UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

Campus Vitória da Conquista

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PAULA ADRIANA MATOS MOURÃO

SIMULAÇÕES MATEMÁTICAS EM ESTUDOS EPIDEMIOLÓGICOS: O MODELO SIR COM ESTRATÉGIAS DE VACINAÇÃO COMO APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

Vitória da Conquista

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

Campus Vitória da Conquista

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PAULA ADRIANA MATOS MOURÃO

SIMULAÇÕES MATEMÁTICAS EM ESTUDOS EPIDEMIOLÓGICOS: O MODELO SIR COM ESTRATÉGIAS DE VACINAÇÃO COMO APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre, junto ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Vitória da Conquista.

Oritentadora

Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva

Coorientador

Prof. Dr. Nilmar Bispo Santana

Vitória da Conquista

2020

M89s Mourao, Paula Adriana Matos.
Simulações matemáticas em estudos epidemiológicos: o modelo SIR com estratégias de vacinação como aplicação da modelagem matemática no ensino. / Paula Adriana Matos Mourao, 2020.
81f. il.
Orientador (a): Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2020.
Inclui referências. 62 - 67.
1. Modelagem matemática. 2. Epidemiologia matemática – Modelo SIR. 3. Ensino de matemática. I. Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510.7

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Paula Adriana Matos Mourão

SIMULAÇÕES MATEMÁTICAS EM ESTUDOS EPIDEMIOLÓGICOS: O MODELO SIR COM ESTRATÉGIAS DE VACINAÇÃO COMO APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Prof. Dr. André Nagamine
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Profª. Dra. Selma Rozane Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia- IFBA

Vitória da Conquista – Ba, 13 de junho de 2020

Aos meus familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por manter-me constante em meus desígnios, guiando-me nos momentos difíceis e sempre me dando força e coragem para enfrentar cada obstáculo;

Aos meus pais pela eterna dedicação, paciência, amor incondicional, pelo exemplo que sempre me deram de honestidade, superação e pelos valores que levarei para toda eternidade;

Aos meus irmãos, pela amizade, carinho, apoio e amor;

Aos demais familiares, amigos e namorado, pelo companheirismo, o ombro, o silêncio, as palavras e a paciência nos momentos difíceis, pelos momentos de descontração e pelos incentivos frequentes;

Aos meus colegas de mestrado, pela força durante todo o curso, união, amizade, motivação e companheirismo indescritível e que foram essenciais para que eu chegasse até aqui. O PROFMAT não seria a mesmo sem vocês;

Aos bons professores que tive no decorrer do curso de graduação, pelos ensinamentos. Sábios mestres que colaboraram de forma profícua para o meu crescimento profissional;

Aos professores do programa de pós-graduação – PROFMAT, por me propiciarem ver a educação matemática de forma diferente e pelas contribuições para a minha formação e aprendizado;

Agradeço aos professores Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva e Dr. Nilmar Bispo Santana por me orientarem nesta pesquisa, pelo tempo, dedicação, por sempre serem receptivos ao diálogo, sempre sugerindo caminhos e ajudando-me a percorrê-los;

Aos professores, Drª. Selma Rozane Vieira e Dr. André Nagamine que aceitaram

fazer parte da banca examinadora deste trabalho;

E as demais pessoas que colaboraram direta e indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho e aos que expressaram através de um gesto ou de uma palavra um incentivo para a realização do mesmo.

Educação não transforma o mundo.
Educação muda as pessoas. Pessoas
transformam o mundo.

Paulo Freire

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Resumo

A Modelagem Matemática como metodologia de ensino propicia uma construção e assimilação do saber num contexto que rompe com a percepção equivocada de uma Matemática apenas de "cálculos" e sem aplicabilidade. Neste trabalho estudamos a dinâmica de vacinação do modelo epidêmico SIR (suscetíveis, infectados e recuperados) desenvolvido por McKendrick e Kermack em 1927. O presente trabalho propõe uma atividade, para discentes de ensino médio e ensino superior, onde Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são reformuladas em equações de diferença. Dessa forma, o aluno trabalha por meio da modelagem matemática a aplicabilidade da matemática em uma situação real e o tratamento de informações, potencializando o ensino dessa disciplina numa abrangência interdisciplinar. Os resultados obtidos com a atividade e as simulações realizadas pelos discentes nos permitem concluir que a atividade se mostrou eficiente na construção de um conhecimento mais significativo da Matemática por (e para) os discentes, evidenciando dessa forma que o uso de Modelagem deve ser inserido no dia a dia da sala de aula dando mais sentido a Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Epidemiologia Matemática, Modelo SIR, Ensino de Matemática.

Abstract

The Mathematical Modeling as a teaching methodology provides a construction and assimilation of knowledge in a context that breaks with the mistaken perception of Mathematics with only "calculations"and without applicability. In this work, we studied the vaccination dynamics of the SIR epidemic model (susceptible, infected and recovered) developed by McKendrick and Kermack in 1927. The present work proposes an activity, for high school and higher education students, where Ordinary Differential Equations (ODE) are reformulated into difference equations. Thus, the student works through mathematical modeling the applicability of mathematics in a real situation and the treatment of information, enhancing the teaching of this discipline in an interdisciplinary scope. The results obtained with the activity and the simulations performed by the students in the allow us to conclude that the activity proved to be efficient in the construction of a more significant knowledge of Mathematics by (and for) the students, evidencing in this way that the use of Modeling should be inserted in the daily life of the classroom giving more meaning to Mathematics.

Keywords: Mathematical Modeling, Mathematical Epidemiology, SIR Model, Mathematics teaching.

Sumário

Introdução

A palavra epidemiologia (do grego epi = sobre, demos = povo e logos = estudo) como sua própria origem etimológica implica, diz respeito ao estudo sobre as populações humanas. Os fatores condicionantes e determinantes que quantitativamente se relacionam a ocorrência e distribuição de epidemias.

Os estudos epidemiológicos surgiram da necessidade de conter a crescente disseminação de doenças propagadas, em larga escala, pelas rotas marítimas entre a Europa e o Oriente Médio no século XIV. Embora, em tal época não tenham conseguido conter sua disseminação e impacto, fato este que inclusive teve relação com a associação das epidemias a uma punição divina, no decorrer do tempo foi constado que medidas preventivas contribuíam para conter e/ou impedir os altos índices de mortalidade e morbidade (QUARTIERI, 2004; BARROS, 2007).

Historicamente, quando se fala em epidemias, vários relatos emergem a respeito da propagação de doenças contagiosas em comunidades, que interferiram na saúde dos indivíduos, na organização da sociedade e do comércio. Ainda relata-se que o número de óbitos causado por epidemias supera o número de óbitos causados em campos de batalhas (ANDERSON & MAY, 1991, WATTS, 1999 apud SCHIMIT, 2010).

As causas relacionadas a doenças estão associadas de forma interativa com as diferentes áreas do conhecimento como biologia, matemática, física, sociologia, medicina e etc. contemplando as relações estabelecidas entre os seres vivos e o meio ambiente.

Nesse contexto, a matemática faz uma abordagem quantitativa e qualitativa pautada em técnicas e modelos matemáticos que abrangem prognósticos futuros, oscilações conforme interferências, compreendendo assim os mecanismos que condicionam a propagação e de que forma essa propagação pode ser controlada. A perspectiva de estudos matemáticos voltados para a saúde pública tem, portanto, um propósito descritivo e preditivo (QUARTIERI, 2004).

Nesse sentido, ao serem realizados estudos com modelos matemáticos, normalmente, se tem dois objetivos. Um objetivo de caracterização do processo envolvido e o outro de formulação de estratégias de controle e erradicação da enfermidade. Os modelos reúnem um conjunto de símbolos e linguagens matemáticas representando o assunto estudado, evidenciando com esses estudos a importância da Modelagem Matemática para ciência e solução de problemas realísticos.

Neste estudo, por meio de uma pesquisa qualitativa, dispomos desse mesmo objetivo quanto a Modelagem Matemática, no qual foi explorada uma dinâmica de vacinação no modelo epidemiológico SIR (suscetíveis, infectados e recuperados), formulados em termos por equações diferenciais ordinárias (EDO) que foram reescritas como equações de diferença.

Essa adaptação foi realizada de forma a propiciar o uso deste estudo tanto para Ensino Médio quanto para alunos num curso de formação de professores. Para tanto, propomos uma atividade em que o aluno realiza simulações que o permite identificar se a propagação de um agente infeccioso poderá se tornar uma epidemia e nos casos propícios realizam novas simulações em que são aplicadas vacinações como forma de contenção da enfermidade.

Objetivos do Trabalho

Oferecer um material para que professores do Ensino Médio/ Superior e estudantes de licenciatura em Matemática possam aprofundar seus conhecimentos na interdisciplinaridade entre a Matemática e Biologia utilizando equações de diferenças.

Descrever o comportamento de populações epidêmicas ao longo do tempo através de análises qualitativas do sistema de equações de diferenças.

Mostrar aplicações da Matemática em situações realísticas.

Usar o tratamento de informações para realizar análises matemáticas.

Atender a objetivos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o

Ensino Médio, atendendo ao proposto quanto à contextualização de conteúdos, as competências relacionadas à interpretação e escrita matemática.

Estrutura do Texto

No capítulo 1 apresentamos uma abordagem teórica da Modelagem Matemática no seu contexto histórico-social e sua inserção e integração no ensino.

Destinamos o capítulo 2, para a discussão da epidemiologia matemática em seu contexto histórico e campo conceitual, também discorremos sobre alguns modelos matemáticos epidemiológicos como o SI e SIS.

O capítulo 3 foi destinado à discussão do modelo epidemiológico SIR com e sem vacinação. Discorremos ainda sobre o número de reprodutibilidade basal, pontos de equilíbrio e apresentamos as simulações numéricas.

No capítulo 4 abordamos a metodologia desta pesquisa.

O capítulo 5 traz os resultados.

E, por fim, no capítulo 6 temos a conclusão.

O apêndice A dispõe da atividade elaborada e aplicada, sendo que este material didático está pronto e organizado para ser aplicado em sala de aula.

No apêndice B temos o código para implementação das equações.

Capítulo 1

Modelagem Matemática

Neste capítulo discorremos sobre o que é a modelagem matemática, seu contexto histórico, as concepções de diferentes autores sobre a temática e por fim sua importância e implementação no ensino.

1.1 Modelagem Matemática – O que é e quando se iniciaram os estudos sobre

A Modelagem Matemática transforma problemas do cotidiano em problemas matemáticos, solucionando-os numa leitura que dialoga com a realidade (BASSANEZI, 2002). Burak e Aragão (2012, p.88) entendem que "[...] a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes e tomar decisões".

Biembengut e Hein (2003) complementam que "ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias" tornam a Modelagem Matemática uma arte nesse processo de transformação de problemas matemáticos aplicados ao mundo real. Por conseguinte, Caldeira (2009) recomenda a Modelagem Matemática numa perspectiva de educação matemática em detrimento de uma abordagem simplista da mesma como um mero método de ensino e aprendizagem, como corriqueiramente se vê em currículos.

Para muitos educadores a Modelagem Matemática é concebida como uma alternativa pedagógica que propicia a interação da “Matemática escolar com questões extramatemáticas de interesse dos alunos” (ALMEIDA & BRITO, 2005, p.487).

Vertuan (2010) compreende que esse perfil da Modelagem enquanto uma alternativa pedagógica propicia aos alunos lidar diretamente com situações problema, assim, são desafiados a enfrentar momentos com os quais não são familiarizados no cotidiano escolar e que, portanto, não dispõem de ideias e ferramentas prévias. Dessa forma, os estudantes podem despertar o caráter investigativo, aplicar conhecimentos adquiridos além de constuir, de forma autônoma, novos aprendizados.

Podemos inferir que as concepções apresentadas convergem para a visão da Modelagem Matemática como intrinsicamente relacionada à nossa realidade com complementaridade e interdisciplinaridade em diferentes áreas do saber. Essa percepção da Modelagem contribui para a expansão das fronteiras do conhecimento que para muitos se estagna na Matemática.

Atendendo, nesse sentido, as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) ao recomendar que dentre as competências esperadas no ensino da matemática, no quesito de relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas, espera-se que o aluno tenha condições de compreender o quanto a matemática perpassa as diferentes áreas, solucionando problemas e fenômenos através de seus modelos e representações.

Analisando por um contexto histórico, desde o século XX a expressão “Modelagem Matemática” com o mesmo significado com o qual é empregada na atualidade, já era utilizada. Mas, internacionalmente, maiores discussões sobre suas aplicações na educação ocorreram com um movimento denominado “utilitarista”, por volta de 1960. Tal movimento desencadeou movimentos educacionais que influenciaram o Brasil na mesma época (BIEMBENGUT, 2009).

Por conseguinte, os matemáticos brasileiros precursores do movimento pela Modelagem despertaram o interesse de outros pelo assunto, que fizeram emergir discussões na linha de pesquisa de Modelagem Matemática no ensino brasileiro.

Fiorentini (1996) enfatizou no Brasil a existência de um perfil mais cultural e antropológico na Modelagem, contudo, no decorrer dos anos, Barbosa (2001) denominou essa Modelagem Matemática no país como Modelagem Matemática Crítica.

Barbosa (2001) discorre sobre três correntes de discussões acerca da Modelagem: a pragmática, a científica e a sócio-crítica. Sendo que as duas primeiras são de predominância internacional discutidas por Kaiser- Messmer. Já a terceira é sugerida por Barbosa (2001).

A corrente pragmática sugere uma seleção de conteúdos matemáticos pautados em sua aplicação na sociedade, predominando o processo de construção de modelos matemáticos. De forma que os conteúdos que não tiverem aplicações em outras áreas não devem integrar o currículo escolar.

Para a corrente científica, a matemática é o ponto de partida para se relacionar a outras áreas do conhecimento, sendo a Modelagem o viés para se introduzir conceitos novos.

Quanto a corrente sócio-crítico, essa vê a Modelagem como meio de abordar a matemática contemplando o seu papel e sua abrangência social na contemporaneidade, uma reflexão sobre o que é a modelagem e a matemática.

De forma sucinta, as correntes pragmática e científica enfatizam, respectivamente, as características externas e internas a Matemática se estagnando num conhecimento matemático e tecnológico. Por conseguinte, a terceira categoria enfatiza um conhecimento reflexivo que gere algum nível de crítica, podendo os alunos transitarem de forma livre entre a matemática aplicada e a pura (BARBOSA, 2001).

Embasado nesse cenário da Modelagem Matemática crítica no ensino brasileiro, Barbosa (2001) concebe a Modelagem como um meio em que alunos são apresentados a indagação e/ou investigação, subsidiado pela Matemática, sobre outras áreas contextualizadas ao cotidiano e a outros saberes.

Nesse sentido, as concepções sobre Modelagem convergem para um contexto de perguntas e reflexões, com autonomia do discente de pensar. Na atual conjunção do mundo profissional essas características são exigências e, como enfatizado, podem ser aguçadas pela Modelagem (HUF & BURAK, 2017). “A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças" (BASSANEZI, 2002, p.31).

Concisamente, a Modelagem Matemática é um típico processo da Matemática aplicada que se propõe a aplicar a situações problemáticas a Matemática, é esse contexto de ciência que difere, inclusive, os matemáticos puros e aplicados: "a diferença consiste, essencialmente, na atitude de se pensar e fazer matemática" (BASSANEZI, 2002, p.32).

No que tange as várias visões sobre a Modelagem é imprescindível salientar suas contribuições para o ensino e aprendizagem de matemática, bem como seu viés integrador que permeia a relação professor-aluno na construção significativa de um conhecimento que converge para um meio social que, em suma, é "uma partilha mútua de experiências adquiridas" (BIEMBENGUT, 2009, p.27).

A Modelagem, nessa perspectiva, rompe com a matemática de caráter reprodutivista, e faz com que o aluno passe a integrar o processo no qual ele primeiro lida com as aplicações e posteriormente com as regras e convenções. Em que "conhecimentos, construídos pelo homem, ganham significados pelos problemas provenientes da sua realidade" (CALDEIRA, 2009, p.45)

Assim, a modelagem reflete ainda sua eficiência na capacidade de tomar um problema real de aspecto relativamente complexo, transformando-o num modelo matemático representativo da realidade. Em que essa ponte entre o problema original e o modelo matemático constitui importante atividade para a modelagem, uma vez que fornecerá a validade ou não do modelo (BASSANEZI, 2002).

Para Barbosa (2001) a modelagem não requer procedimentos pré-fixados, a mesma possibilita aos alunos investigarem situações através da matemática de forma que possam percorrer diferentes caminhos. O percurso a ser feito será desencadeado ao mesmo passo que se realizar a atividade.

Em contrapartida, Almeida e Brito (2005, p.487) entendem que a Modelagem Matemática se configura numa "atividade que se desenvolve segundo um esquema - um ciclo de modelagem – na qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos." Ou seja, existe um "roteiro" a ser seguido, mas o mesmo terá início no questionamento do aluno.

Já Bassanezi (2002) propõe cinco etapas consecutivas no processo de modelagem. Sendo a primeira a experimentação, nessa fase se reúnem as informações necessárias e referentes ao experimento proposto. A segunda etapa é a abstração, que tem como propósito modelar o problema em questão através da obtenção de modelos matemáticos. Nessa fase também ocorre a problematização da situação. Na terceira etapa realiza-se a resolução do modelo matemático, que na maioria das vezes requer recursos computacionais que tornam os resultados aproximados. A quarta fase é a validação, nessa etapa realiza-se a averiguação da aceitação ou não do modelo abordado. A quinta etapa é a modificação, onde o modelo será reformulado se necessário.

Em 2010, Burak e Kluber (2010) apresentaram cinco etapas que se assemelham as apresentadas por Bassanezi (2002) quanto ao desenvolvimento da Modelagem Matemática. Sendo a primeira a escolha do tema, a segunda a caracterização da pesquisa como exploratória, o terceiro passo se trataria do levantamento do(s) problema(s), a quarta etapa a resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento do(s) conteúdo(s) matemático no contexto do tema e, por fim, na quinta etapa ocorreria análise crítica das soluções.

Pode-se inferir que mesmo tendo opiniões colidentes sobre o percurso da implementação de uma modelagem matemática, Barbosa (2001), Almeida e Brito (2005), Burak e Kluber (2010) e Bassanezi (2002), trazem à baila ideias que convergem quanto ao conceito/definição de modelagem, sua perspectiva crítico-social, seu caráter investigativo, sua importância no ensino e no cotidiano, bem como um resultado final que, independente de se seguir etapas ou não, sempre será o mesmo na pesquisa em questão e estará propício a alterações futuras, uma vez que nenhum modelo deve ser considerado definitivo. “O modelo matemático construído é, na verdade, uma representação da realidade sob a ótica daqueles que investigam a situação” (VERTUAN, 2010, p.1).

1.2 A Modelagem Matemática no Ensino

As discrepâncias identificadas entre países, assim como dentro de um mesmo país, quanto às competências matemáticas são preocupantes. “As avaliações, tanto nacionais como internacionais, mostram que, ao final da educação básica, os conhecimentos e as competências matemáticas de muitos estudantes não são aqueles esperados.” Ainda que se trate de alunos que obtiveram resultados satisfatórios nas avaliações, “muitos deles não apreciam tanto a matemática e não têm interesse em se dedicar a ela fora do espaço escolar” (UNESCO, 2016, p.9).

Em consonância com esse quadro, ainda existe um paradigma de ensino estático, pautado em um cenário escolar, que na atualidade mantem “o tipo de aula em que o professor fica em cima do palco, fala e escreve no quadro negro, enquanto os alunos apenas copiam para que depois, seguindo um exemplo dado, resolver os exercícios propostos de forma muitas vezes mecânica, sem nem fazer relações” (CARDOSO et al. , 2016, p.3) . Apesar de existirem propostas novas como a Modelagem, por exemplo, ainda temos uma escola de aspecto modelador do comportamento humano (HUF & BURAK, 2017).

Discussões sobre a necessidade de inserção de novas alternativas pedagógicas já existem há alguns anos, bem como docentes que já vêm fazendo uso das mesmas em suas aulas com propósito motivacional, investigativo, critico-reflexivo, mediador e construtor de conhecimento (BARBOSA, 2001). Entretanto, os argumentos utilizados no uso das diferentes alternativas pedagógicas para se ensinar Matemática estão distantes de serem consensuais (FIDELIS & ALMEIDA, 2004).

Nesse contexto, “as novas tecnologias da informação e comunicação (TIC), a História da Matemática, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática, a Investigação Matemática e a Modelagem Matemática”, são alternativas pedagógicas sugeridas pela literatura como meios de superar tais aulas estáticas, mecânicas e de perfil unilateral (CARDOSO et al. , 2016, p.3).

As atividades de Modelagem Matemática enquanto uma alternativa para reverter esse cenário no ensino de Matemática “podem contribuir para desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática” (BARBOSA, 2004, p.2). Contudo, é imprescindível que as propostas saiam do papel para que uma real mudança aconteça, propiciando a ruptura desse aspecto de escola tradicionalista e “modeladora do comportamento humano”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000) enfatizam a importância de se correlacionar a Matemática com as Ciências da Natureza para compreensão do mundo com racionalidade e organização, envolvendo criticidade, investigação, descoberta e reflexão.

Toda essa conexão entre tais áreas do conhecimento protagonizam a compreensão de que a ciência e a tecnologia possuem papeis indispensáveis e intrinsecamente associáveis a diversas questões políticas e sociais, sendo a ciência que se encontra na Matemática um gatilho para resolução e entendimento de tais questões.

Em suma, a exploração matemática possui múltiplas facetas, de forma que para uma Educação Matemática ser de qualidade, a mesma deve através da oferta progressiva de conteúdos diferentes, abordar reflexivamente a diversidade matemática presente através de problemas propostos, reformulados, conjecturados, modelados, explorados... Propiciando ao aluno vivenciar a experiência individual e coletiva que dialogue com as práticas matemáticas científicas e sociais fora da escola, bem como saber, sobretudo se amparar adequadamente nos meios tecnológicos que instrumentalizam essas práticas (UNESCO, 2016).

Essa integração entre a Matemática e suas tecnologias e as Ciências da Natureza resultam em conhecimentos correlatos ou não que se somam numa perspectiva em que a matemática modela, quantifica e qualifica variantes que até então pareciam insociáveis, principalmente a um nível de conhecimento de ensino médio. Essa conexão "pretende retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar" (BRASIL, 2000).

Nesse sentido, ocorre a democratização do ensino de Matemática compreendendo que ela "vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza" (BRASIL, 2002, p.108).

Para Barbosa (2004, p.2) na premissa de discutir aplicações matemáticas e seu significado social, as atividades de Modelagem potencializam "a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas".

Essa ideia dialoga com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000), Barbosa (2001) e Unesco (2016), que concebem que uma Educação Matemática relacionada às ciências humanas e socais estabelece estudos interdisciplinares, embasados na realidade de forma que não limita os conhecimentos matemáticos e mostra sua relação com as diferentes áreas do saber. Formando um indivíduo apto a diálogos sólidos, criticidade e reflexão que leve mudança em seu meio social.

Essa visão de construção de um pluralismo propiciado pela Educação Matemática em consonância com as ciências humanas e sociais é representada no fluxograma descrito na figura 1.1.

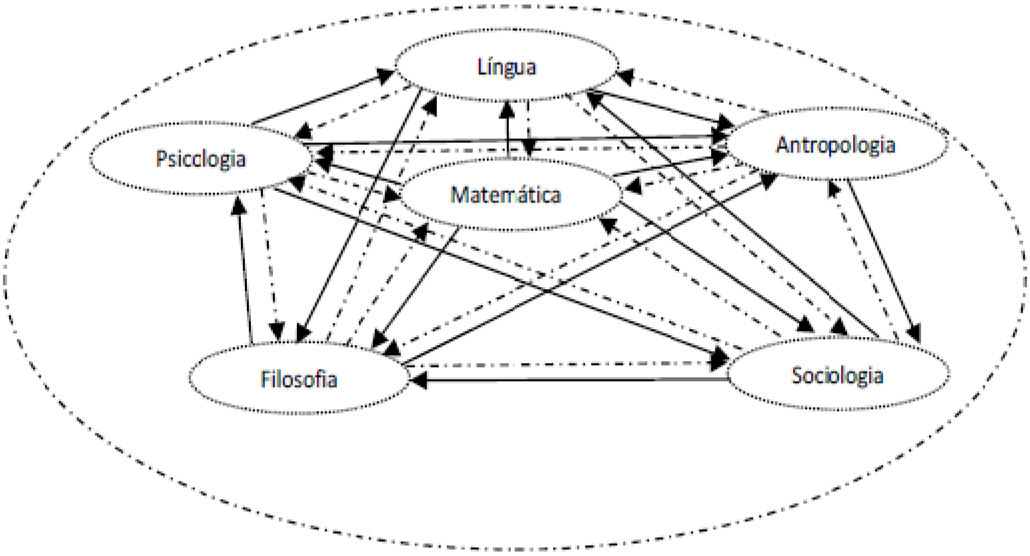


Figura 1.1: Relação da Matemática com as ciências humanas e sociais
Fonte: BURAK (2010)

Pontes e Burak (2016, p.184) compreendem que para melhor entendimento da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática é fundamental conhecer características elementares sobre a educação matemática e sua natureza. Essa Educação Matemática defendida por tais autores "tem como objeto de estudo os processos de ensino que visam à aprendizagem da Matemática e está alicerçada nos fundamentos das ciências humanas e sociais".

Nesse sentido, a modelagem analisada sob a perspectiva da Educação Matemática integra conhecimentos sociais a conhecimentos matemáticos, de forma que

> para uma melhor compreensão das razões que motivam a defesa de uma Educação Matemática embasada nas ciências humanas e sociais, há que se pensar em um trabalho docente que não se limite ao estudo dos conceitos matemáticos desvinculados da realidade. Isso tornaria o potencial de importância da Matemática limitado, por assumir somente um papel numérico, estático e lógico, logo, frio e desumano (PONTES & BURAK, 2016, p.184).

Assim, para um ensino que contribua para o desenvolvimento científico e social "a visão de Educação Matemática, em uma perspectiva que contempla além das Ciências Naturais as Ciências Humanas e Sociais, não muda em nada os fundamentos da matemática, seu método, suas leis", entretanto possibilita ao docente "uma perspectiva mais ampla sobre o ensino dessa ciência e assim, muda tudo, no contexto da educação geral" (BURAK, 2010, p.23).

A aula com inserção de práticas de Modelagem é um espaço de interação social, na qual os diálogos estabelecidos e os registros escritos se configuram necessários para a efetivação da atividade (VERTUAN et al. , 2012).

> Em termos vygotskyanos, podemos dizer que a atividade de Modelagem Matemática constitui-se um espaço privilegiado de interação social, interação que é mediação semiótica e mediação semiótica que, por sua vez, promove a internalização de instrumentos e signos, a ressignificação e aprendizagem de estratégias e conceitos, assim como o desenvolvimento cognitivo (VERTUAN et al. , 2012, p.9).

Dessa forma, a atividade de Modelagem é compreendida numa esfera social que se correlacionada com o desenvolvimento cognitivo. Nesse aspecto, conhecer a forma como integrar tal atividade na sala de aula é fundamental para sua implementação.

Ao abordarmos a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem temos que ter claros os múltiplos aspectos relacionados a ela. Nesse sentido, Caldeira (2009) compreende que a modelagem dá "significados", com base nas experiências, ao que para alunos já estava findado em si por atribuir a matemática um caráter de exata e baseada em regras e convenções, e o professor em meio a esse contexto também acabava por ver a "transmissão" como método mais propício a tais regras e convenções. A modelagem vem a calhar sobre tais convenções e regras, oportunizando realizar investigações e experimentos.

Para Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é vista como estratégia de aprendizagem de forma planejada e aplicada de acordo com as etapas que permeiam o experimento de forma que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado, sendo esse processo mais importante do que se chegar a um modelo de sucesso. O supracitado autor salienta ainda que em tal metodologia o processo de ensino e aprendizagem rompe com a costumeira relação professor-aluno, para um avanço do aluno com seu meio social.

Independente da etapa, a Modelagem Matemática trilha um processo que faz conexão da teoria com a prática, onde as ações realizadas pelos alunos são compreendidas como a prática desse processo (CARDOSO et al. , 2016). Diferentes relatos do desenvolvimento de atividades de Modelagem em sala de aula ratificam essa ponte entre a teoria e a prática.

Em uma atividade de modelagem desenvolvida com alunos do curso de Biologia, Soares e Borba (2012) relatam que a associação de um modelo matemático a um fenômeno biológico propiciou aos alunos uma aproximação da matemática com um assunto do interesse dos mesmos, atribuindo sentido ao que para eles, até então, não tinha um significado perceptível da matemática.

Vicentin (2016), em diálogos informais com seus alunos do Ensino Médio percebeu que os mesmos não compreendiam alguns conceitos matemáticos, bem como não conseguiam identificar em que se aplicavam no seu dia a dia. Assim, o referido autor recorreu a Modelagem Matemática com o intuito de romper com a abordagem tradicional e suprir as deficiências apresentadas pelos discentes.

Com a aplicação da supracitada metodologia, Vicentin (2016) notou uma grande motivação nos educandos, momentos de aprendizagem significativa, compreensão de como a matemática é aplicada no cotidiano, conclusões estas tiradas pelas discussões e resoluções dos problemas. Em contrapartida, houve num primeiro momento resistência em trabalhar em equipe por parte dos próprios alunos e certa inquietação do professor com o tempo que teve que ser destinado a atividade, pois a mesma requereu um período maior do que se estivesse realizando atividades de praxe.

Conforme Barbosa (2001), Pontes e Burak (2016) a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem aguça a motivação por propiciar aos alunos a aplicabilidade do que estudam em sala de aula. Facilitação da aprendizagem por interagir a matemática com outros assuntos e os prepara para utilizar a Matemática em diferentes áreas, no desenvolvimento de habilidades investigativas e compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Na execução de uma atividade de modelagem, um leque de ações é desenvolvido, como:

> a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática, a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução, que implica em uma validação, constitui um ambiente de investigação em que tão importante quanto as respostas encontradas para o problema investigado, são as discussões realizadas durante a resolução do problema. Dentre muitos aspectos que um ambiente de Modelagem proporciona, ocorre a externalização de modelos mentais dos alunos, que são artefatos cognitivos importantes a partir dos quais o professor pode agir no sentido de realizar mediação no processo de significação/ ressignificação dos alunos (VERTUAN et al. , 2012, p.5)

Nesse cenário de inserção da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem o professor é um orientador nas experiências em que os alunos de forma autônoma criam, desenvolvem, modelam, reformulam etc. como construtores do conhecimento matemático. De forma que a complexidade da sociedade contemporânea e os desafios impostos por ela aos cidadãos e futuros profissionais estão relacionados.

Capítulo 2

Epidemiologia Matemática

Neste capítulo apresentaremos a Modelagem Matemática em epidemiologia no contexto histórico e alguns conceitos básicos sobre o assunto. Posteriormente, comentaremos sobre alguns modelos matemáticos epidemiológicos como o SI e SIS. Quanto ao modelo SIR optamos por discorrer sobre o mesmo no capítulo seguinte por ser nosso objeto de estudo. 45

2.1 Epidemiologia Matemática: Contexto histórico e conceitos básicos

"A epidemiologia matemática se baseia em fundamentos biológicos para o estudo da interação entre o hospedeiro (homem, animal, computador) e o parasita (vírus, bactérias)" (SANTANA, 2012, p.5).

O foco matemático nesse campo do conhecimento teve início em 1760 com o matemático Daniel Bernoulli, contudo seus estudos eram mais direcionados a estatística, na descrição da varíola. Já no perído de 1906 a 1908 Ross mostrou em seus estudos sobre a malária, que a doença somente se instalava caso houvesse um número mínimo de mosquitos vetores do vírus para transmitir a doença. Nesse mesmo período Hamer fez preponderantes afirmações quanto ao desenvolvimento de epidemias e sua relação entre suscetíveis, infectados e taxa de contato entre estes. Sendo denominado esse fato de lei de ação das massas (SANTANA, 2012; BARROS, 2007; QUARTIERI, 2004).

Contudo, estudos matemáticos mais aprofundados e profícuos surgiram anos depois com contribuições de Kermack e McKendrick (1921 a 1939), que convergiram no Teorema do Limiar, o qual diz que para que uma doença se torne uma epidemia é necessário que ultrapasse um número mínimo de suscetíveis. Tal teorema esta relacionado ao número de infectados, recuperados e a taxa de mortalidade referente à epidemia. A lei da ação das massas juntamente com o teorema do limiar compõe um dos principais alicerces dos estudos matemáticos epidemiológicos (BARROS, 2007; LÓPEZ & SUÁREZ, 2007).

Posteriormente, nos anos 60, pode-se enfatizar uma revolução na epidemiologia com a introdução da computação eletrônica na área o que desencadeou ainda mais a sua relação intrínseca com a matemática. Conforme Quartieri (2004), nas décadas de 70 e 80, três principais tendências marcaram o período.

A primeira tendência subjaz a formalização do objeto epidemiológico propiciada pela matemática conjuntamente com a inserção e expansão tecnológica de computadores e *softwares* específicos. Na segunda tendência ocorre à admissão de uma "epidemiologia clínica" como forma de aplicação da metodologia epidemiológica fora do contexto de maior amplitude. Na última tendência do período repercutem, na Europa e América Latina, posicionamentos mais severos com maior criticidade e reflexão a cerca da epidemiologia e o contexto de "biologização" da saúde pública.

Pode-se observar que a epidemiologia matemática teve um rápido desenvolvimento depois do século 20 e na contemporaneidade a integração de estudos nas diferentes áreas do conhecimento tem resultado em aplicações no controle de expansão de epidemias, teoria de controle em modelos epidêmicos, interferências sazonais de doenças, teoria do limiar em modelos estocásticos e determinísticos de maior complexidade, dentre outros (BARROS, 2007; LÓPEZ & SUÁREZ, 2007).

Os termos "modelos estocásticos" e "determinísticos", frequentemente, serão vistos em trabalhos sobre epidemiologia matemática. O primeiro termo, descreve estatisticamente, mais especificamente, à probabilidade de transição de uma epidemiologia a outra. Já os modelos determinísticos são aqueles que, matematicamente, através de equações diferenciais, equações de diferença, equações íntegro-diferenciais, descrevem a evolução epidemiológica no decorrer do tempo (QUARTIERI, 2004). Neste trabalho os modelos adotados serão os determinísticos.

Ainda no que tange a epidemia, o Código Penal brasileiro (1940) traz em seu capítulo III intitulado "Crimes Contra a Saúde Pública", a reclusão como pena aplicada a quem "causar epidemia, mediante a propagação de germes patogênicos".

Volta e meia a mídia divulga notícias de epidemias em diferentes regiões do mundo que acometem populações humanas e animais, preocupando populares, autoridades e órgãos da saúde pública (BARROS, 2007).

Registros evidenciam que a epidemia que mais levou a óbitos, de 50 a 100 milhões, foi à gripe espanhola, no período de 1918 a 1919. Embora seus primeiros casos tenham sido nos Estados Unidos, a gripe espanhola obteve esse nome pelo fato de um número maior de mortes terem ocorrido na Espanha e até o rei Alfonso VIII ter contraído a doença na época. Por ter se alastrado mundialmente, a gripe espanhola se tornou uma pandemia. No Brasil, por exemplo, foram cerca de 300 mil mortes (Barry, 2005; Araújo, 2006 apud SCHIMIT, 2010).

Entre os anos de 1347 e 1351, estima-se que a peste negra dizimou aproximadamente 1000 vilarejos ingleses. (Araújo, 2006, Watts, 1999 apud SCHIMIT, 2010). E em meados de 1400 essa epidemia dizimou cerca de 25 milhões de pessoas da população europeia (HAYS, 2005).

Após um pouco mais de um século, um número significativo de Astecas e Incas na América Central e do Sul foram contaminados pelo vírus da varíola trazido por europeus infectados. Inclusive, com essa propagação da doença Hernán Cortés conseguiu sair vitorioso de uma batalha que dispunha de apenas 500 homens contra um exército de milhões (Araújo, 2006 apud SCHIMIT, 2010). A doença foi erradicada em 1979 (HAYS, 2005).

Outras epidemias (pandemias) como a doença do suor que matou aproximadamente 3 milhões de pessoas na Inglaterra entre 1485 e 1551, atingindo inclusive o Martinho Lutero e a peste de Justiniano em 542 d.c que matou mais de 300 mil habitantes do Império Bizantino, são consideradas de maior destaque na história (Araújo, 2006 apud SCHIMIT, 2010).

De acordo com Schimit (2010) a expansão das rotas marítimas propiciou um contato maior entre as pessoas e um alcance geográfico que contribuíram para tornar epidemias que até então eram locais em pandemias globais.

No Brasil, de acordo com o Ministério da Saúde (2019a), a partir de setembro de 2015 uma nova epidemia causada pelo vírus Zika foi identificada, com um aumento de casos na região Nordeste do país. Há relatos de que a infecção pelo vírus Zika é conhecida da comunidade científica, com casos relatados em outros países há no mínimo 60 anos. Entretanto, no Brasil, a investigação foi voltada para a possível teratogenicidade ligada a esse vírus e, até então, pouco conhecida. Hoje os casos no país estão estabilizados, no entanto, o Ministério da Saúde continua investindo nas ações de prevenção, atenção à saúde e pesquisa.

Nesse cenário epidemiólogico, a construção de modelos matemáticos é uma das ferramentas usadas hoje para seu estudo. No entanto, sua aplicação é por vezes limitada, devido à falta de conhecimento e informação sobre os princípios básicos da Modelagem Matemática (LÓPEZ & SUÁREZ, 2007).

De acordo com Quartieri (2004, p. 8) "o modelo matemático deve explicar a situação vigente de uma epidemia em uma comunidade." Podendo assim o modelo ser utilizado para redizer as possíveis mudanças resultantes de alterações nas condições bióticas e abióticas."

Conforme o mecanismo etiológico subjacente, as doenças podem ser classificadas em duas categorias: doenças infecciosas e doenças não infecciosas. No qual a primeira é a doença clinicamente manifestada dos homens ou animais, resultante de uma infecção e no caso da segunda são todas aquelas doenças não resultantes de uma infecção como, por exemplo, a diabetes.

Dentre os agentes infecciosos parasitas, microparasitas e macroparasitas, neste trabalho estudaremos as doenças causadas por microparasitas, que compreendem vírus, bactérias e protozoários, cujo hospedeiro infectado é a unidade básica de estudos.

Em relação ao tempo de durabilidade de uma infecção, no caso de uma doença podemos mencionar três períodos: latente, infeccioso e de recuperação. No primeiro período o indivíduo já se encontra com a infecção, porém esta ainda não se manifestou. No segundo período a infecção já manifestou e o hospedeiro já pode transmiti-la para um suscetível. No último período o indivíduo já se encontra inapto para subtrair ou mesmo disseminar o vírus, não sendo, portanto, nem infeccioso nem suscetível. Em muitos casos, os hospedeiros que se encontram nessa fase são imunes a possíveis contaminações virais. Até mesmo durante toda a vida.

De forma sucinta,

> um indivíduo, ao contrair uma doença virótica, deixa de ser suscetível e passa a ser infectado. Neste momento, o sistema imunológico do indivíduo passa a produzir anticorpos para combater o vírus invasor. Quando o indivíduo se cura da doença, dizemos que ele está recuperado e, em geral, tornou-se imune à doença (SANTANA, 2012, p.5).

É importante salientar que a distribuição de doenças na população ocorrem em períodos endêmicos, epidêmicos e interepidemicos (ou esporádicos) que é o período entre duas doenças epidêmicas. Onde a endemia se caracteriza como a presença constante de uma doença em um grupo de pessoas em uma determinada área geográfica. É o tipo de doença parasitaria que mais se encontra no Brasil. Já a epidemia é definida como a elevação de uma doença numa determinada população de forma progressiva, descontrolada e inesperada. Ocorrendo a extrapolação dos valores endêmicos ou esperados. Alguns casos levam aos surtos epidêmicos. Quanto as pandemias, estas são conceituadas como epidemias que ocorrem de maneira concomitante em vários países.

2.2 Modelos Matemáticos Epidemiológicos

Variados modelos podem ser construídos considerando fatores que os farão diferir, como a escala de tempo com dinâmica vital ou não (a dinâmica vital ocorre quando são admitidas interferências demográficas e a não vital, quando estas são desconsideradas), tipo de mortalidade, podendo esta ser induzida pela doença ou não, assim como o compartimento dinâmico demonstrado pelos indivíduos na ausência da doença.

2.2.1 O modelo SI

O modelo denominado SI dispõe apenas de duas classes, suscetíveis e infectados. É considerado um modelo compartimental simples em que não há recuperados, sendo assim em toda a população ou o individuo é suscetível ou ele é infectado. A AIDS e a herpes são exemplos de doenças representadas pelo modelo SI (SABETI, 2011; ALMEIDA, 2014).

No modelo adotado com a dinâmica vital todo indivíduo nasce suscetível e todo infectado é considerado infeccioso, de forma que nenhum infectado passe a reintegrar a classe dos suscetíveis. Para efeitos de aplicação do modelo são consideradas ainda as hipóteses de a taxa de natalidade ser igual a taxa de mortalidade, o que implica que o tamanho da população é constante. E, ainda, a interação entre as duas classes ocorre de forma homogênea, sendo que a doença se propaga em um meio isolado, ou seja, não há migrações.

O supracitado modelo (com dinâmica vital) tem seu esquema compartimental representado na figura 2.1 a seguir, em que μ representa a taxa de natalidade e mortalidade, e λ a taxa de transmissão.

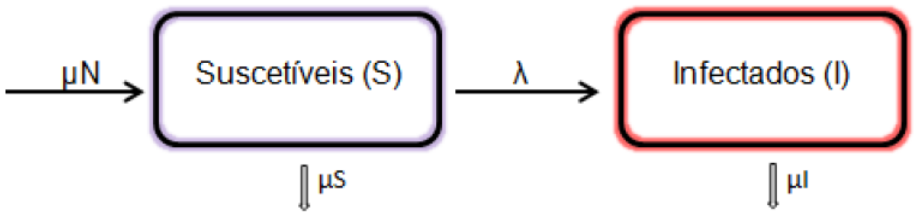


Figura 2.1: Modelo SI com dinâmica vital

O modelo SI com dinâmica vital também pode ser expresso por meio das seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \lambda \frac{SI}{N} - \mu S \tag{2.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} - \mu I \tag{2.2}$$

Na primeira equação, μN representa os nascidos vivos, o termo $-\lambda \frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa a população de indivíduos suscetíveis que passaram a ser infectados e $-\mu \mathrm{S}$ representa as mortes de indivíduos suscetíveis.

Na segunda equação, o termo $\lambda \frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa os indivíduos que deixaram de ser suscetíveis e passaram a ser infectados, o termo $-\mu \mathrm{I}$ representa os indivíduos infectados que morreram.

A taxa de infecção entre suscetíveis e infectados é proporcional ao número de contato. Nesse modelo as interferências demográficas são levadas em consideração, sendo importante frisar, ainda, que a duração da doença é representada em meses ou anos.

No modelo SI sem dinâmica vital considera-se que a escala temporal da doença é muito avançada em detrimento da dinâmica demográfica populacional, os nascimentos e as mortes são desconsiderados no período de vigência da doença para efeitos de aplicação do modelo, período este que decorre em dias ou semanas.

Para efeitos de aplicação do modelo considera-se, assim como no modelo com dinâmica vital, que a população é constante. Contudo neste modelo, assume-se que na escala de tempo de interesse não ocorram nem nascimentos, nem mortes e nem admite-se que ocorra a emigração ou a imigração de algum indivíduo da população em questão.

O fluxograma 2.2 a seguir representa o esquema compartimental do modelo, em pauta, sem dinâmica vital.

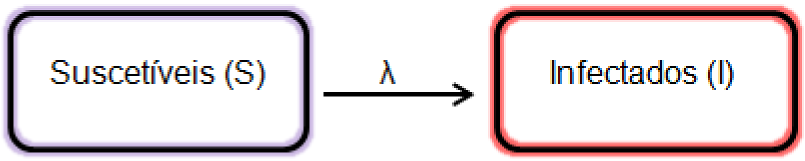


Figura 2.2: Modelo SI sem dinâmica vital

O modelo SI sem dinâmica vital pode ser representado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda \frac{SI}{N} \tag{2.3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda \frac{SI}{N} \tag{2.4}$$

Na primeira equação, o termo $-\lambda\frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa a população de indivíduos suscetíveis que se tornaram infectados e na segunda equação, o termo $\lambda\frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa os indivíduos que deixaram, portanto, de fazer parte da classe de suscetíveis e passaram a integrar a classe de de infectados.

Ainda podemos ter situações em que o modelo SI poderá ser aplicado com dinâmica vital, porém sem conservação da dinâmica total. Podendo o indivíduo ter a morte induzida pela doença, ou ter a morte induzida pela doença e ainda dispor de uma taxa de natalidade diferente da taxa de mortalidade, em que podem nesse caso a taxa de natalidade ser ou não afetada pelos infectados. E, por fim, a condição de um indivíduo suportar a doença.

2.2.2 O modelo SIS

No modelo SIS (suscetíveis – infectados – suscetíveis), em que pessoas saudáveis são suscetíveis para determinada doença, após serem infectadas, concluído o período de contração da doença e o consequente retorno a um estado saudável, a mesma pessoa passa a integrar a classe de suscetíveis novamente. Nesse modelo não há período latente. E o processo de infecção e reintegração a classe de suscetíveis ocorre de forma muito rápida.

Um exemplo corriqueiro de doença que representa o modelo SIS é o resfriado, onde todos os indivíduos saudáveis são considerados suscetíveis e quando infectados, diante de cuidados médicos, se recuperam rapidamente e são consequentemente reintegrados a classe de suscetíveis.

Esse comum resfriado pode ser o precursor de uma epidemia. A pessoa que até então era considerada saudável e por essa razão também suscetível, contrai um resfriado e tosse próximo à outra pessoa saudável que, por conseguinte subtrairá o resfriado e esse processo portará como um efeito dominó, porém em ciclo. Doenças com agente bacteriano como tuberculose, malária e gonorreia também se enquadram no conceito de estudo do modelo SIS (SCHIMIT, 2010).

No modelo SIS também dispomos do modelo com dinâmica vital e sem dinâmica vital, onde o primeiro faz menção a adoção do modelo considerando-se características e interferências demográficas num período de meses ou anos. Já o modelo sem dinâmica vital desconsidera os nascidos vivos e as mortes, para efeitos do modelo, uma vez que o tempo de duração da infecção é muito rápido, se tratando de dias ou semanas apenas. Nesse sentido, consoantes demográficas são incompatíveis com a acelerada contaminação e recuperação da infecção.

O fluxograma que representa o modelo em questão com dinâmica vital é expresso na figura 2.3, em que admite-se uma população constante, na qual o número de nascimentos é equivalente ao número de mortes (sendo μ a constante de proporcionalidade) e os indivíduos interagem de forma homogênea, sendo todos os recém-nascidos também suscetíveis.

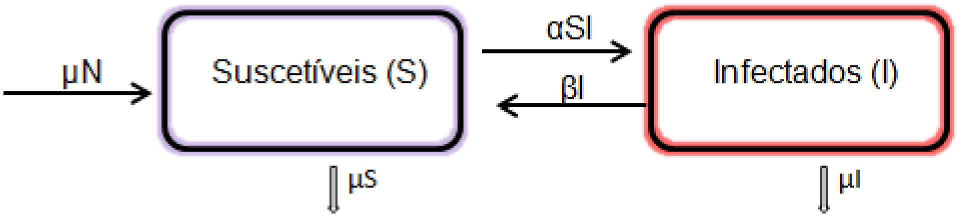


Figura 2.3: Modelo SIS com dinâmica vital

Esse modelo com dinâmica vital pode ser representado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \alpha SI + \beta I - \mu S \tag{2.5}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \mu I \tag{2.6}$$

Temos o produto SI com uma constante de proporcionalidade α (sendo $\alpha > 0$ e denominada taxa de contato) representando uma taxa proporcional a qual os indivíduos suscetíveis tornam-se infectados. Quando uma pessoa infectada se recupera ela torna-se suscetível novamente a uma taxa que é proporcional a I com constante de proporcionalidade β (sendo $\beta > 0$ e denominada taxa de recuperação). Ainda, μN representando a taxa de nascimento de suscetíveis, μS a taxa de mortalidade de suscetíveis e μI a taxa de mortalidade de infectados.

Na primeira equação, o termo $-\alpha SI$ representa a população de indivíduos suscetíveis que se tornaram infectados, βI os infetados que se recuperaram.

Na segunda equação, o termo αSI representa os indivíduos que deixaram de fazer parte da classe de suscetíveis e passaram a integrar a classe de de infectados $-\beta I$ os infectados que foram recuperados, passando assim a integrar a classe de suscetíveis novamente.

O fluxograma 2.4 representa o modelo SIS sem dinâmica vital, no qual αSI representa o número total de indivíduos infectados e βI o número total de indivíduos infectados que retornam a classe de suscetíveis, isso num dado período de tempo.

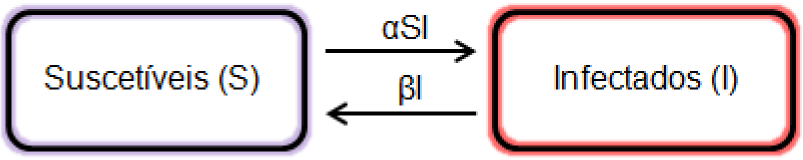


Figura 2.4: Modelo SIS sem dinâmica vital

Uma das características que difere o modelo SIS com dinâmica vital do comportamento do referido modelo sem dinâmica vital é que, partindo do pressuposto de um equilíbrio demográfico, no modelo com dinâmica vital ocorrem nascimentos e mortes e todos os recém-nascidos são suscetíveis (QUARTIERI, 2004).

Podemos ainda exemplificar o modelo SIS, sem dinâmica vital, por meio das seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \tag{2.7}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \tag{2.8}$$

sendo α e β constantes positivas. Os parâmetros α e β relacionam-se, respectivamente, à taxa de infecção e à taxa de recuperação.

Na primeira equação, o termo $-\alpha SI$ representa a população de indivíduos suscetíveis que se tornaram infectados e βI os infetados que se recuperaram.

Na segunda equação, o termo αSI representa os indivíduos que deixaram de fazer parte da classe de suscetíveis e passaram a integrar a classe de de infectados e $-\beta I$ os infectados que foram recuperados, passando assim a integrar a classe de suscetíveis novamente.

Pretende-se, ao descrever a evolução temporal de uma doença infecciosa, modelando-as, por meio de equações diferenciais ordinárias (EDOs), prever sua dinâmica e criar alternativas que visem sua erradicação (SCHIMIT, 2010).

De forma sucinta, podemos dizer que o que difere o modelo SIS do modelo SI é o retorno dos infectados a classe dos suscetíveis após se recuperar da enfermidade. Esse fato é expresso nos casos comportamentais através do termo βI presente no modelo SIS e ausente no modelo SI.

Capítulo 3

O Modelo SIR

O modelo SIR é um modelo em que a população é dividida em três compartimentos, a saber, Suscetíveis, Infectados e Recuperados, conforme segue definição.

- Suscetíveis: São os indivíduos que não possuem a doença e estão suscetíveis a contraí - la;
- Infectados: São os indivíduos que possuem a doença;
- Recuperados: São os indivíduos que se recuperaram da doença e estão, temporariamente ou permanente, imunes a ela.

O modelo SIR foi proposto por Kermack e McKendrick no ano de 1927, e sua difusão para a discussão de epidemias se mostrou muito eficiente, no sentido de possibilitar avaliar situações futuras, baseadas em dados passados e atuais, criando estratégias de reversão e controle, bem como um diagnóstico para os possíveis impactos. Pode-se, ainda, enfatizar sua viabilidade quanto a sua estrutura simplificada que desencadeia equações que definem o sistema e ainda ao fato de propiciar uma abordagem desde o estudo de epidemias com mecanismos simples aos mais complexos (QUARTIERI, 2004; LÓPEZ & SUÁREZ, 2007; BARROS, 2007).

O estudo de Kermack e McKendrick no ano de 1927, teve como propósito elucidar observações sobre a peste bubônica ocorrida em Bombaim (hoje chamada de Mumbai), na Índia, no período de 1905 a 1906, em que houve um crescimento rápido e uma queda repentina do número de pessoas infectadas (SCHIMIT, 2010).

A sigla SIR foi popularizada a partir de então e o modelo foi tomado como base para muitos estudos epidemiológicos, quando ainda fez-se o uso do primeiro modelo usando EDO como forma de representar epidemias (KERMACK & MCKENDRICK, 1927). Nesse modelo são modeladas doenças como o sarampo, caxumba e rubéola, dentre outras.

A rubéola, por exemplo, é uma doença infecto-contagiosa que quando acomete um indivíduo, o mesmo a transmite a um suscetível, onde o contágio ocorre comumente pelas vias respiratórias com a aspiração de gotículas de saliva ou secreção nasal. Após algum tempo, contudo, esse indivíduo torna - se recuperado da doença e adquire imunidade a ela, passando a integrar a classe dos Recuperados. Sendo por essa razão desconsiderado suscetível a mesma enfermidade.

Nessa dinâmica, considerando uma população fixa (fechada), teremos que $N = S(t)+I(t)+R(t)$, onde N representa a população total e t, o tempo. A dinâmica do modelo SIR é mostrada na figura 3.1

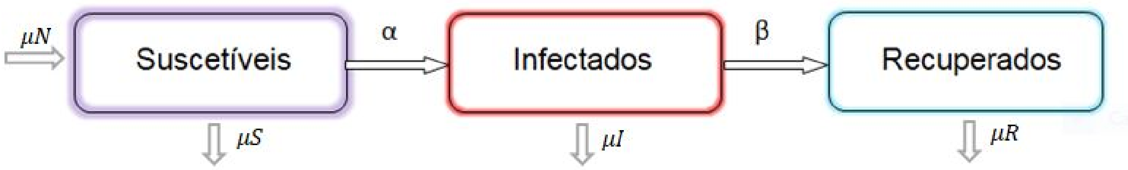


Figura 3.1: Dinâmica do modelo SIR

Em que α corresponde a taxa de transmissão da doença e β corresponde a taxa de recuperação. Existem ainda as taxas de transição entre as categorias,

$$\frac{dS}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} \qquad \frac{dR}{dt}$$

que são respectivamente as taxas de mudança de suscetíveis, infectados e recuperados.

Esse modelo pode ser representado por um sistema de equações diferencias ordinárias não lineares de primeira ordem, como a seguir

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \alpha \frac{\mathrm{SI}}{N} - \mu \mathrm{S} \tag{3.1}$$

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \alpha\frac{\mathrm{SI}}{N} - \beta\mathrm{I} - \mu\mathrm{I} \tag{3.2}$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \beta\mathrm{I} - \mu\mathrm{R} \tag{3.3}$$

onde μ é uma constante positiva que corresponde a taxa de morte. Neste caso, considera-se que a taxa de morte é igual a taxa de natalidade.

Na primeira equação, μN representa os nascidos vivos, o termo $-\alpha\frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa a população de indivíduos que eram suscetíveis e se tornaram infectados e $-\mu\mathrm{S}$ representa os indivíduos suscetíveis que morreram.

Na segunda equação, o termo $\alpha\frac{\mathrm{SI}}{N}$ representa os indivíduos que deixaram de ser suscetíveis e passaram a ser infectados, o termo $-\beta\mathrm{I}$ representa os indivíduos infectados e $-\mu\mathrm{I}$ representa os indivíduos infectados que morreram.

Na terceira equação, o termo $\beta\mathrm{I}$ representa os indivíduos que deixaram de ser infectados e passaram a ser recuperados e o termo $-\mu\mathrm{R}$, os indivíduos recuperados que morreram.

Ainda é possível representar o supracitado modelo como um sistema de equações de diferenças, $\Delta S(t)$, $\Delta I(t)$ e $\Delta R(t)$ equivalentes as respectivas equações diferenciais ordinárias abordadas anteriormente. Admitindo um intervalo de tempo $[t, t+1]$, tem-se que $\Delta S(t) = S(t+1) - S(t)$, $\Delta I(t) = I(t+1) - I(t)$ e $\Delta R(t) = R(t+1) - R(t)$ então o modelo SIR pode ser reescrito como

$$\frac{\Delta\mathrm{S}}{\Delta t} = \mu N - \alpha\frac{SI}{N} - \mu S \tag{3.4}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{I}}{\Delta t} = \alpha\frac{\mathrm{SI}}{N} - \beta\mathrm{I} - \mu\mathrm{I} \tag{3.5}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{R}}{\Delta t} = \beta\mathrm{I} - \mu\mathrm{R} \tag{3.6}$$

escrevendo $S(t) = S_t$, $I(t) = I_t$ e $R(t) = R_t$, o modelo SIR a equações de diferenças são da forma

$$S_{t+1} = S_t + \mu N - \alpha\frac{S_t I_t}{N} - \mu S_t \tag{3.7}$$

$$I_{t+1} = I_t + \alpha \frac{S_t I_t}{N} - \beta I_t - \mu I_t \tag{3.8}$$

$$R_{t+1} = R_t + \beta I_t - \mu R_t \tag{3.9}$$

Com base nessas equações pode-se determinar a solução (numérica) do modelo e mediante os resultados fazer estimativas.

3.1 O modelo SIR com vacinação

Desde a antiguidade notou-se que os seres humanos, ao se recuperarem de determinada doença, tornavam-se imunes a ela. Por este motivo, buscavam-se meios de conter a disseminação de epidemias. No século XV, por exemplo, o vírus da varíola foi uma doença que se alastrou, sendo a partir desse período realizadas constantes tentativas de indução de imunidade nos indivíduos que não haviam tido contato prévio com vírus (YANG, 2001).

Nesse cenário, a vacinação foi um dos meios eficientes de controle encontrado. Datando de 1976, a primeira técnica de vacinação desenvolvida por Edward Jenner estava relacionada a um tipo de varíola que acometia as vacas. Jenner observou que as pessoas que tinham contato direto com esses animais através da ordenha desenvolviam imunidade a doença. Dessa forma, o mesmo realizou experimentos os quais o levou a conclusão de que a vacinação induzia a imunidade contra a doença em questão. Com a descoberta da vacina a varíola foi erradicada anos depois. Não obstante, a palavra vacina - oriunda do latim vaccinae - cujo significado é “da vaca” passou a ser empregada na designação de inóculos capazes de produzir anticorpos (CANAL & VAZ, 2007).

Mesmo depois de identificada a vacina como forma de contenção de uma doença, várias manifestações mundiais ocorreram como protesto contra a sua obrigação. No Brasil, por exemplo, ocorreu a Revolta da Vacina no século XIX, em que as pessoas se recusavam a receber a vacina contra a varíola (MINISTÉRIO DA SAÚDE, 2007).

De maneira similar as diferentes formas de modelar epidemias, existem também maneiras diferentes de se modelar a vacinação. Como, por exemplo, a “vacinação constante” que é um modelo que se refere a vacinação na população de um determinado percentual de recém-nascidos. A "vacinação pulsada" já considera vacinações periódicas para certa quantidade de pessoas da população de forma que se extinga ou, no mínimo, se chegue a um nível suportável da doença (SHULGIN et al. , 1998).

Bauch e Earn (2004) propõem outro tipo de modelo de vacinação em que considera que a pessoa se comporta de acordo com as informações que ela obtém sobre o sucesso ou fracasso da vacina, dos casos de morte causados pela mesma, bem como os casos de morte que não envolve a vacinação. Dessa forma, os pais decidem se vale ou não a pena vacinar seus filhos (SCHIMIT, 2010).

De fato, como forma de aumentar o número de indivíduos imunes a uma doença, campanhas de vacinação podem ser introduzidas propiciando uma redução do número de indivíduos aptos a enfermidade, ocasionado assim menos indivíduos infectados. No caso do supracitado modelo, uma campanha de vacinação contínua resultaria na representação compartimental expressa da seguinte maneira no processo em que α e β são as taxas de contaminação e recuperação, respectivamente e p é a taxa de vacinação da população suscetível. A simulação da dinâmica populacional via modelo SIR com vacinação é feita retirando uma parte da população de indivíduos suscetíveis e acrescentando esses indivíduos a classe dos Recuperados. A dinâmica desse modelo está representada pelo fluxograma na figura 3.2

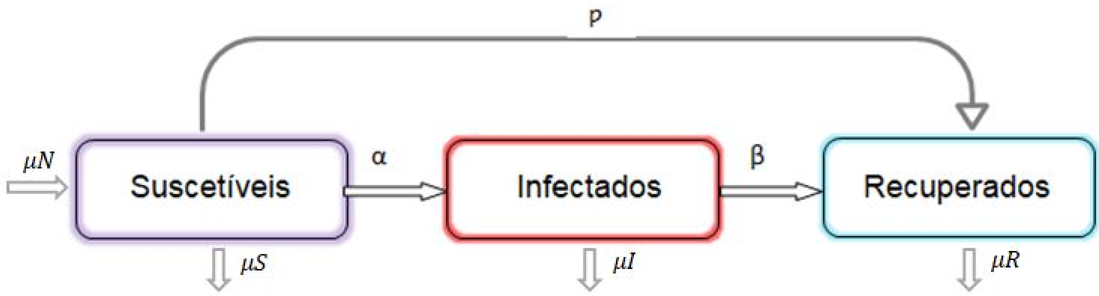


Figura 3.2: Dinâmica do modelo SIR com vacinação

onde p representa a taxa da população imunizada e a vacinação não garante 100% de imunidade aos que foram vacinados. O modelo SIR com vacinação está descrito nas equações do sistema (3.10) - (3.11) - (3.12)

$$S_{t+1} = S_t + \mu(1-p) - \alpha S_t I_t - \mu S_t \tag{3.10}$$

$$I_{t+1} = I_t + \alpha S_t I_t - \beta I_t - \mu I_t \tag{3.11}$$

$$R_{t+1} = R_t + p\mu + \beta I_t - \mu R_t \tag{3.12}$$

onde S_t, I_t e R_t representam, respectivamente, as proporções de indivíduos, suscetíveis, infectados e recuperados no instante t.

Temos, na primeira equação, o número $\mu(1-p)$ representando a proporção de nascidos que não foram vacinados, o termo $-\alpha S_t I_t$ representando a proporção de indivíduos da população que deixaram de ser suscetíveis e passaram a ser infectados e $-\mu S_t$ representando as mortes de indivíduos suscetíveis.

Na segunda equação, $\alpha S_t I_t$ representa a proporção indivíduos que pertenciam a classe de suscetíveis e passaram a ser infectados, βI_t representa a proporção de indivíduos infectados e $-\mu I_t$ representa a proporção de indivíduos infectados que morreram.

Na terceira equação, $p\mu$ representa a proporção de nascidos vacinados, βI_t representa a proporção de indivíduos que deixaram de ser infectados e passaram a ser recuperados e $-\mu R_t$ a proporção de indivíduos recuperados que morreram.

Como mencionado, um dos propósitos dos estudos desenvolvidos sobre doenças infeciosas é encontrar um meio de dizimá-las, para tanto um dos passos iniciais é otimizar o controle. Essa otimização pode ser propiciada pelos modelos no sentido de tornarem mais eficientes tais medidas de controle e também possibilitarem ampliar recursos considerados reduzidos (KEELING & ROHANI, 2008; SANTANA, 2012).

Nesse contexto, o meio e as circunstâncias nas quais o indivíduo se encontra contribuem significativamente para a decisão de quais estratégias e medidas de controle tomar, pois a escolha de uma forma de contenção da transmissão está relacionada com o hospedeiro, a doença e a dimensão da epidemia. Essa busca por medidas e estratégias tem por finalidade minimizar a contaminação entre os infectados e os suscetíveis (KEELING & ROHANI, 2008).

3.2 Número de Reprodutibilidade Basal

Reprodutibilidade basal é o termo empregado para designar o número esperado de casos secundários de uma doença a partir de um caso primário que um indivíduo produz durante todo o seu período de infecção entre uma população suscetível. Esse número de reprodutibilidade basal é indicado por $\mathcal{R}_0$ (DIEKMANN & HEESTERBEEK, 2000).

Nesse sentido, podemos inferir que para chegarmos à conclusão de que uma determinada doença poderá resultar em um surto epidêmico ou não, basta utilizarmos o número de reprodutibilidade basal.

Como mencionado anteriormente nesse trabalho, Kermack e McKendrick em 1927 foram os precursores nesse campo de estudos que resultou no teorema do Limiar que seria outra denominação para a mesma teoria do número de reprodutibilidade basal. De acordo com Sabeti (2011, p. 14) "a importância do $\mathcal{R}_0$ reside, principalmente, no fato de que pode ser usado para se calcular a proporção mínima necessária para se aplicar a vacinação de forma que a doença seja eliminada".

Embora não seja possível estimar experimentalmente a razão de reprodutibilidade basal, pois a mesma se trata de um parâmetro virtual, o $\mathcal{R}_0$ pode ser determinado matematicamente (YANG, 2001). Esse parâmetro pode ser estimado de diferentes maneiras, seja segundo os modelos adotados da doença infecciosa, seja de acordo os fatores biológicos (SABETI, 2011).

O número de reprodutibilidade basal depende da taxa de contato de um indivíduo infeccioso (α) em certo período de tempo, com as demais classes da população, suscetíveis, infectados e recuperados (SABETI, 2011). Esse período de tempo pode ser em dias, meses ou mesmo anos, desde que se atente ao fato da população em questão ser grande o bastante para que não ocorra muita alteração dos parâmetros α e I durante a unidade adotada.

A taxa de mortalidade μ e a taxa de recuperação β, também são parâmetros essenciais para o estudo do número de reprodutibilidade basal. Caso um desses parâmetros seja muito alto os indivíduos não se manterão por muito tempo dentro do período de infecção.

> Se a taxa de mortalidade for alta então os indivíduos não permanecerão muito tempo dentro do período de infecção, logo o período médio de estadia no estado infeccioso será curto. Por outro lado, caso a taxa de recuperação for alta, a tendência é que este período seja mais longo (MA, 2009 apud ALMEIDA, 2014).

O período de infecção pode ser expresso como

$$P = \frac{1}{\beta + \mu}. \tag{3.13}$$

O número de reprodutibilidade basal é diretamente proporcional ao período médio de infecção e a taxa de infecção, então, multiplicando a equação (3.13) por α, obtemos o número médio de contatos de um indivíduo infeccioso

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha}{\mu + \beta} \tag{3.14}$$

É de significativa importância nas pesquisas epidemiológicas o estudo do parâmetro $\mathcal{R}_0$, pois através dele há a viabilidade em calcular a velocidade inicial de crescimento de uma epidemia em uma dada população.

Teorema: Se $\mathcal{R}_0$ < 1, a doença erradica.

Demonstração: Da equação (3.11) temos que $\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta t} = [\alpha\ S_t I_t - (\mu + \beta)]\, \mathrm{I}_t$. Como, inicialmente, a população é totalmente suscetível, temos que, ao introduzir um único indivíduo infectado, $\mathrm{S}_t \approx N$ e, portanto, $\frac{\Delta I}{\Delta t} \approx [\alpha - (\mu + \beta)]\, \mathrm{I}_t$. Multiplicando e dividindo por $\mu + \beta$ temos que $\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta t} \approx (\mu + \beta)\left[\frac{\alpha}{\mu + \beta} - 1\right] \mathrm{I}_t$, admitindo $\frac{\alpha}{\mu + \beta} = R_0$, temos $\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta t}$ = $(\mu + \beta)\,[\mathcal{R}_0 - 1]\, \mathrm{I}_t$.

Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então $\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta t} < 0$ a doença erradica.

Quando $\mathcal{R}_0 > 1$ cada ser humano infectado pode ser um vetor da doença, então esse indivíduo pode ser substituído por mais de uma pessoa infectada, o que pode ocasionar, inclusive, a contaminação de toda uma população suscetível. No entanto, se $\mathcal{R}_0$ for inferior a um, a doença é erradicada naturalmente no decorrer do tempo.

Nesse sentido, sendo $\mathcal{R}_0$ superior a um, é imprescindível que os meios responsáveis busquem medidas para conter ou dizimar a possível epidemia eminente, sendo a vacinação um exemplo de medida a ser tomada.

A Tabela (3.1) apresentada algumas epidemias oriundas de doenças infecciosas e para tanto dispomos, nesses casos, dos valores estimados para $\mathcal{R}_0$.

Doença	**Localidade**	**Período**	$\mathcal{R}_0$
Sarampo	Reino Unido	1958 - 1968	16 - 17
Catapora	EUA	1913 - 1921	9 - 10
Rubéola	Polônia	1970 - 1977	11 - 12
Poliomielite	Holanda	1960	6 - 7
Caxumba	EUA	1912 - 1916	4 - 7

Tabela 3.1: Estimativas de taxas de reprodutibilidade basal para algumas doenças infecciosas em alguns países em determinado período de tempo

3.3 Pontos de Equilíbrio

Resolvendo o sistema podemos encontrar os pontos de equilíbrio. Os mencionados pontos são aqueles em que a taxa de crescimento das populações de suscetíveis e infectados se mantêm estáveis.

Matematicamente, podemos dizer que os pontos de equilíbrio são aqueles onde a derivada se anula, ou, em caso de equações de diferenças, $f(t+1) = f(t)$, assim, para o nosso modelo, temos que $S_{t+1} = S_t = S$, $I_{t+1} = I_t = I$ e $R_{t+1} = R_t = R$ e, portanto,

$$\alpha SI + \mu S = (1-p)\mu \tag{3.15}$$

$$\alpha SI - (\mu + \beta)I = 0 \tag{3.16}$$

$$\mu R - \beta I = p\mu \tag{3.17}$$

Da equação (3.16) temos que $[\alpha S - (\mu + \beta)]I = 0$, donde $I = 0$ ou $S = \dfrac{\mu+\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$. Para $I = 0$ temos que $\mu S = (1-p)\mu \Longrightarrow S = 1-p$, da equação (3.17) temos $\mu R = p\mu \Longrightarrow R = p$. Dessa forma, um ponto de equilíbrio do sistema de equações (3.10) - (3.12) é o ponto $P_0 = (1-p, 0, p)$. Para $S = \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$ temos que, da equação (3.15) $\dfrac{\alpha}{\mathcal{R}_0}I + \dfrac{\mu}{\mathcal{R}_0} = \mu(1-p) \Longrightarrow I = \dfrac{\mu}{\alpha}[(1-p)\mathcal{R}_0 - 1]$ e, da equação (3.17) temos que

$\mu R - \beta\dfrac{\mu}{\alpha}\left[(1-p)\mathcal{R}_0 - p\right] \Longrightarrow R = p + \dfrac{\beta}{\alpha}\left[(1-p)\mathcal{R}_0 - 1\right]$, logo, outro ponto de equilíbrio é o ponto $P_1 = \left(\dfrac{1}{\mathcal{R}_0}, \dfrac{\mu}{\alpha}(1-p)\mathcal{R}_\prime - 1, p + \dfrac{\beta}{\alpha}\left[(1-p)\mathcal{R}_0 - 1\right]\right)$.

3.4 Simulações Numéricas

Dedicamos esta seção para algumas simulações que foram realizadas com o auxílio do *software Octave*. Para tanto, pré-fixaremos alguns parâmetros que serão utilizados, dispondo-os numa tabela e manipularemos outros que serão descritos posteriormente sempre seguidos dos gráficos que os representam.

Salientamos que os dados utilizados são hipotéticos e supostamente toda a população inicial é suscetível e constante, ou seja, a taxa de natalidade e mortalidade é igual durante todo o tempo t que terá, neste caso, a unidade de tempo em dias.

A simulação tem início com uma proporção de 23% de indivíduos infectados e através do modelo utilizado tais simulações mostrarão as variações das classes de suscetíveis, infectados e recuperados num período de 500 dias.

É importante frisar que, em tais simulações a abordagem do número de reprodutibilidade basal ($\mathcal{R}_0$) é de suma importância, pois, como mencionado, a partir dele é possível calcular a proporção que uma doença tomará numa população totalmente suscetível em que a partir de um único infectado seja possível estimar infecções secundárias. No modelo estudado temos $\mathcal{R}_0 = \dfrac{\alpha}{\beta + \mu}$, que atuará identificando quando a enfermidade em questão se tornará uma epidemia.

Na tabela (3.2) temos os parâmetros pré-fixados para efeitos de simulação, onde o tempo (t), como citado anteriormente, é de 500 dias, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$ representam, respectivamente, as condições iniciais da proporção de suscetíveis, infectados e recuperados. O parâmetro $\mu = 0,013$ é uma constante positiva que corresponde a taxa de morte (neste caso, considera-se que a taxa de morte é igual a taxa de natalidade). Temos ainda, α que corresponde a taxa de transmissão da doença, β que corresponde a taxa de recuperação e p representando a proporção da população a ser vacinada.

Admitindo os valores anteriormente citados para α e β e uma suposta taxa de infecção de 23% da população de suscetíveis, teremos um número de reprodutibilidade

Parâmetro	Valor utilizado
S_0	$0,57$
I_0	0,23
R_0	0,2
μ	$0,013$

Tabela 3.2: Valores fixos utilizados nas simulações

basal, como definida anteriormente, de $\mathcal{R}_0 = 0,94406$. Tal resultado de $\mathcal{R}_0$ implica que o sistema desenvolve-se para uma ausência de infecção, uma vez que $\mathcal{R}_0$ é menor que 1.

Na figura (3.3) temos a simulação para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0$.

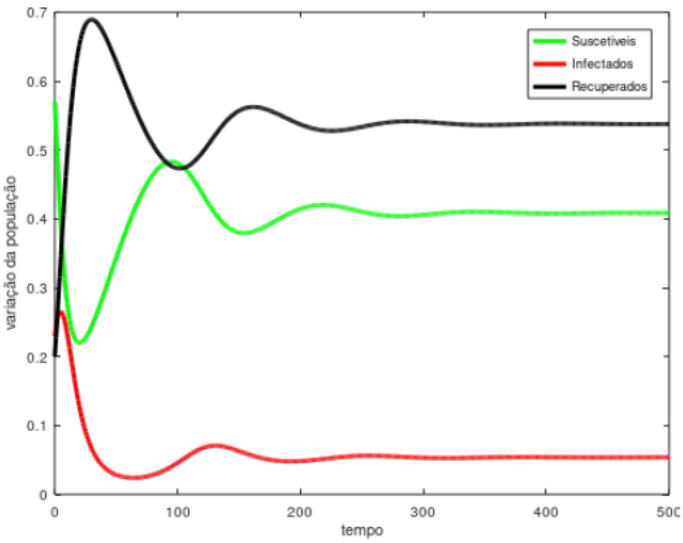


Figura 3.3: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0$.

Analisando o gráfico notamos que o número de infectados apresenta-se relativamente alto. Ao efetuar o cálculo de $\mathcal{R}_0$ obtemos aproximadamente $\mathcal{R}_\prime = 2,4476$, o que significa que temos uma epidemia. Sendo necessário, portanto, que ocorra a vacinação da população para evitar que a epidemia tome proporções maiores ainda e seja contida.

Realizando uma simulação de vacinação de 30% da população, como ilustrado na figura 3.4, faremos a análise se tal percentual é suficiente para dizimar a epidemia.

Para a vacinação de 30% da população temos $2,6\%$ de infectados no ponto de equilíbrio, sendo preciso ainda a vacinação de um percentual maior da população.

Na figura 3.5, mostramos o comportamento do gráfico para um percentual de vacinação de 50% da população.

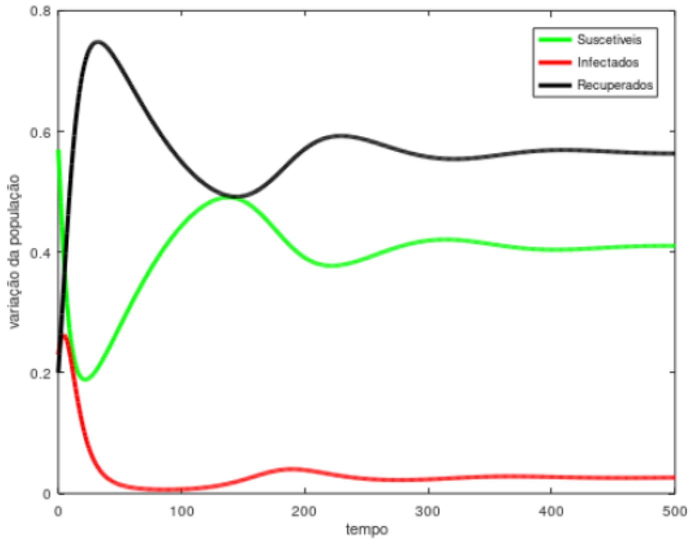


Figura 3.4: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0,3$

.

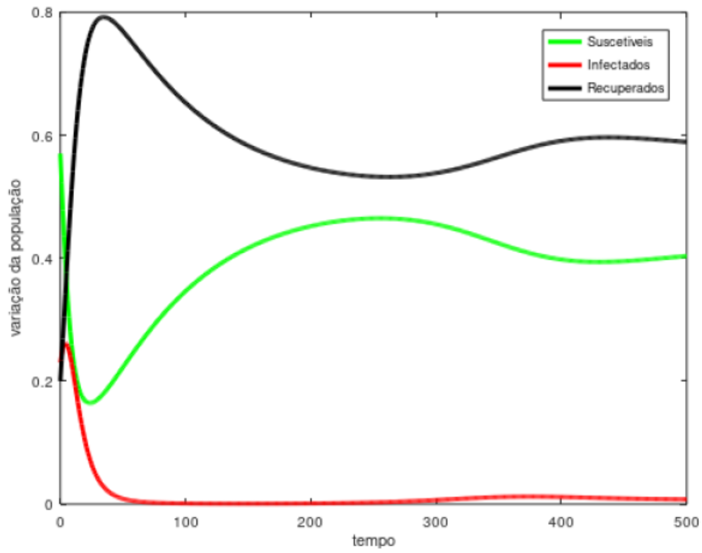


Figura 3.5: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0,5$

.

Mesmo realizando a vacinação de 50% da população é possível observarmos pelo gráfico que ainda é preciso efetuar a vacinação de um número maior de pessoas, uma vez que para o referido percentual de vacinação ainda temos $0,7\%$ de infectados no ponto de equilíbrio.

Na figura 3.6, elucidaremos a vacinação para um total de 80% da população.

Embora, pela análise do gráfico possamos identificar a possibilidade de erradicação da epidemia ao calcularmos a quantidade de infectados no ponto de equilíbrio obtemos

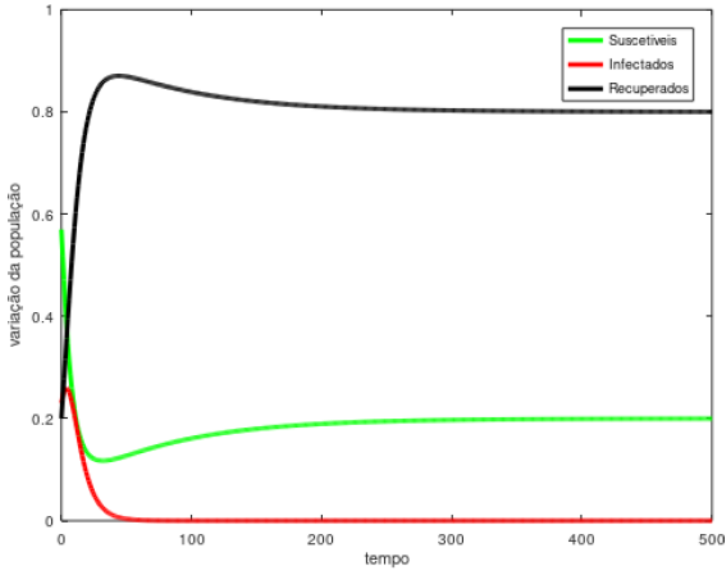


Figura 3.6: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0,8$

.

$6,7613\%$, ou seja, se vacinarmos um percentual maior que este, mesmo que pequeno, teremos uma probabilidade ainda maior de erradicação da epidemia.

Para tanto realizaremos a vacinação de 85% da população. Situação esta ilustrada na figura 3.7.

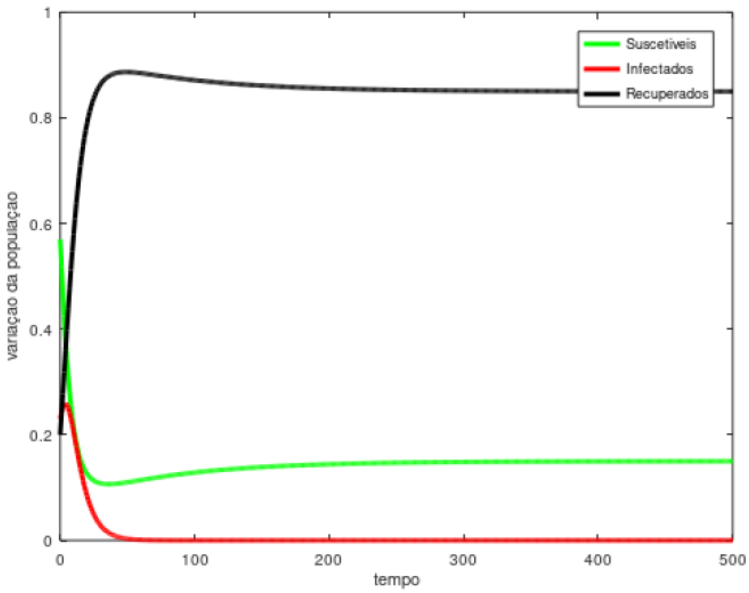


Figura 3.7: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0,85$

Note que, embora possa parecer, graficamente, que não ocorreu nenhuma alteração em relação ao número de infectados quando se vacinou 80% e 85% da população, respectivamente, na verdade o número de suscetíveis ficou ainda menor e o número de recuperados maior. Neste último caso temos um número de infectados de $2,8853 \times 10^{-22}\%$ no equilíbrio.

Se por ventura fossem vacinadas mais pessoas ainda, os resultados seriam ainda mais próximos e maior segurança para erradicação da epidemia haveria. Admitamos, por exemplo, a vacinação de 98% da população. A figura 3.8 elucida este fato.

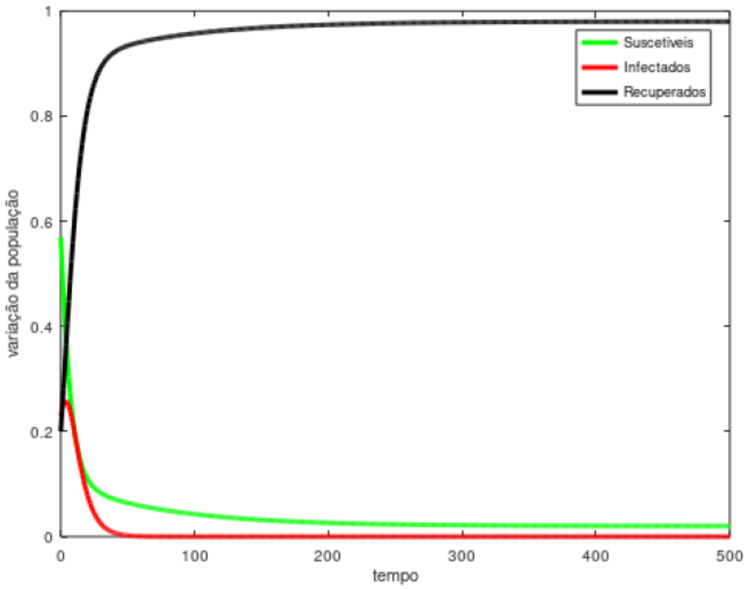


Figura 3.8: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados para $\alpha = 0,35$, $\beta = 0,13$ e $p = 0,98$

.

Observe que quanto mais o número de suscetíveis tende a zero mais o número de recuperados se eleva. E a quantidade de infectados no ponto de equilíbrio para a simulação da figura 3.8 foi de $2,422 \times 10^{-22}\%$, ou seja, se aproxima cada vez mais de zero também.

Com tais simulações pode-se chegar a conclusão de qual o percentual mínimo da população é necessário vacinar para contenção de uma epidemia, com isso ocorre a redução de gastos e a eficiência em resultados.

Capítulo 4

Aspectos Metodológicos

A metodologia utilizada na pesquisa consiste em uma abordagem qualitativa, de natureza aplicada e com procedimentos técnicos de pesquisa-ação, por meio da qual buscamos delinear as implicações da Modelagem na Educação Matemática para o ensino.

4.1 Abordagem

Para D'Ambrósio (2012, p.21) a pesquisa qualitativa dá sentido e (re)significado aos problemas que não tem resposta pela análise meramente quantitativa. Ela é o trajeto de fuga do óbvio. Bicudo (2012, p.116) salienta que o qualitativo abrange a subjetividade, dando abertura para a exposição de sensações e opiniões. "O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...]".

Na mesma linha de raciocínio de D'Ambrosio (2012), Bicudo (2012), Silva e Menezes (2005, p.20) compreendem que na pesquisa de cunho qualitativo há uma interação "dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números". Não sendo necessário o uso de métodos e técnicas estatísticas. Sendo que, "a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa". Nesse sentido, é notório menor rigor e formalidade no trato dos dados qualitativos.

De acordo com Prodanov e Freitas (2013, p.70) "na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo”. Cujas análises para além dos dados coletados leva o pesquisador a uma abstração que busca “estabelecer configurações e fluxos”.

“A análise qualitativa depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação”. Esse contexto pode ser determinado como uma série de atividades consecutivas que abordem os dados reduzidos, categorizados, interpretados e apresentados em relatório (GIL, 2002, p.133) .

A análise metodológica de enfoque qualitativo requer atenção a dados processuais e de certa forma emaranhados, que dificilmente seriam tabulados como dados numéricos. Assim, o foco e trato dos problemas de forma qualitativa dialogam com o objeto e com o contexto.

É relevante frisar que as mudanças qualitativas são necessárias e, comumente, processadas de forma rápida. Em detrimento das quantitativas que costuma ser graduais. Ainda é importante ressaltar que a presente pesquisa se torna de natureza aplicada por ter aplicabilidade, utilidade e dinamicidade dos conhecimentos (GIL, 2008). Sendo dada ênfase a importância de todas as fases que a compõem, cada uma com suas peculiaridades.

A simples variação de quantidade pode ser identificada como quantitativo. Entretanto, a análise do porque e das circunstâncias de tais transformações equivale a uma mudança qualitativa. Ou seja, a quantidade é transformada em qualidade. A transição de um estado a outro é uma mudança qualitativa (MARCONE & LAKATOS, 2003).

As pesquisas com abordagem qualitativa desempenham um perfil mais descritivo dos dados, prezando pelo significado dado às ações, dando ênfase ao processo em detrimento do produto final (BORBA & ARAUJO, 2012). “A maneira pela qual pretendemos analisar o problema ou fenômeno e o enfoque adotado é o que determina uma metodologia quantitativa ou qualitativa” (PRODANOV & FREITAS, 2013, p.72).

A análise qualitativa depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação (GIL, 2002, p.133). Sendo, portanto, este o perfil da presente pesquisa na qual se realiza uma analise qualitativa do discurso, sem ignorar a complexidade da realidade social.

4.2 Procedimentos

A designação pesquisa-ação, de acordo com Fiorentini (2012) tem sido empregada, frequentemente, fazendo menção a um tipo de pesquisa de intervenção na prática, compreendida, na maioria das vezes, como sinônimo de pesquisa colaborativa ou cooperativa sobre determinado problema.

Silva e Menezes (2005), Gil (2008) e Prodanov e Freitas (2013) reafirmam que a pesquisa-ação apresenta um caráter de envolvimento dos pesquisadores e dos pesquisados no processo de pesquisa, de modo cooperativo ou participativo. Ou seja, concebe-se uma relação entre sujeitos com uma ação ou resolução de um problema coletivo.

De acordo com Miranda e Resende (2006, p.511)

> o conceito de pesquisa-ação representa um veio privilegiado para a discussão de um dos maiores impasses enfrentados pelos educadores: a relação entre teoria e prática. A educação é, afinal, uma prática social constituída na estreita relação com o conjunto das ciências sociais e outras áreas do conhecimento.

Assim, a pesquisa-ação estabelece uma ponte para entre a pesquisa e a ação atuando na resolução dos saberes nas ciências humanas, sociais e outras áreas do conhecimento de forma que abranja a ação e a experiência do sujeito, teoria e prática, além de uma transformação social.

Para Tripp (2005, p. 445) existem dois motivos associados que tornam difícil definir a pesquisa-ação: “primeiro, é um processo tão natural que se apresenta, sob muitos aspectos, diferentes; e segundo, ela se desenvolveu de maneira diferente para diferentes aplicações.”

Na pesquisa-ação se identifica uma postura de conhecimento e intervenção da realidade pesquisada. Os participantes possuem autonomia para agir, aprender e melhorar a prática. A relação entre pesquisa e ação, indubitavelmente, introduz o pesquisador no universo pesquisado rompendo com o viés de controle circunstancial e neutralidade da pesquisa, ou seja, se trata de uma relação centrada na reflexão-ação.

Contudo, a prática reflexiva, seja individual ou coletiva, não se confunde com a pesquisa-ação como vem acontecendo com alguns professores e investigadores iniciantes. Erroneamente se fala da pesquisa-ação como uma metodologia de pesquisa, sendo ela na verdade uma "técnica especial de coleta de informações" ou mesmo "uma modalidade de pesquisa que torna o participante da ação um pesquisador de sua própria prática" (FIORENTINI, 2012, p.79).

Tripp (2005) compreende que a

> pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos, mas mesmo no interior da pesquisa-ação educacional surgiram variedades distintas.

Gil (2002) discorre sobre algumas etapas para esse tipo de pesquisa, sendo elas respectivamente a fase exploratória, a formulação do problema, a construção de hipóteses, a realização do seminário, a seleção da amostra, a coleta de dados, a análise e interpretação dos dados, a elaboração do plano de ação e por fim a divulgação dos resultados.

Na perspectiva de uma "intervenção diferencial e auto-regulada", Souza, Linardi e Baldino (2002, p.11) apresentam os seguintes passos para a pesquisa-ação: estrutura da sala de aula realizada pelos participantes partindo da reflexão conjunta; postura diferenciada a partir da margem de liberdade profissional ou acadêmica; inserção dos resultados em uma nova discussão na plenária.

Fiorentini (2012, p.77) entende que a pesquisa-ação, sob essa ótica, "é um processo de intervenção em que caminham juntas a prática investigativa, prática reflexiva e prática-educativa." Enfatizando ainda que a prática educativa, ao ser questionada, traz à baila compreensões e orientações que transformam a mesma prática em questão, suscitando novas investigações.

Com base na metodologia supracitada, sob uma observação sistemática, a pesquisa foi desenvolvida em 4 fases: Análise de conteúdo, Elaboração da atividade, Aplicação na turma de Ensino Médio e Análise dos resultados.

Tais etapas não seguem exatamente a ordem das fases propostas por Gil (2002) ou mesmo por Souza, Linardi e Baldino (2002). Entretanto a maioria das fases mencionadas por esses autores são contempladas dentro dessas 4 fases abordadas nesse trabalho.

A análise do conteúdo é a fase que engloba três polos cronológicos, a pré-analítica, a analítica e a pós-analítica, respectivamente. A pré-analítica, se trata de uma fase de organização, consiste em operacionalizar e sistematizar as ideias iniciais. A fase analítica, na qual analisamos o perfil histórico-social do tema suas concepções sob a ótica de diferentes autores e a fase pós-analítica em que identificamos a relação da fase anterior e o que se propõe na atividade, sua relação e aplicabilidade com a realidade estudada.

Na fase de elaboração da atividade se estuda uma forma de propiciar ao aluno uma reflexão sobre a ação de uma aplicabilidade em um problema real, novo e desconhecido no sentido de inserir um conteúdo que matematicamente é abordado no ensino superior ou no ensino médio numa perspectiva de metodologia nova e construtiva.

A fase de aplicação da atividade a uma turma de ensino médio ou superior nada mais é do que a exploração e análise do material, o qual propicia averiguar se serão necessárias adequações e se atendeu ou não aos objetivos pretendidos. É um momento de interação em que emerge a interpretação, tratamento de informações, análise de conteúdo, assuntos e ações matemáticas que podem resultar em de codificação, decomposição ou enumeração.

E a última fase, a análise dos resultados, se refere ao tratamento dos resultados oriundos da fase de aplicação, da sua interferência e interpretação. Momento de tratamento dos dados, visando que sejam significativos e válidos, ou em alguns casos, descartadas determinadas hipóteses. Nesse momento é oportuno o uso de recursos como quadros, diagramas, figuras e modelos que forneçam as informações da análise de forma mais lúdica e clara. Faremos o uso de alguns deles com tal propósito.

4.3 Sujeitos Investigados

As atividades são destinadas a alunos do ensino médio e alunos em curso de formação de futuros professores. O desenvolvimento da atividade elaborada se deu para alunos do ensino superior de um curso de formação de Licenciatura em Matemática em uma instituição pública no norte de Minas Gerais. Os dados foram coletados por meio dos registros escritos dos alunos e observações diretas da pesquisadora, primeira autora deste trabalho.

A turma na qual a atividade foi aplicada contava com dezenove alunos matriculados, todos estes foram convidados a participarem da pesquisa. Entretanto, contou-se com a participação de onze estudantes. Alguns não compareceram na instituição na data e outros haviam ido embora mais cedo.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerias– Campus Salinas, foi a instituição escolhida para a aplicação da atividade por dispor de uma ambiente apropriado para o desenvolvimento da mesma, como por exemplo, salas de informática com computadores funcionando e que comportasse a quantidade de alunos matriculados de forma individual em cada máquina.

As escolas de ensino público da região até dispunham de ambientes de informática, no entanto, a maioria das máquinas não estava em situação de uso, seja pelo estado de conservação, seja por falta de um simples item, como um mouse, por exemplo. Por nos depararmos com esse contexto, foi preciso buscar um ambiente que nos propiciasse as condições adequadas e necessárias para aplicação da atividade, como o educandário mencionado no parágrafo anterior.

Como enfatizado no parágrafo que introduz essa abordagem sobre os sujeitos investigados, a atividade se destina a dois públicos: Ensino Médio e Ensino Superior. Na aplicação para alunos do superior de uma turma do quarto período temos um perfil de alunos que ainda desconhecem Equações Diferenciais Ordinárias, que, no entanto, não tinham que ter a mesma como pré-requisito para a realização da atividade, mas ao estudarem tal disciplina poderão fazer um *link* entre a atividade estudada e tal conteúdo. Ou mesmo aqueles que já estudaram a referida disciplina poderão, ao desenvolver a atividade, explorar uma aplicação do conteúdo a uma situação real, como abordado por Soares e Borba (2012).

Os alunos do ensino médio não necessitam de conhecimento sobre EDO, contudo podem resolver equações de diferença e explorar a atividade de modelagem como uma aplicação no seu cotidiano, estabelecendo uma conexão interdisciplinar entre Matemática e Biologia. Nesse contexto, os professores de tais disciplinas podem, inclusive, propor uma aula conjunta em que ambos levem aos alunos a compreensão de que nenhum conhecimento está isolado ou fragmentado da forma como frequentemente se vê abordado em sala de aula, mas sim totalmente relacionado,ou seja, as diferentes áreas do conhecimento estão interligadas.

Capítulo 5

Resultados

Nesta seção faremos a discussão dos resultados da atividade exploratória aplicada.

Para o desenvolvimento, a atividade requer que o professor aplicador explique para os alunos alguns conceitos básicos para compreensão do que é proposto no seu decorrer, como taxas de infecção e de recuperação, taxa de reprodutibilidade basal, taxa de vacinação e taxa de infecção no ponto de equilíbrio.

Uma vez que o uso de programação é essencial para o desenvolvimento da atividade, ainda há a necessidade do fornecimento do seu passo a passo. O fornecimento de tais informações não interfere nos conhecimentos explorados e nos resultados almejados, já que o propósito não é saber programar.

O fornecimento do passo a passo necessário para compilar remete a ideia de *software* defendida por Soares e Borba (2012) em que essa mídia é produtora do conhecimento humano, um construto “seres-humanos-com-mídias” que viabiliza a produção do conhecimento e o seu resultado. Nesse caso, direcionamos atenção aos resultados que são propiciados pela programação.

A atividade tem início com um texto introdutório que traz a problematização abordada através de uma notícia verídica dos casos de Sarampo no Brasil no ano de 2019, tal doença é estudada pelo modelo SIR e caso não seja contida poderá se tornar uma epidemia. Nesse contexto, a vacina é atribuída, pelo Ministério da Saúde (2019b), como principal forma de proteção contra o vírus.

Esse texto permite uma contextualização que pode ser explorada em sala de aula abordando assuntos de Biologia e Matemática (podendo ainda ser explorado com e por outras áreas do conhecimento). Saber o que é uma epidemia, pandemia, as doenças modeladas pelo modelo SIR e suas características, conceitos sobre epidemiologia, interpretar gráficos, taxas de variação, porcentagem, intervalo, dentre outros assuntos são conhecimentos e saberes abordados ou adquiridos nesse trabalho. Esse tratamento de informações será o assunto chave do estudo e traz a baila "a importância de existir uma consonância entre Modelagem e as outras tarefas escolares" (BARBOSA, 2004, p.4).

Indagar sobre como se chegar à conclusão de como uma doença se tornará uma epidemia, como conter, identificar se será preciso ou não vacinação e como saber a quantidade necessária de pessoas a serem vacinadas, são exemplos de questionamentos que fazem suscitar a curiosidade de qual matemática existe em tudo isso. Essa correlação da matemática e a biologia é discutida por Burak (2010) na perspectiva de um estudo matemático que não está desvinculado da realidade.

Esses questionamentos são tratados, após a implementação do modelo no *Octave* e realizadas algumas simulações, nas quais são propostas alterações apenas em relação a taxa de transmissão, pois inserir também a taxa de recuperação para manipulação iria apenas delongar mais a atividade, já que alterar apenas uma dessas taxas ou ambas, simultaneamente, não interfere nos resultados pretendidos.

Ainda, os alunos devem preencher na tabela os respectivos valores para a taxa de reprodutibilidade basal e a taxa de infectados no ponto de equilíbrio obtidos nas simulações a partir das alterações nas taxa de transmissão da doença. E logo em seguida responder aos questionamentos.

De antemão, a atividade contou com a participação de onze alunos, entretanto três destes tiveram um problema com o *software* que travou durante o desenvolvimento, sendo por isto, tais alunos se juntaram a outros. Consequentemente, a quantidade de atividades analisadas e que serão mencionadas a seguir foram apenas oito.

Nas figuras 5.1 e 5.2, temos as respectivas simulações realizadas por dois dos alunos participantes da experiência.

Esse processo inicial de preenchimento da tabela foi realizado de forma correta

Simulações	Taxa de transmissão (α)	Taxa de reprodutibilidade basal (R_0)	Taxa de infectados no ponto de equilíbrio
Simulação 1	0,35	2,4476	0,053821
Simulação 2	0,15	1,0490	0,0012936
Simulação 3	0,55	3,8462	0,067271
Simulação 4	0,05	0,34965	2,0053e-023
Simulação 5	0,70	4,8951	0,072338

Figura 5.1: Simulações realizadas por um aluno

Simulações	Taxa de transmissão (α)	Taxa de reprodutibilidade basal (R_0)	Taxa de infectados no ponto de equilíbrio
Simulação 1	0,45	3,1469	0.062019
Simulação 2	0,30	2,0979	0.047440
Simulação 3	0,15	1.0490	0.0012936
Simulação 4	0,23	1.6084	0.033798
Simulação 5	0,12	0.83916	5.0494e-009

Figura 5.2: Simulações feitas por um aluno

por todos os alunos, o mesmo foi essencial para a resposta dos questionamentos seguintes, dessa forma seu correto preenchimento tem por consequência uma maior probabilidade de ocorrer um desempenho satisfatório no decorrer da atividade.

Esse contexto inicial dispõe de um problema com dados qualitativos e quantitativos como também foi observado por Barbosa (2004) ao desenvolver atividade com perfil similar, em que aos alunos coube a investigação. Os dados necessários para o desenvolvimento da atividade estavam quase todos dispostos nessa tabela.

Como base nas simulações realizadas na tabela ilustrada pelas figuras 5.1 e 5.2 os alunos deveriam responder na primeira pergunta como determinar se uma doença poderá se tornar uma epidemia e como proceder nos casos identificados como propícios.

Esperava-se como resposta que: a taxa de reprodutibilidade basal era fundamental para determinar quando uma doença se tornará uma epidemia e que a mesma deveria ser maior que um para uma identificação favorável. Depois de identificados os casos propícios de epidemia, recorrer à vacinação seria um método de controle ou erradicação.

Nesse primeiro questionamento, 75% dos alunos responderam corretamente as duas perguntas, na figura 5.3 temos uma resposta correta dada por uma outra aluna participante.

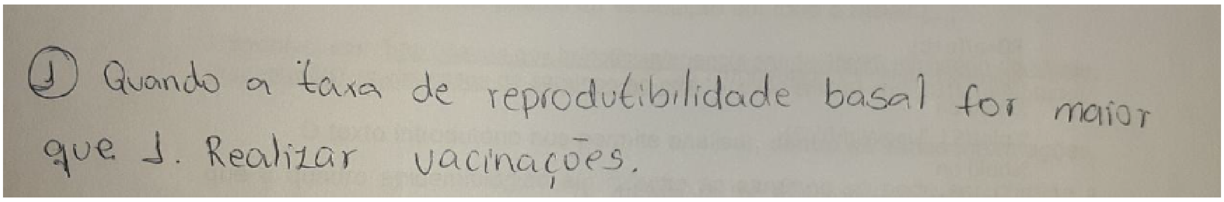


Figura 5.3: Resposta da pergunta 1 por uma aluna

Os 25% que erraram consideraram a taxa de transmissão como elemento a ser analisado para se identificar se uma doença se tornará uma epidemia. Concluímos que essa resposta se deu por associarem que os números elevados de certa forma tem relação com a taxa de infectados no ponto de equilíbrio, no entanto, não é possível saber a partir de qual percentual de transmissão será necessária a vacinação, somente analisando essas taxas. O que define se ocorrerá ou não uma epidemia é a taxa de reprodutibilidade basal.

Nesse caso, como afirmado por Barbosa (2001) o aluno não conhece a atividade a priori que o leva a investigação, para ele é algo novo em que as resoluções dispõem de intuição e estratégias que não são formais. O que o leva nesse caso a se basear no que parecia óbvio, sem realizar uma análise mais detalhada.

A figura 5.4 traz a resposta errônea de um dos alunos.

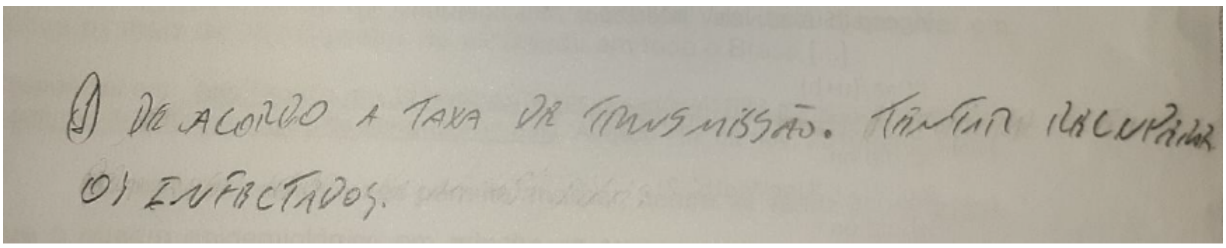


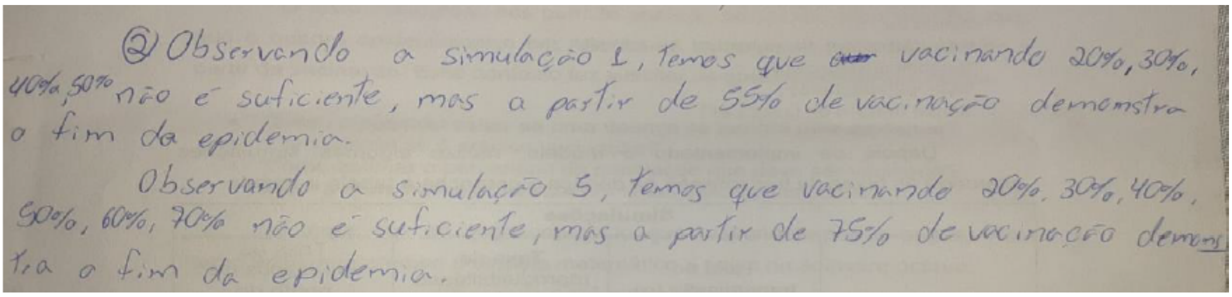
Figura 5.4: Resposta da questão 1 por um dos alunos

Ao responder que a forma de proceder nos casos identificados como propícios seria através da recuperação de infectados o aluno acabou sendo redundante e não reconheceu, portanto, a vacinação como alternativa.

Na segunda pergunta os alunos deveriam com base na conclusão do item 1, realizar novas simulações nas quais seriam aplicadas a vacinação da população. Nessa questão, $62,5\%$ dos alunos responderam ao que foi proposto de forma satisfatória. Entretanto, algumas respostas foram vagas ou mais generalizadas.

Um aluno apenas respondeu, por exemplo, que "quanto maior a taxa de vacinas, ou seja, de vacinados, mais aumenta a probabilidade de erradicar a doença". Uma conclusão que aparentemente é óbvia depois de realizadas as simulações de todos os casos identificados como epidêmicos, mas o esperado era que o aluno se atentando a interpretação gráfica respondesse os percentuais de vacinação em cada um dos resultados epidêmicos das simulações, chegando à conclusão de que não seria necessário vacinar toda a população, bem como, mesmo com percentuais mais reduzidos existia a probabilidade de se conter a epidemia.

Alguns alunos registraram a observação de vacinações de pelo menos dois casos identificados como epidêmicos, o aluno cuja tabela se encontra na figura 5.1, por exemplo, aplicou vacinação nas simulações 1 e 5, como demonstrado na figura 5.5 .


② Observando a simulação 1, temos que vacinando 20%, 30%, 40%, 50% não é suficiente, mas a partir de 55% de vacinação demonstra o fim da epidemia.

Observando a simulação 5, temos que vacinando 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70% não é suficiente, mas a partir de 75% de vacinação demonstra o fim da epidemia.

Figura 5.5: Resposta da questão 2 por um aluno participante

A conclusão de que os referidos percentuais demonstram o fim da epidemia foram tiradas, possivelmente, a partir das observações gráficas, contudo ao responderem o item três o aluno percebe que ainda existe um número de infectados naquele ponto, mesmo que muito baixo.

O gráfico 5.6 mostra a simulação 1 realizada pelo aluno, cuja resposta é apresentada na figura 5.5. Neste caso ele considera uma taxa de transmissão, α, igual 35%.

Ao realizar a primeira simulação o aluno, provavelmente, identificou por meio da

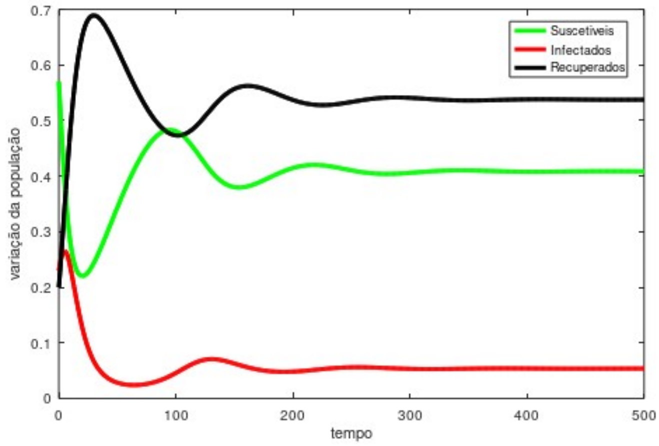


Figura 5.6: Simulação para $\alpha = 0,35$, sem vacinação.

análise gráfica que seria preciso efetuar a vacinação nessa população. Recorrendo ao valor já preenchido na tabela para a taxa de reprodutibilidade basal foi confirmado que havia uma epidemia eminente.

Então, novas simulações com vacinação foram realizadas. Os gráficos 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 apresentam essas simulações com suas respectivas taxas de vacinação.

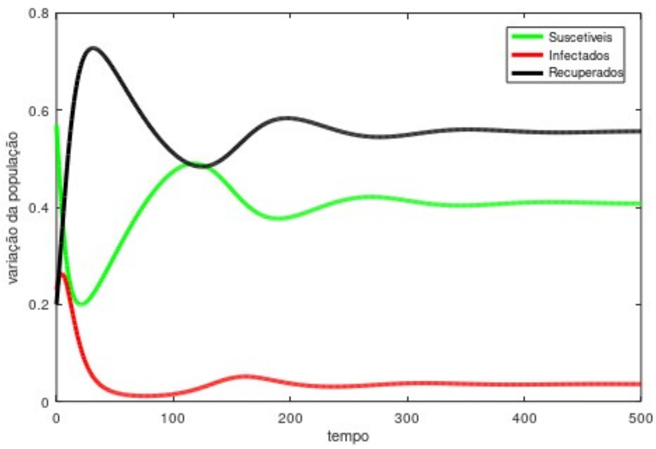


Figura 5.7: Simulação de $p = 0,20$

Com a última simulação (figura 5.11) o aluno concluiu que a vacinação de 55% da população seria suficiente para conter a epidemia. Na simulação 5 mencionada na figura 5.5, foi concluído que para erradicação de uma epidemia em que o percentual de transmissão chega a 70%, a vacinação de 75% da população seria o suficiente para erradicar o vírus.

Como esperado, os alunos que responderam incorretamente a segunda pergunta também procederam da mesma forma na segunda. Os outros $12,5\%$ não responderam

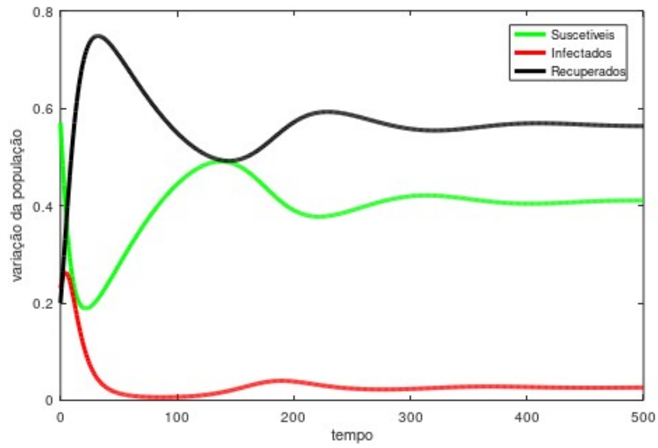


Figura 5.8: Simulação de $p = 0,30$

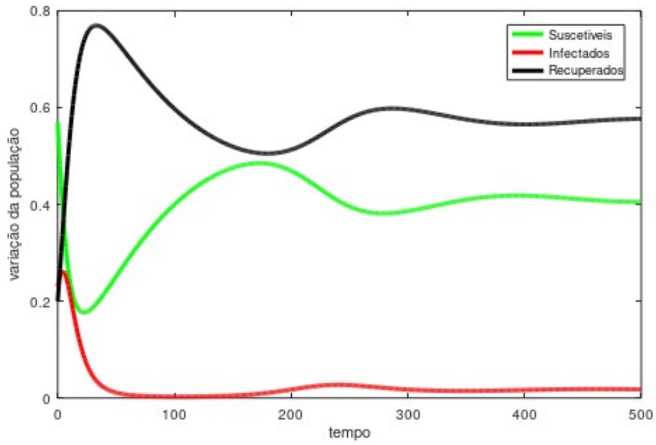


Figura 5.9: Simulação de $p = 0,40$

a esta e nem as próximas. Isto porque demorou um pouco mais de tempo para conseguir compilar, o que consequentemente comprometeu o tempo disponível para desenvolvimento da atividade.

A pergunta que se seguia era de resposta mais objetiva, na qual se deveria identificar o número de infectados nas soluções epidêmicas obtidas no item 2. A intenção dessa pergunta é fazer com que os alunos observem que o número de infectados converge para zero de acordo com o percentual de vacinação e ainda, que os discentes possam comparar o número de infectados antes e após a vacinação.

Dentre os alunos que responderam a esta questão, 57% responderam como esperado e dentre as respostas incorretas alguns acadêmicos associaram percentuais de vacinação a erradicação dos infectados, no entanto, essa é uma conclusão generalizada e, portanto, equivocada.

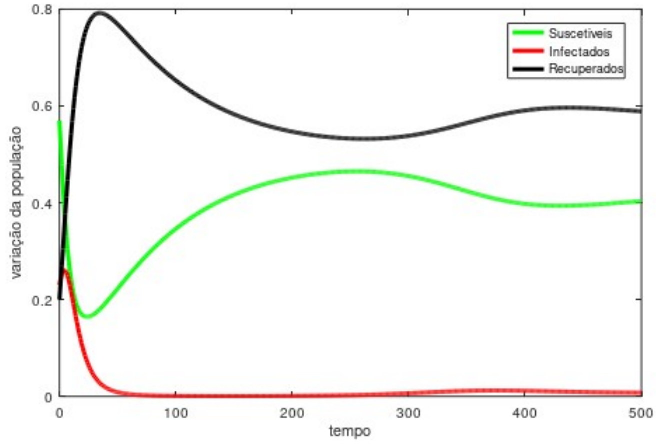


Figura 5.10: Simulação de $p = 0,50$

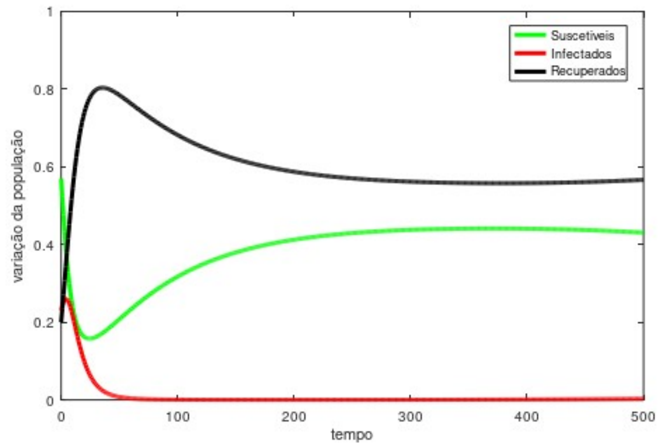


Figura 5.11: Simulação de $p = 0,55$

Na última questão da atividade o aluno poderia discorrer sobre suas conclusões a respeito da atividade de formar geral. Alguns registraram como interessante a atividade para ser trabalhada em sala de aula, sua aplicabilidade para o controle de epidemias, o uso de vacinação como forma de contenção da propagação de doenças e a relação matemática existente e necessária para isso. Um aluno concluiu que seria possível realizar diferentes experiências com essa e através desta atividade. Na figura 5.12 temos a conclusão de uma aluna.

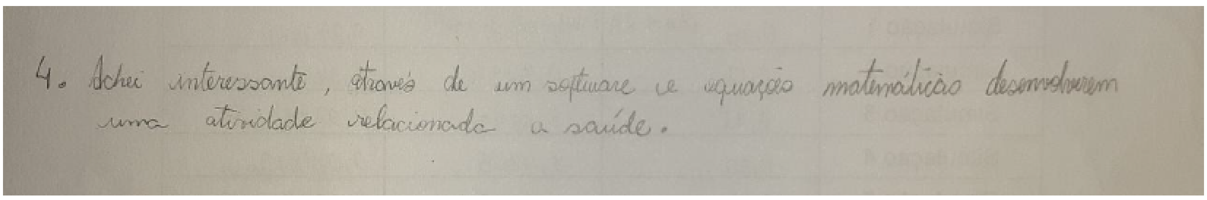

4. Achei interessante, através de um software e equações matemáticas desenvolverem uma atividade relacionada a saúde.

Figura 5.12: Resposta da questão 4 dada por um dos alunos

Como apontado por Barbosa (2001) é esperado encaminhamentos diversos no desenrolar da atividade e somente a análise das respostas nos propiciam falar sobre sua ocorrência, os discentes podem tomar caminhos que não passem por um modelo matemático.

Ao trabalhar em sala de aula a atividade proposta,

> o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor (ALMEIDA et al. , 2013, p.26).

Por fim, consideramos que esta metodologia, conforme os resultados, atendeu ao propósito desta pesquisa viabilizando o ensino de Matemática numa perspectiva que aproxima a produção de conhecimento em de sala de aula da realidade muitas vezes pouco explorada. Como apontado por Franco (2012), isso, através de diálogos que abrangem novos conhecimentos e se apropria de outros já adquiridos e que são estabelecidos entre os pesquisadores e os participes.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho baseou-se no estudo do modelo epidemiológico SIR com vacinação, tal modelo trabalha doenças em que há recuperação do indivíduo. O proposto na atividade leva os alunos através de conhecimentos analisados de forma matemática e por meio de conceitos biológicos a explorar a matemática para além de apenas cálculos matemáticos como corriqueiramente acontece nas salas de aula.

O comportamento da população diante da doença é analisado através do tratamento de informações, interpretação de gráficos, análise de porcentagens, intervalos, dentre outros. O estudo realizado permite compreender a interdisciplinaridade presente em situações do dia a da, ou seja, a aplicação da matemática em outras áreas do saber, compreender melhor os processos adotados pelo Ministério da Saúde e ainda pode aguçar o interesse em desenvolver atividades futuras com dados realísticos como parâmetros em determinada propagação de epidemia numa população.

Com a realização de simulações numéricas, os alunos também observaram que para que a população de infectados convirja para zero é preciso realizar apenas um percentual mínimo de vacinação da população. Por conseguinte, quanto maior o número de vacinação, menor será o número de infectados no equilíbrio epidêmico.

Essa proposta de atividade pode ser adaptada para se trabalhar em uma sala de aula comum, sem a necessidade de um laboratório, embora para uma melhor exploração o laboratório se torna essencial.

Em suma, podemos concluir que a aplicação da atividade-exploratória proposta para os alunos de ensino médio ou ensino superior atingiu ao pretendido, mostrando-se eficaz na inserção da modelagem nessas modalidades de ensino. Tal atividade pode ser utilizada para realização de previsões a cercada propagação de certas enfermidades e, dessa forma, aplicar medidas de controle.

Atribuindo, portanto, sentido por meio da Modelagem Matemática ao ensino e aprendizagem da Matemática envolvendo o aluno no seu contexto com uma visão mais ampla de conhecimento.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de, & BRITO, Dirceu dos Santos. 2005. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir. Ciência e educação, **11**(3), 483–498.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de, SILVA, Karina Pessôa da, & VERTUAN, Rodolfo. 2013. Modelagem matemática no ensino básico. Editora Contexto.

ALMEIDA, Priscila Roque de. 2014. Modelos epidêmicos sir, contínuos e discretos, e estratégias de vacinação. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Viçosa.

ANDERSON, Roy M, & MAY, Robert M. 1991. Infectious diseases of humans: dynamics and control. Oxford university press.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. 2001. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. Reunião anual da anped, **24**(7), 1–15.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. 2004. Modelagem matemática: O que é? por que? como?

BARROS, Aline Mide Romano de. 2007. Modelos matemáticos de equações diferenciais ordinárias aplicados à epidemiologia. Revista de ciências exatas e tecnologia, **2**(2), 62–67.

BASSANEZI, Rodney Carlos. 2002. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. Editora Contexto.

BAUCH, Chris T, & EARN, David JD. 2004. Vaccination and the theory of games. Proceedings of the national academy of sciences, **101**(36), 13391–13394.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. 2012. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 111–124.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 2009. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia, **2**(2), 07–32.

BIEMBENGUT, Maria Salett, & Hein, Nelson. 2003. Modelagem matemática no ensino. São paulo.

BORBA, Marcelo C, & ARAUJO, Jussara De Loiola. 2012. Introdução. Pesquisa qualitativa em educação matemática. Vol. 9. Autêntica Editora.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. 2002. Pcn+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais-ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. 2000. ensino médio. Ministério da educação.

BURAK, Dionísio. 2010. Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. Modelagem na educação matemática, **1**(1), 10–27.

BURAK, Dionísio, & ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. 2012. A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa. Curitiba: Crv.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. 2009. Modelagem matemática: um outro olhar. Alexandria: Revista de educação em ciência e tecnologia, **2**(2), 33–54.

CANAL, Cláudio Wageck, & VAZ, Clarissa Silveira Luiz. 2007. Vacinas víricas - setor de virologia UFSM. Disponível em: http://setordevirologiaufsm.files.wordpress.com/2012/10/livro-virologia-capc3adtulo-12.pdf. Acesso em: 17 out. 2019.

CARDOSO, Milene Aparecida Malaquias, GAVIOLLI, Íria Bonfim, & VERTUAN, Rodolfo Eduardo. 2016. Diferentes enacaminhamentos matemáticos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades, 1–12.

CÓDIGO PENAL, N. 2.848. 1940. Decreto-lei no 2.848, de 7 de dezembro de 1940. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_$03/$decreto - lei/del2848compilado.htm. Acesso em: 12 dez. 2019.

D'AMBROSIO, Ubiratan. 2012. Prefacio. Pesquisa qualitativa em educação matemática. Autêntica Editora.

DIEKMANN, Odo, & HEESTERBEEK, Johan Andre Peter. 2000. Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation. Vol. 5. John Wiley & Sons.

FIDELIS, Reginaldo, & ALMEIDA, LMW de. 2004. Modelagem matemática em sala de aula: Contribuições para competência de refletir-na-ação. VII encontro paulista de educação matemática, anais..., São Paulo, USP.

FIORENTINI, Dario. 1996. Rumos da pesquisa brasileira em educação matematica: o caso da produçõ cientifica em cursos de pos graduação. Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas.

FIORENTINI, Dario. 2012. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente. Pesquisa qualitativa em educação matemática. belo horizonte: Autêntica, 53–85.

FRANCO, Maria Amélia Santoro. 2012. Práticas colaborativas na escola: as possibilidades da pesquisa-ação pedagógica. XVI ENDIPE–encontro nacional de didáticas e práticas de ensino. Unicamp. Campinas.

GIL, Antonio Carlos. 2002. Como elaborar projetos de pesquisa. São paulo, **5**(61), 16–17.

GIL, Antonio Carlos. 2008. Métodos e técnicas de pesquisa social. 6. ed. Ediitora Atlas SA.

HAYS, Jo N. 2005. Epidemics and pandemics: their impacts on human history. Abc-clio.

HUF, Samuel Francisco, & BURAK, Dionísio. 2017. Modelagem matemática e relações com abordagens no processo de ensino e aprendizagem no contexto do tema imposto. Revemat: Revista eletrônica de educação matemática, **12**(2), 163–175.

KEELING, Matt J, & ROHANI, Pejman. 2008. Modeling infectious diseases in humans and animals. Princeton University Press.

KERMACK, William Ogilvy, & MCKENDRICK, Anderson G. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of london. series a, containing papers of a mathematical and physical character, **115**(772), 700–721.

LÓPEZ, Osval Antonio Montesinos, & SUÁREZ, Carlos Moisés Hernández. 2007. Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. salud pública de méxico, **49**, 218–226.

MA, Zhien. 2009. Some recent results on epidemic dynamics obtained by our group. Pages 1–36 of: Modeling and dynamics of infectious diseases. World Scientific.

MARCONE, Marina de Andrade, & LAKATOS, Eva Maria. 2003. Fundamentos da metodologia científica. 5º edição. são paulo: Editora atlas sa.

MINISTÉRIO DA SAÚDE, centro cultural da saúde. 2007. A revolta da vacina. Disponível em: http://www.ccms.saude.gov.br/revolta/revolta.html. Acesso em: 07 nov. 2019.

MINISTÉRIO DA SAÚDE, Zika. 2019a. Brasil apresenta balanço após 4 anos de epidemia do zika. Disponível em : http://www.saude.gov.br/noticias/agencia - saude/46118 - brasil - apresenta - balanco - apos - 4 - anos - de - epidemia - do - zika. Acesso em 08 dez. 2019.

MINISTÉRIO DA SAÚDE, Zika. 2019b. Vírus zika no brasil: A resposta do SUS. Disponível em : http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/virus_zika_brasil_resposta_sus.pdf. Acesso em 08 dez, 2019.

MIRANDA, Marilia Gouvea de, & RESENDE, Anita C Azevedo. 2006. Sobre a pesquisa-ação na educação e as armadilhas do praticismo. Revista brasileira de educação, **11**(33), 511.

PONTES, Helaine Maria de Souza, & BURAK, Dionísio. 2016. Modelagem matemática na educação básica. Brandt, cf, burak, d., & klüber, te, orgs, 182–200.

PRODANOV, Cleber Cristiano, & FREITAS, Ernani Cesar de. 2013. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª edição. Editora Feevale.

QUARTIERI, Marli Teresinha. 2004. Estudo de modelos epidemiologicos deterministicos basicos em doenças causadas por microparasitas. M.Phil. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SABETI, Mehran. 2011. Modelo epidêmico discreto sir com estrutura etária e aplicaçao de vacinaçao em pulsos e constante. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Pernambuco.

SANTANA, Nilmar Bispo. 2012. Influência das medidas educacionais no controle de epidemias via modelo matemático sier. M.Phil. thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFETMG.

SCHIMIT, Pedro Henrique Triguis. 2010. Modelagem e controle de propagação de epidemias usando autômatos celulares e teoria de jogos. Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo.

SHULGIN, Boris, STONE, Lewi, & AGUR, Zvia. 1998. Pulse vaccination strategy in the sir epidemic model. Bulletin of mathematical biology, **60**(6), 1123–1148.

SILVA, Edna Lúcia da, & MENEZES, Estera Muszkat. 2005. Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.

SOARES, DS, & BORBA, MC. 2012. O interesse de alunos de biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático. V seminário internacional de pesquisa em educação matemática, **5**.

SOUZA, A, LINARDI, P, & BALDINO, R. 2002. Pesquisa-ação diferencial. Zetetiké, **10**(17–18), 28–42.

TRIPP, David. 2005. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. Educação e pesquisa, **31**(3), 443–466.

UNESCO. 2016. Os desafios do ensino de matemática na educação básica. São Carlos: EdUFSCar.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. 2010. Modelagem matemática na educação básica. IV EPMEM–Encontro paranaense de modelagem matemática em educação matemática. maringá, **1**.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo, BORSSOI, Adriana Helena, & de ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. 2012. O papel da mediação e da intencionalidade em atividades de modelagem matemática. Revista eletrônica de educação, **7**(3), 63–80.

VICENTIN, Fábio Roberto. 2016. Modelagem matemática: o relato e implicações de uma experiência no ensino médio. Brandt, cf, burak, d., & klüber, te, orgs, 89–106.

WATTS, Sheldon J. 1999. Epidemics and history: disease, power, and imperialism. Yale University Press.

YANG, Hyun Mo. 2001. Epidemiologia matemática: Estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta. Editora da UNICAMP.

Apêndice A: Atividade

PROFMAT	**ATIVIDADE EXPLORATÓRIA** **MODELAGEM MATEMÁTICA**

ORIENTADORA: Profª. Drª. Maria Deusa
COORIENTADOR: Profº. Dr. Nilmar Bispo Santana
ELABORAÇÃO: Paula Adriana Matos Mourão

NOME:____**TURMA:**________

Observação: Preparação pré-atividade.

√ Para a realização desta atividade é necessário o fornecimento de um passo a passo para programar.

√ Explicitar conceitos como taxas de infecção e de recuperação, taxa de reprodutibilidade basal, taxa de vacinação e taxa de infecção em ponto de equilíbrio.

TEXTO INTRODUTÓRIO

Ministério da Saúde confirma 567 novos casos de sarampo no país

Publicado: Quinta, 19 de Setembro de 2019, 16h05

Última atualização em Sexta, 20 de Setembro de 2019, 11h28

Nos últimos 90 dias, o Brasil registrou 3.906 casos confirmados de sarampo no país, aumento de 17% (567 casos) em relação ao último dado divulgado (12.09). Os dados estão no novo boletim epidemiológico do Ministério da Saúde, divulgado nesta quinta-feira (19). O Pará passou a integrar a lista de 16 estados com transmissão ativa da doença, totalizando agora 17. Com o objetivo de reforçar as ações de imunização para o controle do surto e a interrupção da cadeia de transmissão do sarampo, a pasta liberou, nesta semana, um total de $R\$10,5$ milhões para os estados com surto ativo da doença.

[...] Os casos confirmados nesse período representam 87% do total no ano de 2019.

O sarampo é uma doença viral aguda similar a uma infecção do trato respiratório superior. É grave, principalmente em crianças menores de cinco anos, desnutridos e imunodeprimidos. A transmissão do vírus ocorre a partir de gotículas de pessoas doentes ao espirrar, tossir, falar ou respirar próximo de pessoas sem imunidade contra o vírus sarampo.

Apesar da faixa etária de 20 a 29 anos apresentar o maior número de casos confirmados registrados, a incidência de casos em menores de 1 ano é 8 vezes maior em relação à população em geral. Também é nessa faixa que ocorrem os casos mais graves e óbitos. A cada 100 mil habitantes, 55 crianças nessa faixa etária obtiveram confirmação para o sarampo. A segunda faixa etária mais atingida é de 1 a 4 anos. Neste ano, dos quatro óbitos por sarampo, registrados, três ocorreram em menores de 1 ano de idade; e um óbito em um indivíduo de 42 anos. Nenhum dos quatro casos eram vacinados contra a doença.

O Ministério da Saúde tem atuado ativamente junto aos estados e municípios no enfrentamento do surto de sarampo. O bloqueio vacinal seletivo deve ser realizado em até 72 horas em todos os contatos do caso suspeito durante a investigação. A vacina é a principal forma de proteção contra o vírus. Na rotina do Sistema Único de Saúde (SUS) a tríplice viral está disponível em todos os mais de 36 mil postos de vacinação em todo o Brasil.[...]

Disponível em: http://saude.gov.br/noticias/agencia-saude/45823-ministerio-da-saude-confirma-567-novos-casos-de-sarampo-no-pais. Acesso em: 09 nov. 2019 (adaptado).

O texto introdutório nos permite analisar, dentre as várias informações, que o quadro epidemiológico em ralação ao sarampo só pode ser contido a partir da vacinação. Esse contexto faz suscitar os questionamentos a seguir:

- Como é possível saber se uma doença se tornará uma epidemia?
- Como saber se é preciso vacinação?
- Como estimar o percentual da população que deve ser vacinado?
- Qual a Matemática envolvida em todas essas conclusões?

É esse tipo de questionamento que responderemos a seguir. Para tanto implementaremos o modelo matemático abaixo no *software Octave*.

```
clear all;
clc;
tempo = 500;
S(1) = 0.57;
I(1) = 0.23;
R(1) = 1-S(1)-I(1);
a = 0.35; %taxa de transmissao da doenca
b = 0.13; %taxa de recuperacao da doenca
p = 0; %taxa de vacinacao
u = 0.013; %taxa de mortalidade/natalidade
for t = 1:tempo;
S(t+1) = S(t) + u*(1-p) - a*S(t)*I(t) - u*S(t);
I(t+1) = I(t) + a*S(t)*I(t) - u*I(t) - b*I(t);
R(t+1) = R(t) + p*u + b*I(t) - u*R(t);
end
x = 0:tempo;
plot (x, S, 'g', 'LineWidth', 3)
hold on
plot (x, I, 'r', 'LineWidth', 3)
hold on
plot (x, R, 'k', 'LineWidth', 3)
xlabel ('tempo')
ylabel ('variaco da populacao')
legend ('Suscetiveis', 'Infectados', 'Recuperados', 3)
```

Depois de implementado o modelo, realize algumas simulações alterando as taxas de transmissão da doença e preencha a tabela a seguir:

1. Como base nas simulações acima, como determinar se uma doença poderá se tornar uma epidemia? Como se proceder quanto aos casos identificados como propícios?

2. Após realizadas as conclusões anteriores, registre (em uma nova tabela ou como preferir) novas simulações que evidenciem os novos percentuais para contenção dos casos identificados como epidêmicos. (Observação: sempre se atente as informações gráficas para interpretar

Simulações			
	Taxa de transmissão (α)	Taxa de reprodutibilidade basal (R_0)	Taxa de infectados no ponto de equilíbrio
Simulação 1			
Simulação 2			
Simulação 3			
Simulação 4			
Simulação 5			

a situação).

3. Qual o número de infectados nas soluções epidêmicas do item 2?

4. Expresse de forma sucinta suas conclusões obtidas através desta atividade

Apêndice B: Código Computacional

```
clear all;
clc;
tempo = 500;
S(1) = 0.57;
I(1) = 0.23;
R(1) = 1-S(1)-I(1);
a = 0.35; \%taxa de transmissao da doenca
b = 0.13; \%taxa de recuperacao da doenca
p = 0; \%taxa de vacinacao
u = 0.013; \%taxa de mortalidade/natalidade
for t = 1:tempo;
S(t+1) = S(t) + u*(1-p) - a*S(t)*I(t) - u*S(t);
I(t+1) = I(t) + a*S(t)*I(t) - u*I(t) - b*I(t);
R(t+1) = R(t) + p*u + b*I(t) - u*R(t);
end
x = 0:tempo;
plot (x, S, 'k', LineWidth;, 3)
hold on
plot (x, I, 'r', LineWidth, 3)
hold
plot (x, R, 'b', LineWidth, 3)
xlabel ('tempo')
ylabel ('Variacao da populacao')
legend ('Suscetiveis', 'Infectados', 'Recuperados', 3)
```