marcar o vinco, obtendo o segmento EF.

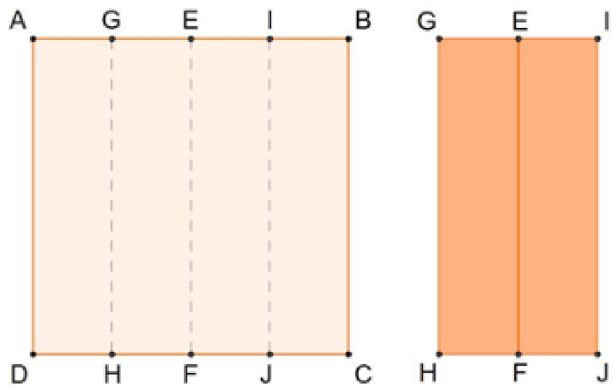
Fotografia 30 - Módulo quadrangular - passo 2



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 3. Dobrar cada metade obtida ao meio novamente, obtendo um quarto da folha, ou seja, o retângulo GIJH.

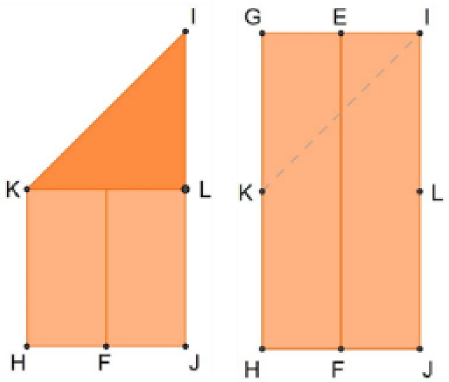
Fotografia 31 - Módulo quadrangular - passo 3



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 4. Colocar o dedo sobre o ponto I e dobrar o vértice G sobre o segmento IJ e marcar o vinco, obtendo o segmento KI e o ponto L.

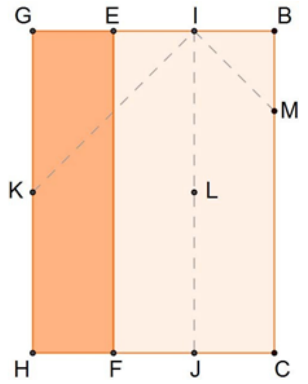
Fotografia 32 - Módulo quadrangular - passo 4



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 5. Abrir o lado direito, ou seja, passar o lado BC sobre IJ. Marcar o ponto M sobre o vinco que estará marcado, formando o segmento IM.

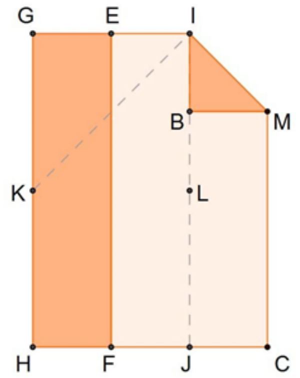
Fotografia 33 - Módulo quadrangular - passo 5



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 6. Dobrar o triângulo IBM sobre o segmento IJ.

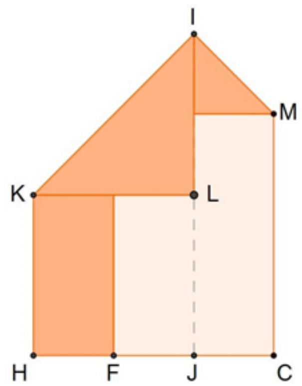
Fotografia 34 - Módulo quadrangular - passo 6



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 7. Dobrar o triângulo KGI sobre o segmento IJ, ou sobre o triângulo KLI.

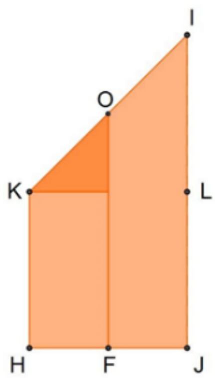
Fotografia 35 - Módulo quadrangular - passo 7



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 8. Dobrar o trapézio IJCM em torno do segmento IJ, e marcar o ponto O no segmento KI.

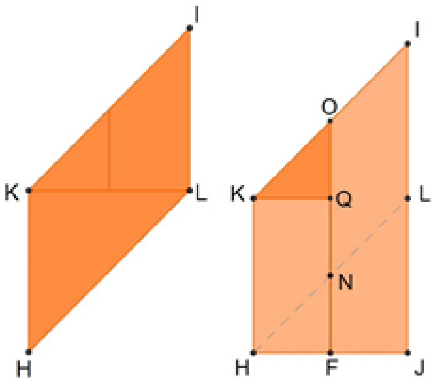
Fotografia 36 - Módulo quadrangular - passo 8



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 9. Dobrar o vértice J até o ponto K e marcar o vinco HL e, marcar o ponto N sobre o segmento EF.

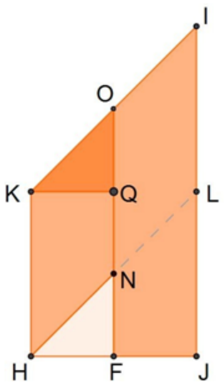
Fotografia 37 - Módulo quadrangular - passo 9



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 10. Dobrar o triângulo HFN para dentro e em torno do segmento HL.

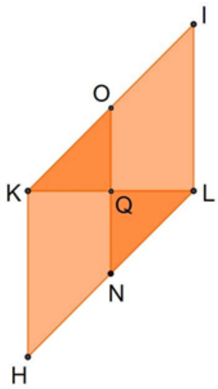
Fotografia 38 - Módulo quadrangular - passo 10



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Passo 11. Dobrar o triângulo LJH em torno do segmento HL e por dentro do trapézio NHKQ.

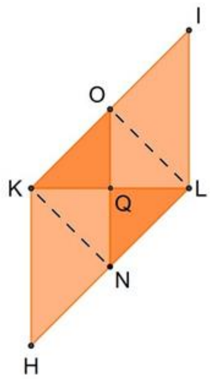
Fotografia 39 - Módulo quadrangular - passo 11



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

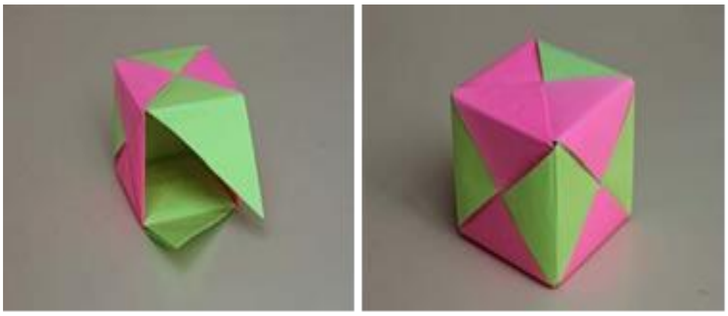
Passo 12. Dobrar o ponto I sobre o ponto L e o ponto H sobre o ponto K para marcar os vincos OL e KN.

Fotografia 40 - Módulo quadrangular - passo 12



Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Fotografia 41 - Hexaedro montado

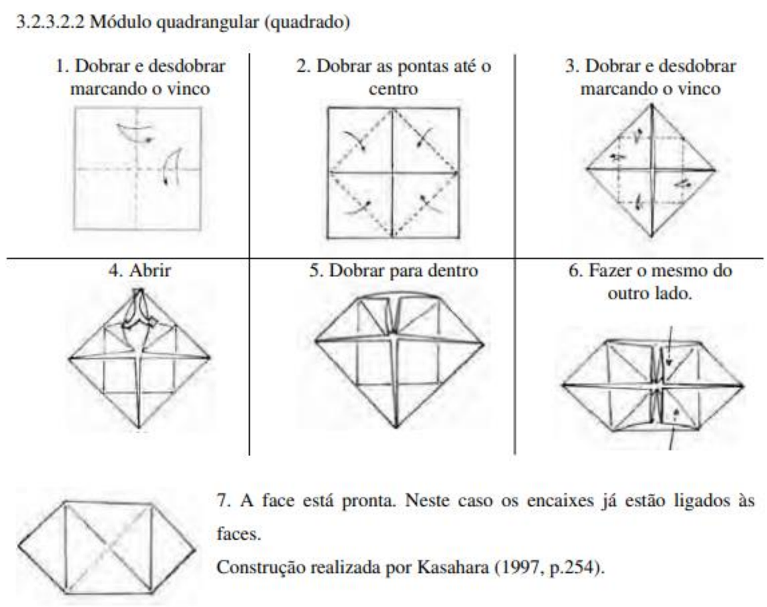


Fonte: TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado

Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

Mostraremos agora outra maneira encontrada para construção do hexaedro, ou seja, de módulos para faces quadrangulares, apresentada em algumas obras e destacaremos a forma apresentada por Buske (p. 71, 2007), conforme fotografia 42.

Fotografia 42 - Módulo quadrangular

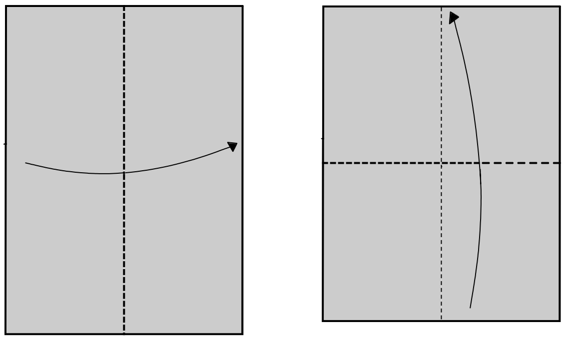


Fonte: BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio**. 2007. 200 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91082>. Acesso em 01/05/2020.

Passaremos agora para os módulos de faces pentagonais. Para estes módulos utilizaremos o estudo de Lucas (2013), visto que da análise realizada no Capítulo 4, para este módulo ocorre o mesmo que com os das faces triangulares, com exceção de dois autores, todos os demais que abordam o tema apresentam a mesma construção, incluindo Lucas (2013).

Passo 1: Usando uma folha tamanho A4 ou de mesma proporção, dobrar e desdobrar marcando as duas mediatrizes.

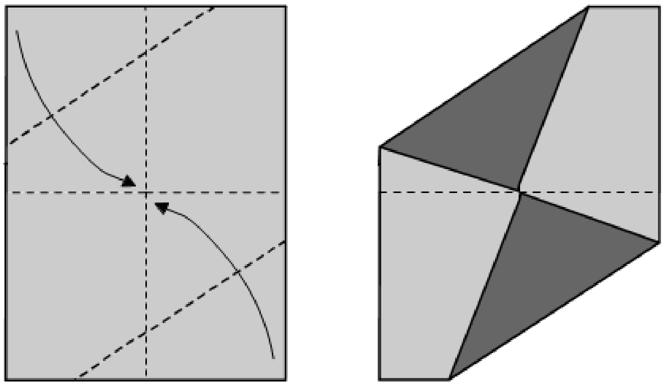
Fotografia 43 - Módulo pentagonal - passo 1



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 2: Dobre dois dos vértices opostos ao centro da folha

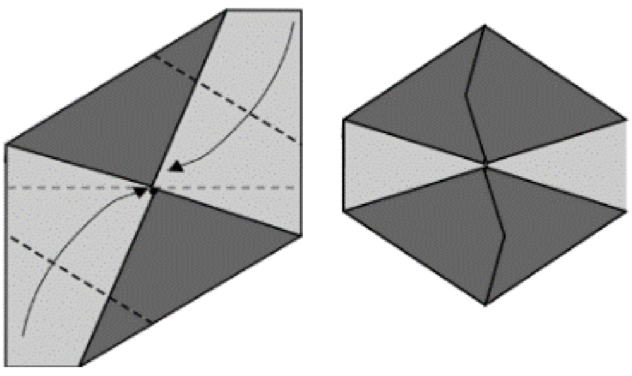
Fotografia 44 - Módulo pentagonal - passo 2



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 3: Dobre os outros dois vértices conforme a figura.

Fotografia 45 - Módulo pentagonal - passo 3

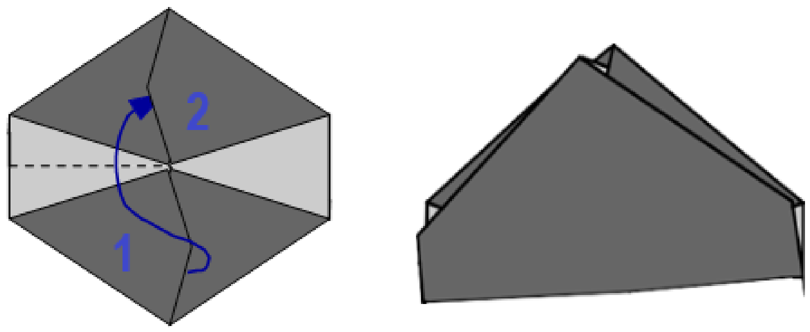


Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 4: Dobre ao meio encaixando a parte 1 por baixo da parte 2.

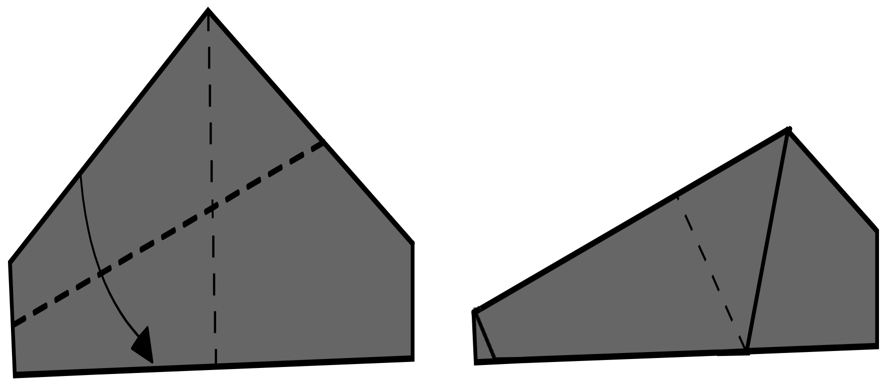
Fotografia 46 - Módulo pentagonal - passo 4



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 5: Dobre a bissetriz levando um lado ao outro.

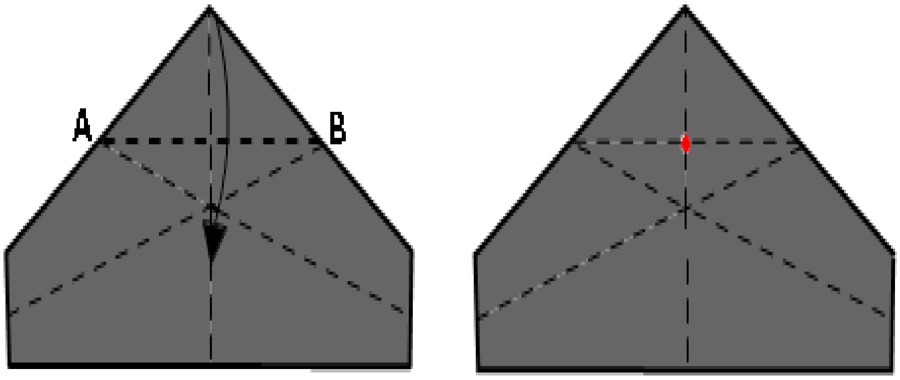
Fotografia 47 - Módulo pentagonal - passo 5



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 6: Desdobre e proceda da mesma forma com o outro lado. Em seguida, dobre uma reta que passa por A e B, que determina o ponto vermelho realçado na figura.

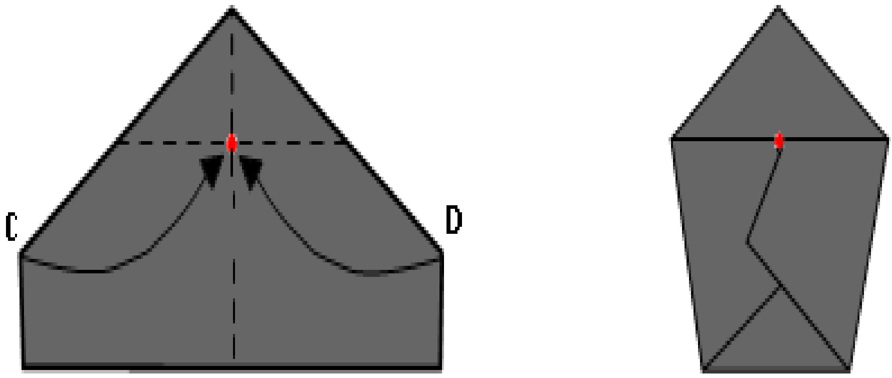
Fotografia 48 - Módulo pentagonal - passo 6



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Passo 7: Dobre levando C e D ao ponto indicado. Desta forma teremos um pentágono regular.

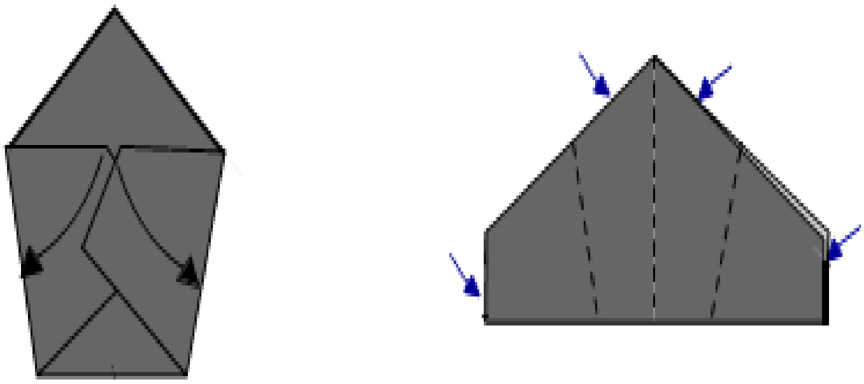
Fotografia 49 - Módulo pentagonal - passo 7



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Abrindo as abas do módulo você poderá observar que ele possui dois bolsos e duas abas.

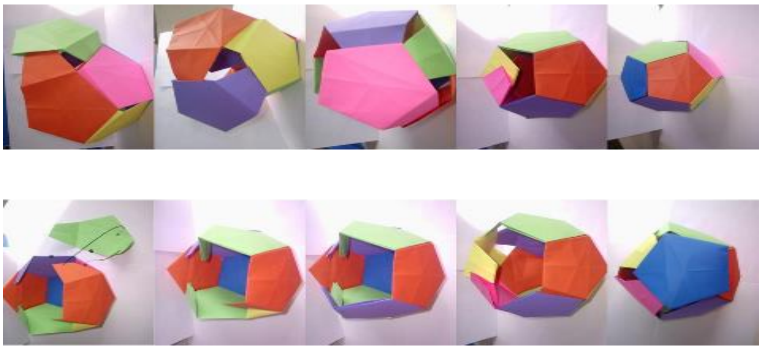
Fotografia 50 - Módulo pentagonal - passo 8



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Lucas (2013), finaliza estas instruções com as fotos da construção.

Fotografia 51 - Módulo pentagonal concluído



Fonte: LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

Assim, diante de todas as formas apresentadas para construir os módulos dos Poliedros de Platão, verifica-se que os conceitos geométricos estão presentes em todas, de forma que o estudante estará em constate contato com conceitos como mediatriz, bissetriz, vértices, pontos, segmentos, entre outros.

Contudo, ressalta-se que em nenhuma das construções dos módulos apresentados o estudante precisa definir o tamanho do papel, ele só precisa iniciar a construção do módulo em posse do formato pedido, que pode ser quadrangular ou retangular. Assim, insta destacar que, os módulos apresentados não trazem o mesmo rigor das demonstrações por meio de construção conforme Cavacami e Furuya (2010) apresenta, todavia eles são utilizados como ferramenta para a incursão do estudo dos Poliedros de Platão, pois como já elencado estão carregados de conceitos geométricos.

6 ESTUDO DOS POLIEDROS DE PLATÃO PELA PERSPECTIVA PROPOSTA NA APOSTILA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP

Apresentaremos os Sólidos de Platão com Origami Modular, partindo de uma perspectiva diferente da que vem sido utilizada, apresentando como proposta a utilização do passo a passo disponível na apostila do PIC (Programa de Iniciação Científica Jr), presente no acervo da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas), de autoria de Cavacami e Furuya (2010), a fim de estruturar melhor os conceitos Matemáticos envolvidos na arte do Origami, partindo de construções preliminares para obtenção do papel nas proporções matemáticas ideais, frisando as propriedades matemáticas, para a construção dos módulos de faces triangulares, quadradas e pentagonais, para após montarmos os cinco Poliedros de Platão.

6.1 CONSTRUÇÕES PRELIMINARES

Antes de construirmos os módulos para montar os poliedros de Platão é necessário que aprendamos algumas construções preliminares, que são essenciais para a confecção dos módulos.

Para construirmos os módulos necessitaremos de unidades básicas, ou seja, o tamanho papel tenha a proporção ideal, caso contrário não é possível realizar a construção.

Destacamos que este tópico é fundamental para a proposta deste trabalho, visto que tais construções preliminares irão possibilitar ao estudante a aquisição da unidade básica (papel cortado no tamanho ideal para construir os módulos), podendo assim iniciar suas construções na proporção exata, sem que seja necessário utilizar régua graduada, bem como possibilita retomar conceitos de razão e proporção, visto que a proposta é a aplicação para o Ensino Médio, onde os estudantes já tem conhecimento prévio destes conceitos.

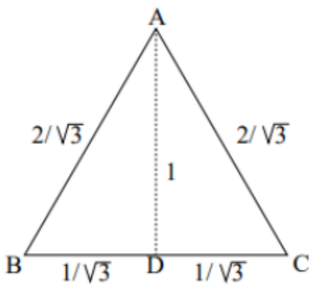
Teremos por referência conforme já supracitado a obra de Cavacami e Furuya (2010), tais construções estão dispostas no livro Explorando Geometria com Origami, disponível para download no site da OBMEP de forma gratuita.

Sendo assim iniciaremos pelas construções de retângulos especiais, são eles os Retângulos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$, para serem utilizados como unidades básicas.

6.1.1 Construção das Unidades básicas: Retângulos Especiais

Segundo Cavacami e Furuya (2010), para obtermos nosso retângulo especial, devemos trabalhar com a relação $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$ para os lados do retângulo, de modo que, estas medidas aparecem no triângulo equilátero.

Figura 21 - Triângulo equilátero

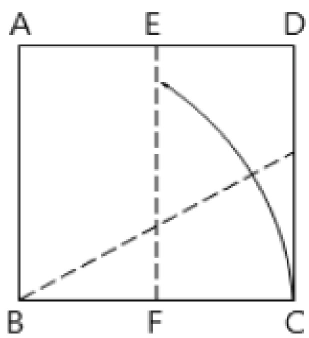


Fonte: Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Assim, passaremos o passo a passo, conforme traz a obra citada, para obtermos nossos retângulos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1º Passo: Seja um papel quadrado ABCD de lado 1. Encontre EF, onde E e F são pontos médios de AD e BC, respectivamente. Fixando B, leve C a EF.

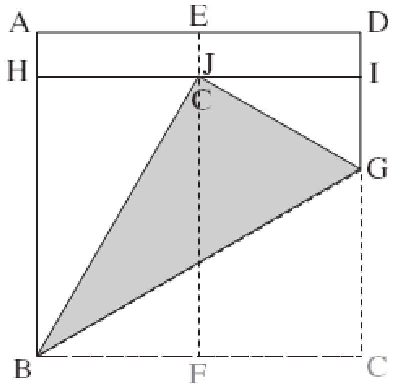
Figura 22 - Construção Preliminar - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º Passo: Pelo ponto J obtido em EF, dobre a perpendicular HI a EF. Teremos, para o segmento $\overline{HB}$ que $\overline{HB}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Figura 23 - Construção Preliminar - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

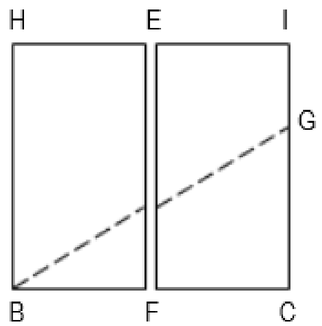
Agora, pois, temos dois casos.

O primeiro caso, a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

Corte por HI e EF. Obteremos duas peças, cujas proporções dos lados são de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ em cada peça.

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figura 24 - Construções Preliminares: Primeiro Caso



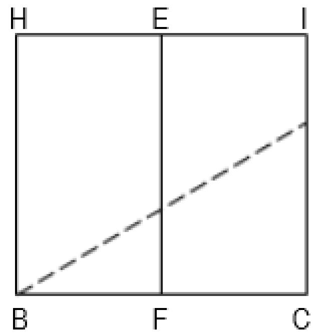
Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

O segundo caso a razão $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

Corte somente por HI. Sem cortar por EF, teremos um retângulo com a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Figura 25 - Construções Preliminares: Segundo Caso



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

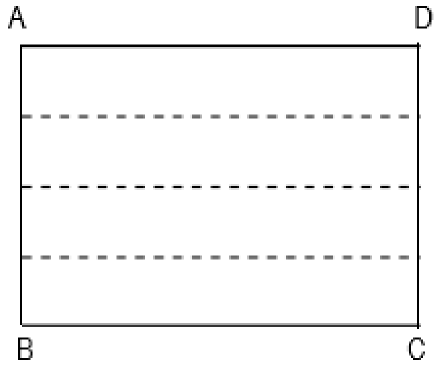
Portanto, a partir dos passos apresentados, obtemos os retângulos nas proporções desejadas.

6.1.2 Dividindo a folha A4 em unidades básicas para construção dos módulos

Com o papel A4 é possível obtermos doze unidades na proporção de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, vejamos.

Em um papel A4 com os vértices ABCD, dobre o papel pelo lado maior ao meio, e depois ao meio novamente, obtendo assim três vincos, dividindo assim o papel em 4 partes iguais.

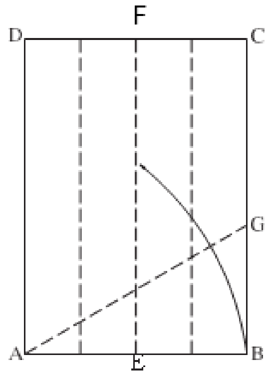
Figura 26 - Dividindo o Papel A4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Após fixe A e leve o vértice B até o segmento EF feito pelo vinco central, rotacionando em torno do eixo AG.

Figura 27 - Dividindo o Papel A4

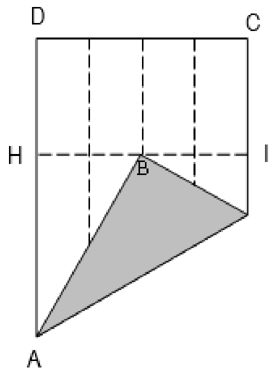


Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Pelo ponto obtido em $\overline{EF}$ marque o segmento HI perpendicular a AD. Pelo que vimos anteriormente, a altura $\overline{AH}$ equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, se considerarmos $\overline{AB} = 1$, isto é $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dividindo $\overline{AH}$ por 2 e $\overline{AB}$ por 4, temos $\frac{\frac{\overline{HA}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$.

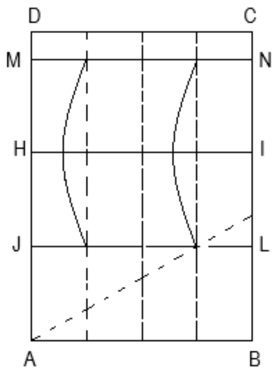
Figura 28 - Dividindo o Papel A4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Para aproveitar o papel, dobre a proporção obtida usando como eixo HI, conseguindo mais quatro peças com razão $\frac{1}{\sqrt{3}}$

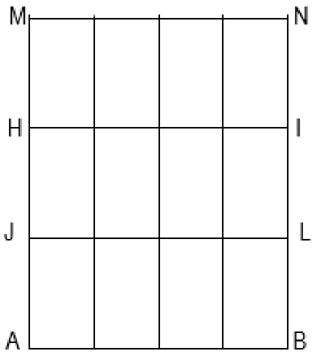
Figura 29 - Dividindo o Papel A4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Sendo assim, obtemos as 12 peças com razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Figura 30 - Dividindo o Papel A4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Assim, com as unidades básicas prontas, é só escolher o retângulo que deseja usar para a construção dos módulos.

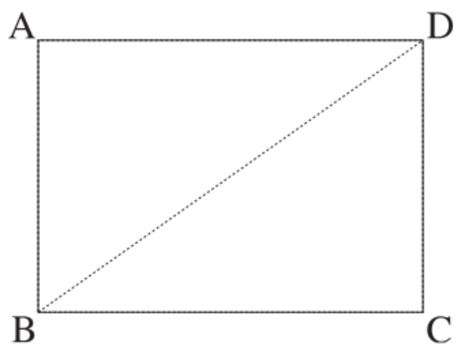
6.1.3 Construção do copo

Tendo em vista a necessidade de construções preliminares para a posterior construnção dos módulos, destacamos aqui que para a construção do dodecaedro, se faz necessária uma análise em outra construção, a de um copo.

Assim, partindo de nossa bibliografia de estudo, (CAVACAMI E FURUYA, 2010, p.63), segue o passo a passo da construção do copo.

1º Passo: Começando com um retângulo ABCD, dobre a diagonal BC.

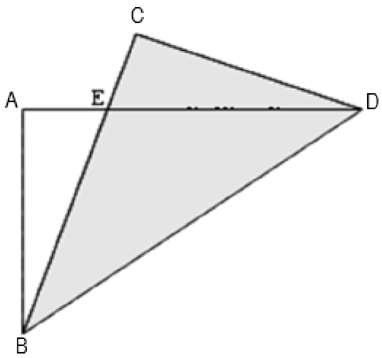
Figura 31 - Construção do copo - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º Passo: Encontrando o ponto E, intersecção de AD com BC, dobre por EB e ED, de modo que não prenda a parte oposta. Observe que o triângulo △BED é isósceles.

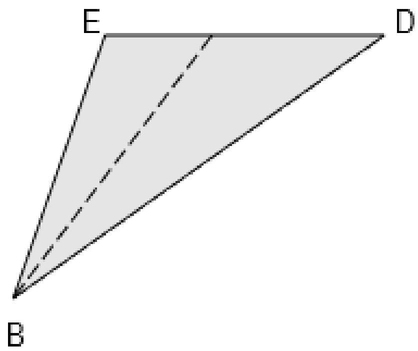
Figura 32 - Construção do copo - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3º Passo: Dobre agora a bissetriz de EBD

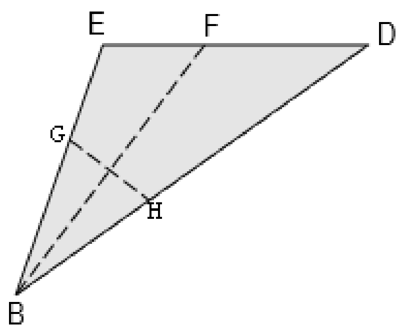
Figura 33 - Construção do copo - Passo 3



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4º Passo: Encontrado o ponto F, intersecção da bissetriz de $\hat{B}$ com ED, dobre a mediatriz de BF, donde surge o segmento GH, com G ∈ EB e H ∈ BD.

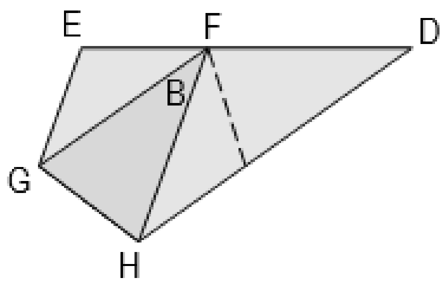
Figura 34 - Construção copo - Passo 4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5º Passo: Como GH é mediatriz de BF, dobre levando B a F.

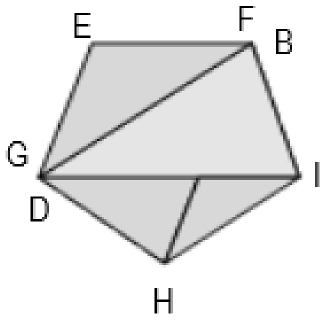
Figura 35 - Construção do copo - Passo 5



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6º Passo: Seguindo os mesmos procedimentos do vértice B, dobre D sobre G. Um pentágono possivelmente irregular, mas simétrico, está pronto.

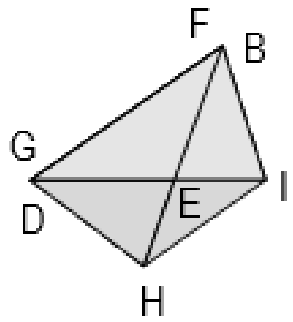
Figura 36 - Construção do copo - Passo 6



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7º Passo: Para terminar o copo, dobre o vértice E pelo eixo de rotação GF. Note que existem duas folhas, sendo uma dobrada para frente e outra para trás.

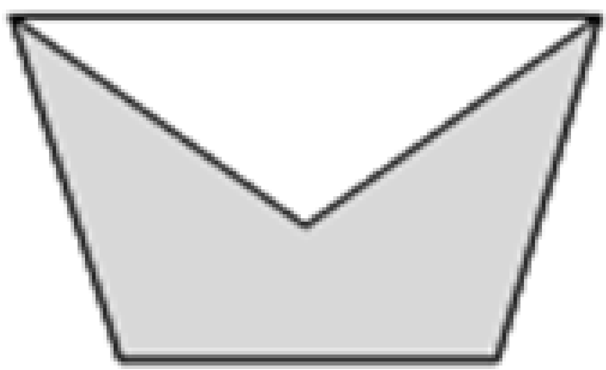
Figura 37 - Construção do copo - Passo 7



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

E está pronto o copo.

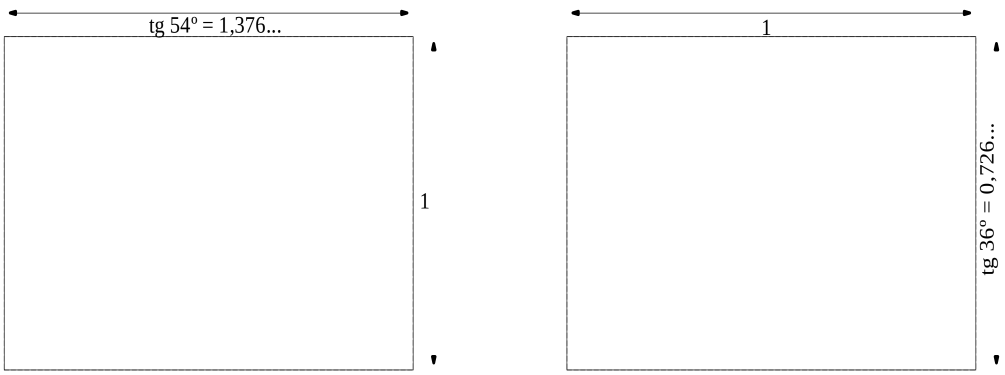
Figura 38 - Copo Pronto



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

O Cavacami e Furuya (2010, p.63) aponta uma análise, para que a construção do copo descrito acima possa ser aplicada na construção dos módulos para as faces pentagonais, devemos definir o tamanho do papel para que esta construção se torne um pentágono regular, chegando as seguintes medidas

Figura 39 - Medidas para o módulo do Pentágono Regular



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Assim, passaremos agora para a construção dos módulos individuais para a construção dos Poliedros.

6.2 CONSTRUÇÃO DOS MÓDULOS

6.2.1 Módulos para as faces triangulares

Com retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{2}{\sqrt{3}}$, obtidos na subseção 6.1.1, iremos construir os módulos, peças que formarão triângulos equiláteros, e ao encaixarmos obteremos os poliedros de faces triangulares. Eles serão divididos em dois grupos A e B.

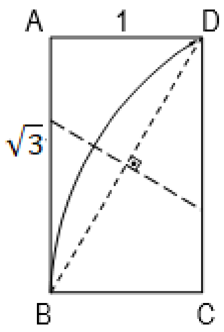
Importante destacar, que todo este processo de construção é realizado sem a régua graduada.

Para as faces triangulares usaremos dois tipos de módulos, denominados módulo A e módulo B, conforme passo a passo a seguir.

Passo a Passo para o módulo A:

1º Passo: Com uma peça retangular ABCD, respeitando as proporções, leve o vértice B ao D.

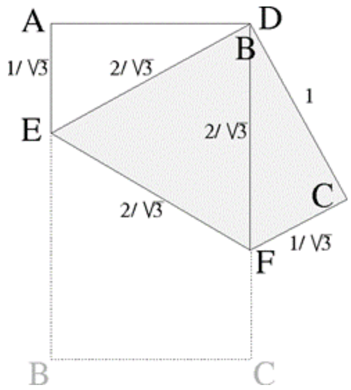
Figura 40 - Módulo A - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º passo: Ao levar B a D, surge um eixo de rotação EF. EF é a mediatriz de BD. Os $\triangle EFD$ e $\triangle EFB$ são equiláteros de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$

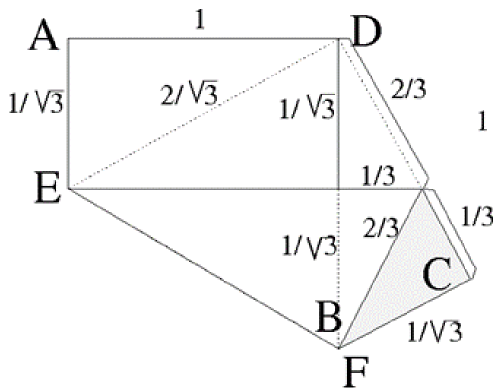
Figura 41 - Módulo A - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3º passo: Leve o vértice B ao ponto F. A nova dobra é paralela a AD.

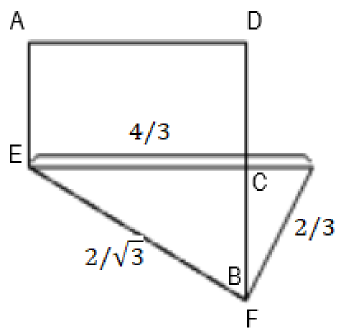
Figura 42 - Módulo A - Passo 3



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4º Passo: Leve o vértice C sobre DF.

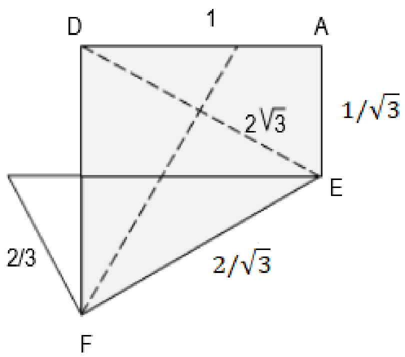
Figura 43 - Módulo A - Passo 4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5º Passo: Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.

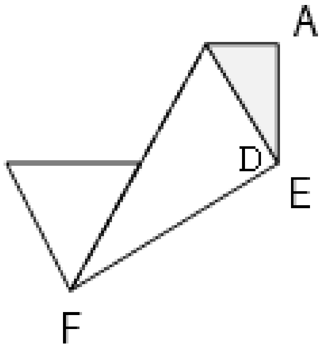
Figura 44 - Módulo A - Passo 5



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6º Passo: Leve o vértice D ao ponto E.

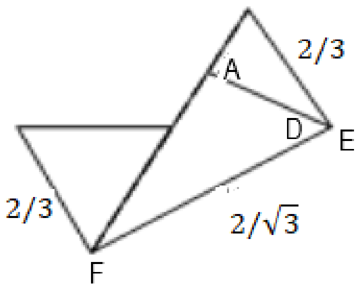
Figura 45 - Módulo A - Passo 6



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7º Passo: Mova o vértice A dobrando segundo o eixo do ponto E.

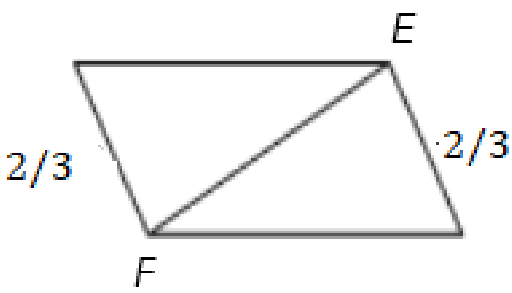
Figura 46 - Módulo A - Passo 7



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

8º Passo: Desfaça a dobra pelo eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.

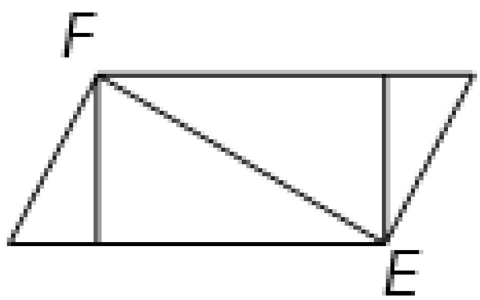
Figura 47 - Módulo A - Passo 8



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

9º Passo: Vire a peça, de modo que a parte oculta se volte para frente.

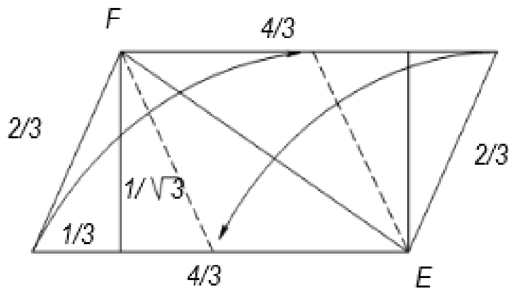
Figura 48 - Módulo A - Passo 9



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

10º Passo: Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.

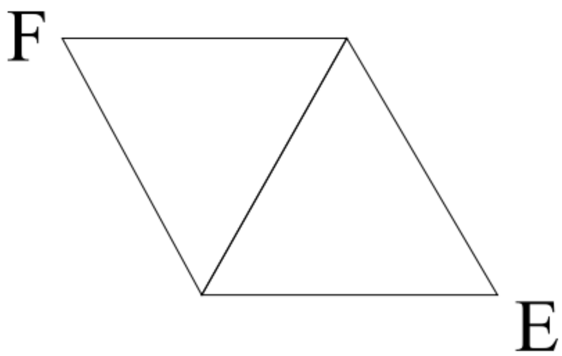
Figura 49 - Módulo A - Passo 10



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

11º Passo: Obtém-se um losango cujos lados e a diagonal menor medem $\frac{2}{3}$

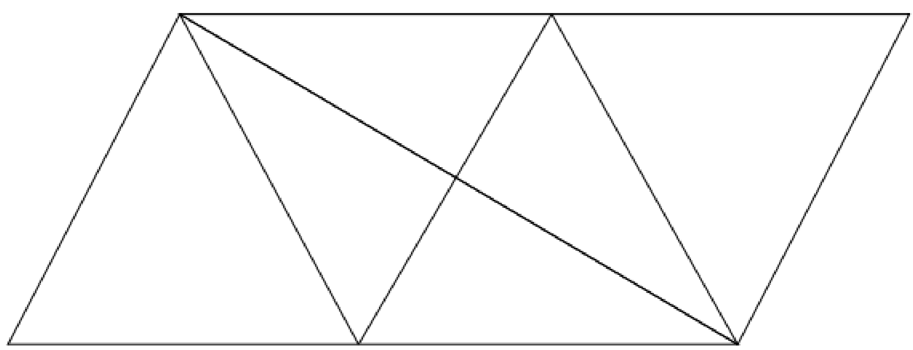
Figura 50 - Módulo A - Passo 11



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Agora basta abrir o losango para obter a módulo A, que será composto de quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{2}{3}$.

Figura 51 - Módulo A



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

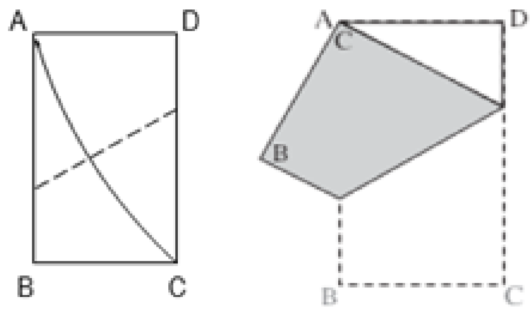
Agora teremos o passo a passo para a obtenção do módulo B.

Passo a Passo para o módulo B

O módulo B tem o mesmo princípio do módulo A, a única diferença será o lado pelo qual se inicia a dobra.

1º Passo: Com uma peça retangular ABCD, respeitando as proporções, leve o vértice C até o vértice A, de modo que o eixo de rotação será chamado EF.

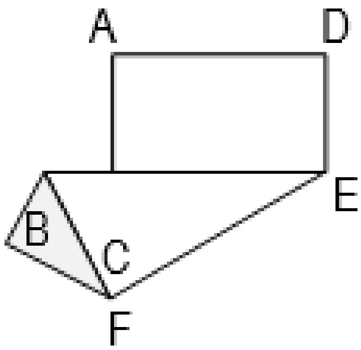
Figura 52 - Módulo B - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º Passo: Leve o vértice C ao ponto F.

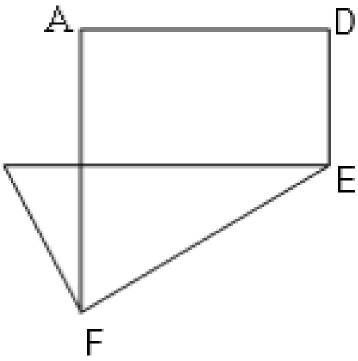
Figura 53 - Módulo B - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3º Passo: Na sequência leve o vértice B sobre AF.

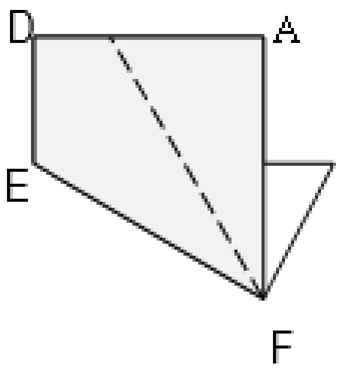
Figura 54 - Módulo B - Passo 3



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4º Passo: Virar a peça de forma que a parte de trás fique para frente.

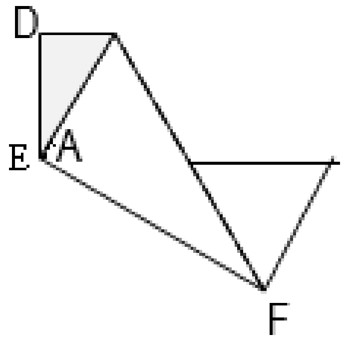
Figura 55 - Módulo B - Passo 4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5º Passo: Agora leve o vértice A ao ponto E.

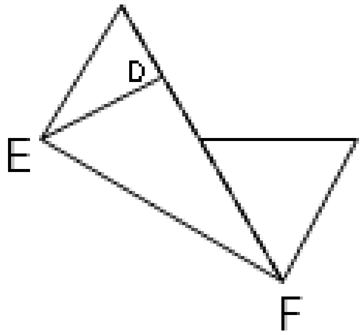
Figura 56 - Módulo B - Passo 5



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6º Passo: Pegue o vértice D e dobre pelo eixo do ponto E.

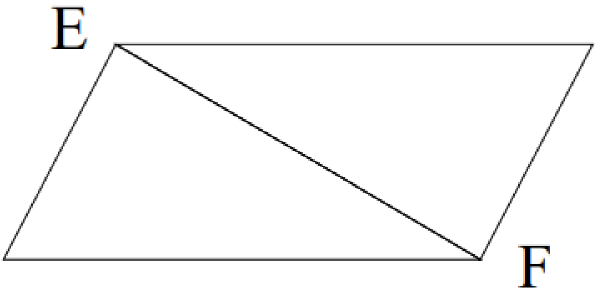
Figura 57 - Módulo B - Passo 6



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7º Passo: Desfaça a dobra pelo eixo EF, de forma que apareça um paralelogramo.

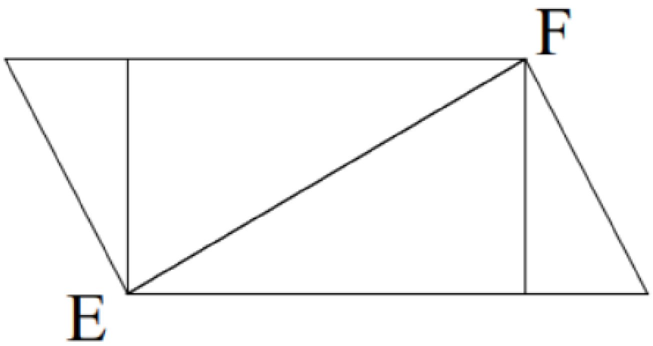
Figura 58 - Módulo B - Passo 7



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

8º Passo: Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para a frente.

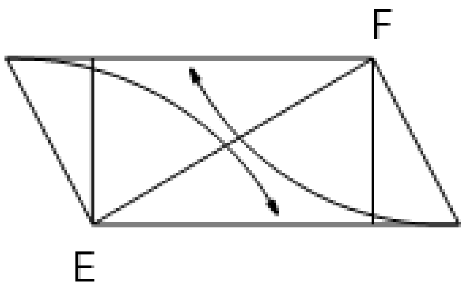
Figura 59 - Módulo B - Passo 8



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

9º Passo: Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.

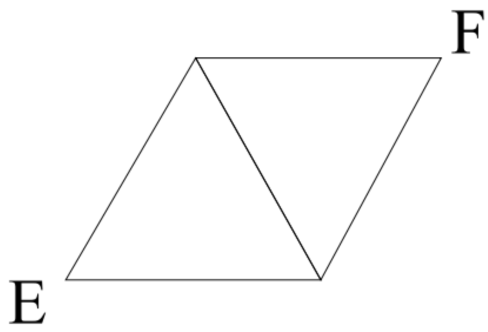
Figura 60 - Módulo B - Passo 9



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

10º Passo: Obtém-se o losango

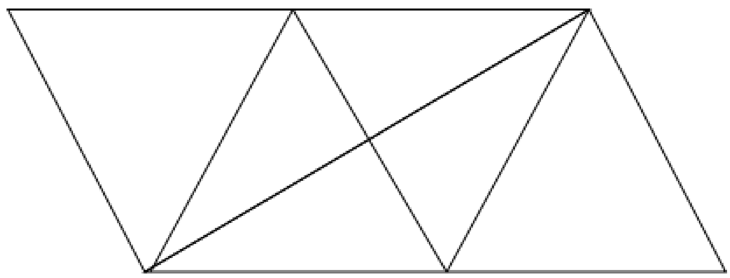
Figura 61 - Módulo B - Passo 10



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

11º Passo: Abrindo, tem-se o módulo B

Figura 62 - Módulo B



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

A partir destes módulos apresentados, A e B, é possível montar todos os Poliedros de faces triangulares.

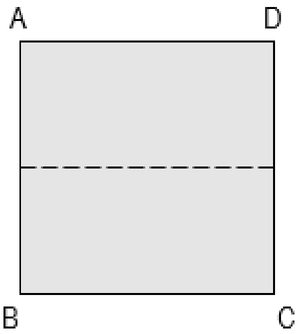
6.2.2 Módulos para faces quadrangulares

Sabemos que o único Poliedro de Platão que possui face quadrangular é o hexaedro regular, mais conhecido pelos estudantes como cubo.

A partir da apostila da Explorando Geometria com Origami (CAVACAMI; FURUYA, 2010), iremos explanar o passo a passo para a construção do hexaedro, destacando que tal construção só foi utilizado por Barreto (2013), no Capítulo 4.

1º Passo: Comece com um papel quadrado ABCD. Leve B e C aos vértices A e D respectivamente.

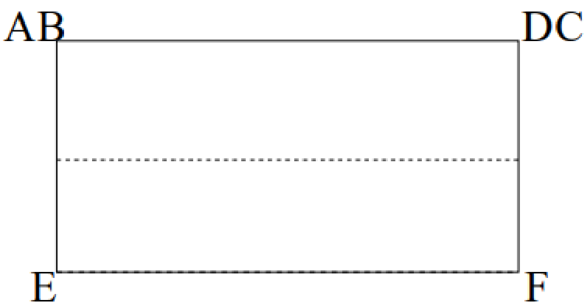
Figura 63 - Hexágono - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º Passo: Obtém-se o segmento EF.

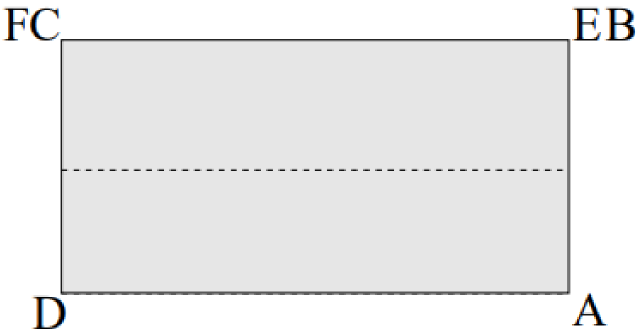
Figura 64 - Hexágono - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3º Passo: Dobre de modo que leve B a E e C a F,mantendo A e D no lugar. Gire 180°.

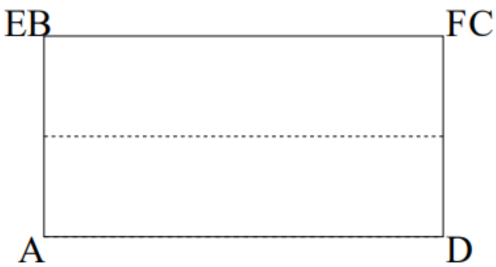
Figura 65 - Hexágono - Passo 3



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4º Passo: Vire o papel de modo que a parte opaca fique na frente. Dobre AD sobre EF, obtendo o vinco GH e volte.

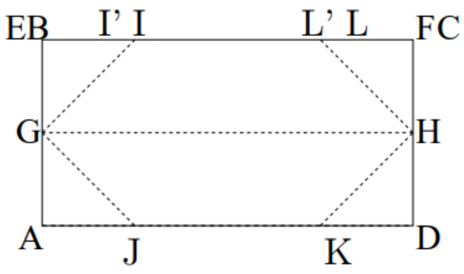
Figura 66 - Hexágono - Passo 4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5º Passo: Leve todos os vértices sobre GH, mantendo G e H fixos, obtendo os segmentos IL em EF, $I'L'$ em BC e JK em AD. A peça resultante forma um feixe de três trapézios em GH.

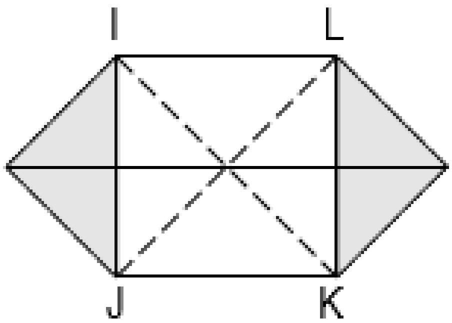
Figura 67 - Hexágono - Passo 5



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6º Passo: O trapézio $I'L'HG$ está atrás do trapézio ILHG e o quadrilátero IJKL é um quadrado. Dobre as diagonais e os lados IJ e KL do quadrado IJKL.

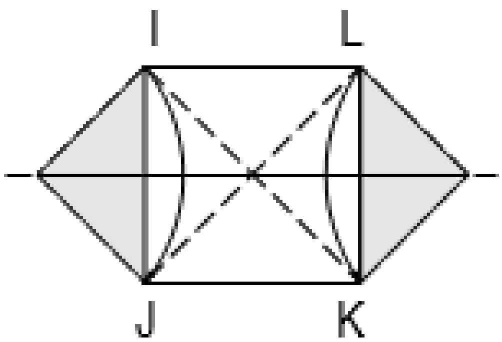
Figura 68 - Hexágono - Passo 6



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7º Passo: Leve JK sobre IL e ...

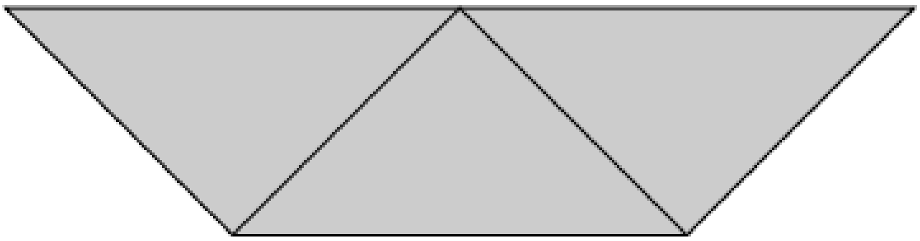
Figura 69 - Hexágono - Passo 7



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

8º Passo: ... e obtenha o trapézio triplo.

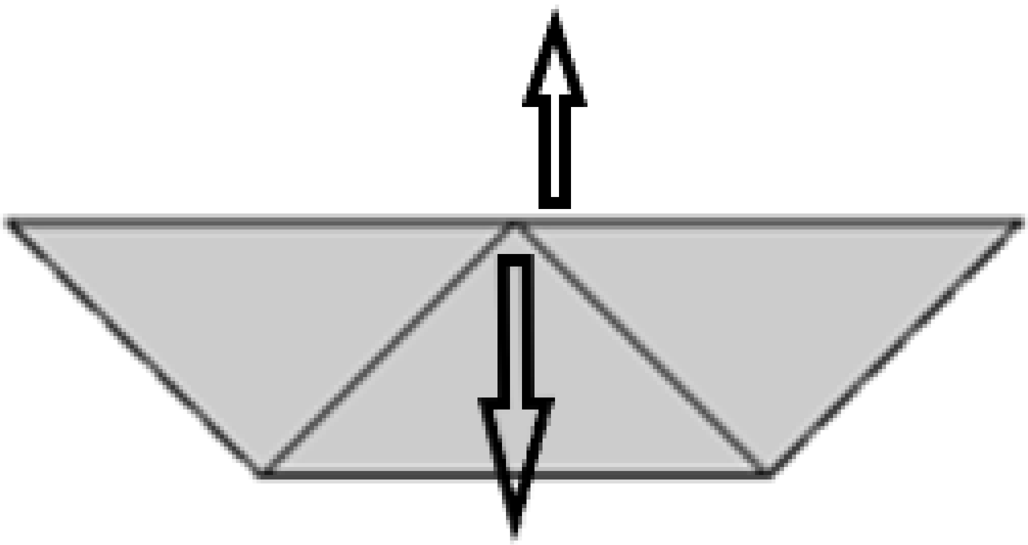
Figura 70 - Hexágono - Passo 8



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

9º Passo: Abra pelo centro da base maior, como na dobradura de um barco.

Figura 71 - Hexágono - Passo 9



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

10º Passo: Abrindo adequadamente e fazendo outra peça igual, juntando ambas, obteremos o hexaedro, conforme seção 6.3.2.

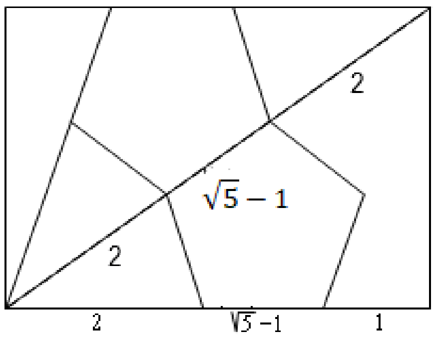
6.2.3 Módulos para faces pentagonais

Nosso último poliedro de Platão a ser construído é o dodecaedro, este que por sua vez possui faces pentagonais.

Vimos nas construções preliminares que se faz necessário conhecer a construção do copo para poder construir as faces pentagonais do dodecaedro. Entretanto, precisamos frisar que para que a construção do copo resulte em um polígono pentagonal regular é importante definirmos como construir o retângulo para fazer os módulos do pentágono utilizando o passo a passo da construção do copo, vejamos o passo a passo.

1º Passo: Nosso objetivo será encontrar um retângulo com lado igual a $\sqrt{5} + 2$ e diagonal $\sqrt{5} + 3$.

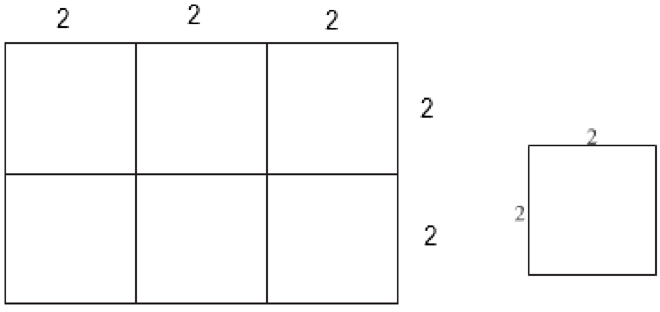
Figura 72 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 1



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

2º Passo: Comece com um retângulo com as medidas 6x4, e em seguida dobre em um quadrado de 2x2.

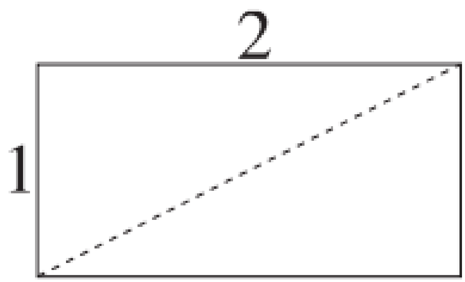
Figura 73 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 2



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

3º Passo: Depois dobre um retângulo 2x1 e a sua diagonal. Esta diagonal será correspondente a $\sqrt{5}$.

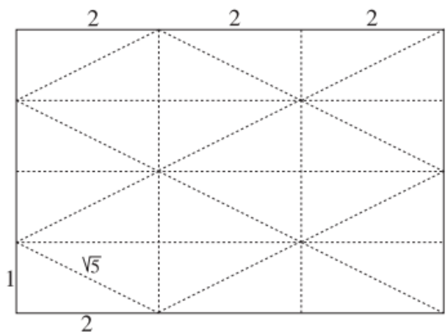
Figura 74 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 3



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

4º Passo: Abra o papel. Podemos verificar que cada segmento na horizontal equivale a 2, na vertical 1 e na diagonal $\sqrt{5}$.

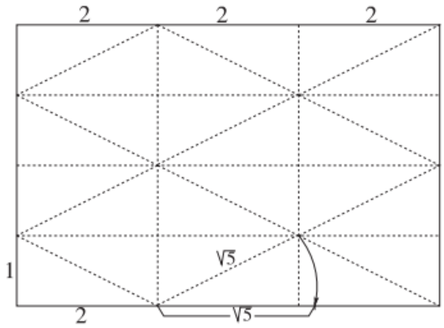
Figura 75 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 4



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

5º Passo: Dobre o segmento $\sqrt{5}$, sobre o lado e anote a figura.

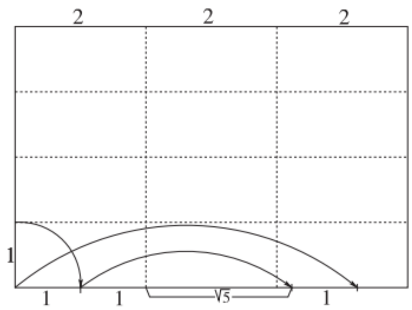
Figura 76 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 5



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

6º Passo: Dobre o segmento 1 sobre o lado que estamos construindo um dos lados do retângulo e transfira-o somando a $2 + \sqrt{5}$.

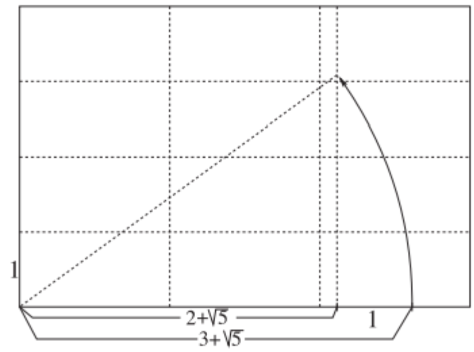
Figura 77 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 6



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

7º Passo: Encontramos os segmentos $2 + \sqrt{5}$. e $3 + \sqrt{5}$., ou seja, o lado e a diagonal do retângulo, dados suficientes para a construção o retângulo.

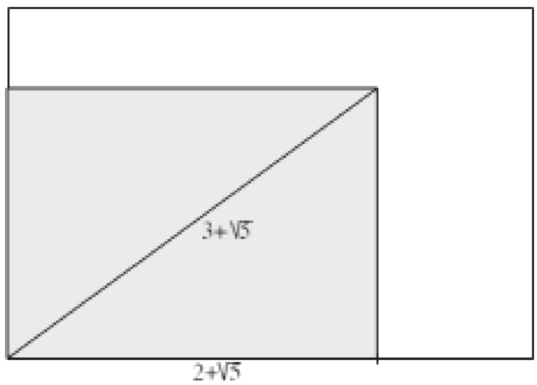
Figura 78 - Construção do retângulo para faces pentagonais - Passo 7



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

8º Passo: Temos assim um retângulo cujo lado mede $2 + \sqrt{5}$ .E a diagonal $3 + \sqrt{5}$. Basta agora seguirmos a construção do copo e obtermos as faces do dodecaedro.

Figura 79 - Retângulo para faces pentagonais



Fonte: CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

Agora que já passamos pela construção de todos os módulos, iremos passar para a montagem dos Poliedros Regulares de Platão.

6.3 MONTAGEM DOS POLIEDROS

6.3.1 Poliedros de faces triangulares

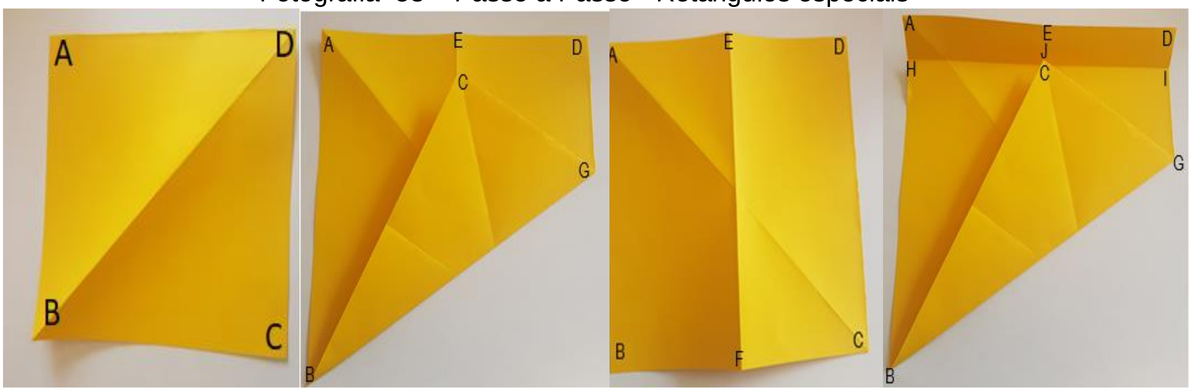
Para montarmos os poliedros de faces triangulares precisaremos de retângulos especiais vistos na seção 6.1 deste trabalho.

Assim as fotografias 52 a 55, mostram o passo a passo da construção destes retângulos, iniciando a partir de uma folha tamanho A4 e obtendo um quadrado, bem como na fotografia 56 a divisão do papel A4 em 12 retângulos especiais, e na sequência seguindo o passo a passo indicado na seção 6.1.

Fotografia 52 - Transformando papel tamanho A4 em um quadrado

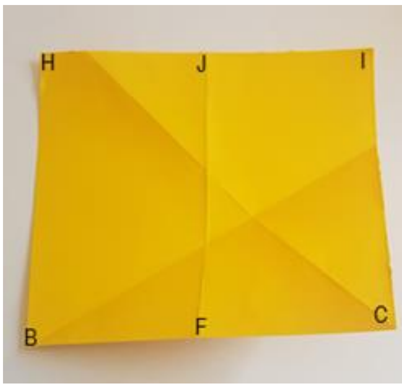
Fonte: A autora

Fotografia 53 – Passo a Passo - Retângulos especiais



Fotografia 54 - Retângulo de proporção

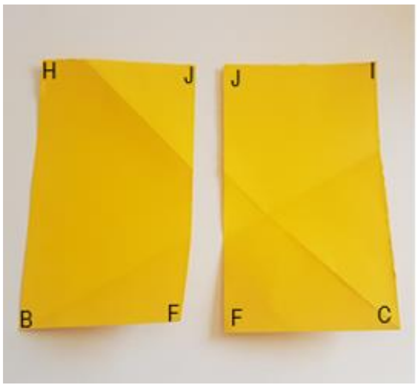
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



Fonte: A autora

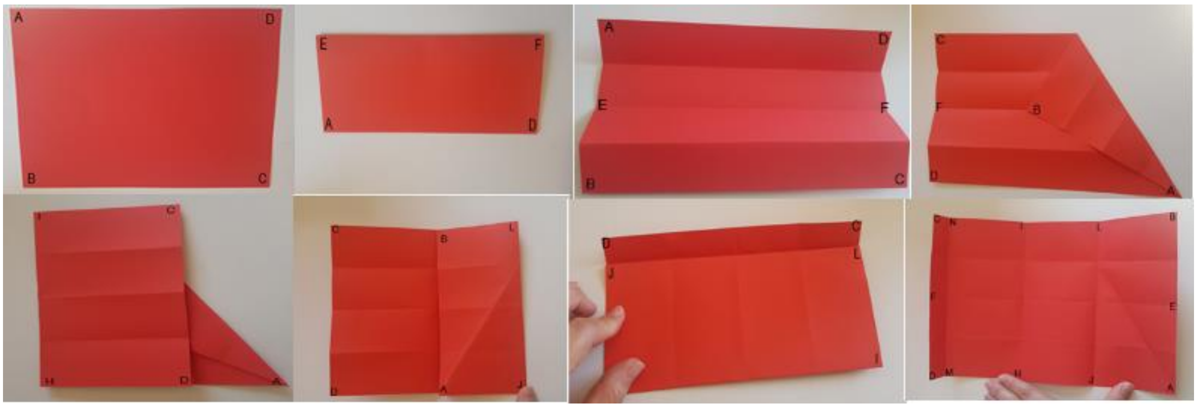
Fotografia 55 - Retângulo de proporção

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



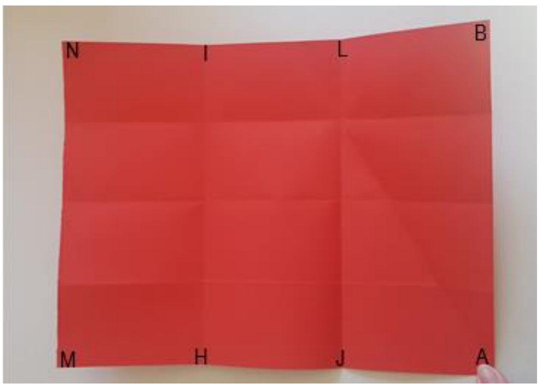
Fonte: A autora

Fotografia 56 - Dividindo o A4



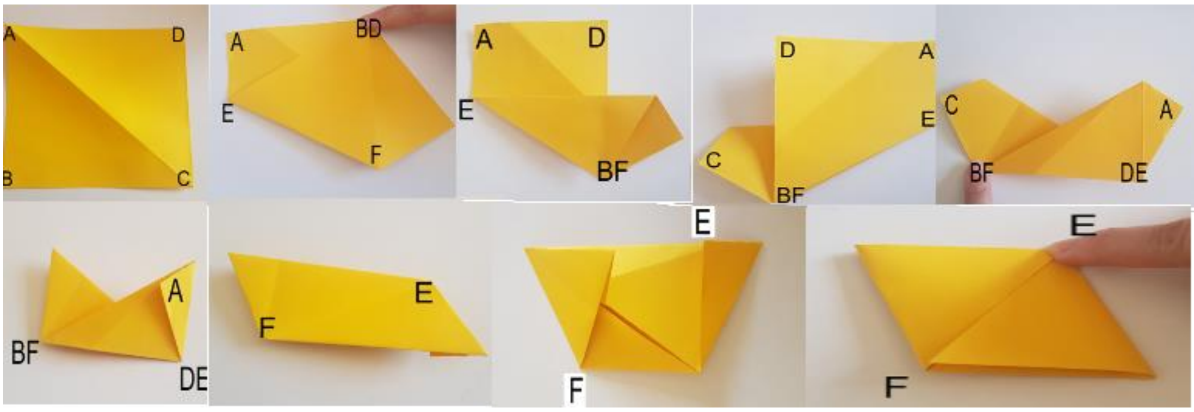
Fonte: A autora

Fotografia 57 - 12 retângulos especiais



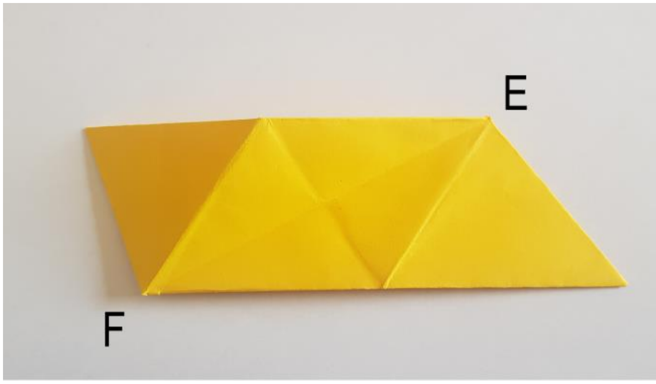
Fonte: A autora

Fotografia 58 – Passo a Passo - Módulo A



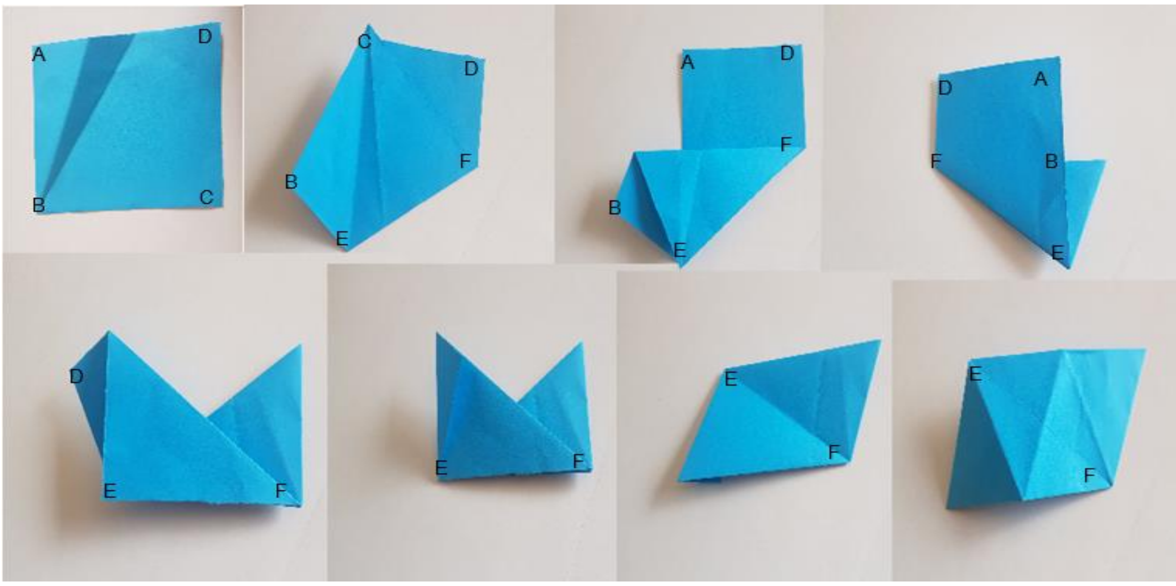
Fonte: A autora

Fotografia 59 - Módulo A



Fonte: A autora

Fotografia 60 - Módulo B



Fonte: A autora

Iniciaremos a montagem dos Poliedros de faces triangulares, visto que com os módulos A e B, produzimos faces com a forma de triângulos equiláteros, e assim construiremos os três poliedros de Platão, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro.

Passaremos agora ao passo a passo da montagem destes sólidos.

Para o tetraedro serão necessários apenas dois módulos, sendo um de A e outro de B.

Fotografia 61 - Módulos A e B

Fonte: A autora.

Verificamos que em cada módulo temos 4 triângulos equiláteros, e é fácil observar que suas pontas não possuem cortes, os cortes tem aberturas para encaixarmos os triângulos das pontas.

Logo encaixaremos o módulo A em um dos cortes do módulo B, ou vice-versa.

Fotografia 62 - Módulos A e B unidos

Fonte: A autora.

Em seguida dobramos encaixando todas as pontas, concluindo assim o tetraedro.

Fotografia 63 - Tetraedro

Fonte: A autora.

Para montarmos o octaedro necessitaremos de quatro módulos, de forma que podemos utilizar as seguintes combinações dos módulos: AAAA, ou BBBB, ou AABB.

Como sugestão usar duas cores distintas, pois assim teremos o poliedro bicolor.

Iniciamos com dois módulos A (ou B), conforme a combinação escolhida, de cores distintas, neste caso estamos utilizando dois módulos AA e dois módulos BB.

Fotografia 64 - Módulos de unidades A e B

Fonte: A autora.

A seguir encaixaremos a peça conforme a fotografia 65.

Fotografia 65 - Módulos encaixados

Fonte: A autora.

Obteremos duas pirâmides de bases quadradas com abas triangulares em lados opostos da base.

Fotografia 66 - Módulos encaixados

Fonte: A autora.

Por seguinte encaixamos as duas pirâmides para finalizar o octaedro.

Fotografia 67 - Octaedro

Fonte: A autora.

E por fim, para montarmos o icosaedro, como sugestão fazer de forma bicolor, serão necessários 5 módulos A, todos da mesma cor e 5 módulos B, todos da mesma cor, entretanto cor diversa dos módulos de A.

Damos início com duas cores distintas, A e B, encaixando as duas, e repetiremos o processo encaixando as peças A em B e depois B em A, e assim sucessivamente, como sugestão a fim de facilitar a montagem pode ser colocada fita adesiva nos encaixes na parte interna.

Após esse processo, teremos todas as peças encaixadas teremos uma peça com um formato cilíndrico.

Com a faixa cilíndrica pronta, devemos nos concentrar nas pontas triangulares, encaixando as, até fechar o lado com 5 faces.

Fotografia 68 - Faixa cilíndrica

Fonte: A autora.

Repetimos o processo no outro lado e finalizamos o nosso icosaedro.

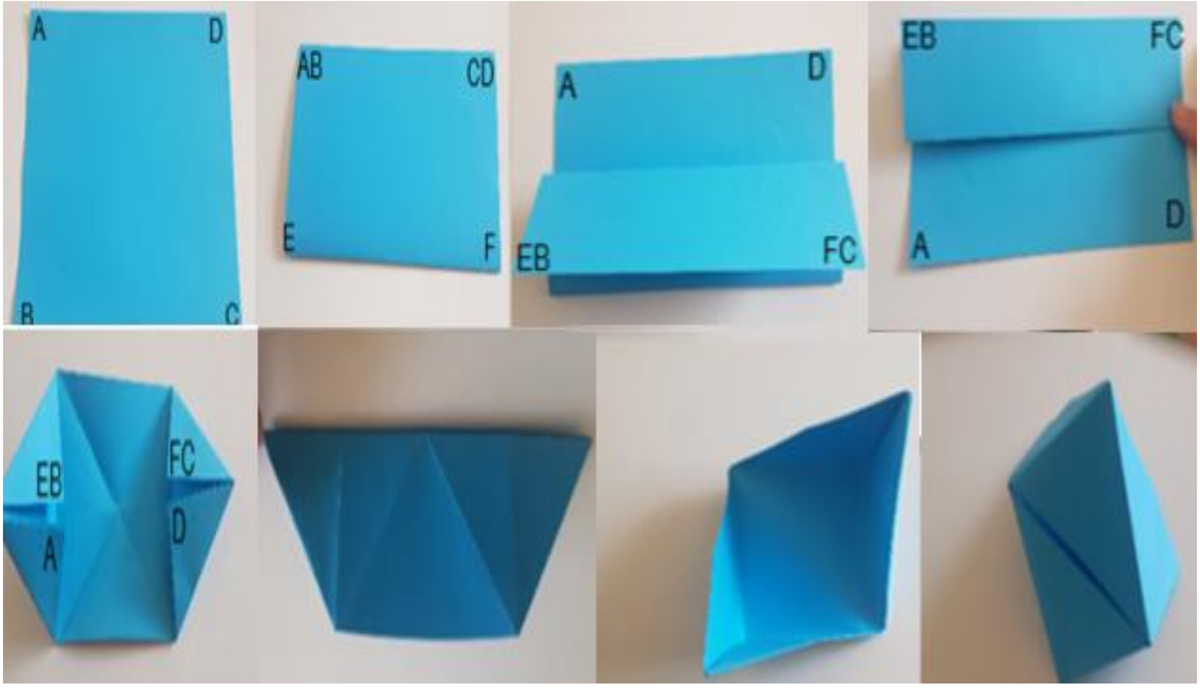
Fotografia 69 - Icosaedro

Fonte: A autora.

6.3.2 Montagem do Hexaedro

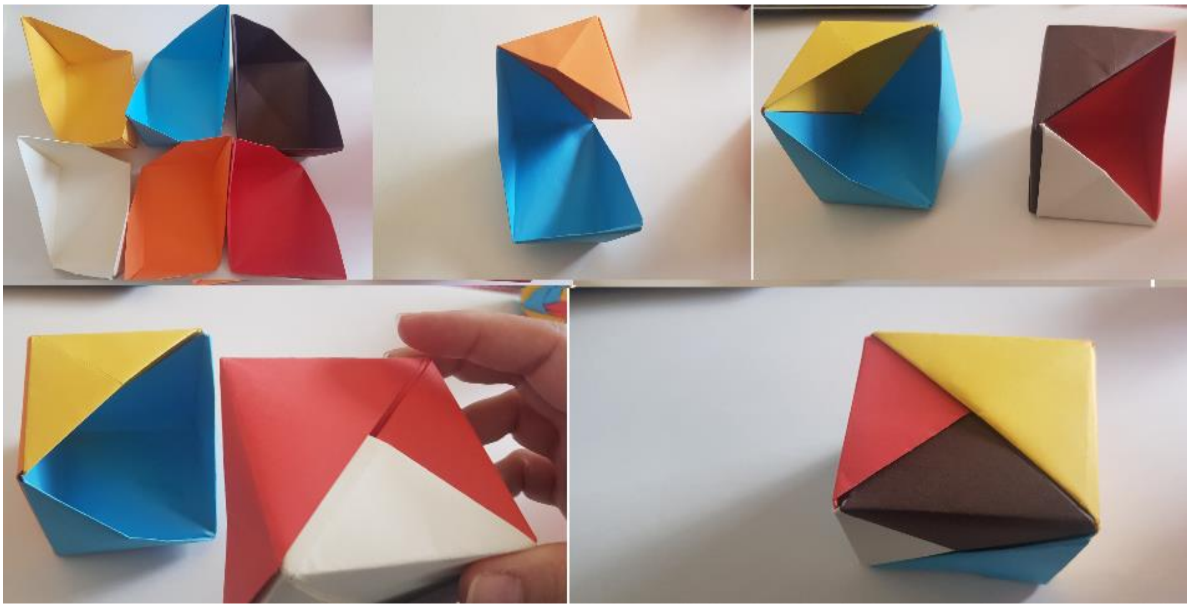
Para montar este Poliedro, basta montar seis módulos dos apresentados de faces quadrangulares, e encaixar três módulos, repetir o processo, obtendo duas peças, deste modo bastas juntando ambas as peças, obteremos o hexaedro.

Fotografia 70 - Módulo face quadrangular



Fonte: A autora.

Fotografia 71 - Encaixando os módulos



Fonte: A autora.

Fotografia 72 - Hexaedro

Fonte: A autora.

6.3.3 Retângulo ideal sem uso de régua graduada para os módulos de faces pentagonais regulares.

Antes de iniciarmos a construção do Dodecaedro, precisamos lembrar que iremos utilizar o passo a passo da construção do copo, entretanto devemos ter o retângulo com as medidas ideias, haja vista que escolher o tamanho do retângulo aleatoriamente, obteremos a face pentagonal simétrica, entretanto não regular.

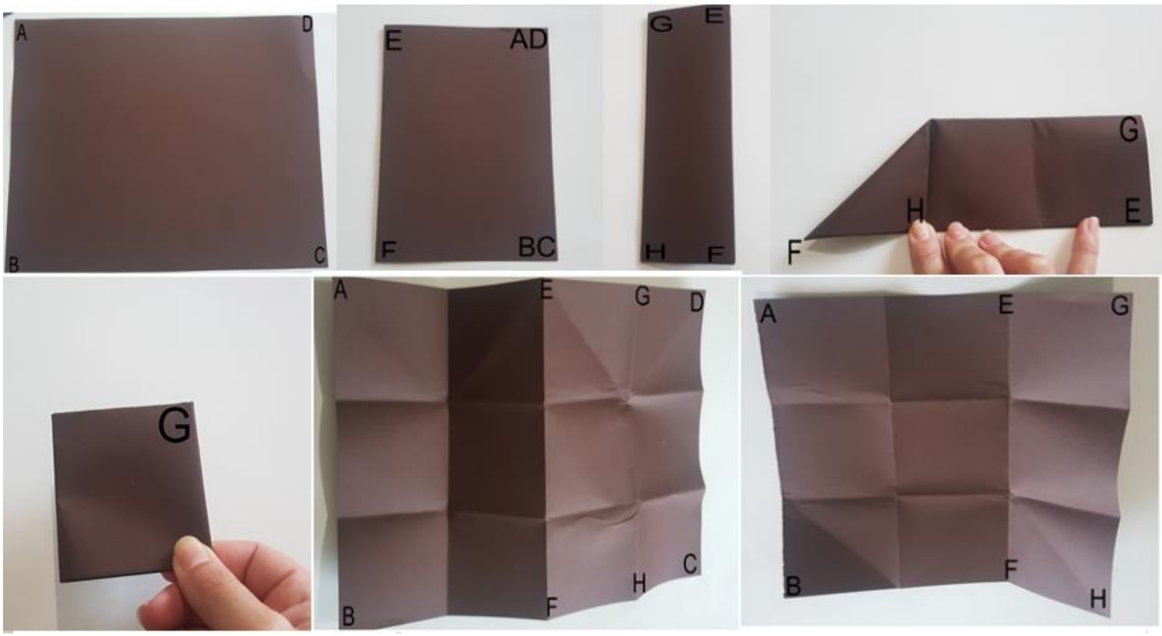
Assim, como temos por objetivo que o estudante construa as peças aplicando os conceitos nas construções, mostraremos como obter o retângulo desejado conforme passo a passo disposto na seção 6.2.3.

Destaca-se que no passo a passo das faces pentagonais é indicado iniciar com um retângulo de tamanho 6x4 para chegar ao retângulo ideal para montar os módulos de faces pentagonais regulares a partir do processo de construção do copo.

Entretanto para que o estudante não utilize a régua graduada, observamos que ao retângulo 6x4 será dividido em 6 quadrados, desta forma mostraremos um passo a passo para obtermos a medida proporcional a 6x4 utilizando a folha de tamanho A4, e a partir daí seguir com a construção indicada na seção 6.2.3. Vejamos.

1º Passo: A partir de uma folha a A4, com a parte maior na horizontal, dobraremos ela ao meio, e depois repetiremos o processo, na sequência dobre um quadrado, repita o processo dobrando outro quadrado, agora abra a folha, corte a folha no segmento *GH.*

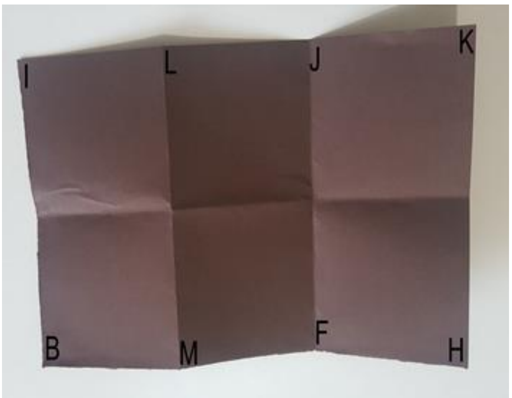
Fotografia 73 - Obtendo retângulo proporcional a 6x4



Fonte: A autora.

2º Passo: Corte o retângulo superior de lado *AG*, obtendo o retângulo da fotografia 74.

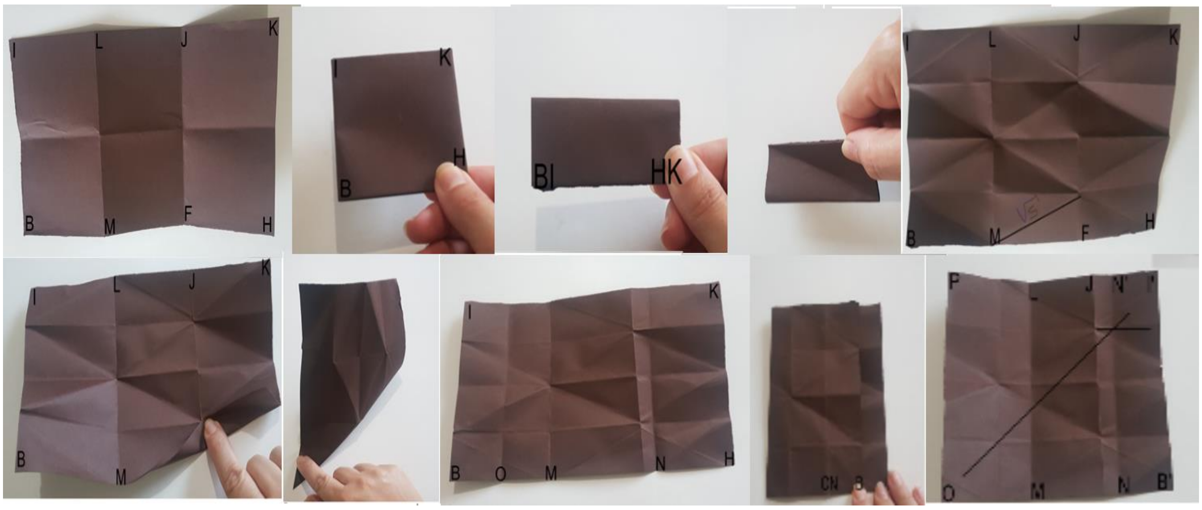
Fotografia 74 - Retângulo proporcional a 6x4



Fonte: A autora.

Na fotografia 74 temos o retângulo proporcional ao retângulo 6x4, assim podemos passar ao passo a passo proposto na seção 6.2.3, conforme as fotografias 75 e 76.

Fotografia 75 - Passo a passo



Fonte: A autora.

Fotografia 76 - Retângulo ideal para os módulos de faces pentagonais

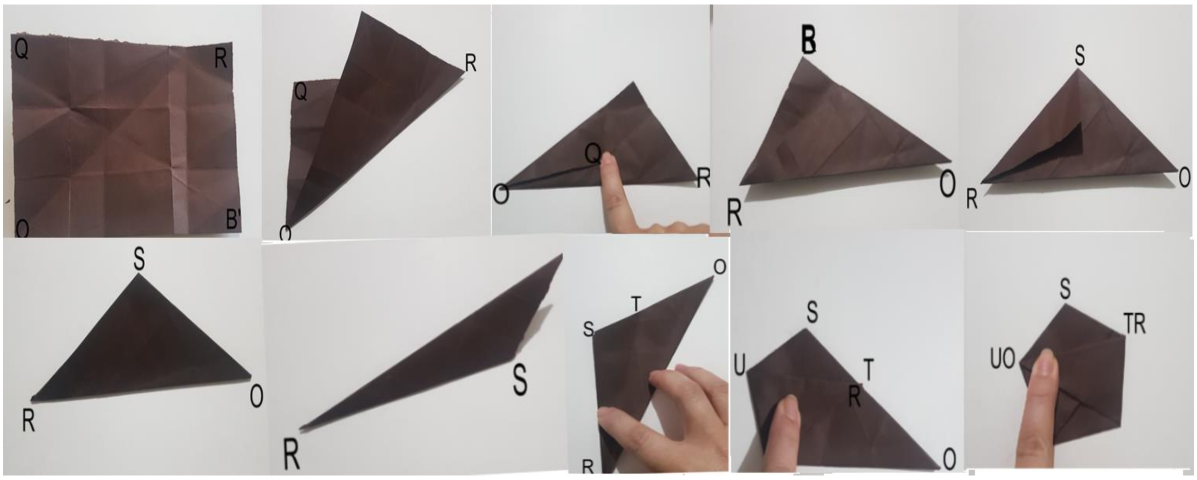
Fonte: A autora.

Agora em posse do retângulo de tamanho ideal para a construção das faces pentagonais regulares, passaremos na próxima seção a montagem dos módulos e do Dodecaedro.

6.3.4 Montagem do Dodecaedro.

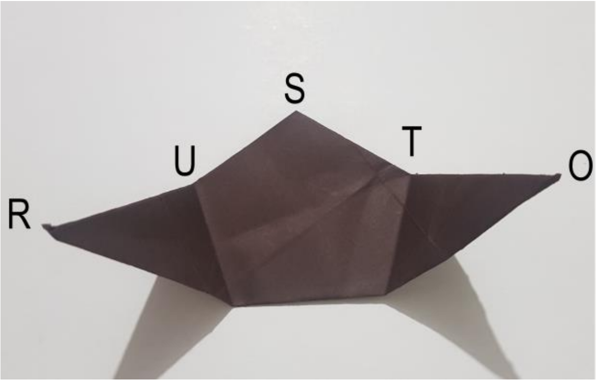
Para montarmos o Dodecaedro devemos construir dozes módulos seguindo o passo a passo do copo (fotografia 77), iniciando com o retângulo do passo a passo da fotografia 76.

Fotografia 77 – Passo a passo do módulo de face pentagonal



Fonte: A autora.

Fotografia 78 - Módulo de face pentagonal regular



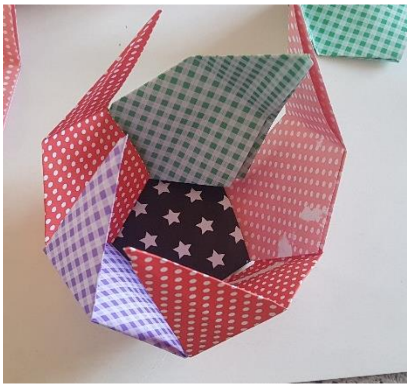
Fonte: A autora.

Fotografia 79 - Módulos faces pentagonais

Fonte: A autora.

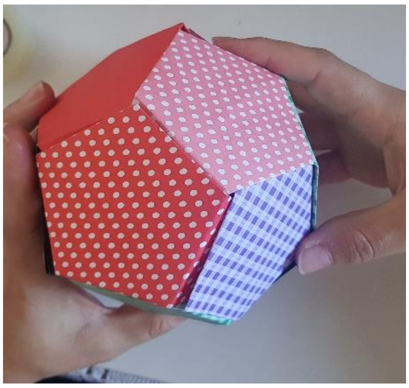
Após só encaixar os módulos e já obteremos nosso Dodecaedro.

Fotografia 80 - Encaixando os módulos



Fonte: A autora.

Fotografia 81 - Dodecaedro



Fonte: A autora.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou apresentar os Origamis modulares como um recurso didático para trabalhar Geometria, principalmente no tocante aos Poliedros de Platão, visto que no Ensino Médio por vezes a Geometria tem sido ensinada de forma mecanizada, fazendo com que o estudante apenas memorize fórmulas e não aprenda seus conceitos de forma significativa.

Reforça-se que a Geometria auxilia no desenvolvimento da percepção espacial, de maneira que a inserção dos Origamis só contribui de forma positiva, pois acarreta muitos benefícios. Entre estes benefícios podemos citar concentração, interação, pensamento logico-dedutivo.

Entretanto é importante mencionar que o docente deve estar atento ao processo como mediador para que a atividade não se torne somente lúdica, perdendo o foco com a Matemática, por isso é necessário a participação e o envolvimento de todos na atividade.

É necessário frisar que atualmente os profissionais da educação têm se preocupado em criar estratégias para cativar os alunos e motivá-los para a aprendizagem.

Diante disso o Origami vem de encontro como uma ferramenta de baixo custo, e que desperta o interesse e curiosidade em aprender.

Ao analisarmos trabalhos pertinentes ao tema objeto desta pesquisa, verificamos que ainda existe pouca produção quanto ao tema, visto que, de todas as obras analisadas do PNLD 2018 para o Ensino Médio, apenas duas abordam o uso de Origami no estudo dos Poliedros, de modo que não aprofundam as propriedades matemáticas existentes no Origami, bem como não sugerem suas construções aplicando os conceitos geométricos.

Do cotejo dos trabalhos de dissertações analisados, verificamos que possui uma abordagem sobre Origamis no ensino da Geometria Plana e Espacial, e até citamos como os autores têm abordado o tema, entretanto ainda são poucas obras que abordam o uso de Origami Modular no estudo dos Poliedros de Platão.

Portanto, diante de todo o exposto, foi possível atingir os objetivos pretendidos de maneira satisfatória, visto que o objetivo geral deste trabalho consistiu em estudar a aplicação do Origami no ensino da Geometria, principalmente no tocante a introdução dos Poliedros de Platão, destacando as propriedades Matemáticas existentes em cada dobra realizada no papel, propondo ao estudante que é possível realizar as construções e obter proporções ideais do tamanho do papel, para construir os módulos de Origami sem utilizar régua, somente com o uso de construções Geométricas, a fim de motivar e auxiliar o desenvolvimento cognitivo, possibilitando uma melhor compreensão da Matemática através da manipulação de pedaços de papel, visto que tais conceitos de Geometria são encarados como difíceis, causando temores nos estudantes, neste sentido a aplicação dos Origamis Modulares no estudo dos Poliedros de Platão é um recurso didático acessível e com uma gama de possibilidades a ser explorada dentro da matemática.

Para trabalhos futuros sugerimos a aplicação da atividade proposta em sala de aula conforme descrita no apêndice.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. R. **A arte do origami: dobrando e desdobrando talentos**. In: IV Semana da Matemática - UNIFEMM. [S.l.: s.n.], 2006.

BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**, volume 3, 2 ed., São Paulo: Leya, 2016.

BARRETO, C. A. **A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na educação básica**. 2013. 85f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Sergipe. 2013. Disponível em:< http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFS-2_cc52673006bf64339f9a08cfb80807bb>. Acesso em 01/05/2020.

BOYER, C. B., 1906. **História da Matemática: tradução Elza f. Gomide**. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)**. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2000. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>acesso em julho de 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 30 de abril de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. PNLD 2018: **apresentação – guia de livros didáticos – ensino médio/ Ministério da Educação** – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. 39 p.

BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio**. 2007. 200 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91082>. Acesso em 01/05/2020.

CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. 2010. Disponível em:< http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em 20/02/2020

CHAVANTES, E.; PRESTES, D. **Quadrante - Matemática** - Ensino Médio - 2º Ano, 1º Ed., São Paulo: SM, 2018. Disponível em:< http://simec.mec.gov.br/livros/leitorlivros/index.php?codcolecao=0070P18023>. Acesso em 001/05/2020.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

DIAS, M. C. de O. **O uso do origami como recurso didático-metodológico para o ensino de geometria**. 2015. 59 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFJF_949c6f8b40fcbb30c7f024f44996c89b>. Acesso em 01/05/2020.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria espacial posição e métrica, Vol.10**, 6ª Ed,7ª reimpressão, São Paulo Ed. Atual, 2005.

FERREIRA, F. E. **Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami. 2013**. 94 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013. Disponível em:< http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNSP_09d496cf106d84f559a925642e8c0062>. Acesso em 01/05/2020.

FRANÇA, T. da S.; MARTINS, H. de P.; ALMEIDA, I. A. de. O **Aprendizado da Matemática com Origami**. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Exposicoes/IsabellyAmazonas/2OAPRENDI...pdf>

GLOWECKI, K. C. B. D. **O uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos**. 2015. 87 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Disponível em:< http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7913>. Acesso em 01/05/2020.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, M. **Pequena História do Origami**. Disponível em: <https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm> acesso em 26/04/2020.

HATORI K. **História do Origami**, disponível em: <https://origami.ousaan.com/library/historye.html> acesso em 26/04/2020.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2** / – 9. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

IMENES, L.M. **Geometria das dobraduras** (Coleção Vivendo a Matemática). São Paulo: Scipione, 1996.

KANEGAE, M. **Breve Histórico do Origami no Brasil**, disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm> acesso em 26/04/2020

LEONARDO, F.M. **Conexões com a matemática**. Editora Moderna; — 3. ed. — São Paulo: Moderna, 2016.

LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar geometria?** In: A educação Matemática em revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p.3-13.

LUCAS, E dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami.** 2013. 82 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=2>. Acesso em: 01/05/2020.

MACHADO, N. J. **Atividades de Geometria**. Coleção Matemática aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual:1996.

MAGEE, B. **História da filosofia**. [S.l.]: Edições Loyola, 1999. Disponível em https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=lang_pt&id=g5wTuWeKrfoC&oi=fnd&pg=PA5&dq=MAGEE,+B.+Hist%C3%B3ria+da+filosofia&ots=nUqF_blKwu&sig=4gpDepfXu44Ukf8er0gbVEdPH4A#v=onepage&q&f=false

MIALICH, F, R. **Poliedros e Teorema de Euler**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94273/mialich_fr_me_sjrp.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MICHEL, D. **Origamis Matemáticos – Dobragens de papel para fazer figuras geométricas**. Editora Replicação, Ltda,1997.

MILANI, S. M. **Fractais, pipas tetraédricas e origami: uma proposta metodológica para o ensino da geometria**. 2016. 126f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) – Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016. Disponível em:< https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=1>. Acesso em 01/05/2020.

MONTEIRO, L. C. N. **História de uma Geometria Axiomática**. 2008. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_de_uma_Geometria_Axiomatica.pdf

OLIVEIRA, F. F. de. **Origami: Matemática e sentimento**. Disponível em:

<https://docplayer.com.br/16171874-Origami-matematica-e-sentimento.html>. Acesso em: 20/04/20120.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**, 3 ed., 2 ano. São Paulo: Moderna, 2015.

ROBLES, M. **Origami - a divertida arte das dobraduras de papel**. [S.l.]: Marco Zero Editora, 2010.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; JÚNIOR, S. G. **A geometria do origami: atividades de ensino através de dobraduras**. Universitária UFPB, 2003. ISBN 9788523703837. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ipl5AAAACAAJ>. Acesso em 28/04/2020.

SILVA, J. M. da.; MASSARANDUBA, D. M. da S. **Origami: a Geometria das Dobraduras.** Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID7800_10092018133325.pdf. >.Acesso em 20/04/2020.

SOUZA, J. R. de.; GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática, 2º ano**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016.

SMOLE, K S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 2**. 1 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

TRIDAPALLI, M. P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular.** 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. doi:10.11606/D.55.2017.tde-12042017-153833. Acesso em: 20 de abril de 2020.

UENO, T.R. **Do origami tradicional ao origami arquitetônico: uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo.** 2003. Dissertação (Mestrado em desenho Industrial) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2003.

VICTÓRIO, J. R. S. **Abordagens do origami e dobraduras no ensino de geometria.** 2018. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em:< https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?titulo=Origami&pag=1>. Acesso em 01/05/2020.

WILLIAMS, B. A. O. **Coleção grandes filósofos: Platão**. [S.l.]: UNESP, 2000. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=w7AoYGx0yKIC&lpg=PA7&ots=PMCSfwoixf&dq=Cole%C3%A7%C3%A3o%20grandes%20fil%C3%B3sofos%3A%20Plat%C3%A3o&lr=lang_pt&hl=pt-BR&pg=PA7#v=onepage&q&f=false>.Acesso em 26/04/2020.

APÊNDICE - PROPOSTA DE ATIVIDADE

Ao introduzir os Poliedros de Platão no Ensino Médio, após apresentar as definições e conceitos, propomos realizar com os estudantes a construção dos Poliedros com Origami, sem a utilização de régua graduada.

Título

Origamis e os Sólidos de Platão.

Público

Segundo ano do Ensino Médio.

Duração

4 horas

Objetivos

Produzir uma peça, individualmente ou em grupo, após a leitura das instruções;

Identificar propriedades geométricas nos passos de confecção dos Poliedros;

Reconhecer que é possível realizar as construções sem o uso de régua graduada;

Estimular o uso de vocabulário matemático.

Identificar os elementos de um Poliedro, tais como vértices, arestas e faces;

Aplicar a Relação de Euler;

Material

Folhas de cores diversas para realizar dobraduras, de preferência papel formato A4 com 120 gramas.

Roteiro com as instruções e questões.

Origamis dos Poliedros de Platão.

Metodologia

Distribuir os materiais, como sugestão dividir a turma em equipes, iniciando pelos módulos de faces triangulares, podendo entregar a equipe o passo a passo do módulo do tetraedro e entregar um icosaedro pronto para que a partir das informações passadas eles construam o icosaedro.

Após construir os demais módulos para o hexaedro e para o dodecaedro.

Na sequência debater com os grupos sobre quais propriedades matemáticas eles encontraram nas dobraduras.

Questionar eles se é importante as proporções do papel.

Apresentar os módulos com suas devidas propriedades matemáticas.

Solicitar que eles respondam as questões que lhes foram entregues.

1) O que você entendeu que é um Poliedro?
2) Quais as três condições que ele deve ter para ser um Poliedro de Platão?
3) Quais são os elementos dos Poliedros?
4) Nos Poliedros de Platão sempre vale a Relação de Euler? Por que?
5) Você gostou de construir os Poliedros de Platão com Origami? Por que?
6) Descreva uma propriedade matemática que você encontrou ao construir os Poliedros com Origami.

Avaliação

A partir das respostas no questionário será possível realizar uma verificação de quais pontos necessitam ser reforçados para a compreensão do conteúdo.

Espera se que o estudandante após os debates perceba todas as relações matemáticas envolvidas nas construções, bem como reconhecer a importância da proporção correta para construir as faces regulares, visto que se não utilizar as proporções ideiais não irá conseguir construir o módulo de cada face, ou pode até construir entretanto a face não será regular prejuducando a construção do Poliedro desejado.

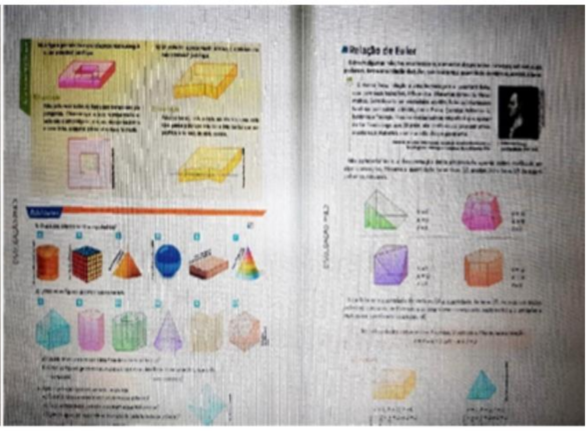
ANEXO A – FRAGMENTO DO LIVRO CONTEXTO & APLICAÇÕES

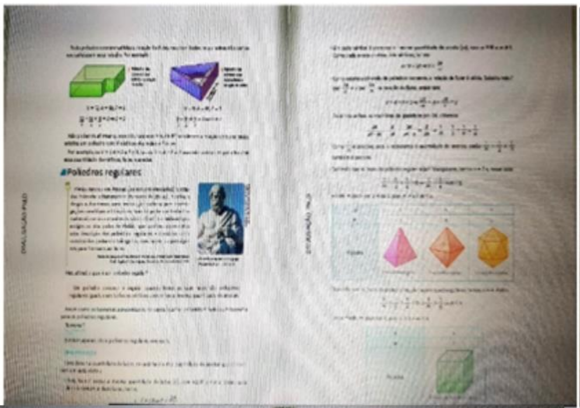
Fotografia 82 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão

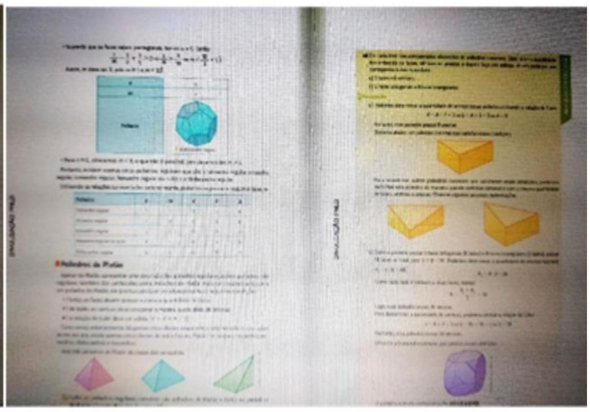
Fonte: DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

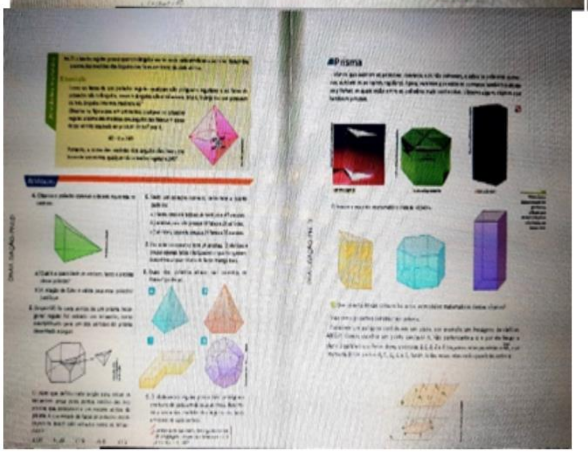
ANEXO B – FRAGMENTO DO LIVRO QUADRANTE MATEMÁTICA

Fotografia 83 Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão





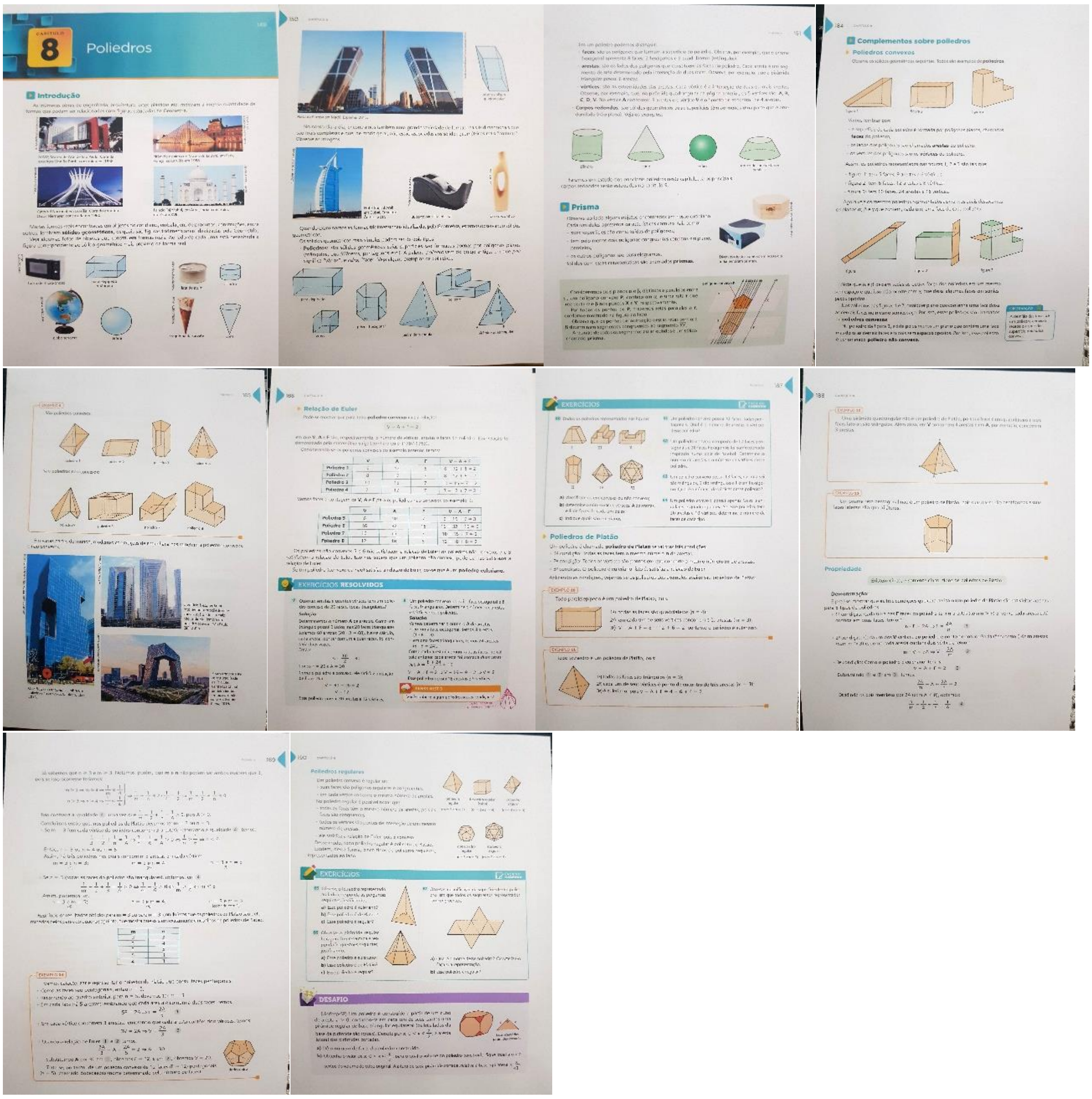




Fonte: CHAVANTES, E.; PRESTES, D. **Quadrante - Matemática -** Ensino Médio - 2º Ano, 1º Ed., São Paulo: SM, 2018. Disponível em:< http://simec.mec.gov.br/livros/leitorlivros/index.php?codcolecao=0070P18023>. Acesso em 001/05/2020.

ANEXO C – FRAGMENTO DO LIVRO MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES

Fotografia 84 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão



Fonte: IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2** / – 9. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

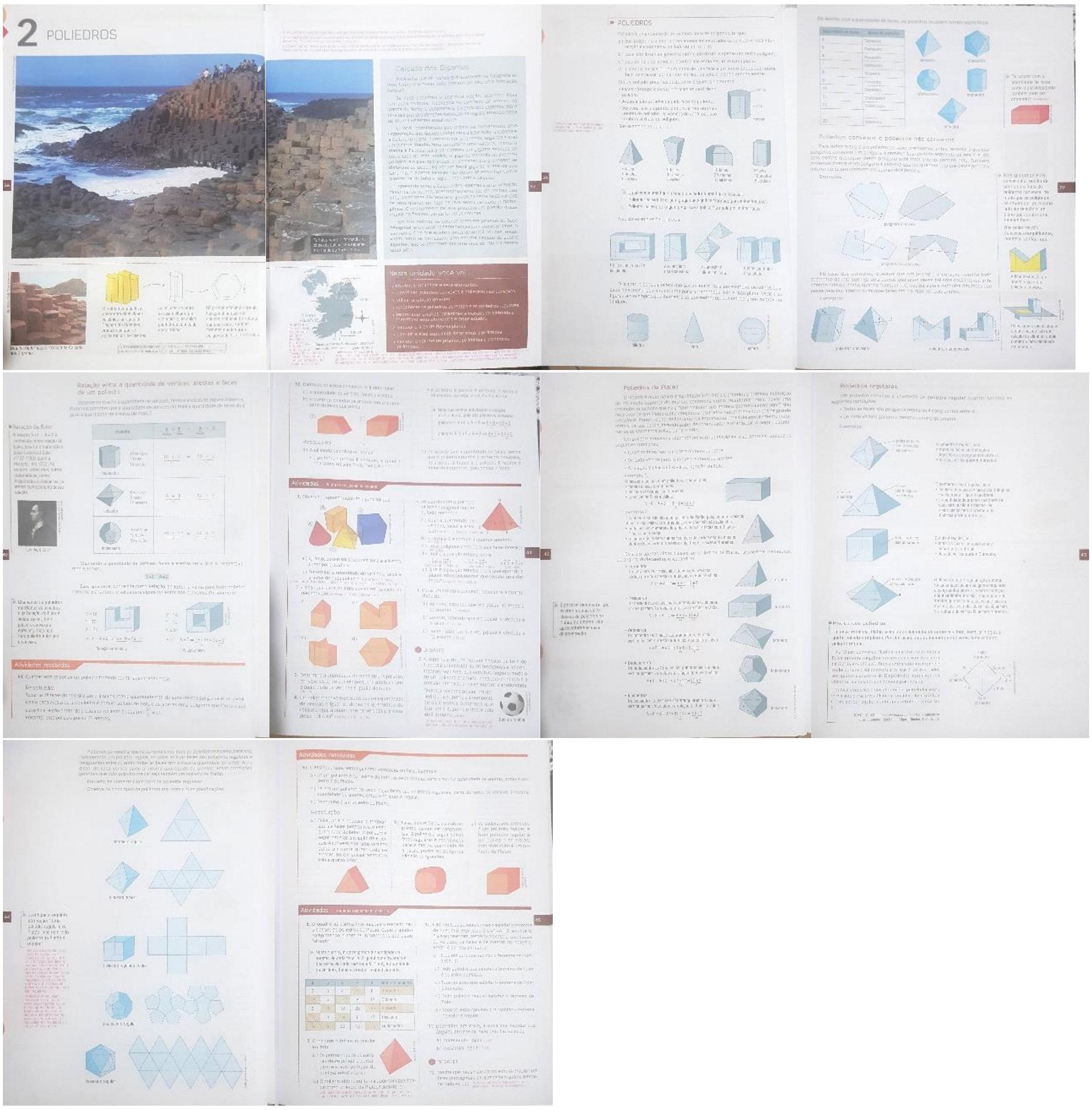
ANEXO D – FRAGMENTOS DO LIVRO MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO

Fotografia 85 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão

Fonte: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 2**. 1 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

ANEXO E – FRAGMENTO DO LIVRO MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA

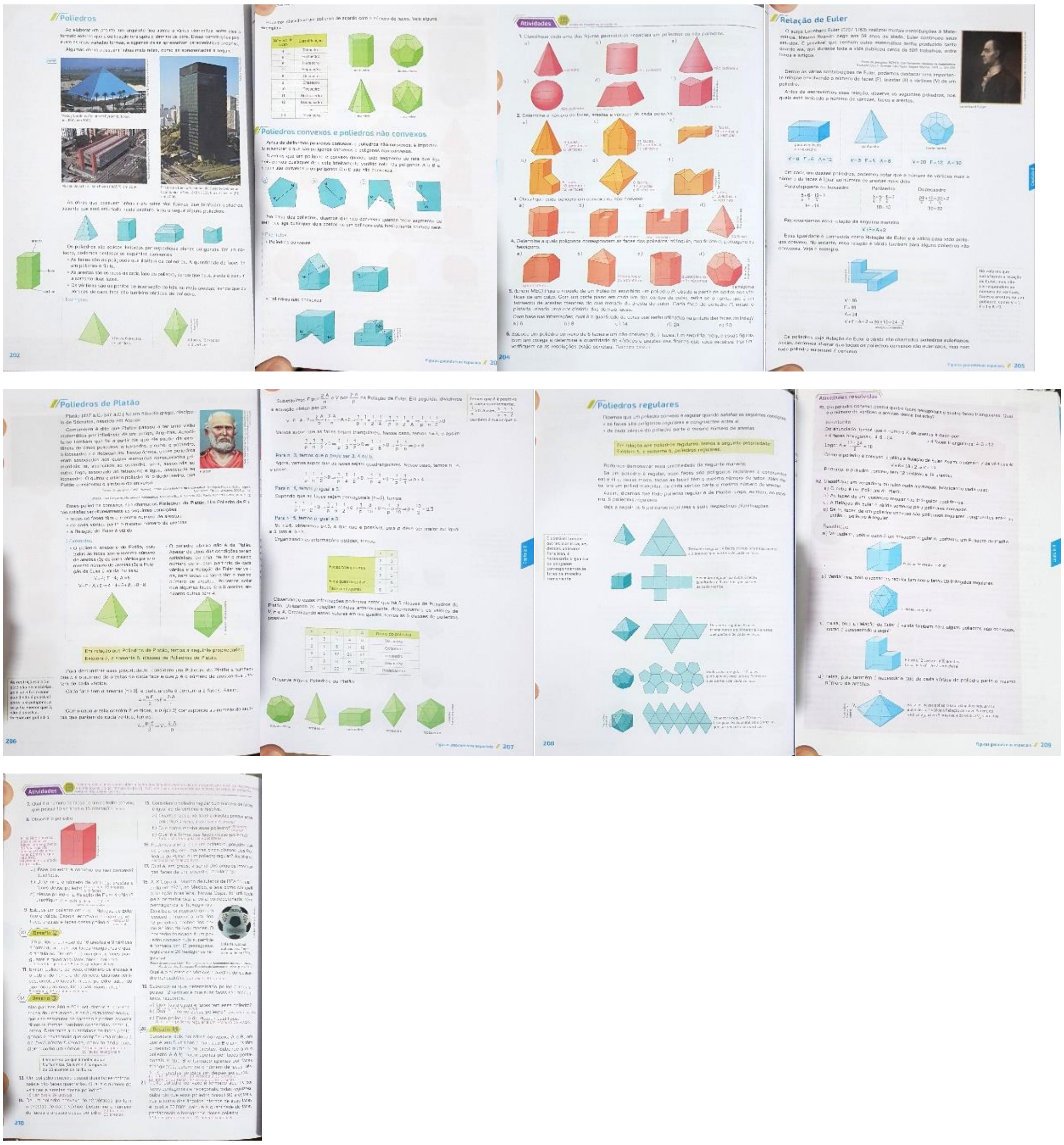
Fotografia 86 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão



Fonte: BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**, volume 3, 2 ed., São Paulo: Leya, 2016.

ANEXO F – FRAGMENTO DO LIVRO #CONTATO MATEMÁTICA

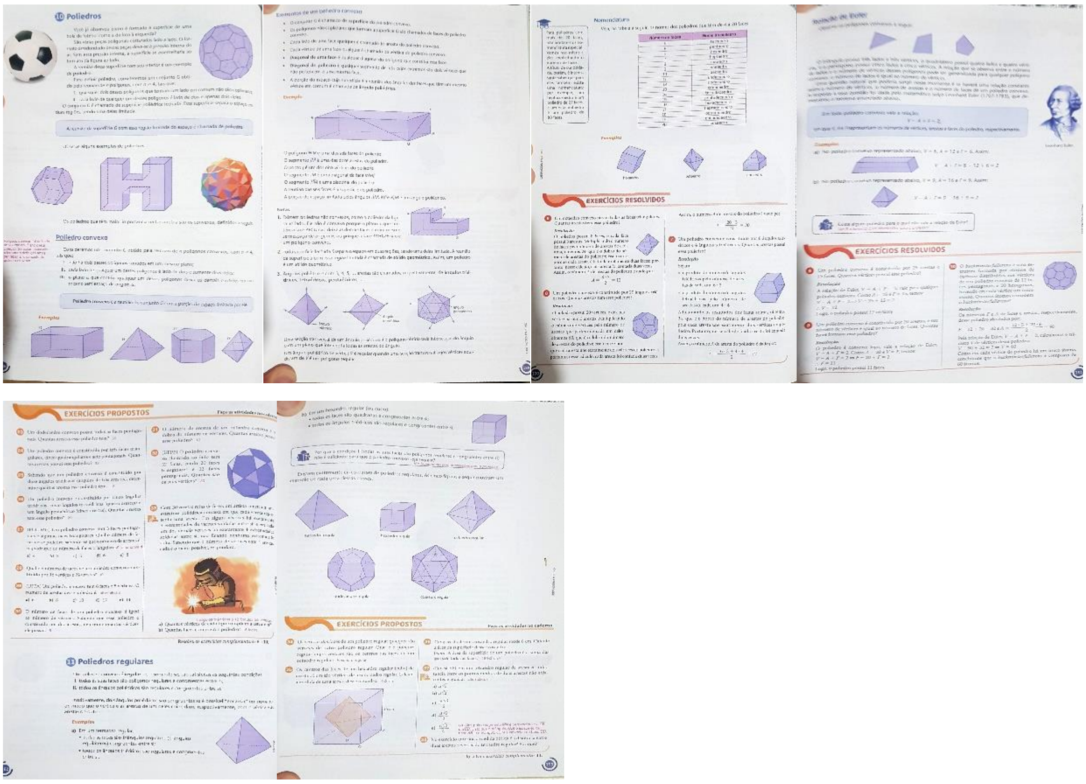
Fotografia 87 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão



Fonte: SOUZA, J. R de.; GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática, 2º ano**. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2016**.**

ANEXO G – FRAGMENTOS DO LIVRO MATEMÁTICA PAIVA

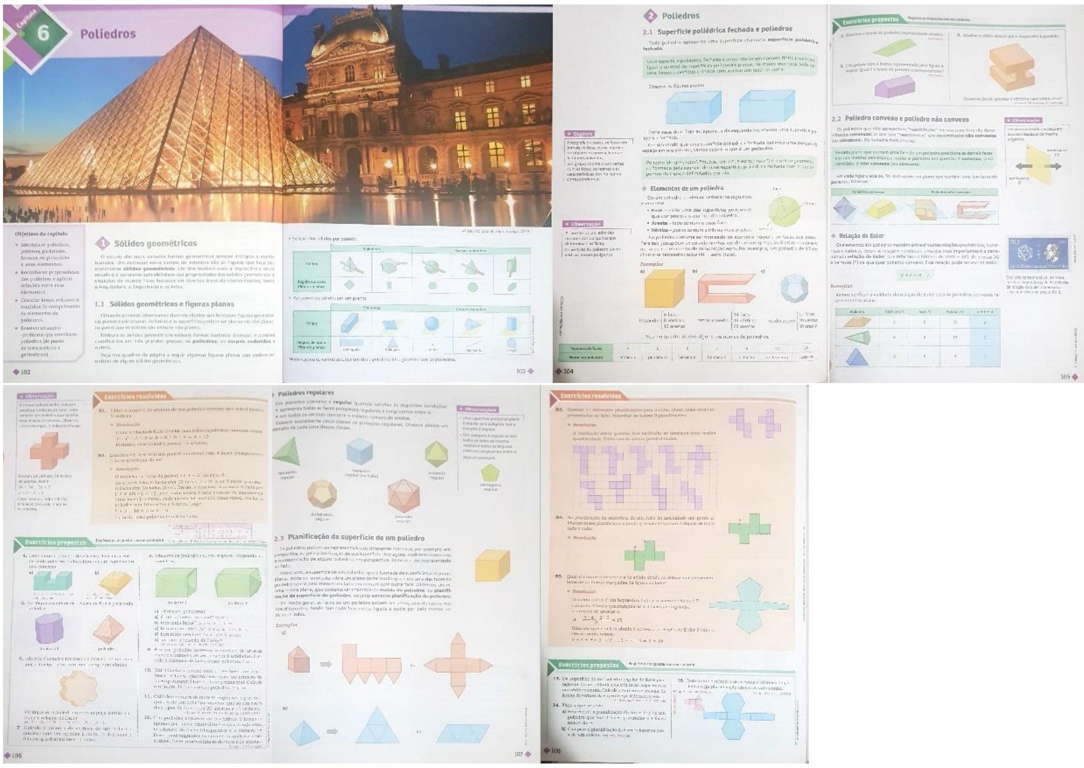
Fotografia 88 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão



Fonte: PAIVA, M. **Matemática Paiva**, 3 ed., 2 ano. São Paulo: Moderna, 2015.

ANEXO H – FRAGMENTO DO LIVRO CONEXÕES COM A MATEMÁTICA

Fotografia 89 - Páginas do livro que abordam os Poliedros de Platão



Fonte: LEONARDO, F.M.**Conexões com a matemática.** Editora Moderna ; — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2016.