



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL DE CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT**



ELMO DE ABREU VILARINHO

**O ENSINO DA FUNÇÃO LINEAR E DO TORQUE ATRAVÉS DE INTERAÇÕES DE
ENGRENAGENS**

CATALÃO

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Elmo de Abreu Vilarinho

3. Título do trabalho

O ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **ELMO DE ABREU VILARINHO, Discente**, em 02/07/2020, às 06:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Kennedy Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 06/07/2020, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1412649** e o código CRC **50D51C4F**.

ELMO DE ABREU VILARINHO

**O ENSINO DA FUNÇÃO LINEAR E DO TORQUE ATRAVÉS DE INTERAÇÕES DE
ENGRENAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. Fernando Kennedy da Silva.

CATALÃO

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Vilarinho, Elmo de Abreu

O ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens [manuscrito] / Elmo de Abreu Vilarinho. - 2020.
LXXXIV, 84 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2020.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, fotografias, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Função linear. 2. Torque. 3. Engrenagens. 4. Sequência didática. 5. Robótica. I. Silva, Fernando Kennedy da, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 12 da sessão de Defesa de Dissertação de **Elmo de Abreu Vilarinho**, que confere o título de Mestre(a) em **Matemática**.

Em **30 de junho de 2020**, às **14 horas e 01 minutos**, reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Fernando Kennedy da Silva (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição)**, orientador à distância pelo RNP, **Dr. Fernando da Costa Barbosa (IMTec/RC/UFG - UFCAT em transição)**, membro titular interno à distância pelo RNP e **Dr. Deive Barbosa Alves (PPGecim/UFT)**, membro titular externo à distância pelo RNP para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Sistema de webconferência da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), procederem a avaliação da Dissertação intitulada "*O ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens*", de autoria de **Elmo de Abreu Vilarinho**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada: (**x**) **Aprovado(a)** ou () **Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Trinta de junho de dois mil e vinte.**

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Kennedy Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 30/06/2020, às 16:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Da Costa Barbosa, Professor do Magistério Superior**, em 30/06/2020, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Deive Barbosa Alves, Usuário Externo**, em 30/06/2020, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ELMO DE ABREU VILARINHO, Discente**, em 30/06/2020, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1390084** e o código CRC **13F4DA7C**.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Elmo de Abreu Vilarinho graduou-se em Licenciatura em Matemática pelo Centro Universitário do Triângulo, é professor do colégio Leonardo Da Vinci de Patos de Minas desde 2002, colégio Universitário de Catalão desde 2019 e do colégio Gabarito de Uberlândia desde 2012. Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT- Universidade Federal de GOIÁS - Regional de Catalão.

Dedico este trabalho a minha família, que nunca mediu esforços para me apoiar
nessa jornada de aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

À minha família, por me ensinar a ser uma pessoa melhor a cada dia.

À minha amada esposa, por estar sempre ao meu lado.

À minha amada filha, por ser a razão da minha vida.

À minha mãe, por ser a razão da minha existência.

Aos professores do PROFMAT, por ampliarem minha fronteira do conhecimento, da sabedoria e da paciência em buscar as melhores fontes de pesquisa.

Ao coordenador do PROFMAT, Fernando da Costa Barbosa, pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso.

Aos meus queridos colegas de turma, pela parceria e apoio.

Em especial, ao meu orientador Fernando Kennedy da Silva que, com paciência, simpatia e muita inteligência, inspirou-me a continuar este trabalho nos momentos difíceis em eu que pensava em desistir.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo introduzir a robótica educacional na sala de aula do primeiro ano do ensino médio, por meio do emprego de uma forma pedagógica diferente do ensino tradicional no aprendizado do estudo de funções lineares e torque. Para isso, foi construído um guindaste com as peças de um kit LEGO EV3 por meio do acoplamento de trens engrenagens de um kit de marchas, de modo que, ao aplicar uma força constante do motor grande do lego na engrenagem motriz, ela transmite o movimento até a engrenagem de saída que está acoplada a uma polia que gera um torque. Observou-se que no acoplamento das engrenagens pode-se aprender vários conteúdos de matemática e física, tais como funções lineares, proporcionalidade, função composta e torque. Em consequência disso desenvolveu-se uma sequência didática que mostra o passo a passo deste trabalho para alunos e professores dispostos a utilizar essa metodologia de ensino. Por fim, pode-se concluir que essa dissertação instiga e incentiva o aprendizado dos discentes com o uso da tecnologia no cotidiano, assim como foi mostrado, com a aplicação prática de funções lineares e torque gerado pelo acoplamento de engrenagens.

Palavras-chave: Função linear. Torque. Engrenagens. Sequência Didática. Robótica. Educacional. LEGO®.

ABSTRACT

This work aims to introduce educational robotics in the classroom of the first year of high school, through the use of a pedagogical form different from traditional teaching in learning the study of linear functions and torque. For this, a crane was built with the parts of a LEGO EV3 kit by coupling the gears of a gear kit, so that, by applying a constant force of the large lego engine to the driving gear, it transmits the movement to the output gear that is coupled to a pulley that generates torque. It was observed that in the coupling of the gears it is possible to learn various contents of mathematics and physics, such as linear functions, proportionality, composite function and torque. As a result, a didactic sequence was developed that shows the step by step of this work for students and teachers willing to use this teaching methodology. Finally, it can be concluded that this dissertation instigates and encourages students' learning with the use of technology in their daily lives, as has been shown, with the practical application of linear functions and torque generated by gear coupling.

Keywords: Linear function. Torque, Gears. Following teaching. Robotics. Educational. LEGO®.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Laboratório utilizado para o desenvolvimento das atividades e mecanismos construídos pelos estudantes.....	25
Figura 2- Imagem do câmbio de marchas de quatro velocidades	27
Figura 3- Plano cartesiano ortogonal.....	29
Figura 4- Diagrama de flechas.....	30
Figura 5- Diagrama cartesiano	30
Figura 6- Representação por diagrama de flechas.....	31
Figura 7- Representação no diagrama cartesiano.....	32
Figura 8- Representação em diagrama de flechas da função de A em B.....	32
Figura 9- Monotonicidade da função	34
Figura 10- Monotonicidade da função	35
Figura 11- Monotonicidade da função	35
Figura 12- Representação da função inversa.....	36
Figura 13- Gráfico da simetria da função inversa.....	37
Figura 14- Gráfico da simetria da função inversa.....	37
Figura 15- Representação da função composta.....	38
Tabela 1- Valores da distância e tempo em um exercício hipotético.....	41
Figura 16- Gráfico da função linear.....	41
Tabela 2- Valores da distância e tempo em um exercício hipotético.....	41
Figura 17- Gráfico da hipérbole.....	42
Figura 18- Peças do LEGO EV3.....	45
Figura 19- Engrenagem tipo 1, com 40 dentes. É a maior engrenagem de todas.....	47
Figura 20- Engrenagem tipo 2, com 24 dentes.....	47
Figura 21- Engrenagem tipo 3, com 16 dentes.....	47
Figura 22- Engrenagem tipo 4, com 8 dentes, com o menor número de dentes dentre todas.....	48
Figura 23- Componentes igualmente importantes. A) Polia e B) Motor.....	48
Figura 24- Esquema mecânico tridimensional da marcha lenta (marcha 1).	50
Figura 25- Esquema mecânico tridimensional da marcha intermediária (marcha 2).	51

Figura 26- Esquema mecânico tridimensional da marcha de velocidade (marcha 3).	52
Figura 27- Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno.....	53
Figura 28- Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno (vista superior).	54
Figura 29- Fluxograma retratando a flexibilidade na aprendizagem.....	55
Figura 30- Trem de engrenagens simples	57
Figura 31- Trem de engrenagens composto.....	58
Figura 32- Acoplamento de duas engrenagens idênticas.....	58
Figura 33- Acoplamento de duas engrenagens diferentes	59
Figura 34- Velocidades de duas engrenagens acopladas	60
Figura 35- Velocidades de engrenagens num trem de engrenagens simples.	61
Figura 36- Sentido de giros de engrenagens acopladas	62
Figura 37- Velocidades de engrenagens num trem de engrenagens composto.....	66
Figura 38- Gráfico teórico, relação entre velocidade e massa aplicada	73
Quadro 1- Exemplo de quadro para primeira marcha	75
Figura 39- Esquema mecânico tridimensional do projeto	77
Figura 40- Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno.....	78
Figura 41- Visão em corte transversal para visualização da geometria.....	82
Figura 42 Visão com comparações geométricas provando visualmente a diferenciação da circunferência formal com a real	83
Figura 43- Parametrização do arco que contempla um quarto da volta	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	UMA BREVE ABORDAGEM DO CONSTRUTIVISMO E CONTRUCIONISMO	18
2.1	Bases teóricas do construtivismo	18
2.1.1	A prática pedagógica baseada no construtivismo e a robótica no ambiente educacional.....	20
2.2	Papert e as bases teóricas do construcionismo	22
3	A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	24
3.1	Aprendendo Matemática com Robótica	24
3.2	Robótica educativa com adolescentes	25
4	CONCEITOS MATEMÁTICOS APLICADOS NA MONTAGEM DO CÂMBIO DE MARCHAS	28
4.1	Definição de função	28
4.1.1	Par ordenado	28
4.1.2	Plano cartesiano ortogonal	28
4.1.3	Produto cartesiano.....	29
4.1.4	Representação do produto cartesiano.....	30
4.1.5	Relações binárias	31
4.1.6	Função.....	32
4.1.6.1	<i>Lei de formação de uma função</i>	33
4.1.6.2	<i>Domínio, contradomínio e imagem de uma função</i>	33
4.1.7	Monotonicidade da função.....	34
4.1.7.1	<i>Função crescente</i>	34
4.1.7.2	<i>Função decrescente</i>	34
4.1.7.3	<i>Função constante</i>	35
4.2	Função afim ou função polinomial do 1º grau	35
4.2.1	Definição.....	35
4.2.2	Função linear	36
4.3	Função inversa e função composta	36
4.3.1	Função inversa	36
4.3.2	Função composta	37

4.4	Proporcionalidade	39
4.4.1	Razão	39
4.4.2	Proporção	39
4.4.3	Propriedades das proporções	39
4.4.4	Grandezas diretamente proporcionais	40
4.4.5	Grandezas inversamente proporcionais	41
5	COMPONENTES DO KIT LEGO EV3 MINDSTORMS	43
5.1	Programação do kit LEGO EV3	46
5.2	Estudo das interações entre as engrenagens do kit de marchas	46
5.3	Trens de engrenagens	49
5.4	Relações das marchas	49
5.5	Flexibilidade na aprendizagem e a sequência didática	54
5.5.1	Flexibilidade na aprendizagem	54
5.5.2	Sequência didática de matemática: o ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens do kit LEGO	57
6	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE	82

1 INTRODUÇÃO

A premissa deste trabalho parte do pressuposto de que, para se obter melhor desempenho escolar nas diversas áreas do conhecimento, é preciso criar situações que favoreçam e desafiem o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico. O relatório do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, 2019) mostra que a média do Brasil na avaliação de desempenho de Matemática é de 377 pontos. Os estudantes do país asiático que aparecem em primeiro lugar nesta avaliação, Cingapura, tiveram média de 564 pontos. Mesmo assim, algumas escolas, como a Alvimar Carneiro de Resende (SESI), localizada em Contagem (MG), conseguiram notas semelhantes ao do país asiático, utilizando, para tal sucesso, técnicas didáticas como a inclusão de aulas de robótica no cotidiano dos alunos (PORTAL DA INDÚSTRIA, 2018).

Desse modo, pode-se observar que a inserção dessa ferramenta educacional, nas aulas de matemática, melhora o desempenho dos alunos, segundo relatório do PISA (2019), que mede a capacidade dos alunos de formular, empregar e interpretar a Matemática em distintos contextos (PORTAL DA INDÚSTRIA, 2018). Para Kenski (2012, p. 15), “as tecnologias são tão antigas quanto à espécie humana”. Segundo a autora, “foi a engenhosidade humana, em todos os tempos, que deu origem às mais diferenciadas tecnologias”. A autora afirma que a inovação se deve ao uso do raciocínio.

Diante da perspectiva da matriz de referências do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (BRASIL, 2019), em compreender fenômenos, essa preocupação com o desempenho do educando extrapola os limites da escola e do tempo presentes para, futuramente, se manifestarem em sua trajetória pessoal e profissional, isto é, no exercício da cidadania em sua vida adulta.

Tal pressuposição exige trazer para a prática a concepção do educando como sujeito da aprendizagem. Isso envolve superar o que Freire (1979) chamou de “educação bancária”, uma abordagem própria do processo tradicional de ensino-aprendizagem: o professor “deposita” seu saber na cabeça do aluno, que o memoriza e o devolve em testes e provas, sem efetiva construção do conhecimento. O autor referiu-se, por meio dessa análise, ao sistema convencional restrito às aulas expositivas, com participação ativa do professor e, prevalentemente, passiva por parte do aluno.

Essa prática pedagógica, considerada monológica, caracteriza-se por se dar de fora para dentro, de cima para baixo, na qual o educando deve se adaptar; trata-se de um modelo em que toda decisão se situa no professor: ele pensa, conduz o processo, define rumos e o que é essencial e o que é acessório. A prática tem um caráter reprodutivista no sentido de que, de maneira imediata, volta-se apenas para a reprodução, por parte do aluno, do conhecimento explanado pelo professor.

A essa abordagem contrapõe-se uma prática pedagógica fundada na crença de que o educando assimila o objeto de estudo em diálogo com a realidade, portando-se como sujeito e protagonista de seu próprio caminho ao interferir no rumo do próprio aprendizado. Tem também um caráter construtivista, pois o aluno assimila o saber historicamente produzido (re) construindo-o a partir de sua própria experiência. Enquanto, no primeiro caso, privilegia-se a memória e o processo de ensinar e aprender, não se indo além da decodificação e da memorização, no segundo caso, em uma prática dialógica, evidencia-se o raciocínio e o processo educativo atinge o patamar da interpretação, da análise, da síntese e da crítica (FREIRE, 1979), configurando-se em uma prática docente construtivista.

Diante desse novo paradigma de ensino, é necessário entender que o construtivismo não é um método, uma metodologia e nem uma técnica e, sim, uma postura em relação ao processo de ensinar e aprender em que o aluno constitui-se sujeito de sua própria aprendizagem, em respeito à sua condição de ser pensante. Assim sendo, o construtivismo, a partir da década de 1970, passou a compor a educação brasileira por meio dos estudos de Piaget e a abordagem sócio-histórica de Vygotsky. Isso se deu como resultado da evolução de uma linha teórica que já vinha se firmando no país, especialmente com a criação de faculdades de Filosofia e nos cursos de formação pedagógica (CHAKUR, 2014).

Essa abordagem funda-se mais amplamente “na ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado” (BECKER, 1993, p. 88). Assim, viabiliza-se uma opção pedagógica em que se parte de problemas trazidos pelo cotidiano e, por meio da adoção dos procedimentos do método científico, os próprios alunos constroem suas conclusões, ou seja, identificam a dificuldade, criam hipóteses, fazem pesquisa bibliográfica, sugerem soluções e, por fim, encontram a melhor forma de resolver desafios. Com isso, pretende-se enfatizar que a construção do conhecimento

passa pela habilidade de se solucionar problemas por meio do desenvolvimento do pensamento crítico.

Sendo assim, cria-se maior horizontalidade na relação professor-aluno. Ocorre uma interação em que o professor articula, media e apoia o processo, enquanto o aluno faz suas próprias descobertas, elabora suas análises, críticas e sínteses e constrói suas respostas. A organização da prática pedagógica requer, então, a transformação de conhecimentos historicamente produzidos em saber escolar indispensável à formação intelectual do aluno.

Em virtude o exposto, é no contexto descrito que se situa a proposta deste estudo. Em última instância, busca-se contribuir para a formação de professores de Matemática da última etapa da Educação Básica, isto é, do docente do Ensino Médio, com vistas à melhoria da aprendizagem do discente. O estudo vincula-se à robótica educacional com o uso do Kit Mindstorms EV3 LEGO® ou Kit EV3. Considera-se, neste estudo, a função didática do kit no campo pedagógico ao integrar teoria e prática de conteúdos direcionados para a introdução à robótica, bem como ao estimular a criatividade e a solução de problemas do cotidiano.

Propõe-se, então, desenvolver um estudo do torque por meio de um câmbio de marcha produzido por um kit LEGOEV3, em que esse recurso será usado para a compreensão da interação das engrenagens gerando o torque, a partir do seguinte questionamento: **o que se observa com o torque resultante quando é mudada a dimensão das engrenagens aplicadas no LEGO?** Dessa forma, este trabalho vem inserir um processo de ensino-aprendizagem da função afim e torque por meio do uso do kit LEGO EV3, introduzindo a robótica educacional nas salas de aulas e, assim, facilitando e aprimorando o aprendizado dos discentes com essa nova forma de ensinar. À guisa de entendimento, o torque é

a quantidade de força rotacional que um motor gera ao ser acionado. Em uma aplicação, o torque de cada eixo é definido pelo requisito específico da máquina para mover o objeto conectado ao motor. O requisito de torque do eixo determina o tamanho do motor e qualquer redução por engrenagem necessária. (PORTESCAP, 2018, *on-line*)

Retomando-se o resultado do PISA (2019), realizado em 2018, observa-se que o Brasil ocupa uma posição muito preocupante no ranking geral em matemática, apenas no sexagésimo quinto (65º) lugar, dentre os setenta países participantes (MORENO, 2016). A partir dessa realidade e com o intuito de instigar os professores

de matemática do 1º ano do Ensino Médio da educação básica a utilizar da robótica educacional em suas aulas, este trabalho propõe dar suporte e orientá-los a trabalharem de uma forma diferenciada. Nesse sentido, iremos mostrar uma forma lúdica de ensino, utilizando o kit LEGO EV3 no estudo da função linear, proporcionalidade, função composta, função inversa e torque; propondo-se, assim, uma alternativa à aprendizagem rotineira de aulas expositivas do cotidiano.

Como é de conhecimento geral, há uma grande dificuldade de muitos professores em explicar os conteúdos de matemática, e essa forma lúdica de ensino pode incentivar e explorar mais participação dos alunos nas aulas dessa disciplina, proporcionando a eles mais aprendizagem, reflexão e análise no estudo desses conteúdos.

Diante da referida questão, que norteia a pesquisa, o presente trabalho foi organizado conforme explicitado a seguir:

- a. o primeiro capítulo trata-se da introdução;
- b. o segundo capítulo traz o conceito do construtivismo/construcionismo como sendo uma forma de inserção de novos métodos do ensino através do uso do kit LEGO EV3;
- c. o terceiro capítulo aborda a robótica educacional, mostrando como ela pode ajudar no ensino-aprendizagem da matemática;
- d. o quarto capítulo discorre sobre os conceitos matemáticos que utilizaremos na aplicação do câmbio de marchas com quatro velocidades, com os quais montaremos com o kit LEGO EV3;
- e. o quinto capítulo apresenta a sequência didática para o ensino da função linear e torque por meio do uso da robótica educacional, aplicado no kit LEGO EV3, como sendo uma prática de aprendizagem;
- f. finalmente, o sexto capítulo mostra o manual da montagem do câmbio de marchas por meio do kit LEGO EV3.

2 UMA BREVE ABORDAGEM SOBRE O CONSTRUTIVISMO E O CONSTRUCIONISMO

O professor é o responsável por trabalhar com o conhecimento no contexto escolar, mediando o ensino formal com a bagagem de mundo que o aluno traz de seu contexto de vida. Essa inter(mediação), neste estudo, é entendida como resultado

[...] da relação ativa por parte do estudante com o objeto em estudo, tendo por base os seus conhecimentos prévios que permitem estabelecer um diálogo profundo e profícuo com este objeto. Esse diálogo que o estudante estabelece com o objeto em estudo é fruto do trabalho de mediação que o professor reconhece como necessário para criar possibilidades de construção do conhecimento (FELÍCIO; SILVA, 2017, p. 251).

O trabalho de mediação acima referido, que se dá sob a responsabilidade do professor, respalda-se em habilidades e competências docentes, que são a capacidade de identificar e diagnosticar condições para a aprendizagem de conteúdos, dada a capacidade de organizar um conjunto de experiências de aprendizagem que permitam ao educando construir seu próprio conhecimento. Tem-se, então, que a organização da prática pedagógica pode ser vista como ação sistemática que resulta da intenção e da racionalidade, o que supõe ir além de processos intuitivos guiados tão somente pela vocação.

2.1 Bases teóricas do construtivismo

Depreende-se, introdutoriamente, que há uma premente necessidade de se reconhecer que as concepções ou hipóteses dos educandos combinam-se com as informações do meio, em uma interação em que predomina a atividade do sujeito cognoscente na construção do conhecimento. Isto é, o indivíduo não descobre o conhecimento espontaneamente e nem o conhecimento é transmitido mecanicamente pelo meio exterior ou pelo adulto.

Na base teórica de Piaget situa-se a ideia de que a compreensão por parte do aluno é o ponto de partida para a construção do conhecimento no âmbito de uma proposta construtivista, e significa que

a ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado. Ele se constitui pela interação do indivíduo com o meio físico e social, com o simbolismo humano, com o mundo das relações sociais; e se constitui por força de sua ação e não por qualquer dotação prévia, na bagagem hereditária ou no meio, de tal modo que podemos afirmar que antes da ação não há psiquismo nem consciência e, muito menos, pensamento (BECKER, 1993. p.88).

O que Becker (1993) expõe acima é que o desenvolvimento humano é resultado de combinações entre o que o organismo traz consigo em consonância com as circunstâncias oferecidas pelo meio em que vive, ou seja, a teoria de Piaget tem como eixo central que o desenvolvimento mental se dá de acordo com a interação entre o organismo e o meio no qual este está inserido.

Esse pressuposto epistemológico do conhecimento, como resultado da interação do indivíduo com o ambiente, conduz à constatação de que o pensamento se constrói, se destrói e se reconstrói o tempo todo: não de maneira exógena, em que o professor pensa, analisa, raciocina e transmite para o aluno o conhecimento daí advindo, mas de dentro para fora, em que cada aluno, na condição de sujeito da própria aprendizagem, torna-se centro do processo e o professor participa, ao ajudar, apoiar, desafiar (LEÃO, 1999, p. 197).

Sob o ponto de vista da análise que ora se faz, o termo “interação” refere-se a dois processos – a organização interna e a adaptação ao meio – que são intrínsecos à concepção construtivista de aquisição do conhecimento. Por sua vez, quando do desenvolvimento da inteligência, segundo Piaget (*apud* LEÃO, 1999, p. 198) ocorrem dois processos complementares – assimilação e acomodação – cujo sentido difere do senso comum quanto a esses termos, pois:

[...] a inteligência é assimilação na medida em que incorpora nos seus quadros todo e qualquer dado da experiência. Quer se trate do pensamento que, graças ao juízo faz ingressar o novo no conhecido e reduz assim o universo às suas noções próprias, quer se trate da inteligência sensório-motora que estrutura igualmente as coisas percebidas, integrando-as nos seus esquemas [...]. A vida mental também é acomodação ao meio ambiente. A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar novos elementos nos esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Piaget (*apud* LEÃO, 1999, p. 198)

De acordo com Piaget (1975) apud Nóbrega (2018, p 19), sobre o desenvolvimento da inteligência e a construção do conhecimento, estudos demonstram como a partir do período sensório motor até o período operatório abstrato, “a escola deve oferecer atividades desafiadoras que provoquem desequilíbrio (“conflitos cognitivos”) e reequilibrações sucessivas para que promovam a descoberta e a construção do conhecimento”.

2.1.1 A prática pedagógica baseada no construtivismo e a robótica no ambiente educacional

A prática pedagógica com ênfase no construtivismo traz em seu bojo a importância do papel do professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem, posto que esse profissional é o agente responsável pela interação entre os alunos e entre ele e seus alunos, por meio de situações-problema e mediação de conflitos que favorecem o amadurecimento e crescimento intelectual. Ao criar situações problemáticas ele vai

permitindo o surgimento de momentos de conflito para o alfabetizando e, conseqüentemente, o avanço cognitivo; estar considerando o aprendiz como um ser ativo, aquele que não espera passivamente que alguém venha lhe ensinar alguma coisa para começar a aprender, uma vez que por si só compara, ordena, classifica, reformula e elabora hipóteses, reorganizando sua ação em direção à construção do conhecimento. (ELIAS, 1992. p.50)

Nesse sentido, a situação ensino-aprendizagem, desenvolvida pela perspectiva construtivista, diz respeito a uma postura em relação ao processo de aquisição do conhecimento. Envolve reconhecer que, não sendo o conhecimento algo pronto e acabado, ele se constrói a partir das interações estabelecidas entre o indivíduo e o meio físico e social, no espaço das relações sociais, fundado na predisposição humana para pensar e julgar com bases racionais (LEÃO, 1999, p. 195). Ainda sob esse prisma, “o papel do professor é caracterizado como o de mediador entre os significados pessoais dos seus alunos e os culturalmente estabelecidos, promovendo o aprendizado e o desenvolvimento dos mesmos” (BOIKO; ZAMBERLAN, 2001, p. 51)

Com a evolução do conjunto de recursos tecnológicos e computacionais para criação (TICs), a construção do conhecimento pela perspectiva construtivista ganhou, nos últimos tempos, um poderoso aliado: a robótica educacional, que pode ser

compreendida como recurso moderno e eficiente para aplicar a teoria piagetiana em sala de aula, onde um dos objetivos é promover a construção de conhecimento relativo a conceitos multidisciplinares, como física, matemática, geografia, raciocínio lógico entre outros. Ao considerarmos a robótica com ferramenta de ensino e aprendizagem, é necessário entender que ela, segundo Cesar e Bonilla (2007), é uma ciência dos sistemas que se inter-relacionam com nosso mundo em tempo real, com ou sem interação humana:

A robótica é considerada hoje a mola mestra de uma nova mutação dos meios de produção, isto devido a sua versatilidade, em oposição à automação fixa ou “hard”, atualmente dominante na indústria. Os robôs, graças ao seu sistema lógico ou informado, podem ser reprogramados e utilizados em uma grande variedade de tarefas. Más, não é a reprogramação o fator mais importante na versatilidade desejada e sim a adaptação às variações no seu ambiente de trabalho, mediante um sistema adequado de percepção e tratamento de informação (SILVA, 2009, p 10).

A robótica na educação ou robótica educacional, desse modo, tem como característica principal a utilização de ambientes de aprendizagem em que o discente pode montar e programar um robô ou sistema robotizado, priorizando atividades interativas de maneira produtiva quando realizadas em grupo de alunos trabalhando conjuntamente para atingir um objetivo comunitário.

Enfatiza-se, ainda, que a robótica como ferramenta de ensino pode potencializar a educação transformadora da realidade e propicia aos professores e alunos desafios e situações de aprendizagem que desenvolvem habilidades e competências, as quais constroem o conhecimento.

Para tanto, fez-se mister uma revisão bibliográfica que permitiu fundamentar conceitualmente o estudo e fazer descobertas quanto ao potencial do Kit Mindstorms EV3 LEGO® ou Kit EV3 em termos de sua função pedagógica frente ao ensino e aprendizagem da matemática.

Essa revisão se completa com a identificação dos tópicos e subtópicos (conteúdo específico) do conteúdo mais amplo, que é objeto de estudo deste trabalho, no caso, o estudo da relação função linear (progressão aritmética) e torque.

O ponto principal do trabalho, frente à intenção de contribuir para a atuação docente com vistas à melhoria da aprendizagem discente, envolverá:

- a) simulação e testagem de eventos com o uso do Kit LEGO, voltadas para se construir resposta para o problema posto;
- b) observação e descrição desses acontecimentos;
- c) levantamento de elementos constitutivos de uma sequência didática que permitirá ao discente um processo de aprendizagem, mediado pelo professor, sem negar espaço para a criatividade e descobertas individuais dos alunos.

2.2 Papert e as bases teóricas do construcionismo

Para se reportar ao construcionismo é preciso mencionar que o mesmo faz parte da reconstrução teórica advinda do construtivismo piagetiano, e que foi proposto por Papert (1986), originalmente em 1980. De acordo com Nunes e Santos (2013, p. 2),

Papert concorda com Piaget (1976), em que a criança é um “ser pensante” e construtora de suas próprias estruturas cognitivas, mesmo sem ser ensinada. Porém, se inquietou com a pouca pesquisa nesta área e levantou a seguinte interrogação: Como criar condições para que mais conhecimento possa ser adquirido por este aluno? A atitude construcionista implica na meta de ensinar, de forma a produzir o máximo de aprendizagem, com o mínimo de ensino. A meta do Construcionismo é alcançar meios de aprendizagem fortes que valorizem a **construção mental** do sujeito, apoiada em suas **próprias construções no mundo**. (grifo meu) (Nunes; Santos, 2013, p. 2)

A pergunta dos referidos teóricos vai ao encontro dos objetivos desta dissertação no sentido de que a busca de novas e inteligentes ferramentas de promoção à aprendizagem é fundamental em um mundo em que a escola não consegue mais ser atrativa para crianças e adolescentes, já que as novas tecnologias têm tido maior atenção desse público.

Para Piaget, a formalização do pensamento tem como pré-requisito a maturação biológica em um processo de interação com o meio, no qual se originam os estágios universais de desenvolvimento.

Em consonância com a teoria piagetiana, Papert (1986) reitera que tais etapas são determinadas, ainda, pelos materiais que podem ser utilizados pela criança para exploração do mundo a sua volta. Ele ainda enfatiza a relevância do estudo sobre as “operações concretas pesquisadas por Piaget e critica seguidores (pesquisadores e

escolas) que buscam como progresso intelectual a passagem rápida da criança do pensamento operatório concreto para o abstrato (formal)” (NUNES; SANTOS, 2013).

Na concepção de Papert, ao utilizar o computador, o aluno é capaz de observar suas construções mentais fazendo uma ponte entre o concreto e o abstrato através do mecanismo interativo, o que favorece a aquisição de novos conhecimentos. Para ele, a construção de ambientes ativos para a aprendizagem é importante para o aluno testar suas teorias, ideias e hipóteses. Ainda segundo Nunes e Santos (2013, p. 3), Papert

viu na Informática a possibilidade de realizar seu desejo de criar condições para mudanças significativas no desenvolvimento intelectual dos sujeitos. Para tal, ele desenvolve uma linguagem de programação, chamada Logo, de fácil compreensão e manipulação por crianças ou por pessoas leigas em computação e sem domínio da matemática. Ao mesmo tempo, o Logo tem o poder das linguagens de programação profissionais.(Nunes; Santos, 2013, p. 2)

Em face ao exposto, o construcionismo, por meio da utilização da linguagem de programação, denominada Logo, é uma forma de fomentar o ensino-aprendizagem por meio do incentivo à construção mental do aluno, suportada pelas suas próprias construções no mundo que o rodeia.

3 A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Esta dissertação de mestrado profissional (PROFMAT) tem como objetivo melhorar o aprendizado do discente do 1º ano do Ensino Médio da educação básica, inserindo a robótica no ensino de Matemática, pois contextualiza e incentiva os discentes com os conhecimentos das tecnologias utilizadas no cotidiano.

Em outra perspectiva, a pesquisa em questão visa explicitar que ao aplicar uma força constante em uma engrenagem motora de um LEGO EV3 aplica-se uma função linear no sistema de engrenagens, devido aos diferentes posicionamentos e dimensionamento das respectivas engrenagens, em que serão gerados torques, o que resulta em uma função, que deslocará certo móvel. Existem vários trabalhos envolvendo a robótica educacional no Brasil. Neste capítulo, serão citados dois que comprovam a contribuição dela no Ensino Fundamental e Médio.

3.1 Aprendendo Matemática com Robótica

Um exemplo envolvendo aplicação da Robótica Educacional se deu por Fagundes et al. (2005), em um projeto denominado Amora e que teve como objetivo praticar e fixar o conteúdo de assuntos abordados em sala de aula, principalmente em disciplinas como Matemática e Física, para crianças do 5º e 6º ano do Ensino Fundamental. Para tal, foi utilizado o kit Lego Mindstorms, que acabou despertando o interesse dos alunos para a aprendizagem, conforme apresentado na Figura 1. Nessa prática, foram trabalhadas áreas como manipulação e construção de mecanismos por meio de peças de Lego, engrenagens, polias, eixos, entre outros.



Figura 1 – Laboratório utilizado para o desenvolvimento das atividades e mecanismos construídos pelos estudantes

Fonte: Fagundes et al. (2005).

Nessa atividade vários conceitos de aritmética e geometria foram explorados. Dentre os principais, podemos citar: frações, números positivos e negativos, razão, multiplicação e números inteiros e racionais. É importante mencionar que também foram trabalhadas noções de Lógica de Programação conforme a faixa etária das séries citadas. Fagundes et al. (2015) chegaram à conclusão de que a Robótica é uma área que pode ser utilizada para fazer com que o educando tenha interesse pela aula e, conseqüentemente, pode auxiliá-lo a aprender de forma dinâmica e criativa. No referido estudo, ficou claro que é preciso, primeiramente, proporcionar um ambiente de aprendizagem para que o aluno tenha a oportunidade de interagir e nele aprender, enfim, conseguindo quebrar as barreiras que existem contra a Matemática, encarando-a como algo cotidiano.

3.2 Robótica educativa com adolescentes

Outro trabalho que também é uma reflexão crítica do uso da robótica na educação matemática é o apresentado por Possamai e Passerino (2004), o qual vem colaborar com a aprendizagem dos alunos, em que se discute a aplicação da aprendizagem cooperativa e do trabalho em grupo na sala de aula por meio da Robótica Educativa. O trabalho foi realizado com alunos da faixa etária de 13 a 14 anos, a maioria de baixa renda, utilizando o kit Lego Mindstorms RCX (kit anterior ao

NXT). As autoras elaboraram uma série de etapas que deveriam ser seguidas pelos discentes na elaboração de uma montagem com o kit, dentre as quais podemos citar, resumidamente: apresentação do projeto pelas pesquisadoras, definição do tema a ser trabalhado, organização do projeto, montagem de uma maquete, montagem do robô, aplicação do projeto, verificação dos resultados obtidos e apresentação do projeto. Seguindo essa ordem, os resultados foram significativos: constatou-se que os alunos foram capazes de: projetar, discutir os objetivos e problemas, construir conceitos, buscar intensamente as soluções das questões, desenvolver seus sentidos críticos, trabalhar organizadamente e cooperar mutuamente. Algo que, a princípio, era tido como impossível de ser concretizado por parte dos alunos, pois durante o desenvolvimento do trabalho ficou comprovado que não era algo tão difícil e que os próprios alunos acabaram interessando-se pela Robótica, bem como pela tecnologia envolvida.

Adotar a robótica educacional no Ensino Médio significa criar condições concretas para que o educando, em uma interação com a realidade, desenvolva a capacidade de formular hipóteses e equacionar problemas. Abandona-se uma abordagem metodológica marcada por repetir verdades acabadas para dar espaço a uma abordagem em que o aluno constrói seu conhecimento em interação com o meio, com a realidade, ou seja, em um ambiente que estimula a colaboração, no grupo de alunos, apoiada por recursos tecnológicos como ferramenta de ensino e de aprendizagem.

Posto isto, neste estudo, o Kit da empresa LEGO de peças montáveis, chamado “LEGO EV3 Mindstorm”, foi escolhido porque queremos mostrar a aplicação de uma função linear das diferentes composições das engrenagens por meio da aplicação de uma força constante resultando em diferentes torques. A partir destes queremos gerar uma nova função, sendo esta linear (progressão aritmética) ou função exponencial (progressão geométrica). O intuito é instigar e incentivar os discentes do primeiro ano do Ensino Médio da educação básica, melhorando a aprendizagem da matemática com a aplicação prática de funções lineares e torque.

A Figura 2, a seguir, mostra uma aplicação do Kit LEGO gerando torque e proporcionando o levantamento de um peso.



Figura 2 - Imagem do câmbio de marchas de quatro velocidades

Fonte: elaborada pelo autor.

4 CONCEITOS MATEMÁTICOS APLICADOS NA MONTAGEM DO CÂMBIO DE MARCHAS

Na construção do kit de marchas, vamos aplicar uma força constante na engrenagem motora e esta transmitirá para as outras engrenagens essa força, gerando assim um torque. Ao mudarmos as marchas, o dimensionamento e o posicionamento das engrenagens também mudarão, surgindo, desse modo, a entrada de uma aplicação da função afim. Para o acoplamento das engrenagens, vamos usar a monotonicidade das funções, função inversa, função composta e proporcionalidade das engrenagens.

Vamos citar as definições dessas funções a seguir.

4.1 Definição de função

4.1.1 Par ordenado

A cada elemento x e a cada elemento y , relaciona-se um único elemento $(x; y)$, chamado de par ordenado.

Observação:

$$(x; y) = (a; b) \leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

4.1.2 Plano cartesiano ortogonal

O plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares, o eixo horizontal, chamado de eixo das abscissas, e o eixo vertical, chamado de eixo das ordenadas (Figura 3).

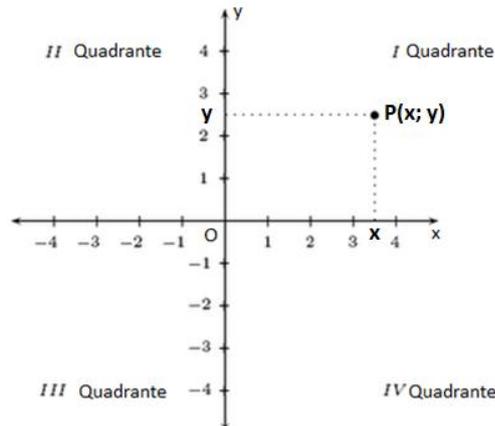


Figura 3 – Plano cartesiano ortogonal

Fonte: elaborada pelo autor.

No plano cartesiano, qualquer ponto pode ser determinado univocamente por duas coordenadas (univocamente significa que duas determinadas coordenadas determinam um e um único ponto). Portanto, a todo ponto P do plano cartesiano podemos associar uma abscissa x (escrita em primeiro lugar) e uma ordenada y (escrita em segundo lugar); simbolizamos tal fato por P(x, y).

4.1.3 Produto cartesiano

Dados os conjuntos **A** e **B**, o produto cartesiano de **A** por **B** é um conjunto formado por pares ordenados, tal que o primeiro elemento do par pertence ao conjunto **A** e o segundo elemento pertence ao conjunto **B**.

O conjunto de pares, assim formado, denomina-se produto cartesiano de **A** por **B** e indica-se **A x B**.

$$\mathbf{AxB = \{(x,y) / x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Observações:

a) $AxB \neq BxA$

b) $AxA = A^2$.

c) Se $A = \phi$ ou $B = \phi \rightarrow AxB = \phi$ e $BxA = \phi$.

d) O número de elementos de AxB é dado por: $n(AxB) = n(A) \cdot n(B)$.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{3; 4\}$. Calcule:

a) $AxB = \{(1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4)\}$

b) $A \times B = \{(3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$

4.1.4 Representação do produto cartesiano

a) Representação na forma de conjunto:

Dados os conjuntos $A = \{a; b; c\}$ e $B = \{d; e\}$, então $A \times B$ é:

$$A \times B = \{(a; d), (a; e), (b; d), (b; e), (c; d), (c; e)\}$$

O produto cartesiano pode ser representado, graficamente, por diagrama de flechas ou por diagrama cartesiano (conforme as Figura 4 e 5, respectivamente).

b) Diagrama de flechas

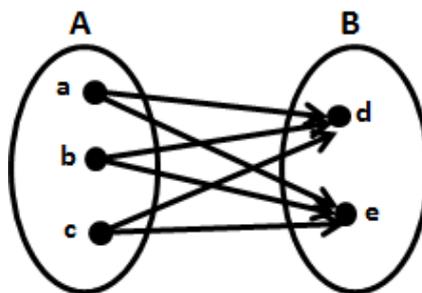


Figura 4 – Diagrama de flechas

Fonte: elaborada pelo autor.

O diagrama de flechas representa o produto cartesiano $A \times B$.

c) Diagrama cartesiano

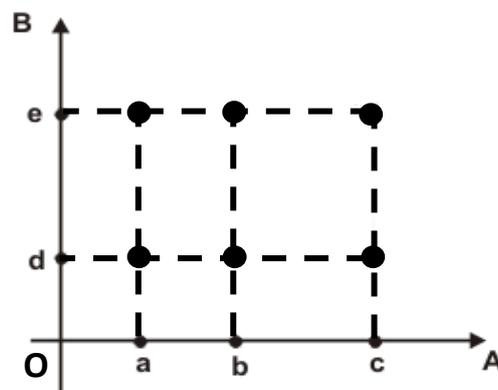


Figura 5 – Diagrama cartesiano

Fonte: elaborada pelo autor.

O diagrama cartesiano representa o produto cartesiano $A \times B$.

4.1.5 Relações binárias

R é uma relação binária de A em B se, e somente se, R é um subconjunto $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$.

$$R = \{(x,y) \in A \times B / x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O conjunto A é chamado de *domínio*, isto é, origem ou conjunto de partida de R .

O conjunto B é chamado de *contradomínio*, isto é, destino ou conjunto de chegada de R .

Os elementos de A são chamados de x e os elementos de B são chamados de y .

O conjunto formado por todos os y pertencentes à relação chamamos de imagem.

Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in A \times B / y = x + 1\}$. Então temos:

Representação na forma de conjunto:

$$R = \{(1, 2), (3, 4)\}$$

a) Representação por diagrama de flechas (Figura 6):

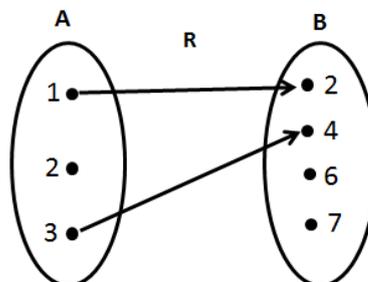


Figura 6 – Representação por diagrama de flechas

Fonte: elaborada pelo autor.

b) Representação no diagrama cartesiano (Figura 7):

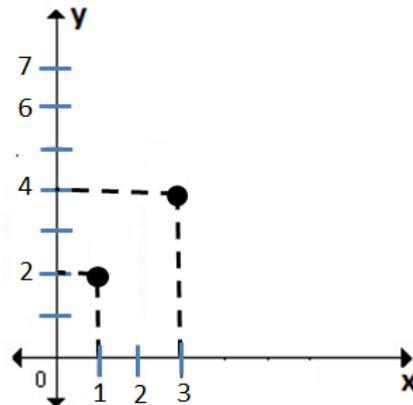


Figura 7 – Representação no diagrama cartesiano

Fonte: elaborada pelo autor.

$$D(R) = \{1; 2; 3\}$$

$$CD(R) = \{2; 4; 6; 7\}$$

$$Im(R) = \{2; 4\}$$

4.1.6 Função

Dados dois conjuntos **A** e **B**, não vazios, uma relação **R** de A em B é uma função ou uma aplicação de A em B se, e somente se, cada elemento de A se relacionar com um elemento de B.

Notação:

$f: A \rightarrow B$ (lê-se: f é uma função de A em B) (Figura 8):

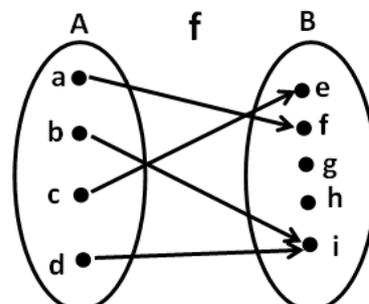


Figura 8 – Representação em diagrama de flechas da função de A em B

Fonte: elaborada pelo autor.

4.1.6.1 Lei de formação de uma função

Varias funções são representadas por fórmulas que relacionam as variáveis x e y através de f , estas são chamadas leis de correspondência ou de formação. A variável x é a independente e y é a variável dependente.

$Y = f(x) \rightarrow y$ é a imagem de x através de f .

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x$.

$$f(x) = 2x$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f = \{(0; 0), (1; 2), (2; 4)\}$$

4.1.6.2 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Dada a função f de A em B .

O conjunto A é denominado **domínio** da função, que indicamos por $D(f)$.

O conjunto B é denominado **contradomínio** da função, que indicamos por $CD(f)$.

O conjunto formado pelos elementos do conjunto B , que se relacionam com algum elemento do conjunto A , chamamos de conjunto imagem, que indicamos por $Im(f)$, $Im(f) \subset B$.

Exemplo:

Dada a função $h: \{-3, 0, 3, 8\} \rightarrow \{-2, 0, 15, 18, 27, 40\}$ definida pela lei $h(x) = x^2 - 3x$. Indique Domínio, Contradomínio e Imagem dessa função.

Resolução:

$$D(f) = \{-3, 0, 3, 8\}$$

$$CD(f) = \{-2, 0, 15, 18, 27, 40\}$$

Agora devemos ver a imagem de cada um dos elementos do domínio.

Para $x=-3$ temos $y = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) = 9 + 9 = 18$

Para $x=0$ temos $y = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$

Para $x=3$ temos $y = 3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$

Para $x=8$ temos $y = 8^2 - 3 \cdot 8 = 64 - 24 = 40$

Como encontramos todas as imagens, podemos agora formar o conjunto Imagem da função.

$$\text{Im}(f) = \{0, 18, 40\}$$

4.1.7 Monotonicidade da função

4.1.7.1 Função crescente

Uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se, e somente se:

$$\forall x \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (Figura 9)}$$

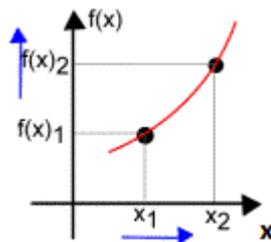


Figura 9 – Monotonicidade da função

Fonte: elaborada pelo autor.

4.1.7.2 Função decrescente

Uma função $f: A \rightarrow B$ é decrescente se, e somente se:

$$\forall x \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (Figura 10)}.$$

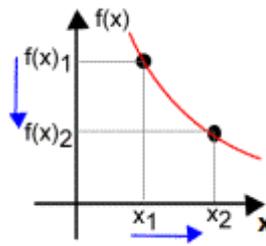


Figura 10 – Monotonicidade da função

Fonte: elaborada pelo autor.

4.1.7.3 Função constante

Uma função $f: A \rightarrow B$ é constante se, e somente se, $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, ou seja:

$\forall x \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (Figura 11)

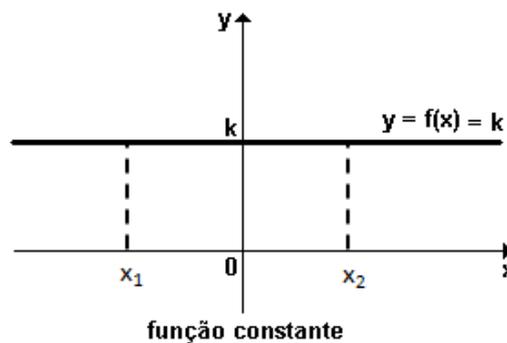


Figura 11 – Monotonicidade da função

Fonte: elaborada pelo autor.

4.2 Função afim ou função polinomial do 1º grau

Vamos aplicar uma função afim na entrada do kit de marchas, através do posicionamento e dimensionamento das engrenagens utilizadas:

4.2.1 Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim quando existem constantes $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para qualquer x real.

Pelo teorema de caracterização uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim se, e somente se, o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \vartheta(h)$ depender somente de h .

4.2.2 Função linear

É toda função afim de termo independente nulo, tal que $f(x) = ax$.

Duas grandezas diretamente proporcionais são relacionadas através de funções lineares.

4.3 Função inversa e função composta

4.3.1 Função inversa

Definição:

Neste trabalho, vamos usar a aplicação de função inversa, pois essa função nos possibilita as conexões de duas funções através da troca do domínio pelo contradomínio e vice-versa. Vamos então defini-la.

Dada a função $f: A \rightarrow B$, então a mesma possui inversa se, e somente se, existe a função $f^{-1}: B \rightarrow A$, tal que $f \circ f^{-1}(x) = x$ ou $f^{-1} \circ f(x) = x$. Se o par ordenado $(x; y) \in f$, então $(y; x) \in f^{-1}$.

Podemos observar que o domínio de f vira contradomínio de f^{-1} e vice-versa.

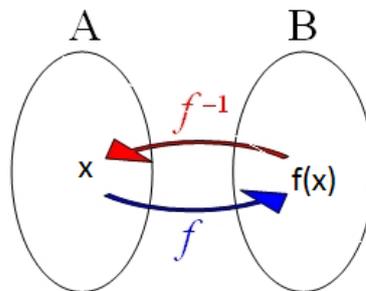


Figura 12 – Representação da função inversa

Fonte: elaborada pelo autor.

Regra prática para obtenção da função inversa:

- Troca-se x por y e vice-versa.
- Isola-se a variável y , em que a mesma é a função inversa.

Exemplo:

Sabendo-se que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 1$, obtêm-se a função inversa de f .

$$f(x) = 4x - 1$$

$$y = 4x - 1$$

$$x = 4y - 1$$

$$x + 1 = 4y$$

$$y = \frac{x+1}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

Gráficos de f e f^{-1} :

Os gráficos de uma função f e da sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (Figura 13).

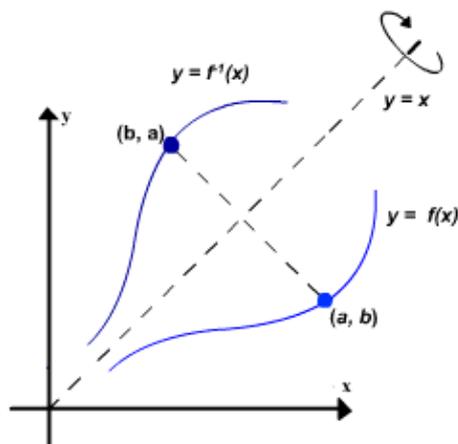


Figura 13 – Gráfico da simetria da função inversa

Fonte: elaborada pelo autor.

4.3.2 Função composta

Na montagem do acoplamento das engrenagens, em alguns momentos, vamos utilizar as funções compostas, pois temos a necessidade de compor duas funções para gerarmos uma terceira função, economizando um passo de construção. Vamos defini-la:

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, a função $h: A \rightarrow C$ é a função composta de g em relação a f , denominada $g[f(x)]$ ou $g \circ f(x)$ (Figura 14).

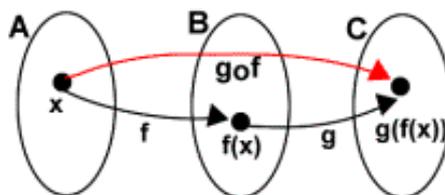


Figura 14 – Gráfico da simetria da função inversa

Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo:

1- Dadas as funções reais de variável real, $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x - 1$, calcule:

a) $g[f(1)]$

b) $g[f(x)]$

Resolução:

a) $f(x) = 2x + 3 \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 3 \rightarrow f(1) = 5$

$g[f(1)] = g[5]$

$g(x) = x - 1 \rightarrow g(5) = 5 - 1 \rightarrow g(5) = 4$

$g[f(1)] = 4$

b) $g(x) = x - 1 \rightarrow g[f(x)] = f(x) - 1 \rightarrow g[f(x)] = 2x + 3 - 1 \rightarrow g[f(x)] = 2x + 2.$

2- Sejam os conjuntos $A = \{1;2;3\}$, $B = \{2;3;4\}$ e $C = \{7;12;17\}$ e as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 5x - 3$. Sendo $h(x): A \rightarrow C$, determine as possíveis imagens de $h(x)$.

Podemos observar que:

$h(x) = g[f(x)]$

$h(1) = g[f(1)] = g(2) = 7$

$h(2) = g[f(2)] = g(3) = 12$

$h(3) = g[f(3)] = g(4) = 17$

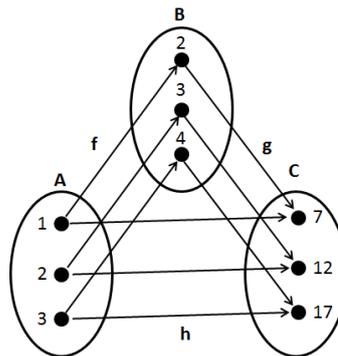


Figura 15 – Representação da função composta

Fonte: elaborada pelo autor.

$\text{Im}(h) = \{7; 12; 17\}$

4.4 Proporcionalidade

Esse acoplamento das engrenagens é devido à proporcionalidade entre elas, então vamos também definir a proporcionalidade entre as grandezas.

4.4.1 Razão

Razão é uma forma de se realizar a comparação de duas grandezas, no entanto, para isso é necessário que as duas estejam na mesma unidade de medida.

Dizemos que **razão** entre os números reais a e b com $b \neq 0$ é o quociente ou a divisão de a por b , isto é:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b$$

O número a é chamado de antecedente e o b tem o nome de conseqüente.

4.4.2 Proporção

É uma igualdade entre duas razões, tal que os números **a**, **b**, **c** e **d** ($b \neq 0$ e $d \neq 0$), nessa ordem, formam uma proporção se, e somente se, a razão entre a e b é igual à razão entre c e d .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d$$

(a e d são chamados extremos e b e c são chamados meios)

4.4.3 Propriedades das proporções

Dados os números a , b , c e d ($b \neq 0$ e $d \neq 0$), então:

P₁) Propriedade fundamental

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

P₂) Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

P₃) Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

P₄) Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

P₅) Em uma proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

4.4.4 Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção.

Dadas as grandezas A(a₁, a₂, a₃, ...) e B(b₁, b₂, b₃, ...), a razão entre os valores da 1ª grandeza e os valores correspondentes da 2ª são iguais, ou seja,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = k \Rightarrow \text{Razão de proporcionalidade}$$

Exemplo:

A Tabela 1 de valores das grandezas tempo (em h) e distância (em km) da viagem de um trem com velocidade constante de 60 km/h.

Tabela 1 – Valores de distância e tempo em um exercício hipotético

Distância (km)	60	120	180	...
Tempo (horas)	1	2	3	...

$$\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = \dots = 60$$

Observe que quanto maior a distância maior é o tempo da viagem, ou seja, as grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais.

O gráfico de duas grandezas diretamente proporcionais é uma reta que passa pela origem, ou seja, é o gráfico de uma função linear $f(x) = a.x$ (Figura 16).

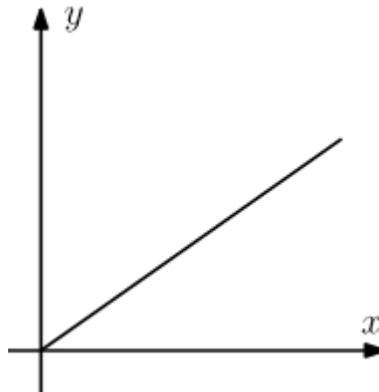


Figura 16 – Gráfico da função linear
Fonte: elaborada pelo autor.

4.4.5 Grandezas inversamente proporcionais

Dois grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra aumenta na mesma proporção. Dadas as grandezas $A(a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $B(b_1, b_2, b_3, \dots)$, se o produto entre os valores da 1ª grandeza e os valores correspondentes da 2ª são iguais, ou seja:

$$a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = \dots = k \Rightarrow \text{Razão de proporcionalidade}$$

Podemos transformar duas grandezas inversamente proporcionais em grandezas diretamente proporcionais, basta dividir os valores da 1ª grandeza e os inversos dos valores correspondentes da outra grandeza, ou seja:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = k$$

Exemplo:

A Tabela 2 de valores das grandezas velocidade (em km/h) e tempo (em h), da viagem de um trem, em uma distância de 240 km.

Tabela 2. Valores de distância e tempo em um exercício hipotético

Velocidade (Km/h)	40	80	120	...
Tempo (horas)	6	3	2	...

$$40 \cdot 6 = 80 \cdot 3 = 120 \cdot 2 = \dots = 240$$

Observe que quanto maior a velocidade do trem, menor o tempo da viagem, ou seja, as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais.

O gráfico de duas grandezas inversamente proporcionais é uma hipérbole, ou seja, é o gráfico de uma função $f(x) = a \cdot \frac{1}{x}$ (Figura 17).

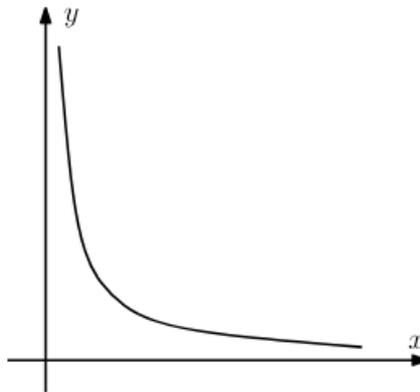


Figura 17 – Gráfico da hipérbole

Fonte: elaborada pelo autor.

5 COMPONENTES DO KIT LEGO EV3 MINDSTORMS

Com a introdução da robótica na educação na década de 60 pelo cientista Seymour Papert, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), surgiram vários kits de montagem que têm por finalidade instigar os discentes a se interessarem pela temática, bem como promover o desenvolvimento de várias habilidades e competências ligadas à interação com as tecnologias. Dentre esses kits, podemos citar os Vex, Alfa Educ 2008 e Alfa Educ,Hobby, o kit de robótica Curumim (produzido por empresa brasileira), Kit Mindstorms NXT LEGO® e o kit Mindstorms EV3, que foi o usado para desenvolver este trabalho de dissertação de mestrado.

O “LEGO EV3 Mindstorm” compõe-se por: Bloco programável EV3 , sensores, servo-motores, mesa giratória, bateria recarregável, conversor de energia, *software* de programação EV3 e peças LEGO Technic, como blocos, vigas, eixos, rodas, engrenagens e polias.

O fabricante descreve os itens da seguinte forma (LEGO EDUCATION, 2019):

O Monitor mostra a você o que está acontecendo dentro do Bloco EV3 e permite que se utilize a Interface do Bloco. Ele também permite adicionar textos e respostas numéricas ou gráficas em sua programação ou experimentos. Você pode, por exemplo, querer programar o monitor para mostrar uma carinha feliz (ou triste) para ter uma comparação, ou exibir um número que seja o resultado de um cálculo matemático (saiba mais sobre a utilização do Bloco do Monitor na Ajuda do Software EV3).

Os Botões do Bloco permitem navegar dentro da Interface do Bloco EV3. Eles também podem ser utilizados como ativadores programáveis. Por exemplo, você poderia programar um robô para levar os braços se for pressionado o botão Para cima, ou abaixá-los se o botão Para baixo for pressionado (para mais informações, veja Usando os Botões do Bloco na Ajuda do Software EV3).

O Motor Grande do EV3 é um potente motor "inteligente" (Figura 20). Ele possui um Sensor de Rotação embutido com resolução de 1 grau, para um controle preciso. O Motor Grande é otimizado para ser a base motriz dos seus robôs. Ao utilizar os Blocos de Programação Mover direção ou Mover o tanque, os Motores Grandes irão coordenar a ação simultaneamente. Motor Médio O Motor Médio também inclui um Sensor de Rotação embutido (com resolução de 1 grau), mas é menor e mais leve que o Motor Grande. Isso significa que ele é capaz de responder com mais rapidez que o Motor Grande. O Motor Médio (Figura 20) pode ser programado para ligar ou desligar, controlar seu nível de força, ou para funcionar por uma quantidade específica de tempo ou rotações.

Já o Sensor de Cor é um sensor digital capaz de detectar a cor ou a intensidade da luz que entra pela pequena janela na sua face (Figura

21). Esse sensor pode ser utilizado em três modos diferentes: Modo de Cores, Modo Intensidade da Luz Refletida e Modo Intensidade da Luz Ambiente.

Além disso, o Sensor Giroscópio é um sensor digital que detecta o movimento rotacional em um único eixo (Figura 22). Se você girar o Sensor Giroscópio na direção das setas no compartimento do sensor, este pode detectar a taxa de rotação, em graus por segundo. (O sensor pode medir uma taxa máxima de giro de 440 graus por segundo.) É possível utilizar a taxa de rotação para detectar, por exemplo, quando uma peça do seu robô está girando, ou quando ele está em queda.

O Sensor de Toque é um sensor analógico capaz de detectar quando o botão vermelho do sensor foi pressionado e quando ele é liberado (Figura 23). Isso significa que o Sensor de Toque pode ser programado para agir utilizando três condições: pressionado, liberado ou pulsado (pressionado e liberado ao mesmo tempo).

O Sensor Ultrassônico é um sensor digital capaz de medir a distância até um objeto à frente dele (Figura 24). Ele faz isso enviando ondas sonoras de alta frequência e medindo quanto tempo leva para o som refletir e voltar ao sensor. A frequência sonora é alta demais para que você a ouça.

O Sensor Infravermelho é um sensor digital capaz de detectar a luz infravermelha refletida em objetos sólidos (Figura 25). Ele também pode detectar sinais de luz infravermelha enviadas pela Baliza Remota Infravermelha. O Sensor Infravermelho pode ser utilizado em três modos diferentes: Modo de Proximidade, Modo de Baliza e Modo Remoto.

É possível ainda utilizar a Baliza Remota Infravermelha como um controle remoto para o seu robô. Quando está em Modo Remoto, o Sensor Infravermelho pode detectar qual botão (ou combinação de botões) é pressionada na baliza. Há um total de onze combinações possíveis de botões:

Além dele, há sensores que se conectam diretamente com o *brick*, e este com o computador por meio de cabo e porta *USB* ou pela tecnologia *bluetooth*, motores e centenas de peças como tijolos, vigas, eixos, polias, pinos, engrenagens, entre outros (veja a Figura 18). (LEGO EDUCATION, 2019, *on-line*)



Figura 18 – Peças do LEGO EV3

Fonte: elaborada pelo autor.

Para o funcionamento do LEGO temos que conectar os motores nos sensores e, por fim, conectar o bloco EV3 ao computador.

Uma vez confirmado que o computador atende aos requisitos mínimos do sistema, o usuário está pronto para instalar o *software*. Em seguida, deve-se fechar todos os outros programas e clicar duas vezes no arquivo de instalação, que se encontra dentro da pasta de aplicativo do Software EV3. A instalação irá então começar.

Durante o processo de instalação será perguntado se o usuário deseja instalar a Edição do Professor ou do Aluno do Software EV3. No Macintosh, a Edição do professor pode ser selecionada ao escolher a instalação Personalizada. Na Edição do Professor, são encontradas as informações adicionais e recursos que podem ser úteis na configuração em sala de aula e em outras situações didáticas que ainda proverão habilidades estendidas no Editor de Conteúdo para acessar, criar e gerenciar conteúdos utilizados para ensinar: por exemplo, tornando programas inacessíveis para os alunos. É recomendado que todos os educadores instalem a Edição do professor.

5.1 Programação do kit LEGO EV3

A Programação EV3 é um aplicativo de programação oficial da LEGO® Education. Usando um ambiente intuitivo baseado em ícones, o aplicativo Programação EV3 é um guia de introdução fácil e eficiente para o LEGO MINDSTORMS® Education EV3. Combinando um robô físico EV3, esse aplicativo de programação fornece todas as ferramentas necessárias para envolver e motivar os alunos dentro e fora da sala de aula. Uma ampla variedade de materiais de suporte está incluída no aplicativo Programação EV3 para garantir que professor e alunos desfrutem de uma ótima introdução. Seis tutoriais passo a passo do Robô Educador fornecem um guia eficiente de programação e *hardware*.

Ademais, uma introdução do plano de aulas de robótica fornece aos professores um esboço de nove lições de inicialização separadas, ligando o mais recente material de aprendizagem aos padrões do currículo local e sugere possíveis áreas de avaliação. O aplicativo Programação EV3 amplia o conceito de aprendizagem do LEGO MINDSTORMS Education EV3 e auxilia os professores com uma plataforma tecnológica e com lições manejáveis e relevantes para o currículo. O aplicativo EV3 fornece uma tecnologia robótica real em uma solução móvel, simples e relevante para a sala de aula digital. Ele foi projetado para que os alunos tenham acesso e se envolvam com o MINDSTORMS EV3 e com uma ampla variedade de temas, incluindo informática, tecnologia, engenharia e matemática.

5.2 Estudo das interações entre as engrenagens do kit de marchas

Primeiramente, as engrenagens serão classificadas quanto ao número de dentes. A seguir encontra-se o critério, que vem acompanhado de imagens. Essas seriam as possíveis engrenagens que poderiam nos ajudar a melhorar a velocidade da marcha de retorno da corda. Algumas delas já são utilizadas no protótipo e os dados levantados ajudam a traçar a relação de engrenamento.



Figura 19 – Engrenagem tipo 1, com 40 dentes. É a maior engrenagem de todas
Fonte: elaborada pelo autor.

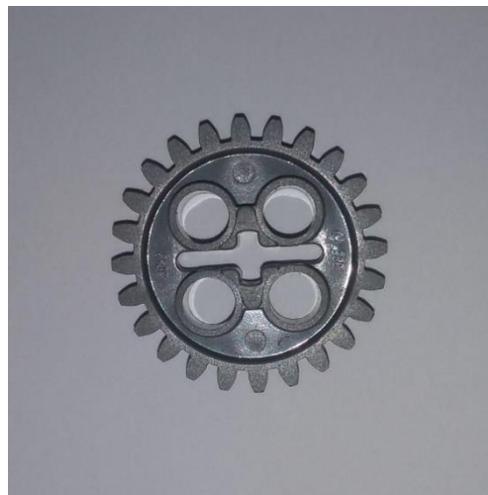


Figura 20 – Engrenagem tipo 2, com 24 dentes
Fonte: elaborada pelo autor.



Figura 21 – Engrenagem tipo 3, com 16 dentes
Fonte: elaborada pelo autor.



Figura 22 – Engrenagem tipo 4, com 8 dentes, com o menor número de dentes dentre todas

Fonte: elaborada pelo autor.

Devemos evidenciar, também, alguns componentes que são vitais para a realização do projeto e como foram denominados na execução dele, a fim de evitar confusões.

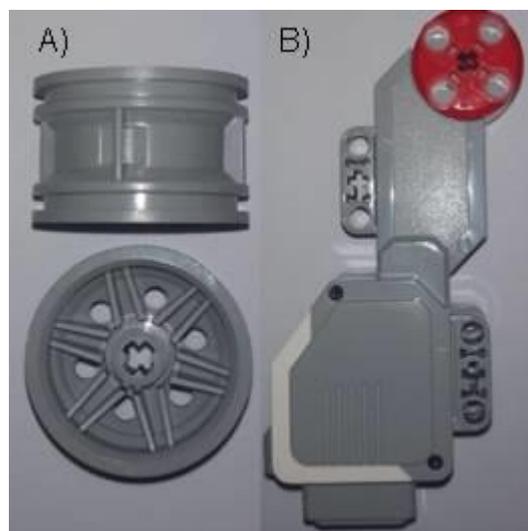


Figura 23 – Componentes igualmente importantes. A) Polia e B) Motor

Fonte: elaborada pelo autor.

5.3 Trens de engrenagens

A montagem como um todo consiste em mecanismos de engate para as quatro marchas disponíveis, sendo complexa a visualização do mecanismo como um todo, porém, pode-se isolar cada marcha com sua sequência de eixos e engrenamentos para bem observá-la. Seguem as vistas de cada marcha, que são expostas independentemente.

5.4 Relações das marchas

Assim como acontece no cotifiano, a marcha mais lenta será nomeada como Marcha 1. A relação de rotações entre engrenagens é a razão do número de dentes da segunda engrenagem com o número de dentes da primeira. Para um conjunto de engrenagens um pouco mais completo temos a seguinte relação:

$$\text{Rel} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_3}{N_2} \cdot \frac{N_4}{N_3} \cdot [\dots] \cdot \frac{N_n}{N_{n-1}}$$

Onde N é o número de dentes de uma dada engrenagem e **Rel** é um número adimensional que representa a relação. A caracterização das marchas encontra-se a seguir.

Subida da corda

Marcha 1 (sobe mais lenta):

A marcha 1 foi construída pelo acoplamento de engrenagens com 8, 24, 16 e 40 dentes a um trem de engrenagens composto, onde elas são interligadas entre si ou por eixos, com o intuito de transmitir o movimento desde a engrenagem motriz de 8 dentes, que está acoplada ao motor, até a engrenagem de saída com 40 dentes, que está acoplada à polia. A figura 24 a seguir nos mostra o esquema tridimensional mecânico da marcha 1, construída no programa SolidWorks 2017.

- Quinze voltas do eixo do motor para uma volta da polia;

$$\text{Rel}_1 = \frac{24}{8} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 15$$

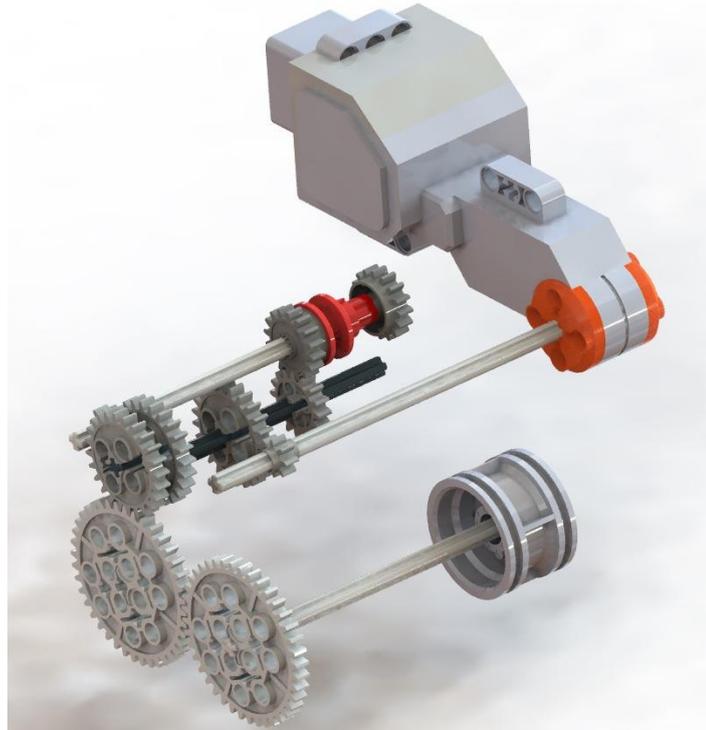


Figura 24 - Esquema mecânico tridimensional da marcha lenta (marcha 1)

Fonte: elaborada pelo autor.

Marcha 2 (sobe com velocidade média):

A marcha 2 foi construída pelo acoplamento de engrenagens com 8,16, 24 e 40 dentes a um trem de engrenagens composto, onde elas são interligadas entre si ou por eixos, com o intuito de transmitir o movimento desde a engrenagem motriz de 16 dentes, que está acoplada ao motor, até a engrenagem de saída com 40 dentes, que está acoplada à polia. A figura 25, a seguir, nos mostra o esquema tridimensional mecânico da marcha 1 construída no programa SolidWorks 2017.

- Cinco voltas do eixo do motor para uma volta da polia;

$$Rel_2 = \frac{16}{16} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 5$$

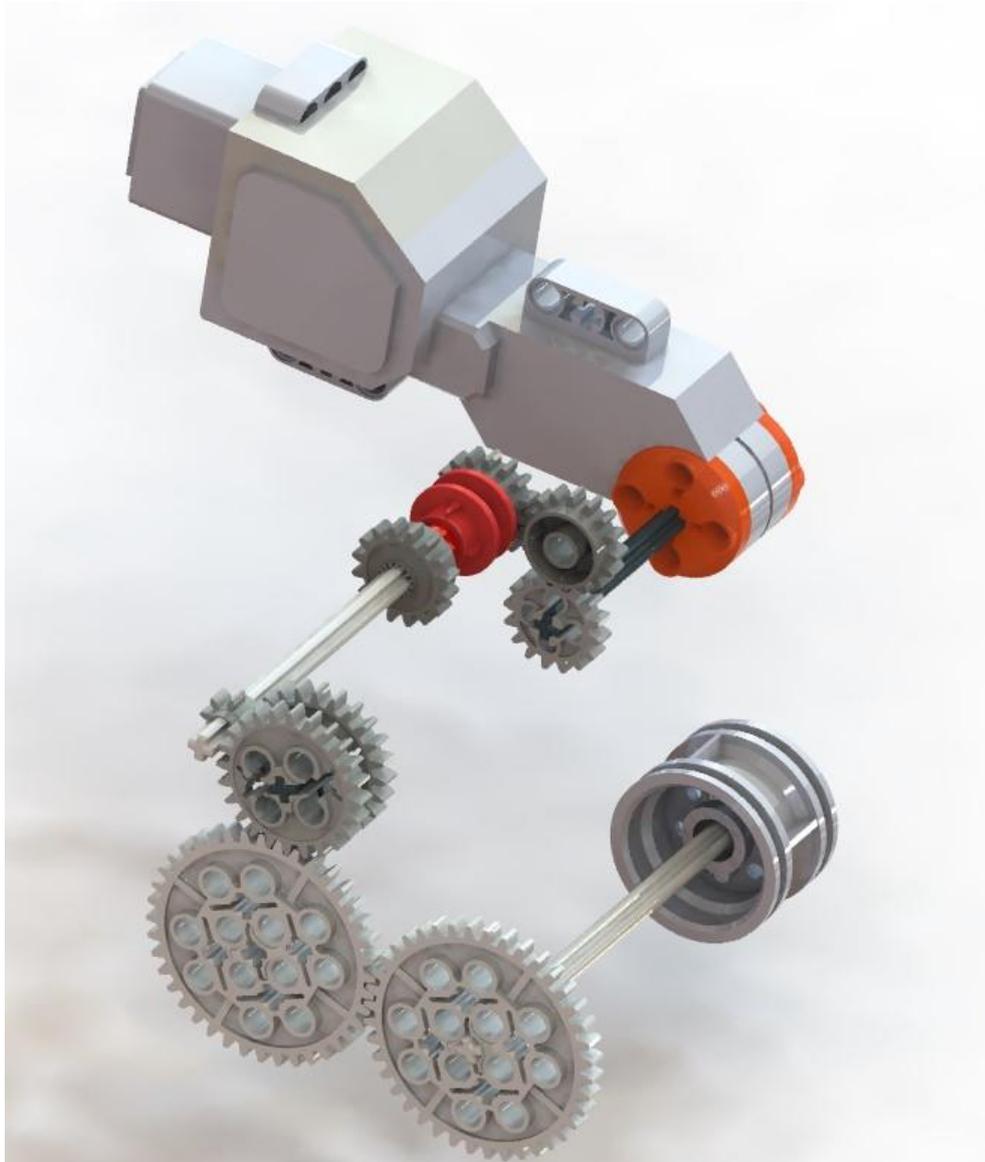


Figura 25 – Esquema mecânico tridimensional da marcha intermediária
(marcha 2)

Fonte: elaborada pelo autor.

Marcha 3 (sobe mais rápida):

A marcha 3 foi construída pelo acoplamento de engrenagens com 16, 24 e 40 dentes em um trem de engrenagens composto, onde elas são interligadas entre si ou por eixos, com o intuito de transmitir o movimento desde a engrenagem motriz de 16 dentes, que está acoplada ao motor, até a engrenagem de saída com 40 dentes, que está acoplada à polia. A figura 26, a seguir, nos mostra o esquema tridimensional mecânico da marcha 3, construída no programa SolidWorks 2017.

- Quase duas voltas do eixo do motor para uma volta da polia;

$$\text{Rel}_3 = \frac{16}{16} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 1,6667$$

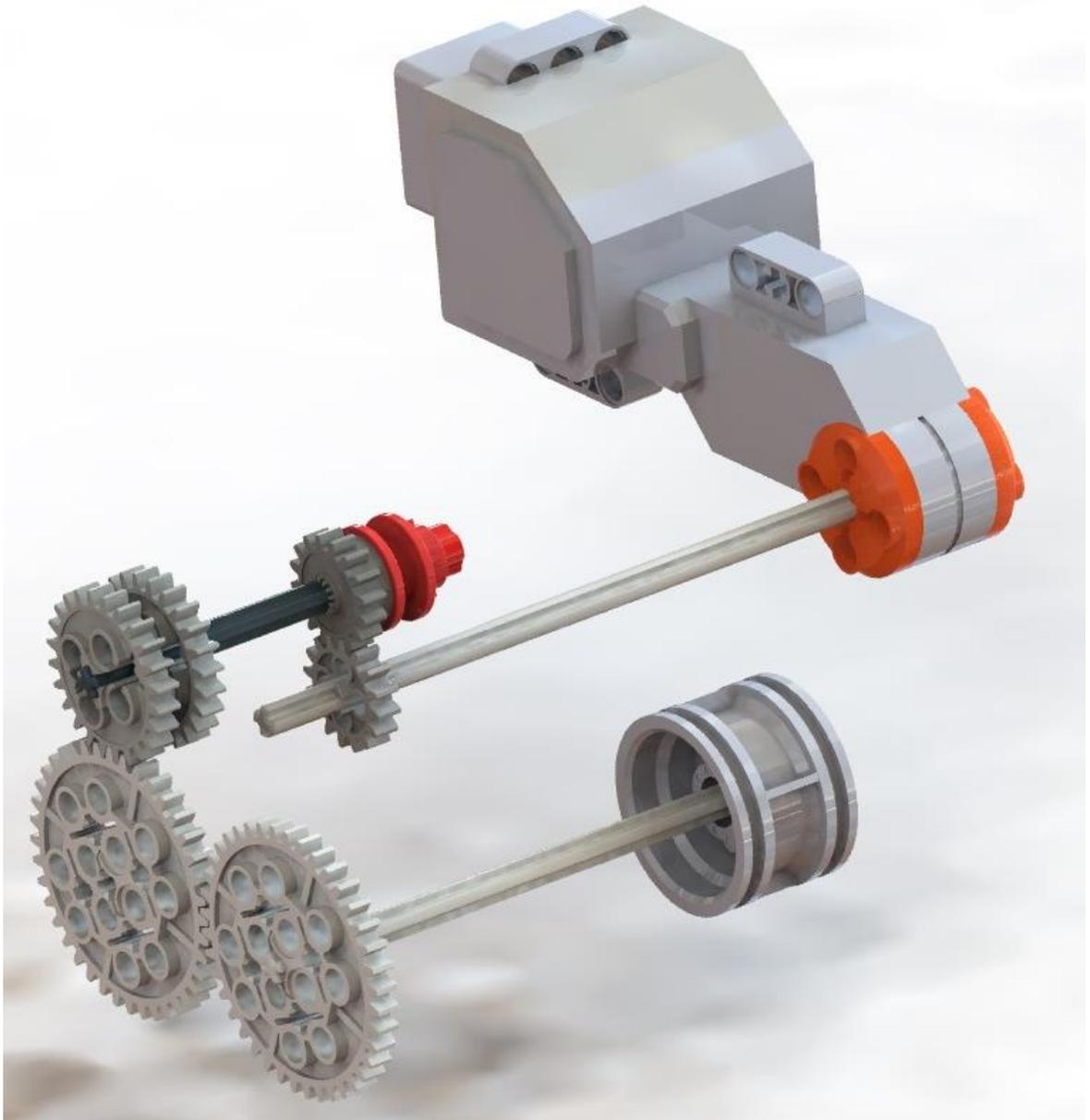


Figura 26 – Esquema mecânico tridimensional da marcha de velocidade (marcha 3)

Fonte: elaborada pelo autor.

Descida da corda

Marcha de retorno (desce):

A marcha de retorno foi construída pelo acoplamento de engrenagens com 8, 16, 24 e 40 dentes em um trem de engrenagens composto, onde elas são interligadas entre si ou por eixos, com o intuito de transmitir o movimento desde a engrenagem motriz de 8 dentes, que está acoplada ao motor, até a engrenagem de saída com 40 dentes, que está acoplada à polia. A figura 27, a seguir, nos mostra o esquema tridimensional mecânico da marcha de retorno que foi construída no programa SolidWorks 2017.

- Cinco voltas do eixo do motor para uma volta da polia;

$$\text{Rel}_{R\acute{E}} = \frac{24}{8} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 5$$

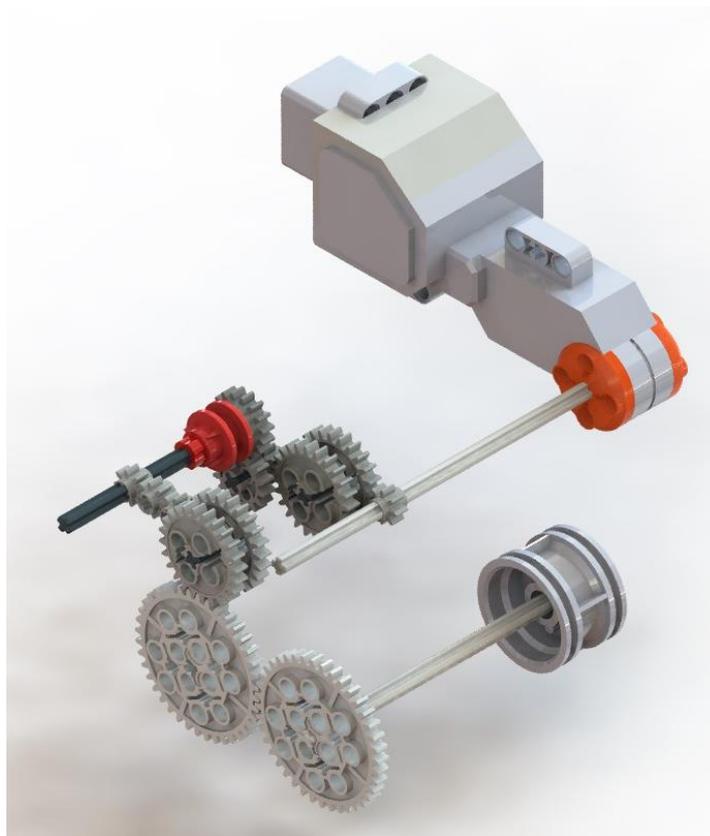


Figura 27 – Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno

Fonte: elaborada pelo autor.

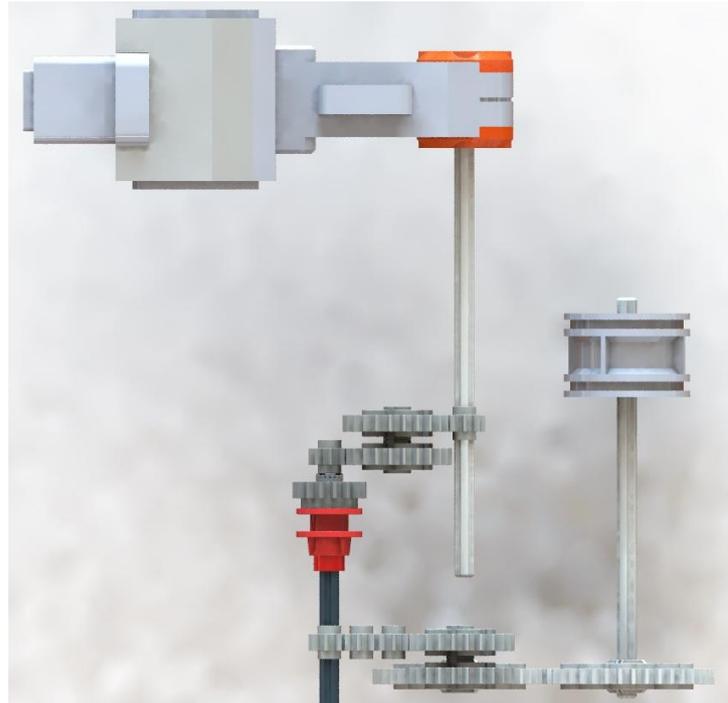


Figura 28 – Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno (vista superior)

Fonte: elaborada pelo autor.

5.5 Flexibilidade na aprendizagem e a sequência didática

5.5.1 Flexibilidade na aprendizagem

O conceito de flexibilidade é muito importante para estudar e por em prática a estratégia e uso da sequência didática na organização da prática pedagógica. Movido pela intenção de tornar mais eficiente o processo de aprender, o docente se volta para organizar as atividades curriculares, atendendo às necessidades do aluno em função de um dado objetivo de ensino/ educacional. Daí a natureza flexível desse modo de abordar a situação ensino-aprendizagem.

A cada nível e/ou etapa da educação, em respeito a cada recorte do estudo, e de acordo com as características de cada grupo e faixa etária dos aprendizes, um mesmo tema é tratado de maneira ou intensidade diferente. Por isso, flexibiliza-se o conteúdo e o conjunto de atividades das etapas do processo de aprender.

A Figura 29, abaixo, apresenta um organograma de uma sequência didática flexível, em que cada etapa será realizada de acordo com a necessidade da turma que se trabalha.

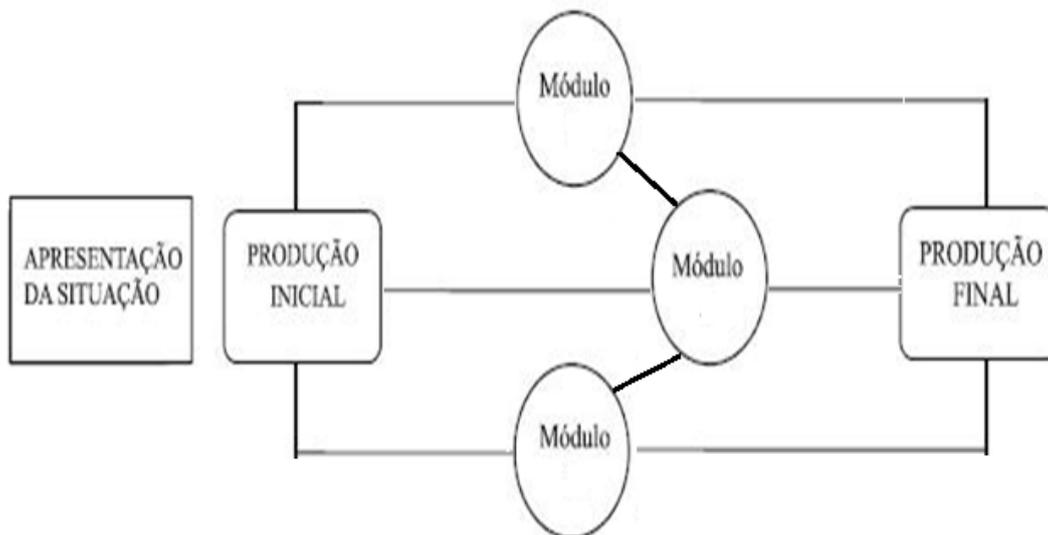


Figura 29 – Fluxograma retratando a flexibilidade na aprendizagem

Fonte: elaborada pelo autor.

5.5.2 Sequência didática de matemática: o ensino da função linear e do torque através de interações de engrenagens do kit LEGO

Objetivo: Compreender os conceitos de função linear, proporcionalidade, composição de funções, inversão de funções e torque.

Público-alvo: 1º ano do Ensino Médio

Tempo estimado: Entre 5 e 6 aulas de 50 minutos

Material necessário: Kit de marchas do LEGO EV3

Dados do kit: Em se tratando do servo motor mais largo do kit Lego Mindstorm, temos os seguintes dados se considerada a situação de carga mais extrema:

- Voltagem: 9 V (constante);
- Corrente máxima: 50 mA (constante);
- Eficiência: 33%;
- Potência mecânica máxima: $P = 0,33 \cdot V \cdot I = 0,33 \cdot 9 \cdot 0,05 = 0,1485 \text{ W}$;
- Velocidade angular máxima (para 17,3 N.cm): 153 R.P.M;
- $r_{\text{polia cesta}} = 14,8 \text{ mm}$ (aproximado).

Desenvolvimento:

Por meio de aulas expositivas dos conteúdos citados, serão propostas as atividades abaixo, a fim de instigar e materializar as aplicações desses conteúdos. Essa sequência didática tem a finalidade de mostrar métodos que facilitem a explicação dos conteúdos através do uso da robótica com o kit LEGO EV3.

- **1º dia**

Primeira etapa – discussão teórica sobre proporcionalidade

Nessa etapa, a proposta é indagar os nossos alunos se eles têm o conhecimento dos conteúdos básicos de proporcionalidade, utilizando um questionamento teórico. Caso não tenham, faremos uma explanação teórica desses conteúdos. Para fundamentar a explicação sobre proporcionalidade vamos dar exemplos de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Exemplos:

A Tabela 1 (p. 41) de valores das grandezas tempo (em h) e distância (em km) da viagem de um trem com velocidade constante de 60 km/h, pode ser expressa de forma hipotética da seguinte forma:

$$\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = \dots = 60$$

Observe que quanto maior a distância, maior é o tempo da viagem, ou seja, as grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais.

Já a Tabela 2 (p. 42), de valores das grandezas velocidade (em km/h) e tempo (em h), da viagem de um trem, em uma distância de 240 km, pode ser expressa de forma hipotética da seguinte forma:

$$40 \cdot 6 = 80 \cdot 3 = 120 \cdot 2 = \dots = 240$$

Observe que quanto maior a velocidade do trem, menor o tempo da viagem, ou seja, as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais.

Após essa exemplificação teórica sobre proporcionalidade, vamos deixar a critério do professor se é necessário ou não fazer outros exemplos para que os alunos relembrem esse conteúdo que vem sendo estudado por eles desde a primeira série do ensino fundamental.

Segunda etapa – proporcionalidade através das engrenagens

Nessa etapa, mostraremos aos nossos alunos as imagens das engrenagens do kit LEGO EV3 para que eles tenham a noção da interação entre elas, visualizando o número de dentes de cada engrenagem e suas relações, assim pode-se calcular a proporcionalidade entre elas. Explicaremos a eles que serão montados trens de engrenagens para que uma força constante de um motor aplicada à engrenagem motriz possa ser transmitida até a engrenagem de saída, gerando assim um torque.

Chamamos um conjunto de engrenagens que se interagem de **Trem de Engrenagens ou Caixa de Engrenagens**. Esse Trem de Engrenagens pode ser de dois tipos, Simples ou Composto, conforme figuras abaixo:

Trem de Engrenagem Simples:

Apenas uma engrenagem em cada eixo.

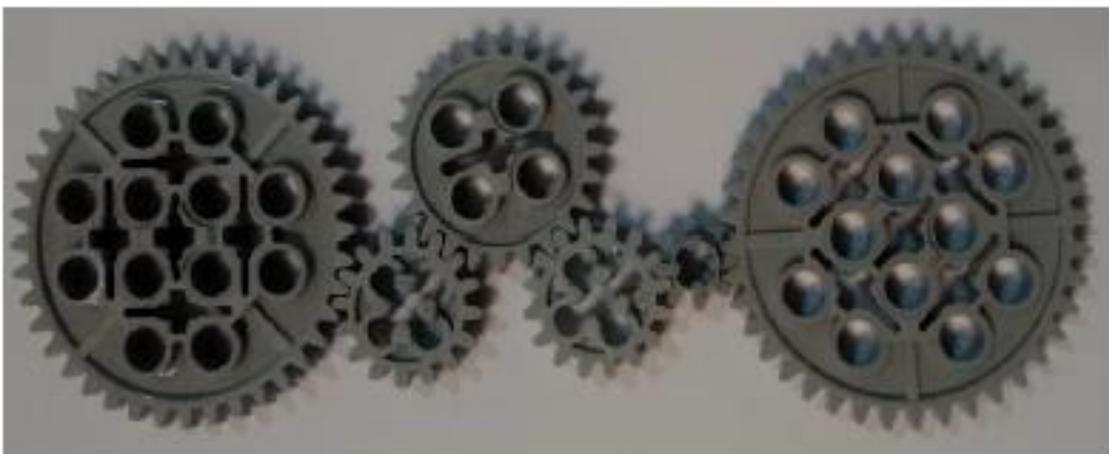


Figura 30 – Trem de Engrenagens Simples

Fonte: elaborada pelo autor.

Trem de Engrenagens Composto

Tem-se mais de uma engrenagem em um dos eixos.

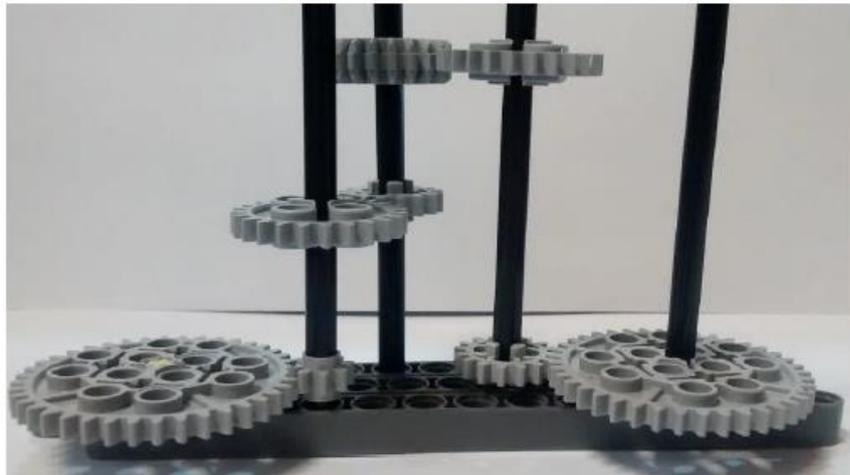


Figura 31 – Trem de Engrenagens Composto

Fonte: elaborada pelo autor.

Inicialmente vamos relacionar as engrenagens de duas em duas e do mesmo tipo, ou seja, com o mesmo número de dentes. Os alunos irão perceber que enquanto uma dá um giro em um sentido a outra também vai dar um giro no outro sentido. A relação entre duas engrenagens do mesmo tipo é de 1:1. Na figura 32, abaixo, temos duas engrenagens com 24 dentes engrenadas.



Figura 32 – Acoplamento de duas engrenagens idênticas

Fonte: elaborada pelo autor.

$$E_1 = 24 \text{ e } E_2 = 24$$

$$E_1 : E_2 = \frac{24}{24} \rightarrow E_1 : E_2 = 1:1$$

Essa relação significa que enquanto a engrenagem E_1 dá uma volta, a engrenagem E_2 também dá uma volta.

Ao engrenar duas engrenagens diferentes, ou seja, com números de dentes diferentes, como na figura 33 abaixo:



Figura 33 – Acoplamento de duas engrenagens diferentes

Fonte: elaborada pelo autor.

Temos:

$$E_1 = 24 \text{ e } E_2 = 8$$

$$E_1 : E_2 = \frac{24}{8} \rightarrow E_1 : E_2 = 3:1$$

Essa relação significa que enquanto a engrenagem E_1 dá uma volta a engrenagem E_2 dá três volta.

Nesse momento, os alunos percebem que, ao engrenar duas ou mais engrenagens, existe uma proporção entre os números de dentes e seus deslocamentos. Nessa etapa, vamos constatar matematicamente que a relação de giros entre as engrenagens é inversamente proporcional ao número de dentes delas:

Iremos iniciar o processo com duas engrenagens, a velocidade escalar(V) no ponto de contato das duas engrenagens é a mesma e, assim, pode-se calcular a

relação de transmissão ou relação entre as velocidades angulares delas, conforme figura 34 abaixo:

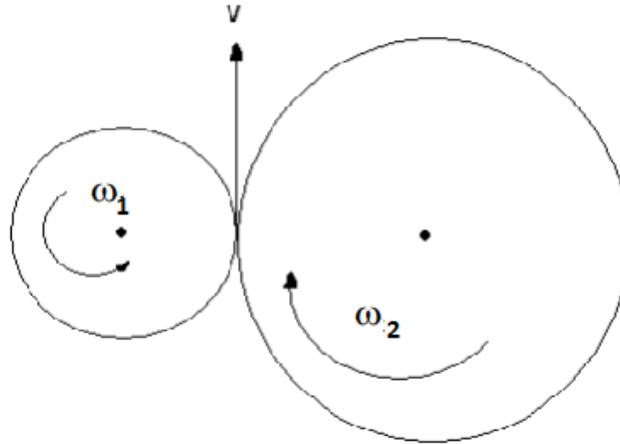


Figura 34 – Velocidades de duas engrenagens acopladas

Fonte: Martin (1982).

A velocidade escalar é igual ao produto da velocidade angular pelo raio, então temos:

$$V = \omega \cdot R$$

Como no ponto de tangência a velocidade escalar das duas engrenagens é a mesma, então:

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

A relação de transmissão das engrenagens é inversamente proporcional à razão de seus raios. Faremos a relação entre o diâmetro primitivo(D) e o número de dentes(N):

$$k = \frac{D}{N}$$

$$D_1 = k \cdot N_1 \text{ e } D_2 = k \cdot N_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{k \cdot N_2}{2}}{k \cdot N_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Através desses cálculos, pode-se constatar que a relação de transmissão entre duas engrenagens é inversamente proporcional ao número de dentes das engrenagens relacionadas.

Como o câmbio de marchas é montado com um trem de engrenagens com várias engrenagens conectadas para transmitir uma força até a engrenagem de saída para gerar um torque, então vamos verificar a razão das velocidades angulares ou relação de transmissão (V_R) entre a engrenagem motriz (conectada ao motor) e a engrenagem de saída, que vai gerar o torque na polia:

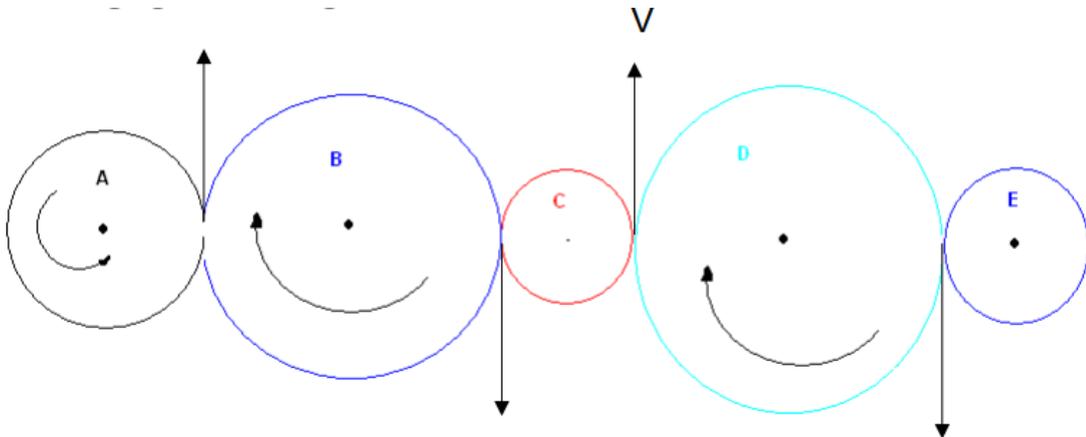


Figura 35 – Velocidades de engrenagens num trem de engrenagens simples

Fonte: Martin (1982).

$$VR = \frac{\omega_A}{\omega_E} = \frac{\omega_A}{\omega_B} \frac{\omega_B}{\omega_C} \frac{\omega_C}{\omega_D} \frac{\omega_D}{\omega_E} = \frac{N_B}{N_A} \frac{N_C}{N_B} \frac{N_D}{N_C} \frac{N_E}{N_D}$$

$$VR = \frac{\omega_A}{\omega_E} = \frac{N_E}{N_A}$$

A relação de transmissão é ditada apenas pelo número de dentes da primeira e da última engrenagem, as engrenagens intermediárias são usadas apenas para conectar estas duas engrenagens, onde a distância entre centros é grande, e transmitir o movimento para controlar a questão do sentido de rotação requerido.

Agora o professor relaciona três dessas engrenagens e a última vai sofrer um giro no mesmo sentido que a primeira, quando se relaciona quatro dessas engrenagens, a última sofrerá um giro no sentido contrário ao da primeira, e, assim, sucessivamente. É fácil notar que, se o número de engrenagens conectadas é ímpar, então a de saída vai girar no mesmo sentido que a de entrada e, se o número de engrenagens for par, a engrenagem de saída vai girar no sentido contrário da engrenagem de entrada, como figura 36 abaixo:

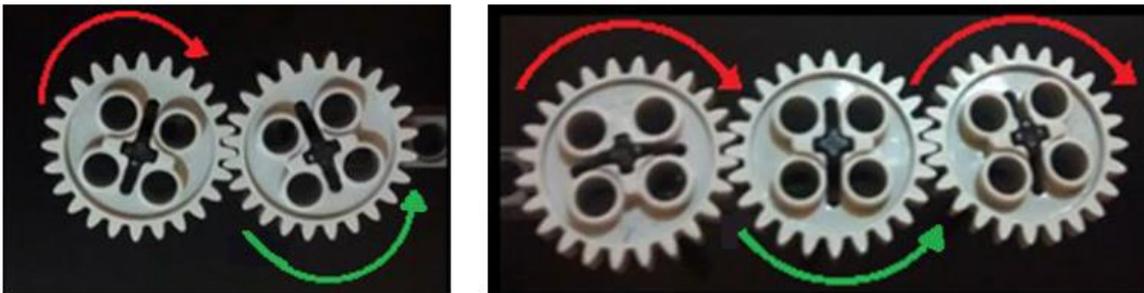


Figura 36 – Sentido de giros de engrenagens acopladas

Fonte: elaborada pelo autor.

Sinal de VR:

- + se a primeira e última engrenagem giram no mesmo sentido.
- se elas giram em sentidos opostos.

Esses exemplos que mostramos aos nossos alunos são de trens de engrenagens simples, que as relacionam através do deslocamento linear. Os trens de engrenagens compostos que vamos usar na montagem do câmbio de marchas se comportam de outra forma, sendo que a transmissão será angular, ou seja, relacionam o número de giros delas.

- **2º dia**

Primeira etapa – função linear

Nessa etapa, indagaremos os nossos alunos se eles têm o conhecimento dos conteúdos básicos de funções lineares, por meio de um questionamento teórico, e, caso não tenham, vamos fazer uma explicação teórica desse conteúdo.

Segunda etapa – função linear e proporcionalidade

Agora mostraremos aos nossos alunos que a função linear $f(x) = a \cdot x$ é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Para definir se uma relação entre grandezas é proporcional, seja direta ou inversa, Lima (2010) definem o Teorema Fundamental de Proporcionalidade:

Seja $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função com as seguintes propriedades:

$$P_1) x < x' \Rightarrow f(x) < f(x');$$

$$P_2) f(nx) = n \cdot f(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } x \in \mathbb{R}_+.$$

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$. Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$ com $a = f(1)$. E, assim, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se função linear. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax , logo se define, por restrição, uma proporcionalidade $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Conclui-se, então, que toda proporcionalidade é uma restrição de uma função linear a \mathbb{R}_+ , e o número real a chama-se de coeficiente angular ou fator de proporcionalidade, de acordo com Lima (2010).

$$P_3) f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ para quaisquer } x \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

Toda função que satisfaz as três propriedades é chamada de linear, e se $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, então f é uma função linear entre duas grandezas

- **3º dia**

Primeira etapa – função linear e interação entre as engrenagens

Nessa etapa, vamos mostrar que a relação do número de voltas entre duas ou mais engrenagens se dá através de uma função linear, pois vimos que existe uma proporcionalidade entre os seus números de dentes e a quantidade de voltas que elas sofrem.

Quando relacionamos duas engrenagens com o mesmo número de dentes, teremos uma função identidade, ou seja, iremos relacionar o número de voltas que a segunda vai dar em função da primeira, quando a primeira dá uma volta, a outra também desloca uma volta.

$$E_1 = 24 \text{ dentes e } E_2 = 24 \text{ dentes}$$

$$E_1 : E_2 = \frac{24}{24} \rightarrow E_1 : E_2 = 1$$

A função linear $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, que relaciona o número de voltas da primeira engrenagem com a segunda, será a função identidade $f(x) = 1.x$, ou seja, quando a primeira desloca x voltas, a segunda deslocará $f(x) = x$ voltas.

$x \rightarrow f(x)$ ou seja $f(x) = x$

Ao relacionar duas engrenagens com número de dentes diferentes, como o exemplo abaixo, temos:

$$E_1 = 24 \text{ dentes e } E_2 = 8 \text{ dentes}$$

$$E_1 : E_2 = \frac{24}{8} \rightarrow E_1 : E_2 = 3:1$$

A função linear $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ que relaciona o número de voltas da primeira engrenagem com a segunda será a função $f(x) = 3.x$, ou seja, quando a primeira desloca x voltas, a segunda deslocará $f(x) = 3x$ voltas.

$x \rightarrow f(x)$ ou seja $f(x) = 3.x$

Após esses dois exemplos, os alunos percebem que a interação entre duas engrenagens sempre vai resultar em uma função linear que relaciona os respectivos números de voltas que elas sofrem.

Segunda etapa – Função composta

Nessa etapa, a proposta é indagar os nossos alunos se eles têm o conhecimento dos conteúdos básicos de função composta, utilizando um questionamento teórico. Caso não tenham, faremos uma explanação teórica desses conteúdos. Para fundamentar a explicação sobre função composta, vamos dar exemplos de composição entre funções.

Terceira etapa – Função composta/ Interações de Engrenagens

Nessa etapa, mostraremos que a interação entre duas engrenagens relaciona o número de voltas que elas sofrerão através de uma função linear, então, quando a engrenagem motriz, as engrenagens intermediárias e a engrenagem de saída são interligadas entre si ou por eixos, formam-se os trens de engrenagens compostos. Percebe-se que essa interação vai ocorrer através de composições entre funções que irão transmitir o movimento da engrenagem motriz para a engrenagem de saída, isto é, encurtam o caminho, fazem a transmissão diretamente, como mostraremos no seguinte exemplo:

Determinar a relação de transmissão para o conjunto abaixo, onde o número de dentes de cada engrenagem encontra-se, a seguir, em milímetros e a velocidade angular de A é 1000 RPM:

Trem de engrenagem composto:

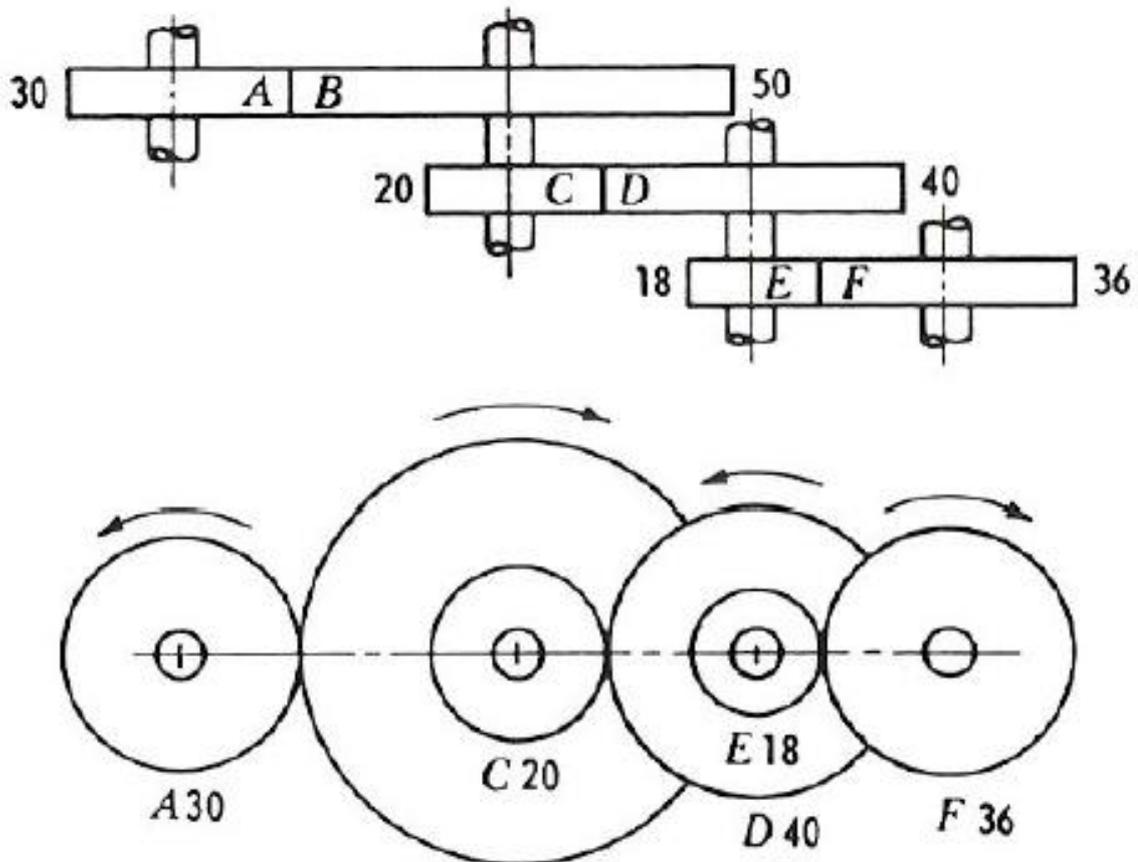


Figura 37 – Velocidades de engrenagens num trem de engrenagens composto

Fonte: Martin (1982).

Nesse momento vou relacioná-las de duas em duas, repetindo esse processo até que o movimento seja transmitido à engrenagem de saída.

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{N_A}{N_B} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{30}{50} \Rightarrow \omega_B = \frac{3}{5} \cdot 1600 \Rightarrow \omega_B = -960$$

$$\omega_C = \omega_B$$

$$\frac{\omega_D}{\omega_C} = \frac{20}{40} \Rightarrow \omega_D = \frac{1}{2} \cdot 960 \Rightarrow \omega_D = 480$$

$$\omega_D = \omega_E$$

$$\frac{\omega_F}{\omega_E} = \frac{18}{36} \Rightarrow \omega_F = \frac{18}{36} \cdot (480) \Rightarrow \omega_F = -240$$

$$V_R = \frac{\omega_A}{\omega_F} = \frac{1600}{-240} = -6,66$$

Nos trens de engrenagens compostos, pode-se observar que a velocidade resultante ou a transmissão de movimento é calculada da seguinte forma:

$$V_R = \frac{\omega_{\text{Entrada}}}{\omega_{\text{Saída}}} = \frac{\text{produto do número de dentes das movidas}}{\text{produto do número de dentes das motoras}}$$

Usando o exemplo anterior, podemos fazer o cálculo a seguir:

$$V_R = \frac{50.40.36}{30.20.18} = -\frac{20}{3} = -6,66$$

Vamos, a partir de então, usar a teoria de composição de funções para que possamos calcular a transmissão desse movimento da engrenagem motora para a engrenagem de saída. Vimos anteriormente que, na interação entre duas engrenagens, o movimento que uma transmite para a outra é dado por uma função linear e, agora, vamos fazer a conexão dessas engrenagens.

As funções lineares entre duas engrenagens no trem de engrenagens composto são lineares e definidas por $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que:

$$E_A \rightarrow E_B$$

$$f_1(x) = \frac{5}{3}x$$

$$E_B \rightarrow E_C$$

$$f_2(x) = x$$

$$E_C \rightarrow E_D$$

$$F_3(x) = 2x$$

$$E_D \rightarrow E_E$$

$$f_4(x) = x$$

$$E_E \rightarrow E_F$$

$$f_5(x) = 2x$$

Fazendo a composição dessas funções, teremos as relações de todas as engrenagens do nosso trem de engrenagens:

$$E_A \rightarrow E_B \rightarrow E_C$$

$$f_1 \circ f_2(x) = \frac{5}{3}(f_2(x)) = \frac{5}{3}(1 \cdot x) = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot x = \frac{5}{3} \cdot x.$$

Com isso, pode-se observar que a composição entre duas funções lineares é feita pelo produto de seus coeficientes angulares, então a composição de todas as engrenagens do trem de engrenagem composto é feita pelo produto dos coeficientes angulares de todas as funções dele.

$$f_1 \text{ of } f_2 \text{ of } f_3 \text{ of } f_4 \text{ of } f_5(x) = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x = \frac{20}{3}x$$

Desse modo, mostramos que podemos encurtar o caminho através da composição de funções, ligando diretamente a engrenagem motora à engrenagem de saída, ou seja, para x voltas da engrenagem motora, a engrenagem de saída dará $\frac{20}{3}x$ voltas.

- **4º dia**

Primeira etapa – Interações das engrenagens da primeira marcha do kit de marchas do LEGO

Nesse momento, vamos mostrar as relações das engrenagens no trem de engrenagens da primeira marcha do kit de marchas, que vai gerar um torque para levantar um peso, mostrando que esse transmite o movimento da engrenagem motora até a engrenagem de saída, o que promove uma redução de velocidade, através de composições de funções lineares, como mostrado no exemplo do terceiro dia.

A princípio, temos que uma volta do eixo do motor implica em uma volta em uma engrenagem Tipo 4, que encontra-se engrenada em uma engrenagem Tipo 2. Esta, então, possui relação de 1 para 1 com uma engrenagem Tipo 3, pois elas se encontram no mesmo eixo. A engrenagem do Tipo 3 em questão trata-se da peça que proporciona o engate da primeira marcha nas engrenagens e que transmitem o movimento. O engrenamento com a peça Tipo 3 faz com que o eixo onde ela está acoplada gire e que, portanto, comande o movimento de uma Tipo 4, que também se encontra ali. Essa última peça citada está engrenada em uma tipo 2, a qual, por sua vez, engrena em uma Tipo 1. Essa Tipo 1 engrena em outra Tipo 1, que, por fim, transmite o movimento para a polia.

A transmissão desse movimento calcula-se pela razão do produto das engrenagens movidas pelo produto das engrenagens motoras, podemos observar que, enquanto o eixo do motor gira 15 voltas, a polia gira uma volta;

$$Rel_1 = \frac{24}{8} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 15$$

A figura 24 anterior representa o trem de engrenagem da primeira marcha:

Segunda etapa – Interações das engrenagens da segunda marcha do kit de marchas do LEGO

Nesse momento, vamos mostrar as relações das engrenagens no trem de engrenagens da segunda marcha do kit de marchas:

O movimento do eixo do motor move uma engrenagem Tipo 3. Esta, engrena noutra Tipo 3, que, por sua vez, engrena em outra Tipo 3. Essa última recebe a peça vermelha que é responsável pela seleção da segunda marcha. Outra vez, essa última, Tipo 3, transmite o movimento para o eixo, onde também se encontra uma Tipo 4. A engrenagem Tipo 4 engrena em uma Tipo 1, que engrena em outra Tipo 1, que então transmite o movimento para a polia.

A transmissão desse movimento calcula-se pela razão do produto das engrenagens movidas pelo produto das engrenagens motoras:

$$Rel_2 = \frac{16}{16} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 5$$

Podemos então dizer que cinco voltas do eixo do motor faz a polia girar uma volta.

A figura 25, anterior, representa o trem de engrenagem da segunda marcha:

Terceira etapa – Interações das engrenagens da terceira marcha do kit de marchas do LEGO

Nesse momento, vamos mostrar as relações das engrenagens no trem de engrenagens da terceira marcha do kit de marchas que vai gerar um torque para levantar um peso, mostrando que esse transmite o movimento da engrenagem motora até a engrenagem de saída fazendo uma redução de velocidade.

O movimento do eixo do motor é transmitido para uma engrenagem Tipo 3 por estar na mesma estrutura. Esta engrena em outra engrenagem Tipo 3, que faz parte da seleção da terceira marcha. Engatando a marcha nela, a última engrenagem citada fica responsável por acoplar o movimento do motor ao eixo dela. Esse eixo também contém uma Tipo 2, que engrena em uma Tipo 1, que, em seguida, engrena em outra Tipo 1, a qual, por fim, transmite o movimento para polia.

A transmissão desse movimento calcula-se pela razão do produto das engrenagens movidas pelo produto das engrenagens motoras:

$$\text{Rel}_3 = \frac{16}{16} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 1,6667$$

Podemos então dizer que quase duas voltas do eixo do motor fazem a polia girar uma volta.

A figura 26 anterior representa o trem de engrenagem da terceiraa marcha:

Quarta etapa – Interações das engrenagens da marcha de retorno do kit de marchas do LEGO

Nesse momento, vamos mostrar as relações das engrenagens no trem de engrenagens da marcha de descida do kit de marchas que vai desenrolar a corda para colocarmos outro peso e, em seguida, engatar uma das três marchas de subida para gerarem os respectivos torques.

O movimento motor é transmitido através do eixo que contém uma engrenagem Tipo 4. Esta engrena em uma Tipo 2. Esta compartilha o eixo com outra Tipo 2, que engrena com uma Tipo 4. Esta compartilha o eixo com uma Tipo 3, e esta engrena em uma outra Tipo 3. Esta última, participa do processo de engate da marcha de retorno e faz um terceiro eixo girar. Esse eixo estando em movimento, transmite-o para uma engrenagem Tipo 4, que engrena em uma outra Tipo 4, que, também, engrena em outra Tipo 4 esta última em uma Tipo 2, a qual engrena em uma Tipo 1, que engrena noutra Tipo 1 e, portanto, transmite o movimento para a polia.

A transmissão desse movimento calcula-se pela razão do produto das engrenagens movidas pelo produto das engrenagens motoras:

$$\text{Rel}_{\text{RÉ}} = \frac{24}{8} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{16}{16} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{24}{8} \cdot \frac{40}{24} \cdot \frac{40}{40} = 5$$

Podemos então dizer que cinco voltas do eixo do motor faz a polia girar uma volta.

A figura 27 anterior representa o trem de engrenagem da marcha de retorno.

- **5º dia**

Uma vez entendido todos os conceitos de função linear, proporcionalidade, função composta, através dos trens de engrenagens mostrados anteriormente, devemos partir para a correlação entre o conteúdo apresentado e o experimento. Apresentação do kit: mostrar como o trem de engrenagens funciona na prática, como os pesos serão colocados, etc. Por fim, faremos o exercício referente à aplicação.

- Voltagem: 9 V (constante);
- Corrente máxima: 50 mA (constante);
- Eficiência: 33%
- Potência mecânica máxima: $P = 0,33 \cdot V \cdot I = 0,33 \cdot 9 \cdot 0,05 = 0,1485 \text{ W}$;
- Velocidade angular máxima (para 17,3 N.cm): 153 R.P.M;
- $r_{\text{polia cesta}} = 14,8 \text{ mm}$ (aproximado).

Primeira etapa: A apresentação da fórmula $P = T \cdot \omega$.

Os caminhos tomados para que a potência ficasse em função da massa e da velocidade da corda encontram-se descritos a seguir.

P: Potência do motor

T: Torque

ω : Velocidade angular

A equação para a potência máxima do motor é descrita por:

$$P = T \cdot \omega \quad (\text{Eq. 1})$$

Essa velocidade angular não é constante e depende do peso aplicado. Esta tem que ser dada na unidade do SI, em rad/s. Será descrita a relação de dependência entre parâmetros e as variáveis independentes deverão ser substituídas. Destrinchando a Eq.1, temos:

$$P = T \cdot \omega$$

$$P_{\text{motor}} = F_{\text{tração}} \cdot r_{\text{polia da cesta}} \cdot \omega_{\text{motor em rad/s}}$$

Sabemos que a força de tração exigida na corda será equivalente à força peso da massa a ser aplicada na cesta, isso quando é desprezada a massa do fio. Portanto, encontramos:

$$P_{\text{motor}} = W_{\text{massa}} \cdot r_{\text{polia da cesta}} \cdot \omega_{\text{motor em rad/s}}$$

$$P_{\text{motor}} = m_{\text{quilograma}} \cdot g \cdot r_{\text{polia da cesta}} \cdot \omega_{\text{motor em rad/s}} \quad (\text{Eq. 2})$$

Em seguida, faremos algumas considerações a fim de facilitar operações e construir um modelo mais representativo.

- g (gravidade) que será considerada é a de 9,81 m/s²;
- se substituir a velocidade angular que se encontra no SI em termos conhecidos. Temos que $V = \omega \cdot r_{\text{polia}}$. Devemos substituir a velocidade angular, uma vez que essa não é uma característica de fácil medição. Será utilizada a aproximação do raio da polia de 14,8 mm.
- utilizar a massa em gramas;

Teríamos então a seguinte relação:

$$P_{\text{motor}} = m_{\text{quilograma}} \cdot g \cdot r_{\text{polia da cesta}} \cdot \omega_{\text{motor em rad/s}}$$

$$P_{\text{motor}} = \frac{m_{\text{em grama}}}{1000} \cdot 9,81 \cdot \frac{14,8}{1000} \cdot \frac{v}{1,48*} \quad 1$$

$$P_{\text{motor}} = 9,81 \times 10^{-5} \cdot m_{\text{grama}} \cdot v \quad (\text{Eq. 3})^1$$

Considerando a potência constante com a tensão, que em uma linha não possui variações de corrente, esta será 0,1485 W, a máxima para o modelo de servo motor utilizado. Isso ocorre para pilhas totalmente carregadas. Quando as massas anexadas não correspondem ao valor máximo de capacidade, o que acontece é que o motor tem uma velocidade angular maior. Substituindo o valor de $P_{\text{motor max}} = 0,1485 \text{ W}$, teremos uma relação entre a massa aplicada e a velocidade.

¹ A aproximação realizada para r da polia = 14,8 mm pode provocar erros porque a polia em si possui alguns ressaltos onde a corda se enrola. Caso exista alguma incoerência nos resultados, isso poderia ser considerado uma fonte de erro. Uma descrição de como esse erro poderia ser corrigido se encontra em Apêndice, ao fim deste documento; vale lembrar que a velocidade se encontrará em cm/s e a massa em gramas.

$$0,1485 = 9,81 \times 10^{-5} \cdot m_{\text{grama}} \cdot v \quad (\text{Eq.4})$$

A fim de simplificar o experimento para os alunos e mostrar a relação direta de proporcionalidade, devemos organizá-lo da seguinte maneira:

$$v = \frac{1513,7615}{m} \quad (\text{Eq. 5})$$

Assim, será plotado um gráfico teórico da velocidade angular do motor, eixo das ordenadas, em função da massa em gramas, eixo das abscissas.

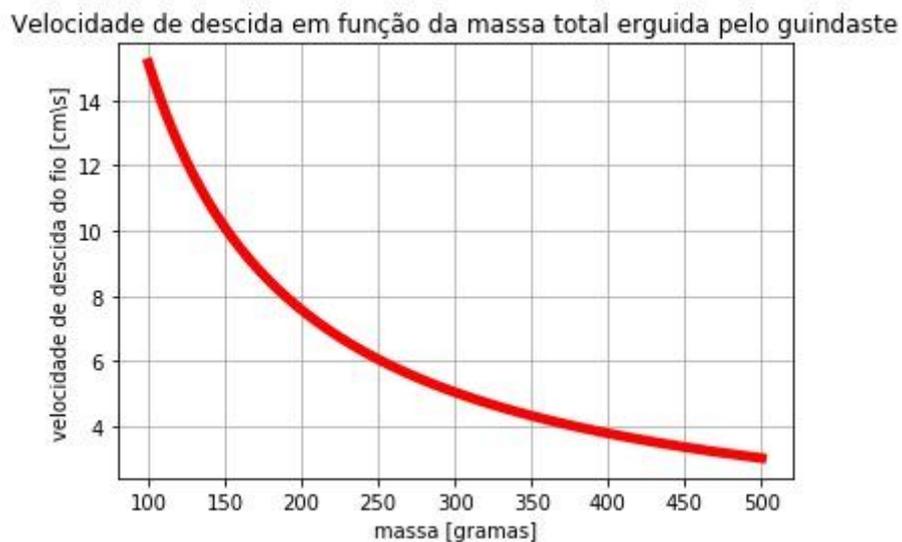


Figura 38 – Gráfico teórico, relação entre velocidade e massa aplicada

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 38, é possível enxergar a relação inversamente proporcional, em que quanto maior é a massa aplicada, menor é a velocidade da corda. E vale ressaltar que a Figura 41 representaria a relação perfeita, o que desconsidera que nem sempre as pilhas podem estar perfeitamente carregadas, ou ainda a resistência que o projeto apresentará devido ao uso de engrenagens.

Segunda etapa: Avaliar a função linear obtida para a potência

Relacionar a fórmula encontrada, $P = 9,81 \times 10^{-5} \cdot m \cdot v$, mostrando porque ela se trata de uma função linear.

Como a gravidade não apresenta grande variação ao longo da superfície terrestre, no experimento, se estivermos usando sempre a mesma massa e a mesma polia, podemos juntar m , g e raio em uma única constante, ou seja, em um valor que não possui variações. Logo, teríamos:

$$P(v) = c \cdot v \quad (\text{Eq. 6}),$$

onde 'c' representa uma constante $\in \mathbb{R}$. Esse cálculo poderá ter um erro que foi mencionado no apêndice.

Vale ressaltar a semelhança de Eq. 7 com uma função genérica do tipo linear ($y = a \cdot x + b$, onde 'a' e 'b' $\in \mathbb{R}$, caso o coeficiente linear seja igual a zero).

Terceira etapa: Experimento (sugestão)

O experimento consiste em propor um tempo total de rotação do motor, enquanto caberia medir com uma régua o deslocamento da corda. O professor informa o tempo que será imposto ao EV3. Esse tempo deverá ser escolhido arbitrariamente. Impor um dado comprimento a ser deslocado ao EV3 e então medir o tempo para o referido deslocamento seria mais trabalhoso que fazer o inverso.

O ponto considerado como inicial da corda pode ser marcado com uma fita adesiva colorida, por exemplo. Também pode ser anexada, junto ao braço que sustenta a polia, uma fita métrica posicionada próximo ao campo que a corda percorre, ela seria leve para a estrutura e deixaria o processo de medição do deslocamento mais prático.

O quadro que representa um modelo dos dados a serem coletados se encontra a seguir.

massa [kg]	s [cm]	t [s]	v [cm/s]
$m_1 =$		Proposto pelo professor	

$m_2 =$		Proposto pelo professor	
$m_3 =$		Proposto pelo professor	
$m_4 =$		Proposto pelo professor	

Quadro 1 – Exemplo de quadro para primeira marcha

Fonte: elaborado pelo autor.

Esse quadro deve se repetir para cada uma das marchas utilizadas, inclusive a marcha de recolhimento.

Para preencher a coluna da velocidade, devemos dividir o deslocamento pelo tempo.

6 CONCLUSÃO

Esse trabalho teve como objetivo estudar a função linear e o torque por meio do uso da robótica educacional através da montagem de um kit de marchas do LEGO EV3, proporcionando melhorar o aprendizado dos alunos do 1º ano do ensino médio e instigá-los por meio de uma aplicação prática do ensino de matemática e física.

Percebemos um grande aprendizado na montagem desse kit de marchas através do kit LEGO, pois precisamos recorrer a várias pessoas que tinham o conhecimento de sua montagem. O meu professor e orientador meu deu a luz dessa dissertação, relacionando o que deveria ser feito para obter as interações das engrenagens e suas respectivas relações, mostrando o que poderia resultar em um passo a passo na montagem do experimento.

Esta dissertação que foi escrita a partir das quatro marchas do kit, sendo elas encaixadas no esquema mecânico tridimensional como podemos observar na Figura 39 abaixo:

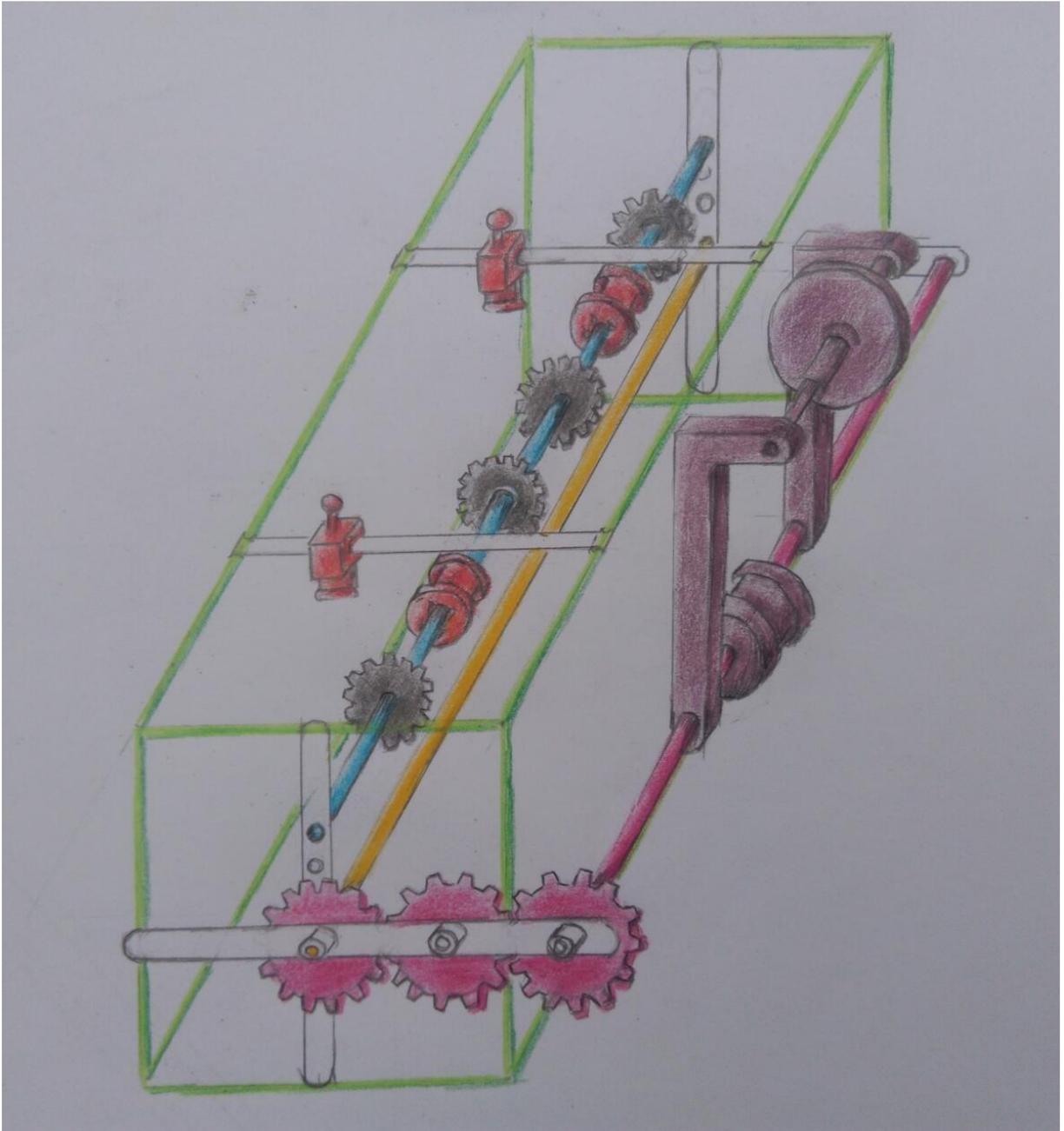


Figura 39 – Esquema mecânico tridimensional do projeto

Fonte: elaborada pelo autor.

Finalmente pude montar o projeto do esquema mecânico do kit de marchas com as respectivas peças do kit LEGO EV3, fazendo assim com que funcionasse o guincho que vai gerar um torque em uma polia ligada à engrenagem de saída, como na figura 40 abaixo:



Figura 40 – Esquema mecânico tridimensional da marcha de retorno

Fonte: elaborada pelo autor.

Nesta dissertação, podemos observar que as interações entre as engrenagens nos possibilita estudar e compreender vários conteúdos de matemática e física. Como mostrado na sequência didática acima, vimos o estudo de funções lineares, proporcionalidade, função composta e torque na prática, assim podemos constatar o enriquecimento e crescimento das pessoas envolvidas na aplicação desses projetos no cotidiano.

Após a execução desta dissertação observamos um grande crescimento pessoal e profissional dos envolvidos, ficando claro que a introdução da robótica educacional nas salas de aulas pode mudar o rumo do ensino básico no Brasil.

REFERÊNCIAS

- BECKER, F. **O que é construtivismo**. Idéias. São Paulo: FDE, n.20, p.87-93, 1993.
- BOIKO, V. A. T.; ZAMBERLAN, M. A. T. A perspectiva sócio-construtivista na psicologia e na educação: o brincar na pré-escola. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 6, n. 1, p. 51-58, jan./jun. 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/pe/v6n1/v6n1a07.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2020.
- CÉSAR, D. R.; BONILLA, M. H. S. Robótica Livre: Implementação de um ambiente dinâmico de robótica pedagógico com Soluções Tecnológicas livres no cet cefet em Itabirito-Minas Gerais Brasil. In: **XXVI CONGRESSO DA SBC**, 13, 27, Rio de Janeiro. Anais[...]. Rio de Janeiro : SBC, v 12, 2007.
- BRASIL. **Matriz de referências do Enem**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 01 dez. 2019.
- CHAKUR, C. R. S. L. A influência da psicologia na educação e a recepção do construtivismo no Brasil. In: **A desconstrução do Construtivismo na educação: crenças e equívocos de professores, autores e críticos** [online]. São Paulo: Editora UNESP, p. 27-30, 2014. ISBN 978-85-68334-48-5. Disponível em: <http://books.scielo.org>. Acesso em: 03 out. 2018.
- ELIAS, M. C. As Ideias construtivistas mudam os caminhos da prática da alfabetização. São Paulo: **Revista da Ande**, v.11, n.18, p. 49-56, 1992.
- FAGUNDES, C. A. N.; POMPERMAYER, E. M.; BASSO, M. V. A.; JARDIM, R. F. Aprendendo Matemática com Robótica. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**. V. 3, n. 2, 2005.
- FELÍCIO, H.M.S.; SILVA, C. Conhecimento escolar e formação de professores: apresentação. **Rev. Eletrônica Pesquiseduca**, ISSN:2177-1626, v.09, n.18, p. 251-261, mai-ago, 2017.
- FREIRE, P. **Conscientização - Teoria e Prática da Libertação**. São Paulo: Cortez & Moraes. 1979.
- KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologia – O novo ritmo da educação**. Editora: Papyrus, 2012.
- LEÃO, D. M. M. Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, n. 107, p. 187-206, julho, 1999.
- LEGO EDUCATION. **Guia do usuário MINDSTORMS**. Disponível em: https://le-www-live-s.legocdn.com/sc/media/files/user-guides/ev3/ev3_user_guide_ptbr-239a9c0ea7115a07ad83d3ce7dff6773.pdf. Acesso em: 25 set. 2019.

- LIMA, E.L. **Números e Funções Reais**. 1. Ed. Coleção PROFMAT SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2010.
- MARTIN, G.H. **Kinematics and Dynamics of Machines**. Second Edition, McGrawHILL, 1982
- MORENO, A. C. **Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática**. G1, 2016. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>. Acesso em: 02 dez. 2019.
- NÓBREGA, M. B da. **A atuação do psicopedagogo com o lúdico para o desenvolvimento de alunos com dificuldades de aprendizagem na educação infantil**. Monografia, 2018. Disponível em: http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/R202757.pdf. Acesso em: 20 mar. 2020.
- NUNES, S. da C.; SANTOS, R. P. dos. O Construcionismo de Papert na criação de um objeto de aprendizagem e sua avaliação segundo a taxionomia de Bloom. **X Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – IX ENPEC** Águas de Lindóia, SP – 10 a 14 de Novembro de 2013 Tecnologias da informação e comunicação na Educação em Ciências. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258555495_O_Construcionismo_de_Papert_na_criacao_de_um_objeto_de_aprendizagem_e_sua_avaliacao_segundo_a_taxionomia_de_Bloom. Acesso em: 21 mar. 2020.
- PAPERT, S. **LOGO: Computadores e Educação**. São Paulo: Brasiliense, 1986.
- PIAGET, J. **O Nascimento da inteligência na criança**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar; Brasília: INL, 1975.
- PISA. **PISA 2018 Assessment and Analytical Framework**. OCDE, OECD Publishing, Paris, 2019. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-em>.
- PORTAL DA INDÚSTRIA. **Escola SESI tem desempenho igual ao de Cingapura em matemática**. Disponível em: noticias.portaldaindustria.com.br/noticias/educacao/escola-do-sesi-tem-desempenho-igual-ao-de-cingapura-em-matematica. Acesso em: 25 nov. 2019.
- PORTESCAP. **Soluções em motores**, 2018. Disponível em <http://www.portescap.com.br/solu%C3%A7%C3%B5es-de-motores/torque-do-motor>. Acesso em: 22 mar.2020.
- POSSAMAI, C. L.; PASSERINO, L. M. C. O Processo de Cooperação e Resolução de Problemas Apoiado pela Robótica Educativa com Adolescentes. **VII Congresso Iberoamericano de Informática Educativa**, 2004.
- SILVA, A. F. da. Uma metodologia de aprendizado com robótica educacional. *In*: SILVA, A. F. da. **Uma metodologia de aprendizado com robótica**

educacional. 2009. Dissertação (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009. f. 127.

APÊNDICE

As equações usadas para traduzir o torque em função da massa tracionada no guindaste, ou para traduzir a velocidade angular em velocidade linear tomaram por suposição que a polia possui raio constante:

$$T = F \cdot r$$

$$V = \omega \cdot r$$

Porém, ao inspecionar a geometria da polia em questão, observamos que existem ressaltos internos que tornam o comprimento equivalente a uma volta diferente de uma circunferência:

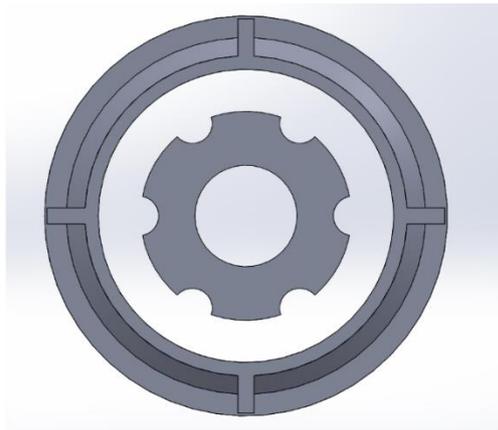


Figura 41 – Visão em corte transversal para visualização da geometria

Fonte: elaborada pelo autor.

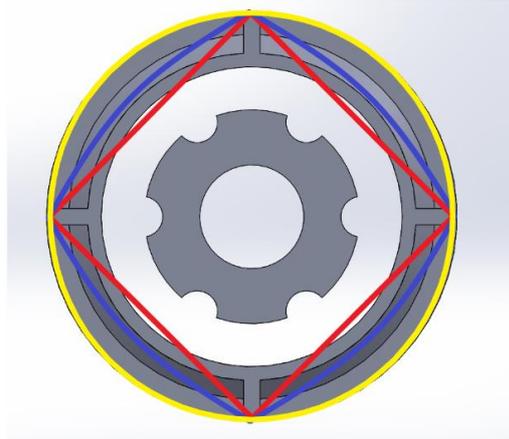


Figura 42 – Visão com comparações geométricas provando visualmente a diferenciação da circunferência formal com a real. Azul: comprimento de enrolamento real

Fonte: elaborada pelo autor.

Uma abordagem com aproximações cabe bem em certas análises, dependendo da precisão requerida para seus resultados, sendo que é preciso ter consciência de que erros surgirão ao final da resposta. Caso queira empregar meios mais precisos, deve-se utilizar um comprimento mais realista, abordado na imagem acima no traço de cor azul.

Abaixo, segue um cálculo explícito de um modelo mais aproximado para medição desse comprimento:

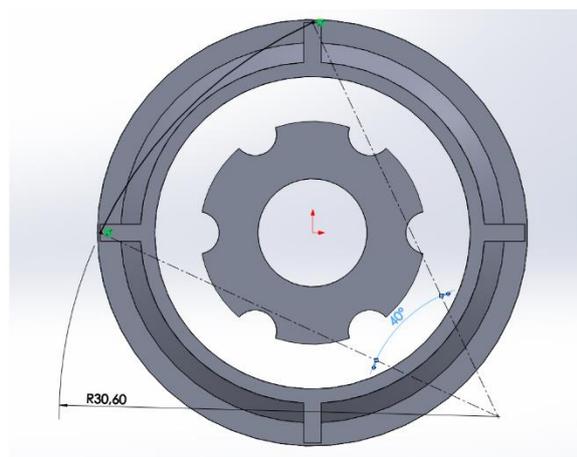


Figura 43: Parametrização do arco que contempla um quarto da volta

Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos então calcular o comprimento desse arco e multiplicá-lo por quatro:

$40^\circ = X$ [radianos]. Sabemos que $2 \cdot \pi$ corresponde a -360° e x corresponde a -40° , então resolvendo a proporção temos:

$$X = 0,69813 \text{ [radianos]}$$

$$\text{Comprimento do arco} = X \cdot \text{raio} = 0,69813 \cdot 3,06 = 2,1363 \text{ [cm]}$$

$$\text{Comprimento total} = 2,1363 \cdot 4 = 8,5452 \text{ [cm]}$$

Podemos calcular o comprimento através da formulação de uma circunferência para perceber o erro relativo entre ambos os modelos: *Comprimento aprox.* =

$$2 \cdot \pi \cdot \text{raio} = 2 \cdot 3,14159 \cdot 1,48 = 9,2991 \text{ [cm]}$$

$$\text{Erro}_{\text{relativo}} = \frac{|8,5452 - 9,2991|}{8,5452} = 8,82\%$$

Podemos observar um erro menor que 10%, o que indica que o modelo aproximado mostra-se adequado para uma vasta gama de usos e pode ser aplicado na formulação geral sem grandes problemas.