Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Teste de Chika:
Um critério geral de divisibilidade

Edivaldo Yuzo Shimokawa

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

junho de 2020

Teste de Chika:
Um critério geral de divisibilidade

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Edivaldo Yuzo Shimokawa e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 17 de junho de 2020.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S556t Shimokawa, Edivaldo Yuzo.
Teste de Chika : Um critério geral de divisibilidade / Edivaldo Yuzo Shimokawa. -- 2020
xii, 34 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Teste de divisão. 2. Algoritmo da divisão. 3. Chika Offili. 4. Números primos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: Teste de Chika: um critério geral de divisibilidade

Autor: Mestrando Edivaldo Yuzo Shimokawa

Dissertação defendida e aprovada em 17 de junho de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Aldi Nestor de Souza (Presidente Banca/Orientador)**

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutor Reinaldo de Marchi (Examinador Interno)**

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares (Examinador Externo)**

Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 17/06/2020.

À meu falecido pai Soiti Shimokawa e a minha mãe Tereza Halumi Aiko Shimokawa, por tudo que me ensinaram, pela educação que me deram e por todo o apoio para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Deus, pela vida e por tudo que tens feito por mim.

Aos meus pais pelas oportunidades que me deram.

À todos os professores do curso de mestrado profissional em matemática em rede nacional da UFMT/CUC que muito contribuíram para essa jornada de conhecimento.

Aos amigos do curso por estarem sempre presentes nas horas boas e difíceis.

Ao professor Dr. Aldi Nestor de Souza pela orientação para a realização deste trabalho e para a minha formação.

“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”

Leonhard Euler

Resumo

Os critérios de divisibilidade são muitas vezes aprendidos de forma mecanizada, focando muitas vezes apenas na resolução de exercícios. No entanto, esse assunto apresenta um vasto campo de atuação para o estudante desenvolver o seu raciocínio matemático através da aritmética. Motivado pela notícia que repercutiu nas redes sociais sobre um menino nigeriano chamado Chika Offili, neste trabalho iremos abordar rapidamente sobre como iniciou o uso do critério de divisibilidade, contaremos um pouco sobre a descoberta de Chika, iremos demonstrar os critérios de divisibilidade clássicos, aqueles que se aprende no ensino básico, mostrando que para cada número primo existe um teste diferente o que dificulta o aprendizado do aluno. Baseado na ideia de Chika, apresentaremos um critério de divisibilidade que pode ser uma alternativa no ensino de divisibilidade.

Palavras chave: Teste de divisão; algoritmo da divisão; Chika Offili; números primos.

Abstract

The divisibility criteria are often learned in a mechanized way, often focusing only on solving exercises. However, this subject presents a wide field of action for the student to develop his mathematical reasoning through arithmetic. Motivated by the news that reverberated on social networks about a nigerian boy named Chika Offili, in this work we will briefly address how he started using the divisibility criterion, we will tell a little about the discovery of Chika, we will demonstrate the classic divisibility criteria, those that one learns in basic education, showing that for each prime number there is a different test which makes it difficult for the student to learn. Based on Chika's idea, we will present a divisibility criterion that can be an alternative in teaching divisibility.

Keywords: Division test; division algorithm; Chika Ofili; prime numbers.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de figuras **xi**

Lista de tabelas **xii**

Introdução **1**

1 Aspectos históricos sobre o critério de divisibilidade **2**

2 Elementos da teoria dos números **8**

2.1 Adição e multiplicação 8

2.2 Princípio da boa ordenação 9

2.3 Princípio da indução matemática 10

2.4 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$ 11

2.5 Algoritmo da divisão 12

2.6 Máximo divisor comum 12

2.6.1 Algoritmo de Euclides 13

2.7 Números primos 15

2.7.1 Teorema fundamental da aritmética 15

2.8 Sistema de numeração de base b 17

3 Critérios de divisibilidade: métodos clássicos **18**

4 Um critério geral de divisibilidade **24**

4.1 Critério geral 25

4.2 Determinado o valor da constante de decisão 25

4.3 Encontrando um padrão 27

4.4 Como aplicar em sala de aula 31

Considerações finais **32**

Referências Bibliográficas **34**

Lista de Figuras

1.1 Resumo da história sobre critério de divisibilidade (Dickson, 1919, p. 337). 2
1.2 Objeto de conhecimento e habilidade do 6° ano do E.F. 3
1.3 Resumo sobre critério de divisibilidade do livro de Andrini (2012). . . 3
1.4 Chika recebeu o livro acima da sua professora Mary Ellis, para ler durante suas férias de verão. 4
1.5 Chika Offili recebendo um prêmio de reconhecimento especial devido a sua descoberta. 4
1.6 Talmude babilônico: Tratado 'Abodah Zarah. 5
1.7 Euvres Complètes de Pascal. 6

4.1 Chika Offili mostrando para a sua turma 8E a sua ideia. 24

Lista de Tabelas

4.1 Critério de divisibilidade. 26
4.2 Critério de divisibilidade para números primos terminados em 7. . . . 27
4.3 Critério de divisibilidade para números primos terminados em 1. . . . 28
4.4 Critério de divisibilidade para números primos terminados em 3. . . . 29
4.5 Critério de divisibilidade para números primos terminados em 9. . . . 30

Introdução

> “O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”
>
> José de Alencar

Nesse trabalho, faremos uma abordagem acerca do critério de divisibilidade e responderemos as perguntas como: quando foi o seu primeiro uso na história? Como eles são ensinados em sala de aula? Por que poucos alunos sabem e o usam? Têm como facilitar o seu aprendizado?

Nossa motivação foi uma notícia que foi veiculada na internet sobre Chika, um garoto nigeriano que aos 12 anos, que “descobriu” uma fórmula matemática do critério de divisibilidade por 7 (a matéria pode ser lida em Ellis (2019a)). Sendo provada por (Ellis, 2019b) que a fórmula é verdadeira para número número primo $p = 7$ e nós estenderemos o resultado para outros número primos $p \geq 7$.

No capítulo 1 introduziremos uma breve história sobre os critérios de divisibilidade.

No capítulo seguinte trataremos alguns conhecimentos básicos da teoria dos números que necessitaremos como base para a leitura dos demais capítulos.

No capítulo 3 iremos demonstrar os critérios de divisibilidade que são comumente ensinados nas escolas, mostrando o motivo pelo qual é difícil para a sua aprendizagem.

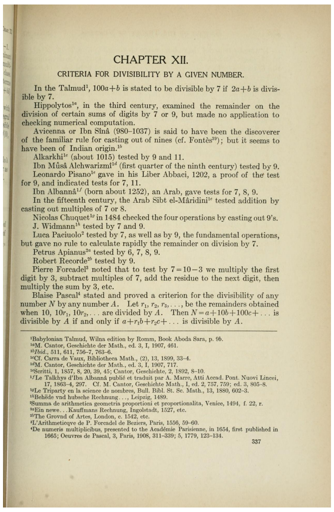
No capítulo 4 iremos demonstrar o teste de Chika e o estenderemos para outros números primos $p \geq 7$, demonstrando que os critérios de divisibilidade se resumem em 4 casos.

Capítulo 1

Aspectos históricos sobre o critério de divisibilidade

Nesse capítulo iremos discutir alguns fatos históricos sobre o critério de divisibilidade e o motivo que levou a pesquisar sobre o assunto. O leitor interessado em mais detalhes deve consultar (McDowell, 2018; Dickson, 1919)

De acordo com o livro História da teoria dos números escrito por Dickson (1919) o critério de divisibilidade são um assunto bem antigo como pode ser vista na figura 1.1 e bastante comum nos livros didáticos da escola básica, segundo MEC (2020) este conhecimento está situado na BNCC nas habilidades EF06MA05 e EF06MA06) e nas disciplinas de aritmética dos cursos de graduação.



CHAPTER XII.

CRITERIA FOR DIVISIBILITY BY A GIVEN NUMBER.

In the Talmud[1], $100a+b$ is stated to be divisible by 7 if $2a+b$ is divisible by 7.

Hippolytos[1a], in the third century, examined the remainder on the division of certain sums of digits by 7 or 9, but made no application to checking numerical computation.

Avicenna or Ibn Sînâ (980–1037) is said to have been the discoverer of the familiar rule for casting out of nines (cf. Fontès[39]); but it seems to have been of Indian origin.[1b]

Alkarkhi[1c] (about 1015) tested by 9 and 11.

Ibn Mûsâ Alchwarizmî[1d] (first quarter of the ninth century) tested by 9.

Leonardo Pisano[1e] gave in his Liber Abbaci, 1202, a proof of the test for 9, and indicated tests for 7, 11.

Ibn Albannâ[1f] (born about 1252), an Arab, gave tests for 7, 8, 9.

In the fifteenth century, the Arab Sibt el-Mâridini[1c] tested addition by casting out multiples of 7 or 8.

Nicolas Chuquet[1g] in 1484 checked the four operations by casting out 9's.

J. Widmann[1h] tested by 7 and 9.

Luca Paciuolo[2] tested by 7, as well as by 9, the fundamental operations, but gave no rule to calculate rapidly the remainder on division by 7.

Petrus Apianus[2a] tested by 6, 7, 8, 9.

Robert Recorde[2b] tested by 9.

Pierre Forcadel[3] noted that to test by $7=10-3$ we multiply the first digit by 3, subtract multiples of 7, add the residue to the next digit, then multiply the sum by 3, etc.

Blaise Pascal[4] stated and proved a criterion for the divisibility of any number N by any number A. Let $r_1, r_2, r_3, \ldots$, be the remainders obtained when $10, 10r_1, 10r_2, \ldots$ are divided by A. Then $N=a+10b+100c+\ldots$ is divisible by A if and only if $a+r_1b+r_2c+\ldots$ is divisible by A.

[1] Babylonian Talmud, Wilna edition by Romm, Book Aboda Sara, p. 9b.
[1a] M. Cantor, Geschichte der Math., ed. 3, I, 1907, 461.
[1b] *Ibid.*, 511, 611, 756–7, 763–6.
[1c] Cf. Carra de Vaux, Bibliotheca Math., (2), 13, 1899, 33–4.
[1d] M. Cantor, Geschichte der Math., ed. 3, I, 1907, 717.
[1e] Scritti, 1, 1857, 8, 20, 39, 45; Cantor, Geschichte, 2, 1892, 8–10.
[1f] Le Talkhys d'Ibn Albannâ publié et traduit par A. Marre, Atti Accad. Pont. Nuovi Lincei, 17, 1863–4, 297. Cf. M. Cantor, Geschichte Math., I, ed. 2, 757, 759; ed. 3, 805–8.
[1g] Le Triparty en la science de nombres, Bull. Bibl. St. Sc. Math., 13, 1880, 602–3.
[1h] Behēde vnd hubsche Rechnung..., Leipzig, 1489.
[2] Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, Venice, 1494, f. 22, r.
[2a] Ein newe...Kauffmans Rechnung, Ingolstadt, 1527, etc.
[2b] The Grovnd of Artes, London, c. 1542, etc.
[3] L'Arithmeticqve de P. Forcadel de Beziers, Paris, 1556, 59–60.
[4] De numeris multiplicibus, presented to the Académie Parisienne, in 1654, first published in 1665; Oeuvres de Pascal, 3, Paris, 1908, 311–339; 5, 1779, 123–134.

337

Figura 1.1: Resumo da história sobre critério de divisibilidade (Dickson, 1919, p. 337).

Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA04)** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Figura 1.2: Objeto de conhecimento e habilidade do 6° ano do E.F.

No nível básico por exemplo, o assunto é tratado como um conjunto de regras, aparentemente distintas, duas a duas, e o tratamento dado se limita a decorar e aplicar tais regras, como pode ser visto em Andrini (2012)

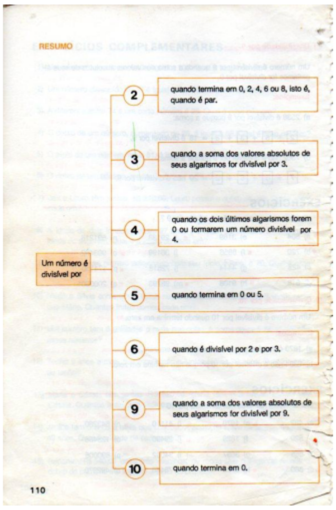


Figura 1.3: Resumo sobre critério de divisibilidade do livro de Andrini (2012).

Ellis (2019a) conta que deu um livro ao seu aluno Chika Offili chamado "First Steps for Problem Solvers" publicado pela United Kingdom Mathematics Trust (UKMT, é uma instituição de caridade que foi fundada em 1996 no Reino Unido com o objetivo de ajudar a educação das crianças no campo da matemática) para que estudasse durante as férias de verão e dentro desse livro havia uma lista de testes de divisibilidade que são usados para determinar rapidamente se um número é exatamente divisível por $2, 3, 4, 5, 6, 8$ ou 9 antes de começar a dividir. Exceto que não haveria nenhum teste de divisibilidade por 7. Em 13 de setembro de 2019 Chika contou a sua professora que num dia entendiado pensou nesse problema e percebeu um método que na prática sempre parecia funcionar o teste de divisibilidade para 7. No capítulo 4 iremos apresentar o método dele.

Ainda temos que a professora relata que o Chika mostrou seu teste para a turma $8E$ e nenhum aluno conseguiu encontrar um contra-exemplo.

Como não havia demonstração da proposição para saber que o teste sempre

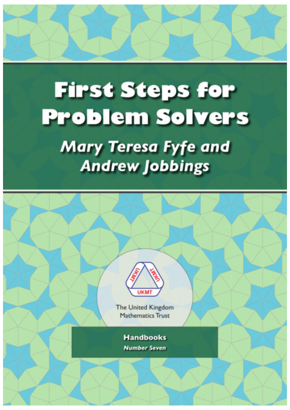


Figura 1.4: Chika recebeu o livro acima da sua professora Mary Ellis, para ler durante suas férias de verão.

funcionaria, assim a Professora Ellis pediu ajuda ao seu irmão Simon Ellis (2019b), que leciona matemática. Este lhe respondeu com a prova algébrica de que a proposição sempre funciona. Daremos uma demonstração semelhante no capítulo 4.

Figura 1.5: Chika Offili recebendo um prêmio de reconhecimento especial devido a sua descoberta.

De acordo com McDowell (2018) o primeiro teste de divisibilidade remonta por volta de 500 d.C. quando o teste de divisibilidade por 7 foi incluído no Talmude babilônico: Tratado 'Abodah Zarah.

> Disse: R. Huna, filho de R. Joshua: Se alguém não sabe qual é o ano no ciclo sabático de sete anos, acrescente um ano (ao da Era da Destruição) e deixe de lado as centenas como Ciclos do jubileu e converta o restante em Ciclos Sabáticos (de sete anos cada) depois de adicionar dois anos a cada século completo; o que sobra lhe dará o número do ano indicado no atual ciclo sabático. (Zarah, 1957, folio 9b)

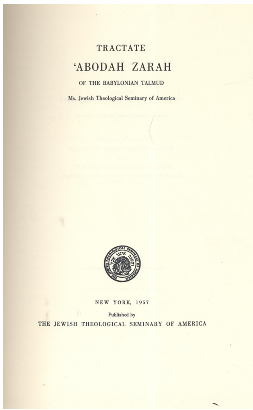


Figura 1.6: Talmude babilônico: Tratado 'Abodah Zarah.

> Traduzido na linguagem da matemática segundo McDowell (2018), para números inteiros N, a, b com $N = 100a + b$ temos que:
>
> $$N = 100a + b = 98a + (2a + b) = (7 \cdot 14a) + (2a + b)$$
>
> Em outras palavras $100a + b$ e $2a + b$ deixam o mesmo resto quando dividido por 7.

Exemplo 1. Será que 7 divide 1865?

1865, deixe de lado as centenas $18 \cdot 100 + 65$, o resto da última parcela quando dividido por 7, $18 \cdot 100 + 2$, o resto de 100 quando divido por 7 é 2 então $18 \cdot 2 + 2 = 38$, e o resto de 38 quando dividido por 7 é 3. Como 7 não divide 3 então 7 não divide 1865.

> Blaise Pascal declarou e provou um critério de divisibilidade de qualquer número N por qualquer A. Sejam $r_1, r_2, r_3, \ldots$, os restos obtidos quando $10, 10r_1, 10r_2, \ldots$ são divididos por A. Então $N = a + 10b + 100c + \ldots$ é divisível por A se, e somente se, $a + br_1 + cr_2 + \ldots$ é divisível por A. Sendo a teoria apresentada na Académie Parisienne, em 1654, e publicada pela primeira vez em 1665 em De numeris multiplicibus, e atualmente pode ser encontrado no livro Ouvres Complètes de Pascal.(Dickson, 1919, p.337)

McDowell (2018) diz que o teste encontrado no Talmude é uma variante menor de uma classe de testes de divisibilidade descrita por Blaise Pascal $(1623 - 1662)$, ou seja, o teste de Pascal é o primeiro teste de divisibilidade para qualquer número inteiro.

Exemplo 2. Observe os seguintes restos de potências de 10 por 7

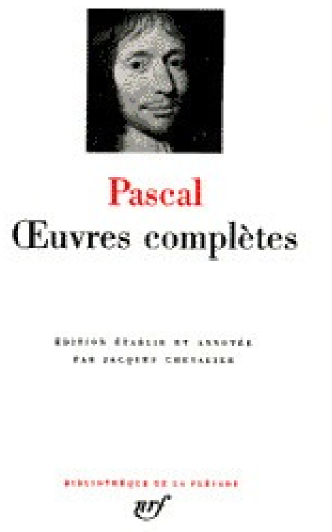


Figura 1.7: Euvres Complètes de Pascal.

10^k	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
restos da divisão por 7	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}
542.178 &= 10^5(5) + 10^4(4) + 10^3(2) + 10^2(1) + 10^1(7) + 10^0(8) \\
&\Rightarrow (5) + 4(4) + 6(2) + 2(1) + 3(7) + 1(8)(\text{restos da divisão por 7}) \\
&= 84 \\
&= 10^1(8) + 10^0(4) \\
&= 3(8) + 1(4)(\text{restos da divisão por 7}) \\
&\Rightarrow 28
\end{aligned}$$

Como 7 divide 28 temos que 7 divide 542.178.

Conforme Dickson (1919) e McDowell (2018) em 1861, A. Zbikowski publicou um pequeno artigo sobre testes de divisibilidade no Boletim da Academia de Ciências Físicas de São Petersburgo. A. Zbikowski notou que $N = a + 10k$ é divisível por 7 se $k - 2a$ é divisível por 7. Se δ é da forma $10n + 1$, $N = a + 10k$ é divisível por δ se $k - na$ é divisível por δ; isso vale também se δ for substituído por um divisor de um número $10n + 1$.

Exemplo 3. Um teste de Zbikowski de divisão para 13. Como 13 não é da forma $10n + 1$, pensemos em outro número que seja múltiplo de 13 que seja da forma $10n + 1$, podemos observar que $n = 9$ satisfaz o que pedimos $91 = 10 \cdot 9 + 1$ e é múltiplo de 13.

Agora vamos verificar se o número 608.374 é divisível por 13. Efetuando o seguinte processo:

- pegue o último dígito do número a ser dividido;
- multiplique ele por $n = 9$;
- subtraia ele ao restante do número;
- Se este número for múltiplo de $\delta = 13$ o original também será.

Iremos efetuar o processo acima várias vezes, até termos um número pequeno o suficiente para termos certeza se o resultado final é múltiplo ou não de $\delta = 13$.

$$
\begin{aligned}
608.374 &\overset{60837-36}{\Rightarrow} 60.801 \text{ (repetimos o processo)} \\
&\overset{6080-9}{\Rightarrow} 6.071 \\
&\overset{607-9}{\Rightarrow} 598 \\
&\overset{59-72}{\Rightarrow} -13
\end{aligned}
$$

Como -13 é múltiplo 13, então 608.374 também é.

Capítulo 2

Elementos da teoria dos números

Neste capítulo apresentaremos alguns conhecimentos básicos da teoria dos números que serão necessários nos capítulos seguintes. Usaremos como referência Hefez (2016), Santos (2011), Camelo (2018) e Sousa (2016).

2.1 Adição e multiplicação

Axioma 1. *(Adição) Em $\mathbb{Z}$, está definido uma operação binária denominada de adição que associa um único valor $a + b$ para cada inteiro a e b. Essa operação possui as seguintes propriedades:*

1. *Fechamento: $a + b \in \mathbb{Z}$;*
2. *Comutatividade: $a + b = b + a$ para todo a, b em $\mathbb{Z}$;*
3. *Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo a, b, c em $\mathbb{Z}$;*
4. *Elemento neutro da soma (elemento nulo): $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo a em $\mathbb{Z}$;*
5. *Inverso da soma (elemento oposto): $\exists -a \in \mathbb{Z}$ tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.*

Axioma 2. *(Produto) Em $\mathbb{Z}$, está definido uma operação binária denominada de produto que associa um único valor $a \cdot b$ para cada inteiro a e b. Essa operação possui as seguintes propriedades:*

1. *Fechamento: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$;*

2. *Comutatividade:* $a \cdot b = b \cdot a$ *para todo* a, b *em* $\mathbb{Z}$*;*

3. *Associatividade:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *para todo* a, b, c *em* $\mathbb{Z}$*;*

4. *Distributividade:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *e* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *para todo* a, b, c *em* $\mathbb{Z}$*;*

5. *Elemento neutro do produto (elemento unidade):* $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *para todo* a *em* $\mathbb{Z}$

6. *Cancelamento do produto:* $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$ *para todo* a *em* $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$

2.2 Princípio da boa ordenação

Axioma 3. *(Tricotomia) Dados* $a, b \in \mathbb{Z}_+$*, vale uma das seguintes possibilidades e somente uma delas*

- $a = b$
- $b - a \in \mathbb{Z}_+$
- $-(b - a) \in \mathbb{Z}_+$

Assim, pela tricotomia, uma e apenas uma, das condições é verificada:

- $a = b$
- $a < b$
- $b < a$

Definição 1. (Princípio da boa ordenação) Se S é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente então S possui um menor elemento.

Proposição 4. *Não existe nenhum número inteiro* n *tal que* $0 < n < 1$

Demonstração. Suponha por absurdo que exista n com essa propriedade. Logo, o conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 1\}$ é não vazio, além de ser limitado inferiormente. Portanto, S possui um menor elemento a, com $0 < a < 1$. Multiplicando esta última desigualdade por a, obtemos $0 < a^2 < a < 1$, logo $a^2 \in S$ e $a^2 < a$, uma contradição. Portanto, $S = \varnothing$. ∎

Corolário 5. *Dado um número inteiro n qualquer, não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n+1$.*

Corolário 6. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $ab = 1$ então $a = b = \pm 1$.*

Corolário 7. *Se $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ então $|ab| \geq |a|$.*

Corolário 8. *(Propriedade arquimediana) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nb > a$.*

2.3 Princípio da indução matemática

Uma das consequências imediatas do princípio da boa ordenação, é o princípio de indução matemática.

Teorema 9. *(Princípio da indução matemática) Sejam S um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$ tais que*

(i) $a \in S$;

(ii) S é fechado com respeito à operação de "somar 1" a seus elementos, ou seja, $\forall\ n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Então, $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\} \subset S$

Demonstração. Ponhamos $S' = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\}$ e suponhamos por absurdo que $S' \not\subset S$, logo $S' \backslash S \neq \varnothing$. Como esse conjunto é limitado inferiormente (por *(i)*), existe um menor elemento $c \in S' \backslash S$. Pelo fato de $c \in S'$ e $c \notin S$, temos que $c > a$. Portanto, $c-1 \in S'$ e $c-1 \in S$. Pela hipótese sobre S, temos que $c = (c-1)+1 \in S$, como $c \in S'$, obtemos uma contradição com o fato de $c \in S' \backslash S$. ∎

Teorema 10. *(Prova por indução matemática) Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que:*

(i) $p(a)$ é verdadeiro, e que

(ii) $\forall\ n \geq a$, se $p(n)$ é verdadeiro então $p(n+1)$ é verdadeiro.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Demonstração. Seja $V = \{n \in \mathbb{Z}; p(n)\}$, ou seja, V é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{Z}$ para os quais $p(n)$ é verdadeiro. Usando o item *(i)* temos que $a \in V$ e por *(ii)* temos que para todo n, $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$, segue pelo princípio da indução matemática que $\{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant a\} \subset V$.

Como (por *(i)*) $a \in V$ e (por *(ii)*) $\forall\, n, n \in S \Rightarrow n+1 \in V$, segue o princípio de indução que $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\} \subset V$. ■

Teorema 11. *(Prova por indução completa) Seja $p(n)$ uma sentença aberta tal que:*

(i) $p(a)$ é verdadeiro, e que

(ii) $\forall n$, $p(a), p(a+1), \cdots p(n)$ são verdadeiros então $p(n+1)$ é verdadeiro.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Demonstração. Considere o conjunto $V = \{n \in a + \mathbb{N}; p(n)\}$. Queremos provar que o conjunto $W = (a + \mathbb{N})\backslash V$ é vazio. Suponha, por absurdo, que vale o contrário. Logo, pelo princípio da boa ordenação, W teria um menor elemento k, como sabemos (por *(i)*) que $a \notin W$, segue-se que existe n tal que $k = a + n > a$. Portanto, $a, a+1, \ldots, k-1 \notin W$; logo $a, a+1, \ldots, k-1 \in V$. Portanto, (por *(ii)*) concluí-se que $k = k - 1 + 1 \in V$ o que contradiz o fato de que $k \in W$. ■

2.4 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Definição 2. Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b (representado por $a \mid b$), quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Neste caso diremos também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou b é *múltiplo* de a ou que b é *divisível* por a. Por outro lado, se a não divide b (representado por $a \nmid b$), quando não existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$.

Propriedades. Sendo $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se:

(i) $1 \mid a, a \mid a$ e $a \mid 0$;

(ii) $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$;

(iii) $a \mid b \Leftrightarrow a \mid (-b), (-a) \mid b$ e $(-a) \mid (-b)$;

(iv) $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

2.5 Algoritmo da divisão

Teorema 12. *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$.*

Demonstração. Considere o conjunto $S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$. (Existência) Pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$ o que mostra que $s \neq \varnothing$. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo princípio da boa ordenação, temos que S possui um menor elemento r Suponhamos então que $r = a - bq$. sabemos que $r \geq 0$. vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r > |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $s < r$.
(Unicidade) Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r - r \Rightarrow |b||q - q'| = |r' - r| < b$ o que só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$. ∎

Definição 3. (Número par) Um número inteiro a é par quando ele é múltiplo de 2, isto é, $a \in \mathbb{Z}$ é par $\Leftrightarrow a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 4. (Número ímpar) Um número inteiro a é ímpar quando ele não é múltiplo de 2, isto é, $a \in \mathbb{Z}$ é ímpar $\Leftrightarrow a \neq 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $a = 2k \pm 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2.6 Máximo divisor comum

Definição 5. Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro c é chamado de um divisor comum de a e b quando $c \mid a$ e $c \mid b$.

Definição 6 (Máximo divisor comum (mdc))**.** Um número inteiro $d \geq 0$ é chamado de máximo divisor comum dos inteiros a e b, se possuir as seguintes propriedades:

1. d é um divisor comum de a e b;

2. d é divisível por todo divisor comum de a e b.

2.6.1 Algoritmo de Euclides

Apresentaremos a prova construtiva do algoritmo de Euclides que também é chamado de processo de divisões sucessivas.

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, podemos supor $b \leqslant a$. Se $b = 1$ ou $b = 0$, ou ainda $b \mid a$, já vimos que $mdc(a, b) = a$. Suponhamos, então, que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:

a) $r_1 \mid b$.

Em tal caso, $r_1 = mdc(b, r_1)$ e pelo Lema de Euclides, temos que

$$r_1 = mdc(b, r_1) = mdc(b, a - q_1 b) = mdc(b, a) = mdc(a, b),$$

e o algoritmo termina.

b) $r_1 \nmid b$.

Em tal caso, podemos efetuar a divisão de b por r_1, obtendo

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

a') $r_2 \mid r_1$.

Nesse caso, $r_2 = mdc(r_1, r_2)$ e novamente, pelo Lema de Euclides,

$$r_2 = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_1, b - q_2 r_1) = mdc(r_1, b) = mdc(a - q_1 b, b) = mdc(a, b),$$

e paramos, pois termina o algoritmo.

b') $r_2 \nmid r_1$.

Nesse caso podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Devemos continuar esse procedimento até que pare. Isto sempre ocorre, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > \cdots$ que não possui um menor elemento, o que não é possível pelo princípio da boa ordenação. Logo, para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que implica que $mdc(a, b) = r_n$.

Podemos sintetizar o algoritmo acima, utilizando o dispositivo abaixo:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = mdc(a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Teorema 13. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Além disso, existem inteiros u e v tais que $mdc(a, b) = au + bv$.*

Demonstração. Seja $S = \{au+bv > 0 \text{ com } u, v \in \mathbb{Z}\}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Caso $a \neq 0$ tem-se que um dos inteiros.

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \text{ ou } -a = a \cdot (-1) + b \cdot 0$$

é positivo, logo $S \neq \varnothing$. Pelo p.b.o., existe e é único o elemento mínimo de S, que vamos chamar de $d > 0$. Por definição de S, existem inteiros u, v tais que $d = au+bv$. Afirmamos que $d = mdc(a, b)$. Com efeito, pelo algoritmo da divisão:

$$a = df + r \text{ com } 0 \leqslant r < d$$

$$r = a - df = a - (au + bv)f = a(1 - uf) + b(-vf)$$

isto é, o resto r é uma combinação linear de a e b. Como $0 \leqslant r < d$ e $d > 0$ é o elemento mínimo de S, segue que $r = 0$ e $a = df$, ou seja, $d \mid a$.

Com raciocínio inteiramente análogo podemos concluir que também $d \mid b$. Logo d é um divisor comum de a e b.

Finalmente, se c é um divisor comum de a e b ($c \mid a$ e $c \mid b$), então

$$c \mid au + bv = d \Rightarrow c \mid d \Rightarrow c \leqslant d,$$

isto é, d é o maior divisor comum positivo de a e b, ou seja,

$$mdc(a,b) = d = au + bv, \text{ para } u, v \in \mathbb{Z}.$$

$\blacksquare$

Proposição 14. *Sejam a, b, c inteiros não simultaneamente nulos. Se $a \mid bc$ e $mdc(a,b) = 1$ então $a \mid c$.*

Demonstração. Se $a \mid bc$ então $bc = ra$ para algum $r \in \mathbb{Z}$. Se $mdc(a,b) = 1$ existem inteiros m, n tais que $ma + nb = 1$, o que implica em $mac + nbc = c$ ou, ainda, $c = mac + nra = a(mc + nr)$. Portanto, $a \mid c$. $\blacksquare$

2.7 Números primos

Definição 7. (Número primo) Seja p um número inteiro. Se p possuir exatamente 4 divisores inteiros distintos então p é chamado de número primo.

Definição 8. (Número composto) Seja p um número inteiro. Se p possuir mais que 4 divisores inteiros distintos então p é chamado de número composto.

Proposição 15. *Sejam os a, b, p inteiros a, b, p, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração. Se $p \mid a$, então não há nada a provar. Vamos supor que p não divide a, então a e p são coprimos, ou seja,$(a, p) = 1$. Logo, pela proposição 14 temos $p \mid b$. $\blacksquare$

2.7.1 Teorema fundamental da aritmética

Teorema 16. *(Teorema fundamental da aritmética) Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração. (Existência) Se n é um número primo não há nada a ser demonstrado. Suponhamos então que n é composto. Seja p_1 (com $p_1 > 1$) o menor dos divisores positivos de n. Afirmamos que p_1 é número primo, caso contrário existiria p tal que $1 < p < p_1$ com $p \mid n$, contradizendo a escolha de p_1 então $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for número primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é número primo e temos que $n = p_1 p_2 n_2$.

Repetindo este procedimento, obtemos um sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os números primos da sequência $p_1, p_2, \ldots, p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

(Unicidade) Usando a indução em n. Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira.

Assumimos que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que que 1 e menores que n.

Vamos provar que ela também é verdadeira para n. Se n é número primo, não há nada a provar. vamos supor, então que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_r$$

vamos provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j. Como p_1 divide o produto $q_1 q_2 \cdots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 \mid q_1$. Como ambos são números primos, isto implica $p_1 = q_1$ Logo $n/p_1 = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_r$. Como $1 < n/p_1 < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 \cdots p_s$ e $q_1 q_2 \cdots q_r$ são iguais. ■

Teorema 17. *Se $n = p_r^{\alpha_1} \cdot p_r^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, o conjunto dos divisores de n é conjunto de todos os números da forma $p_r^{c_1} \cdot p_r^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{c_r}, 0 \leq c_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \ldots r$.*

Demonstração. É óbvio que se c_i não estiver no intervalo mencionado, o produto acima não será um divisor de n. ■

2.8 Sistema de numeração de base b

Um sistema de base b, é um conjunto de b símbolos $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ que utilizamos para representar quaisquer números.

Teorema 18. *Seja b um número inteiro positivo e $M = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ com $b > 1$. Todo número inteiro positivo n pode ser representado, de modo único, da seguinte maneira: $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r$, onde $r \geq 0, a_i \in M$, com $i = 0, 1, 2, \ldots, r$ e $a_r \neq 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar a existência por indução.
(Existência) Se $n < b$, basta tomar $n = a_0$ e a representação está definida. Suponha agora, $n \geq b \ \forall \ q \in \mathbb{Z}_+^*$, com $1 \leq q < n$ esteja definida. Pela divisão euclidiana temos que $n = bq + a_0$, com $a_0 \in M$, observe que $q < n$, caso contrário teríamos: $n = bq + a_0 \geq bq > q \geq n$ (Absurdo). Pela hipótese de indução, podemos escrever q na base b, ou seja, $q = a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1}$, com $a1 \in M$ e $a_1 \neq 0$. Logo, $n = b(a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1}) + a_0 = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 \cdots + a_r b^r$, o que conclui a existência da representação.
(Unicidade) é fácil ver que para $n \leq b$ a unicidade é óbvia. Suponhamos $n > b$, e que a unicidade é válida para todo q, com $1 \leq q < n$. Suponhamos que n tenha duas representações em b: $n = b(a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1}) + a_0 = b(c_1 + c_2 b + c_3 b^2 + \cdots + c_s b^{s-1}) + c_0$. Sendo $b > a_0$ e $b > c_0$, pela unicidade da divisão euclidiana, temos que $a_0 = c_0$ e $a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1} = c_1 + c_2 b + c_3 b^2 + \cdots + c_s b^{s-1} = q$. Como $q < n$, pela hipótese de indução obtemos $r = s$ e $a_1 = c_1, \ldots, a_r = c_s$. Logo a representação é única. ■

Capítulo 3

Critérios de divisibilidade: métodos clássicos

Como decidir se um número A é divisível por um número B? Por exemplo 48727 é divisível por 131? Uma maneira de responder questões como essa é fazer a divisão e verificar se sobra resto, caso o resto for igual a zero é divisível, caso contrário não é. Mas e se forem números muito grandes?

Desta forma iremos apresentar neste capítulo os critérios de divisibilidades clássicos, ou seja, testes de divisibilidade que normalmente são apresentados nas escolas. O leitor interessado em mais detalhes deve consultar Costa (1866) e Papa Neto (2020)

Proposição 19. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 2 *se seu último algarismo for divisível por* 2*, isto é, se o número termina em um número par.*

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que $N = 10 \cdot k + b$, como $2 \mid 10k$, então se $2 \mid b$, temos que $2 \mid N$. ∎

Exemplo 4. O número 738 é divisível por 2, pois o seu último algarismo 8 é divisível por 2.

Proposição 20. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 3 *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos resultar em um número divisível por* 3*.*

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (10^k - 1 + 1) a_k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[(10^k - 1) a_k + a_k \right] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} (10^k - 1) a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} (10^k - 1) a_k \end{aligned}$$

Como $3 \mid \sum_{k=1}^{n} (10^k - 1) a_k$, então se $3 \mid \sum_{k=0}^{n} a_k$, temos que $3 \mid N$. ■

Exemplo 5. O número 609 é divisível por 3, pois $6 + 0 + 9 = 15$ e $3 \mid 15$.

Proposição 21. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 4 *se os dois últimos algarismos forem divisíveis por* 4.

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então existe um $k \in Z$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 98, 99\}$ temos que $N = 100k + b$, como $4 \mid 100k$, então se $4 \mid b$, temos que $4 \mid N$. ■

Exemplo 6. O número 7258 não é divisível por 4, pois $4 \nmid 58$, pois $58 = 4 \cdot 14 + 2$.

Proposição 22. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 5 *se o último algarismo for* 0 *ou* 5.

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então um $k \in Z$ e $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tal que $N = 10k + b$, como $5 \mid 10k$, então se $5 \mid b$, temos que $5 \mid N$ e isso ocorre se $b \in \{0, 5\}$. ■

Exemplo 7. O número 9766 não é divisível por 5, pois o último algarismo é 6.

Proposição 23. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 6 *quando for divisível por* 2 *e* 3 *ao mesmo tempo, ou seja, o número deve ser par e a soma dos seus algarismos deve ser divisível por 3.*

Demonstração. Seja N um número divisível por 6 então ele é da forma $N = 6k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $N = 2 \cdot 3k$, temos que N é divisível por 2 e por 3. ■

Exemplo 8. O número 995 não é divisível por 6, pois não é divisível por 2.

O número 8812 não é divisível por 6, pois $8 + 8 + 1 + 2 = 19$ e $3 \nmid 19$.

Definição 9. Iremos chamar de *números de classes* o número formado por três algarimos, a partir da direita.

Exemplo 9. $N = \overbrace{14}^{4^a}.\overbrace{356}^{3^a}.\overbrace{728}^{2^a}.\overbrace{913}^{1^a}$ dizemos que 913 é a 1^a classe, 728 é a 2^a classe, 356 é a 3^a classe e 14 é a 4^a classe.

Proposição 24. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por 7 quando a diferença entre a soma dos números de classes ímpares* (S_{ci}) *e a soma dos números das classes pares* (S_{cp}) *é um número divisível por 7.*

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}_+^*$ então

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{i=0}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}10^{3i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}10^{3i} + a_2a_1a_0 \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}\left[10^{3i} + (-1)^{i+1}\right] + a_2a_1a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}\left[(-1)^{i+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}\left[10^{3i} + (-1)^{i+1}\right] - \sum_{i=0}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}\left[(-1)^{i+1}\right]
\end{aligned}$$

Temos que a primeira somatória é divisível por 7, pois quando

- Se $i = 2t, \forall t \in \mathbb{Z}_+^*$

$$\begin{aligned}
10^{6t} - 1 &= (10^6)^t - 1 \\
&= (10^6 - 1)\sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i \\
&= 999999\sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i \\
&= 7 \cdot 142857\sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i.
\end{aligned}$$

- Se $i = 2t+1, \forall t \in \mathbb{Z}_+^*$

$$\begin{aligned}
10^{6t+3}+1 &= 10^{6t}\cdot 10^3 + 1\\
&= (10^{6t}-1)\cdot 10^3 + (1+10^3)\\
&= \left[7\cdot 142857\cdot 10^3 \sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i\right] + (1001)\\
&= \left[7\cdot 142857\cdot 10^3 \sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i\right] + (7\cdot 143)\\
&= 7\left[142857\cdot 10^3 \sum_{i=0}^{t-1}(10^6)^i + 143\right].
\end{aligned}$$

Logo basta saber verificar $\sum_{i=0}^{k} a_{3i+2}a_{3i+1}a_{3i}\left[(-1)^{i+1}\right]$ ■

Exemplo 10. O número 1.565.553.436 é divisível por 7?

$\overbrace{1}^{4^a}.\overbrace{565}^{3^a}.\overbrace{503}^{2^a}.\overbrace{436}^{1^a} \Rightarrow (436+565)-(503+1) = 1001-504 = 497 = 7\cdot 71$, logo o número 1.565.503.436 é divisível por 7.

Proposição 25. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 8 *se os três últimos algarismos forem divisíveis por* 8.

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então existe um $k \in Z$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 998, 999\}$ temos que $N = 1000k + b$, como $8 \mid 1000k$, então se $8 \mid b$, temos que $8 \mid N$. ■

Exemplo 11. O número 76197813 é divisível por 8?

$813 = 8\cdot 101 + 5$, logo o número 76197813 não é divisível por 8.

Proposição 26. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 9 *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos resultar em um número divisível por* 9.

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$ então

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(10^k - 1 + 1)a_k\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left[(10^k-1)a_k + a_k\right]\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}(10^k-1)a_k\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}(10^k-1)a_k
\end{aligned}$$

Como $9 \mid \sum_{k=1}^{n}(10^k - 1)a_k$, então se $9 \mid \sum_{k=0}^{n} a_k$, temos que $9 \mid N$. ■

Exemplo 12. O número 501669459 é divisível por 9?

$5+0+1+6+6+9+4+5+9 = 45$. Como $9 \mid 45$ então 501669459 é divisível por 9.

Proposição 27. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 10 *se o último algarismo for* 0*.*

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}$, então um $k \in Z$ e $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tal que $N = 10k + b$, como $10 \mid 10k$, então se $10 \mid b$, temos que $10 \mid N$ e isso ocorre se $b \in \{0\}$. ■

Exemplo 13. O número 304498212 não é divisível por 10, pois o último algarismo é 2.

Definição 10. A posição de cada algarismo de um número, contada a partir da direita, é chamada de *ordem* do algarismo.

Exemplo 14. Por exemplo o número $N = 23437$ as ordens são as seguintes

$$\begin{array}{cccccc} & 5^a & 4^a & 3^a & 2^a & 1^a \\ N = & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ & 2 & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}$$

Proposição 28. *Um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por* 11 *quando a diferença entre a soma dos números de ordem ímpar* (S_{oi}) *e a soma dos números de ordem par* (S_{op}) *é um número divisível por* 11*.*

Demonstração. Seja $N \in \mathbb{Z}_+^*$ então

$$\begin{aligned} N =& a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + a_4 10^4 + a_5 10^5 + \ldots \\ =& \big(a_1 10 + a_3 10^3 + a_5 10^5 + \ldots\big) + \big(a_0 + a_2 10^2 + a_4 10^4 + \ldots\big) \\ =& \big(a_1 10 + a_3 10^3 + a_5 10^5 + \ldots + a_1 + a_3 + a_5 + \ldots\big) - (a_1 + a_3 + a5 + \ldots) + \\ & \big(a_0 + a_2 10^2 + a_4 10^4 + \ldots - a_0 - a_2 - a_4 - \ldots\big) + (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) \\ =& (11a_1 + 1001a_3 + 100001a_5 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a5 + \ldots) + \\ & (99a_2 + 9999a_4 + \ldots) + (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) \end{aligned}$$

- Veja que $(99a_2 + 9999a_4 + \ldots)$ é múltiplo de 11

$$\begin{aligned}(99a_2 + 9999a_4 + \ldots) &= 11 \cdot (9a_2 + 909a_4 + \ldots)\\ &= 11 \cdot t, \text{ onde } t = (9a_2 + 909a_4 + \ldots)\end{aligned}$$

- Veja que $(a_1 11 + a_3 1001 + a_5 100001 + \ldots)$ é múltiplo de 11

$$\begin{aligned}(a_1 11 + a_3 1001 + a_5 100001 + \ldots) =& 11 \cdot (a_1 + a_3 91 + a_5 9091 + \ldots)\\ =& 11 \cdot k, \text{ onde } k = \cdot (a_1 + a_3 91 + a_5 9091 + \ldots)\end{aligned}$$

Logo para N ser divisível por 11, basta verificar se $(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a5 + \ldots)$ é divisível por 11. ■

Exemplo 15. O número 94651 é divisível por 11?

$$\begin{array}{ccccc} 5^a & 4^a & 3^a & 2^a & 1^a \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 9 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{array} \Rightarrow (9+6+1) - (4+5) = 16 - 9 = 7 \text{ e } 11 \nmid 7.$$

Logo 94651 não é divisível por 11.

Capítulo 4

Um critério geral de divisibilidade

Nesse capítulo será apresentado um critério de divisibilidade geral para números primos maiores ou iguais a 7 baseado na ideia de Chika (Torres, 2005; Guedes, 1988; Ellis, 2019b).

Como saber se um número é divisível por 7?

> Pegue o último dígito de qualquer número inteiro, multiplicando-o por 5 e adicionando ao restante do número obterá um novo número e se este for divisível por 7 o número original o será (Chika Offli, Estudante Nigeriano).

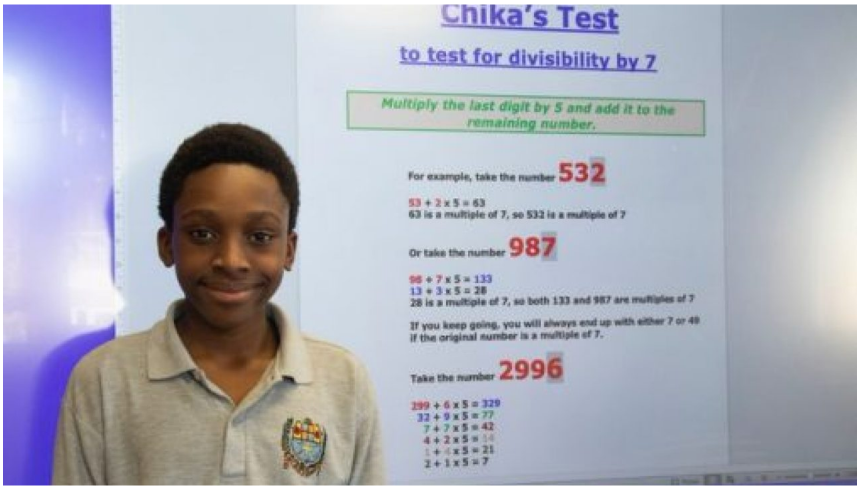


Figura 4.1: Chika Offili mostrando para a sua turma 8E a sua ideia.

Exemplo 16. Pegue o número 532, então pelo método de Chika $32 + 2 \times 5 = 63$ e sabemos que 63 é múltiplo de 7, logo 532 é também múltiplo de 7.

4.1 Critério geral

Seja $N \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a + b$ e p um número primo (com $p \geq 7$) então $N = 10a + b = 10(a + kb) + b(1 - 10k)$, então precisamos garantir que exista algum $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p \mid (1 - 10k)$ ou $p \mid (10k - 1)$. Logo teremos que $p \mid a + kb \Rightarrow p \mid N$. Chamaremos esse k de constante de decisão.

4.2 Determinado o valor da constante de decisão

Daremos algumas demonstrações de como determinar o valor da constante de decisão.

Proposição 29 (Teste de Chika)**.** *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a + b$ e número primo $p = 7$ então se $7 \mid a + 5b \Rightarrow 7 \mid N$ e $7 \mid a - 2b \Rightarrow 7 \mid N$.*

Demonstração. Temos $N = 10a + b = 10(a + kb) + b(1 - 10k)$,
$7 \mid 1 - 10k$ para $k = 5 \Rightarrow 7 \mid 1 - 10 \cdot 5 = -49$, logo se $7 \mid a + 5b \Rightarrow 7 \mid N$ e
$7 \mid 1 - 10k$ para $k = -2 \Rightarrow 7 \mid 1 - 10 \cdot (-2) = 21$, logo se $7 \mid a - 2b \Rightarrow 7 \mid N$. ■

Proposição 30. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$ e um número primo $p = 11$, então se $11 \mid a + 10b \Rightarrow 11 \mid N$ e $11 \mid a - b \Rightarrow 11 \mid N$.*

Demonstração. Temos $N = 10a + b = 10(a + kb) + b(1 - 10k)$,
$11 \mid 1 - 10k$ para $k = 10 \Rightarrow 11 \mid 1 - 10 \cdot 10 = -99$, logo se $11 \mid a + 10b \Rightarrow 7 \mid N$ e
$11 \mid 1 - 10k$ para $k = -1 \Rightarrow 11 \mid 1 - 10 \cdot (-1) = 11$, logo se $11 \mid a - b \Rightarrow 11 \mid N$. ■

Proposição 31. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$ e um número primo $p = 13$, então se $13 \mid a + 4b \Rightarrow 13 \mid N$ e $13 \mid a - 9b \Rightarrow 13 \mid N$.*

Demonstração. Temos $N = 10a + b = 10(a + kb) + b(1 - 10k)$,
$13 \mid 1 - 10k$ para $k = 4 \Rightarrow 13 \mid 1 - 10 \cdot 4 = -39$, logo se $13 \mid a + 4b \Rightarrow 13 \mid N$ e
$13 \mid 1 - 10k$ para $k = -9 \Rightarrow 13 \mid 1 - 10 \cdot (-9) = 91$, logo se $13 \mid a - 9b \Rightarrow 13 \mid N$. ■

Efetuando o processo para vários números primos, podemos construir uma tabela de critérios de divisibilidade que podemos separar em formas aditiva e subtrativa para cada número primo p.

Tabela 4.1: Critério de divisibilidade.

Número primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
7	a+5b	a-2b
11	a+10b	a-b
13	a+4b	a-9b
17	a+12b	a-5b
19	a+2b	a-17b
23	a+7b	a-16b
29	a+3b	a-26b
31	a+28b*	a-3b
37	a+26b	a-11b
41	a+37b	a-4b
43	a+13b	a-30b
47	a+33b*	a-14b
53	a+16b	a-37b*
59	a+6b	a-53b
61	a+55b	a-6b
67	a+47b	a-20b
71	a+64b	a-7b
73	a+22b	a-51b
79	a+8b	a-71b
83	a+25b	a-58b
89	a+9b	a-80b
97	a+68b	a-29b

*28, 33, 37 podemos, respectivamente, os seguintes valores $90, 80$ e 90, porque dão maior agilidade ao processo. Fonte: (Guedes, 1988, p. 24)

4.3 Encontrando um padrão

Na tabela 4.1 pode-se perceber que o valor da constante de decisão varia muito, o que dá muito trabalho para descobri-la, então agora iremos encontrar uma fórmula padrão para como achar o valor dela separando em 4 casos:

Tabela 4.2: Critério de divisibilidade para números primos terminados em 7.

Número primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
7	a+5b	a-2b
17	a+12b	a-5b
37	a+26b	a-11b
47	a+33b	a-14b
67	a+47b	a-20b
97	a+68b	a-29b

podemos verificar na tabela 4.2 que existe uma progressão aritmética na constante de decisão em relação ao número primo dado de razões 7 para a forma aditiva e razão -3 a cada 10 números.

Proposição 32. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$, então o critério de divisibilidade para os números primos que termina com 7 e maior ou igual que 7, chamemos esse número primo de P_7, é dado pelo seguinte teste $a+kb$, sendo na forma aditiva $k = \left(\frac{P_7-7}{10}\right) \cdot 7 + 5$ e forma subtrativa $k = \left(\frac{P_7-7}{10}\right) \cdot (-3) - 2$.*

Demonstração. $P_7 \mid N \Leftrightarrow P_7 \mid 10a + b \Leftrightarrow P_7 \mid 10(a + kb) + (b - 10kb)$,

$$\text{se } k = \left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot 7 + 5 \Rightarrow P_7 \mid b - 10\left[\left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot 7 + 5\right] b$$

$$\Leftrightarrow P_7 \mid b - (7P_7 - 49 + 50)\, b \Leftrightarrow P_7 \mid b - (7P_7 + 1)\, b$$

$$\Leftrightarrow P_7 \mid -7bP_7$$

$$\text{, e se } k = \left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot (-3) - 2 \Rightarrow P_7 \mid b - 10\left[\left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot (-3) - 2\right] b$$

$$\Leftrightarrow P_7 \mid b - (-3P_7 + 21 - 20)\, b \Leftrightarrow P_7 \mid b - (-3P_7 + 1)\, b$$

$$\Leftrightarrow P_7 \mid 3bP_7$$

Logo $P_7 \mid (a+kb) \Rightarrow P_7 \mid N$ para $k = \left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot 7 + 5$ ou $k = \left(\frac{P_7 - 7}{10}\right) \cdot (-3) - 2$. ∎

Tabela 4.3: Critério de divisibilidade para números primos terminados em 1.

Número primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
11	a+10b	a-b
31	a+28b	a-3b
41	a+37b	a-4b
61	a+55b	a-6b
71	a+64b	a-7b

podemos verificar na tabela 4.3 que existe uma progressão aritmética na constante de decisão em relação ao número primo dado de razões 9 para a forma aditiva e razão -1 a cada 10 números.

Proposição 33. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$, então o critério de divisibilidade para os números primos que termina com 1 e maior ou igual que 7, chamemos esse número primo de P_{11}, é dado pelo seguinte teste $a+kb$, sendo na forma aditiva $k = \left(\frac{P_{11}-11}{10}\right) \cdot 9 + 10$ e forma subtrativa $k = \left(\frac{P_{11}-11}{10}\right) \cdot (-1) - 1$.*

Demonstração. $P_{11} \mid N \Leftrightarrow P_{11} \mid 10a + b \Leftrightarrow P_{11} \mid 10(a + kb) + (b - 10kb)$,

$$\text{se } k = \left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot 9 + 10 \Rightarrow P_{11} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot 9 + 10\right] b$$
$$\Leftrightarrow P_{11} \mid b - (9P_{11} - 99 + 100)\, b \Leftrightarrow P_{11} \mid b - (9P_{11} + 1)\, b$$
$$\Leftrightarrow P_{11} \mid -9bP_{11}$$
$$\text{, e se } k = \left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot (-1) - 1 \Rightarrow P_{11} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot (-1) - 1\right] b$$
$$\Leftrightarrow P_{11} \mid b - (-P_{11} + 11 - 10)\, b \Leftrightarrow P_{11} \mid b - (-P_{11} + 1)\, b$$
$$\Leftrightarrow P_{11} \mid bP_{11}$$

Logo $P_{11} \mid (a + kb) \Rightarrow P_{11} \mid N$ para $k = \left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot 9 + 10$ ou $k = \left(\frac{P_{11} - 11}{10}\right) \cdot (-1) - 1$. ■

Tabela 4.4: Critério de divisibilidade para números primos terminados em 3.

Número primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
13	a+4b	a-9b
23	a+7b	a-16b
43	a+13b	a-30b
53	a+16b	a-37b
73	a+22b	a-51b
83	a+25b	a-58b

podemos verificar na tabela 4.4 que existe uma progressão aritmética na constante de decisão em relação ao número primo dado de razões 3 para a forma aditiva e razão -7 a cada 10 números.

Proposição 34. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$, então o critério de divisibilidade para os números primos que termina com 3 e maior ou igual que 7, chamemos esse número primo de P_{13}, é dado pelo seguinte teste $a+kb$, sendo na forma aditiva $k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot 3+4$ e forma subtrativa $k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot (-7)-9$.*

Demonstração. $P_{13} \mid N \Leftrightarrow P_{13} \mid 10a + b \Leftrightarrow P_{13} \mid 10(a + kb) + (b - 10kb)$,

$$\begin{aligned}
\text{se } k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot 3 + 4 &\Rightarrow P_{13} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot 3 + 4\right] b \\
\Leftrightarrow P_{13} \mid b - (3P_{13} - 39 + 40)\, b &\Leftrightarrow P_{13} \mid b - (3P_{13} + 1)\, b \\
&\Leftrightarrow P_{13} \mid -3bP_{13} \\
\text{, e se } k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot (-7) - 9 &\Rightarrow P_{13} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot (-7) - 9\right] b \\
\Leftrightarrow P_{13} \mid b - (-7P_{13} + 91 - 90)\, b &\Leftrightarrow P_{13} \mid b - (-7P_{13} + 1)\, b \\
&\Leftrightarrow P_{13} \mid 7bP_{13}
\end{aligned}$$

Logo $P_{13} \mid (a + kb) \Rightarrow P_{13} \mid N$ para $k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot 3 + 4$ ou $k = \left(\frac{P_{13}-13}{10}\right) \cdot (-7) - 9$. ■

Tabela 4.5: Critério de divisibilidade para números primos terminados em 9.

Número primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
19	a+2b	a-17b
29	a+3b	a-26b
59	a+6b	a-53b
79	a+8b	a-71b
89	a+9b	a-80b

podemos verificar na tabela 4.5 que existe uma progressão aritmética na constante de decisão em relação ao número primo dado de razões 1 para a forma aditiva e razão -9 a cada 10 números.

Proposição 35. *Seja $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ tal que $N = 10a+b$, então o critério de divisibilidade para os números primos que termina com 9 e maior ou igual que 7, chamemos esse número primo de P_{19}, é dado pelo seguinte teste $a+kb$, sendo na forma aditiva $k = \left(\frac{P_{19}-19}{10}\right) + 2$ e forma subtrativa $k = \left(\frac{P_{19}-19}{10}\right) \cdot (-9) - 17$.*

Demonstração. $P_{19} \mid N \Leftrightarrow P_{19} \mid 10a + b \Leftrightarrow P_{19} \mid 10(a + kb) + (b - 10kb)$,

$$\text{se } k = \left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) + 2 \Rightarrow P_{19} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) \cdot +2\right] b$$

$$\Leftrightarrow P_{19} \mid b - (P_{19} - 19 + 20)\, b \Leftrightarrow P_{19} \mid b - (P_{19} + 1)\, b$$

$$\Leftrightarrow P_{19} \mid -bP_{19}$$

$$\text{, e se } k = \left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) \cdot (-9) - 17 \Rightarrow P_{19} \mid b - 10\left[\left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) \cdot (-9) - 17\right] b$$

$$\Leftrightarrow P_{19} \mid b - (-9P_{19} + 171 - 170)\, b \Leftrightarrow P_{19} \mid b - (-9P_{19} + 1)\, b$$

$$\Leftrightarrow P_{19} \mid 9bP_{19}$$

Logo $P_{19} \mid (a + kb) \Rightarrow P_{19} \mid N$ para $k = \left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) + 2$ ou $k = \left(\frac{P_{19} - 19}{10}\right) \cdot (-9) - 17$. ■

4.4 Como aplicar em sala de aula

Anteriormente vimos e comprovamos algebricamente que o critério funciona, mas como podemos aplica-lo em sala de aula de forma que o próprio aluno desenvolva e crie o próprio critério?

Iremos dar uma ideia pode ser dada uma aula para que o aluno possa ir criando os critérios:

Exemplo 17. Por exemplo para o número primo 11, pense em um número que multiplicado por 10 e logo após subtraído por 1, seja múltiplo de 11. Temos que o número 10 satisfaz esse critério, pois $10 \cdot 10 - 1 = 99 = 9 \cdot 11$.

Logo o critério de divisibilidade para o número primo 11 será: pegue o último dígito de qualquer número inteiro, multiplicando-o por 10 e adicionando ao restante do número obterá um novo número e se este for divisível por 11 o número original o será.

Exemplo 18. Por exemplo para o número primo 13, pense em um número que multiplicado por 10 e logo após subtraído por 1, seja múltiplo de 13. Temos que o número 4 satisfaz esse critério, pois $4 \cdot 10 - 1 = 39 = 3 \cdot 13$.

Logo o critério de divisibilidade para o número primo 13 será: pegue o último dígito de qualquer número inteiro, multiplicando-o por 4 e adicionando ao restante do número obterá um novo número e se este for divisível por 13 o número original o será.

Exemplo 19. Por exemplo para o número primo 17, pense em um número que multiplicado por 10 e logo após subtraído por 1, seja múltiplo de 17. Temos que o número 12 satisfaz esse critério, pois $12 \cdot 10 - 1 = 119 = 7 \cdot 17$.

Logo o critério de divisibilidade para o número primo 17 será: pegue o último dígito de qualquer número inteiro, multiplicando-o por 12 e adicionando ao restante do número obterá um novo número e se este for divisível por 17 o número original o será.

Considerações finais

.

Neste trabalho apresentamos que a maioria dos critérios de divisibilidade que normalmente são estudados nas escolas, são de difícil memorização, pois os processos são todos distintos o que dificulta a sua memorização ou mesmo a demonstração de cada critério é um tanto complicado para os alunos, o que inviabiliza a sua aplicação em sala de aula. Portanto, resumimos em 4 casos que é de fácil memorização, quando é divisível por $2, 3, 5$ e para número primo p, com $p \geq 7$. Sendo que este último só é necessário calcular o valor inteiro de k para que $p \mid 1 - 10k$.

Assim podemos criar uma afirmação como Chika fez com os seus colegas, incentivando os alunos a perceber em como é aplicado os testes de divisibilidade através da afirmação: "Pegue o último dígito de qualquer número inteiro, multiplicando-o por k e adicione ao restante do número obterá um novo número e se este for divisível por p o número original o será."

Mostrando que os educadores têm a oportunidade de instigar os alunos à aprender sobre como funciona o teste de divisibilidade fazendo parecer um truque de mágica. Afinal quem não quer entender como uma mágica funciona? Desse ponto de vista o teste de divisibilidade têm um uso prático contínuo como uma ferramenta pedagógica cativante para o ensino de matemática séria.

Vale lembrar que um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão como dito por Guedes (1988).

Referências Bibliográficas

Andrini, A. (2012). Praticando a matemática. In *Coleção Praticando a Matemática 6^o ao 9^o ano*, página 260p. Editora do Brasil, 3rd edição.

Camelo, F. F. S. (2018). Um critério de divisibilidade sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de ausubel. Dissertação de Mestrado, UnB, Brasília-DF.

Costa, J. M. C. (1866). *Tratado de arithmetica*. Impressa Nacional, Lisboa. 376p.

Dickson, L. E. (1919). Divisibility and primality. In *History of the theory of numbers*, volume I, página 516p. Washington, Carnegie Institution of Washington.

Ellis, M. (2019a). Chika's test. Disponível em https://www.westminsterunder.org.-uk/chikas-test Acesso 29 de abr de 2020.

Ellis, S. (2019b). New maths? Disponível em www.simonellismaths.com/post/new-maths Acesso 21 de jan de 2020.

Guedes, M. G. P. (1988). Outros critérios de divisibilidade. *Revista Professor de Matemática*, 12:24 – 27p.

Hefez, A. (2016). Aritmética. In *Coleção Profmat*, página 284p. SBM, 2nd edição.

McDowell, E. L. (2018). Divisibility tests: A history and user's guide. *The American Mathematical Monthly*.

MEC (2020). Base nacional comum curricular. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso 17 de fev de 2020.

Papa Neto, A. (2020). Critérios de divisibilidade. Disponível em https://portal-dosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfuewdw2kdcg4.pdf Acesso 17 de fev de 2020.

Santos, J. P. O. (2011). Introdução à teoria dos números. In *Coleção Matemática Universitária*, página 195p. IMPA, 3rd edição.

Sousa, L. O. (2016). Sistema de numeração e aplicações. Dissertação de Mestrado, UESC, Ilhéus-BA.

Torres, G. Z. (2005). Divisibilidade por $3, 7, 9, 11, 13, 17, \ldots$. *Revista Professor de Matemática*, 58:21 – 24p.

Zarah, A. (1957). *Tractate 'Abodah Zarah of the Babylonian Talmud.* Jewish Theological Seminary of America, New York.