

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Contagem de Semigrupos Numéricos de mesmo Gênero por meio de Gapsets

por

Juci Melim Junior

Orientador: Matheus Bernardini de Souza

Brasília
2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Contagem de Semigrupos Numéricos de mesmo Gênero por meio de Gapsets

por

Juci Melim Junior

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB - Membro

Prof. Dr. Wanderson Tenório - IME/UFG - Membro

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mc Melim Junior, Juci
Contagem de Semigrupos Numéricos de mesmo Gênero por
meio de Gapsets / Juci Melim Junior; orientador Matheus
Bernardini de Souza. -- Brasília, 2020.
50 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. semigrupos numéricos. 2. gapset. 3. gênero. 4.
profundidade. 5. lacunas. I. Bernardini de Souza, Matheus,
orient. II. Título.

Ao meu orientador Matheus

Agradecimentos

Ao professor Matheus Bernardini de Souza, por ser um orientador tão incrível e um ser humano tão maravilhoso. Agradeço por tanto conhecimento compartilhado, pela paciência, pelas sugestões e pelos problemas propostos e resolvidos. Ter encontrado o Matheus nos caminhos da vida, e da matemática, foi um privilégio. Ter tido aulas com ele durante o mestrado e ter a honra de tê-lo como orientador foi muito mais do que eu merecia. Nunca me esquecerei de todos os encontros, os cafés, as discussões e o bom humor que ele emana em absolutamente todos os dias. Devo cada pedacinho desse trabalho a você, Matheus.

Aos demais membros da banca examinadora, formada pelos professores doutores Vinicius Rispoli e Wanderson Tenório por terem aceitado avaliar o meu trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em particular, gostaria de citar novamente o professor Vinicius Rispoli, por ter sido meu professor e coordenador do curso. Você fez nossas vidas muito mais fáceis e agradáveis. Bom seria se todos os cursos tivessem coordenadores e professores como você. Agradeço também ao professor Antônio, por ter lecionado algumas disciplinas no curso e por ter me apoiado incondicionalmente num momento de vida muito complicado. Se estou concluindo o curso, é graças a você, professor. Também, agradeço aos demais professores com os quais tive o prazer de ter aulas no PROFMAT.

Aos meus amigos, por me proporcionarem momentos maravilhosos na vida fora da UnB e por acreditarem em mim. Aos novos amigos que fiz no mestrado, por todo apoio durante todo o caminho. Essa turma é maravilhosa! Estudamos juntos, sofremos juntos, comemoramos juntos. Foi um prazer imenso ter conhecido cada um de vocês. Cada dia de aula ficava mais iluminado porque eu sabia que teríamos nossos momentos de compartilhamento e amizade.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio e por manter um Mestrado Profissional tão importante e de tão alto nível.

Resumo

O principal objetivo do presente trabalho é estudar o comportamento dos semigrupos numéricos com profundidade $q \leq 3$ e gênero fixado por meio das características do conjunto de suas lacunas (gapsets). Em 2008, Maria Bras-Amorós [1] apresentou três conjecturas sobre semigrupos numéricos, quais sejam: 1) O número de semigrupos numéricos de gênero g fixado, denotado por n_g , satisfaz a seguinte relação para todo $g \geq 2$, $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$; 2) $\lim_{g \rightarrow \infty} n_g/n_{g-1} = \varphi$, em que φ é a razão áurea; e 3) $\lim_{g \rightarrow \infty} (n_{g-1} + n_{g-2})/n_g = 1$. Zhai [2] demonstrou que as duas últimas conjecturas realmente procedem usando o fato de que a maioria dos semigrupos numéricos de gênero fixado são tais que $q \leq 3$. A primeira conjectura segue em aberto. Mesmo uma versão mais fraca dela, $n_g \geq n_{g-1}$, ainda não foi provada (Zhai [2] demonstrou que essa desigualdade vale para gêneros suficientemente grandes). No presente trabalho, vamos apresentar os principais resultados de Eliahou e Fromentin [3] para o caso em que $q \leq 3$. Esses autores demonstraram, entre outras coisas, que a primeira conjectura de Bras-Amorós vale quando são considerados apenas os semigrupos com $q \leq 3$. Esse resultado permite avançar na busca pela demonstração da conjectura e amplia os horizontes dessa área da Teoria dos Números.

Palavras-chave: semigrupos numéricos, gapset, gênero, profundidade, lacunas.

Abstract

The main objective of this work is to study the behavior of numerical semigroups with depth $q \leq 3$ and genus fixed through the characteristics of the set of their gaps (gapsets). In 2008, Maria Bras-Amorós [1] presented three conjectures about numerical semigroups, namely: 1) The number of numerical semigroups of the genus fixed g , denoted by n_g , satisfies the following relation for all $g \geq 2$, $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$; 2) $\lim_{g \rightarrow \infty} n_g/n_{g-1} = \varphi$, where φ is the golden ratio; and 3) $\lim_{g \rightarrow \infty} (n_{g-1} + n_{g-2})/n_g = 1$. Zhai [2] demonstrated that the last two conjectures really proceed using the fact that most numerical semigroups with fixed genus are such that $q \leq 3$. The first conjecture remains open. Even a weaker version of it, $n_g \geq n_{g-1}$, has not yet been proven (Zhai [2] demonstrated that this inequality holds for sufficiently large genus). In the present work, we will present the main results of Eliahou and Fromentin [3] for the case where $q \leq 3$. These authors demonstrated, among other things, that the first Bras-Amorós conjecture holds when only semigroups with $q \leq 3$ are considered. This result allows us to advance in the search for demonstrating the conjecture and broadens the horizons of this area of Number Theory.

Keywords: numerical semigroups, gapset, genus, depth, gaps.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Semigrupos Numéricos	3
1.2 Invariantes de um Semigrupo Numérico	4
1.3 Algumas Relações entre as Invariantes	6
1.4 A Árvore de Semigrupos Numéricos	10
2 Gapsets	13
2.1 Definição de Gapsets	13
2.2 A Árvore de Semigrupos em termos de Gapsets	14
2.3 A Partição Canônica	15
2.4 m -Extensões e m -Filtrações	16
2.5 Filtrações de Gapsets	18
3 Semigrupos Numéricos e Gapsets de $q \leq 3$	20
3.1 O caso $q \leq 2$ usando contagem	20
3.2 O caso $q \leq 2$ usando gapsets e bijeções	22
3.3 Uma cota inferior para n'_g	26
3.4 Uma cota superior para n'_g	29
4 Considerações Finais	36
Considerações Finais	36
Referências Bibliográficas	41

Introdução

Um Semigrupo Numérico (S) é um subconjunto de $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ que satisfaz três propriedades: P1) $0 \in S$; P2) S é um conjunto fechado para a adição, ou seja, se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$; e P3) o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito. O gênero de S é a quantidade de elementos de $\mathbb{N}_0 \setminus S$. Neste trabalho, objetivamos contar a quantidade de semigrupos numéricos de gênero dado.

Semigrupos numéricos são importantes não só na Teoria dos Números, mas para muitas outras áreas da matemática, como curvas algébricas, por exemplo. Além disso, considerando que semigrupos numéricos não demandam, em geral, matemática avançada, mas tão somente raciocínio lógico e construção de boas ideias, é bastante factível trabalhar tais conceitos desde o ensino da matemática básica, para desenvolver nos alunos a criatividade e o pensamento lógico, até em nível de doutorado. Frise-se que não há muitos trabalhos em língua portuguesa sobre semigrupos numéricos, inclusive talvez esse seja o primeiro a trazer especificamente a ideia de gapsets. Nesse sentido, espera-se que o presente trabalho possa ser de grande valia para a disseminação e a evolução do conhecimento na área.

Nas últimas duas décadas, muitos autores como em [1], [3, 4, 5, 6] encontraram várias relações e propriedades dos semigrupos numéricos. No entanto, há, ainda, diversas questões em aberto, o que promoveu também a formulação de várias conjecturas nesses mesmos trabalhos. Trataremos, nesse trabalho, mais especificamente dos resultados encontrados por Eliahou e Fromentin [3] para o caso em que a profundidade dos semigrupos numéricos é de no máximo 3.

Algumas notações, bastante comuns em Teoria dos Números, serão empregadas no presente trabalho. Seguem elas:

Notação 0.1. *Todas as representações de intervalos numéricos, a menos que seja indicado o contrário, se referem a conjuntos de números inteiros. Assim, para uma escrita mais enxuta, vamos representar conjuntos de números inteiros da seguinte forma:*

$$\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\} = [a, \infty)$$

com a e $b \in \mathbb{Z}$.

Notação 0.2. Usaremos a soma de um número com um conjunto para indicar que cada elemento daquele conjunto está somado desse número, da seguinte forma:

$$x + A = \{x + a : a \in A\}$$

com x e $a \in \mathbb{Z}$.

Dividimos o nosso trabalho em três capítulos, a saber:

- **Capítulo 1: Preliminares.** Nesse capítulo, definimos o que são semigrupos numéricos de duas formas diferentes, uma que usa as propriedades P1 - P3, apresentadas acima, e outra que se vale de seus geradores. Também determinamos que a definição por meio das propriedades será a mais usada no presente trabalho. Na sequência, apresentamos as principais invariantes dos semigrupos numéricos (multiplicidade, condutor, número de Frobenius, gênero, dimensão, profundidade e peso) e provamos algumas propriedades interessantes entre elas. Por fim, apresentamos a árvore de semigrupos numéricos representados pelo conjunto minimal de seus geradores. A árvore apresentada dessa forma é usada por Maria Brás-Amoros [4] para demonstrar vários resultados importantes.
- **Capítulo 2: Gapsets.** No capítulo 2 introduzimos a noção de gapsets, que nada mais são do que conjuntos cada qual com as lacunas de determinado semigrupo numérico. Com isso, passa-se a trabalhar com os semigrupos por intermédio do seu conjunto de lacunas. A vantagem é que o conjunto de lacunas de um semigrupo numérico é sempre finito e, com isso, a manipulação algébrica pode se mostrar mais facilitada, como podemos verificar nos trabalhos de Zhao [6] e Eliahou e Fromentin [3]. Na sequência é rerepresentada a árvore de todos os semigrupos numéricos, mas agora por meio de seu conjunto de lacunas. Segue-se com a definição de partição canônica de um gapset. Também são definidas as m -extensões e as m -filtrações, para se chegar às filtrações de gapsets, que encerram esse capítulo.
- **Capítulo 3: Semigrupos Numéricos de $q \leq 3$.** O capítulo 3 é o coração do trabalho e vai desenvolver os principais resultados demonstrados inicialmente por Eliahou e Fromentin [3] sobre as cotas inferior e superior para a quantidade de semigrupos numéricos existentes com profundidade $q \leq 3$. Esses resultados são importantes porque indicam caminhos possíveis de serem trilhados para se chegar às demonstrações de conjecturas mais fortes e ainda não provadas feitas anteriormente. O capítulo se inicia com o caso $q \leq 2$ e sua relação com os números da sequência de Fibonacci, para chegar, finalmente, ao caso $q \leq 3$, que representa os melhores resultados encontrados até o momento na teoria dos semigrupos numéricos.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é definir os semigrupos numéricos, apresentar suas principais invariantes e algumas de suas propriedades, e apresentar a árvore de todos os semigrupos numéricos e como ela é construída usando recursividade.

1.1 Semigrupos Numéricos

Há algumas formas de definir semigrupos numéricos, uma delas é por suas propriedades. Essa é a forma que será mais utilizada no decorrer desse trabalho e pode ser colocada assim:

Definição 1.1. *Considerando que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, um Semigrupo Numérico S é um subconjunto de $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ que satisfaz três condições:*

P1. $0 \in S$;

P2. S é um conjunto fechado para a adição, ou seja, se $x \in S$ e $y \in S$, então $x+y \in S$;

P3. o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.

Essa definição é equivalente a dizer que um Semigrupo Numérico S é um submonóide aditivo de \mathbb{N}_0 em que $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito.

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1.1. *Seja o conjunto S_1 definido da seguinte forma:*

$$S_1 = \{0\} \cup [g + 1, \infty)$$

com $g \in \mathbb{N}$. Perceba que S_1 satisfaz as condições para ser um Semigrupo Numérico, uma vez que $0 \in S_1$, S_1 é claramente fechado para a adição, e que $\mathbb{N}_0 \setminus S_1 = \{1, 2, 3, \dots, g\}$.

Observação 1.1. *Semigrupos Numéricos com essa característica de conter apenas o 0 e todos os naturais maiores que um natural g são chamados de Semigrupos Numéricos Ordinários.*

Exemplo 1.2. *Seja o conjunto S_2 definido da seguinte forma:*

$$S_2 = \{0, 2, 4, \dots, 2g - 2\} \cup [2g, \infty)$$

com $g \in \mathbb{N}$. Novamente, S_2 satisfaz as condições de Semigrupo Numérico, uma vez $0 \in S_2$, S_2 é fechado para a adição e seu complemento em relação aos naturais é finito, com $\mathbb{N}_0 \setminus S_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2g - 1\}$.

Observação 1.2. *Semigrupos Numéricos com essa característica de não conter todos os naturais ímpares menores que um natural $2g$ são chamados de Semigrupos Numéricos Hiperelípticos.*

Outra forma de definir tais conjuntos é por meio de seus geradores. A exposição de forma mais rigorosa desse modo de definição será feita mais adiante. Para entender melhor esse conceito, fazemos uso do exemplo das moedas de Frobenius [7]. Imagine uma nação em que o dinheiro é constituído por apenas dois tipos de moedas, uma de valor a e outra de valor b , com $\text{mdc}(a,b)=1$. Quais poderiam ser os valores dos produtos nesse país caso não fosse possível devolver troco? O conjunto desses valores formaria um semigrupo numérico e, nesse caso, dizemos que o semigrupo é gerado por a e b . O número de geradores pode ser, obviamente, maior que 2 desde que o mdc entre todos os geradores seja 1, para garantir que o conjunto complementar de S em relação a \mathbb{N}_0 seja finito, que é uma das condições para que S seja um semigrupo numérico.

Essas duas formas de definir semigrupos numéricos são equivalentes, cada uma sendo mais indicada para algum tipo de desenvolvimento da teoria. Para o presente trabalho, como já destacado, vamos usar a primeira definição, que identifica os semigrupos numéricos por meio de suas propriedades.

1.2 Invariantes de um Semigrupo Numérico

Há algumas invariantes que são importantes para o desenvolvimento da teoria dos semigrupos numéricos. Vamos às suas definições.

Definição 1.2. *Seja um semigrupo numérico S . A multiplicidade m de S é seu menor elemento diferente de zero. O condutor c , por sua vez, é o menor elemento pertencente a S tal que todos os números naturais maiores que ou iguais a ele também pertencem a S . O número de Frobenius f é o maior natural não pertencente à S . Por essa razão, o número de Frobenius é sempre dado por $f = c - 1$. No caso particular em que o semigrupo coincide com \mathbb{N}_0 , temos, por convenção, que $f = -1$.*

Definição 1.3. *Como todo semigrupo numérico S é tal que o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ é finito, chamamos esse conjunto finito de números naturais de conjunto das lacunas de S . Denotaremos esse conjunto por $G(S)$. Os elementos de $G(S)$ são chamados de lacunas e os elementos de S de não-lacunas do semigrupo numérico. O número de elementos de $G(S)$ é o gênero do S e nós o denotaremos por g .*

O gênero de um semigrupo numérico será de fundamental importância para o presente trabalho, uma vez que o objetivo aqui é justamente procurar o número de semigrupos numéricos com gênero g fixado.

Como dissemos na seção anterior, todo semigrupo numérico pode ser definido por meio de seus geradores. Donde temos a seguinte definição:

Definição 1.4. *Dizemos que um semigrupo numérico S é gerado pelo conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ se, dado $s \in S$, existem $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{N}_0$ tais que $s = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$. Nesse caso, escrevemos $S = \{a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n : X_i \in \mathbb{N}_0\}$ e denotamos por $S = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.*

No Lema 2.1 do livro [8], os autores mostram que, dados os inteiros positivos a_1, a_2, \dots, a_n , o conjunto $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, para garantir que o conjunto complementar de S em relação a \mathbb{N}_0 seja finito. Se não existe um subconjunto próprio de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ que gera S , dizemos que aquele é um conjunto minimal de geradores. É possível provar que o conjunto minimal de geradores de um semigrupo numérico é único.

Definição 1.5. *Damos à quantidade mínima de geradores de um determinado semigrupo S o nome de dimensão de S , normalmente denotada por e .*

Outras duas invariantes dos semigrupos numéricos são o que vamos chamar de profundidade (do inglês *depth*) e o peso (do inglês *weight*).

Definição 1.6. *Seja um semigrupo numérico S de multiplicidade m e condutor c . A profundidade, aqui denotada por q , é definida por:*

$$q = \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil$$

Ou seja, a profundidade é o menor inteiro maior que ou igual a c/m .

Por sua vez, o peso, comumente denotado por w , é definido por:

$$w(S) = \sum_{i=1}^g (l_i - i),$$

em que l_i é o i -ésimo elemento de $G(S)$, com $l_1 < l_2 < \dots < l_g$, e g é o gênero do semigrupo numérico S .

Para clarificar um pouco as coisas, vamos fazer um exemplo.

Exemplo 1.3. *Seja $S = \{0, 7, 10\} \cup [14, \infty)$. Nesse caso, temos que S é um semigrupo numérico em que:*

(a) *A multiplicidade de S é $m = 7$;*

(b) *O condutor é $c = 14$, logo $f = 13$;*

(c) *O gênero de S é $g = 11$ e $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13\}$;*

(d) *A profundidade é $q = \lceil \frac{c}{m} \rceil = 2$;*

(e) *O peso de S será dado por:*

$$\begin{aligned} w(S) &= \sum_{i=1}^g (l_i - i) = (1 - 1) + (2 - 2) + (3 - 3) \\ &+ (4 - 4) + (5 - 5) + (6 - 6) + (8 - 7) + (9 - 8) \\ &+ (11 - 9) + (12 - 10) + (13 - 11) \\ &= 8 \end{aligned}$$

(f) *Para determinar a dimensão de S , precisamos encontrar o conjunto minimal de geradores. No caso, esse conjunto seria $\{7, 10, 15, 16, 18, 19\}$. Uma forma de se encontrar esse conjunto é procurando pelos menores números em S para cada resto distinto de 7 (multiplicidade de S). Por exemplo, se $s \in S$ e $s = 7k$ (ou seja, s deixa resto zero na divisão por 7), com $k \in \mathbb{N}_0$, o menor valor possível para s é 7. Para $s \in S$ e $s = 1 + 7k$, com $k \in \mathbb{N}_0$, o menor valor possível para s é 15. Repetindo esse procedimento, encontramos todos os geradores. Note que, para $s \in S$ e $s = 6 + 7k$, com $k \in \mathbb{N}_0$, temos que $s \geq 20$ e $s = 10 + 10 + 7k$. Desse modo, não é necessário encontrar um $s \in S$ que deixe resto 6 na divisão por 7. Portanto, a dimensão de S é $e = 6$.*

1.3 Algumas Relações entre as Invariantes

Passamos agora a apresentar algumas relações entre as invariantes de um semigrupo numérico S . Essa seção é baseada no trabalho de Bernardini [9].

Proposição 1.1. *Seja S um semigrupo numérico de condutor c . Se $k \in S$, então $c - 1 - k \notin S$.*

Demonstração: Temos, por hipótese, que $k \in S$. Suponha, por absurdo, que $c - 1 - k \in S$. De acordo com (P2), teríamos que $(c - 1 - k) + k = c - 1 \in S$, o que é claramente uma contradição. ■

Proposição 1.2. *Seja um Semigrupo Numérico S de gênero g , então $[2g, \infty) \subset S$.*

Demonstração: Se $g = 0$, então $S = \mathbb{N}_0$, o que garante a implicação dada. Se $g \geq 1$, então há pelo menos g não-lacunas no conjunto $\{1, 2, \dots, 2g\}$, pois, do contrário, S teria mais de g lacunas, o que contradiz o enunciado. Chamemos essas não-lacunas de $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_g$ e vamos supor que existe alguma lacuna $l \geq 2g$. Sendo assim, teríamos que todos os números $l - \rho_i$ com $1 \leq i \leq g$ seriam lacunas, porque cada ρ_i é não-lacuna e S é fechado para adição. Assim, caso existisse alguma lacuna $l \geq 2g$, teríamos no mínimo $g + 1$ lacunas. Uma contradição. Portanto, todas as lacunas de S são menores que $2g$. ■

Corolário 1.1. *Seja n_g o número de semigrupos numéricos de gênero g . Se $g \geq 1$ então:*

$$n_g \leq \binom{2g-2}{g-1}$$

Demonstração: Seja S um semigrupo numérico com $g \geq 1$. Perceba que 1 é uma lacuna de S . Além disso, como disposto na Proposição 1.2, todas as lacunas são menores que $2g$. Portanto, temos $2g - 2$ possíveis lacunas e temos que escolher, entre essas, as $g - 1$ restantes, o que garante a desigualdade dada. ■

É fácil perceber que essa cota superior não é ótima, como deixa claro o seguinte exemplo.

Exemplo 1.4. *Sejam $g = 3$ e o conjunto $R = \{0, 2, 5\} \cup [6, \infty)$. Temos um conjunto em que foram escolhidas 2 lacunas ($g - 1$) dentre as 4 possíveis ($2g - 2$). No entanto, R não é semigrupo numérico, uma vez que $2 \in R$, mas $4 = 2 + 2 \notin R$. Portanto, $n_3 < \binom{4}{2}$. De fato, $n_3 = 4$ e $\binom{4}{2} = 6$.*

Na verdade, essa cota superior é bastante “ruim”. Já foram definidas cotas melhores, como em [2], [4], [6], [10] e [11]. Todas, ainda, bastante distantes do valor exato.

Na sequência, vamos desenvolver um pouco mais o conceito dos geradores dos semigrupos numéricos. Geradores são importantes em vários momentos, e serão especialmente úteis no presente trabalho mais a frente, quando apresentarmos a árvore dos semigrupos numéricos.

Proposição 1.3. *Todo semigrupo numérico é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja S um semigrupo numérico com gênero g . Escreva $S \cap \{1, \dots, 2g - 1\} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g\}$. Afirmamos que $\Gamma := \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g, 2g, 2g + 1, \dots, 4g - 1\}$ é um conjunto de geradores de S . De fato, para todo $s \in S$ tal que $s < 4g$, temos que $s \in \Gamma$. Para $s \geq 4g$, usando o algoritmo da divisão de Euclides e fazendo uma pequena manipulação algébrica, podemos escrever $s = (k - 1) \cdot 2g + l$, em que $k = \left\lfloor \frac{s}{2g} \right\rfloor \geq 2$ e $2g \leq l \leq 4g - 1$. Portanto, s é uma combinação linear de dois elementos de Γ (quais sejam, $2g$ e l), com coeficientes positivos, de modo que podemos concluir que Γ é um conjunto de geradores, não necessariamente minimal, de S . ■

Como já dito, o número de elementos de um conjunto minimal de geradores de S é chamado de dimensão $e(S)$. A Proposição 1.3 nos assegura que $e \leq 3g$.

Observação 1.3. *É possível provar a Proposição 1.3 utilizando conjuntos de Apéry. Nesse caso, demonstra-se que $e \leq m \leq g + 1$, ou seja, uma cota superior um pouco melhor que $3g$.*

Corolário 1.2. *Todo semigrupo numérico ordinário S de gênero g tem como conjunto minimal de geradores $[g + 1, 2g + 1]$.*

Demonstração: Se S é ordinário de gênero g , temos que $G(S) = [1, g]$. Assim, se $s \in S$ e $g + 1 \leq s \leq 2g + 1$, temos que, se $s = x + y$, com $x \leq y \in \mathbb{N}$, necessariamente $x \leq g$ e portanto $x \notin S$, o que faz com que s tenha que ser um gerador. Por outro lado, se $s_1 > 2g + 1$, s_1 sempre pode ser escrito como $s_1 = 2g + 1 + l$, com $l \in \mathbb{N}$. Podemos escrever s_1 usando a divisão euclidiana por $g + 1$ da seguinte forma: $s_1 = (g + 1) \cdot q + r$, com $r \in [0, g]$ e $q \geq 2$ uma vez que $s_1 \geq 2g + 2$. Reescrevemos s_1 como $s_1 = (g + 1) \cdot (q - 1) + (g + 1 + r)$, com $g + 1 + r \in [g + 1, 2g + 1]$ e $q - 1 \geq 1$. Veja que, assim, s_1 pode ser escrito como a soma de dois inteiros em S , portanto, s_1 não pode ser um gerador minimal de S . ■

A próxima proposição define fronteiras para o valor do condutor de um semigrupo numérico em função de seu gênero.

Proposição 1.4. *Seja S um semigrupo numérico de condutor c e gênero g , então:*

$$g + 1 \leq c \leq 2g$$

Demonstração: A segunda desigualdade é decorrência imediata da Proposição 1.2. Para determinarmos a primeira desigualdade, suponha que exista um semigrupo numérico com condutor c e gênero g tais que $c \leq g$. Mas, desse modo, o número máximo de lacunas seria $g - 1$ (porque 0 nunca é lacuna e não há lacunas maiores que

ou iguais a c), o que é uma contradição e, portanto $c > g$. De fato, é fácil ver que a maior quantidade de lacunas ocorre quando $G(S) = \{1, 2, \dots, c - 1\}$, ou seja, quando $g = c - 1$ e, portanto, $g + 1 \leq c$.

■

Essas duas cotas para o condutor c em função do gênero g são as melhores possíveis. De fato, podemos construir dois exemplos simples que nos garantem isso.

Exemplo 1.5. *Sejam os Semigrupos Numéricos S_1 e S_2 , com condutores e gêneros, respectivamente, c_1 e c_2 , g_1 e g_2 , tais que:*

$$S_1 = \{0\} \cup [2019, \infty)$$

$$S_2 = \{0, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22\} \cup [24, \infty)$$

No primeiro caso, temos que $g_1 + 1 = c_1 = 2019$. Já no segundo, $c_2 = 2g_2 = 24$.

Observação 1.4. *Todo semigrupo numérico S em que $c = g + 1$ é ordinário. De fato, basta notar que a única possibilidade para o conjunto de lacunas de S é $G(S) = [1, g]$, ou seja, $S = \{0\} \cup [g + 1, \infty)$.*

Observação 1.5. *Semigrupos numéricos em que $c = 2g$ são chamados de semigrupos numéricos simétricos.*

Observação 1.6. *Todo semigrupo numérico hiperelíptico é simétrico, mas a volta não vale, como fica claro no Exemplo 1.5.*

É fácil ver que todo semigrupo numérico hiperelíptico pode ser escrito como $\langle 2, 2g + 1 \rangle$. Temos também outros semigrupos simétricos, não hiperelípticos, com apenas dois geradores. É o caso, por exemplo, do semigrupo numérico $\langle 3, 4 \rangle$, já que, nesse caso, $c = 6$ e $g = 3$. Para semigrupos numéricos cujo conjunto minimal de geradores possui apenas dois elementos, foram demonstrados em [7] vários resultados. Se $S = \langle a, b \rangle$, então $c(S) = (a - 1)(b - 1)$ e $g(S) = (a - 1)(b - 1)/2$. Com isso, temos que todo semigrupo numérico gerado por apenas dois geradores é simétrico. A volta não vale, como podemos ver no Exemplo 1.5, em que o conjunto minimal de geradores é $\{6, 7, 15\}$.

Também podemos encontrar um limitante para a multiplicidade de um semigrupo numérico em função de seu gênero, como podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 1.5. *Seja S um semigrupo numérico com gênero g e multiplicidade m . Então $m \leq g + 1$.*

Demonstração: Se $m \geq g + 2$, teremos que S tem, no mínimo, $g + 1$ lacunas, o que é claramente uma contradição, de modo que segue o resultado.

■

Observação 1.7. *Os semigrupos numéricos ordinários são os com multiplicidade máxima, em relação ao gênero, uma vez que, nesses casos, $m = g + 1$.*

Proposição 1.6. *Seja S um semigrupo numérico com gênero $g \geq 1$ e profundidade q . Então $1 \leq q \leq g$.*

Demonstração: Sejam m e c a multiplicidade e o condutor de S , respectivamente. Se $g \geq 1$, temos que $m \geq 2$, porque caso $m = 1$, temos necessariamente que $g = 0$. Assim

$$1 = \frac{m}{m} \leq \frac{c}{m} \leq \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil \leq \frac{2g}{2} = g,$$

onde a última relação é resultado da Proposição 1.4 e do fato de que $m \geq 2$. Portanto, $1 \leq \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil = q \leq g$.

■

1.4 A Árvore de Semigrupos Numéricos

Vamos introduzir agora a árvore de semigrupos numéricos. Inicialmente ela será apresentada com a exposição dos geradores do semigrupo. Posteriormente, no próximo capítulo, veremos sua versão em função das lacunas. A árvore de semigrupos numéricos foi apresentada formalmente por Bras-Amorós [4], em 2009. Cada semigrupo numérico é apresentado uma única vez e a construção da árvore se mostra bastante intuitiva. Cada nível da árvore explicita todos os semigrupos numéricos com mesmo gênero.

Sigamos com uma ideia de como construir a árvore, baseado em [4]. O conjunto minimal de geradores e o número de Frobenius do semigrupo numérico representam um papel fundamental. Na árvore, os geradores minimais maiores que o número de Frobenius aparecerão, assim, em negrito. A “raiz” da árvore (na verdade, é uma árvore invertida) é o conjunto \mathbb{N}_0 , uma vez que esse conjunto é o único semigrupo numérico de gênero 0 e pode ser escrito como $\langle 1 \rangle$. Nesse caso, convencionamos que o número de Frobenius desse semigrupo é -1 . Para o próximo nível, retira-se o elemento 1 (gerador maior que o número de Frobenius), criando-se o semigrupo $\langle 2, 3 \rangle$. Fica da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \langle \mathbf{1} \rangle \\ | \\ 1 \\ | \\ \langle \mathbf{2}, \mathbf{3} \rangle \end{array}$$

Para os semigrupos numéricos ordinários, o procedimento é retirar o menor gerador do semigrupo numérico ordinário anterior. Essa parte da árvore é feita em separado porque o conjunto minimal dos geradores dos semigrupos numéricos ordinários aumenta em um elemento de um nível da árvore para outro, os outros ramos da árvore preservam o número de elementos do conjunto de geradores minimais ou diminuem esse número em uma unidade, dependendo do caso.

Assim, para os semigrupos numéricos ordinários, temos o seguinte lema:

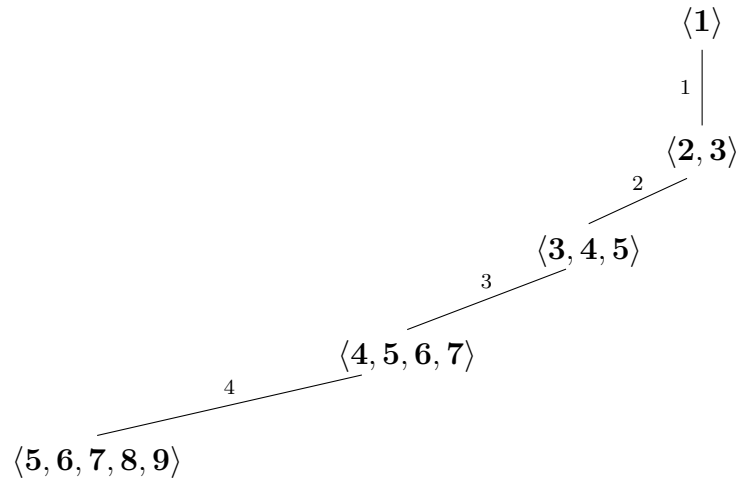
Lema 1.1. *Considere o semigrupo numérico ordinário de gênero g : $S = \langle g+1, \dots, 2g+1 \rangle$. Então:*

$$S' = S \setminus \{g+1\} = \langle g+2, \dots, 2g+3 \rangle$$

é um semigrupo numérico ordinário de gênero $g+1$.

Demonstração: Veja que, pelo Corolário 1.2, S' é um semigrupo numérico ordinário e que o gênero de S' é $g+1$. Ou seja, $S' = \langle (g+1)+1, \dots, 2(g+1)+1 \rangle = \langle g+2, \dots, 2g+3 \rangle$. ■

Assim, o ramo que contém todos os semigrupos numéricos ordinários na árvore fica dessa forma:



Para a construção do restante da árvore, o procedimento consiste em retirar, um de cada vez, os geradores maiores que o número de Frobenius, quando houver algum, do nível anterior para criar o próximo nível. Para tanto, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.7. *Seja $S = \langle \mu_1 < \dots < \mu_{i-1} < \mu_i < \dots < \mu_k \rangle$ um semigrupo numérico de gênero g de forma que os geradores de S que são maiores que o número de Frobenius, quando existirem, sejam μ_i, \dots, μ_k . Assuma que S é não-ordinário ou S é ordinário e $2 \leq i \leq j \leq k \in \mathbb{N}$. Então:*

$$S' = S \setminus \{\mu_j\} = \langle \mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_k, \mu_1 + \mu_j \rangle$$

é um semigrupo numérico (não-ordinário) de gênero $g + 1$.

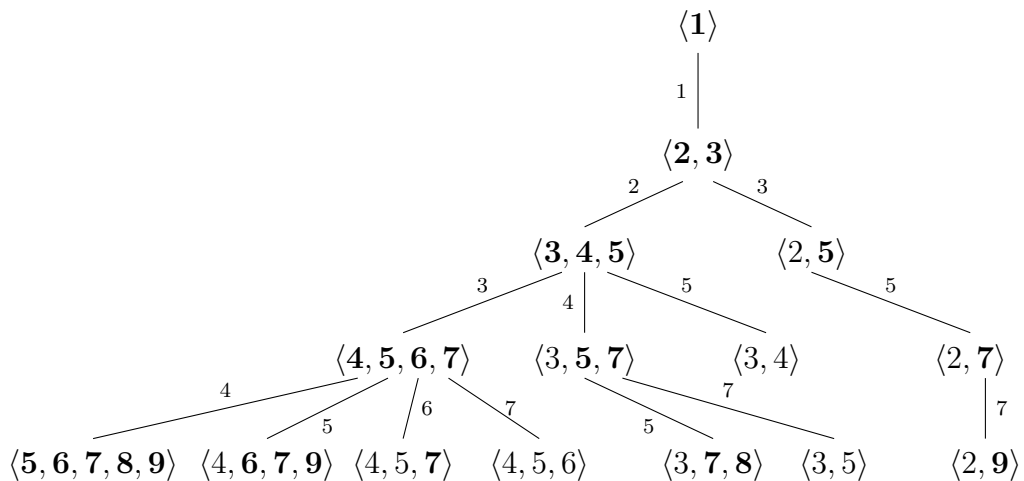
Demonstração: Inicialmente é possível concluir que todos os elementos que eram geradores minimais de S , com exceção de μ_j , continuam sendo geradores minimais de S' , já que não podem ser escritos como a soma de dois elementos de S' . O número de Frobenius de S' passa a ser μ_j . Além disso, o novo gerador minimal, caso necessário, deve ser da forma $\mu_j + \mu_s$, com $s \in \{1, \dots, k\}$ e $s \neq j$, pois, do contrário, tal elemento de S' pode ser escrito como a soma de outros dois elementos desse semigrupo numérico e, portanto, não pode ser um gerador minimal de S' .

Mas se $\mu_s > \mu_1$, então $\mu_j + \mu_s - \mu_1 > \mu_j \in S'$, ou seja, $\mu_j + \mu_s = \mu_1 + x$ com $x \in S'$, logo $\mu_j + \mu_s$ não pode ser um gerador minimal de S' se $s > 1$. A conclusão é que o único novo gerador minimal de S' , quando existir, será $\mu_j + \mu_1$.



Observação 1.8. *Nem sempre o gerador $\mu_1 + \mu_j$ é necessário no conjunto minimal de geradores. Por exemplo, dado o semigrupo numérico $\langle 3, 4, 5 \rangle$, ao se retirar o gerador 5, não é necessário incluir o gerador $3 + 5 = 8$, uma vez que $8 = 4 + 4$ e 4 já é gerador no novo semigrupo numérico. Nesse caso, o novo semigrupo fica sendo $\langle 3, 4 \rangle$.*

Realizando o procedimento descrito na proposição acima, chegamos à árvore completa de semigrupos numéricos. A seguir, temos a árvore até o nível $g = 4$. Em negrito, o geradores maiores que o número de Frobenius em cada nível, que serão retirados para dar origem ao nível seguinte.



Capítulo 2

Gapsets

Neste capítulo apresentamos os gapsets e suas propriedades. Uma das motivações para tanto é mostrar que pensar em termos de gapsets ao invés de semigrupos numéricos pode ajudar no desenvolvimento dessa área da Matemática. Gapsets podem ser manipulados e transformados de maneiras não permitidas para semigrupos numéricos. A base desse capítulo é o trabalho de Eliahou e Fromentin [3].

2.1 Definição de Gapsets

Definição 2.1. *Um gapset é um conjunto finito $G \subset \mathbb{N}$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo $z \in G$, se $z = x + y$ com $x, y \in \mathbb{N}$, então $x \in G$ ou $y \in G$.*

Lema 2.1. *Seja S um semigrupo numérico. Então $G = \mathbb{N} \setminus S$ é um gapset. Reciprocamente, seja G um gapset. Então $S = \mathbb{N}_0 \setminus G$ é um semigrupo numérico.*

Demonstração: De fato, se S é um semigrupo numérico e $G = \mathbb{N} \setminus S$, com $S \subset \mathbb{N}_0$ e $G \subset \mathbb{N}$ e G finito, então se $z \notin S$ é um número natural (ou seja, $z \in G$) e $z = x + y$ com x e y inteiros não negativos, temos que ter que $x \notin S$ ou $y \notin S$, já que S é fechado em relação à soma. Ou seja, $x \in G$ ou $y \in G$ e, portanto, G é um gapset. Do mesmo modo, se G é um gapset, seja $S = \mathbb{N}_0 \setminus G$. Se $z \notin G$ é um número inteiro não-negativo (ou seja, $z \in S$) e $z = x + y$ com x e y inteiros não negativos, temos que ter $x \notin G$ e $y \notin G$. Logo $x \in S$ e $y \in S$. Além disso, como $0 \notin G$, temos que $0 \in S$. Desse modo, S é um semigrupo numérico. ■

Vamos transferir agora parte da terminologia usada para semigrupos numéricos para os gapsets.

Definição 2.2. *Seja um gapset $G \subset \mathbb{N}$. A multiplicidade m de G é o menor inteiro maior que zero tal que $m \notin G$. O número de Frobenius de G é dado por $f = \max(G)$*

se $G \neq \emptyset$ e $f = -1$ se $G = \emptyset$. O condutor c de G é $c = f + 1$. O gênero de G é sua cardinalidade. Por fim, a profundidade q de G é dada por $q = \lceil \frac{c}{m} \rceil$.

Ou seja, todas as invariantes (multiplicidade, número de Frobenius, condutor, gênero e profundidade) de G coincidem com as de um semigrupo numérico S tal que $S = \mathbb{N} \setminus G$.

2.2 A Árvore de Semigrupos em termos de Gapsets

É possível representar a árvore de semigrupos numéricos em termos de gapsets. Essa forma de representação é, inclusive, mais simples de entender do que a construção por meio dos geradores. Para entender essa nova forma de representar a árvore, vamos enunciar o seguinte lema.

Lema 2.2. *Sejam o conjunto G e $t \in \mathbb{N}$, tais que $G' = G \cap [1, t]$. Se G é um gapset, então G' é também um gapset.*

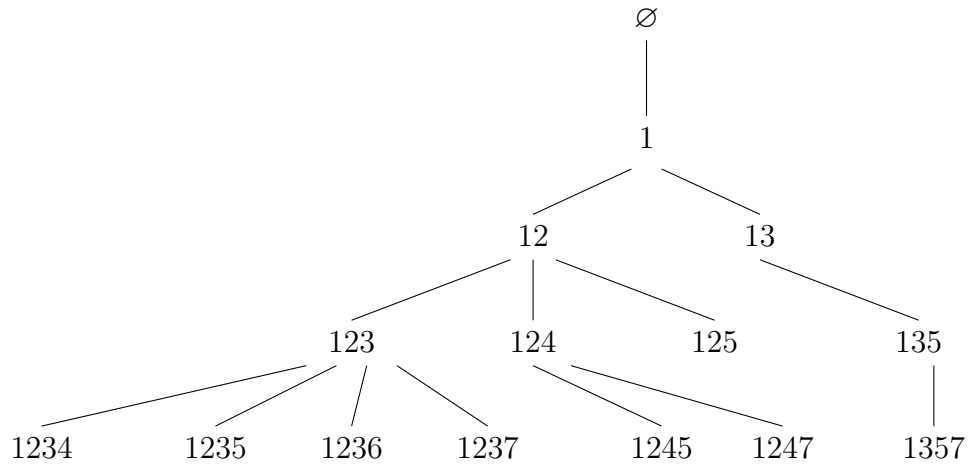
Demonstração: Sejam G um gapset e $t \in \mathbb{N}$, tais que $G' = G \cap [1, t]$. Estamos afirmando que G' é um gapset. De fato, seja $z \in G'$, fazemos $z = x + y$ com x e y inteiros positivos e $x \leq y$. Se $z \in G'$, pela construção de G' temos que $z \in G$. Se $z \in G$, então, pela definição de gapset, segue que $\{x, y\} \cap G \neq \emptyset$. Lembremos ainda que, pela construção de G' , temos que $x, y \leq z \leq t$, ou seja, $x, y \in [1, t]$. Conclusão: $\{x, y\} \cap G' \neq \emptyset$, o que prova que G' é também um gapset. ■

Em particular, se G é um gapset não vazio, temos que $G \setminus \{\max(G)\}$ é também um gapset. Com isso, podemos chegar nos gapsets “pais” retirando o elemento máximo dos gapsets “filhos”.

Reciprocamente, temos que todos os gapsets “filhos” H de um gapset G dado são tais que $H = G \cup \{a\}$, sendo $a > \max(G)$.

Perceba que os valores de a são limitados. De fato, sendo m e c a multiplicidade e o condutor de G , respectivamente, é necessário (mas não suficiente) que $c \leq a \leq m + c - 1$. Isso porque se $a \geq c + m$, $H = G \cup \{a\}$ não pode ser um gapset, uma vez que contém $a = m + (a - m)$ e nem m , nem $a - m \geq c$ estão em H .

Dessa forma, chegamos à árvore de semigrupos numéricos representada pelo seus gapsets, até o caso em que $g = 4$, como segue:



2.3 A Partição Canônica

Nesta seção vamos definir o que é a partição canônica de um gapset. Para tanto, começamos com o seguinte Lema.

Lema 2.3. *Seja G um gapset de multiplicidade m . Então:*

$$[1, m - 1] \subset G$$

$$G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$$

Demonstração: Pela definição de multiplicidade, G contém $[1, m - 1]$, mas não contém m . Vamos fazer a demonstração da segunda igualdade por indução finita, provando que $am \notin G$, para todo $a \geq 2$ com $a \in \mathbb{N}$. Fazendo $a = 2$, temos que $am = 2m = m + m$, como $m \notin G$, concluímos que $am = 2m \notin G$. Supondo que $am \notin G$ para algum $a \geq 2$ com $a \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que $(a + 1)m \notin G$. De fato, basta verificar que $(a + 1)m = m + am$. Um vez que $m \notin G$ pela definição de m e $am \notin G$ por hipótese de indução, concluímos que $(a + 1)m \notin G$, encerrando a prova. ■

Com base nisso, podemos utilizar a seguinte notação.

Notação 2.1. *Seja G um gapset de multiplicidade m . Vamos denotar $G_0 = [1, m - 1]$ e, genericamente:*

$$G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1] \quad (2.1)$$

com $i \in \mathbb{N}_0$.

Proposição 2.1. *Seja G um gapset de multiplicidade m e profundidade q . Seja G_i como definido acima. Então:*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \cdots \cup G_{q-1}$$

$$G_{i+1} \subset m + G_i$$

para todo $i \geq 0$ e $G_{q-1} \neq \emptyset$.

Demonstração: Provamos anteriormente que $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. Portanto, G é a união disjunta de G_i para todo $i \geq 0$. Seja c o condutor de G . Pela definição de condutor, $G \subset [1, c-1]$. Pela definição da profundidade q , temos que $(q-1)m < c \leq qm$. Temos que $G_q = G \cap [qm+1, (q+1)m-1]$. Como $c \leq qm$, concluímos que $G_i = \emptyset$ para todo $i \geq q$. Além disso, $f = c-1$. Como $f \in G$ e $f \geq (q-1)m+1$, concluímos que $f \in G_{q-1}$ e, portanto, $G_{q-1} \neq \emptyset$. Falta agora somente mostrar que $G_{i+1} \subset m + G_i$ para todo $i \geq 0$. Seja $x \in G_{i+1}$. Como $x \in G_{i+1} = G \cap [(i+1)m+1, (i+2)m-1]$, temos que:

$$x - m \in [im+1, (i+1)m-1].$$

Além disso, como $x = m + (x - m)$, $x \in G$ e $m \notin G$, concluímos que $x - m \in G$. Logo, $x - m \in G_i$, o que encerra a prova. ■

Definição 2.3. *Seja G um gapset de multiplicidade m e profundidade q . A partição canônica de G é dada por $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}$ com $G_i = G \cap [im+1, (i+1)m-1]$ e $i \in \mathbb{N}_0$.*

Observação 2.1. *A multiplicidade m , o gênero g e a profundidade q de um gapset $G \neq \emptyset$ podem ser facilmente identificados a partir de sua partição canônica da seguinte forma:*

$$m = \max(G_0) + 1,$$

$$g = \sum_i |G_i|,$$

$$q = \#\{i : G_i \neq \emptyset\}$$

2.4 m -Extensões e m -Filtrações

Nesta seção vamos definir as m -extensões e as m -filtrações. Uma m -extensão é um conjunto mais geral de subconjuntos finitos dos números naturais do que os gapsets, como se pode depreender da seguinte definição:

Definição 2.4. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Uma m -extensão é um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ que contém $[1, m-1]$ e admite a partição:*

$$A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$$

para algum $t \geq 0$, em que $A_0 = [1, m-1]$ e $A_{i+1} \subset m + A_i$ para todo $i \geq 0$.

Note que, em particular, uma m -extensão A satisfaz $A \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. Além disso, pela forma como A foi construído, temos que:

$$A_i = A \cap [im + 1, (i + 1)m - 1] \text{ com } i \in \mathbb{N}_0$$

uma vez que A_i é unicamente determinado por A .

Observação 2.2. *Todo gapset de multiplicidade m é uma m -extensão. Isso decorre diretamente da Proposição 2.1.*

Observação 2.3. *Por outro lado, nem toda m -extensão é um gapset de multiplicidade m . Para um contraexemplo, seja $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \{1, 2\} \cup \{5\} \cup \{8\} = \{1, 2, 5, 8\}$. Repare que $8 \in A$, mas $8 = 4 + 4$ e $4 \notin A$. Logo, A é uma 3-extensão de acordo com a Definição 2.4, mas não é um gapset.*

Agora vamos para a definição de m -filtração, que é intimamente relacionada com a de m -extensão.

Definição 2.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Uma m -filtração é uma sequência finita $F = (F_0, F_1, \dots, F_t)$ de subconjuntos de \mathbb{N} tais que:*

$$F_t \subset \dots \subset F_1 \subset F_0 = [1, m - 1].$$

Para $m \in \mathbb{N}$, há uma bijeção direta entre m -extensões e m -filtrações.

Proposição 2.2. *Seja $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_t$ uma m -extensão. Façamos $F_i = -im + A_i$ para todo i . Então (F_0, F_1, \dots, F_t) é uma m -filtração. Reciprocamente, seja (F_0, F_1, \dots, F_t) uma m -filtração. Façamos $A_i = im + F_i$ para todo i , e seja A a união dos A_i . Então A é uma m -extensão.*

Demonstração: A demonstração decorre imediatamente do fato de que $F_i = -im + A_i$ se, e somente se, $A_i = im + F_i$. ■

Notação 2.2. *Se A é uma m -extensão, vamos denotar por $F = \varphi(A)$ sua m -filtração associada. Da mesma forma, se F é uma m -filtração, nós denotamos por $A = \tau(F)$ sua m -extensão associada.*

Pela Proposição 2.2, as funções φ e τ são a inversa uma da outra.

2.5 Filtrações de Gapsets

Nesta seção vamos definir o que são filtrações de gapsets.

Definição 2.6. *Seja $G \subset \mathbb{N}$ um gapset de multiplicidade m . A filtração de gapset associada a G é a m -filtração $F = \varphi(G)$.*

De acordo com a Observação 2.3, todo gapset G de multiplicidade m é uma m -extensão. Por essa razão, $\varphi(G)$ é bem definido.

Assim, seja G um gapset de multiplicidade m e profundidade q . Como na Equação 2.1, seja $G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1]$ para todo $i \geq 0$. Então $G_0 = [1, m - 1]$ e

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{q-1}.$$

A m -filtração associada $F = \varphi(G)$ é, então, dada por $F = (F_0, F_1, \dots, F_{q-1})$ onde $F_i = -im + G_i$ para todo $i \geq 0$.

Vamos, pois, transferir parte da terminologia usada para gapsets para as filtrações de gapsets.

Definição 2.7. *Seja F uma filtração de gapset. Sua multiplicidade, seu gênero, sua profundidade, seu condutor e suas demais invariantes são definidas como aquelas do correspondente gapset $G = \tau(F)$.*

Sendo $F = (F_0, F_1, \dots, F_{q-1})$ uma filtração de gapset, e sendo $G = \tau(F) = \cup_i G_i$ seu correspondente gapset, temos, da Observação 2.1, que vale $|F_i| = |G_i|$ para todo i , de modo que o gênero de F é dado por $g = \sum_i |F_i|$ e sua profundidade é o número de F_i diferentes do conjunto vazio.

Exemplo 2.1. *Vamos dar um exemplo simples do que seriam as filtrações de gapset para o caso em que $g = 4$. Vamos exibir todos os 7 semigrupos de gênero 4 de duas formas diferentes. A primeira é uma forma usual, por meio de seus geradores. A segunda é usando filtrações de gapsets.*

(a) *Usando os geradores:*

$$\langle 2, 9 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 7, 8 \rangle, \langle 4, 5, 6 \rangle, \langle 4, 5, 7 \rangle, \langle 4, 6, 7, 9 \rangle \text{ e } \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$$

(b) *Usando as filtrações de gapset associadas:*

$$(1)^4, (12)(1)^2, (12)^2, (123)(3), (123)(2), (123)(1) \text{ e } (1234)$$

A notação acima, para o caso de filtrações de gapsets, é bastante intuitiva. Por exemplo, peguemos o quarto elemento de cada lista. Usando as filtrações de gapsets, temos a representação $(123)(3)$, que significa que $F = (F_0, F_1) = (\{1, 2, 3\}, \{3\})$. Temos, pois, que a multiplicidade é dada por $m = 4$ (uma unidade a mais que o

maior valor do primeiro elemento da sequência). Para chegar ao gapset correspondente, basta somar a cada número a multiplicidade multiplicada pela posição do elemento na sequência. Como só temos F_0 e F_1 , o gapset fica sendo $G = G_0 \cup G_1 = \{1, 2, 3\} \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 7\}$. Portanto, o semigrupo numérico correspondente é $S = \mathbb{N}_0 \setminus G = \{0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \dots\} = \langle 4, 5, 6 \rangle$.

Observação 2.4. *As duas formas de representar os semigrupos numéricos (por meio de seus geradores e por meio da filtração de gapset associada) fornecem sua multiplicidade. Os geradores também fornecem a dimensão do semigrupo, já a filtração do gapset fornece o número de Frobenius (e, por consequência, o condutor), o gênero e a profundidade do semigrupo.*

Notação 2.3. *Vamos chamar de Γ o conjunto de todos os gapsets. Assim, $\Gamma(g)$ será o subconjunto de todos os gapsets de gênero g . Do mesmo modo, vamos chamar de \mathcal{F} o conjunto de todas as filtrações de gapsets, e $\mathcal{F}(g)$ o subconjunto de todas as filtrações de gapset de gênero g . Veja que as funções φ e τ fornecem bijeções entre $\Gamma(g)$ e $\mathcal{F}(g)$ para todo $g \geq 0$, de modo que*

$$n_g = |\Gamma(g)| = |\mathcal{F}(g)|$$

para todo $g \geq 0$.

Além disso, dado um $b \in \mathbb{N}$, vamos chamar de $\Gamma(q \leq b)$ o subconjunto de todos os gapsets de profundidade $q \leq b$, e de $\mathcal{F}(q \leq b)$ o correspondente subconjunto de filtrações de gapsets. Para um gênero dado, denotemos por $\Gamma(g, q \leq b)$ e $\mathcal{F}(g, q \leq b)$ os subconjuntos de $\Gamma(q \leq b)$ e $\mathcal{F}(q \leq b)$ dos elementos de gênero g , respectivamente. Os casos em que $b = 2$ e $b = 3$ são de especial importância para os resultados que serão mostrados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Semigrupos Numéricos e Gapsets de $q \leq 3$

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais resultados encontrados para o conjunto de semigrupos numéricos com profundidade menor que ou igual a 3. Iniciamos o capítulo com o caso em que a profundidade é no máximo 2 e evoluímos para determinar cotas inferior e superior para o caso de profundidade máximo 3.

3.1 O caso $q \leq 2$ usando contagem

Inicialmente vamos mostrar o resultado, apresentado pela primeira vez por Zhao [6], para o número de semigrupos numéricos existentes de um gênero g dado e com $q \leq 2$.

Para tanto, vamos primeiramente demonstrar uma identidade já bastante conhecido sobre a sequência dos números de Fibonacci.

Definição 3.1. Um número de Fibonacci F_n é o n -ésimo termo da sequência

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots).$$

Assim, para $n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$, a sequência dos números de Fibonacci segue a relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Há vários resultados já provados para a sequência dos números de Fibonacci, um desses resultados é apresentado no lema a seguir. Vamos considerar que $\binom{a}{b} = 0$ para todo $b > a \in \mathbb{N}_0$ e para $b < 0$.

Lema 3.1. Sejam $n, k \in \mathbb{N}_0$, com $n \geq k$, e seja F_{n+1} o número de Fibonacci na posição $n + 1$ da sequência $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$. Então:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Demonstração: A prova dessa identidade pode ser feita por indução finita em n . Para $n = 0, 1$ e 2 , a verificação pode ser direta. Consideremos que a identidade vale para $\{0, 1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, vamos provar que isso implica que ela também vale para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \binom{n+1-k}{k} &= \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} + \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k-1} \\
&= \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} + \sum_{k \geq 0} \binom{(n-1)-(k-1)}{k-1} \\
&= \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} + \sum_{j \geq 0} \binom{(n-1)-j}{j} \\
&= F_{n+1} + F_n \\
&= F_{n+2}.
\end{aligned}$$

Em que a primeira igualdade decorre da Identidade de Stiefel. Portanto, se a identidade vale para $\{0, 1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, ela vale para $n + 1$, o que encerra a prova. ■

Agora estamos prontos para demonstrar os resultados de Zhao [6].

Proposição 3.1. *Seja m um inteiro positivo. O conjunto de semigrupos numéricos S em que a profundidade q de S é tal que $q \leq 2$ é exatamente a coleção de conjuntos da forma:*

$$S = \{0, m\} \cup \Lambda \cup [2m, \infty) \quad (3.1)$$

onde m é a multiplicidade de S e $\Lambda \subset [m + 1, 2m - 1]$.

Demonstração: Para provar que S é de fato um semigrupo numérico, basta notar que, sendo a e b elementos não nulos de S , então, $a, b \geq m$ e, conseqüentemente, $a+b \geq 2m$, o que garante que $a+b \in S$. Temos também que $0 \in S$ e que o complementar de S com relação aos naturais é finito. Disso concluímos que S construído dessa forma é um semigrupo numérico. Por outro lado, seja S um semigrupo numérico com multiplicidade m , condutor c , e profundidade $q \leq 2$. Então, pela definição de multiplicidade de um semigrupo numérico, temos que $[0, m] \cap S = \{0, m\}$. Pela definição de profundidade, temos que $(q - 1)m < c \leq qm \leq 2m$. Donde concluímos que $[2m, \infty) \subset S$ e que, portanto, todo semigrupo numérico com $q \leq 2$ é da forma de S . ■

Corolário 3.1. *Sejam m e g inteiros positivos. Os semigrupos numéricos S com multiplicidade m , gênero g e profundidade $q \leq 2$ são exatamente os conjuntos da forma da Equação 3.1 com $\Lambda \subset [m + 1, 2m - 1]$ e $|\Lambda| = 2m - g - 2$. A quantidade desses semigrupos numéricos é de exatamente $\binom{m-1}{2m-2-g}$.*

Demonstração: Veja que são $2m - g - 2$ não-lacunas em Λ para serem escolhidas dentre $m - 1$ números inteiros. Disso, segue o resultado. ■

Observação 3.1. *Também é possível olhar para o mesmo problema pensando nas lacunas. Em Λ , são $m - 1$ números inteiros. Desses, temos que escolher $g - (m - 1)$ lacunas, porque são g lacunas no total e o conjunto $[1, m - 1]$ é todo de lacunas. Assim, a quantidade de semigrupos numéricos de multiplicidade m , gênero g e profundidade $q \leq 2$, é de exatamente $\binom{m-1}{g-m+1}$. Perceba que $\binom{m-1}{2m-2-g} = \binom{m-1}{g-m+1}$.*

Variando m chegamos ao principal resultado apresentado por Zhao para $q \leq 2$, como se segue.

Teorema 3.1. *Para qualquer inteiro positivo g , o número de semigrupos numéricos de gênero g e profundidade $q \leq 2$ é F_{g+1} .*

Demonstração: Do Corolário 3.1, há exatamente $\binom{m-1}{2m-2-g}$ semigrupos numéricos com multiplicidade m , gênero g e profundidade $q \leq 2$. Fazendo a soma em m , concluímos que o número de semigrupos numéricos com gênero g e profundidade $q \leq 2$ é dado por:

$$\sum_m \binom{m-1}{2m-2-g} = \sum_m \binom{m-1}{g-m+1} = F_{g+1}. \quad (3.2)$$

Onde a última igualdade é decorrência imediata do Lema 3.1. ■

3.2 O caso $q \leq 2$ usando gapsets e bijeções

Nessa seção, vamos demonstrar o mesmo resultado acima encontrado por Zhao [6], mas sem a necessidade de argumentos de contagem, apenas com as bijeções desenvolvidas entre os gapsets e suas filtrações, como apresentado por Eliahou e Fromentin [3]. Lembremos que toda filtração de gapset de multiplicidade m e profundidade $q \leq 2$ é do tipo (F_0, F_1) .

Lema 3.2. *Seja $m \geq 1$. Toda m -filtração (F_0, F_1) é uma filtração de gapset de multiplicidade m e profundidade $q \leq 2$.*

Demonstração: Seja $F = (F_0, F_1)$ uma m -filtração, então $F_0 = [1, m - 1]$ e $F_1 \subset F_0$. Seja $G = \tau(F) = G_0 \cup G_1$, ou seja, $G_0 = F_0$ e $G_1 = m + F_1$. Dado $z \in G$, com $z = x + y$ e $x \leq y$ inteiros positivos, temos duas possibilidades, $z \in G_0$ ou $z \in G_1$. Se $z \in G_0$, temos que x e $y \in G_0$. Se $z \in G_1$, então $z \leq 2m - 1$ e, portanto, $x \leq m - 1$, donde concluímos que $x \in G_0$. Assim, se $z \in G$, então $x \in G_0$, o que prova que G é um gapset. ■

Observação 3.2. Para algumas demonstrações, separamos os casos em que $\max(F_1) = m - 1$ e $\max(F_1) \leq m - 2$. A fim de evitar que a notação fique carregada nas demonstrações, vamos considerar que o caso $\max(F_1) \leq m - 2$ engloba o caso em que $F_2 = \emptyset$.

Proposição 3.2. Para todo $g \geq 2$, temos que:

$$|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| = |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)| \quad (3.3)$$

Demonstração: Seja $F \in \mathcal{F}(g, q \leq 2)$ e seja $m \geq 1$ sua multiplicidade. Então $F = (F_0, F_1)$, onde $F_0 = [1, m - 1]$ e $F_1 \subset F_0$. Temos também que $g = |F_0| + |F_1|$. Inicialmente vamos verificar a identidade para $g = 2$. Para $g = 0$, temos que $F_0 = F_1 = \emptyset$. Esse é o caso em que $m = 1$. Logo, $|\mathcal{F}(0, q \leq 2)| = 1$. Para $g = 1$, temos que $F_0 = \{1\}$ e $F_1 = \emptyset$. Logo, $|\mathcal{F}(1, q \leq 2)| = 1$. Para $g = 2$, temos que $F_0 = \{1, 2\}$ e $F_1 = \emptyset$ ou $F_0 = \{1\}$ e $F_1 = \{1\}$. Logo, $|\mathcal{F}(2, q \leq 2)| = 2$. Portanto, a identidade é válida para $g = 2$.

Agora, vamos supor que $g \geq 3$. Como $g = |F_0| + |F_1|$, segue que necessariamente $|F_0| \geq 2$ e, portanto, $m \geq 3$, pois $F_0 = [1, m - 1]$. Para provar a igualdade, vamos mostrar que $|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| \leq |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)|$ e, depois, que $|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| \geq |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)|$.

Vamos separar em dois casos: o caso em que $\max(F_1) = m - 1$ e o caso em que $\max(F_1) \leq m - 2$.

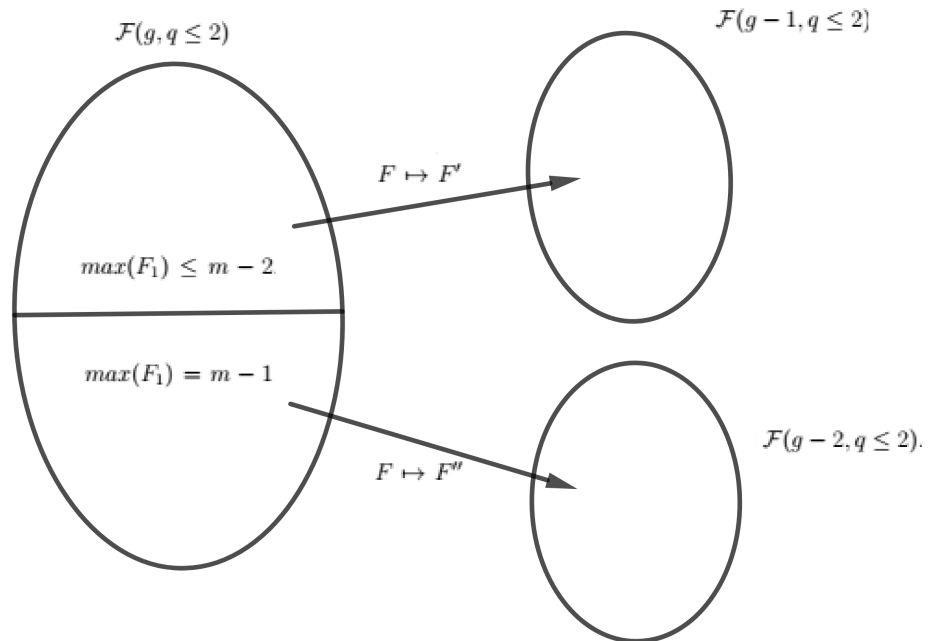
Se $\max(F_1) \leq m - 2$, vamos fazer $F'_0 = F_0 \setminus \{m - 1\} = [1, m - 2]$, $F'_1 = F_1$ e $F' = (F'_0, F'_1)$. Como $F'_1 \subset F'_0$, então F' é uma filtração de gapset pelo Lema 3.2 e seu gênero é $g - 1$. Sendo assim, $F' \in \mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)$.

Se $\max(F_1) = m - 1$, vamos fazer $F''_0 = F_0 \setminus \{m - 1\}$, $F''_1 = F_1 \setminus \{m - 1\}$ e $F'' = (F''_0, F''_1)$. Como $F''_1 \subset F''_0$, então F'' é uma filtração de gapset pelo Lema 3.2 e seu gênero é $g - 2$. Sendo assim, $F'' \in \mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)$.

É possível notar que as aplicações que levam $F \mapsto F'$ e $F \mapsto F''$, conforme o caso, são injetivas. Além disso, o domínio conjunto dessas aplicações cobre todo o $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$. Vejamos, para facilitar a compreensão, a Figura 3.1.

Disso, concluímos que:

$$|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| \leq |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)|$$

Figura 3.1: Imagens de $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$ 

Agora, vamos demonstrar que $|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| \geq |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)|$.

Seja $F = (F_0, F_1)$ uma filtração de gapset de profundidade $q \leq 2$. Seja, ainda, m sua multiplicidade, de modo que $F_0 = [1, m - 1]$. Vamos fazer:

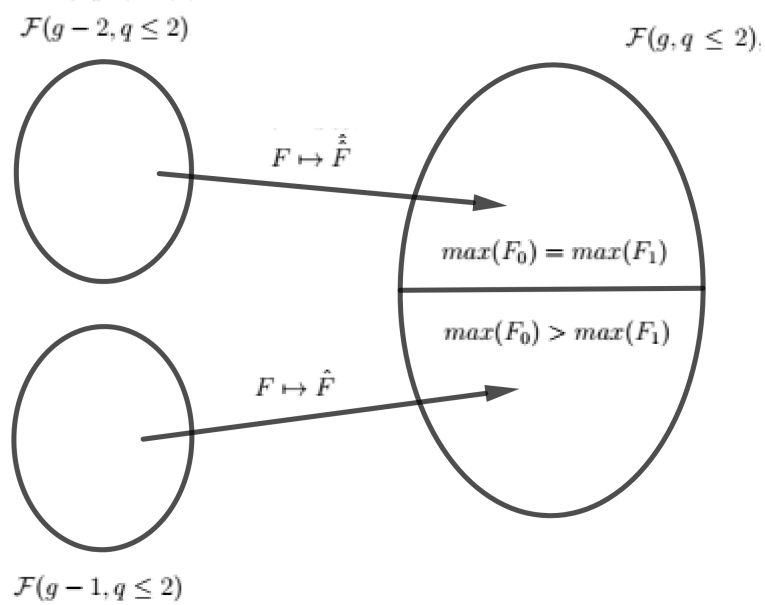
$$\hat{F}_0 = F_0 \cup \{m\}, \hat{F}_1 = F_1 \cup \{m\}, \hat{F} = (\hat{F}_0, F_1), \hat{\hat{F}} = (\hat{F}_0, \hat{F}_1)$$

É fácil ver que \hat{F} e $\hat{\hat{F}}$ são filtrações de gapsets pelo Lema 3.2. Além disso, temos que $g(\hat{F}) = g(F) + 1$ e $g(\hat{\hat{F}}) = g(F) + 2$. Por fim, as aplicações $F \mapsto \hat{F}$ e $F \mapsto \hat{\hat{F}}$ são injetivas e possuem imagens disjuntas em $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$, isso porque as filtrações de gapset da forma $\hat{\hat{F}}$ são caracterizados pela propriedade de que os dois termos da sequência têm como maior elemento m , e \hat{F} tem os dois termos da sequência com diferentes maiores elementos. Veja que $F \mapsto \hat{F}$ leva elementos de $\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)$ em elementos de $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$. Do mesmo modo, $F \mapsto \hat{\hat{F}}$ leva elementos de $\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)$ em elementos de $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$. Podemos verificar essas afirmações na Figura 3.2.

Concluimos, assim, que:

$$|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| \geq |\mathcal{F}(g - 1, q \leq 2)| + |\mathcal{F}(g - 2, q \leq 2)|$$

e a prova está completa.

Figura 3.2: Imagens em $\mathcal{F}(g, q \leq 2)$ 

Para deixar mais claro, vejamos um exemplo das aplicações \hat{F} e $\hat{\hat{F}}$:

Exemplo 3.1. *Seja $F = (F_0, F_1) = (\{1, 2\}, \{1, 2\})$ uma 3-filtração. Logo F é uma filtração de gapset de multiplicidade 3 pelo Lema 3.2. Então \hat{F} e $\hat{\hat{F}}$ são da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\hat{F} &= (\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}) \\ \hat{\hat{F}} &= (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}).\end{aligned}$$

Perceba que \hat{F} e $\hat{\hat{F}}$ são filtrações de gapset de multiplicidade 4 pela Lema 3.2.

Corolário 3.2. *Para todo $g \geq 0$, temos que $|\mathcal{F}(g, q \leq 2)| = F_{g+1}$, onde F_n corresponde ao n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.*

Demonstração: A identidade vale para $g = 0$ e $g = 1$, como mostrado acima. Além disso, os números $|\mathcal{F}(g, q \leq 2)|$ satisfazem a mesma relação de recorrência da sequência de Fibonacci. Portanto, a identidade vale para todo $g \geq 0$.

3.3 Uma cota inferior para n'_g

Nessa seção, vamos apresentar uma cota inferior para a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g dado e profundidade $q \leq 3$ usando gapsets, baseado no trabalho de Eliahou e Fromentin [3]. O caminho para se chegar a tal cota inferior é muito semelhante àquele desenvolvido na segunda parte da Proposição 3.2.

Inicialmente vamos lembrar que estamos denotando por n'_g a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g dado e profundidade $q \leq 3$. Também lembremos que denotamos por \mathcal{F} o conjunto de todos os gapsets, e por $\mathcal{F}(g)$ o conjunto de todos os gapsets de gênero g . Além disso, dado um conjunto de condições \mathcal{C} , denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{F}(g, \mathcal{C})$ os subconjuntos dos elementos de \mathcal{F} e $\mathcal{F}(g)$ que satisfazem \mathcal{C} , respectivamente.

Como vamos usar, para nossa cota inferior no caso de $q \leq 3$, uma construção semelhante à utilizada para o caso em que $q \leq 2$, vamos definir duas funções de $\mathcal{F}(q \leq 3)$ em $\mathcal{F}(q \leq 3)$ aumentando a multiplicidade em uma unidade e o gênero em uma e duas unidades, respectivamente.

Definição 3.2. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, e $F = (F_0, F_1, F_2)$ uma m -filtração, de modo que $F_2 \subset F_1 \subset F_0 = [1, m - 1]$. Vamos denotar por*

$$\begin{aligned}\alpha_1(F) &= (F_0 \cup \{m\}, F_1, F_2) \\ \alpha_2(F) &= (F_0 \cup \{m\}, F_1 \cup \{m\}, F_2)\end{aligned}$$

.

Definidos dessa forma, $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ são $(m+1)$ -filtrações, já que o primeiro termo da sequência é $[1, m]$ em ambos os casos.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.2. *Seja $F = (F_0, F_1, F_2) = (\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1\})$ uma 3-filtração, então $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ são da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\alpha_1(F) &= (\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}) \\ \alpha_2(F) &= (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1\}).\end{aligned}$$

Perceba que $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ são 4-filtrações.

A seguir, vamos demonstrar que, se $F = (F_0, F_1, F_2)$ é uma filtração de gapset, então $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ também são filtrações de gapset.

Proposição 3.3. *Seja $F = (F_0, F_1, F_2)$ uma filtração de gapset de gênero g , então $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ são filtrações de gapset de gênero $g + 1$ e $g + 2$ respectivamente.*

Demonstração: Seja m a multiplicidade de F , então $F_0 = [1, m - 1]$. Seja

$$G = \tau(F) = G_0 \cup G_1 \cup G_2$$

o correspondente gapset associado a F , ou seja, $G_0 = F_0$, $G_1 = m + F_1$ e $G_2 = 2m + F_2$. Dessa forma, temos que $G_0 = [1, m - 1]$, $G_1 \subset [m + 1, 2m - 1]$ e $G_2 \subset [2m + 1, 3m - 1]$.

Vamos chamar de $H = H_0 \cup H_1 \cup H_2$ a $(m + 1)$ -extensão correspondente a $\alpha_1(F)$, o que significa que $H = \tau(\alpha_1(F))$. Disso, segue que

$$H_0 = F_0 \cup \{m\} = [1, m],$$

$$H_1 = (m + 1) + F_1,$$

$$H_2 = 2(m + 1) + F_2,$$

donde concluímos que $H_1 = 1 + G_1$ e $H_2 = 2 + G_2$. Por essa razão, segue que

$$H_1 \subset [m + 2, 2m] \tag{3.4}$$

$$H_2 \subset [2m + 3, 3m + 1] \tag{3.5}$$

Perceba que $|G| = g$ e $|H| = g + 1$. Estamos afirmando que H é um gapset. Ou seja, dado $z \in H$, e sendo $z = x + y$ com x e y inteiros positivos tais que $x \leq y$, temos que provar que

$$x \in H \text{ ou } y \in H. \tag{3.6}$$

Há três possibilidades: ou $z \in H_0$ ou $z \in H_1$ ou $z \in H_2$. Vamos analisar cada caso.

a) Se $z \in H_0$, então x e $y \in H_0$ também. Portanto x e $y \in H$.

b) Se $z \in H_1$, então $z \leq 2m$ pela Equação 3.4. Isso implica que $x \leq m$ e, portanto $x \in H_0$, ou seja, $x \in H$.

c) Falta, portanto, o caso em que $z \in H_2$. Se $z \in H_2$, então $z \leq 3m + 1$ pela Equação 3.5. Se $x \leq m$, então $x \in H_0 \subset H$ e está resolvido. Vamos supor, então, que $x \geq m + 1$. Nesse caso, temos que $y \leq 2m$ uma vez que $z \leq 3m + 1$.

Vamos fazer

$$z' = z - 2 = (x - 1) + (y - 1).$$

Construído dessa forma, temos que $z' \in G_2$. Como G é um gapset, temos que $x - 1 \in G$ ou $y - 1 \in G$. Uma vez que $m \leq x - 1 \leq y - 1 \leq 2m - 1$, concluímos que $x - 1 \in G_1$ ou $y - 1 \in G_1$. Mas isso implica que $x \in H_1$ ou $y \in H_1$, de modo que x ou $y \in H$.

Portanto, H é um gapset e tem gênero $g + 1$.

Agora, vamos chamar de H' a $(m + 1)$ -extensão correspondente a $\alpha_2(F)$, o que significa que $H' = \tau(\alpha_2(F))$.

Pela construção de $\alpha_1(F)$ e de $\alpha_2(F)$, percebemos que $H' = H \cup \{2m + 1\}$. Das Equações 3.4 e 3.5, temos que $2m + 1 \notin H$ e, portanto, $|H'| = |H| + 1 = g + 2$.

Já mostramos que H é um gapset. Para provar que H' também é um gapset, precisamos mostrar ainda que para qualquer decomposição em inteiros positivos de $2m + 1 = x + y$, com $x \leq y$, temos que $x \in H'$ ou $y \in H'$. Mas isso é bastante simples, porque temos $x \leq m$, o que garante que $x \in H_0 \subset H'$. De modo que H' é também um gapset e de gênero $g + 2$.

Concluimos, portanto, que $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ são filtrações de gapsets de gênero $g + 1$ e $g + 2$ respectivamente. Ambas as filtrações apresentam profundidade $q \leq 3$ e multiplicidade $m + 1$ uma vez que ambas contêm $[1, m]$ mas não contêm $m + 1$.

■

Observação 3.3. *É possível notar que a Proposição 3.3 não vale sempre quando $q \leq 4$. Vejamos um contraexemplo simples. Seja, por exemplo, a filtração de gapset $F = (F_0, F_1, F_2, F_3) = (1)^4$, de multiplicidade 2 e profundidade 4. Nesse caso, $\alpha_1(F) = (F_0 \cup \{m\}, F_1, F_2, F_3) = (12)(1)^3$ não é uma filtração de gapset, já que $H = \tau((12)(1)^3) = \{1, 2\} \cup \{4\} \cup \{7\} \cup \{10\}$. É fácil notar que H não é um gapset, porque contém o elemento $10 = 5 + 5$, mas $5 \notin H$.*

A Proposição 3.3 permite inferir que $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ representam duas funções injetivas bem definidas

$$\alpha_1, \alpha_2 : \mathcal{F}(q \leq 3) \longrightarrow \mathcal{F}(q \leq 3)$$

Proposição 3.4. *Temos que $Im(\alpha_1) \cap Im(\alpha_2) = \emptyset$.*

Demonstração: Seja $F = (F_0, F_1, F_2) \in \mathcal{F}(q \leq 3)$. Pela forma com que $\alpha_1(F)$ e $\alpha_2(F)$ foram construídos, caso $F \in Im(\alpha_1)$, temos que $\max(F_0) > \max(F_1)$. Por outro lado, caso $F \in Im(\alpha_2)$, então $\max(F_0) = \max(F_1)$. Portanto obviamente F não pode pertencer ao mesmo tempo a $Im(\alpha_1)$ e $Im(\alpha_2)$.

■

Corolário 3.3. *Para todo $g \geq 2$, temos $n'_g \geq n'_{g-1} + n'_{g-2}$.*

Demonstração: Os resultados apresentados pelas Proposições 3.3 e 3.4 nos dizem que, fixado um gênero g , o conjunto $\mathcal{F}(g, q \leq 3)$ possui, no mínimo, um elemento

para cada elemento de $\mathcal{F}(g-1, q \leq 3)$ quando aplicamos α_1 e um elemento para cada elemento de $\mathcal{F}(g-2, q \leq 3)$ quando aplicamos α_2 . Além disso, $Im(\alpha_1) \cap Im(\alpha_2) = \emptyset$, ou seja, elementos em $\mathcal{F}(g-1, q \leq 3)$ e em $\mathcal{F}(g-2, q \leq 3)$ produzem, por meio de α_1 e α_2 , respectivamente, imagens distintas em $\mathcal{F}(g, q \leq 3)$. Donde se conclui que:

$$|\mathcal{F}(g, q \leq 3)| \geq |\mathcal{F}(g-1, q \leq 3)| + |\mathcal{F}(g-2, q \leq 3)|.$$

■

3.4 Uma cota superior para n'_g

Nessa seção, depois de determinarmos uma cota inferior para n'_g na seção anterior, vamos agora apresentar uma cota superior para a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g dado e profundidade $q \leq 3$ usando gapsets, baseado também no trabalho de Eliahou e Fromentin [3]. A cota superior é da forma: $n'_g \leq n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$ para todo $g \geq 3$.

Observação 3.4. *Novamente, para algumas demonstrações, separamos em casos em que $\max(F_1) < m-1$ e $\max(F_2) < m-1$. A fim de evitar que a notação fique carregada nas demonstrações, vamos considerar que o caso $\max(F_i) < m-1$ engloba o caso em que $F_i = \emptyset$, para $i = 1, 2$.*

Vamos inicialmente determinar as respectivas imagens em $\mathcal{F}(g, q \leq 3)$ das funções α_1 e α_2 como expostas na Definição 3.2.

Proposição 3.5. *Seja $F = (F_0, F_1, F_2) \in \mathcal{F}(g, q \leq 3)$, com $g \geq 2$. Então*

$$F \in Im(\alpha_1) \iff \max(F_0) > \max(F_1)$$

$$F \in Im(\alpha_2) \iff \max(F_0) = \max(F_1) > \max(F_2)$$

Demonstração: Seja $F = (F_0, F_1, F_2)$ um filtração de gapset de gênero g . Pela forma como as funções α_1 e α_2 são construídas, temos de imediato que a ida (\implies) é garantida. Vamos, pois, demonstrar a volta (\impliedby).

(\impliedby) Seja m a multiplicidade de F , logo:

$$F_2 \subset F_1 \subset F_0 = [1, m-1].$$

Assim, $\max(F_0) = m-1$ e temos que considerar dois casos:

- a) Caso 1: $\max(F_1) < m-1$
- b) Caso 2: $\max(F_2) < \max(F_1) = m-1$

Perceba que o caso $\max(F_2) = \max(F_1) = m - 1$ não faz parte da proposição.

Assim, $\max(F_2) < m - 1$ nos dois casos. Estamos afirmando que $F \in \text{Im}(\alpha_1)$ no Caso 1 e $F \in \text{Im}(\alpha_2)$ no Caso 2. Seja $G = \tau(F) = G_0 \cup G_1 \cup G_2$, onde $G_i = im + F_i$ para $i = 0, 1, 2$. Portanto, G é um gapset por hipótese, já que F é uma filtração de gapset. Vamos construir a $(m - 1)$ -filtração $F' = (F'_0, F'_1, F'_2)$, onde:

$$F'_0 = F_0 \setminus \{m - 1\} = [1, m - 2]; F'_1 = F_1 \setminus \{m - 1\}; F'_2 = F_2$$

Perceba que, no Caso 1, $F'_1 = F_1$. Seja G' a correspondente $(m - 1)$ -extensão, ou seja, $G' = \tau(F') = G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2$, onde $G'_i = i(m - 1) + F'_i$ para $i = 0, 1, 2$. Desse modo, temos que

$$G'_0 = F'_0 = [1, m - 2]; G'_1 = (m - 1) + F'_1; G'_2 = 2(m - 1) + F'_2.$$

Veja que $|G'| = g - 1$ no Caso 1 e $|G'| = g - 2$ no Caso 2. Afirmamos que G' é um gapset em ambos os casos. Inicialmente, segue do Lema 3.2 que $G'_0 \cup G'_1$ é um gapset de profundidade máxima 2. Seja, então, $z \in G'_2$ e $z = x + y$ com $1 \leq x \leq y$. Devemos mostrar que x ou $y \in G'$.

a) Se $x \leq m - 2$, então $x \in F'_0 = G'_0 \subset G'$ e está resolvido para esse caso.

b) Assumindo agora que $x \geq m - 1$. Veja que $z \in G'_2 = 2(m - 1) + F_2$, ou seja, $z = 2(m - 1) + t$ com $t \in F_2$. Uma vez que $\max(F_2) \leq m - 2$ tanto no Caso 1 como no Caso 2, temos que $z \leq 3m - 4$. Portanto, uma vez que $x + y = z$ e $x \geq m - 1$, segue que $y \leq 2m - 3$. Temos, pois, até agora que:

$$m - 1 \leq x \leq y \leq 2m - 3.$$

Sendo $(x + 1) + (y + 1) = z + 2 = 2m + t$, temos que $2m + t \in G_2$, pois $t \in F_2$. Portanto, $x + 1$ ou $y + 1$ pertence a G , porque G é um gapset. Mais precisamente, $x + 1$ ou $y + 1$ pertence a G_1 , uma vez que $m \leq x + 1 \leq y + 1 \leq 2m - 2$ e o $\max(G_0) = m - 1$ e o $\min(G_2) \geq 2m + 1$. Segue, daí, que x ou y pertence a $G_1 - 1 = (m + F_1) - 1 = (m - 1) + F_1$. Vejamos o que acontece no Caso 1 e no Caso 2.

b.1) Caso 1. Temos que $F'_1 = F_1$ e, assim, x ou y pertence a $(m - 1) + F'_1 = G'_1 \subset G'$ e está resolvido. A conclusão aqui é que F' é uma filtração de gapset de gênero $g - 1$ e, como $F = \alpha_1(F')$ por construção, segue que $F \in \text{Im}(\alpha_1)$.

b.2) Caso 2. Temos aqui que $F'_1 = F_1 \setminus \{m - 1\}$. Perceba que, se x ou y pertence a $(m - 1) + F_1$, temos que $x - (m - 1)$ ou $y - (m - 1)$ pertence a F_1 . Por outro lado, $x \leq y \leq 2m - 3$, o que implica que $x - (m - 1) \leq y - (m - 1) \leq m - 2$. A conclusão necessária é que $x - (m - 1)$ ou $y - (m - 1)$ pertence a $F_1 \setminus \{m - 1\} = F'_1$. Donde

temos que x ou y pertence a $(m-1) + F_1 \setminus \{m-1\} = (m-1) + F'_1 = G'_1$. Eis que x ou y pertence a G' como queríamos. A conclusão aqui é que novamente F' é uma filtração de gapset, mas com gênero $g-2$, e $F = \alpha_2(F')$ por construção, de modo que $F \in \text{Im}(\alpha_2)$. ■

Nosso próximo objetivo para chegar a uma cota superior para n'_g é demonstrar que, ao retirarmos os elementos máximos dos termos de uma filtração de gapset de profundidade $q=3$, temos uma nova filtração de gapset.

Proposição 3.6. *Seja $F = (F_0, F_1, F_2)$ uma filtração de gapset de multiplicidade $m+1 \geq 2$ e profundidade 3, de modo que $\emptyset \neq F_2 \subset F_1 \subset F_0 = [1, m]$. Seja $a_i = \max(F_i)$ e $F'_i = F_i \setminus \{a_i\}$ para todo i . Seja*

$$F' = (F'_0, F'_1, F'_2).$$

Então F' é uma filtração de gapset de multiplicidade m .

Demonstração: Temos que $m = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq 1$. Seja $G = \tau(F)$ e $G' = \tau(F')$, então

$$G_i = i(m+1) + F_i,$$

$$G'_i = im + F'_i$$

para $0 \leq i \leq 2$ por construção. Por hipótese, temos que G é um gapset. Nossa afirmação é que G' também é um gapset. Veja que, caso $F'_2 = \emptyset$, não há o que provar, uma vez que $F' = (F'_0, F'_1)$ é uma sequência de no máximo dois termos não nulos e o Lema 3.2 garante que G' é um gapset.

Considerando, então, que $F'_2 \neq \emptyset$, seja $z \in G'_2$. Temos que $z = 2m + r$ para algum $r \in F'_2$, com $r < a_2 \leq m$ por construção. Assumindo que $z = x + y$ para algum x e algum y inteiros tais que $1 \leq x \leq y$, é suficiente provar que $\{x, y\} \cap G' \neq \emptyset$ para concluir a prova. Temos duas possibilidades: $x \leq m-1$ ou $x \geq m$.

a) Se $x \leq m-1$, é fácil ver que $x \in F'_0 = G'_0 = [1, m-1]$. Portanto $x \in G'$, como queríamos provar.

b) Assumindo agora que $x \geq m$, uma vez que $x + y = z = 2m + r \leq 3m - 1$, segue que $y \leq 2m - 1$. Temos que $z + 2 = 2(m+1) + r \in G_2$. Como G é um gapset e, ainda, $z + 2 = (x+1) + (y+1)$, segue que $\{x+1, y+1\} \cap G \neq \emptyset$. Ainda mais precisamente, perceba que o $\max(G_0) = m$ e o $\min(G_2) \geq 2m + 3$; e $m+1 \leq x+1 \leq y+1 \leq 2m$, de modo que temos que $\{x+1, y+1\} \cap G_1 \neq \emptyset$. Subtraindo $m+1$ de todos os elementos dos conjuntos, temos que

$$\{x-m, y-m\} \cap F_1 \neq \emptyset \tag{3.7}$$

Temos, novamente, duas possibilidades: ou $\{x-m, y-m\} \cap F'_1 \neq \emptyset$ ou $\{x-m, y-m\} \cap F'_1 = \emptyset$.

b.1) No primeiro caso, em que $\{x - m, y - m\} \cap F'_1 \neq \emptyset$, não há mais o que provar, já que $\{x, y\} \cap G'_1 = \emptyset$ e $G'_1 \subset G'$.

b.2) Falta, então, apenas o caso em que $\{x - m, y - m\} \cap F'_1 = \emptyset$. Mas nessa situação, perceba que, por 3.7, podemos concluir que $\{x - m, y - m\} \cap F_1 = \{a_1\}$, o que significa que $x - m = a_1$ ou $y - m = a_1$. Perceba que, com isso, resulta que $y - m \geq a_1$ porque $y \geq x$. Mas se assim for, então

$$2m + r = z = x + y \geq x + a_1 + m.$$

Isso implica que $x \leq m + (r - a_1) < m$ porque $r < a_2 \leq a_1$. Chegamos a uma contradição, já que estamos tratando do caso em que $x \geq m$. A contradição surge da hipótese absurda de que $\{x - m, y - m\} \cap F'_1 = \emptyset$.

Concluimos que, para qualquer caso, $\{x, y\} \cap G' \neq \emptyset$ e a prova está completa. ■

Observação 3.5. *Novamente, é fácil ver que a Proposição 3.6 não vale sempre quando $q \leq 4$. Vejamos um contraexemplo. Seja, por exemplo, a filtração de gapset $F = (F_0, F_1, F_2, F_3) = (123)(13)^3$, de multiplicidade 4 e profundidade 4. Essa filtração corresponde ao gapset $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 7\} \cup \{9, 11\} \cup \{13, 15\}$. Suprimindo os elementos máximos de cada termo da sequência, ficamos com a filtração $(12)(1)^3$, que, como vimos na Observação 3.3, não é uma filtração de gapset, já que $H = \tau((12)(1)^3) = \{1, 2\} \cup \{4\} \cup \{7\} \cup \{10\}$, e H não é um gapset porque contém o elemento $10 = 5 + 5$, mas $5 \notin H$.*

Corolário 3.4. *Seja $F = (F_0, F_1, F_2)$ uma filtração de gapset tal que $\max(F_0) = \max(F_1) = \max(F_2) = m$. Seja $F'_i = F_i \setminus \{m\}$. Então (F'_0, F'_1, F'_2) é uma filtração de gapset.*

Demonstração: Esse resultado é um caso particular da Proposição 3.6. ■

Com isso, já temos condições de enunciar o principal resultado dessa seção.

Teorema 3.2. *Seja n'_g o número de gapsets de gênero g e profundidade $q \leq 3$. Então*

$$n'_{g-1} + n'_{g-2} \leq n'_g \leq n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$$

para todo $g \geq 3$.

Demonstração: A cota inferior foi demonstrada no Corolário 3.3. Vamos agora provar a existência dessa cota superior. A afirmação vale para $g = 3, 4, 5$, já que $n'_0 = 1$, $n'_1 = 1$, $n'_2 = 2$, $n'_3 = 4$, $n'_4 = 6$, $n'_5 = 11$ e $n'_6 = 20$. Sejam $g \geq 6$ e o

conjunto $X = \mathcal{F}(g, q \leq 3)$. Vamos considerar a partição $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, onde para $F = (F_0, F_1, F_2) \in X$, temos que

$$F \in X_1 \iff \max(F_0) > \max(F_1)$$

$$F \in X_2 \iff \max(F_0) = \max(F_1) > \max(F_2),$$

$$F \in X_3 \iff \max(F_0) = \max(F_1) = \max(F_2).$$

Segue da Proposição 3.5 que $F \in X_1$ se, e somente se, $F \in \text{Im}(\alpha_1)$, e $F \in X_2$ se, e somente se, $F \in \text{Im}(\alpha_2)$. Assim $|X_1| = n'_{g-1}$ e $|X_2| = n'_{g-2}$. Além disso, segue do Corolário 3.4 que a quantidade de elementos em X_3 é menor que ou igual àquela em $\mathcal{F}(g-3, q \leq 3)$, porque removendo o elemento máximo de F_0, F_1 e F_2 quando $F \in X_3$, temos uma filtração de gapset de gênero $g-3$, ou seja,

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2)| \leq |\mathcal{F}(g-3, q \leq 3)| = n'_{g-3}$$

e isso encerra a prova. ■

Apresentamos na Tabela 3.1 os valores para n'_g em comparação a $n'_{g-1} + n'_{g-2}$ e a $n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$. Os valores de n'_g são baseados em [3], usando um algoritmo desenvolvido em [12].

Com base nessas cotas é possível chegar a duas outras cotas, como veremos a seguir. São cotas piores que as já apresentadas, mas possuem a vantagem de apresentarem fórmulas explícitas para seus valores para cada g , diferente do que acontece com $n'_{g-1} + n'_{g-2}$ e $n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$.

Corolário 3.5. *Para todo $g \geq 2$, temos que*

$$2F_g \leq n'_g.$$

Demonstração: Vamos usar indução forte em g . Temos que para $g = 2$ e $g = 3$ vale a igualdade, pois $n'_2 = 2 = 2F_2$ e $n'_3 = 4 = 2F_3$, logo $2F_2 \leq n'_2$ e $2F_3 \leq n'_3$. Seja $g \in \mathbb{N}$, com $g \geq 3$. Suponha que $2F_k \leq n'_k$ para $k \in [2, g]$. Em particular, $2F_g \leq n'_g$ e $2F_{g-1} \leq n'_{g-1}$. Com isso, temos que

$$2F_{g-1} + 2F_g \leq n'_{g-1} + n'_g \implies 2(F_{g-1} + F_g) = 2F_{g+1} \leq n'_{g-1} + n'_g \leq n'_{g+1} \implies 2F_{g+1} \leq n'_{g+1}.$$

Portanto, se vale para $k \in [2, g]$, para algum $g \geq 3$, a relação vale para $g+1$, o que garante, por indução, que a relação vale para todo $g \geq 2$. ■

Para a cota superior, precisamos antes definir a sequência de “tribonacci”.

g	$n'_{g-1} + n'_{g-2}$	n'_g	$n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$
0	*	1	*
1	*	1	*
2	2	2	*
3	3	4	4
4	6	6	7
5	10	11	12
6	17	20	21
7	31	33	37
8	53	57	64
9	90	99	110
10	156	168	189
11	267	287	324
12	455	487	554
13	774	824	942
14	1311	1395	1598
15	2219	2351	2706

Tabela 3.1: Valores de n'_g em comparação a $n'_{g-1} + n'_{g-2}$ e a $n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$.

Definição 3.3. Um número de Tribonacci T_n é o n -ésimo termo da sequência

$$(0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, \dots).$$

Assim, para $n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}_0$, a sequência dos números de Tribonacci segue a relação de recorrência $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ com $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, e $T_2 = 1$.

Há também alguns resultados já bem conhecidos e o nome da sequência faz referência à sequência de Fibonacci. Com essa definição podemos demonstrar o próximo colorário.

Corolário 3.6. Para todo $g \geq 0$, temos que

$$n'_g \leq T_{g+1}.$$

Demonstração: Vamos usar novamente indução forte em g . Temos que $(n'_0, n'_1, n'_2) = (1, 1, 2) = (T_1, T_2, T_3)$, logo $n'_0 \leq T_1$, $n'_1 \leq T_2$ e $n'_2 \leq T_3$. Seja $g \in \mathbb{N}$, com $g \geq 3$. Suponha que $n'_k \leq T_{k+1}$ para $k \in [0, g-1]$. Em particular, $n'_{g-3} \leq T_{g-2}$, $n'_{g-2} \leq T_{g-1}$ e $n'_{g-1} \leq T_g$. Com isso, temos que

$$n'_g \leq n'_{g-3} + n'_{g-2} + n'_{g-1} \leq T_{g-2} + T_{g-1} + T_g = T_{g+1}.$$

Portanto, se vale para $k \in [0, g-1]$, para algum $g \geq 3$, a relação vale para g , o que garante, por indução, que a relação vale para todo $g \geq 0$.



Assim, concluímos que, para $g \geq 2$,

$$2F_g \leq n'_g \leq T_{g+1}.$$

Na Tabela 3.4 apresentamos os valores para essas cotas para $g \in [0, 15]$, para efeito de comparação.

g	$2F_g$	n'_g	T_{g+1}
0	*	1	1
1	*	1	1
2	2	2	2
3	4	4	4
4	6	6	7
5	10	11	13
6	16	20	24
7	26	33	44
8	42	57	81
9	64	99	149
10	110	168	274
11	178	287	504
12	288	487	927
13	466	824	1705
14	754	1395	3156
15	1220	2351	5788

Tabela 3.2: Valores de n'_g em comparação a $2F_g$ e a T_{g+1} .

Capítulo 4

Considerações Finais

A abordagem dos problemas com semigrupos numéricos por meio de gapsets tem a vantagem de permitir que se trabalhe com conjuntos finitos. Nesse sentido, é possível aplicar tal método mesmo em nível de educação básica, como por exemplo no ensino médio.

Uma proposta de atividade, seria, por exemplo, ensinar as características de um gapset para os alunos e procurar as melhores formas de se identificar se determinado conjunto é ou não um gapset. Algo no seguinte formato: Seja G um subconjunto finito e não-vazio de \mathbb{N}_0 com g elementos. Quantas verificações são necessárias para saber se G é ou não um gapset? A resposta trabalha com conceitos de combinatória.

Algumas dicas podem ser trabalhadas na mesma atividade, por exemplo:

- Se $x \in G$, com $x \geq 2g$, então G não é um gapset.
- Se $1 \notin G$, então G não é um gapset.
- Se x é inteiro e $2x \in G$, então x deve pertencer a G . Do contrário, G não é gapset.

Para solucionar o problema, pensemos em dois exemplos. Suponha que $15 \in G$, temos quantas combinações de somas de inteiros não negativos cujo resultado é 15? São os pares: $(1, 14); (2, 13); \dots; (7, 8)$, ou seja, são $\lfloor \frac{15}{2} \rfloor$ possibilidades. E no caso em $16 \in G$? São os pares: $(1, 15); (2, 14); \dots; (8, 8)$. Veja que são $\lfloor \frac{16}{2} \rfloor$ possibilidades. Com esses exemplos, é possível perceber que para cada $z \in G$, temos que testar $\lfloor \frac{z}{2} \rfloor$ casos de somas de inteiros não negativos.

Desse modo, se $G = \{1 = z_1 < z_2 < \dots < z_g\}$, com $z_g \leq 2g - 1$, então, para cada z_i , há $\lfloor \frac{z_i}{2} \rfloor$ formas de se escrever $z_i = x_{ij} + y_{ij}$, com $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{N}$ e $x_{ij} \leq y_{ij}$. Logo, o total de testes é de:

$$\sum_{i=1}^g \left\lfloor \frac{z_i}{2} \right\rfloor.$$

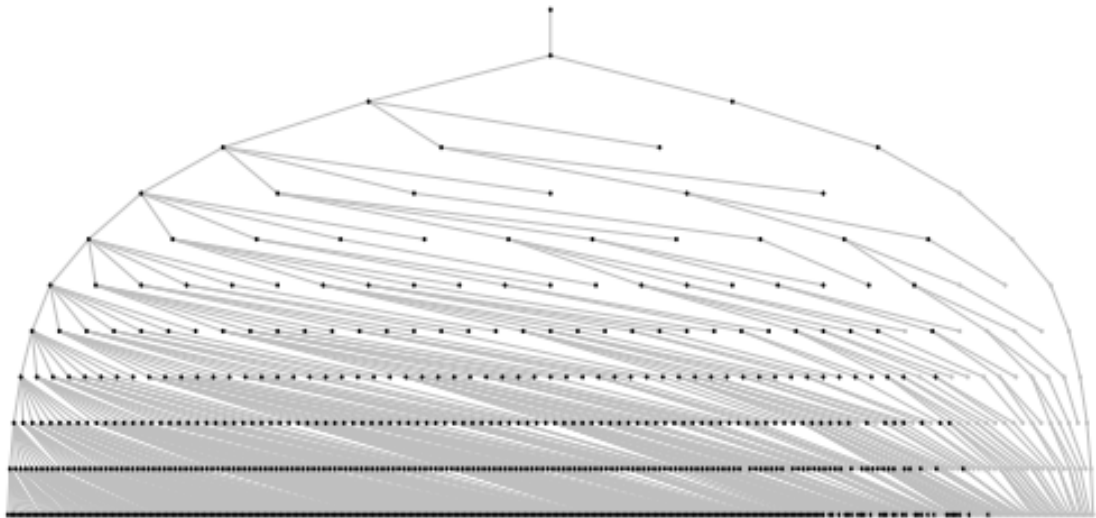
Nesse trabalho, buscamos cotas para a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g fixado e profundidade $q \leq 3$. Uma das razões da importância de se determinar cotas inferior e superior para n'_g está no fato de que a grande maioria dos semigrupos numéricos, dado um gênero fixado, possuem profundidade $q \leq 3$. Tal fato pode ser enunciado assim

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n'_g}{n_g} = 1.$$

Esse limite foi inicialmente conjecturado por Zhao [6] e posteriormente demonstrado por Zhai [2].

A fim de visualizar melhor o resultado apresentado acima, temos a Figura 3.3, a qual foi retirada de [3]. Nela, visualiza-se os primeiros doze níveis da árvore de semigrupos numéricos representada por pontos. Os pontos em preto representam os semigrupos em que $q \leq 3$, já os pontos em cinza representam semigrupos numéricos em que $q \geq 4$. Em razão do resultado exposto acima, é esperado que, no limite, os pontos em preto preencham quase todo o nível.

Figura 4.1: Árvore Esquemática de Semigrupos Numéricos.



A cota inferior para n_g , qual seja $n_{g-1} + n_{g-2} \leq n_g$ para todo $g \geq 2$, foi conjecturada por Bras-Amorós [1] em 2008, mas ainda ninguém conseguiu demonstrar tal resultado.

De fato, mesmo a desigualdade $n_g \geq n_{g-1}$, uma versão mais fraca que a cota conjecturada por Bras-Amorós, ainda não foi demonstrada. Zhai [2] demonstrou que a desigualdade $n_g \geq n_{g-1}$ vale para gêneros suficientemente grandes, mas a questão se tal resultado vale para todo $g \geq 1$ ainda está totalmente aberta.

Outra duas conjecturas foram propostas por Bras-Amorós [1] em 2008 e posteriormente provadas por Zhai [2], dando origem ao seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ a razão áurea. Então valem os seguintes limites:*

1. $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_g}{n_{g-1}} = \varphi$
2. $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-1} + n_{g-2}}{n_g} = 1$

Interessante notar que a primeira afirmação implica a segunda, uma vez que:

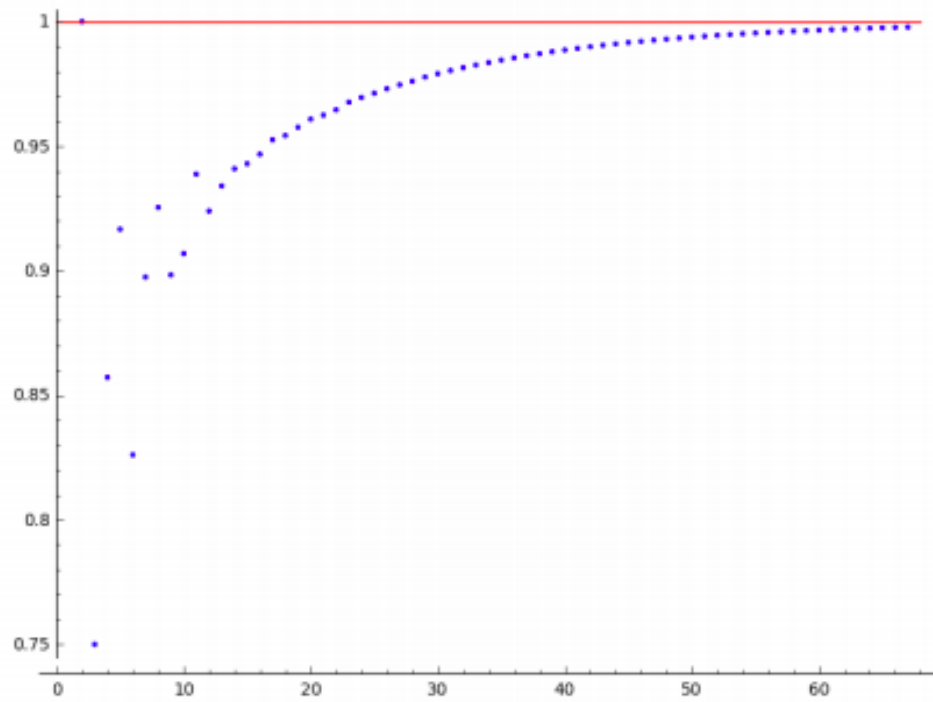
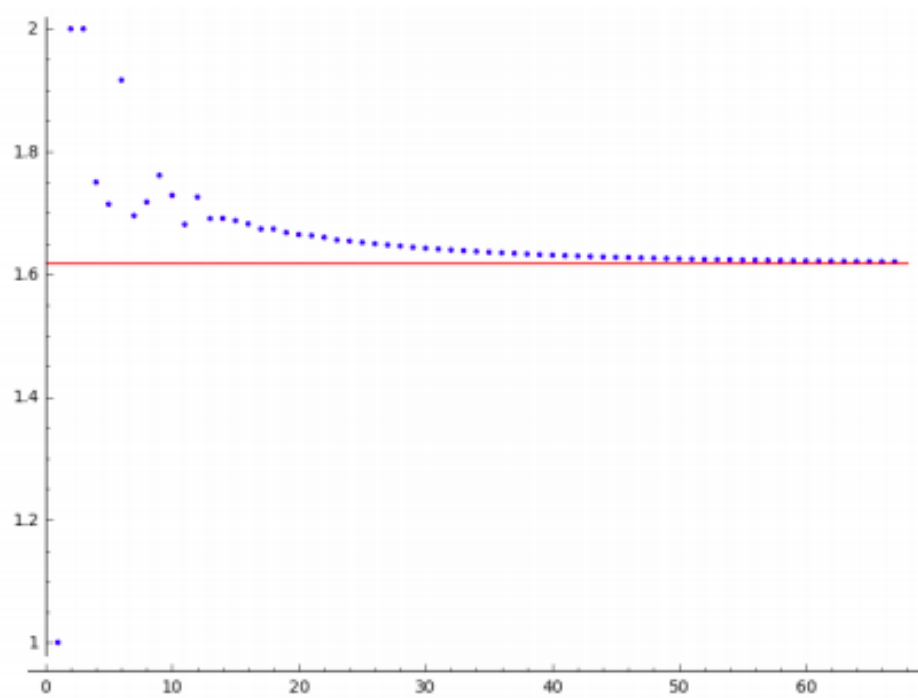
$$\begin{aligned}
 \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-1} + n_{g-2}}{n_g} &= \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-1}}{n_g} + \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-2}}{n_{g-1}} \cdot \frac{n_{g-1}}{n_g} \\
 &= \frac{1}{\varphi} + \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-2}}{n_{g-1}} \cdot \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{n_{g-1}}{n_g} \\
 &= \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \\
 &= \frac{\varphi + 1}{\varphi^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

A conjectura que deu origem ao Teorema 4.1 se baseia no comportamento dessas frações à medida que o valor de g aumenta. Inicialmente Bras-Amorós [1] plotou alguns valores dessas razões e posteriormente Kaplan [5] aumentou a quantidade de pontos para até $g = 67$. Os resultados constam das Figuras 3.4 e 3.5. Ambos os resultados foram demonstrados por Zhai, usando o fato de que a maioria dos semigrupos numéricos são tais que $q \leq 3$.

Os resultados de Eliahou e Fromentin [3] são muito importantes porque conseguem resolver um problema relacionado à conjectura ainda em aberto proposta por Bras-Amorós. Mesmo que seja uma versão mais fraca que a original, os casos em que $q \leq 3$ são extremamente relevantes, como pode ser constatado no Teorema de Zhai. Esses resultados, portanto, permitem avançar nesse campo, com a vantagem de serem alcançados ao se trabalhar com os gapsets, que são conjuntos finitos, em vez de trabalhar com conjuntos infinitos, como é o caso dos semigrupos numéricos em si.

Usando o pacote “numericalsgps” [13] do software livre GAP [14], construiu-se a Tabela 3.3 apresentada a seguir com a quantidade de semigrupos numéricos para cada combinação do gênero g e da profundidade q , com ambos variando de 0 a 18. Há, ainda, uma coluna com os valores de n'_g para uma comparação com os valores de n_g na última coluna.

A partir da Tabela 3.3 é possível pensar em algumas conjecturas que envolvem, por exemplo, a distribuição de 2's, de 1's e de zeros na tabela. Há, também, por exemplo, uma estranha proximidade entre os valores $|\mathcal{F}(g, 4)|$, da coluna $q = 4$, e de n_{g-4} . Todas essas questões podem ser melhor exploradas em um próximo trabalho.

Figura 4.2: Comportamento do quociente $\frac{n_{g-1}+n_{g-2}}{n_g}$ Figura 4.3: Comportamento do quociente $\frac{n_g}{n_{g-1}}$ 

$g \backslash q$	0	1	2	3	n'_g	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	n_g	
0	1				1																	1
1		1			1																	1
2		1	1		2																	2
3		1	2	1	4																	4
4		1	4	1	6	1																7
5		1	7	3	11	0	1															12
6		1	12	7	20	2	0	1														23
7		1	20	12	33	4	1	0	1													39
8		1	33	23	57	7	2	0	0	1												67
9		1	54	44	99	11	5	2	0	0	1											118
10		1	88	79	168	24	8	2	1	0	0	1										204
11		1	143	143	287	37	11	5	2	0	0	0	1									343
12		1	232	254	487	71	19	10	2	2	0	0	0	1								592
13		1	376	447	824	124	33	10	6	2	1	0	0	0	1							1001
14		1	609	785	1395	209	57	16	11	2	2	0	0	0	0	1						1693
15		1	986	1364	2351	353	104	26	11	7	2	0	0	0	0	0	1					2855
16		1	1596	2357	3954	612	158	48	16	12	2	2	1	0	0	0	0	1				4806
17		1	2583	4052	6636	1028	254	79	23	13	7	2	2	0	0	0	0	0	1			8045
18		1	4180	6935	11116	1739	409	132	37	13	14	2	2	2	0	0	0	0	0	1		13467

Tabela 4.1: Alguns valores para $|\mathcal{F}(g, q)|$

Referências Bibliográficas

- [1] BRAS-AMORÓS, M., *Fibonacci-like Behavior of the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Semigroup Forum 76 (2008), no. 2, 379-384.
- [2] ZHAI, A., *Fibonacci-like Growth of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Semigroup Forum 86 (2013), no. 3, 634-662.
- [3] ELIAHOU, S., FROMENTIN, J., *Gapsets and Numerical Semigroups*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 169 (2020), 105-129.
- [4] BRAS-AMORÓS, M., *Bounds on the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009), no. 6, 997-1001.
- [5] KAPLAN, N., *Counting Numerical Semigroups*, arXiv:1707.02551v1 [math.CO], 2017.
- [6] ZHAO, Y., *Constructing Numerical Semigroups of a Given Genus*, Semigroup Forum 80 (2010), no. 2, 242-254.
- [7] SYLVESTER, J. J., *Mathematical Questions with their Solutions*, Educational Times (1884), no. 41, 21.
- [8] GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A., ROSALES, J. C., *Numerical semigroups*, Developments in Mathematics vol. 20, Springer, New York, 2009.
- [9] BERNARDINI, M., *Counting Numerical Semigroups by Genus and even Gaps and Some Generalizations. Patterns on Numerical Semigroups*. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2017.
- [10] BRAS-AMORÓS, M., DE MIER, A., *Representation of Numerical Semigroups by Dyck Paths*, Semigroup Forum 75 (2007), no. 3, 676-681.
- [11] ELIZALDE, S., *Improved Bounds of Numerical Semigroups of a Given Genus*, Journal of Pure and Applied Algebra 214 (2010), no. 10, 1862-1873.
- [12] FROMENTIN, J., HIVERT, F., *Exploring the Tree of Numerical Semigroups*, Math.Comp. 85 (2016), 2553-2568.

-
- [13] DELGADO, M., GARCIA-SANCHEZ, P. A., MORAIS, J., *NumericalSgps, a Package for Numerical Semigroups*, Versão 1.2.2, <http://www.fc.up.pt/cmup/mdelgado/numericalsgps/>, 2020.
- [14] GAP, The GAP Group, *Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.11.0, 2020.