UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMATICA

AURICELIO CARNEIRO DE MORAIS

A MOTIVAÇÃO COMO ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

MOSSORÓ/RN
2020

AURICELIO CARNEIRO DE MORAIS

A MOTIVAÇÃO COMO ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. Odacir Almeida Neves

Co-orientadora: Prof.ª Ms. Maria de Lourdes Fernandes de Medeiros.

MOSSORÓ/RN

2020

M827m Morais, Auricelio Carneiro de.
A motivação como estratégia de aprendizagem da matemática / Auricelio Carneiro de Morais. - 2020.
90 f. : il.

Orientador: Odacir Almeida Neves.
Coorientadora: Maria de Lourdes Fernandes de Medeiros.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2020.

1. Matemática. 2. Motivação. 3. Aprendizagem. 4. Atividades. I. Neves, Odacir Almeida , orient. II. Medeiros, Maria de Lourdes Fernandes de , co-orient. III. Título.

AURICELIO CARNEIRO DE MORAIS

A MOTIVAÇÃO COMO ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 02 / 06 / 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Odacir Almeida Neves – UFERSA
Presidente e Orientador

Profª. Maria de Lourdes Fernandes de Medeiros – UFERSA
Co-orientadora

Profª. Franceliza Monteiro da Silva Dantas – UFERSA
Membro interno

Prof. Marcelo Bezerra de Morais – UERN
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2020

Irene das Dores de Morais, minha mãe, responsável pela minha educação e pelos sonhos da minha vida (In Memorian).

Pai, irmãos, sobrinhos, amigos e colegas de trabalho que torceram em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus;

Agradeço a minha família pelo cuidado com a minha educação;

Agradeço aos professores da minha vida;

Agradeço aos meus colegas de classe do PROFMAT;

Agradeço aos ex-presidentes Lula e Dilma e ao ex-ministro da educação Fernando Haddad pelas oportunidades criadas na educação brasileira, como o PROFMAT;

Agradeço à CAPES pelo incentivo financeiro;

Agradeço ao meu orientador, Odacir Almeida Neves, e a minha co-orientadora, Maria de Lourdes Fernandes de Medeiros, pelas contribuições dadas e pela paciência durante todo o processo de idealização, construção e apresentação;

Agradeço a professora Drª. Franceliza Monteiro da Silva Dantas pelas orientações e sugestões dadas ao meu projeto durante a disciplina Avaliação Educacional;

Agradeço a Banca Examinadora pelas críticas, elogios e sugestões;

Agradeço a minha madrinha Maria das Graças de Medeiros Galvão pelos inúmeros cafés feitos de madrugada durante todos esses anos de viagens a Mossoró;

Agradeço ao meu amigo Toinho Galvão pela companhia nas estradas do interior do estado do RN durante esses anos de estudo, abdicando muitas vezes de sua vida.

"Se todos os professores compreendessem que a qualidade do processo mental, não a produção de respostas corretas, é a medida do desenvolvimento educativo, algo de pouco menos do que uma revolução no ensino teria lugar na escola"

John Dewey

RESUMO

A crescente falta de interesse que muitos estudantes têm pela Matemática, o aumento gradativo nas deficiências em suas aprendizagens e a dificuldade em desenvolver as competências e habilidades necessárias para lograr êxito em sua aprendizagem são problemas que se refletem no baixo desempenho dos estudantes nas avaliações externas da Educação Básica e caracterizam situações que justificam a importância e relevância dessa pesquisa. A motivação como estratégia de aprendizagem da Matemática é a abordagem utilizada neste trabalho para o enfrentamento desses problemas. O seu objetivo geral é refletir sobre a motivação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como apresentar propostas de atividades baseadas nesta concepção. Com este objetivo buscamos tornar a aprendizagem da Matemática mais atrativa, propondo o encorajamento das potencialidades dos alunos e as reflexões sobre este processo. Além disso, propõe disponibilizar material didático para os professores utilizarem ou adaptarem para as suas aulas, utilizando as técnicas de motivação descritas no livro *A arte de motivar os estudantes do Ensino Médio para a Matemática* dos autores Alfred S. Posamentier e Stephen Krulik. Para tanto, utilizou-se uma abordagem qualitativa de natureza aplicada com objetivos exploratórios e descritivos através de uma pesquisa-ação, iniciando a partir do estudo teórico sobre a motivação na educação e as estratégias utilizadas para alcançá-la, prosseguindo com a seleção das atividades, formalizando a elaboração das estratégias de aplicação, a execução destas em sala de aula e, por fim, a análise das falas dos estudantes até chegar aos resultados. Desse modo, observou-se que as atividades propostas utilizando as técnicas de motivação abordadas atenderam aos objetivos propostos, pois motivaram os alunos durante a realização destas, dando-os voz e vez e, permearam discussões que ocorreram entre os próprios alunos e o professor durante todo o processo, as quais estão registradas no presente trabalho através de diálogos. Isso permite concluir que o emprego de atividades, alicerçadas nas técnicas de motivação, possibilitou averiguar em que nível de aprendizagem os alunos estão, além da possibilidade de analisar como estes aprendem, desmistificando a ideia de que apenas alguns alunos têm capacidade de compreender a Matemática. Tudo isso oportunizou uma maior motivação dos alunos pela Matemática, tão essencial e imprescindível para a construção de uma aprendizagem estabelecida na capacidade de resolver problemas qualquer que seja a situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la.

Palavras-chave: Matemática, Motivação, Aprendizagem, Atividades.

ABSTRACT

The growing lack of interest that many students have in Mathematics, togheter with the gradual increase in learning deficiencies and the difficulty in developing skills and abilities necessary to achieve success in their learning, are problems that are reflected in the low performance of students in external evaluations of Basic Education, and characterize situations that justify the importance and relevance of this research. Motivation as a strategy for mathematics learning is the approach used here to face these problems. Its general objective is to reflect the motivation in the mathematics teaching and learning process, as well as to present proposals for activities based on this conception. With this objective, we seek to make mathematics learning more attractive, proposing the encouragement of students' potential and reflections regarding this process. In addition, it proposes to make teaching material available for teachers to use or adapt for their classes, using the motivation techniques described in the book The Art of Motivating High School Students for Mathematics by the authors Alfred S. Posamentier and Stephen Krulik. Therefore, it was performed a qualitative approach of applied nature with exploratory and descriptive goals using a research action, starting from the theoretical study on motivation in education and strategies used to achieve it, continuing with activities selection, elaboration of application strategies, its execution in the classroom and, finally, the analysis of the students' statements until obtaining the results. Thus, it was observed that the activities proposed using the addressed motivation techniques met the proposed objectives, motivating the students during the activities realization and giving them voice and place, permeating discussions that occurred between the students and the teacher throughout the process, which are registered in the present work through dialogues. This allows us to conclude that the use of activities, based on motivation techniques, made it possible to verify in which level of learning the students are in, as well as the possibility to analyze how they learn, demystifying the idea that only few students have the capacity to understand Mathematics. All of this provided among the students greater motivation for mathematics learning, which is essential and indispensable for the construction of learnig based on the capacity to solve problems, whatever is the situation that requires the individual’s thinking to solve it.

Keywords: Mathematics; Motivation; Learning; Activities.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CPM	Colóquio Potiguar de Matemática
ENC	Exame Nacional de Cursos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PAPMEM	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RN	Rio Grande do Norte
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SEEC	A Secretaria de Estado da Educação e da Cultura do estado do RN
SIMAIS	Sistema Integrado de Monitoramento e Avaliação Institucional da SEEC
UFERSA	Universidade Federal Rural do Semi-Árido

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa contribui com os estudos sobre a aprendizagem da Matemática a partir de uma proposta que busca utilizar a motivação como estratégia de aprendizagem da Matemática no Ensino Médio frente a um cenário de desestímulo por grande parte dos alunos no que se refere ao estudo e aprendizagem da Matemática.

A desmotivação dos alunos pela Matemática é cada vez mais visível por meio do comportamento de imobilidade que eles apresentam cotidianamente nas aulas e por suas próprias falas quando expõe esse sentimento. Isso causa um déficit de aprendizagem que reflete os baixos resultados em avaliações internas e externas. Os resultados das avaliações internas são de conhecimento apenas das próprias escolas que as realizam.

Já os resultados[1] das principais avaliações externas, que medem o desempenho dos alunos em Matemática ao ingressar no Ensino Médio nas Escolas Brasileiras como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), e também ao término desta etapa, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), mostram que a maioria dos alunos concluem sua etapa de ensino sem adquirir as competências exigidas e as habilidades necessárias para compreender as situações que lhes são propostas no processo de aprendizagem.

Além dessas avaliações, os alunos da rede estadual de educação do estado do Rio Grande do Norte (RN) também fazem a prova do Sistema Integrado de Monitoramento e Avaliação Institucional da SEEC[2] (SIMAIS). Os resultados são semelhantes ao do cenário nacional, mostrando que os alunos concluem o Ensino Médio com uma proficiência média abaixo do básico, com padrões de desempenho classificados em quatro faixas: abaixo do básico; básico; proficiente e avançado.

O objetivo principal deste trabalho é refletir sobre a motivação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como apresentar propostas de atividades baseadas nesta concepção. Com esse objetivo, buscamos tornar a aprendizagem da Matemática mais atrativa, propondo o encorajamento das potencialidades dos alunos e as reflexões sobre este processo.

Além disso, possui objetivos específicos de propor a aplicação de atividades em sala de aula que estimulem os alunos para o estudo da Matemática no Ensino Médio, de

[1] Os resultados dessas avaliações nacionais aplicadas nas escolas brasileiras são divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).
[2] A Secretaria de Estado da Educação e da Cultura – SEEC/RN.

proporcionar reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem nessa etapa e de disponibilizar material didático para ser utilizado ou adaptado para a sala de aula.

A estruturação desta pesquisa compreende seis capítulos, iniciando com a introdução acerca do tema e prossegue realizando uma síntese dos próximos capítulos.

O segundo capítulo trata da metodologia e do contexto da pesquisa. Em relação ao ambiente em que ela ocorre e aos seus participantes, esta foi aplicada em sala de aula com os alunos e o professor da turma da 3ª série A_2 do Ensino Médio da Escola Estadual Senador José Bernardo (EESJB) em São João do Sabugi/RN.

O tipo de pesquisa utilizado consiste numa abordagem qualitativa de natureza aplicada. De acordo com Bicudo (2006, p.106), a pesquisa qualitativa "engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões". Seus objetivos são descritivos e exploratórios e consistem em realizar uma pesquisa-ação na qual é possível o pesquisador realizar reflexões a partir da valorização do pensamento do estudante de forma diferente do que ocorre normalmente, tentando construir modelos que validem a Matemática do aluno.

Nesse sentido, Borba (2004, p.242) esclarece que

> [...] falar em pesquisa qualitativa pode ser uma grande novidade, ou um grande desafio, para alguém que "trabalha com quantidades", como é o caso de professores de Matemática. Algumas perguntas podem surgir: por que realizar uma pesquisa qualitativa em vez de uma pesquisa quantitativa?

O próprio autor Borba (2004, p. 258) responde a esse questionamento: "podemos perceber, então, que pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações". Desse modo, a pesquisa qualitativa possibilita compreender como os alunos internalizam as leituras propostas e externalizam suas compreensões matemáticas.

Através desta possibilidade, o terceiro capítulo aponta que novos rumos devem ser explorados frente a situação de desmotivação vivida por boa parte dos professores e alunos, influenciando diretamente a forma como eles internalizam ou não os conteúdos matemáticos e, consequentemente, como aprendem. Portanto, a busca é justamente pela motivação dos estudantes para a Matemática. Mas como fazer isso se a maioria dos professores dispõe apenas do livro didático como única ferramenta didática e pedagógica?

As respostas aparecem em pesquisas matemáticas recentes através da utilização de recursos variados como as tecnologias, os materiais concretos e manipulativos, os jogos, a modelagem, a História da Matemática e a resolução de problemas. Tudo isso constitui abordagens didáticas e pedagógicas, todas com o objetivo de melhorar a aprendizagem dos alunos em Matemática.

Posteriormente, na subseção 3.1, são utilizados argumentos de estudos recentes em educação Matemática que apontam para a necessidade da motivação na educação, como as propostas apresentadas pelos autores Bzuneck (2019), Fainguelernt e Nunes (2019), Boaler (2018 e 2019), Posamentier e Krulik (2014). Em seguida, na subseção 3.2, são apresentadas as técnicas de motivação explanadas no livro *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática*, construídas por esses dois últimos autores.

Após esse estudo teórico, é mostrado no quarto capítulo a seleção de atividades, umas construídas, algumas adaptadas, outras reproduzidas integralmente de materiais de domínio público ou de reprodução autorizada, com a citação da fonte. Em todas elas, procurou-se utilizar, sempre que possível, as vivências e os materiais explorados nas disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA.

Os temas abordados nas atividades são os seguintes: aumentos e descontos sucessivos; desigualdade triangular e construção de triângulos; progressão aritmética; divisão euclidiana e periodicidade; princípio multiplicativo e triângulo de Pascal; criptografia e anagramas; sistemas lineares; pirâmide quadrangular reta e o cubo; e problemas de lógica.

Todas essas atividades foram idealizadas, escolhidas e planejadas de acordo com as técnicas de motivação tratadas no livro citado anteriormente e com estratégias de aplicação idealizadas para este trabalho.

Em seguida, no quinto capítulo, são dadas as percepções sobre todas as atividades realizadas em sala de aula a partir da relação com cada uma das técnicas de motivação associadas a elas.

Por fim, no sexto capítulo, são feitas as análises dos resultados e discussões ocorridas durante a aplicação das atividades. Todas registradas em diálogos, buscando sempre compreender como os alunos pensaram durante o processo para chegarem aos resultados de todas as atividades. Nessas considerações são realizadas reflexões sobre a proposta abordada e as suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

2 CONTEXTO DA PESQUISA E METODOLOGIA

Este capítulo se detém a explicitar a metodologia utilizada para desenvolver esta pesquisa, compreendendo o planejamento idealizado e os percursos utilizados até as reflexões realizadas. Também estabelece o contexto em que a pesquisa ocorre, detalhando seus personagens e as opções pelas escolhas realizadas.

2.1 Contexto da pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa foram 25 alunos (14 do sexo masculino e 11 do sexo feminino) da turma de 3ª série A_6[3] do Ensino Médio do turno vespertino, da Escola Estadual Senador José Bernardo no município de São João do Sabugi/RN (denominados por A, B, C, D, E etc), os quais foram convidados a participar das atividades (adesão espontânea).

Os encontros onde ocorriam as atividades e as discussões foram realizados uma vez por semana na sala de reuniões da escola, no período de agosto a dezembro de 2019, perfazendo um total de dezoito encontros, cada um com duas aulas seguidas de 50 minutos.

A escolha da turma da 3ª série A_6 como público alvo desta pesquisa levou em consideração que os alunos estão concluindo a etapa final do Ensino Médio e são candidatos a realizar as provas do ENEM e do SAEB e também devido à especificidade do seu horário escolar com duas aulas seguidas. Além do mais, essa poderia ser a oportunidade única desses alunos entrarem em contato com a metodologia utilizada nesta pesquisa.

O professor responsável por essa turma é o próprio pesquisador, Auricelio Carneiro de Morais, funcionário público da rede estadual de ensino desde 2006 com graduação na área (Licenciatura plena em Matemática pela UFRN no ano de 2004). Na escrita deste texto ele foi identificado apenas pelo nome "professor" e foi quem realizou as gravações de todas as discussões realizadas em sala de aula e transcritas nos diálogos do capítulo 4.

A escolha dos temas foi pensada de modo que os alunos pudessem rever os conteúdos curriculares envolvidos nas atividades sob uma nova perspectiva e que ao mesmo tempo servissem como revisão e preparação para as avaliações externas. Além disso, todas elas apresentam estratégias próprias de aplicação e estão acompanhadas de uma lista com os recursos necessários para o seu desenvolvimento em sala de aula.

---

[3] As siglas usadas para identificar as turmas do Ensino Médio não usam as letras sequenciais do alfabeto por gerar discussões sobre alunos "bons" e alunos "fracos". A nomenclatura usada é: $1A_1$, $1A_2$, $2A_3$, $2A_4$, $3A_5$ e $3A_6$.

2.2 Metodologia

O percurso metodológico teve como ponto de partida a detecção do problema gerador desta pesquisa que é o desestímulo e desmotivação dos alunos pela Matemática. Em seguida, foram realizadas pesquisas em busca de referenciais teóricos que abordassem a temática da motivação como proposta metodológica para sanar esse problema no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio.

A proposta desenvolvida neste trabalho compreende um total de nove atividades que foram selecionadas e estruturadas com temas variados do currículo de Matemática. Ela busca uma relação biunívoca com cada uma das nove técnicas de motivação do livro *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática* (2014), dos autores Posamentier e Krulik.

Durante a aplicação das atividades, as principais discussões e socializações realizadas entre os próprios alunos junto ao professor foram registradas pelo pesquisador e estão apresentadas no capítulo *Atividades para sala de aula, discussões e resultados* e, sua análise é discutida no capítulo seguinte, *Percepções sobre as atividades aplicadas.*

Desta forma, para o desenvolvimento da pesquisa utilizou-se os seguintes procedimentos metodológicos:

Quanto à caracterização da pesquisa, apresenta uma abordagem qualitativa, pois o objetivo é refletir sobre a motivação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como apresentar propostas de atividades baseadas nesta concepção. Para Bardin (2009, p. 141), a pesquisa qualitativa "é válida, sobretudo, na elaboração das deduções específicas sobre um acontecimento ou uma variável de inferência precisa, e não em inferências gerais".

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), numa pesquisa qualitativa os investigadores estão mais interessados pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Dessa forma, ela é descritiva e o significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba aspectos a respeito de percepções de diferenças e semelhanças no ambiente natural, em que ela ocorre de modo que os pesquisadores analisam as interações ocorridas e os dados observados de modo indutivo.

Em relação a sua natureza, classifica-se como pesquisa aplicada. De acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 35), "este tipo de pesquisa tem como objetivo gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos", assim como ocorre nesta pesquisa quando propõe abordar o problema gerador.

Quanto aos objetivos, a pesquisa aborda dois tipos: exploratória e explicativa. Em relação a este formato investigativo, Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 70) esclarece que "o pesquisador procura explicar as causas dos problemas ou fenômenos, isto é, busca o porquê das coisas". De modo geral, tem por finalidade oferecer melhor familiarização sobre o objeto de estudo, construir hipóteses e oportunizar a sua verificação a partir do universo pesquisado, tornando o problema mais compreensível a partir das intervenções realizadas.

Quanto aos procedimentos técnicos, é usado um processo investigativo de pesquisa-ação que compreende uma prática investigativa, reflexiva e educativa. De acordo com Thiollent (1986), este tipo de pesquisa é elaborada e desenvolvida em relação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo de tal modo que o pesquisador e participantes estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Assim sendo, a prática educativa investigada pelo pesquisador permite que este observe, compreenda e mude o ambiente a ser estudado em direções que proporcionem maior liberdade de ação, pensamento e expressão, tanto dos participantes, quanto do pesquisador, assim também como possibilita reflexões sobre essas ações ocorridas.

3 A MOTIVAÇÃO DOS ESTUDANTES PARA A MATEMÁTICA

Há pesquisas recentes mostrando que os resultados pouco satisfatórios na aprendizagem da Matemática estão associados à desmotivação de docentes e discentes. Neste capítulo, será abordado como isso interfere na aprendizagem dos alunos e no interesse pela Matemática. Além disso, ele também apresenta as técnicas motivacionais[4] que propõem estimular o interesse dos alunos pela Matemática.

3.1 A importância da motivação

Atrelado aos resultados expostos no segundo capítulo, está a desmotivação de professores e alunos. Estudos apontam que são vários os motivos responsáveis pela desmotivação dos professores, que vão desde os salários baixos às condições péssimas de trabalho. O mesmo ocorre também com os alunos que enfrentam condições socioeconômicas desfavoráveis, falta de professores e escolas sucateadas.

Entretanto, o objeto de estudo aqui não é discutir as causas e fatores que levam a situação de desmotivação dos professores. A abordagem desta pesquisa compreende a aprendizagem dos alunos e o que está atrelado a esse processo de desmotivação.

De acordo com Sadovsky (2010, p. 13), em seu livro *O ensino de matemática hoje – enfoques, sentidos e desafios*, “o trabalho da maioria dos docentes, e não exclusivamente dos que se dedicam à matemática, é hoje, marcado pelo signo de frustação: os professores têm a sensação de estar forçando os alunos a ir para um lugar que, aparentemente, não os atrai”.

Colaborando com essa ideia, Bzuneck afirma que:

> A motivação tornou-se um problema de ponta em educação, pela simples constatação de que, em paridade de outras condições, sua ausência representa queda de investimento pessoal de qualidade nas tarefas de aprendizagem. Alunos desmotivados estudam pouco ou nada e, consequentemente, aprendem muito pouco. Em última instância, aí se configura uma situação educacional que impede a formação de indivíduos

[4] Técnicas apresentadas no livro *A Arte de Motivar os Estudantes do Ensino Médio para a Matemática*, dos autores Alfred S. Posamentier e Stephen Krulik.

> mais competentes para exercerem a cidadania e realizarem-se como pessoas, além de se capacitarem a aprender pela vida afora. (BZUNECK, 2009, p. 13).

A desmotivação dos alunos pela Matemática acarreta problemas no processo de ensino e aprendizagem, ocasionando situações como falta de interesse deles e sentimento de incapacidade em aprender, chegando muitas vezes, até mesmo a criar uma apatia pela disciplina. Isso é mais intenso no Ensino Médio, pois essa situação já se arrasta desde o Ensino Fundamental e é comprovada através dos resultados do SAEB, disponíveis no site do INEP.

Boaler (2019, p. 34), em seu livro *O que a Matemática tem a ver com isso?,* relata que “outro grande problema com abordagens passivas da matemática é que os alunos trabalham em silêncio. Para alguns, essa pode parecer ser a melhor condição para a aprendizagem, mas isso está longe da verdade”.

Isso retrata bem o que ocorre na maioria das salas de aula com os professores dispostos em frente ao quadro, escrevendo ou explicando um assunto e com os alunos prestando atenção e, logo após, com o docente pedindo para eles realizarem alguns exercícios do livro didático[5] para checar se aprenderam o assunto.

Esse recurso é importante e merece nossa atenção, pois está fortemente presente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio e o modo como o utilizamos pode ser determinante, como afirma Molina (1988, p.10):

> [...] a utilização do livro didático colocava-se, na maioria dos casos, como um “substituto” do ato pedagógico. Sem tempo para ler, pesquisar e atualizar-se, com um número muito grande de aulas por dia, sem muito parâmetro para analisar os conteúdos de ensino, com muitas turmas para atender, sem motivação ou entusiasmo para sair da rotina.

Essa visão se torna atual, visto que se têm muitos professores com dupla jornada de trabalho em duas ou mais escolas e com muitas turmas para lecionar, além dos baixos salários como fator desmotivante. Desse modo, em grande parte das escolas brasileiras, é o livro didático quem dita ao professor o que fazer no dia a dia das salas de aula. Contudo, somente a sua utilização não é suficiente para abranger as demandas e necessidades dos estudantes.

[5] Que faz parte do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), desenvolvido pelo governo federal e que atende as escolas públicas de educação básica, com o objetivo de disponibilizar livros didáticos de qualidade.

Nesta perspectiva, o ensino da Matemática necessita de uma abordagem inovadora que vá além da simples utilização de livros didáticos, quadro e giz. Esse ensino deve se sustentar em algo que seja intrínseco ao próprio processo de aprendizagem da Matemática e por isso é necessário que o aluno não seja visto apenas como mero coadjuvante no processo. De acordo com Sadovsky (2010, p.14)

> Desafiar um aluno significa propor situações que ele considere complexas, mas não impossíveis. Trata-se de gerar nele uma certa tensão, que o anime a ousar, que o convide a pensar, a explorar, a usar conhecimentos adquiridos e a testar sua capacidade para a tarefa que tem em mãos. Trata-se, ainda, de motivá-lo a interagir com seus colegas, a fazer perguntas que lhe permita avançar.

A motivação constitui ferramenta essencial para alcançar esse avanço. Tão importante quanto a motivação é o meio utilizado para alcançá-la. Nesse aspecto, Boaler esclarece, e ao mesmo tempo reforça, que

> Todo professor sabe que ótimas tarefas matemáticas constituem um recurso maravilhoso. Elas podem fazer a diferença entre estudantes inspirados e felizes e estudantes desmotivados e distantes. As tarefas e questões usadas ajudam a desenvolver mentalidades matemáticas e criar as condições para uma compreensão conectada e profunda. (2018, p. 51).

É durante a realização dessas tarefas que se tem a ideia de como os alunos entendem, criam estratégias e resolvem os problemas e, além disso, veem os erros cometidos durante o processo. Essas ações são importantes para a aprendizagem Matemática, pois, ainda de acordo com Boaler,

> Em nosso trabalho com estudantes, descobrimos que quando eles percebem que os erros são úteis para o cérebro, apresentam uma mudança significativa. É maior a sua disposição para se esforçarem e se empenharem na matemática, sendo também mais persistentes. Entender a força que tem os erros é essencial, já que crianças e adultos, nos mais diferentes ambientes, frequentemente se sentem muito mal quando cometem um erro em matemática. (2018, p. 46).

Nesse sentido, concebe-se o erro do aluno como um recurso didático importante no processo de ensino e aprendizagem e que, sendo aproveitado sob a mediação do professor, constitui ferramenta imprescindível para desenvolver a aprendizagem Matemática.

Além disso, Bzuneck (2009, p. 3) defende que “os aspectos relacionados a motivação podem alterar-se em função do tipo de tarefa, da influência dos colegas, do *feedback* recebido no percurso e assim por diante”. Isso mostra a importância do caminho trilhado em detrimento apenas do resultado numérico.

Nesse sentido, os estudos recentes propõem acabar com essa cultura de desvalorizar os erros ocorridos no processo de aprendizagem ou, o que é ainda pior, de penalizá-los. Além disso, é necessário desmistificar o pensamento de que apenas algumas pessoas são aptas e por isso conseguem apreender a Matemática.

Ao falar da sala de aula, Fainguellernt e Nunes (2012, p. 23) afirmam que “nesse espaço devemos ter mais recursos, que vão muito além do giz e do livro didático”. Na verdade, isso já é realidade, assim como mostram diversas pesquisas recentes na área da Educação Matemática que fazem uso de variados recursos como a história da Matemática, a modelagem, os jogos, as tecnologias e a resolução de problemas, dentre outros.

A partir das ideias das autoras, pode-se apresentar algumas sugestões de propostas que visem promover uma reorganização do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio da apresentação dos conteúdos matemáticos de uma maneira mais atrativa e participativa. Nesse sentido, são apresentadas a seguir técnicas de motivação baseadas no livro de Alfred S. Posamentier e Stephen Krulik.

3.2 As técnicas de motivação

De acordo com Posamentier e Krulik (2014, p. 16), “Motivar alunos é canalizar os seus interesses para o tema específico a ser aprendido”. Essa deve ser a maior preocupação para os professores ao planejar suas aulas, pois o início da aula é a oportunidade de atrair e prender a atenção dos alunos, fazendo-os interagir na aula e tornando o restante do processo mais eficaz.

Dessa forma, a preparação da aula e sua organização inicial são peças chave para obter a atenção dos alunos e atingir a aprendizagem almejada. Tudo isso através da interação estabelecida entre os próprios alunos e o professor.

A motivação, ainda segundo Posamentier e Krulik (2014, p. 16), pode ser estabelecida de dois tipos: a extrínseca, que ocorre sob a orientação do professor no ambiente de aprendizagem e sem o controle do aluno e a intrínseca, que ocorre no próprio aluno e pode ser mediada pelo professor. Nesse sentido, foram criadas técnicas para motivar os alunos para a Matemática utilizando estratégias adequadas para atingir essa motivação.

Esses dois autores propuseram nove técnicas de motivação, a saber: indique uma lacuna no conhecimento dos alunos; descubra um padrão; apresente um desafio; instigue a turma com um resultado matemático surpreendente e impressionante; explique a utilidade de um tema; utilize a matemática recreativa; conte uma história pertinente; envolva os alunos ativamente na justificativa de curiosidades matemáticas; use materiais feitos pelo professor ou vendidos prontos.

A primeira estratégia, *instigue a turma com um resultado matemático surpreendente e impressionante*, é bastante motivadora, principalmente quando o resultado é inesperado ou uma “pegadinha”, estimulando a curiosidade dos alunos e até de professores, fazendo com que elaborem e testem hipóteses diversificadas.

A segunda estratégia, *indique uma lacuna no conhecimento dos alunos*, possibilita que os estudantes busquem novos conhecimentos quando for preciso para sanar uma lacuna surgida nas situações problemas que lhes são propostas. Apesar deles as compreenderem inicialmente, surge a necessidade da busca de novos conhecimentos após mudanças ocorrerem durante o percurso.

Utilize a matemática recreativa é uma estratégia com grande potencial. Os jogos constituem um bom exemplo disso e apresenta a característica de motivar por si só. Proporcionam entretenimento na medida que suas potencialidades são exploradas no processo de ensino e aprendizagem, além da possibilidade de serem usados para introduzir um conceito, checar resultados, observar padrões, sistematizar conhecimentos e trocar experiências e saberes entre os pares.

Na Matemática, a busca por regularidades é extremamente necessária para a compreensão de eventos e fenômenos que ocorrem e que, de alguma forma, voltarão a se repetir. Então a quarta estratégia, *descubra um padrão*, pode ser usada para desenvolver o conceito que se quer ensinar. A busca por esse padrão é motivadora na medida que os alunos têm curiosidades em descobrir o que vem depois ou o que está faltando.

A quinta estratégia, *conte uma história pertinente*, é importante para compreender que muitas das dificuldades epistemológicas que os alunos possuem em determinados conteúdos matemáticos é, na verdade, uma dificuldade histórica. A história da Matemática mostra que foram as necessidades em resolver problemas práticos do cotidiano, como a demarcação das terras após as cheias do rio Nilo, que impulsionaram a resolução de problemas matemáticos. Além deste viés histórico, também é possível utilizar textos de ficção literária como os produzidos pelos autores Malba Tahan e Ian Stewart.

Geralmente se ouve muitos alunos fazerem perguntas do seguinte tipo em sala de aula: onde vou usar isso na minha vida? Por isso, a sexta estratégia – *explique a utilidade de um tema* – possibilita apresentar respostas para esses questionamentos e, ao mesmo tempo, mostrar a importância da Matemática para explicar várias situações do nosso cotidiano.

Já em *Apresente um desafio* busca-se algo que motiva o aluno a encontrar uma solução para o que lhe é proposto. Entretanto, essa sétima estratégia deve dosar bem o nível de dificuldade levando ao conteúdo da lição, de modo que não seja fácil demais para desmotivá-los, nem difícil demais para fazê-los desistir.

A penúltima estratégia de motivação – *use materiais feitos pelo professor ou vendidos prontos* – consiste na utilização de materiais manipulativos como os que existem nos laboratórios de Matemática ou os construídos pelos próprios alunos por meio de oficinas elaboradas para investigar determinados conteúdos e constatar certas propriedades.

A utilização de passatempos, quebra-cabeças e problemas tem um papel importante na matemática e constituem recursos que podem ser utilizados na última estratégia de motivação: *envolva os alunos ativamente na justificativa de curiosidades matemáticas*. Os alunos devem estar familiarizados com a atividade proposta antes que o professor peça a eles que a justifiquem.

Para cada técnica é dado um tema com o(s) conteúdo(s) matemático(s) envolvido(s), os materiais ou equipamentos necessários para a realização das atividades[6] em sala de aula e a aplicação da estratégia de motivação com as orientações adequadas para o professor desenvolver ou adaptar para a sua realidade.

Entretanto, para que estas estratégias tenham êxito, Posamentier e Krulik estabelecem algumas regras, a saber:

> 1. A atividade motivacional deve ser relativamente breve.
> 2. A atividade motivacional não deve ser exagerada. Ela deve ser um meio para um fim, não um fim em si mesma
> 3. A atividade motivacional deve evocar o objetivo da lição no aluno. (isso ajuda a determinar a real eficácia que a motivação teve.)
> 4. A atividade motivacional deve ser apropriada para o nível de habilidade, a prontidão e os interesses dos alunos.
> 5. A atividade motivacional deve se basear em motivações realmente presentes nos alunos. (2014, p. 20).

[6] Todas estas atividades são adequadas para a faixa etária dos alunos do Ensino Médio e compatíveis com o seu nível de desenvolvimento cognitivo.

Portanto, como sugestão inicial, sugere-se que o professor deva considerar os conhecimentos prévios dos alunos, partindo do que eles acreditam ser mais interessante e, em seguida, propor atividades que os empolguem na busca da solução, considerando a resposta numérica tão importante quanto todo o percurso usado para chegar a este resultado. Contudo, espera-se que os alunos se sintam capazes e estimulados em aprender Matemática.

4 ATIVIDADES PARA SALA DE AULA, DISCUSSÕES E RESULTADO

As atividades propostas a seguir são baseadas nas estratégias de motivação do livro *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática*, dos autores Alfred S. Posamentier e Stephen Krulik. As discussões destas atividades serão apresentadas através das transcrições dos principais diálogos ocorridos entre os próprios estudantes e o professor da turma da 3ª série B do Ensino Médio da Escola Estadual Senador José Bernardo (EESJB) em São João do Sabugi/RN. Os resultados das atividades apresentarão a ótica de visão dos alunos, mostrando como estes concebem e desenvolvem seus pensamentos e ideias.

4.1 Atividade 1 – Tema: aumentos e descontos sucessivos

Esta atividade[7] consiste em duas questões que abordam a técnica de motivação: *instigue a turma com um resultado matemático surpreendente e impressionante*. Isso ocorre justamente por apresentar um resultado inesperado, pois o apostador tem o número de derrotas igual ao de vitórias, o que leva muitos alunos a crerem que terminará com o mesmo valor apostado inicialmente.

Atividade 1:

1. Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

A) Ganha dinheiro.

B) Não ganha dinheiro nem perde dinheiro.

[7] A questão 1 foi transcrita do livro de CARVALHO, Paulo Cesar; MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta.** SBM, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2015, p. 49-50 (coleção do PROFMAT). Já a questão 2, foi uma adaptação da questão número 1, elaborada por mim.

C) Perde R$ 27,00.

D) Perde R$ 37,00.

E) Ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

2. Se ao invés de três derrotas e três vitórias, essa pessoa obtivesse quatro vitórias e duas derrotas, com as mesmas condições de ganhar metade do que tem a cada vitória e perder metade do que tem a cada derrota, ambas em relação a quantia que possui na ocasião. Ao término, a pessoa ganharia ou perderia dinheiro?

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, software Excel, quadro branco, papel, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Apresentou-se inicialmente aos alunos somente o enunciado do problema (sem as alternativas). Solicitou-se para eles explicarem o que entenderam do enunciado e depois foi sugerido que criassem estratégias para chegar à solução e socializar o que foi encontrado. Em seguida, indagou-se: a ordem em que a pessoa ganha ou perde é importante para determinar o resultado do problema? Essa ordem pode gerar respostas diferentes?

Depois, foram apresentadas as tabelas construídas na planilha do Excel, com os cálculos de todas as situações possíveis de ganhos e derrotas da primeira questão [8](Figuras 1 e 2) e da tabela dos cálculos da questão 2.

Posteriormente, foi mostrado o cálculo da tabela com outros valores apostados, digitando-os na célula realçada em amarelo e depois dando um *enter*. Observe que feito isso, os cálculos são realizados automaticamente. Foi reforçada a atenção para o fato de que, independentemente do valor, a perda é sempre igual em qualquer uma das vintes possibilidades. Em seguida, apresentou-se as alternativas do problema e relacionou-se a atividade ao assunto de porcentagem por meio dos acréscimos e descontos sucessivos e o fator acumulado, de acordo com os comentários abaixo. A Figura 1 a seguir apresenta a tabela da primeira questão desta atividade, detalhando cada possibilidade de aposta e está localizada na planilha 1 do arquivo em Excel.

[8] Disponível no link: https://1drv.ms/x/s!AkchMx7ZtpR4kzoQpEs4mUn1JVa2?e=xS9B6K . Link para tabelas dos cálculos da questão 2: https://1drv.ms/x/s!AkchMx7ZtpR4kzwzmDCJFlprDLhW?e=k0g6ZX.

Figura 1 – Cálculo da aposta por etapas.

Aposta	Possibilidades	Jogadas						Resultado
64	V V V D D D	96	144	216	108	54	27	-37
	V V D V D D	96	144	72	108	54	27	-37
	V V D D V D	96	144	72	36	54	27	-37
	V V D D D V	96	144	72	36	18	27	-37
	V D V V D D	96	48	72	108	54	27	-37
	V D V D V D	96	48	72	36	54	27	-37
	V D V D D V	96	48	72	36	18	27	-37
	V D D V V D	96	48	24	36	54	27	-37
	V D D V D V	96	48	24	36	18	27	-37
	V D D D V V	96	48	24	12	18	27	-37
	D D D V V V	32	16	8	12	18	27	-37
	D D V D V V	32	16	24	12	18	27	-37
	D D V V D V	32	16	24	36	18	27	-37
	D D V V V D	32	16	24	36	54	27	-37
	D V D D V V	32	48	24	12	18	27	-37
	D V D V D V	32	48	24	36	18	27	-37
	D V D V V D	32	48	24	36	54	27	-37
	D V V D D V	32	48	72	36	18	27	-37
	D V V D V D	32	48	72	36	54	27	-37
	D V V V D D	32	48	72	108	54	27	-37

V - Vitória
D - Derrota

Fonte: autoria própria (2019).

A imagem da Figura 2 a seguir apresenta outra tabela com cálculos diretos e está localizada na planilha 2 do mesmo arquivo. Apresentou-se aos alunos que o cálculo pode ser feito de modo direto usando os fatores acumulados de 1,5 e 0,5 em qualquer ordem e o resultado final de R$ 37,00 será obtido. De modo semelhante, caso seja alterado o valor da aposta, o cálculo é realizado automaticamente na tabela.

Figura 2 – Cálculo da aposta direto.

Aposta	Resta	Resultado
64	27	-37

Fonte: autoria própria (2019).

As tabelas da questão 2 foram utilizadas pelo professor no projetor para mostrar aos alunos todos os quinze resultados possíveis com quatro vitórias e duas derrotas.

Comentários sobre a aplicação da Atividade:

Em geral, os alunos escolhem uma ordem para ver o que acontece, aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela venceu as três primeiras apostas e perdeu as últimas três, o seu capital evoluiu de acordo com o esquema: *64 → 96 → 144 → 216 → 108 → 54 → 27*.

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, ela perdeu R$ 37,00. Já houve um progresso. Sabe-se agora que a resposta só poderá ser (D) ou (E).

Os alunos costumam experimentar uma outra ordem, por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente. Obteve-se: *64 → 96 → 48 → 72 → 36 → 54 → 27*. Nessa ordem a pessoa também perdeu R$ 37,00.

Em seguida, experimentam outra ordem, torcendo para que a pessoa não termine com R$ 27,00, o que permitiria concluir que a resposta é (E). Infelizmente encontram que a pessoa novamente termina com R$ 27,00 e permanecem na dúvida. Alguns se dispuseram a tentar todas as ordens possíveis, mas logo desistiram ao perceber que há 20 ordens possíveis.

Resolução:

1. A melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da grandeza, e sim no valor da grandeza depois da variação. Neste problema, devemos pensar assim: Cada vez que ganha, o capital aumenta $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ do que valia. Cada vez que perde, o capital diminui de $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ do que valia. Pensando assim, fica claro que se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução de seu capital se dá de acordo com o esquema:

$$64 \to 64 \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Ela termina com:

$$64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27\ reais$$

Além disso, fica claro também que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$ 27,00. Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, ela perdeu R$ 37,00. A resposta é (D).

2. Em relação a questão dois usando o fator acumulado de modo semelhante ao que foi feito com a questão um, teremos:

$$64 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 81\ reais$$

Desse modo, há um ganho de 81 – 64 = 17 reais.

4.1.1 Discussões e resultado

No decorrer da aplicação da atividade, surgiu o primeiro questionamento realizado por um aluno:

― **Aluno A:** se o número de vitórias e derrotas é igual, então ele nem ganha, nem perde, né professor?

― **Professor:** você já realizou algum cálculo para chegar a esse resultado, A? Neste caso ele terminou com quantos reais?

― **Aluno A:** não. Vou fazer pra ver.

Nesse exato momento outro aluno interrompeu e já apresentou uma explicação de como compreendeu o problema:

― **Aluno D:** mais se ele ganhar primeiro vai ficar com 64 + 32 = 96 reais e se perder depois vai ficar com 96 – 48 = 48 reais e não 64 reais.

― **Aluno A:** Ah, agora entendi. Ele ganha 32 se vencer, mas se perder, não perde 32 reais. Ele vai perder metade do que já conquistou que foi 96 reais.

Essa dúvida inicial de que não houve ganho nem perda, já que o número de derrotas é igual ao de vitórias, é comum ocorrer quando o aluno não realiza uma leitura atenta, já que ele perde ou ganha metade do que tem na jogada anterior, e não no início. Em seguida, outra dúvida foi levantada por outros dois alunos:

― **Alunos B e C:** em qual ordem ocorrem as vitórias e as derrotas?

― **Professor:** releiam o enunciado com atenção, por favor.

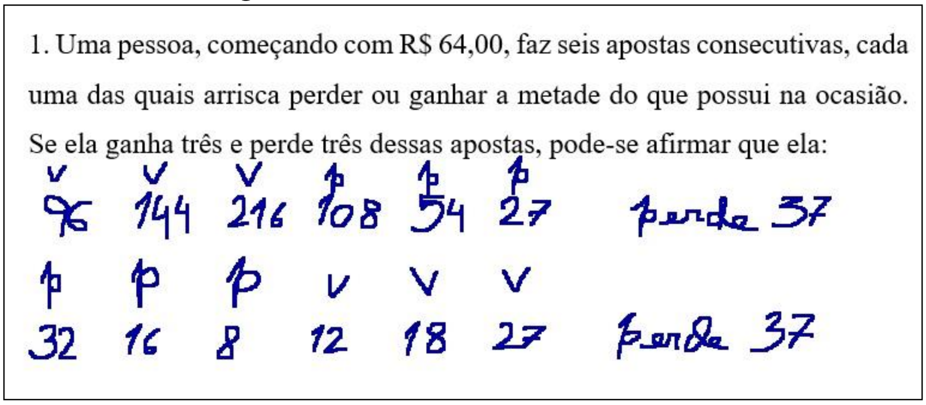
― **Aluno B:** o enunciado não diz qual a ordem.

― **Professor:** Então posso fazer o quê?

— **Aluno C:** vou escolher uma ordem aqui e calcular. Depois troco a ordem e vejo se o resultado dá o mesmo ou dá diferente.

O Aluno *C* escolheu duas ordens e comprovou que o resultado final foi o mesmo, apresentado na Figura 3 seguinte. A ausência de informação da ordem em que ocorrem as vitórias e derrotas no enunciado da questão levou os alunos a elaborarem estratégias diversificadas de resolução.

Figura 3 – Cálculo feito de duas maneiras.


1. Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

v v v p p p
96 144 216 108 54 27 perda 37
p p p v v v
32 16 8 12 18 27 perda 37

Fonte: autoria própria (2019).

Percebeu-se que alguns alunos tiveram essa dificuldade inicial de saber qual a ordem em que ocorre as vitórias e derrotas, algo que o enunciado da questão não delimita. No entanto, adotaram estratégias que, independente da ordem escolhida, chegava ao mesmo resultado. Outros alunos escolheram ordens diferentes e obtiveram o mesmo resultado também. Então, foi questionado:

— **Professor:** Quantas sequências de resultados possíveis posso obter? Em todas elas o resultado será o mesmo?

— **Aluna D:** basta usar análise combinatória para achar a quantidade total de casos, professor.

— **Professor:** Como? Qual método de contagem?

— **Aluna D:** permutação com repetição, já que são três derrotas e três vitórias e elas são iguais.

— **Aluna D:** já fiz com dez ordens e tá dando o mesmo resultado.

A aluna *D* usou corretamente a fórmula de permutação com repetição e achou o resultado correto, que são 20 sequências. Outros alunos ficaram intrigados porque independentemente da ordem escolhida sempre o jogador perderá R$ 37,00. Nesse momento foi apresentada via projeção a primeira tabela que calcula todas as 20 possibilidades. Em seguida, alterou-se o valor da aposta para outro, como exemplo, R$ 128,00, e dado um *enter*.

Então, perceberam que em qualquer uma das ordens escolhidas sempre termina com R$ 54,00, perdendo R$ 74,00.

Posteriormente, foi apresentada a tabela menor e feito o mesmo, ou seja, trocou-se o valor da aposta e novos questionamentos surgiram:

― **Professor:** por que a ordem das vitórias e derrotas escolhidas não irá modificar o resultado?

― **Aluna C:** porque é uma multiplicação e a ordem dos números multiplicados vai dar o mesmo resultado, mesmo mudando a ordem deles.

― **Professor:** hummm, bom! A ordem dos fatores não altera o produto. Isso é a propriedade comutativa da multiplicação.

A percepção de que a ordem escolhida não modifica o resultado foi bem compreendida quando a solução do problema foi apresentada usando o fator acumulado dos descontos (perdas) e aumentos (ganhos):

$$64 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 27\ reais$$

Além disso, ainda houve um aluno que calculou a probabilidade do resultado do jogador:

― **Aluna E:** nesse formato de três derrotas e três vitorias ele sempre perde 42,19% do dinheiro que possui.

― **Professor:** como você chegou a esse resultado, *E*?

― **Aluna E:** dividi 37 por 64.

― **Professor:** mas o resultado dessa divisão é igual a 57,81%? Como achou 42,19%?

― **Aluna E:** isso. Depois só foi subtrair de 100%.

Em relação a segunda questão, os alunos já calcularam usando o fator acumulado, através do produto, de modo semelhante ao feito com a questão um:

$$64 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 81\ reais$$

Nesse sentido, os alunos perceberam que sempre haverá um ganho de 17 reais se o formato for de 4 vitórias e 2 derrotas.

Por tanto, nessa aula percebeu-se que o problema motivou os alunos, pois começaram fazendo questionamentos e, logo após, partiram na busca por alguma estratégia para resolvê-lo, uns com lápis e papel e outros testando com calculadora. O ápice da compreensão se deu quando foi trocado o valor da aposta na célula destacada em verde e obteve-se o mesmo resultado nas 15 situações possíveis da primeira questão.

Notou-se que, durante a aplicação da atividade, até aqueles alunos menos participativos nas aulas se engajaram na busca de estratégias para a solução. A atividade foi instigante, pois envolveu todos durante a aula e provocou discussões sobre qual a estratégia mais extensa e qual a mais curta.

O uso da tabela no Excel possibilita dirimir qualquer dúvida que os alunos possam ter nesse sentido, testando todas as hipóteses possíveis para a referida situação e para outras tantas que desejarem, economizando na realização dos cálculos e observando as alterações que ocorrem simultaneamente e em tempo real.

4.2 Atividade 2 – Tema: desigualdade triangular e construção de triângulos

A técnica de motivação utilizada nesta atividade 2, *indique uma lacuna no conhecimento dos alunos,* é adequada, pois muitos alunos têm a ideia errônea de que com três medidas quaisquer sempre poderei formar um triângulo. Deste modo, surge uma lacuna no conhecimento deles quando propomos uma situação que, mesmo com três medidas dadas, não será possível construir o triângulo desejado.

Atividade 2:

1. Qual das alternativas abaixo apresenta as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo?

a) AB = 5cm, AC = 3cm e BC = 4cm.
b) AB = 5cm, AC = 3cm e BC = 2cm.
c) AB = 5cm, AC = 2cm e BC = 2cm.

2. Como construo um triângulo a partir de três medidas dadas?
3. Sempre poderei construir um triângulo a partir de três medidas quaisquer? Qual a condição necessária para que isso ocorra?
4. Natália irá construir uma árvore de natal no formato triangular para colocar na praça central de sua cidade. O esqueleto da árvore é no formato triangular. Se dois lados desse triângulo medem 3 m e 4 m. Quais as possíveis medidas do terceiro lado?

Materiais ou equipamentos necessários:

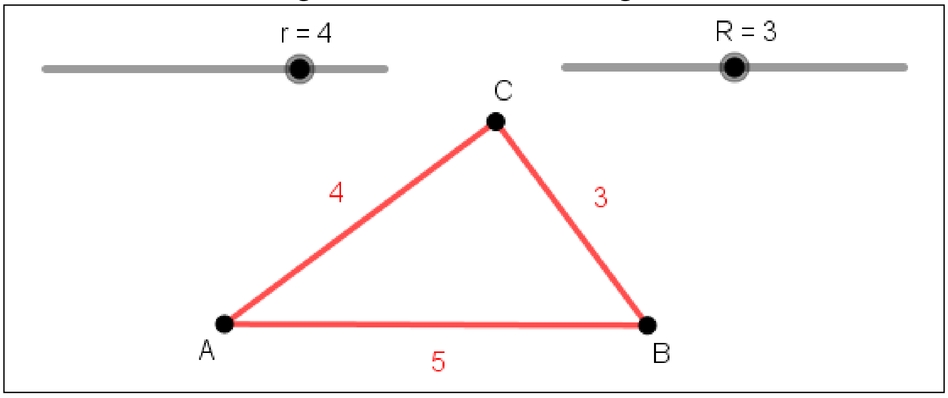
Projetor com o software GeoGebra, quadro branco, papel, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Iniciou-se a aula realizando uma sondagem com duas perguntas centrais: como construo um triângulo a partir de três medidas dadas? Sempre poderei construir um triângulo a partir de três medidas quaisquer? Para isso, foi distribuída para os alunos a atividade 2 impressa.

Depois dos alunos apresentarem seus entendimentos para responder as duas perguntas, apresentou-se o triângulo ABC no GeoGebra com medida fixa do lado $AB = 5$ e com os lados $AC = r$ e $BC = R$ com medidas variando de 1 a 5 e de 1 a 10, respectivamente, como mostra a Figura 4 a seguir.[9]

Figura 4 – Existência de triângulo.



Fonte: autoria própria (2019).

Em seguida, variou-se os controles deslizantes associados a r e R (para isso basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre o ponto e depois clicar em animar). Posteriormente, algumas perguntas foram feitas aos alunos: o que acontece quando ocorre $AC + BC = AB$?; E se em vez disso ocorrer $AC + BC < AB$?; Podemos formar um triângulo com quaisquer medidas dos lados AC e BC nos intervalos dados e com AB fixo?; Quais são as condições necessárias para um triângulo existir?

Foi dado um certo tempo para que os alunos percebessem certas ocorrências nesta 1ª parte da atividade, por exemplo, que a soma de dois lados quaisquer é sempre maior que a medida do terceiro lado (condição necessária para que o triângulo exista). Isso foi importante para que eles pudessem explorar as situações propostas.

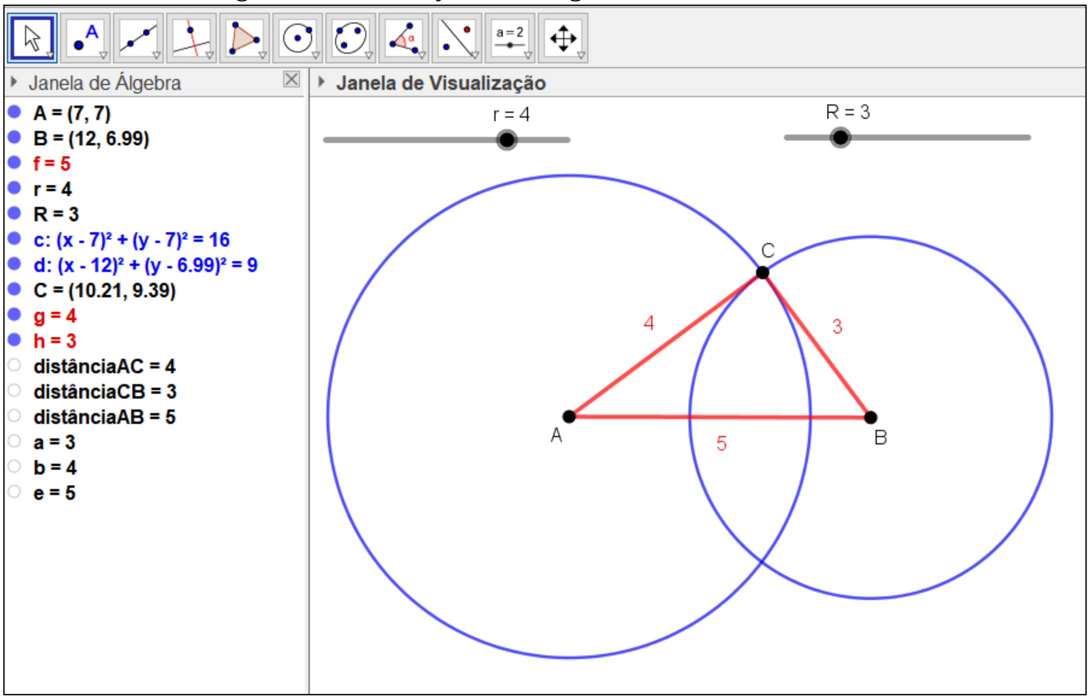
Em seguida, em uma 2ª parte, ativou-se os comandos c e d (clicando com o *mouse* sobre eles) na janela de álgebra e apareceram na janela de visualização os círculos de centro A e raio $r = 4$ e o de centro B e raio $R = 3$, respectivamente, como está na Figura 5. Agora, após mover novamente os controles deslizantes r e R, foi pedido aos alunos que analisassem o que

[9] A figura está disponível no link: https://www.geogebra.org/m/uvfabqsf.

ocorreu com os lados *AC* e *BC* do triângulo e qual a sua relação com os círculos *c* e *d*. Como se pode construir um triângulo depois de traçar o lado fixo *AB*? e como os círculos favoreceram a construção do triângulo? Foi sugerido que os alunos construíssem o triângulo de lados 5, 4 e 3 centímetros usando apenas lápis, régua e papel.

Depois foi feito o questionamento: é suficiente apenas régua, papel e lápis para a construção do triângulo? Todos os alunos socializaram os resultados oralmente e apresentaram os seus desenhos produzidos. Questionou-se por fim sobre a lacuna criada nos seus conhecimentos (de que nem sempre se pode formar um triângulo a partir de três medidas quaisquer) e como foi o percurso para superar esse desafio.

Figura 5 – Construção de triângulos com várias medidas.



Fonte: autoria própria (2019).

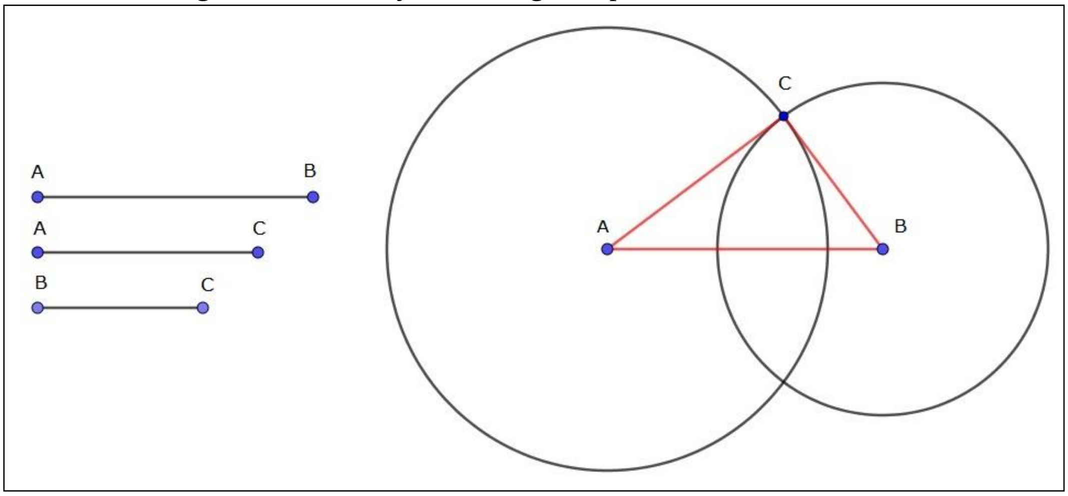
Resolução:

1. Apenas a situação da letra ***a*** possui medidas que formam um triângulo, pois $5+3 > 4$, $5+4 > 3$ e $4+3 > 5$. A situação da letra ***b*** não forma triângulo, pois $2 + 3 = 5$ e a letra ***c*** também não forma triângulo já que $2 + 2 < 5$.

2. Dadas três medidas *AB, AC e BC*, traça-se com uma régua um segmento qualquer dos três dados, *AB*, por exemplo. Em seguida, é necessário que se construa uma circunferência com

um compasso, com centro em *A* e raio de medida *AC* e, posteriormente, outra circunferência de centro em *B* e raio de medida *BC*. A intercessão da parte superior das duas circunferências é o ponto C (terceiro vértice do triângulo), que junto com os outros vértices *A* e *B* forma o triângulo *ABC*. Essa situação está apresentada a seguir:

Figura 6 – Construção de triângulo a partir de medidas dadas.



Fonte: autoria própria (2019).

3. Nem sempre três medidas dadas formam um triângulo. Para que seja possível a sua construção a partir de três medidas dadas ***a*, *b*** e ***c***, deve-se ter a desigualdade triangular:

$$a + b > c;\ a + c > b \text{ e } c + b > a$$

isto é, a soma de dois lados quaisquer deve ser maior que a medida do terceiro lado.

4. Do item anterior temos que:

$$a + b > c \Longrightarrow a > c - b$$

$$a + c > b \Longrightarrow a > b - c$$

Como ***a*** deve ser maior que qualquer uma das diferenças, segue que $a > |b - c|$. Então, a medida do terceiro lado deve estar entre $4 - 3 = 1$ *e* $4 + 3 = 7$. Assim, tem-se que ***a*** igual a 2, 3, 4, 5 e 6 metros.

4.2.1 Discussões e resultado

Antes que fosse terminada a distribuição da atividade, já começaram alguns questionamentos dos alunos, os quais estão transcritos abaixo:

— **Aluno G:** em todas as alternativas tenho três medidas e não é o bastante pra formar um triângulo não?

— **Professor:** a questão pergunta “qual”? Isso quer dizer que das três...

— **Aluno H:** apenas uma delas pode formar um triângulo.

— **Professor:** como posso resolver isso?

Nesse momento, percebeu-se que boa parte dos alunos não tinham o conhecimento sobre as condições de existência de um triângulo ou simplesmente não lembravam da desigualdade triangular. Em seguida, outro aluno perguntou:

— **Aluno D:** pensei assim: fiz esse canudinho de papel bem fino, medi os comprimentos 3, 4 e 5 centímetros, cortei eles e formei o triângulo.

A Figura 7 apresenta o raciocínio desenvolvido pelo aluno *D* ao responder a questão:

Figura 7 – Construção de triângulos com canudinhos.

Fonte: autoria própria (2019).

Em seguida, prosseguiu-se com outros questionamentos:

— **Professor:** muito bem, *D*. Se fizer isso com as outras medidas, o que você vai observar?

— **Aluno D:** vou fazer.

— **Aluno D:** não dá pra formar com as medidas nem na letra ***b***, nem na ***c***.

— **Professor:** por quê?

É interessante observar que este aluno criou uma estratégia de resolução que utilizou um material concreto elaborado por ele mesmo, um canudinho de papel. Algo que não foi sugerido na estratégia de aplicação da atividade e que pode ser proposto pelo professor no momento de explorar possibilidades de respostas, caso não surgisse, pois tem a vantagem de convencê-los visualmente de que não é possível formar triângulos, além de ajudá-los a buscar o porquê de não ser possível fazer isso nas letras ***b*** e ***c***.

Nesse momento fez-se o uso das construções usando o GeoGebra, fazendo variar os controles deslizantes como sugerido na estratégia de aplicação, reforçando assim a ideia do aluno *D*, de manipular algo para representar aquela situação proposta.

Quanto a questão dois, nenhum aluno conseguiu apontar o uso das circunferências como meio para construir os lados *AC* e *BC* do triângulo. Talvez isso tenha ocorrido devido à falta de atividades sobre construções geométricas nas aulas de matemática. Três alunos levantaram um questionamento:

— **Alunos D, F e L:** cadê os ângulos para eu construir os triângulos?

— **Professor:** percebam que o problema pede para construir o triângulo a partir das três medidas dadas, somente.

Desse modo, aproveitou-se a oportunidade e com o uso do projetor foi ativada a visualização das circunferências da Figura 4, no GeoGebra, tornando-as igual à da Figura 5. Assim, os alunos perceberam que os lados do triângulo são os raios das referidas circunferências e que o ponto de encontro delas é o vértice *C* do triângulo.

Quanto a terceira questão, eles já tinham percebido que não são quaisquer três medidas dadas que podem formar um triângulo. A resposta para o segundo questionamento, sobre a condição necessária para que o triângulo exista, foi construída do seguinte modo:

— **Aluno B:** já sei que só forma triângulo se a soma da medida dos dois lados for maior que a base.

— **Professor:** por quê?

— **Aluno B:** porque se não, não fecha o triângulo.

— **Professor:** e se ao invés da base do triângulo ser o maior lado, for o menor, o que tem que acontecer para existir o triângulo?

— **Alunos A e B:** a mesma coisa, porque se a soma dos dois lados, sem ser a base, for igual ou menor que a base, não dá pra fechar o triângulo.

- **Professor:** como represento isso algebricamente, através de uma expressão? Se os lados são ***a***, ***b*** e ***c***... então ***a*** + ***b*** deve ser maior que ***c*.** Como represento maior?

— **Aluno E:** assim: ***a + b > c***.

A expressão usada pelo aluno *B*, "porque se não, não fecha o triângulo", pode ser entendida pela Figura 8 que segue.

Figura 8 – Triângulo não construído.

Fonte: autoria própria (2019).

Assim, foi formalizada a definição da desigualdade triangular tal como está na resolução da atividade. A última questão da atividade envolveu a sala inteira na busca pelas medidas. No início ocorreu o seguinte:

— **Aluno C:** o lado que falta é a base do triângulo que forma a árvore de natal?

— **Professor:** o problema informa que falta um lado. Importa qual seja o lado que falta para a gente achar as suas possíveis medidas?

— **Aluno H:** não.

— **Professor:** por que não, *H*?

— **Aluno H:** porque as duas medidas dadas têm que ser maiores que o lado que falta.

— **Professor:** então...

— **Aluno H:** como $4 + 3 = 7$, o terceiro lado tem que ser menor, só pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

— **Alunos A e C:** mas não pode ser 1 porque 1 + 3 não é maior que 4, é igual.

— **Professor:** excelente observação.

Então, para sistematizar essa resposta foi apresentada a resolução dessa questão quatro que consta logo após as orientações de aplicação da estratégia de motivação para esta segunda atividade.

A atividade foi motivadora para os alunos, pois eles preencheram uma lacuna existente em seus conhecimentos, ou seja, que nem sempre podem construir um triângulo a partir de três medidas dadas. Além disso, houve a busca dos alunos por estratégias próprias de resolução mais palpáveis e convincentes, como o canudinho de papel que foi recortado para montar o triângulo.

Deve-se considerar também que a atividade mostrou a necessidade e importância de se trabalhar o conteúdo de geometria abordando as construções geométricas, de modo a tornar os conceitos geométricos mais bem compreendidos e justificados para os alunos.

4.3 Atividade 3 – Tema: progressão aritmética

Como técnica de motivação para esta atividade[10], temos*: utilize a matemática recreativa*. O aspecto lúdico é a ferramenta utilizada como meio para um fim. Para alcançar o fim desejado, é utilizado um jogo em duplas, com regras preestabelecidas, cuja vitória será obtida quando um dos participantes atingir a soma de pontos igual a 40. Para tanto, o jogador deverá jogar algumas partidas a fim de descobrir qual a estratégia vitoriosa.

Atividade 3:

1. Um professor dividiu seus alunos em duplas e propôs a cada dupla o jogo descrito a seguir. O primeiro jogador escolhe um número no conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e o anuncia. O segundo jogador escolhe um número no mesmo conjunto (pode escolher o mesmo número escolhido pelo primeiro jogador), soma-o ao anunciado pelo primeiro jogador e anuncia a soma. O primeiro jogador escolhe um número no mesmo conjunto, soma-o à soma anunciada por seu adversário e anuncia essa nova soma, e assim por diante. Ganha quem conseguir anunciar a soma 40. Uma das partidas desenvolveu-se do modo seguinte (P = primeiro jogador, S = segundo jogador):

P: 3
S: 3 + 6 = 9
P: 9 + 7 = 16
S: 16 + 4 = 20
P: 20 + 5 = 25
S: 25 + 7 = 32
P: perdi!

Mostre que realmente o primeiro jogador perdeu essa partida.

2. Que estratégia deve ser usada por um dos jogadores para ganhar sempre?

---

[10] Questão retirada do Exame Nacional de Cursos (ENC), atual Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE)., disponível em: http://inep.gov.br/educacao-superior/exame-nacional-de-cursos/relatorios, p.354.

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, quadro, material impresso, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Inicialmente foi pedido que os alunos formassem duplas e em seguida distribuiu-se o problema impresso em uma folha para cada dupla ler. Logo após, os componentes de cada grupo dialogaram entre si para observar se compreenderam bem as regras. Assim, pediu-se que eles explicassem por que o primeiro jogador no enunciado do problema dado perdeu. Socializou-se essas discussões e as duplas foram incentivadas a expor como pensaram para mostrar que o jogador *P*, independentemente do número a escolher, dará a vitória ao jogador *S*.

Posteriormente, pediu-se que os alunos jogassem e anotassem cada partida numa folha. Indagou-se em seguida se acharam alguma estratégia que garantisse sempre a vitória para um dos jogadores. Os discentes foram incentivados a buscarem essa estratégia a partir do exemplo dado no problema. O interessante é que os pares de jogadores sejam alternados de modo que haja uma diversificação, formando os pares dos seguintes modos: ambos já descobriram a estratégia, nenhum dos dois sabe a estratégia e um sabe a estratégia e o outro não sabe.

Despois disto, foi o momento de introduzir o conceito de progressão aritmética, associando-o a situação problema: as posições vencedoras são aquelas cujas somas são múltiplos de 8, ou seja, 8, 16, 24 e 32.

Resolução:

1. Como a soma parou em 32 e agora é a vez do jogador P, qualquer número que ele escolha, dentre os disponíveis de 1 até 7, nó máximo chegará a 39, e assim, o segundo jogador S vencerá, pois chegará primeiro ao resultado 40, independentemente da escolha que fizer.

2. Se o primeiro jogador P escolhe um número x qualquer, com $1 \leq x \leq 7$, a soma passará a ser de $32 + x$. Então, essa soma estará compreendida entre 33 e 39, incluindo-os. Bastará ao segundo jogador S escolher o número 8 – x e anunciar o resultado vencedor, pois ao somar as escolhas de cada um, teremos $32 + x + 8 - x = 40$. Desse modo, o segundo jogador pode ganhar sempre, respondendo a cada escolha x do adversário com a escolha 8 – x. Quando

surgir questionamentos, como por exemplo, por que escolher o 32 para analisar a estratégia? Esclareça que esta é a última soma deixada que dá a derrota segura ao jogador seguinte.

4.3.1 Discussões e resultado

Apresentou-se inicialmente a questão através do projetor e enquanto isso, uma cópia foi distribuída para cada aluno. As duplas entenderam as regras do jogo e depois de algumas partidas, já queriam falar o que acharam. Neste momento, foram orientados a anotar em um papel suas respostas e observações.

Então, indagou-se:

― **Professor:** por que o jogador *P* está perdido?

― **Aluno A:** ele não pode fazer 40 pontos.

― **Aluno C:** qualquer um dos números que *P* escolher chegará no máximo a 39.

― **Aluno E:** como a vez da jogada é do jogador *P*, ele só poderá fazer 33, 34, 35, 36, 37, 38 ou 39 pontos, deixando assim a vez da jogada vencedora para o jogador *S*.

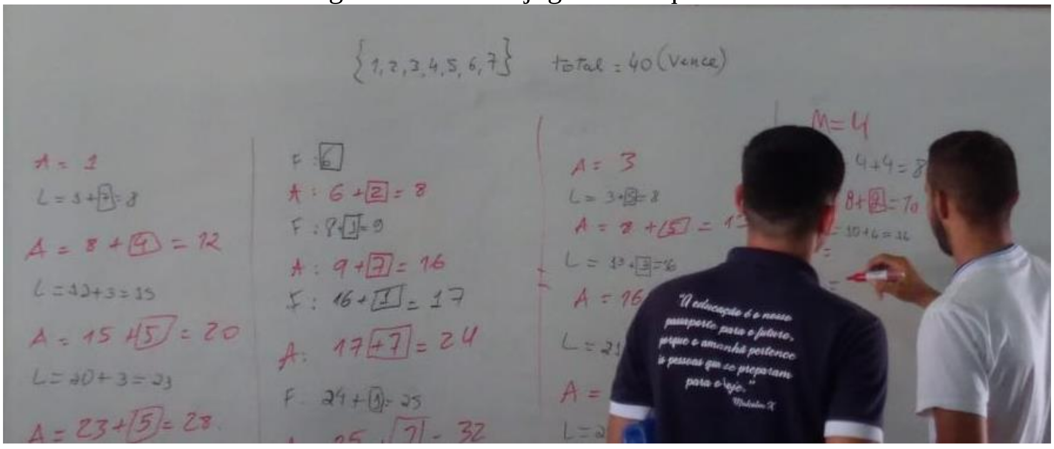
Em seguida, um aluno surpreendeu os colegas e o professor quanto a atividade proposta. Então, ele disse:

― **Aluno A:** sei como vencer sempre.

― **Professor:** então escolha um colega para jogar aqui no quadro para que eu veja.

Então foi pedido para ele jogar algumas partidas com um colega e, observadas as jogadas, realmente o jogador *A* compreendeu a estratégia para vencer caso o jogador adversário iniciasse a partida, como se vê pela resolução mostrada na Figura 9.

Figura 9 – Alunos jogando no quadro.



Fonte: arquivo do autor (2019).

Assim, o aluno *A* explicou qual estratégia foi utilizada por ele para chegar à conclusão de que sempre vencerá caso seu adversário inicie a partida, explicado nos diálogos abaixo:

— **Aluno A:** é só pegar o número que meu adversário jogar e escolher um que somado a ele dê igual a 8.

— **Professor:** mas o que garante que a soma 8 irá dar a vitória a você?

– **Aluno A:** porque se eu conseguir chegar ao resultado igual a 8, depois consigo chegar a 16 e a 32 do mesmo jeito.

— **Professor:** e chegar a 32 é importante por que...

— **Aluno A:** o 32 faz o meu adversário deixar a vitória para mim.

Realmente, pelo diálogo acima, percebeu-se que o referido aluno argumentou corretamente sua estratégia vencedora, pois pela questão 1, chegar a 32 é garantir a vitória para si. Outro aluno comentou em seguida:

— **Aluno M:** se chegar a 16 consigo a vitória, pois consigo o 32.

— **Professor:** mas o que garante que você chegará ao número 16 se o seu adversário iniciar o jogo?

— **Aluno M:** espere aí, é chegar a 32, antes a 16 e primeiro a 8.

— **Professor:** hum. Mas como você chega a 8?

— **Aluno M:** não sei.

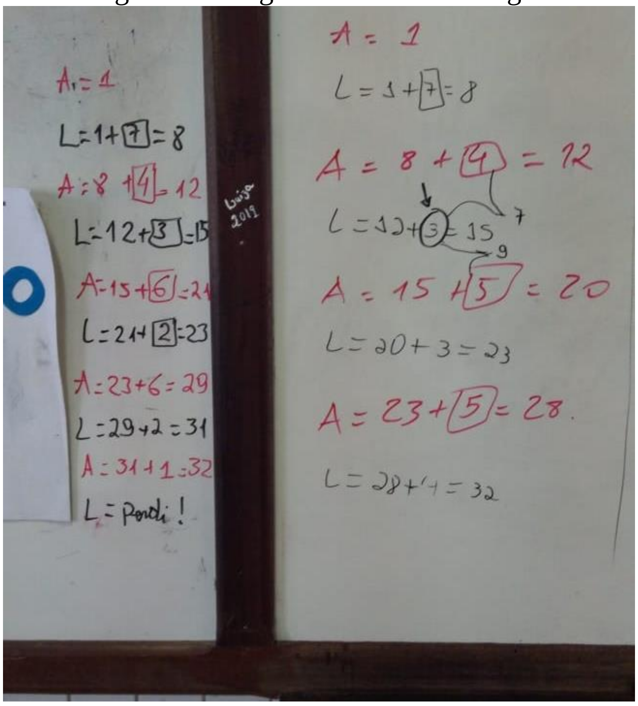
— **Professor:** observe as partidas. O que acontece sempre nas duas primeiras jogadas?

— **Aluno M:** ah, basta subtrair 8 do número jogado pelo meu adversário.

Percebeu-se inicialmente que o aluno construiu sua estratégia parcialmente, do final para o início. Ele notou que chegar a 32 é garantir a vitória, usando o item anterior da atividade. Além disso, a estratégia do aluno *M* foi inversa à utilizada pelo aluno *A*, que ao contrário de somar um número para obter 8, ele subtraiu 8 do número anunciado por seu adversário.

O aluno *A* foi além e procurou desenvolver uma contraestratégia para vencer caso ele inicie a partida e seu oponente, por algum motivo, erre a estratégia vencedora (descrita anteriormente). A Figura 10 mostra essa situação:

Figura 10 – Jogada da contraestratégia.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Então o referido aluno detalhou o raciocínio utilizado por ele e ilustrado na Figura 10, por meio do diálogo exposto abaixo:

— **Aluno A:** se você errar a estratégia pela diferença de 1 para mais ou para menos, basta somar 7 e 9, respectivamente ao número anunciado pelo meu adversário que chegarei a 8, 16, 24 e 32.

— **Professor:** mas aí depois de você jogar 7 ou 9, como você continua a partida?

— **Aluno A:** sigo a estratégia anterior de somar 8 ao número anunciado pelo meu adversário.

— **Professor:** mas como você vai escolher 9 se os números disponíveis são apenas de 1 até 7?

A contraestratégia foi utilizada em outras simulações de jogadas e funcionou quando a diferença na estratégia inicial foi de apenas uma unidade. Entretanto, foge à regra do jogo que só dispõe dos números de 1 até o 7. Esta situação não tinha sido sugerida ou se quer mencionada na proposta original de execução da atividade, mostrando que os alunos contribuíram e avançaram nas discussões.

A atividade foi empolgante, pois os alunos se envolveram no jogo e muitos buscaram uma maneira de garantir a vitória sobre o colega. Por fim, foi conceituado o que é uma progressão aritmética e apresentados alguns exemplos, estabeleceu-se em conexão com o jogo, uma P.A. de razão igual a oito, isto é, (8, 16, 24, 32).

4.4 Atividade 4 –Tema: divisão euclidiana e periodicidade

Essa quarta atividade faz uso da técnica de motivação *descubra um padrão*, na qual o aluno é desafiado a prever qual dos personagens será premiado e qual a cadeira ele estará sentado. Tudo isso se dá a partir do sorteio de uma ficha numérica, onde o aluno deverá perceber certas regularidades na distribuição dessas fichas. A ideia de periodicidade é expandida para outros conteúdos.

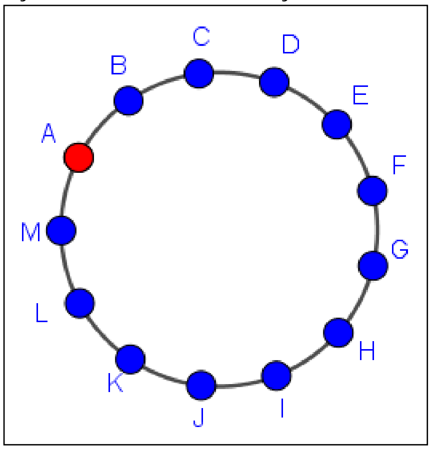
Atividade 4:

Roberta organizou as cadeiras da sala de aula no formato de um círculo, como mostra a Figura 11 a seguir, onde cada ponto (*A*, *B*, *C*, ... , *M*) representa uma cadeira ocupada por um aluno. Em seguida, começou a distribuir fichas numeradas para um sorteio do seguinte modo: o aluno da cadeira *A* recebeu a ficha com o número 1; o da cadeira *B*, a ficha 2; o da cadeira *C*, a ficha 3; até o da cadeira *M*, que recebeu a ficha 13. Foi então que Roberta percebeu que sobraria muitas fichas e, em seguida, continuou a distribuí-las mantendo a mesma sequência anterior: o aluno da cadeira *A* recebeu a ficha número 14; o da cadeira *B*, a ficha 15, assim sucessivamente.

A partir dessas informações, analise os questionamentos que seguem e procure criar uma estratégia de resolução.

1. O primeiro aluno sorteado foi o da ficha de número 100. Em qual cadeira ele está sentado?
2. Em qual cadeira o aluno estará sentado se a ficha sorteada for a de número 2020?

Figura 11 – Posição inicial da distribuição dos alunos nas cadeiras.



Fonte: autoria própria (2019).

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, software GeoGebra, papel, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Inicialmente foi apresentado o problema usando o projetor. Em seguida, solicitou aos alunos que fizessem uma leitura para que, não constando dúvidas sobre a atividade, pudessem elaborar estratégias de jogo e assim decidir qual a melhor delas para solucionar o problema.

Alguns alunos tiveram dificuldades em achar o padrão que possibilitava encontrar mais rapidamente as cadeiras sorteadas. Então foi sugerido que eles observassem a numeração da ficha em cada cadeira e posteriormente as tabelas foram distribuídas, semelhante à Tabela 1, para preencherem, observando o quociente e o resto dessas divisões pelo número total de cadeiras para dar uma volta completa, o que corresponde as 13 cadeiras.

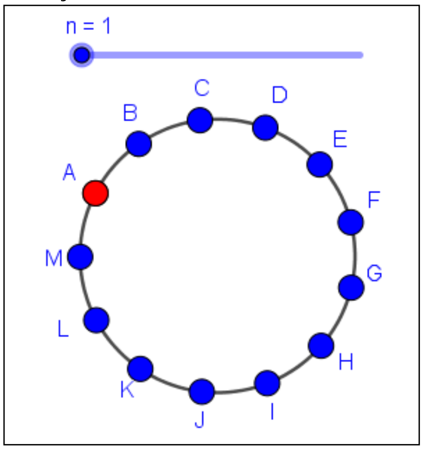
Tabela 1 – Investigando as fichas e cadeiras.

Ficha (cadeira)	Quociente (número de voltas)	Resto (onde para)

Fonte: autoria própria (2019).

Logo após, projetou-se no quadro o problema com o GeoGebra e foi utilizado o controle deslizante *n* para mostrar que quando variamos este parâmetro Roberta percorre o círculo de modo que se possa determinar em qual cadeira estará a ficha premiada, conforme a Figura 12.

Figura 12 – Posição da cadeira com a ficha de número 100.



Fonte: autoria própria (2019).

Para isso, bastou colocar o valor de *n* que se deseje (clique primeiro sobre o ponto *n* e, depois, com o botão direito do *mouse*, em animar).[11] Depois dessa abordagem, os alunos foram indagados como responder o problema sem o recurso do software. Para isso, algumas pistas foram dadas: o que há de comum nos números das fichas que ficam na cadeira *A* (1, 14, 27, ...)? E nas outras cadeiras?

Por fim, chegou o momento de falar do algoritmo de Euclides e da periodicidade associada ao resto das divisões. Para isso, realizou-se as divisões, observando que seus restos se repetem com regularidade, conforme solução desta atividade apresentada a frente.

A ideia dessa atividade também é explorada na 1ª determinação positiva de um arco, bastando dividir por 360º e observar qual o resto da divisão e também no cálculo de potências com números complexos, pois as potências de *i* se repetem a cada quatro resultados, começando com $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$ e se repetindo nesse mesmo padrão, bastando dividir o expoente da potência por 4 e observar o resto da divisão.

Resolução:

Na Figura 12, próximo de cada cadeira coloque os números 1, 2, 3, ..., correspondentes aos números das fichas que Roberta irá distribuir (a cadeira A recebe o número 1, a *B* o número 2, a *C* o número 3 e assim por diante). Como existem 13 cadeiras na sala, na cadeira indicada pela letra *C* estarão escritos os números 1, 14, 27, 40, ..., que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 13. Assim, dividindo 100 por 13, obtém-se

[11] A construção utilizando o GeoGebra está disponível para acessar e fazer o download no link: https://www.geogebra.org/m/sju3h5bb

quociente 7 e resto 9, isto é, $100 = 7 \times 13 + 9$. Isso mostra que a ficha de número 100 foi entregue ao aluno sentado na cadeira I. De modo semelhante, a ficha 2020 foi entregue ao aluno sentado na cadeira E, pois $2020 = 155 \times 13 + 5$.

4.4.1 Discussões e resultado

Como mencionado anteriormente, a atividade foi distribuída para cada grupo de alunos e solicitado uma leitura prévia para em seguida discutir se ficou claro como acontece a distribuição das fichas e o que estava sendo pedido na questão. Segue abaixo o diálogo ocorrido:

— **Professor:** qual o sentido em que as fichas são distribuídas?

— **Aluno D:** dos ponteiros do relógio.

— **Aluno C:** sentido horário, professor.

— **Professor:** que estratégia vou usar para achar as respostas? Acho que está óbvio que não vou contar uma a uma as cadeiras até chegar ao número sorteado, certo?

— **Aluno D:** mas se for um número pequeno?

— **Professor:** sim, *D*. Mas se for um número muito grande? Vamos perder muito tempo nessa contagem e, além disso, corremos o risco de cometer algum erro durante essa contagem.

Percebeu-se que os alunos compreenderam que há uma maneira de descobrir a cadeira sorteada de um modo mais rápido do que contar uma a uma em cada situação. Entretanto, eles não conseguiram criar nenhuma estratégia. Foi então estabelecido um diálogo no sentido de fazê-los perceber certas regularidades:

— **Professor:** quais os números que o aluno sentado na cadeira *A* irá receber? E o sentado na cadeira *B*? ... e o da cadeira M?

— **Aluno C:** as fichas do aluno da cadeira *A* são 1, 14, 27, 40 ...

— **Aluno A:** a *B* são 2, 15, 28, 41 ...

— **Aluno D:** as fichas que o aluno sentado na cadeira *M* vai receber são 13, 26, 39, 52 ...

— **Professor:** perceberam alguma regularidade dessas listas de números com relação ao número total de cadeiras, que são 13?

— **Aluno A:** todos vão aumentando de 13 em 13.

— **Professor:** bom. Mas e se eu quiser descobrir quantas voltas Roberta deu ao redor das cadeiras para ela entregar a ficha de número 39? O que eu faço?

— **Aluno D:** só é dividir pelo total de cadeiras que é 13.

— **Professor:** muito bem. Preencham a tabela com cada sequência de fichas, contendo os números, o quociente e o resto da divisão por 13. Observem as regularidades.

A Figura 13 mostra a imagem de uma tabela preenchida por um aluno durante a realização desta atividade.

Figura 13 – Tabelas de verificação de padrão.

Ficha (cadeira A)	Quociente (número de voltas)	Resto (onde para)
1	—	—
14	1	1
27	2	1
40	3	1

Ficha (cadeira B)	Quociente (número de voltas)	Resto (onde para)
2	—	—
15	1	2
28	2	2
41	3	2

Ficha (cadeira M)	Quociente (número de voltas)	Resto (onde para)
13	1	0
26	2	0
39	3	0
52	4	0

Fonte: autoria própria (2019).

Depois de realizar os cálculos sugeridos, eis o que tal aluno respondeu quando foi indagado sobre a tabela apresentada:

— **Professor:** o que você observa quanto aos restos encontrados para cada número de ficha que receberá cada cadeira?

— **Aluno J:** que na cadeira *A* só ficam números que deixam resto 1, na cadeira *B* deixam resto 2, até a cadeira *M*, que deixa resto 0 quando divididos por 13.

— **Professor:** então o que deve ser feito para prever em quais cadeiras estarão as fichas de números 100 e 2020?

— **Alunos A e J:** é só dividir por 13 e ver o resto, aí ele vai dizer a cadeira que as fichas estarão.

— **Professor:** então calcule para mim.

Os alunos calcularam o resultado corretamente de acordo com a resposta esperada. Observou-se que a utilização da tabela foi útil para organizar os números de modo a notar o padrão e compreender o problema. Aliado ao que foi feito, apresentou-se a animação feita usando o GeoGebra e que está descrita na estratégia de motivação no início da atividade.

Supreendentemente, um aluno da turma apresentou na aula seguinte uma questão do ENEM, edição 2019, reproduzida na Figura 14.

Figura 14 – Questão 159 da prova amarela do ENEM 2019.

Questão 159

Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor.

Disponível em: www.oficinabrasil.com.br. Acesso em: 25 ago. 2014 (adaptado).

Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação:

1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor.

Ao final obteve-se a sequência: 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados.

O 2 015º item cadastrado foi um(a)

A rolamento.
B catalisador.
C amortecedor.
D pastilha de freio.
E caixa de direção.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Então, foi perguntado ao aluno por que ele apresentou essa questão do ENEM. Veja o que o falou:

— **Aluno C:** professor, nessa questão do ENEM usei o mesmo raciocínio daquele problema resolvido na última aula.

— **Professor:** qual problema?

— **Aluno C:** o do sorteio das cadeiras.

Ao ler a questão, percebeu-se que era uma situação análoga a trabalhada em sala, cuja observação dos restos da divisão deu a pista para a solução. Então pedi que ele explicasse como tinha resolvido:

— **Aluno C:** vi que o padrão se repete de 8 em 8 números, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4. Daí, só peguei 2015 e dividi por 8 e observei o resto da divisão que foi igual a 7.

— **Professor:** e depois, fez o que?

- **Aluno C:** então a resposta é o número que tá na posição de número 7, que pelo texto, é o item 3, caixa de direção, letra E.

— **Professor:** excelente raciocínio, *C*. Veja que essa ideia é muito poderosa para achar resultados, basta saber como se repete e observar os restos.

Ao término da atividade, percebeu-se que mesmo diante da dificuldade inicial em criar uma estratégia, isso foi superado pela sequência de passos instigadores que foi sugerida para perceber o padrão e, assim, chegar as respostas. Além disso, a utilização desse conhecimento em outra situação, como a proposta na questão do ENEM, sugere que o aluno atingiu as habilidades e competências necessárias, bem como a importância em desenvolver a atividade com motivação, conseguindo perceber semelhança com o exercício proposto no ENEM.

4.5 Atividade 5 – Tema: princípio multiplicativo e triângulo de pascal

Esta atividade[12] explora a técnica de motivação *conte uma história pertinente,* através da leitura de um pequeno texto cujo propósito será desvendar um enigma para descobrir onde está enterrado um tesouro. O problema é resolvido utilizando o princípio multiplicativo e tem como desfecho a sua utilização para apresentar o triângulo de Pascal.

Atividade 5:

1. Leia o texto abaixo – O tesouro de Barba-Ruiva:

O capitão Roger Barba-Ruiva, o pirata mais temível das ilhas Molinetes, olhava fixamente para a figura que havia desenhado na areia às margens da tranquila lagoa do recife da Chibata. Ele havia enterrado um baú cheio de dobrões espanhóis naquele local, alguns anos antes, e agora queria recuperar seu tesouro. Mas tinha esquecido onde o tesouro estava. Felizmente, ele havia preparado uma mnemônica[13] inteligente para se lembrar. Infelizmente, a mnemônica era um pouco inteligente demais. O capitão se dirigiu então ao bando de brutamontes esfarrapados que constituíam sua tripulação.

– Alto, seus ratos de estiva fedorentos! Alô, Mentecapto, largue esse tonel de rum e escute! A tripulação finalmente se acalmou.

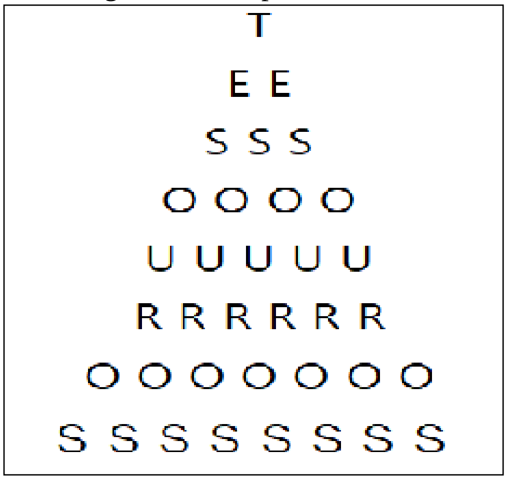
– Cês tão lembrados de quando a gente abordou o *Príncipe Espanhol*? E logo antes de jogarmos os prisioneiros pros tubarões, um deles falou onde tinham escondido o butim? E a gente escavou o tesouro inteiro e enterrou de volta num lugar seguro. Ouviram-se brados

[12] Atividade transcrita do livro de Ian Stewart, “Incríveis passatempos matemáticos”. P. 27-28.

[13] Mnemônica é qualquer processo artificial utilizado para tornar a memorização mais eficaz.

grosseiros, a maioria de concordância. – Pois então, o tesouro tá enterrado exatamente ao norte daquela pedra em forma de caveira logo ali. Tudo que a gente tem de saber é quanto para o norte. Agora, o lance é que eu sei que o número exato de passos é o número de maneiras diferentes com que um homem pode soletrar a palavra TESOUROS colocando o dedo na letra T no alto desta figura[14] e andando com o dedo para baixo uma fileira de cada vez até uma letra adjacente, uma posição para a direita ou para a esquerda. Vou dar dez dobrões de ouro ao primeiro marujo entre vocês que descobrir esse número. O que me dizem, rapazes?

Figura 15 – Mapa do tesouro.



Fonte: livro de Ian Stewart – Incríveis passatempos matemáticos (2009).

Quantos passos separam a pedra do tesouro?

2. Explique seu raciocínio.

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, quadro branco, material impresso, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Inicialmente, os alunos receberam o texto impresso e foi solicitado que realizassem individualmente uma leitura. Logo após, realizou-se uma nova leitura, desta vez compartilhada, posteriormente foi pedido para os alunos formarem em grupos de dois ou três componentes e elaborassem estratégias de resolução.

[14] Figura 15 retirada do livro de Ian Stewart, “Incríveis passatempos matemáticos”. P. 27-28.

Depois de socializadas as estratégias, os alunos foram incentivados a apresentar o raciocínio utilizado em cada grupo de forma detalhada, explicando o porquê de cada ferramenta escolhida.

Na sequência, sugeriu-se que eles construíssem uma árvore das possibilidades e/ou usasse o princípio multiplicativo. Então, foi o momento de apresentar o triângulo de Pascal e o método usado para construção. Essa disposição, ilustrada na Figura 15, ajudou os alunos a internalizar como se dá a construção do triângulo de Pascal.

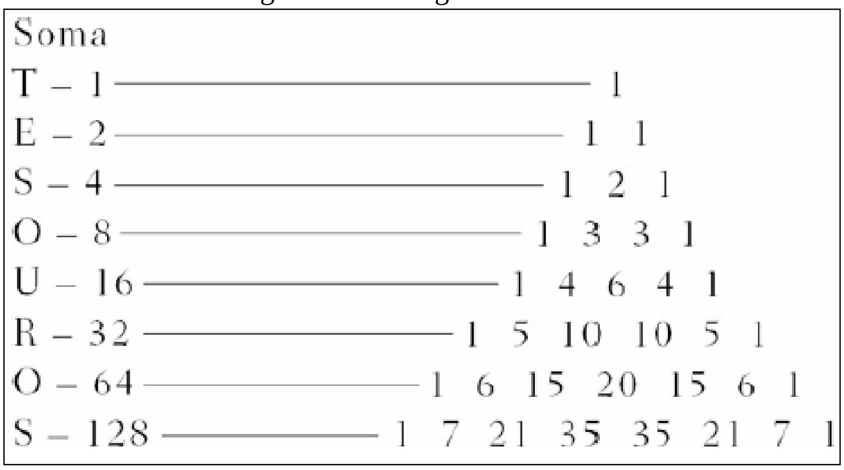
Resolução:

A cada etapa o dedo do pirata poderá andar para a esquerda ou para a direita (duas escolhas). Portanto, o número de caminhos ao longo da figura se duplica a cada fileira adicional. Como existem 8 fileiras e apenas um T inicial, o número total de passos é:

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128.$$

Se substituirmos cada letra pelo número de caminhos que leva até ela, obtém-se uma famosa engenhoca matemática, o triângulo de Pascal.

Figura 16– Triângulo de Pascal.



Fonte: livro de Ian Stewart – Incríveis passatempos matemáticos (2009).

Na Figura 16, note que cada número é a soma dos dois números acima, à esquerda e à direita, exceto nos lados, onde todos os números são 1. Se forem somadas as fileiras, obtém-se as potências de dois: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Assim, esta é outra maneira, bastante parecida, de se chegar a mesma resposta.

4.5.1 Discussões e resultado

Depois de realizada a leitura, pelos alunos, do texto proposto na atividade, surgiu alguns questionamentos. Veja:

— **Aluno A:** ele tem que andar por todas essas letras até chegar ao tesouro?

— **Aluno D:** ele pode pular uma linha?

— **Professor:** a leitura do problema informa que ele passa de uma linha para outra sempre usando uma letra adjacente a outra da linha anterior, com movimentos apenas para esquerda ou para a direita.

— **Aluno D:** ah, entendi. Ele não pode pular.

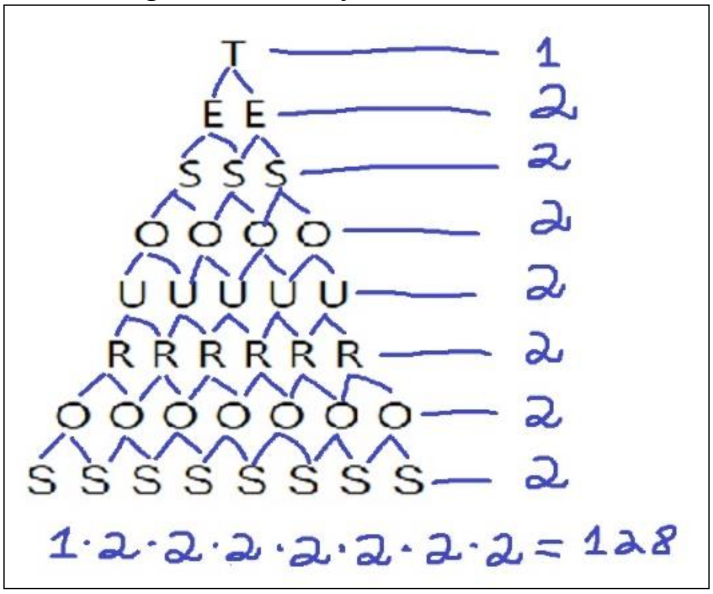
Em seguida, foi pedido aos alunos que socializassem suas estratégias. Um grupo, como sugere o diálogo abaixo, fez uso de um recurso abordado em sala de aula, chamado princípio multiplicativo. Para isso, utilizando a imagem já fornecida no próprio texto, entregue inicialmente, realizaram esquemas mostrando suas estratégias.

— **Alunos A e G:** traçamos todos os caminhos possíveis ao passar de uma linha de cima para uma debaixo, cada uma com duas alternativas.

— **Professor:** apresentem para a classe como vocês fizeram, por favor.

A solução apresentada pelos dois alunos, que está escaneada na Figura 17, abordou de maneira correta o princípio multiplicativo, mostrando que para cada letra a partir do *E* até o *O*, têm-se sempre duas possibilidades para caminhar, uma para a esquerda e outra para a direita.

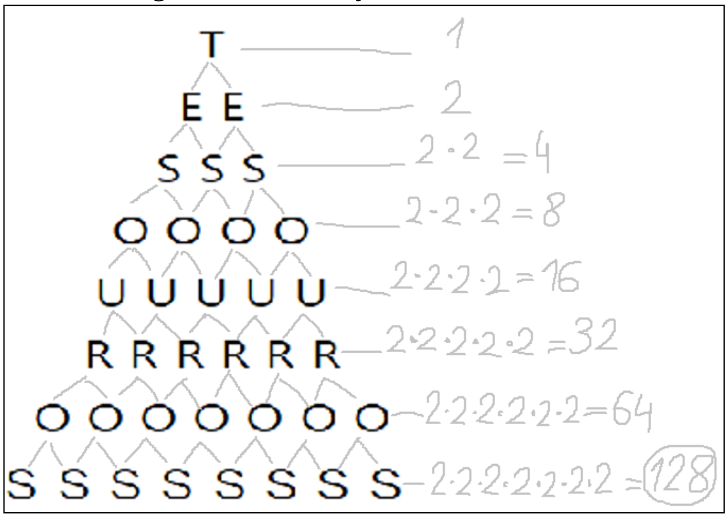
Figura 17– Resolução dos alunos A e G.



Fonte: autoria própria (2019).

Outros dois alunos usaram um raciocínio mais detalhado, construindo até a sequência utilizada na resolução proposta, mostrada na Figura 18. Para isso, eles contaram a quantidade de letras de uma linha para outra, detalhando quantos passos seriam necessários se parassem na letra E (2 possibilidades), S ($2 \times 2 = 2^2 = 4$ possibilidades), O ($2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ possibilidades) e assim, sucessivamente, até a letra **S** ($2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ possibilidades).

Figura 18 – Resolução dos alunos B e F.



Fonte: autoria própria (2019).

Na sequência, foi projetada no quadro a Figura 16, associando a solução do enigma ao triângulo de Pascal. Indagou-se posteriormente como ocorre a formação do triângulo de Pascal. Alguns alunos opinaram:

— **Aluno H:** os dois lados do triângulo que são iguais e formados só por uns.

— **Aluno B:** se somarmos cada linha do triângulo a soma vai ser igual a 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128.

— **Professor:** sim, mas por que foi escrito o 4 com sendo 1 2 1; o 8 com sendo 1 3 3 1, etc?

Nesse momento, os alunos ficaram em silêncio, observando as imagens respondidas até que um deles relatou:

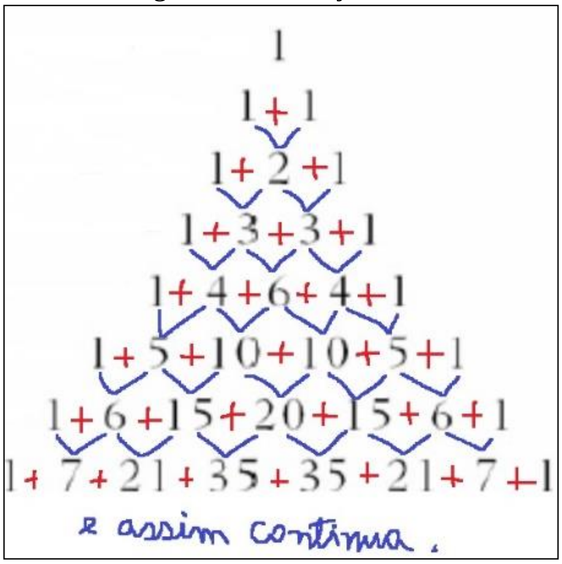
— **Aluno O:** o número que fica embaixo é igual a soma dos dois que ficam em cima dele.

— **Professor:** como assim, *O*? Venha aqui ao quadro mostrar sua ideia ou coloque no papel e me apresente.

— **Aluno O:** certo professor, vou fazer aqui na minha folhinha e mostro já.

O aluno compreendeu como é formado o triângulo de Pascal e a resolução está ilustrada na Figura 19.

Figura 19 – Triângulo de Pascal: justificativa do discente



Fonte: autoria própria (2019).

Observou-se que essa atividade de descobrir onde está o tesouro e a associação de sua resposta ao triângulo de Pascal é um modo atrativo de introduzir este assunto numa aula de Matemática, pois a história contada através do enigma proporcionou uma abordagem do triângulo de Pascal diferente das que usualmente aparecem nos livros didáticos.

4.6 Atividade 6 – Tema: criptografia e anagramas

Como técnica de motivação para esta atividade temos*: explique a utilidade de um tema*. Para isso, são sugeridos um texto, dois filmes e um vídeo para o professor adquirir embasamento e mostrar a importância do assunto de criptografia, além de apresentar para os alunos um leque de possibilidades com abordagens diversificadas, que vão da antiguidade à modernidade. Essa atividade será o ponto de partida para tratar o assunto de anagramas.

Atividade 6:

1. A criptografia consiste basicamente em codificar e decodificar mensagens de modo que apenas o emissor e o receptor possam compreender o que há na mensagem, sem fofoqueiros. O envio de mensagens secretas ocorre desde a antiguidade e é algo que foi essencial para decidir guerras. Mais recentemente podemos citar o seu uso nas senhas de internet (facebook, WhatsApp, Instagram, Twítter etc.), senhas dos bancos, entre outras. A utilização dos métodos criptográficos é o que tornam as senhas muito seguras e praticamente inquebráveis. Um dos sistemas de criptografia mais antigo e conhecido foi criado pelo general Júlio César, na Roma antiga. Ele consistia em substituir a sequência de letras do alfabeto pela terceira letra seguinte a ela, como mostra a imagem abaixo.

Figura 20 – Sistema criptográfico de Júlio César.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fonte: http://www.obmep.org.br/docs/apostila10.pdf.

O total de letras deslocadas para realizar a troca é chamado de chave ou senha do sistema criptográfico. Se Júlio César quisesse enviar a mensagem "O ATAQUE SERA HOJE" ele escreveria o seguinte bilhete para seu pelotão:

R DWDTXH VHUD KRMH

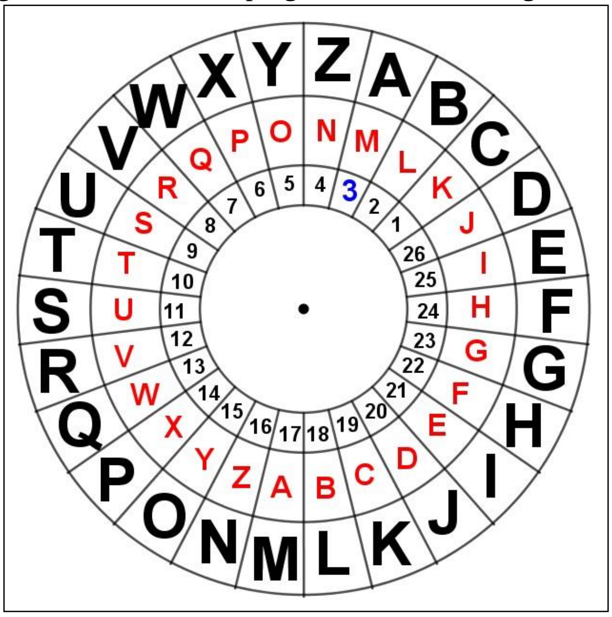
Responda:

a) Utilizando o sistema de criptografia de Júlio Cesar, o que o imperador quis dizer ao escrever a seguinte mensagem R PHX LPSHULR DFDERX ?

b) Como você mandaria escrito a seguinte mensagem SEGREDO É MATEMÁTICA criptografada?

2. Um aparato muito usado para criptografar mensagens são os círculos giratórios. Trata se de dois círculos concêntricos de diâmetros diferentes de forma que o círculo interior gire, em qualquer dos sentidos, de modo a possibilitar a escolha da chave desejada, como ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – Sistema criptográfico dos círculos giratórios.



Fonte: autoria própria (2019).

De acordo com a figura, a chave ou senha escolhida foi a de número 3, pois é o número que está na mesma direção da letra A, do círculo externo. Logo, para criptografar as mensagens escreve-se no lugar das letras escritas de preto, as letras de vermelho. Por exemplo,

Y AMV I LYA XMVM M MBAM

O MAR É BOM PARA A ALMA

Responda:

a) Uma frase muito conhecida e atribuída ao matemático e filósofo grego, Platão, foi criptografada do seguinte modo:

YU ZSAIVYU GYRIVZMA Y ASZJY

Qual a sua tradução?

b) Como ficaria a mensagem criptografada da seguinte frase:

A FESTA VAI SER NA PISCINA

c) E se a chave para criptografar for a de número 20, o que significa a mensagem abaixo, descriptografada?

VJKLURI CZSVIKR V GIFDFMV

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, quadro branco, material impresso (moldes), tesoura, tachinhas, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Inicialmente os alunos foram sondados sobre o que sabem do assunto e, em seguida, apresentou-se a importância do tema criptografia, explicando a sua utilidade para as diversas situações onde é usada. Este momento foi essencial, pois a partir dele, decorreu o interesse dos alunos pela aula.

Como sugestões de pesquisa, foram disponibilizados um texto que apresenta o histórico da criptografia e as suas utilidades em cada um desses períodos,[15] um documentário bastante sucinto que aborda a necessidade de sua utilização atualmente[16] e dois filmes que tratam do assunto, O Enigma I e O Jogo da imitação.

Em seguida, mencionou-se que há várias maneiras de criptografar, como a de Júlio César, utilizada na primeira questão, a dos círculos giratórios, abordada na segunda parte da atividade, a RSA, que utiliza a decomposição dos números em fatores primos, etc.

Para a primeira parte da atividade foi mostrada, através de exemplos, como ocorre a criptografia utilizando o método de Júlio César e, logo após, pediu-se que os alunos traduzissem uma mensagem criptografada e, em outra situação, criptografar outra mensagem. A Figura 20, apresentada na questão 1, ficou à disposição dos alunos para que eles possam resolver a questão.

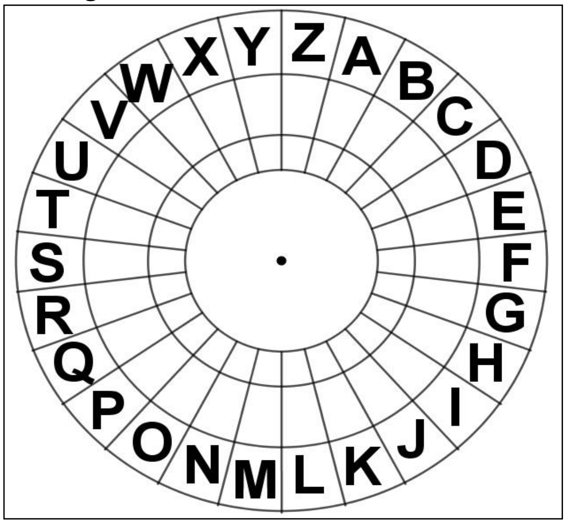
[15] Disponível no link https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_criptografia
[16] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=glGrlf5mWcY

Na segunda parte da atividade, foram usados dois moldes, um externo com as letras já fixadas, como mostra a Figura 22, e outro menor, onde o aluno escolheu a posição em que se distribuiu as letras do alfabeto[17], como mostra a Figura 23.

O molde menor foi sobreposto ao molde externo de modo que o ponto central de ambos coincidisse, como mostra o exemplo da segunda questão. Assim, foi possível escolher qualquer chave ou senha[18] criptográfica que se desejasse girando o círculo interno.

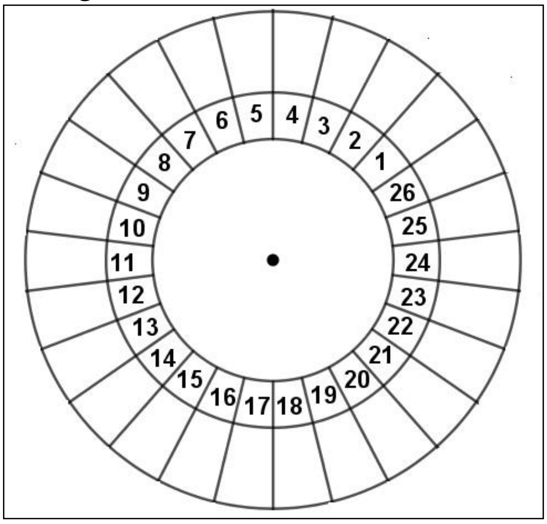
Para isso, colocou-se uma tachinha sobre o ponto central de maneira que o círculo menor pudesse girar. Esses dois moldes foram impressos e distribuídos para os alunos desenvolverem a segunda questão.

Figura 22 – Molde do círculo externo.



Fonte: http://www.obmep.org.br/docs/apostila10.pdf.

Figura 23 – Molde do círculo interno.



Fonte: http://www.obmep.org.br/docs/apostila10.pdf.

Após a realização dessa parte prática da atividade, foi o momento de apresentar o conceito do que são anagramas e a maneira de calculá-los, algo trivial e com vasto material de pesquisa disponível para o professor consultar e desenvolver em sala de aula.

Resolução:

Questão 1:

[17] Na figura 23 (está fora de escala), o aluno irá preencher o espaço vazio com as letras do alfabeto, distribuindo-as da maneira que desejar, como destaquei de vermelho no exemplo da questão 2.
[18] No exemplo da questão 2, Figura 21, a chave escolhida foi a 3.

a) Basta substituir cada letra da mensagem criptografada pela sua letra correspondente, observando as associações de acordo com a imagem da Figura 20, e será obtida a sua tradução:

O MEU IMPERIO ACABOU

b) Neste item, a operação a fazer é o inverso do que foi feito no item anterior, e ao final terei:

VHJUHGR H PDWHPDWLFD

Questão 2:

a) Observando a chave criptográfica do círculo que é 3 e fazendo as substituições nas letras do círculo interior para as do círculo exterior, obtém-se a seguinte tradução:

OS NÚMEROS GOVERNAM O MUNDO

b) Ao fazer as substituições das letras do círculo exterior para as do círculo interior, será formada a seguinte mensagem criptografada:

M HIUTM RME UIV XEUKEZM

c) A mensagem descriptografada é:

ESTUDAR LIBERTA E PROMOVE

4.6.1 Discussões e resultado

A aula começou averiguando o que os alunos sabiam sobre criptografia. Alguns citaram o filme o Código de Da Vinci; outros, o Código Morse. As indagações continuaram:

— **Professor:** o que vocês sabem sobre criptografia, o que acham que é?

— **Aluno D:** serve para escrever mensagens que ninguém pode decifrar.

— **Aluno B:** isso. O segredo da mensagem ninguém consegue descobrir o que é.

— **Professor:** então você envia uma mensagem para alguém e só você a entende?

— **Aluno A:** não. Quem recebe a mensagem consegue ler também.

Pelos diálogos, percebeu-se que os alunos têm a ideia correta sobre o assunto e compreenderam que há um sigilo nas mensagens que apenas o emissor e o receptor conhecem. Aprofundou-se a discussão quando relataram:

— **Alunos B e F:** as mensagens do WhatsApp são criptografadas. As senhas de internet também.

— **Professor:** bons exemplos, *B* e *F*. Então, vemos a importância da matemática no nosso cotidiano, contribuindo para a segurança de nossas ações.

Em relação a questão 1, que trata do método de criptografia de Júlio César, os alunos compreenderam corretamente e apontaram as respostas constantes na resolução desta atividade. Apenas dois alunos tiveram dúvidas quanto a chave da criptografia utilizada por Júlio César. Desse modo, reforçou-se seu valor (três) devido ao deslocamento das três letras do alfabeto.

A segunda questão apresentou algumas discussões interessantes sobre o sistema criptográfico dos círculos giratórios da Figura 21, como descreve o diálogo abaixo:

— **Aluno K:** era mais fácil de memorizar se a chave fosse 1.

— **Aluno A:** mais num é mais interessante uma chave que seja difícil, assim é mais difícil de descobrir.

— **Professor:** então qual deve ser a chave para ser mais difícil de descobrir?

— **Aluno E:** só não pode ser a chave 17 porque senão as letras da mensagem traduzida ficam iguais a da mensagem criptografada.

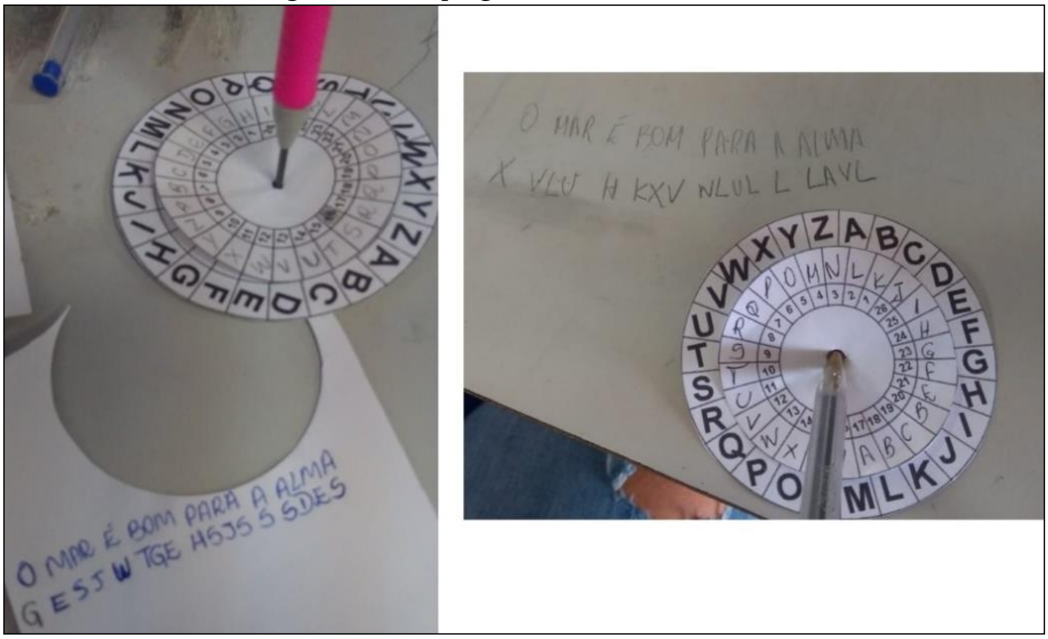
— **Aluno B:** qualquer uma diferente vai ser difícil, pois as letras são trocadas e não formam uma palavra que seja entendida.

— **Professor:** você girou o círculo interior para essa chave 17, *E*?

— **Aluno E:** não, não. Só coincide a letra A. Então ela pode ser usada também.

Quanto aos itens pedidos na questão dois, os alunos responderam corretamente. Além disso, criptografaram a frase do exemplo da questão 2, usando outras chaves escolhidas por eles. As chaves 16 e 2 estão representadas, respectivamente, nas duas imagens da Figura 24.

Figura 24 – Criptografias com chaves 16 e 2.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Observando os resultados elaborados pelos alunos na resolução das questões, surgiu uma dúvida e em seguida uma discussão apresentada no diálogo a seguir:

— **Aluno D:** pode usar tanto o círculo de fora quanto o de dentro para criptografar?

— **Aluno A:** não pode.

— **Aluno D:** por que num pode?

— **Professor:** por que não pode, *A*?

— **Aluno A:** se eu usar o círculo de fora, a chave vai ser sempre a mesma.

— **Professor:** com assim, *D*, que a chave vai ser a mesma?

— **Aluno A:** professor, veja aqui como criptografo a palavra ANA usando o círculo de fora.

O aluno justificou seu raciocínio do seguinte modo: criptografou a frase ANA LIMA de três modos diferentes, girando o círculo maior e fixando o do meio. Ele obteve as seguintes mensagens:

- OBO ZWAO
- GTG ROSG
- YLY JHKY

A Figura 25 mostra o raciocínio do aluno *A* na justificativa de seu ponto de vista, referente a criptografia ANA LIMA.

Figura 25 – Círculos externo e interno.

Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Pelo raciocínio do aluno, viu-se que a chave permaneceu a mesma, 13. Nesse sentido, o aluno *A* comprovou seu raciocínio, mostrando que o círculo exterior[19] não serve para criptografar as mensagens em virtude de a chave ser a mesma, pois mensagens com criptografias diferentes apresentam a mesma chave.

4.7 Atividade 7 – Tema: sistemas lineares

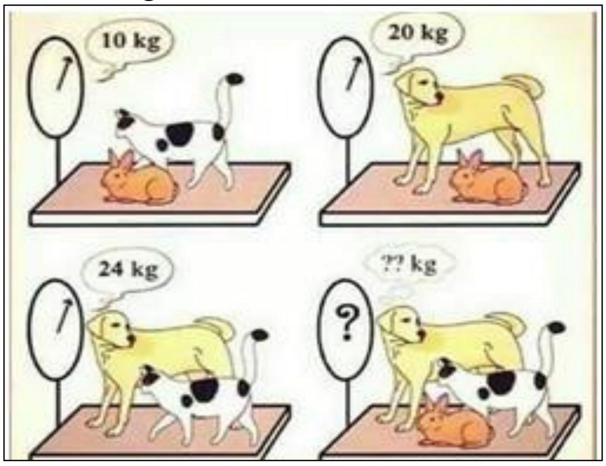
Esta atividade envolve a técnica de motivação *apresente um desafio*. Os alunos, frequentemente, apresentam desafios publicados nas redes sociais que geralmente consiste em descobrir o valor numérico baseado em uma sequência de imagens contendo informações para nortear o raciocínio e motivação necessária para conseguir calcular o resultado total formado a partir da associação de algumas destas imagens. Partindo de uma leitura da Atividade 7, ficará mais clara a compreensão da técnica de motivação aqui descrita.

Atividade 7:

1. A Figura 26 mostra as massas de um coelho, um gato e um cachorro pesados dois a dois. Qual a massa dos três animais juntos?

[19] Nessa situação, ao invés do círculo interior girar, este permanece fixo e o externo gira.

Figura 26 – Massa dos animais.

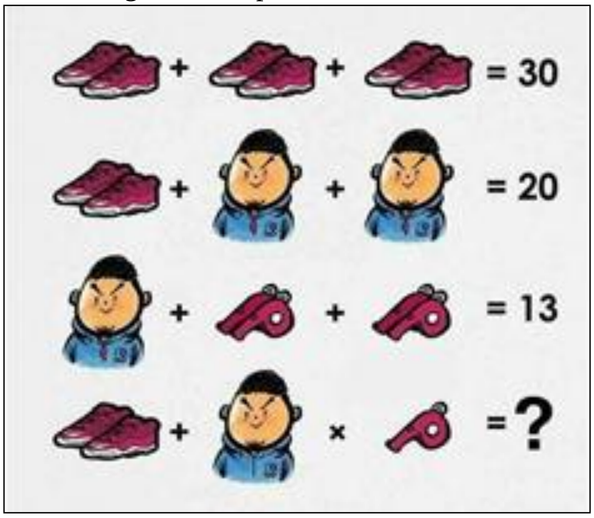


Fonte: https://www.facebook.com/groups/1394911783936908/?source_id=1184002328371310.

E qual a massa de cada animal individualmente?

2. Observe a Figura 27 e marque qual dos três sistemas de equações não representa a situação proposta nesta figura. Dois desses sistemas possibilitam responder o enigma proposto, individualmente ou aos pares, e levam a mesma solução. Além disso, escreva uma equação que traduza o que é pedido na última linha da imagem.

Figura 27– Apito, homem e tênis.

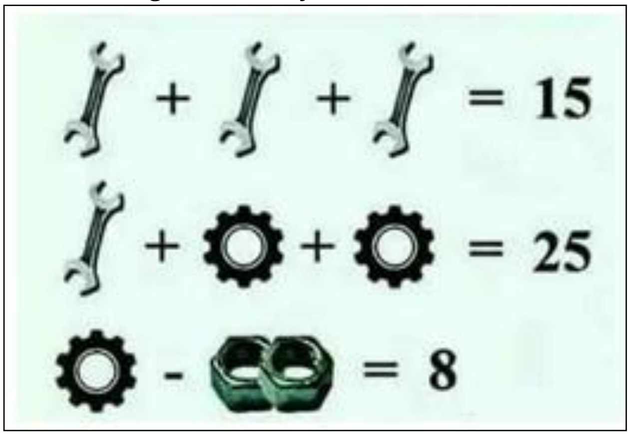


Fonte: https://www.facebook.com/groups/1394911783936908/?source_id=1184002328371310.

$a)\begin{cases} 3x = 30 \\ x + 2y = 20 \\ y + 2z = 13 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 6x = 30 \\ 2x + 2y = 20 \\ y + 4z = 13 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x + x + x = 30 \\ x + y + y = 20 \\ y + z = 13 \end{cases}$

3. Usando a Figura 28 que ilustra a chave, a engrenagem e a porca, como deveria associá-las para que o resultado seja igual a 50?

Figura 28 – Peças e ferramentas.



Fonte: https://www.facebook.com/groups/1394911783936908/?source_id=1184002328371310.

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, quadro branco, papel, lápis, borracha, internet, computador e/ou celular.

Aplicação da estratégia de motivação:

Os alunos se organizaram em grupos para realizar uma pesquisa em casa, utilizando o Facebook, Whatsapp, Twitter e/ou Instagram, selecionando três imagens por grupo, de desafios que pedem para descobrir o valor de cada objeto utilizado nessas figuras, semelhante as situações ilustradas nas Figuras 26, 27 e 28 desta atividade. Como fontes de consulta para a realização da pesquisa, disponibilizou-se alguns links no Facebook, Instagram e no Twitter.[20]

Em sala de aula, os alunos apresentaram os resultados da tarefa domiciliar usando projetor e foi solicitado que os outros colegas respondessem o valor dos objetos, socializando assim as ideias e estratégias utilizadas. Após a apresentação e entrega da pesquisa com as discussões realizadas para chegar a um suposto resultado, cada grupo apresentou a maneira que utilizou para obter o resultado daqueles problemas inicialmente pesquisados por eles. Esse momento é importante, pois motiva os alunos a ficarem atentos, aprendendo com o que o colega explica, justamente para saber se o que foi feito está correto.

[20]Disponível em: https://www.facebook.com/search/top/?q=a%20arte%20da%20matem%C3%A1tica; https://www.instagram.com/explore/tags/desafiosmatematicos/; https://rafaelmatematico.blogspot.com/2018/06/desafios-matematicos-45.html?m=1.

Após a discussão das estratégias e dos resultados apresentados, realizou-se a associação ao conteúdo de sistemas lineares e justificou-se que achar a solução para o problema é equivalente a resolver um sistema linear. Por exemplo, a Figura 26 é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 20 \\ x + z = 24 \end{cases}$$

Aqui x representa a massa do gato; y, a massa do coelho e z, a massa do cachorro. No final, para determinar a massa total dos animais, basta fazer $x + y + z$. Para isso, foi feita a soma das três equações e depois, dividindo o resultado por 2, tem-se o valor de 27 como solução.

O sistema também pode ser calculado por qualquer outro método: adição, substituição, escalonamento, tentativa etc. Para determinar a massa individual dos animais, pode-se montar uma tabela atribuindo valores para cada um. Esse método é interessante, pois permitiu o treino com cálculo mental, além de levar os alunos a perceberem a necessidade da utilização de outros métodos de resolução mais eficazes e com menor esforço.

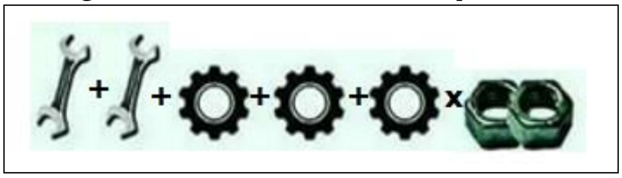
A resolução do segundo problema apresentou dois sistemas corretos. A maneira como se monta cada um interfere na equação final que se pretende determinar. Foi importante mostrar para os alunos que existe mais de um modo correto de traduzir a linguagem escrita e visual do problema para a álgebra. Fato que é importante, pois trata-se da contextualização do conceito matemático com a prática, abordando situações do cotidiano.

Optando-se pelo sistema da letra a, tem-se a equação: $x + y + z/2$. Já se for usado o do item b, tem-se a seguinte equação: $2x + y + z$. Na primeira equação, cada par de tênis é x; o homem é y; e cada par de apitos é z. Na segunda equação, cada tênis é chamado de x; o homem, de y; e cada apito, de z.

Ao se calcular o valor de cada imagem contida na Figura 28 presente na terceira questão desta atividade, obteve-se que cada chave vale 5, cada engrenagem 10 e cada porca 1.

Para obter o resultado igual a 50, houve como uma possibilidade duas chaves, uma engrenagem e três porcas, como segue ilustrado na Figura 29.

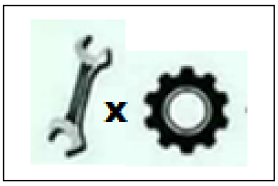
Figura 29 – Resultado correto da questão 3.



Fonte: autoria própria (2019).

É bom ressaltar que há outras respostas que podem surgir, como a que segue ilustrada na Figura 30, a qual sugere que o professor faça uma análise individual, esclarecendo os casos em que o erro aparecer, reforçando o enunciado da questão que pede para utilizar os três símbolos.

Figura 30 – Resultado incorreto da questão 3.

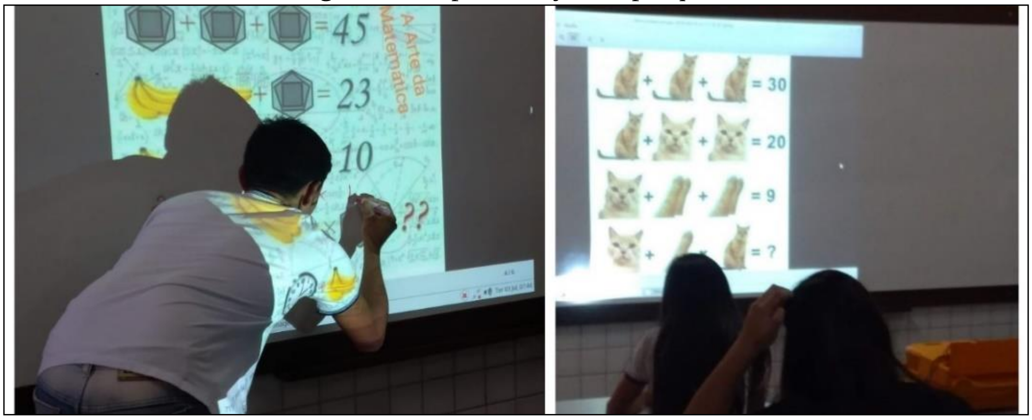


Fonte: autoria própria (2019).

4.7.1 Discussões e resultado

A pesquisa sugerida na estratégia de motivação foi realizada pelos alunos e os resultados foram apresentados a turma pelos grupos. As duas imagens mostradas na Figura 31 ilustram um pouco desta ação.

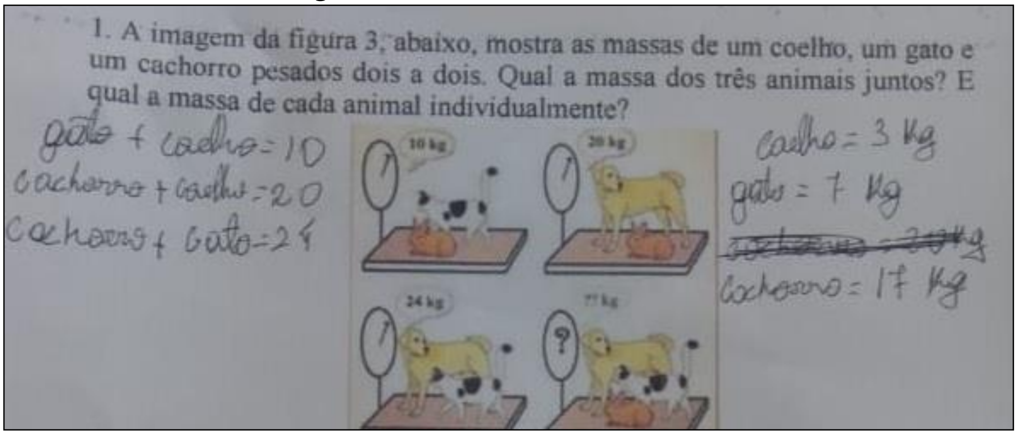
Figura 31– Apresentação da pesquisa.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Após a apresentação dos grupos, a atividade 7 foi distribuída e logo a primeira questão foi resolvida pela maioria dos alunos por tentativas, mesmo alguns utilizando uma linguagem pré-algébrica, como pode se observar na Figura 32. Ao término, foi apresentada a solução que soma as três equações do sistema e divide os dois membros da equação por 2.

Figura 32 – Questão 1 da atividade 7.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

A segunda questão pediu inicialmente para marcar a alternativa que não traduz a situação representada na imagem da Figura 33. Dois alunos fizeram as seguintes indagações:

— **Aluno K:** a questão quer saber quanto vale o par de sapatos ou o valor de um sapato só?

— **Aluno C:** eu acho que você pode contar das duas formas, né professor?

— **Professor:** quais são as duas formas, C?

— **Aluno C:** se eu contar os pares, cada um vale $2x$, se eu contar os sapatos por unidades cada um vale x. A mesma coisa acontece com os apitos, professor.

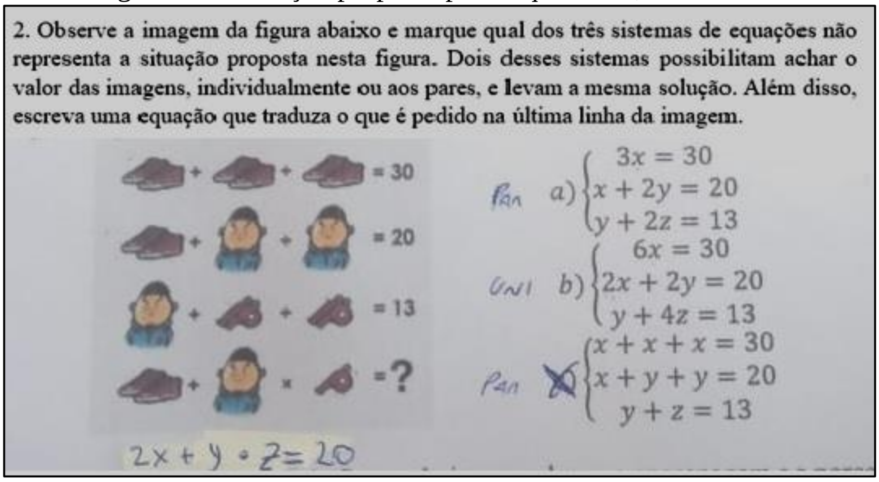
A passagem dos dados para a linguagem algébrica, utilizando diferentes modos, foi o que tornou o uso dessas imagens muito apropriado para o estudo de sistemas lineares. Isso foi percebido por alguns alunos durante a realização da atividade, ora realizando a contagem dos objetos individualmente, ora a dos pares.

Ao mesmo tempo que os alunos se sentiram desafiados, a atividade também possibilitou realizar uma transposição importante da aritmética para a álgebra e que costuma levar os alunos a cometerem muitos erros.

Alguns alunos não realizaram uma leitura atenta e marcaram uma das alternativas corretas, mas que logo foi refutada, haja vista que também apontaram a outra alternativa correta.

O aluno C realizou a contagem dos objetos individualmente usando o x para representar cada sapato; y, o homem; e z, cada apito. No final apresentou uma expressão correta, $2x + y \times z = 20$, para o problema, como mostra a Figura 33.

Figura 33 – Solução proposta para a questão 2, atividade 7.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

A maioria dos alunos resolveram a questão 3 usando as imagens disponibilizadas nela mesma. Entretanto, um aluno se apropriou da linguagem algébrica para apresentar sua solução, conforme o diálogo e a Figura 34:

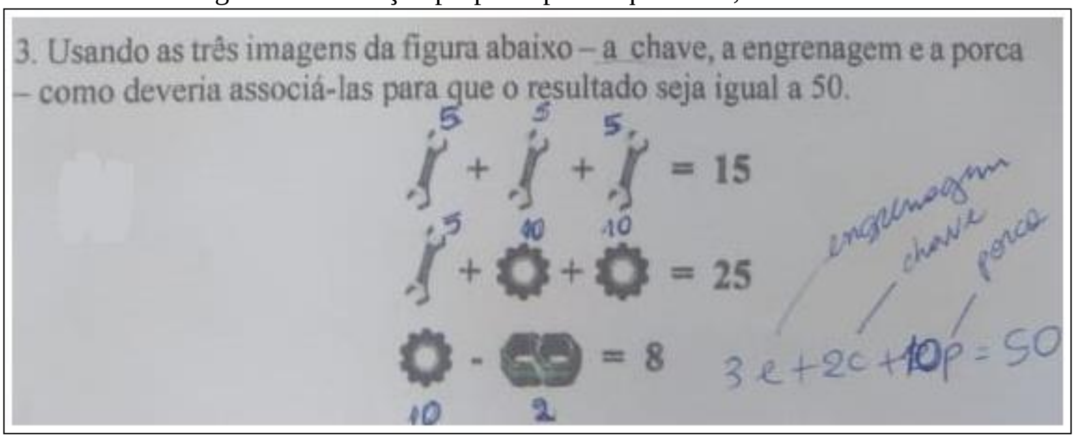
— **Professor:** como você fez para obter o resultado igual a 50?

— **Aluno B:** para chegar no resultado 50, eu peguei três engrenagens, duas chaves e dez porcas.

— **Professor:** como você representou isso?

— **Aluno B:** não, fiz o desenho. Usei as primeiras letras dos nomes, e, c e p.

Figura 34 – Solução proposta para a questão 3, atividade 7.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Interessante que o aluno utilizou as letras iniciais das palavras engrenagem, chave e porca (*e, c,* e *p)* em vez do *x, y* e *z* para representar as variáveis da equação linear. A aceitação e compreensão do conteúdo ocorreram de modo satisfatório, uma vez que os alunos perceberam que determinar estes valores é o mesmo que encontrar o valor numérico de cada objeto.

4.8 Atividade 8 – Tema: pirâmide quadrangular reta e o cubo

Esta atividade envolve a técnica de motivação *use materiais feitos pelo professor ou vendidos prontos*. A proposta consiste numa oficina para a construção de uma pirâmide com base quadrangular e analisar a relação desta com o cubo mostrando que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma. A construção da pirâmide, utilizando régua e compasso, apresentará as propriedades geométricas envolvidas.

Atividade 8

1. Construa com régua e compasso a planificação da pirâmide de base quadrada reta. Para isso, siga as instruções abaixo:

1º) trace com régua e compasso o quadrado *ABCD*;

2º) transfira com compasso o segmento *CD* com vértice em C para a reta *BF*;

3º) trace com régua o segmento *DF*;

4º) trace com compasso a medida do segmento *DE* de comprimento igual ao lado do quadrado *ABCD*;

5º) trace com compasso a posição do ponto *E* e com régua trace o segmento *DE* perpendicular ao segmento *DF*;

6º) una os pontos *E* e *F* com régua, obtendo assim o segmento *EF*;

7º) trace com compasso o semicírculo de centro *F* e raio igual a *DF;*

8º) trace o semicírculo de centro em *E* e raio igual a ED;

9º) marque o ponto *G*, interseção dos dois semicírculos traçados anteriormente;

10º) trace com régua os segmentos *EG* e *FG*;

11º) trace com compasso os semicírculos com centros nos pontos *G* e *F* e medida dos raios iguais ao lado do quadrado;

12º) marque o ponto *H*, interseção destes dois últimos semicírculos;

13º) trace com régua os segmentos *GH* e *HF*;

14º) trace as abas que serão coladas na base quadrangular.

2. Por que o triângulo *GHF* é isósceles?

3. Por que os segmentos *DE, EG, GH* e *HF* têm mesma medida do lado do quadrado *ABCD*?

4. Quando juntamos três pirâmides iguais a construída, o que obtemos? E se juntarmos quatro?

Materiais ou equipamentos necessários:

Projetor, régua, compasso, quadro branco, cartolina, tesoura, cola branca, lápis, borracha.

Aplicação da estratégia de motivação:

Antes da realização da atividade, foram providenciados os materiais necessários. Iniciou-se revisando com os alunos as construções mais simples, como traçar retas perpendiculares, mediatrizes, transporte de segmentos etc. Para isso, foi pesquisado diversos materiais de apoio, como videoaulas, material teórico e um aplicativo, disponíveis no site do portal do saber, o portal da matemática da OBMEP.[21]

A atividade envolveu a construção da planificação da pirâmide pelos alunos e com cada face poligonal construída adjacente a anterior. Essas instruções detalhadas foram organizadas de modo sucinto na atividade. Antes de levar a proposta para os alunos em sala de aula, o professor seguiu as orientações descritas anteriormente e construiu a sua própria pirâmide.

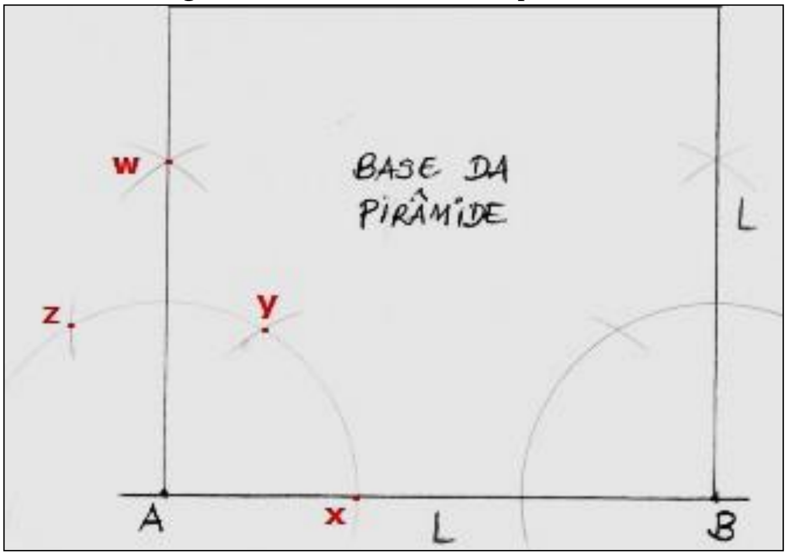
A planificação da pirâmide ocorreu a partir da construção do quadrado, que é a base da pirâmide, com régua e compasso. Traçou-se com uma régua um segmento $AB = L$ de medida igual a 8 cm. Em seguida, construiu-se duas retas perpendiculares passando pelos pontos *A* e *B*. Com o auxílio do compasso e com a ponta seca no ponto *A* e uma abertura qualquer menor que metade do lado *L*, traçou-se um arco interceptando o segmento *AB* no ponto X. Com a ponta seca neste ponto e com a mesma abertura foi marcado o ponto *Y* e com a ponta seca neste ponto, marcou-se o ponto *Z* e um arco passando por este. Por fim, com a ponta seca do

[21] Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67.

compasso no ponto *Z* e com mesma abertura foi construído um arco passando por este. O encontro destes dois últimos arcos foi o ponto chamado de *W*. A reta perpendicular que passou pelos pontos *A* e *W* formou um dos lados do quadrado com medida igual ao do segmento *AW*. O lado paralelo a este foi construído do mesmo modo.

Por último, com um compasso foi medido um comprimento de 8 cm e marcou-se esta medida sobre as duas retas perpendiculares com a ponta seca do compasso nos pontos *A* e *B*. Agora bastou unir esses pontos com uma régua e o quarto lado do quadrado paralelo ao lado *AB* foi obtido, como mostra a Figura 35:

Figura 35 – Quadrado base da pirâmide.



Fonte: autoria própria (2019).

O segundo passo consistiu em construir a face que também servirá de altura da pirâmide de base quadrangular. Para isso, bastou transportar o segmento *CD* fixando a ponta seca do compasso no ponto *C* e abertura igual ao comprimento de *CD*, até encontrar o prolongamento de *BC* no ponto *F*. Com uma régua, marcou-se a aresta A_2, obtendo assim a 1ª face adjacente à base quadrada da pirâmide.

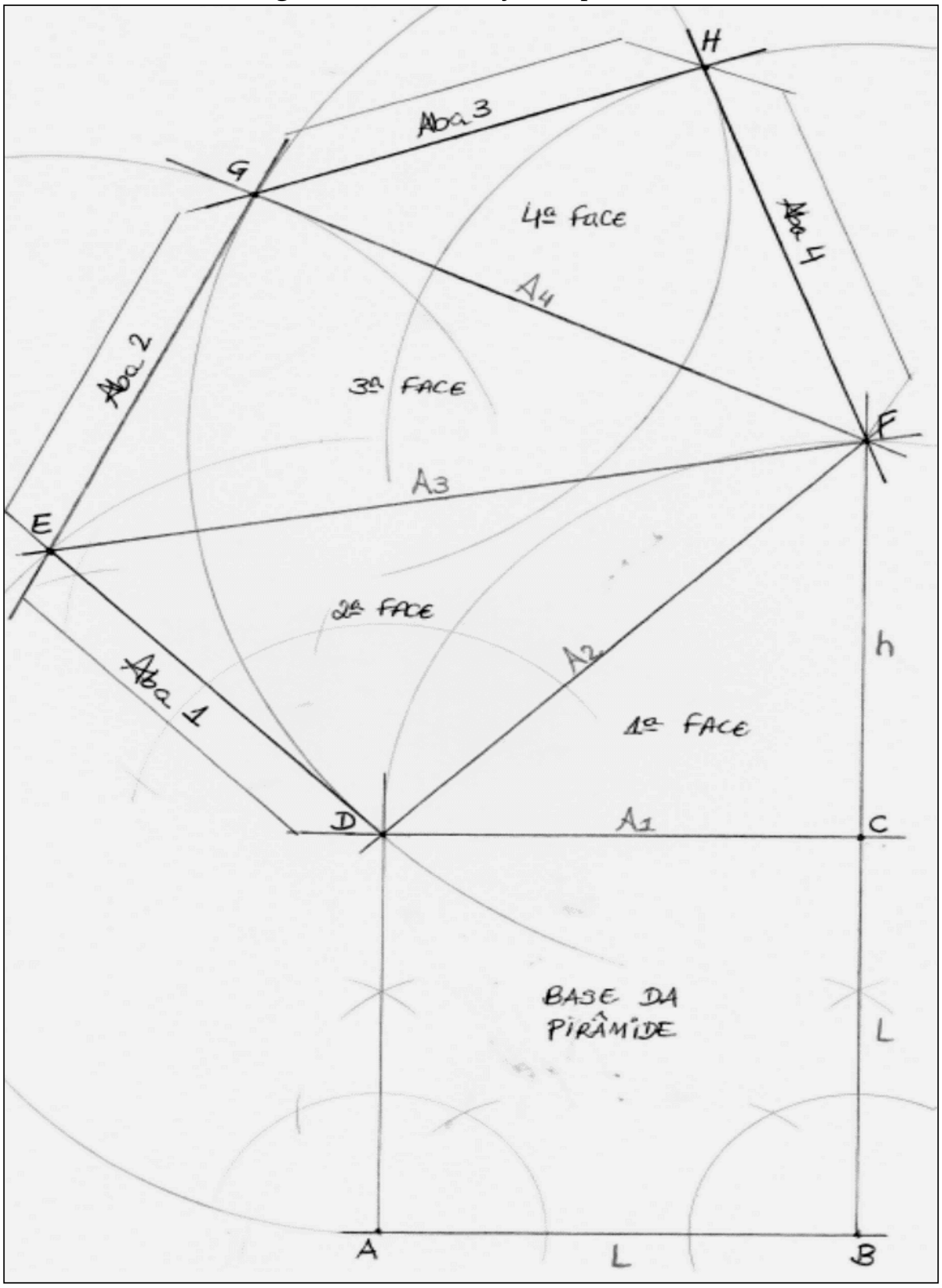
Para obter a 2ª face, adjacente à 1ª face, traçou-se com régua e compasso a reta perpendicular a A_2 passando por *D* e depois foi marcado sobre esta reta o ponto *E*, de tal modo que *DE* tivesse comprimento de mesma medida que *CD*. Logo após, uniu-se com uma régua os pontos *E* e *F*, conseguindo assim a aresta A_3.

A terceira face se obteve transportando a aresta A_2 e o segmento *ED*. Para isso, fixou-se a ponta seca do compasso em *F* e com abertura *DF* foi construído um semicírculo e, depois, fixou-se a ponta seca do compasso no ponto *E* e com abertura *ED* foi construído outro semicírculo. A interseção destes dois semicírculos foi chamada de ponto *G*, terceiro vértice da face triangular, que se obteve traçando-se com uma régua os segmentos *EG* e *GF*.

A quarta face foi formada a partir do transporte dos segmentos *EG* e *FC* através da construção de dois semicírculos centrados em *G* e *F* e de raios com medidas iguais aos dos segmentos transportados, respectivamente. A interseção destes dois semicírculos foi denominada de ponto *H*, vértice da região triangular que formou esta última face.

Por fim, traçou-se as abas 1, 2, 3 e 4 adjacentes a 2ª, 3ª e 4ª faces triangulares onde foram coladas a base quadrada, como está representado na Figura 36:

Figura 36 – Planificação da pirâmide.



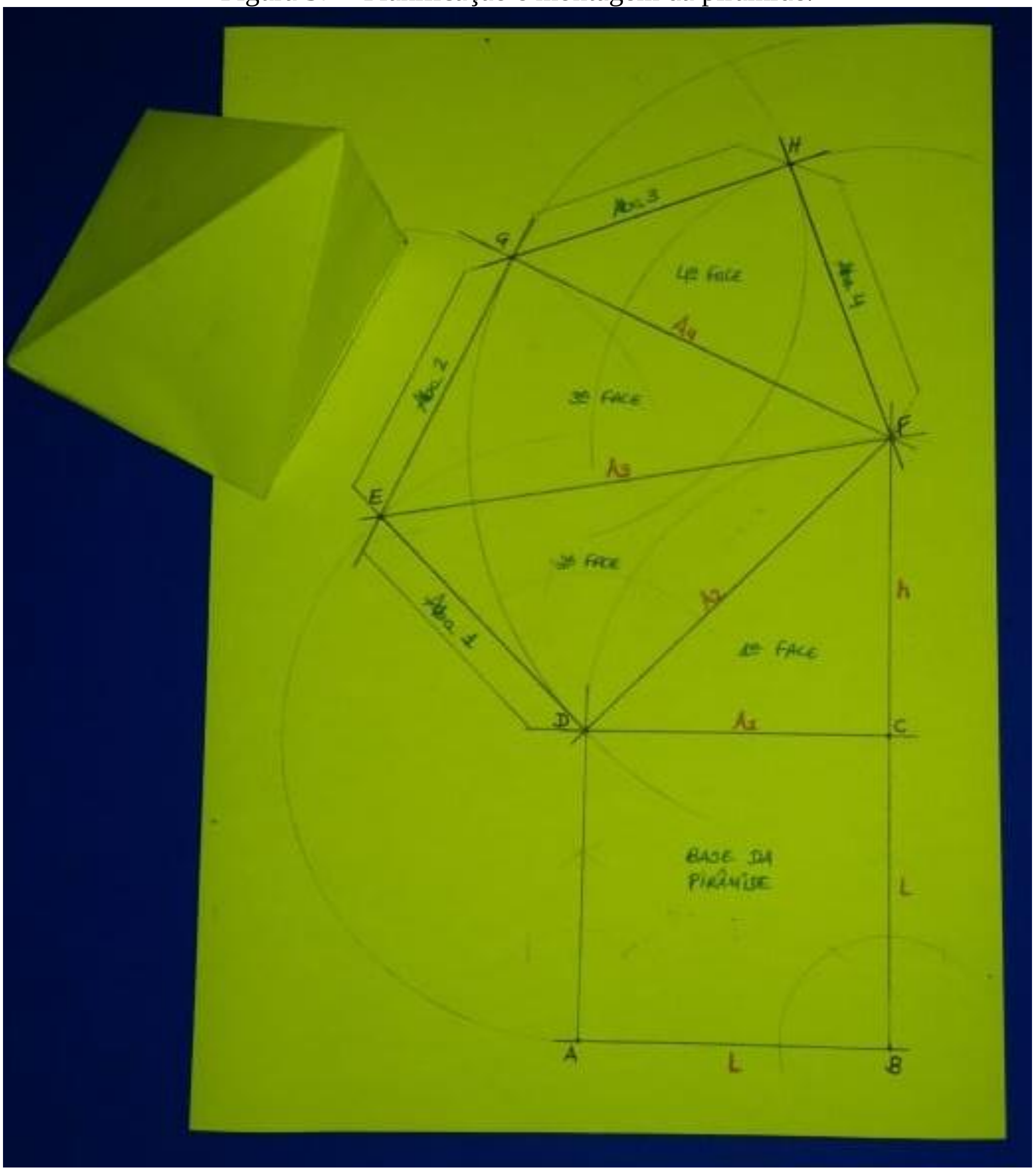
Fonte: autoria própria (2019).

Além disso, depois de recortada a planificação e montada a pirâmide, foram explorados os poliedros e suas características (faces, vértices e arestas). A relação entre os volumes da pirâmide e do cubo foram estabelecidas a partir da visualização da junção de três destas pirâmides formando um cubo.

4.8.1 Discussões e resultado

Os alunos utilizaram os instrumentos necessários e conseguiram construir a planificação da pirâmide de base quadrangular reta e, depois, o sólido geométrico, ou seja, a pirâmide. A Figura 37 mostra a construção produzida pelo aluno *A*.

Figura 37 – Planificação e montagem da pirâmide.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Quanto a questão número 2, dois alunos dialogaram a respeito da natureza do triângulo *GHF*:

— **Aluno B:** as abas 3 e 4 têm de ser iguais.

— **Professor:** por quê, *B*?

— **Aluno B:** porque são bases dos triângulos e vão ser coladas sobre os lados do quadrado.

— **Aluno D:** pelas instruções da construção os lados só podem ser iguais.

— **Professor:** mais como você tem certeza de que as medidas *GH* e *HF* são iguais, *D*?

— **Aluno D:** pelas construções, essas medidas são raios de circunferências e estas têm medidas iguais.

O argumento do aluno *B* foi usado também para responder a terceira questão: Por que os segmentos *DE*, *EG*, *GH* e *HF* têm a mesma medida do lado do quadrado *ABCD*?

— **Aluno B:** esses três primeiros segmentos junto com *DC* são as bases dos triângulos que formam a pirâmide.

— **Professor:** e o que garante que essas medidas são iguais ao lado do quadrado?

— **Aluno B:** cada triângulo fica em cima de cada lado do quadrado, logo são iguais.

A última questão da atividade foi respondida pelos alunos e apresentou os seguintes diálogos:

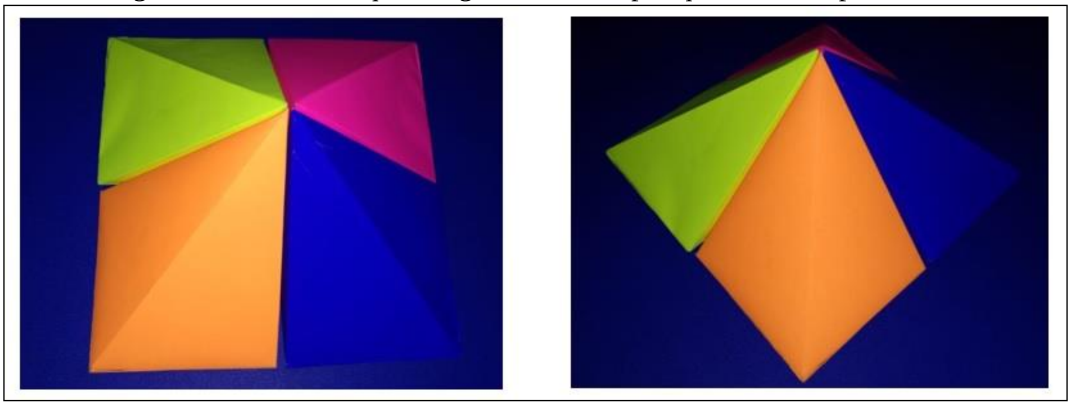
— **Aluno E:** juntando três pirâmides eu não sei, mas se tivesse quatro iguais dá pra formar uma pirâmide maior.

— **Professor:** como você descobriu isso, *E*?

— **Aluno E:** eu só juntei as pirâmides assim.

Inicialmente os alunos apresentaram dificuldade em responder a primeira pergunta desta última questão. Então, o aluno *E* apresentou uma solução para a segunda parte da última questão. A Figura 38 apresenta a solução proposta pelo aluno e foi registrada de dois ângulos diferentes.

Figura 38 – Pirâmide quadrangular formada por quatro outras pirâmides.



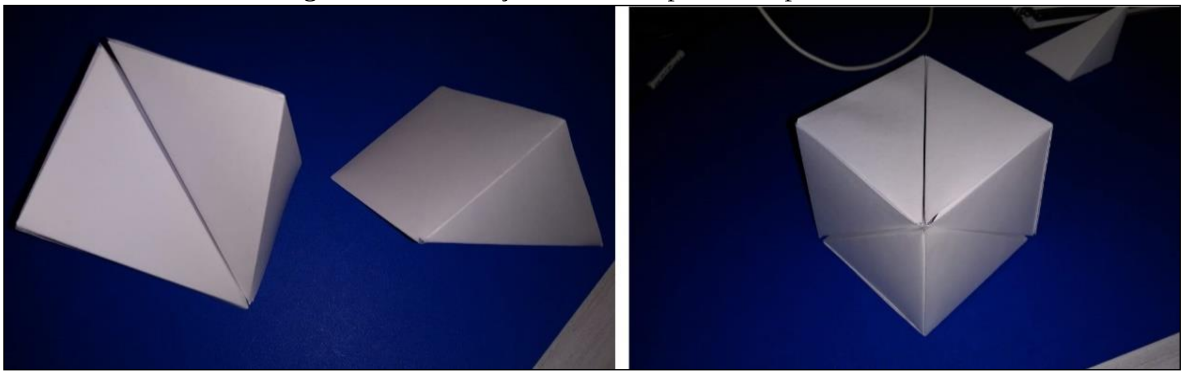
Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Quanto a primeira parte da questão, quando juntamos três pirâmides iguais a construída, o que se obtém? Os alunos foram orientados a mudarem as posições das três pirâmides e observarem o que ocorre.

— **Aluno E:** com os dois triângulos pequenos, dão pra formar um quadrado.
— **Professor:** muito bem. E o que faço com a terceira pirâmide?
— **Aluno E:** junto ela com as outras duas e formo um cubo.

O raciocínio utilizado pelo aluno está apresentado visualmente através da Figura 39.

Figura 39 – Formação do cubo a partir das pirâmides.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Após a compreensão visual pelos alunos de que o cubo pode ser formado por três pirâmides iguais a da planificação, abordou-se a relação algébrica entre seus volumes, mostrando que o volume da pirâmide é igual a um terço do volume do cubo.

4.9 Atividade 9 – Tema: raciocínio lógico

Esta atividade[22] envolve a técnica de motivação *envolva os alunos ativamente na justificativa de curiosidades matemáticas*. A proposta consiste em resolver problemas simples de lógica e, para isso, será feito uso de um material manipulativo que possibilite uma análise das proposições dadas de modo mais simples, além de tomar o processo mais dinâmico. Na segunda questão também será utilizada a mesma ideia.

Atividade 9:

1. *Os professores e suas cidades* – Rita, José e Sônia são professores de Literatura, Química e Matemática nas cidades de Palmas, Fortaleza e Vitória, não necessariamente nestas ordens de disciplinas e cidades. Sabe-se que:

José é professor de Literatura.
Quem trabalha em Palmas é professor de Química.
Rita não trabalha em Vitória, nem leciona Química.

a) Quem leciona Matemática?
b) Quem ensina Química?
c) Quem trabalha em Vitória?

2. *O código secreto* – O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de 0. Descubra o código utilizando as informações a seguir.

1 2 3	Nenhum algarismo correto.
4 5 6	Só um algarismo correto na posição certa
6 1 2	Só um algarismo correto, mas na posição errada.
5 4 7	Só um algarismo correto, mas na posição errada.
8 4 3	Só um algarismo correto na posição certa

Materiais ou equipamentos necessários:

[22] Questões retiradas dos bancos de questões da OBMEP 2010 e 2018, pag. 11 e 69, direitos reservados ao IMPA, disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm.

Quadro branco, cartolina, lápis, borracha, material impresso, tabelas ampliadas e durex.

Aplicação da estratégia de motivação:

Consistiu em distribuir o primeiro problema impresso para os alunos e depois foi pedido para eles apresentarem suas estratégias de resolução utilizadas. Na sequência foi apresentada uma tabela ampliada, fixada no quadro contendo três colunas, sendo a primeira, com os nomes dos professores, a segunda e a terceira, para serem preenchidas com os nomes das profissões e com os nomes das possíveis cidades onde cada um deles residem, respectivamente. Esses nomes foram postos em fichas coladas na tabela, como está apresentado na Figura 40.

Cada aluno, após ler o enunciado da atividade, foi retirando fichas de acordo com as informações fornecidas até restar somente uma opção de disciplina e uma de cidade para cada professor. Desse modo, cada aluno explanou seu raciocínio para os presentes naquela ocasião.

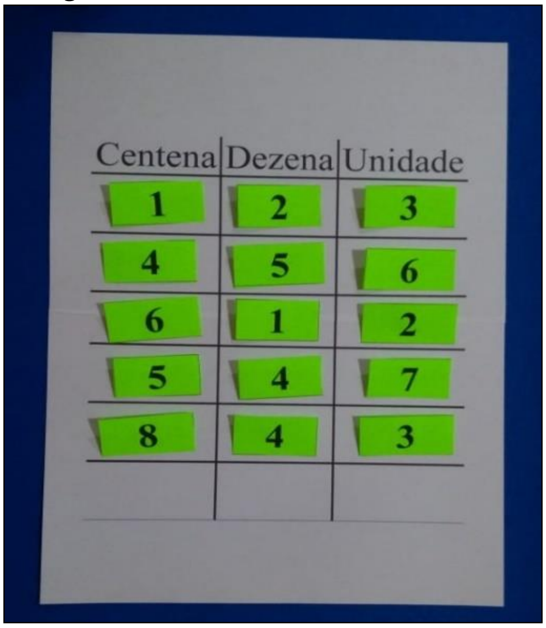
Figura 40 – Tabela de fichas nominais.

Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Ao término, a resposta foi obtida e apenas duas fichas restaram para cada professor, uma contendo a disciplina e na outra, a cidade que reside.

Para resolver a segunda questão, foi utilizado o mesmo procedimento com uma tabela ampliada, fixada no quadro e com as fichas numeradas de acordo com as informações contidas no enunciado da questão, como mostra a Figura 41. A última linha da tabela ficou em branco para ser preenchida com o código correto.

Figura 41 – Tabela de fichas numéricas.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

Ambas as questões da atividade apresentaram as fichas fixadas parcialmente com adesivos e, à medida que foi realizada a leitura das proposições de cada questão, foi-se retirando as fichas com informações incorretas, sobrando somente aquelas fichas com os resultados corretos.

Resolução:

1. A solução foi mais bem compreendida quando os dados foram expostos em tabelas. A solução divulgada no banco de questões da OBMEP utilizou esse formato e é apresentada nas tabelas que seguem, mostrando passo a passo a interpretação de cada proposição.

Tabela 2 – Proposição 2.

	Disciplina	**Cidade**	**Proposição**
Rita	~~L~~ Q M	P F V	
José	L ~~Q~~ ~~M~~	P F V	José é professor de Literatura.
Sônia	~~L~~ Q M	P F V	

Fonte: arquivo do autor (2019).

Como José é o professor de Literatura, os demais não poderão ministrá-la.

Tabela 3 – Proposições 1 e 2.

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	~~L~~ ~~Q~~ M	P F ~~V~~	Rita não trabalha em vitória, nem leciona química
José	L ~~Q~~ ~~M~~	P F V	José é professor de Literatura.
Sônia	~~L~~ Q M	P F V	

Fonte: arquivo do autor (2019).

Então, Rita ensina Matemática e Sônia ensina Química (e trabalha em Palmas). Prosseguindo com as análises de modo semelhante, percebe-se que:

Tabela 4 – Proposições 1, 2 e 3.

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	~~L~~ ~~Q~~ M	~~P~~ F ~~V~~	Rita não trabalha em vitória, nem leciona química.
José	L ~~Q~~ ~~M~~	~~P~~ F V	José é professor de Literatura.
Sônia	~~L~~ Q ~~M~~	P ~~F~~ ~~V~~	Quem trabalha em Palmas é professor de Química.

Fonte: arquivo do autor (2019).

Portanto, Rita trabalha em Fortaleza e José em Vitória.

Tabela 5 – Proposições corretas.

	Disciplina	Cidade	Proposição
Rita	~~L~~ ~~Q~~ M	~~P~~ F ~~V~~	Rita ensina Matemática em Fortaleza.
José	L ~~Q~~ ~~M~~	~~P~~ ~~F~~ V	José ensina Literatura em vitória.
Sônia	~~L~~ Q ~~M~~	P ~~F~~ ~~V~~	Sônia ensina Química em Palmas.

Fonte: arquivo do autor (2019).

2. Sabe-se que o código é formado por três dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Da primeira proposição sabemos que 1, 2 e 3 não fazem parte do código (então eles são descartados[23] como opção na Tabela 6).

[23] Os números descartados e/ou eliminados do código são destacados com a cor vermelho na tabela 5.

Tabela 6 – Código secreto.

Centena	Dezena	Unidade
1	2	3
~~4~~	5	6
6	1	2
5	4	7
8	4	3
8	**7**	**6**

Fonte: arquivo do autor (2019).

Pela terceira sentença, conclui-se que o algarismo 6 faz parte do código, pois pela primeira sentença os algarismos 1 e 2 não fazem parte do código (foram descartados na terceira linha da Tabela 6). Além disso, pela própria sentença três, o algarismo 6 está na posição errada, logo ocupará a unidade ou dezena, mas, pela sentença dois, há um algarismo na posição correta. Portanto, deve ser o 6 que está na posição da unidade (elimina-se os algarismos 4 e 5, na 3ª linha).

Dessa conclusão, nem o 7 nem o 3 podem ocupar a unidade (já que o 6 ocupou essa posição e, desse modo, eles também são descartados). Pela 3ª linha da Tabela 6, os algarismos 4 e 5 não fazem parte do código, somente o 6 (então, coloca-se os dois algarismos 4, nas 5ª e 6ª linhas de vermelho). Pelo parágrafo anterior, o algarismo 5 já tinha sido eliminado. Por fim, dos algarismos disponíveis para a dezena, só resta o algarismo 7 e o código correto é exibido na última linha da Tabela 6.

4.9.1 Discussões e resultado

A primeira questão foi resolvida pelos grupos de alunos e uma dupla foi ao quadro apresentar a sua estratégia de resolução. Enquanto o aluno *F* lia a questão pausadamente, o colega *M* retirava as fichas da tabela, mostrada na Figura 40, e colocava-as ao lado da tabela, como mostra a Figura 42.

Figura 42 – Tabela de fichas nominais com solução.

Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

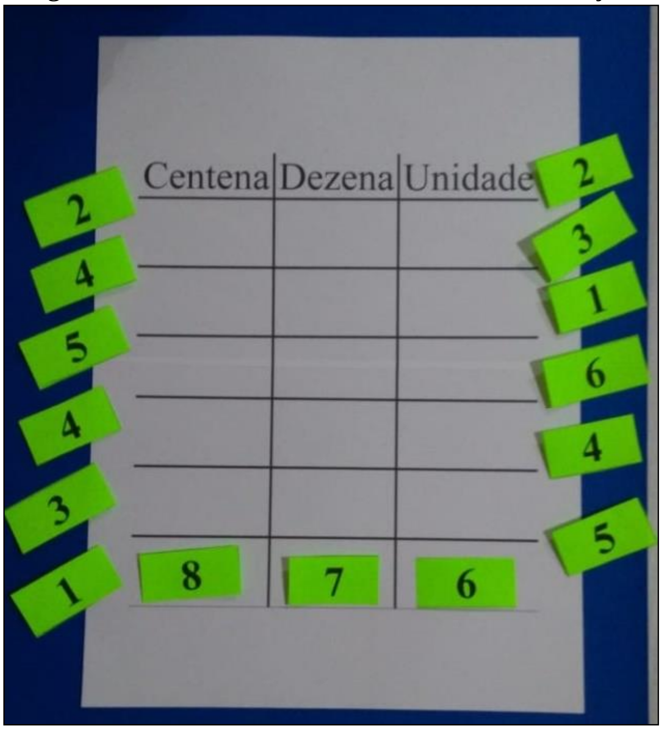
Quando estes alunos terminaram de expor seus raciocínios, surgiu o seguinte questionamento:

— **Aluno M:** professor, esse método serve pra resolver toda questão desse tipo?

— **Professor:** *M*, essa estratégia de utilizar uma tabela para organizar os dados é muito importante para facilitar a interpretação das informações e chegar mais facilmente a resposta. Sendo assim, sempre que você achar necessário poderá usá-la nesse sentido.

Na segunda parte da atividade, os alunos encontraram o código secreto corretamente utilizando o mesmo percurso da questão anterior, com uma pequena diferença. Eles iniciaram com a tabela da Figura 41 e retiraram todos os números da 2ª a 6ª linhas, restando apenas a solução na última linha da tabela, conforme a Figura 43.

Figura 43– Tabela de fichas numéricas com solução.



Fonte: arquivo pessoal do autor (2019).

O aluno *H* relatou qual a diferença que ocorreu em relação a questão 1:

— **Aluno H:** na 3ª linha só consegui excluir o 4 e 5 e ficar com o 6, porque a 4ª linha tem os algarismos 6, 1 e 2.

— **Professor:** como assim?

— **Aluno H:** precisei ler a 3ª pista pra decidir qual número escolher na 2ª pista.

— **Professor:** e por que não escolheu o algarismo 1 ou 2?

— **Aluno H:** porque já tinham sido descartados na 2ª linha.

— **Professor:** corretíssimo seu raciocínio, *H*.

Percebeu-se que os alunos se adequaram bem a abordagem utilizando as tabelas e isso é importante para introduzir o assunto de lógica e torná-lo mais palpável para aquele ambiente. Esse assunto é importante para a matemática e vem sendo tratado nas duas últimas versões do PAPMEM[24], lógica para o ensino médio (1ª e 2ª parte) ocorrido nos meses de janeiro e julho de 2019, respectivamente.

[24] Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio.

5 PERCEPÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES APLICADAS

As atividades aplicadas em sala de aula proporcionaram reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tendo em vista que os comportamentos pontuais adotados pelos alunos durante a realização das nove atividades propostas possibilitaram a formação de habilidades que podem ser empregadas em novas situações.

A primeira atividade abordada foi sobre aumentos e descontos sucessivos, e foi utilizada a técnica motivacional: *instigue a turma com um resultado matemático surpreendente e impressionante*. A natureza desta técnica foi alcançada, pois resultados inesperados instigaram a curiosidade dos alunos, quando parte da turma pensou que a aposta com três vitórias e três derrotas não iriam gerar nem ganho, nem perda. O resultado discutido na seção 4.1.1 mostrou o inesperado: houve perda ao final.

A técnica de motivação utilizada na segunda atividade – *indique uma lacuna no conhecimento dos alunos* – foi corretamente alcançada quando os alunos perceberam que não basta três medidas quaisquer para se obter um triângulo. Então surgiram indagações: qual a condição necessária para que três medidas formem um triângulo? Como se constrói um triângulo a partir de três medidas dadas? Tudo isto representou uma lacuna existente no conhecimento dos alunos e mostrou a necessidade de eles buscarem novos conhecimentos.

Na terceira atividade, com a técnica motivacional *utilize a matemática recreativa*, foi utilizado um jogo para introduzir o assunto de progressão aritmética. Os alunos ficaram familiarizados com o jogo e se empenharam muito em descobrir a estratégia vencedora. Isto justificou a curiosidade dos discentes e as disputas travadas em busca da vitória. As discussões e resultado estão detalhados e expostos na seção 4.3.1.

Baseada na estratégia motivacional *descubra um padrão,* nasceu a atividade quatro, cujo tema foi: divisão euclidiana e periodicidade. A utilização dos padrões serviu de ponto de partida para trabalhar o assunto resolução de problemas. O uso da tabela para verificar qual padrão ocorria e a divisão para determinar a cadeira sorteada foi uma estratégia de resolução bem compreendida.

Além disso, um aluno apresentou uma questão de matemática do ENEM, edição 2019, junto com a resolução proposta por ele e que abordava a busca de um padrão. Tal fato mostrou a importância dessa estratégia motivacional e a sua contribuição no desenvolvimento de habilidades para o reconhecimento de outras situações.

A quinta atividade teve o tema princípio multiplicativo e triângulo de Pascal, e utilizou a estratégia motivacional *conte uma história pertinente*. A história utilizada envolveu a busca por um tesouro e a pista dada consistiu em descobrir quantos passos separavam a pedra do tesouro. Esse enigma motivou os alunos a elaborarem diferentes estratégias de resolução e sua associação ao triângulo de Pascal foi algo inexistente nos livros didáticos convencionais.

Explique a utilidade de um tema foi a estratégia motivacional para o estudo de criptografia e anagramas, sexta atividade aplicada em sala de aula. As discussões sobre as senhas foram apontadas de imediato pelos alunos quando se realizou uma sondagem inicial, como está descrito nas discussões e resultado, vide seção 4.6.1.

Além disso, os estudantes resolveram as questões e se mostraram empolgados na apresentação de suas soluções. Isso só comprova o que diversas pesquisas constataram: que a associação dos conteúdos matemáticos às situações do cotidiano dos alunos torna a matemática mais atrativa, fora a sensação criada de que a disciplina passa a fazer mais sentido para estes.

A abordagem do tema sistema lineares, bastante abstrato e de difícil compreensão pelos alunos, foi apresentada utilizando a estratégia motivacional – *apresente um desafio* – e consistiu na sétima atividade proposta. As imagens trocadas pelos alunos nas redes sociais foi o ponto de partida ideal para tratar o tema, convertendo-as na linguagem algébrica. Isso consistiu numa transposição didática e foi essencial para os alunos entenderem melhor o significado das equações e sistemas lineares.

Na oitava e penúltima atividade, utilizou-se a estratégia de motivação – *Use materiais feitos pelo professor ou vendidos prontos* – e o tema estudado foi: pirâmide quadrangular reta e o cubo. A utilização da régua e compasso possibilitou a construção da pirâmide a partir de sua planificação com cada face adjacente a face anterior e a projeção da altura da pirâmide sobre um vértice do quadrado que compõe a sua base. O cubo foi formado a partir das três pirâmides, servindo bem para os alunos notarem a relação entre os seus volumes.

A nona e última atividade abordou um tema que é imprescindível para a aprendizagem matemática: o raciocínio lógico. Tomar uma decisão a partir de muitas informações, organizando-as de modo eficiente foi proposto através da técnica de motivação *envolva os alunos ativamente na justificativa de curiosidades matemáticas*. As resoluções das questões, a partir do descarte das fichas, apresentou uma perspectiva inversa do que normalmente é feito quando se resolve questões que é somente achar a resposta e a linearidade das sequências dos passos usados para isto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados estagnados das principais avaliações externas em Matemática apontam que novos rumos devem ser adotados, que novas abordagens são necessárias. O resultado do estado potiguar não é muito diferente do Brasileiro, pois além dos baixos índices de aprendizagem no SAEB, ENEM e PISA, ainda há o resultado da avaliação externa realizada no RN, o SIMAIS, que apresenta resultados com proficiência abaixo do básico.

Vários autores apresentados nesta pesquisa apontaram que a superação desse quadro crítico do ensino e aprendizagem da Matemática passa pela necessidade de motivar os alunos, valorizar os erros cometidos por estes durante o percurso e desmistificar a falsa ideia de que apenas algumas pessoas conseguem aprender matemática.

As atividades aplicadas em sala de aula foram além daquelas que vem geralmente propostas nos livros didáticos. Elas proporcionaram uma participação maior dos alunos, valorizou os seus raciocínios e erros e os encorajou, mesmo aqueles menos participativos.

No 1º Colóquio Potiguar de Matemática (CPM) realizado na cidade de Mossoró/RN no ano de 2019, a professora Dra. Erondina Barbosa da Silva proferiu uma palestra com o tema “A BNCC, os currículos e a construção do conhecimento matemático” e, na ocasião, fez um relato de que precisamos modificar as formas de ensinar Matemática, porque as formas de aprender são diferentes.

Ao se diversificar as formas de ensinar Matemática, surgem condições para que os alunos, com suas diferenças, consigam alcançar uma aprendizagem significativa. Neste trabalho, isso não ocorreu apenas pela escolha das atividades, mas também pela utilização das estratégias motivacionais atreladas a cada atividade. Esta pesquisa abordou a aplicação de nove destas atividades em sala de aula.

As atividades selecionadas cumpriram seu papel motivacional, pois foram além do que é comumente encontrado nas centenas de livros didáticos adotados pelas escolas, que é pedir para resolver listas de atividades com questões que não diferem muito umas das outras no que se refere a linha de raciocínio requerida para chegar a sua solução. Em contrapartida, as atividades propostas nesta pesquisa exigiram dos alunos algo a mais: “ler nas entrelinhas” para poder traçar estratégias de resolução e buscar suas respostas.

Outra contribuição importante decorrente dos tipos de estratégias de motivação utilizadas e das atividades selecionadas diz respeito a conhecer os diferentes níveis de aprendizagem em que os alunos estão, além da possibilidade de compreender como eles aprendem. Enquanto alguns alunos particularizavam seus raciocínios e ideias, outros conseguiam generalizar de imediato.

Também se constatou que mesmo os alunos cometendo erros na realização das atividades, estes se mostraram mais persistentes e prosseguiram tentando, além de terem se tornado mais curiosos em saber quais as resoluções e soluções das questões propostas.

O comportamento dos alunos, com a participação e engajamento durante a realização das atividades em sala de aula, foi algo inédito para o professor no sentido de ter conseguido alcançar até mesmo os alunos que não participavam ou se retraiam nas aulas.

Esta pesquisa não propôs esgotar o assunto nem tampouco desconsiderar outras metodologias existentes. Pretende-se ampliar futuramente a criação e seleção de atividades para serem aplicadas em sala de aula utilizando as estratégias de motivação abordadas no livro a *A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática* e estendê-las a outras etapas de ensino, como o Ensino Fundamental I e II.

REFERÊNCIAS

A arte da matemática. **Edward é um jovem professor e vive na Inglaterra**, São Paulo, 30 de setembro de 2019. Facebook: Ednardo Moraes. Disponível em: https://www.facebook.com/AArtedaMatematica. Acesso em: 10 dez. 2019.

ASSIS. C; MIRANDA. T; FEITOSA. S. **OBMEP – Banco de questões 2018.** p. 69. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1dxeDt_-5HyFg8I1MXlaZJo0a03axzWqq/view. Acesso em: 02 dez. 2019.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís A. Reto e Augusto Pinheiro. 5ed. Lisboa: Edições 70, 2009.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Coleção tendências em Educação Matemática), p. 101-114.

BOALER, J. **mentalidades matemáticas.** Porto Alegre: Penso, 2018.

BOALER, J. **O que a matemática tem a ver com isso?** Porto Alegre: Penso, 2019.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. *et al*. **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 5ª ed. São Paulo: autêntica, 2004.

BRIETZKE , E; DOERING, C. **OBMEP – Banco de questões 2018.** p. 11. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1mImxD9CS4QACwOohFMBIwvU4upoqCQD0/view. Acesso em: 10 dez. 2019.

BZUNECK, J. A. **Motivar seus alunos: sempre um desafio possível.** Disponível em: https://pt.scribd.com/document/268934067/Motivar-Seus-Alunos-Sempre-Um-Desafio-Possivel. Acesso em: 13 dez. 2019.

CARVALHO, P. C; MORGADO, A. C. N. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2ª ed. 2015.

COLÓQUIO POTIGUAR DE MATEMÁTICA, 1.: **Reunindo matemática pura, aplicada e seus laços com a educação**, Palestra: A BNCC, os currículos e a construção do conhecimento matemático, Mossoró RN, 2019.

ENC. **Microdados do Provão 2003.** p.354, Disponível em: http://inep.gov.br/educacao-superior/exame-nacional-de-cursos/relatorios. Acesso em: 20 dez. 2019.

INEP, Exame Nacional do Ensino Médio **– ENEM 2019: 2º dia de aplicação- caderno amarelo**, questão 159.

http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/caderno_de_questoes%20_2_dia_caderno_5_amarelo_aplicacao_regular.pdf. Acesso em: 28 dez. 2019.

FAINGUELLERNT, E. K; NUNES, K. R. A. **Matemática: práticas pedagógicas para o ensino médio.** Porto Alegre: penso, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

MALAGUTTI, P. E. **Atividades de Contagem a partir da Criptografia.** p. 2, 9. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila10.pdf . Acesso em 10 dez. 2019.

MOLINA, O. **Quem engana quem:** professor x livro didático. 2ª ed. Campinas – SP: Papirus, 1988.

POSAMENTIER, A. S; KRULIK, S. **A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática.** Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2014

RABELO, M. **Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios.** São Paulo: Ática, 2010.

STEWART, I. **Incríveis passatempos matemáticos.** Rio de Janeiro: ZAHAR, 2010.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa - ação**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1986.