UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO VITOR CAMPOS TORREZAN

# DETERMINANTE: TEORIA E APLICAÇÕES

CAMPO GRANDE - MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

João Vitor Campos Torrezan

# DETERMINANTE: TEORIA E APLICAÇÕES

Orientador Prof. Dr. Claudemir Aniz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS
2020

# DETERMINANTE: TEORIA E APLICAÇÕES

**João Vitor Campos Torrezan**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz (Orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS

Campo Grande - MS, 01 de Junho de 2020

à

Antonio Braz Torrezan

(*in memoriam*)

*"O maior inimigo do conhecimento*

*não é a ignorância,*

*é a ilusão."*

Stephen Hawking

# Agradecimentos

Ao Deus, pela gratuidade da vida e da capacidade de pensar, proporcionando-me alento, saúde e gozo para seguir minha jornada. Obrigado!

Aos meus familiares, pelo apoio e carinho que uma casa pode oferecer. Por toda a torcida, as conversas e as orações sempre oportunas. Por serem meus protetores. Obrigado!

À minha noiva, por toda a cumplicidade, paciência, incentivo, afeto e tudo o que fez por mim, nos momentos de tempestade e de calmaria. Por suportar as minhas crises e não deixar de me amar. Obrigado!

Ao meu orientador, pelo exemplo de profissional que é, tornou-se grande inspiração em minha área e meu sentimento é de satisfação por estudar e trabalhar ao seu lado. Uma experiência que vivi com orgulho. Obrigado!

Ao PROFMAT, todos os professores do programa e demais professores do Instituto de Matemática da UFMS, desde minha graduação. Por todos os ensinamentos e predisposição. Obrigado!

Aos meus diversos colegas de turma, de profissão, de vida, meus patrões, aos meus amigos e demais parentes, todos que sempre teceram palavras de estima. Obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Este trabalho traz uma fundamentação teórica sobre o determinante de uma matriz. Apresentamos as propriedades, as regras, os teoremas e algumas aplicações no contexto da matemática. Também foram reunidos conceitos e enunciados sobre matrizes, grupo de permutações e sistemas lineares. Na dissertação, são discutidos alguns tópicos usados equivocadamente, além de um algoritmo capaz de, sob certas hipóteses, resolver sistemas possíveis e indeterminados por meio de determinantes. Teoremas historicamente importantes, como o de Laplace e o de Binet, são demonstrados de formas alternativas. Este trabalho conta ainda com o aporte de alguns artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM).

**Palavras-chave:** Determinante; Matriz; Permutação; Sistema Linear.

# Abstract

This work is a theoretical foundation about matrix determinant. Some properties, rules, theorems and applications on maths context are presented. We collected matrix concepts and statements, permutation groups and linear systems. In the dissertation, some of the topics that are usually used mistakenly are discussed, moreover an algorithm that is able, in certain hypotheses, to solve possible and indeterminate systems through determinants. Historical important theorems, such as Laplace´s and Binet´s ones, are demonstrated in alternative ways. This work also includes some articles from Revista do Professor de Matemática (RPM) digital magazine.

**Keywords:** Determinant; Matrix; Permutation; Linear system.

# Sumário

# Introdução

Para qualquer matriz quadrada associa-se um número real por meio de somas e produtos de seus elementos. Tal número é dito determinante e carrega consigo características da própria matriz, o que proporciona grande importância teórica. Por exemplo, se o determinante de uma matriz for não nulo, então existirá sua matriz inversa, e vice-versa. Este resultado permite resolver sistemas de $n$ equações lineares com $n$ incógnitas que possuem única solução. Mas, isso é apenas um dentre tantos empregos práticos. A teoria de determinante é muito rica, no sentido de que ela implica e explica inúmeros teoremas e proposições na matemática.

Entretanto, raciocínios equivocados sobre alguns tópicos chave são usualmente cometidos. Como o caso da Regra de Cramer em relação à classificação de sistemas lineares com infinitas soluções, que estudamos em nosso trabalho, e além de vários enunciados desconhecidos por grande parte dos alunos e até mesmo dos professores. Sob essa perspectiva, redigimos um texto com o objetivo de estudar o conteúdo de determinante, fornecendo uma base teórica sólida onde apresentamos conceitos, justificamos resultados e propomos exemplos e aplicações que enriquecem o processo de aprendizagem.

No primeiro capítulo, trazemos definições e proposições sobre matrizes, com o objetivo de munir o leitor com pré-requisitos para os resultados ao longo do nosso trabalho.

No segundo capítulo, redigimos a teoria de grupos de permutações que, por se tratar de um ramo especificamente matemático, não é abordada nos currículos do Ensino Médio. Entretanto, com essa teoria podemos desmistificar a ideia de que um determinante é simplesmente uma conta que gera um número sobre matrizes. Em seguida, com uma abordagem diferente do que se observa nas escolas, tratamos do nosso tema central, por meio das permutações. Demonstramos todas as propriedades de determinante, as regras práticas, e principalmente o Teorema de Laplace, este último realizado sem usar os passos de indução, como comumente é feito.

No terceiro capítulo, estudamos os resultados sobre sistemas de equações lineares utilizando uma análise totalmente matricial, não com o objetivo de discutir a melhor forma de demonstrar as proposições e teoremas, mas a fim de motivar o conhecimento sobre as aplicações de determinantes. Dedicamos uma seção para interpretar os determinantes nulos, onde enunciamos um teorema que, com base na pesquisa feita, não encontramos registros em livros didáticos do Ensino Médio, e que muito contribui para a teoria de sistemas lineares.

Como já supracitado, também corrigimos alguns equívocos e exploramos propriedades que por vezes são omitidas em sala de aula, bem como um algoritmo que, sob algumas hipóteses, fornece o conjunto solução de um sistema com infinitas soluções pelo cálculo de determinante. Destinamos ainda uma seção para os sistemas lineares com soluções inteiras, observando algumas particularidades.

No quarto capítulo, por fim, apresentamos uma coleção de artigos sobre tópicos relevantes que foram publicados no portal da Revista do Professor de Matemática (RPM) e que complementam o nosso trabalho. São curiosidades e possibilidades que favorecem o ensino e a aprendizagem de determinante. Dentre esses, selecionamos um artigo sobre matrizes em blocos, a fim de reproduzir a demonstração do Teorema de Binet de um modo consideravelmente mais simples, diferente do que os livros apresentam.

# Capítulo 1

# Matrizes

Neste capítulo desenvolvemos o conteúdo de matrizes de forma sucinta. O foco é a apresentação de seus conceitos, suas operações e as principais propriedades. Utilizamos como referência [1], [2], [6] e [8].

**Definição 1.1** *Sejam $m$ e $n$ números naturais não nulos. Damos o nome de matriz real $A$, $m$ por $n$, ou simplesmente matriz $A_{m\times n}$, a uma tabela de $m\cdot n$ elementos reais dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas, enumeradas de cima para baixo e da esquerda para a direita, respectivamente.*

A simbologia $m \times n$ é dita a *ordem da matriz* e representamos por $a_{ij}$ o elemento da linha $i$ e coluna $j$, sendo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Uma notação usual é $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

**Exemplo 1.2** *Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ arbitrária é:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Definição 1.3** *São matrizes notáveis:*

*i) Matriz Linha, do tipo $A = [a_{1j}]_{1\times n}$.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

*ii) Matriz Coluna, do tipo* $A = [a_{i1}]_{m\times 1}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

*iii) Matriz Nula,* $0_{m\times n} = [a_{ij}]$ *onde* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i$ *e* $j$.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

*iv) Matriz Quadrada de Ordem* $n$*, do tipo* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$*, ou simplesmente* $A_n$*, isto é, a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Nota.** Sobre matrizes quadradas de ordem $n$ definimos que os elementos $a_{ij}$ tais que $i = j$ formam a *diagonal principal* da matriz. Por outro lado, os elementos $a_{ij}$ tais que $i + j = n + 1$ formam a *diagonal secundária* da matriz.

**Definição 1.4** *Damos o nome de Matriz Triangular Superior à* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $n$ *tal que* $a_{ij} = 0$*, para todo* $i > j$*, ou Matriz Triangular Inferior se* $a_{ij} = 0$*, para todo* $i < j$*.*

$$Superior \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad Inferior \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definição 1.5** *Damos o nome de Matriz Diagonal à $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ quando esta for simultaneamente triangular superior e inferior, isto é, se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definição 1.6** *Damos o nome de Matriz Identidade, ou Unidade, de ordem $n$ à $I_n = [\gamma_{ij}]$ quando esta for diagonal e $\gamma_{ij} = 1$ para $i = j$.*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

E ainda sobre matrizes quadradas, temos o seguinte conceito.

**Definição 1.7** *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$, o traço de $A$ é o número real determinado pela soma dos elementos da diagonal principal, e indicado por $tr(A)$.*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Note que $tr(I_n) = n$.

**Definição 1.8** *Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{kl}]_{p \times q}$, definimos a igualdade de matrizes como:*

$$A = B \ se, \ e \ somente \ se, \ m = p, \ n = q \ e \ a_{ij} = b_{kl}, \ com \ i = k \ e \ j = l$$

**Definição 1.9** *Dadas $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de mesma ordem $m \times n$, definimos a soma de matrizes como:*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}, \ para \ quaisquer \ i, j$$

**Proposição 1.10** *Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes de mesma ordem. São válidas as propriedades:*

*i) Associativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;

*ii) Comutativa:* $A + B = B + A$;

*iii) Elemento Neutro: é a matriz* $0_{m \times n}$ *de mesma ordem que* $A$*, pois* $A + 0 = A$;

*iv) Elemento Oposto: é a matriz* $-A$ *cujos elementos são* $-a_{ij}$*, pois* $A + (-A) = 0$.

Observe que, pelo item *ii)* da proposição anterior, temos $tr(A + B) = tr(B + A)$.

**Definição 1.11** *Dados* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e a matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$*, definimos o produto de matriz por escalar como:*

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n}, \text{ para quaisquer } i, j$$

**Proposição 1.12** *Sejam $A$ e $B$ matrizes de mesma ordem e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. São válidas as propriedades:*

*i)* $1 \cdot A = A$;

*ii)* $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;

*iii)* $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

*iv)* $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;

*v)* $tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot tr(A)$.

**Definição 1.13** *Dadas as matrizes* $A = [a_{ik}]_{m \times p}$, $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ *e* $C = [c_{ij}]_{m \times n}$*, definimos o produto de matrizes como:*

$$C = A \cdot B \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

*ou seja*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

*para todo* $i \in \{1, 2, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Note que para o produto $A \cdot B$ existir, a quantidade de colunas da matriz $A$ deve ser igual à quantidade de linhas da matriz $B$. Ora, não é para qualquer par de matrizes que esta condição se verifica, e se $m \neq n$ não seria possível calcular $B \cdot A$. Todavia, mesmo que fosse possível calcular $B \cdot A$, não há garantia quanto ao resultado. Observe o exemplo.

**Exemplo 1.14** *Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. *Repare que existem* $A \cdot B$ *e* $B \cdot A$*, porém seus elementos são distintos.*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{bmatrix} \ e \ B \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{bmatrix}$$

**Definição 1.15** *Seja $k$ um número natural não nulo. Para qualquer matriz $A$ de ordem $n$ definimos a potência de $A$, com o expoente $k$, como sendo*

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k\, vezes}$$

Claramente, se $A = B$ então $A \cdot B = B \cdot A = A^2$. De fato, além deste, existem casos específicos que estudamos neste trabalho no qual a ordem das matrizes não altera o produto. Ainda assim são particularidades, o que nos leva a concluir que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

**Proposição 1.16** *Dadas as ordens indicadas das matrizes $A$, $B$ e $C$, e mesmo se forem quadradas com ordens iguais, são válidas as propriedades:*

*i)* $(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q})$;

*ii)* $(A_{m\times n} + B_{m\times n}) \cdot C_{n\times p} = A_{m\times n} \cdot C_{n\times p} + B_{m\times n} \cdot C_{n\times p}$;

*iii)* $C_{p\times m} \cdot (A_{m\times n} + B_{m\times n}) = C_{p\times m} \cdot A_{m\times n} + C_{p\times m} \cdot B_{m\times n}$;

*iv)* $(\alpha \cdot A_{m\times n}) \cdot B_{n\times p} = A_{m\times n} \cdot (\alpha \cdot B_{n\times p}) = \alpha \cdot (A_{m\times n} \cdot B_{n\times p})$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

*v)* $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ *e* $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$;

*vi)* $tr(A_{m\times n} \cdot B_{n\times m}) = tr(B_{n\times m} \cdot A_{m\times n})$.

**Demonstração:**

i) Sejam $A = [a_{iu}]_{m\times n}$, $B = [b_{uv}]_{n\times p}$ e $C = [c_{vj}]_{p\times q}$. Pela definição do produto entre matrizes, temos:

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)\cdot C &= \sum_{v=1}^{p}\left(\sum_{u=1}^{n} a_{iu}b_{uv}\right)c_{vj}\\
&= \sum_{v=1}^{p}\left(a_{i1}b_{1v}+\cdots+a_{in}b_{nv}\right)c_{vj}\\
&= \sum_{v=1}^{p} a_{i1}b_{1v}c_{vj}+\cdots+a_{in}b_{nv}c_{vj}\\
&= (a_{i1}b_{11}c_{1j}+\cdots+a_{in}b_{n1}c_{1j})+\cdots+(a_{i1}b_{1p}c_{pj}+\cdots+a_{in}b_{np}c_{pj})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\cdot(B\cdot C) &= \sum_{u=1}^{n} a_{iu}\left(\sum_{v=1}^{p} b_{uv}c_{vj}\right)\\
&= \sum_{u=1}^{n} a_{iu}\left(b_{u1}c_{1j}+\cdots+b_{up}c_{pj}\right)\\
&= \sum_{u=1}^{n} a_{iu}b_{u1}c_{1j}+\cdots+a_{iu}b_{up}c_{pj}\\
&= (a_{i1}b_{11}c_{1j}+\cdots+a_{i1}b_{1p}c_{pj})+\cdots+(a_{in}b_{n1}c_{1j}+\cdots+a_{in}b_{np}c_{pj})
\end{aligned}$$

Portanto $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

v) Sejam $A = [a_{pq}]_{m\times n}$, $B = A\cdot I_n = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $I_n = [\gamma_{uv}]$. Por definição, segue que

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= a_{i1}\gamma_{1j}+a_{i2}\gamma_{2j}+\cdots+a_{ij}\gamma_{jj}+\cdots+a_{in}\gamma_{nj}\\
&= a_{i1}\cdot 0+a_{i2}\cdot 0+\cdots+a_{ij}\cdot 1+\cdots+a_{in}\cdot 0\\
&= a_{ij}
\end{aligned}$$

para todos $i$ e $j$, $1\le i\le m$ e $1\le j\le n$. Portanto, $A\cdot I_n = A$, e analogamente $I_m\cdot A = A$.

vi) Se $A_{m\times n}$ e $B_{n\times m}$, então $A{\cdot}B = \left[c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$ de ordem $m$ e $B{\cdot}A = \left[d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}\right]$ de ordem $n$. Logo, segue:

$$\begin{aligned} tr(A \cdot B) &= \sum_{i=1}^{m} c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_{kk} \\ &= tr(B \cdot A). \end{aligned}$$

■

Sobre o produto de matrizes, é válido complementarmos que se $A \cdot B = 0$ não podemos concluir que $A = 0$ ou $B = 0$. De fato, temos que $A = 0$ ou $B = 0$ implica $A \cdot B = 0$. Do contrário, nada é preciso. Além disso, se $A \cdot B = 0$ também nada podemos afirmar sobre $B \cdot A$. Observe os exemplos.

**Exemplo 1.17** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$*, segue que:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1.18** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$*, segue que:*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na seção 4.1, apresentamos o contexto histórico sobre o produto de matrizes, com o objetivo de melhor compreender essa operação, de como se deu a definição.

**Definição 1.19** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. Damos o nome de Matriz Transposta de A para $A^t = [a^t_{ji}]$ de ordem $n \times m$, que é obtida de A invertendo ordenadamente suas linhas pelas suas colunas, ou vice-versa.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & \cdots & a^t_{1m} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & \cdots & a^t_{2m} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & \cdots & a^t_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^t_{n1} & a^t_{n2} & \cdots & a^t_{nm} \end{bmatrix}$$

Note que desta forma temos $a_{ij} = a^t_{ji}$ para quaisquer $i, j$.

**Proposição 1.20** *Sobre matrizes transpostas são válidos os itens:*

*i)* $A = (A^t)^t$, *para qualquer* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$;

*ii)* *Se* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, *então* $(A + B)^t = A^t + B^t$;

*iii)* *Se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, *então* $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$;

*iv)* *Se* $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{kj}]_{n\times p}$, *então* $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$;

*v)* $tr(A) = tr(A^t)$, *para qualquer* $A = [a_{ij}]_n$.

**Demonstração:**

i) Note que $a_{ij} = a^t_{ji} = (a^t)^t_{ij}$ para quaisquer $i$ e $j$. Portanto $A = (A^t)^t$ para qualquer ordem $m \times n$.

ii) Considere $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $C = A + B$. Note que para quaisquer $i$ e $j$ segue:

$$c^t_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a^t_{ji} + b^t_{ji}$$

Portanto $(A + B)^t = A^t + B^t$.

iii) Consideremos $B = \alpha \cdot A$, ou seja, $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Daí, segue que $B^t = [\alpha \cdot a^t_{ji}]$. Por outro lado, observe que $\alpha \cdot A^t = [\alpha \cdot a^t_{ji}]$. Portanto $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$.

iv) Considere $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que $C = A \cdot B$. Segue que:

$$c^t_{ji} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b^t_{jk}a^t_{ki}$$

Portanto $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

v) Em $A = [a_{ij}]_n$ e $A^t = [a^t_{ji}]_n$ note que para $i = j$ os elementos $a_{ij}$ e $a^t_{ji}$ pertencem à mesma linha e mesma coluna respectivamente, isto é, numa transposição os elementos da diagonal principal não se alteram. Portanto $tr(A) = tr(A^t)$.

■

**Definição 1.21** *Uma matriz $A$ de ordem $n$ é dita simétrica quando $A^t = A$, e será dita antissimétrica quando $A^t = -A$.*

**Proposição 1.22** *Sejam $A$ e $B$ matrizes de mesma ordem $n$. São válidos os itens:*

*i) Se $A$ e $B$ são simétricas, então $A + B$ também é simétrica;*

*ii) Se $A$ e $B$ são antissimétricas, então $A + B$ também é antissimétrica.*

**Demonstração:**

i) Dados que $A^t = A$ e $B^t = B$, pelas propriedades da transposta temos que $(A+B)^t = A^t + B^t$, e então $(A + B)^t = A + B$.

ii) Dados que $A^t = -A$ e $B^t = -B$, também pelas propriedades da transposta segue que: $(A + B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A + B)$. ■

**Definição 1.23** *Uma matriz $A$ de ordem $n$ é dita inversível quando existe uma matriz $B$, também de ordem $n$, tal que:*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

*Caso não exista nenhuma matriz $B$ que satisfaça tal condição, a matriz $A$ é dita singular, isto é, não inversível.*

**Teorema 1.24** *Se uma matriz $A_n$ é inversível, então é única a matriz $B_n$ tal que:*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

**Demonstração:** Suponha outra matriz $C_n$ tal que $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Observe que segue as igualdades: $C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$. Portanto, $B$ é única. ■

Se a matriz $A$ de ordem $n$ é inversível, denotamos por $A^{-1}$ a Matriz Inversa de $A$.

**Proposição 1.25** *Sobre matrizes inversíveis, são válidos os itens:*

*i)* $I_n$ *é inversível, e* $I_n^{-1} = I_n$*;*

*ii) Se* $A_n$ *possui uma fila (linha ou coluna) nula, então* $A_n$ *é singular;*

*iii) Se* $A_n$ *e* $B_n$ *são matrizes inversíveis, então* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$*;*

*iv) Se* $A_n$ *é inversível, então* $(A^{-1})^{-1} = A$*;*

*v) Se* $A_n$ *é inversível, então* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$*.*

**Demonstração:**

ii) Seja nula a linha $i$, $1 \leq i \leq n$ (análogo se for nula a coluna $j$, $1 \leq j \leq n$). Para qualquer matriz $B_n$, pela definição do produto de matrizes, $A \cdot B$ terá a linha $i$ nula. Portanto, $A \cdot B \neq I_n$.

iii) Segue que:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

Analogamente, temos $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$. Portanto, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

v) Como $A \cdot A^{-1} = I_n$, então $(A \cdot A^{-1})^t = I_n$ ou ainda $(A^{-1})^t \cdot A^t = I_n$, pelas propriedades de transposta. Por outro lado, temos que $A^{-1} \cdot A = I_n$ e daí $(A^{-1} \cdot A)^t = I_n$ ou ainda $A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$. Portanto $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. ∎

Sobre o produto de matrizes, dado que $A \cdot B = A \cdot C$ não podemos concluir que $B = C$, ou seja, a lei do cancelamento com relação a multiplicação de matrizes nem sempre é válido.

**Exemplo 1.26** *Considere* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Note que* $A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 15 & -21 \end{bmatrix}$, *entretanto* $B \neq C$.

A lei do cancelamento só é válida se estivermos cancelando uma matriz inversível.

**Proposição 1.27** *Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes de mesma ordem $n$. Se $A \cdot B = A \cdot C$, ou $B \cdot A = C \cdot A$, e $A$ é inversível, então $B = C$.*

**Demonstração:** Por hipótese, existe $A^{-1}$. Daí, segue as implicações:

$$A \cdot B = A \cdot C \Longrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C \Longrightarrow I_n \cdot B = I_n \cdot C \Longrightarrow B = C.$$

Analogamente segue que $B \cdot A = C \cdot A$. ∎

**Definição 1.28** *Uma matriz $A_n$ é dita ortogonal quando for inversível e $A^{-1} = A^t$.*

**Exemplo 1.29** *A matriz $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, com $\theta \in \mathbb{R}$ é ortogonal. Note que:*
$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$. *De fato, $R^{-1} = R^t$.*

**Proposição 1.30** *Sejam $A$ e $B$ matrizes de mesma ordem $n$. Se $A$ e $B$ forem ortogonais, então $A \cdot B$ é ortogonal.*

**Demonstração:** Temos que $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$. Pela propriedade da inversa, sabemos que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, ou ainda $(A \cdot B)^{-1} = B^t \cdot A^t$. Mas, pela propriedade da transposta sabemos que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. Portanto, $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^t$. ∎

# Capítulo 2

# Teoria de Determinante

Neste capítulo, tratamos do tema central de nosso trabalho. Inicialmente apresentamos os grupos de permutações para então enunciar a definição de determinante, e a partir daí elencar todas as suas propriedades. Utilizamos como referência [1], [2], [4], [6], [8] e [14].

## 2.1 Grupo de Permutações

Estudamos aqui a teoria que permite compreender e definir o cálculo do determinante. Reunimos os resultados mais relevantes ao nosso assunto.

**Definição 2.1** *Seja $G$ um conjunto não vazio munido de uma operação $*$. Dizemos que a dupla $(G, *)$ é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:*

*i) Associativa: $(a * b) * c = a * (b * c)$, para quaisquer $a, b, c \in G$;*

*ii) Elemento Neutro: existe um único $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in G$;*

*iii) Elemento Simétrico: para cada $a \in G$, existe um único $a^{-1} \in G$ de modo que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.*

Em alguns casos a operação $*$ ainda é comutativa em $G$, e assim dizemos que o grupo $(G, *)$ é comutativo. Além disso, se em $(G, *)$ o conjunto $G$ for finito, então o grupo é finito.

A cardinalidade de $G$ é dita a *ordem do grupo*.

**Exemplo 2.2** *São grupos:*

*i)* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *munido da adição, onde* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é o conjunto das matrizes reais de ordem* $m \times n$*;*

*ii)* $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ *munido da multiplicação, onde* $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ *é o conjunto das matrizes reais quadradas inversíveis de ordem* $n$*.*

Dos exemplos citados, o item *i)* é comutativo, já o item *ii)* não, sendo conhecido também como *grupo linear real*.

Um dos principais exemplos de grupos é o de permutações. Entretanto, precisamos formalizar o conceito *permutação* de um modo mais requintado do que o estudado em análise combinatória no Ensino Médio. Para isso, lembremos da definição de uma bijeção.

**Definição 2.3** *Sejam* $A$ *e* $B$ *conjuntos não vazios. Uma bijeção de* $A$ *em* $B$ *é uma função* $f : A \longrightarrow B$ *que satisfaz duas condições simultaneamente:*

*i)* $f$ *é injetora: para quaisquer* $a_1, a_2 \in A$*, se* $a_1 \neq a_2$ *então* $f(a_1) \neq f(a_2)$*;*

*ii)* $f$ *é sobrejetora: para todo* $b \in B$ *temos que* $b = f(a)$ *para algum* $a \in A$*.*

**Definição 2.4** *Para qualquer função bijetora* $f : A \longrightarrow B$ *definimos* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ *também bijetora, onde* $f^{-1}(b) = a$ *se, e somente se,* $f(a) = b$*. Essa função* $f^{-1}$ *é dita a inversa de* $f$*.*

Da composição de funções, $f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ é a função identidade em $B$, onde $(f \circ f^{-1})(b) = b$, para todo $b \in B$. Por outro lado, $f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ é a função identidade em $A$, onde $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, para todo $a \in A$.

**Definição 2.5** *Uma permutação é uma bijeção de um conjunto não vazio e finito em si mesmo.*

Considere $E \neq \varnothing$ um conjunto finito. A permutação $\varepsilon$ é uma bijeção tal que

$$\begin{aligned} \varepsilon :\ E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \varepsilon(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$.

Denotaremos $S(E)$ o conjunto de todas as permutações $\varepsilon$ em $E$. A composição de funções é uma operação sobre $S(E)$, pois se $\varepsilon_1 : E \longrightarrow E$ e $\varepsilon_2 : E \longrightarrow E$ são bijeções, então $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 : E \longrightarrow E$ também é uma bijeção.

Além disso, como a composição de funções é associativa, essa propriedade é válida em $S(E)$. Por outro lado, não vale a comutatividade, pois essa propriedade não se verifica na composição. Ademais, existe o elemento neutro que é a permutação $\varepsilon_{id} : E \longrightarrow E$ onde $\varepsilon_{id}(x) = x$, para todo $x \in E$, e para cada $\varepsilon \in S(E)$ sempre há $\varepsilon^{-1} : E \longrightarrow E$ onde $\varepsilon(x) \longmapsto x$ para todo $x \in E$. Portanto, $(S(E), \circ)$ é um grupo, e não comutativo.

Nosso interesse está nas permutações sobre os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ do tipo $E_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Assim, denotaremos $S(E_n)$ simplesmente por $S_n$, e se $\sigma \in S_n$ então:

$$\begin{aligned} \sigma :\ E_n &\longrightarrow E_n \\ i &\longmapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

Uma maneira usual de representarmos uma permutação é da forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

onde os elementos da primeira linha são os de partida e os elementos da segunda linha são os de chegada, e em cada coluna fica explícita a correspondência biunívoca entre os elementos.

**Exemplo 2.6** *Em $S_1$ existe apenas uma permutação, que é a identidade:* $\sigma_{id} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exemplo 2.7** *Em $S_2$ existem duas permutações:* $\sigma_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exemplo 2.8** *Em $S_3$ existem seis permutações:* $\sigma_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exemplo 2.9** *Em $S_4$ existem vinte e quatro permutações:* $\sigma_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \sigma_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ e\ \sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nessa representação, não faz diferença a ordem das colunas, uma vez que o principal objeto dessas permutações são as correspondências em si. Por exemplo, considerando $\sigma_{17} \in S_4$ temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

pois as colunas são as mesmas, apesar de estarem trocadas, e então a permutação em si é a mesma. Para qualquer representação, segue que:

$$\begin{cases} \sigma_{17}(1) = 3 \\ \sigma_{17}(2) = 4 \\ \sigma_{17}(3) = 2 \\ \sigma_{17}(4) = 1 \end{cases}$$

Entretanto, para que não haja confusão e que fique formalizada a linguagem, denotaremos sempre com a primeira linha em ordem crescente, como foi feito nos exemplos supracitados.

Para qualquer $\sigma \in S_n$ sua inversa é

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

que também será escrita ordenando os elementos $\sigma(i)$, $1 \leq i \leq n$.

Ainda sobre $\sigma_{17} \in S_4$, note que:

$$\sigma_{17}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_{22}.$$

**Proposição 2.10** *A cardinalidade de $S_n$ é $n!$.*

**Demonstração:** Note que cada ordem diferente dos números $1, 2, 3, ..., n$, refere-se à uma permutação diferente. Daí, temos $n$ modos de escolher o primeiro elemento, donde para cada escolha teremos $n-1$ modos de escolher o segundo elemento e assim sucessivamente até uma escolha para o último elemento. Portanto são $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ permutações. ∎

É válido observar que se fixarmos $\sigma(p) = k$, com $p, k \in \{1, 2, ..., n\}$, existirão $(n-1)!$ permutações $\sigma \in S_n$ desse tipo. De fato, pois já escolhida a relação $p$ em $k$, restam $n-1$ escolhas para a próxima, e para cada uma destas escolhas restarão $n-2$ para a próxima, e assim sucessivamente até a última.

A seguir, uma relevante definição a respeito de permutações.

**Definição 2.11** *Considere uma permutação $\sigma \in S_n$. Seja $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$, a quantidade de pares $(i, j)$ com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Damos o nome de sinal da permutação $\sigma$ o número inteiro $Sgn(\sigma)$ definido como:*

*i) $Sgn(\sigma) = 1$, se $r$ é par;*

*ii) $Sgn(\sigma) = -1$, se $r$ é ímpar.*

O valor $r$ é a quantidade de inversões da permutação $\sigma \in S_n$. Além disso, diremos que $\sigma$ é par (resp. ímpar) se, e somente se, tivermos $Sgn(\sigma) = 1$ (resp. $Sgn(\sigma) = -1$).

**Exemplo 2.12** *A permutação identidade sempre é par, em qualquer $S_n$, isto porque não há inversões.*

$$\sigma_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

**Exemplo 2.13** *Tome a permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ em $S_5$. Note que existem 3 inversões, dadas pelos pares $(1, 2)$, $(3, 4)$ e $(3, 5)$, pois $\sigma(1) > \sigma(2)$, $\sigma(3) > \sigma(4)$ e $\sigma(3) > \sigma(5)$. Portanto $Sgn(\sigma) = -1$, ou ainda, $\sigma$ é ímpar.*

Repare que podemos definir o sinal de qualquer bijeção $f$ entre dois subconjuntos de $\mathbb{N}$ com cardinalidade $n$, pois basta considerarmos a quantidade $r$ de pares $(i, j)$, sendo $i < j$, tal que $f(i) > f(j)$.

Outra coisa é que se $f$ for estritamente crescente, então $f$ é claramente par, porque não haverá nenhuma inversão. Já se $f$ for estritamente decrescente, por uma simples recorrência linear de primeira ordem, pode-se concluir que $f$ terá $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ inversões. Daí, se $n$ for da forma $4k$ ou $4k+1$ então $f$ é par, e se $n$ for da for $4k+2$ ou $4k+3$ então $f$ é ímpar, onde $k$ é um inteiro positivo.

**Definição 2.14** *Dizemos que uma permutação $\tau \in S_n$ é uma transposição se existe um único par $(i,j)$ tal que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(x) = x$, para qualquer $x \neq i,j$, com $1 \leq x \leq n$.*

**Exemplo 2.15** *Por 2.9, $\sigma_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ em $S_4$ é uma transposição, pois apenas para $(1,3)$ tem-se que $\sigma_{14}(1) = 3$ e $\sigma_{14}(3) = 1$, ademais $\sigma_{14}(2) = 2$ e $\sigma_{14}(4) = 4$. Também as permutações $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_5$, $\sigma_6$ e $\sigma_{21}$ são transposições.*

**Proposição 2.16** *O sinal de uma transposição $\tau$ é sempre $-1$, em qualquer $S_n$.*

**Demonstração:** Tome $\tau \in S_n$ uma transposição considerando o par $(i,j)$ com $1 \leq i < j \leq n$ tal que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(x) = x$, para qualquer $x \neq i,j$, com $1 \leq x \leq n$. Fixe $(u,v)$ com $1 \leq u < v \leq n$ e note que:

i) se $v \leq i$ não há inversões para $(u,v)$;

ii) se $u = i$ e $v \leq j$ há $j - i$ inversões para $(u,v)$;

iii) se $u = i$ e $v > j$ não há inversões para $(u,v)$;

iv) se $i < u < j$ há $j - i - 1$ inversões para $(u,v)$;

v) se $u = j$ não há inversões para $(u,v)$;

Portanto no total há $2\cdot(j-i)-1$ inversões, e como $j - i > 0$ é natural, temos uma quantidade ímpar de inversões, isto é, $Sgn(\tau) = -1$. ∎

Em diante, uma importante proposição sobre o estudo do sinal de uma permutação.

**Proposição 2.17** *Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$. O sinal de $\sigma$ é dado por*

$$Sgn(\sigma) = \prod \frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$$

*para todos os pares $(i,j)$ com $1 \leq i < j \leq n$.*

**Demonstração:** Primeiramente, note que para qualquer $(i,j)$ com $1 \leq i < j \leq n$ tem-se que $j-i \in \{1,2,...,n-1\}$ e como $\sigma$ é uma bijeção segue que $|\sigma(j)-\sigma(i)| \in \{1,2,...,n-1\}$. Além disso, tomando $k \in \{1,2,...,n-1\}$, a quantidade de pares $(i,j)$ tal que $j-i=k$ é igual a quantidade de pares $(p,q)$ tal que $|\sigma(q)-\sigma(p)|=k$, onde $1 \leq p < q \leq n$. Logo, $\prod \dfrac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \pm 1$, dependendo dos sinais de $\sigma(j)-\sigma(i)$. Daí, se tivermos uma quantidade par de sinais negativos para $\sigma(j)-\sigma(i)$, então o produtório é igual a 1. Mas, isto quer dizer que existe uma quantidade par de $(i,j)$ tais que $1 \leq i < j \leq n$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$, donde $Sgn(\sigma)=1$. Por outro lado, se tivermos uma quantidade ímpar de sinais negativos, o produtório será igual a $-1$, e $Sgn(\sigma)=-1$. Portanto $Sgn(\sigma) = \prod \dfrac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$, para todo $1 \leq i < j \leq n$. ■

**Exemplo 2.18** *Em $S_5$, seja* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *e note que*

$$Sgn(\sigma) = \frac{2-1}{3-1} \cdot \frac{3-1}{4-1} \cdot \frac{4-1}{2-1} \cdot \frac{5-1}{5-1} \cdot \frac{3-2}{4-3} \cdot \frac{4-2}{2-3} \cdot \frac{5-2}{5-3} \cdot \frac{4-3}{2-4} \cdot \frac{5-3}{5-4} \cdot \frac{5-4}{5-2} = 1$$

*e de fato, observando que $\sigma$ possui duas inversões:* $(2,4)$ *e* $(3,4)$.

**Proposição 2.19** *Para quaisquer $\sigma, \varphi \in S_n$ tem-se que $Sgn(\varphi \circ \sigma) = Sgn(\varphi) \cdot Sgn(\sigma)$.*

**Demonstração:** Sejam $\sigma, \varphi \in S_n$ no qual podemos escrever de forma conveniente

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \text{ e } \varphi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Daí segue que $\varphi \circ \sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$. Note que $\dfrac{a_j - a_i}{c_j - c_i} = \dfrac{b_j - b_i}{c_j - c_i} \cdot \dfrac{a_j - a_i}{b_j - b_i}$ para qualquer par $(i,j)$ tal que $1 \leq i < j \leq n$. Então, temos que $Sgn(\varphi \circ \sigma) = \prod\limits_{i<j} \dfrac{a_j - a_i}{c_j - c_i} = \prod\limits_{i<j} \dfrac{b_j - b_i}{c_j - c_i} \cdot \prod\limits_{i<j} \dfrac{a_j - a_i}{b_j - b_i}$. Portanto, por 2.17 concluímos $Sgn(\varphi \circ \sigma) = Sgn(\varphi) \cdot Sgn(\sigma)$. ■

**Corolário 2.20** *Para quaisquer $\sigma, \varphi \in S_n$ tem-se que $Sgn(\varphi \circ \sigma) = Sgn(\sigma \circ \varphi)$.*

**Demonstração:** Note que, pela proposição anterior, $Sgn(\varphi \circ \sigma) = Sgn(\varphi) \cdot Sgn(\sigma) = Sgn(\sigma) \cdot Sgn(\varphi) = Sgn(\sigma \circ \varphi)$. ■

Perceba que mesmo tendo $\varphi \circ \sigma \neq \sigma \circ \varphi$ o sinal destas composições será o mesmo.

**Corolário 2.21** *Sejam $\sigma, \tau \in S_n$, onde $\tau$ é uma transposição. É válido que $Sgn(\sigma \circ \tau) = -Sgn(\sigma)$.*

**Demonstração:** Por 2.16 e 2.19 segue que $Sgn(\sigma \circ \tau) = Sgn(\sigma) \cdot Sgn(\tau) = Sgn(\sigma) \cdot -1 = -Sgn(\sigma)$. ■

**Corolário 2.22** *Seja $\sigma \in S_n$. É válido que $Sgn(\sigma^{-1}) = Sgn(\sigma)$.*

**Demonstração:** Temos que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma_{id}$. Logo, por 2.19, segue que:

$$Sgn(\sigma \circ \sigma^{-1}) = Sgn(\sigma_{id}) \Longrightarrow Sgn(\sigma) \cdot Sgn(\sigma^{-1}) = 1 \Longrightarrow Sgn(\sigma^{-1}) = Sgn^{-1}(\sigma).$$

Mas como $(\pm 1)^{-1} = \pm 1$, concluímos que $Sgn(\sigma^{-1}) = Sgn(\sigma)$. ■

Note que este corolário nos fornece um importante resultado a respeito de permutações. O sinal de uma $\sigma \in S_n$ é sempre igual ao sinal de sua inversa $\sigma^{-1} \in S_n$.

Um conjunto qualquer $S_n$, $n > 1$ natural, de permutações possui ainda algumas propriedades relevantes.

**Proposição 2.23** *A função $F : S_n \longrightarrow S_n$ que associa $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$, para cada $\sigma \in S_n$, é bijetora.*

**Demonstração:**

i) De fato, $F$ é sobrejetora, pois $(S_n, \circ)$ é um grupo, logo toda permutação possui sua inversa e $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$, para todo $\sigma \in S_n$.

ii) Por outro lado, $F$ é injetora, pois para quaisquer $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ segue que:

$$\begin{aligned} F(\sigma_1) = F(\sigma_2) &\Longrightarrow \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \\ &\Longrightarrow \sigma_2 \circ (\sigma_1^{-1} \circ \sigma_1) = (\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1}) \circ \sigma_1 \\ &\Longrightarrow \sigma_2 \circ \sigma_{id} = \sigma_{id} \circ \sigma_1 \\ &\Longrightarrow \sigma_2 = \sigma_1 \end{aligned}$$

Portanto, por *i)* e *ii)*, a $F$ é bijetora. ∎

Observe o lema a seguir, que fornece uma função auxiliar importante para o próximo teorema.

**Lema 2.24** *Fixado uma transposição $\tau \in S_n$, a função $F : S_n \longrightarrow S_n$ que associa $\varepsilon \longmapsto \varepsilon \circ \tau$, para todo $\varepsilon \in S_n$, é bijetora.*

**Demonstração:**

i) Observe que $F$ é injetora, pois segue que:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_1) = F(\varepsilon_2) &\Longrightarrow \varepsilon_1 \circ \tau = \varepsilon_2 \circ \tau \\ &\Longrightarrow \varepsilon_1 \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \varepsilon_2 \circ (\tau \circ \tau^{-1}) \\ &\Longrightarrow \varepsilon_1 \circ \varepsilon_{id} = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_{id} \\ &\Longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

ii) Por outro lado, $F$ é sobrejetora, pois tomando uma $\delta \in S_n$ temos que $\delta \circ \tau^{-1} \in S_n$ e $F(\delta \circ \tau^{-1}) = \delta \circ \tau^{-1} \circ \tau = \delta$.

Portanto, por *i)* e *ii)*, temos que $F$ é bijetora. ∎

**Teorema 2.25** *O conjunto $S_n$ contém a mesma quantidade de permutações pares e ímpares.*

**Demonstração:** A respeito de $S_n$, considere $A$ o conjunto de todas as permutações pares e $B$ o conjunto de todas as permutações ímpares. Temos então que $S_n = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$. Suponha $p$ e $q$ as cardinalidades de $A$ e $B$ respectivamente. Fixe uma transposição $\tau \in S_n$ e tomemos a função $F : S_n \longrightarrow S_n$ que associa $\varepsilon \longmapsto \varepsilon \circ \tau$ para todo $\varepsilon \in S_n$. Por 2.21 temos que $F(A) \subset B$ e $F(B) \subset A$, e por 2.24 a cardinalidade de $F(A)$ é $p$ e a de $F(B)$ é $q$. Logo, $p \leq q$ e também $q \leq p$. Portanto $p = q$. ∎

Consideremos o exemplo 2.9, onde $S_4$ apresenta 24 permutações. De fato, temos que são 12 permutações pares: $\sigma_{id}$, $\sigma_3$, $\sigma_4$, $\sigma_7$, $\sigma_8$, $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{15}$, $\sigma_{16}$, $\sigma_{19}$, $\sigma_{20}$ e $\sigma_{23}$; e são 12 permutações ímpares: $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_5$, $\sigma_6$, $\sigma_9$, $\sigma_{10}$, $\sigma_{13}$, $\sigma_{14}$, $\sigma_{17}$, $\sigma_{18}$, $\sigma_{21}$ e $\sigma_{22}$.

Sobre os grupos de permutações, ainda temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.26** *Toda e qualquer $\sigma \in S_n$ pode ser escrita como composições de transposições, isto é, sempre existem $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$ transposições em $S_n$ tais que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$.*

A demonstração deste teorema exige outros conceitos, os quais não são consideráveis para nosso trabalho. Entretanto, o leitor pode ter acesso a justificativa na íntegra em [4], no capítulo IV-6, seção 20.

**Proposição 2.27** *Seja $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$. Se existem outros $\tau'_1, \tau'_2, ..., \tau'_q$ tais que $\sigma = \tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \cdots \circ \tau'_q$, então $p$ e $q$ têm mesma paridade.*

**Demonstração:** Por 2.16 e 2.19, segue que $Sgn(\sigma) = Sgn(\tau_1) \cdots Sgn(\tau_p) = (-1)^p$. Por outro lado, se $\sigma = \tau'_1 \circ \cdots \circ \tau'_q$, então $Sgn(\sigma) = Sgn(\tau'_1) \cdots Sgn(\tau'_q) = (-1)^q$. Logo, devemos ter $(-1)^p = (-1)^q$. Portanto, $p$ e $q$ possuem a mesma paridade. ■

## 2.2 Determinante de uma Matriz

Nesta seção, bem como nas próximas duas seções, enunciamos desde a definição e as regras práticas básicas até as propriedades e teoremas mais relevantes.

**Definição 2.28** *Damos o nome de Determinante da Matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ o número real:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Note que em cada parcela do somatório figuram apenas um elemento de cada linha e de cada coluna, pela própria definição das permutações $\sigma \in S_n$. Vejamos alguns exemplos algébricos.

**Exemplo 2.29** *Se $n = 1$, então $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, e daí:*

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma \in S_1} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \;=\; a_{11}$$

**Exemplo 2.30** *Se* $n = 2$*, então* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$*, e daí:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Exemplo 2.31** *Se* $n = 3$*, então* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$*, e daí:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_3} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.32** *Se* $n = 4$*, então* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$*, e daí:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot a_{4\sigma(4)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ &\quad + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ &\quad - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} \\ &\quad - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ &\quad - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \end{aligned}$$

**Nota.** Para qualquer matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ o cálculo de $\det(A)$ apresenta sempre $n!$ parcelas devido à cardinalidade de $S_n$.

**Proposição 2.33** *Se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz diagonal de ordem* $n$ *qualquer, então*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**Demonstração:** Pela definição de determinante, a parcela correspondente à $\sigma_{id}$ é $1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$ e ainda se $\sigma \neq \sigma_{id}$ existirá pelo menos um $p \in \{1, ..., n\}$ tal que $\sigma(p) \neq p$ e em $A$ diagonal teremos $a_{p\sigma(p)} = 0$. Logo, as parcelas correspondentes às $\sigma \neq \sigma_{id}$ são sempre nulas, e $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. ■

**Corolário 2.34** *Temos que* $\det(I_n) = 1$, *para qualquer* $n$.

**Demonstração:** Ora, $I_n$ é uma matriz diagonal, e pela sua definição e a proposição anterior segue que $\det(I_n) = 1 \cdots 1 = 1$. ∎

Especificamente para os cálculos dos determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3, é possível resumí-los em estratégias simples e de fácil memorização. São regras mnemônicas estudadas no Ensino Médio e muito utilizadas nas resoluções de exercícios.

Para $n = 1$, o determinante da matriz é o próprio, e único, elemento que ela contém.

Para $n = 2$, o determinante da matriz é a diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária, nesta ordem.

Para $n = 3$, o matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1768 – 1861) desenvolveu um dispositivo prático a fim de calcular o determinante, conhecida como *Regra de Sarrus*. Considere a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 3 abaixo. Para se calcular o $\det(A)$ podemos seguir os passos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

i) Repete-se as duas primeiras colunas após a terceira coluna da matriz.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

ii) Para as parcelas com o sinal $(+)$ multiplicam-se os três elementos em cada uma das três diagonais no sentido da diagonal principal: $+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

iii) Para as parcelas com o sinal $(-)$ multiplicam-se os três elementos em cada uma das três diagonais no sentido da diagonal secundária: $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Somar todos os 6 resultados com seus respectivos sinais gera de fato o determinante da matriz $A$, podendo ser verificado pela própria definição de determinante.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

A Regra de Sarrus também funciona perfeitamente caso repita-se as duas primeiras linhas logo abaixo da terceira linha da matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & \underline{a_{33}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Para as parcelas com o sinal $(+)$ também multiplicam-se os três elementos em cada uma das três diagonais no sentido da diagonal principal: $+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$

Para as parcelas com o sinal $(-)$ também multiplicam-se os três elementos em cada uma das três diagonais no sentido da diagonal secundária: $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

Então, de fato, a soma destes resultados gera o determinante de $A$.

Para o ensino de determinantes no Ensino Médio a Regra de Sarrus é bem adequada, uma vez que a maioria dos problemas é sobre matrizes de ordem 3. A desvantagem deste dispositivo é que ele só serve para estes determinantes, o que induz muitos estudantes ao erro, desenvolvendo raciocínios análogos ao de Sarrus em matrizes de ordem diferente de 3. Vejamos a seguir como isto falha.

**Exemplo 2.35** *Para $n = 2$, considere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Repetindo a primeira coluna após a segunda, temos:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \end{array}\right]$$

*Fazendo as multiplicações dos elementos nos sentidos das diagonais principal e secundária, com os respectivos sinais, teríamos:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0$$

*Isto não é verdade porque nem toda matriz de ordem 2 possui o determinante nulo.*

**Exemplo 2.36** *Para $n = 4$, considere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$.*

*Repetindo as três primeiras colunas após a quarta coluna da matriz, temos:*

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right]$$

*Fazendo as multiplicações dos elementos nos sentidos das diagonais principal e secundária, com os respectivos sinais, teríamos:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$

$$-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$$

*Isto não é verdade porque existem apenas* 8 *parcelas, quando o correto é* 24*. Ainda assim, note que quatro destas parcelas figuram de fato no cálculo do determinante de uma matriz de ordem* 4*, que são* $+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, +a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}, -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$ *e* $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$*, e curiosamente, as outras quatro parcelas também figuram, porém com o sinal trocado.*

Analisando por este lado, para nenhuma outra ordem diferente de 3 seria possível calcular o determinante da matriz usando um raciocínio análogo ao de Sarrus, até pela quantidade de parcelas geradas. Portanto, é uma regra de fato específica para matrizes de ordem 3.

Por outro lado, é notável que o cálculo torna-se trabalhoso a medida que $n$ cresce. Perceba que para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4 são necessários 72 multiplicações e 23 somas, e regras práticas específicas que sirvam para calcular cada determinante de ordem 4, 5, etc., não existem. Todavia, temos resultados interessantes que facilitam (e muito!) essas contas, e que são pouco explorados no Ensino Médio. Estudamos a seguir.

## 2.3 Propriedades do Determinante

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$, e iremos considerar a $i$-ésima linha como sendo

$$A^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

e assim a matriz $A$ escreve-se:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$$

**Proposição 2.37** *O determinante de uma matriz é dito uma função linear por serem válidos os itens a seguir:*

*i)* $\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(i)} + C^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ C^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$*;*

*ii)* $\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha \cdot A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$*, onde* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

**Demonstração:**

i) Pela definição de determinante e aplicando a propriedade da distributiva temos que:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(i)} + C^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \\
&\quad \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ C^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

ii) Pela definição de determinante e fatorando a expressão segue que

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha \cdot A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots \alpha \cdot a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \alpha \cdot \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

**Corolário 2.38** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ é válido que*

$$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$$

**Demonstração:** Repare que $\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot A^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha \cdot A^{(n)} \end{bmatrix}$. Daí, aplicando o item $ii)$ da proposição anterior em cada linha, concluímos que $\det(\alpha \cdot A) = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{n\, vezes} \cdot \det(A) = \alpha^n \cdot \det(A)$. ■

Para o próximo resultado, vejamos primeiro um exemplo algébrico para identificar o que acontece com um determinante de ordem 3 cuja matriz possua duas linhas iguais.

**Exemplo 2.39** *Seja $A = [a_{ij}]$ de ordem 3 a seguinte matriz real com a primeira e a segunda linha iguais:*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

*Daí temos que* $\det(A) = abf + bcd + cae - ace - baf - cbd$*, ou seja,* $\det(A) = 0$*. Observe que as parcelas se anulam duas a duas, pois para cada parcela figuram suas respectivas opostas.*

Essa característica das parcelas se anularem ocorre em qualquer determinante que possua linhas repetidas.

**Teorema 2.40** *Se em uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $n$ *tivermos* $A^{(i)} = A^{(l)}$*, isto é, i-ésima linha igual a l-ésima linha, então* $\det(A) = 0$*.*

**Demonstração:** Seja $\tau \in S_n$ uma transposição por $i$ e $l$, ou seja, $\tau(i) = l$, $\tau(l) = i$ e $\tau(k) = k$ para qualquer $k$ diferente de $i$ e $l$. Por 2.21, temos que $Sgn(\sigma \circ \tau) = -Sgn(\sigma)$ para todo $\sigma \in S_n$. Por 2.25, o conjunto $S_n$ pode ser particionado da seguinte forma: $\{\sigma_1, \sigma_1 \circ \tau\} \cup \{\sigma_2, \sigma_2 \circ \tau\} \cup \cdots \cup \{\sigma_p, \sigma_p \circ \tau\}$, onde $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_p$ são permutações de mesmo sinal, os conjuntos são binários, dois a dois disjuntos, e $p = \dfrac{n!}{2}$. Daí, segue:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= Sgn(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} \cdots a_{n\sigma_1(n)} + Sgn(\sigma_1 \circ \tau) a_{1(\sigma_1 \circ \tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma_1 \circ \tau)(n)} + \\
&\quad Sgn(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} \cdots a_{n\sigma_2(n)} + Sgn(\sigma_2 \circ \tau) a_{1(\sigma_2 \circ \tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma_2 \circ \tau)(n)} + \\
&\quad \cdots + \\
&\quad Sgn(\sigma_p) a_{1\sigma_p(1)} \cdots a_{n\sigma_p(n)} + Sgn(\sigma_p \circ \tau) a_{1(\sigma_p \circ \tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma_p \circ \tau)(n)} \\
&= \sum_{r=1}^{p} Sgn(\sigma_r) \big( a_{1\sigma_r(1)} \cdots a_{n\sigma_r(n)} - a_{1(\sigma_r \circ \tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma_r \circ \tau)(n)} \big)
\end{aligned}$$

onde para cada $r = 1, 2, ..., p$ vale a igualdade

$$a_{1\sigma_r(1)} \cdots a_{n\sigma_r(n)} = a_{1(\sigma_r \circ \tau)(1)} \cdots a_{n(\sigma_r \circ \tau)(n)}.$$

De fato, a hipótese $A^{(i)} = A^{(l)}$ implica que

$$a_{i\sigma(i)} = a_{i(\sigma \circ \tau)(l)} = a_{l(\sigma \circ \tau)(l)} \text{ e } a_{l\sigma(l)} = a_{l(\sigma \circ \tau)(i)} = a_{i(\sigma \circ \tau)(i)}.$$

Além disso, para qualquer $k$ diferente de $i$ e $l$ vale $a_{k\sigma(k)} = a_{k(\sigma \circ \tau)(k)}$. Logo, temos $\det(A) = \sum_{r=1}^{p} Sgn(\sigma_r) \cdot (0)$ ou ainda $\det(A) = 0$. ■

**Corolário 2.41** *Sejam* $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$. *Temos que* $\det(B) = -\det(A)$.

**Demonstração:** Consideremos $\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} + A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(i)} + A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$ que é nulo por ter linhas iguais. Por ser uma função linear, segue $\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = 0$ implica $0 + \det(A) + \det(B) + 0 = 0$ e portanto $\det(B) = -\det(A)$. ■

Note que, desse último corolário, se uma matriz $B = [b_{ij}]$ de ordem $n$ é obtida trocando-se $r$ vezes as linhas, duas a duas, de uma matriz $A = [a_{ij}]$ também de ordem $n$, então:

$$\det(B) = (-1)^r \cdot \det(A)$$

Observe que apesar das trocas de linhas, as matrizes sempre terão o mesmo determinante em módulo.

**Proposição 2.42** *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $n$ *onde* $A^{(i)} = \alpha \cdot A^{(l)}$, *com* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $i \neq l$, $i, l \in \{1, ..., n\}$, *isto é, a linha* $i$ *é múltipla da linha* $l$. *Temos que* $\det(A) = 0$.

**Demonstração:** Temos que $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha \cdot A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$. Daí, pelos resultados até aqui,

temos que $\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha \cdot A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0$. Portanto, $\det(A) = 0$. ■

O enunciado a seguir é conhecido como o *Teorema de Jacobi*, em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 – 1851).

**Teorema 2.43** *Dado uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$, seu determinante não se altera se somarmos à alguma linha uma múltipla de outra linha, isto é,*

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} + \sum_{l=1}^{n} \alpha \cdot A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \quad \textit{onde } l \neq i.$$

**Demonstração:** Dado que $l \neq i$, pelos resultados vistos até aqui, segue:

$$\det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} + \sum_{l=1}^{n} \alpha \cdot A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} \alpha \cdot A^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} +$$

$$\cdots + \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \alpha \cdot 0 + \cdots + \alpha \cdot 0 = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}, \text{ como queríamos.} \quad \blacksquare$$

O teorema a seguir tem relevante utilidade na resolução de sistemas lineares com infinitas soluções, assunto que estudamos em nosso trabalho no próximo capítulo.

**Teorema 2.44** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$, onde*

$$A^{(i)} = \gamma_1 \cdot A^{(1)} + \gamma_2 \cdot A^{(2)} + \cdots + \gamma_{i-1} \cdot A^{(i-1)} + \gamma_{i+1} \cdot A^{(i+1)} + \cdots + \gamma_n \cdot A^{(n)}$$

*com $\gamma_1, ..., \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, ...\gamma_n \in \mathbb{R}$, isto é, a linha $i$ é combinação linear das outras linhas, diferentes de $i$, da matriz $A$. Deste modo, temos que* $\det(A) = 0$.

**Demonstração:** Note que, por ser uma função linear, segue: $\det(A) = \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} =$

$$\gamma_1 \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \cdots + \gamma_{i-1} \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \gamma_{i+1} \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} + \cdots + \gamma_n \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Observe que, no cálculo desses $n-1$ determinantes, há sempre duas linhas iguais, o que implica $\det(A) = \gamma_1 \cdot 0 + \cdots + \gamma_n \cdot 0 = 0$, como queríamos. ■

Um dos teoremas mais característicos é sobre o determinante das matrizes transpostas.

**Teorema 2.45** *Para qualquer matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ temos que* $\det(A) = \det(A^t)$.

**Demonstração:** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$ e $A^t = [a^t_{ji}]$ sua transposta, também de ordem $n$. Pela definição de determinante temos

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a^t_{1\sigma(1)} \cdots a^t_{n\sigma(n)}$$

ou ainda, pela definição de transposta e por 2.22, segue que

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

donde por 2.23

$$\det(A^t) = \det(A).$$

∎

Esse teorema garante que, a respeito do determinante, qualquer resultado obtido para as linhas de uma matriz também são válidos para suas respectivas colunas.

Logo, tudo o que escrevemos utilizando a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ na forma $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$ podemos concluir na forma $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}$ considerando cada $A^{(j)}$ a coluna $j$-ésima da matriz $A$.

**Definição 2.46** *Damos o nome de cofator do termo $a_{ij}$ de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ o seguinte número*

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

*de modo que $A_{i,j}$ é a matriz de ordem $n-1$ obtida a partir de $A$ suprimindo a linha $i$ e a coluna $j$.*

O resultado a seguir é um dos mais relevantes para a teoria, uma vez que fornece uma fórmula para se calcular o determinante de qualquer matriz de ordem $n$, $n \geq 2$. Foi desenvolvido por Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) e, assim, é conhecido como *Teorema de Laplace.*

**Teorema 2.47** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$, $n \geq 2$. Tome uma coluna $j$ desta matriz, $1 \leq j \leq n$. O determinante de $A$ é dado por:*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \triangle_{kj}$$

*Pode-se também tomar uma linha $i$ desta matriz, $1 \leq i \leq n$, e o determinante de $A$ é dado por:*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \triangle_{ik}$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.48** *Considere* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *e tome a coluna* $j = 2$. *Temos que:*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \triangle_{k2} \\
&= a_{12} \triangle_{12} + a_{22} \triangle_{22} + a_{32} \triangle_{32} \\
&= a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{1,2}) + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det(A_{2,2}) + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det(A_{3,2}) \\
&= a_{12} \cdot (-1) \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22} \cdot (1) \cdot (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\
&\quad + a_{32} \cdot (-1) \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.49** *Considere* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -7 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & -9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ *e tome a linha* $i = 3$. *Temos que:*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{k=1}^{4} a_{3k} \triangle_{3k} \\
&= a_{31} \triangle_{31} + a_{32} \triangle_{32} + a_{33} \triangle_{33} + a_{34} \triangle_{34} \\
&= 8 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(A_{3,1}) + (-9) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det(A_{3,2}) + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det(A_{3,3}) \\
&\quad + 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \det(A_{3,4}) \\
&= 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} + 9 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -7 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} + 0 - \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -7 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= 8 \cdot (-98) + 9 \cdot (-60) + 0 - (104) \\
&= -1428
\end{aligned}$$

Perceba que calcular o determinante pelo Teorema de Laplace pode ser exaustivo a medida que a ordem $n$ aumenta. Entretanto, note que se desenvolvermos por uma linha, ou coluna, que contenha o maior número de elementos zeros, menos contas serão necessárias.

Ora, se a matriz não possui uma linha, ou coluna, com muitos zeros, podemos introduzir zeros por meio do Teorema de Jacobi. Tomando a mesma matriz $A$ do exemplo anterior, faremos da seguinte forma: somar à coluna 3 a coluna 2 previamente multiplicada por $\alpha = 2$; somar à coluna 4 a coluna 2 previamente multiplicada por $\alpha = -3$. Daí, temos que:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & 17 & -14 \\ 8 & -9 & -18 & 28 \\ 2 & 3 & 10 & -14 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace pela linha 1, temos que:

$$\det(A) = a_{12}\triangle_{12} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{bmatrix} -7 & 17 & -14 \\ 8 & -18 & 28 \\ 2 & 10 & -14 \end{bmatrix} = -1428$$

Essas manipulações são usadas no Ensino Médio com o objetivo principal de resolver determinantes de matrizes de ordem maior ou igual a 4, apesar de não ser um cálculo específico para isso.

Para demonstrar o Teorema de Laplace (2.47), abordamos uma perspectiva diferente da demonstração que é comum entre os livros de álgebra linear. Mas, para isso se faz necessário enunciar outros resultados.

Consideremos $\sigma_k \in S_n$ tal que $\sigma(1) = k$ para algum $k \in E_n$ e seja $\Omega_k$ o conjunto das bijeções $\omega : E_n \setminus \{1\} \longrightarrow E_n \setminus \{k\}$. Assim, podemos associar cada $\sigma_k \in S_n$ à um $\omega \in \Omega_k$, onde

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k & \omega(2) & \omega(3) & \cdots & \omega(n) \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n \\ \omega(2) & \omega(3) & \cdots & \omega(n) \end{pmatrix}$$

Observe a sequência de resultados.

**Lema 2.50** *Se fixarmos um $k$, com $1 \leq k \leq n$, tomando $\sigma_k \in S_n$ associado à $\omega \in \Omega_k$ segue que $Sgn(\sigma_k) = (-1)^{1+k} \cdot Sgn(\omega)$.*

**Demonstração:** Note que, pelo modo como definimos, $\sigma_k$ possui $k-1$ inversões a mais que $\omega$, dadas pelos pares $(1, i)$ tais que $\omega(i) < k$. Daí, segue que se $k$ é par, então $k-1$ é ímpar, logo $Sgn(\sigma_k) = -Sgn(\omega)$. Por outro lado, se $k$ é ímpar, então $k-1$ é par , logo $Sgn(\sigma_k) = Sgn(\omega)$. De todo caso, $Sgn(\sigma_k) = (-1)^{1+k} \cdot Sgn(\omega)$. ∎

**Proposição 2.51** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Temos que* $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\triangle_{1k}$.

**Demonstração:** Temos que $\triangle_{1k} = (-1)^{1+k} \cdot \det(A_{1,k})$ e

$$\det(A_{1,k}) = \sum_{\omega \in \Omega_k} Sgn(\omega) \cdot a_{2\omega(2)}a_{3\omega(3)} \cdots a_{n\omega(n)}.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} a_{1k}\triangle_{1k} &= a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot \det(A_{1,k}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_k} (-1)^{1+k} \cdot Sgn(\omega) \cdot a_{1k}a_{2\omega(2)}a_{3\omega(3)} \cdots a_{n\omega(n)}. \end{aligned}$$

Daí, pelo lema anterior, segue que $a_{1k}\triangle_{1k} = \sum_{\sigma_k \in S_n} Sgn(\sigma_k) \cdot a_{1k}a_{2\omega(2)}a_{3\omega(3)} \cdots a_{n\omega(n)}$. Logo, variando $k$ em $E_n$ teremos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\triangle_{1k} &= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{\sigma_k \in S_n} Sgn(\sigma_k) \cdot a_{1k}a_{2\omega(2)} \cdots a_{n\omega(n)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Proposição 2.52** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Temos que* $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\triangle_{ik}$, *para qualquer $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

**Demonstração:** Considere $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Pela proposição anterior, tomando $i = 1$ nada teremos a demonstrar. Porém, se tomarmos a linha $i$, com $1 < i \leq n$, podemos realizar as seguintes ações: troca-se a linha $i$ com a linha $i-1$; em seguida, troca-se a linha $i - 1$ (agora com os elementos de $i$) pela linha $i - 2$; e assim sucessivamente até que os elementos da linha $i$ estejam na linha 1, após $i - 1$ trocas. Desta forma, comparando a nova matriz $A'$ resultante das trocas com a matriz $A$ inicial, temos que $A_{i,k} = A'_{1,k}$. Podemos então aplicar a proposição anterior e, considerando as trocas, segue que: se $i$ for ímpar, então $\det(A') = \det(A)$, e se $i$ for par, então $\det(A') = -\det(A)$. Logo:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} a'_{1k}\triangle'_{1k} \right)$$

Perceba que $(-1)^{i+1} \cdot (-1)^{1+k} = (-1)^{i+k+2} = (-1)^{i+k}$, também que $a_{ik} = a'_{1k}$ e $\det(A_{i,k}) = \det(A'_{1,k})$. Temos $\triangle_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{i,k})$ e $\triangle'_{1k} = (-1)^{1+k} \cdot \det(A'_{1,k})$, portanto segue

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{i+1} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} a'_{1k} \triangle'_{1k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a'_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot \det(A'_{1,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{i,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \triangle_{ik}
\end{aligned}$$

com $i \in \{1, ..., n\}$, como queríamos. ■

**Corolário 2.53** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Temos que* $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \triangle_{kj}$, *para qualquer $j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

**Demonstração:** Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$ e se tomarmos uma linha $j$ de $A^t$, com $1 \leq j \leq n$, pela proposição anterior, segue:

$$\det(A^t) = \sum_{k=1}^{n} a^t_{jk} \triangle^t_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \triangle_{kj} = \det(A)$$

■

Portanto, seguindo os passos dos resultados 2.50, 2.51, 2.52 e 2.53, fica demonstrado o Teorema de Laplace (2.47).

A seguir, estudamos o determinante de matrizes triangulares.

**Proposição 2.54** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular superior de ordem $n$, $n > 1$. Temos que* $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

**Demonstração:** Faremos por indução sobre $n$. Suponha $n = 2$. Seja a matriz triangular superior a seguir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

e note que seu determinante é $a_{11} \cdot a_{22}$. Agora, suponha que para algum $n$, $n > 1$, seja válido o teorema e tome uma matriz $A$ também triangular superior de ordem $n+1$. Calculando seu determinante com o Teorema de Laplace pela coluna 1, temos:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k1} \triangle_{k1}$$

Mas, por definição, temos que $a_{k1} = 0$ para $k \neq 1$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\, \triangle_{11} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(A_{1,1}) \\ &= a_{11} \cdot \det(A_{1,1}) \end{aligned}$$

Porém, $A_{1,1}$ é uma matriz triangular superior de ordem $n$, e pela hipótese da indução temos que $\det(A_{1,1}) = a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{(n+1)(n+1)}$. Daí:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{(n+1)(n+1)}$$

Portanto, o teorema é válido para qualquer matriz triangular superior de ordem $n > 1$. ■

O resultado se estende para matrizes triangulares inferiores.

**Corolário 2.55** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular inferior de ordem $n$, $n > 1$. Temos que* $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

**Demonstração:** Lembremos que $\det(A) = \det(A^t)$. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular inferior e consideremos a matriz $A^t$. Note que os elementos da diagonal principal são os mesmos para $A$ e $A^t$, e como por hipótese $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ segue que $a^t_{ji} = 0$ com $j > i$, isto é, $A^t$ é triangular superior. Concluímos então que $\det(A^t) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \det(A)$ como queríamos. ■

Observamos o caso particular da matriz diagonal em 2.33, e os resultados de fato são iguais, uma vez que esse tipo de matriz é triangular superior e inferior, simultaneamente.

Além do mais, é possível estudarmos o determinante de matrizes $A$ de ordem $n$, $n > 1$, onde os elementos abaixo, ou acima, da diagonal secundária são nulos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & 0 \\ a_{31} & \cdots & a_{3(n-2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-2)3} & \cdots & a_{(n-2)n} \\ 0 & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Não é difícil notar que, seguindo os passos das demonstrações de 2.54 e 2.55, temos

$$\det(A) = Sgn(\sigma_0) \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdots a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}$$

onde $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Essa permutação é estritamente decrescente e, como estudado após 2.11, segue que $Sgn(\sigma_0) = (-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$. Portanto

$$\det(A) = \left[(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}\right] \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdots a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}.$$

O resultado também é válido para matrizes onde apenas os elementos da diagonal secundária são diferentes de zero.

Felice Chió (1813 – 1871) foi um matemático italiano que desenvolveu uma técnica para calcular o determinante de uma matriz $A$ de ordem $n$ através do determinante de uma matriz obtida a partir de $A$ de ordem $n-1$. Este processo é válido para qualquer $n \geq 2$ e é resultado direto de proposições e teoremas listados até aqui.

Conhecido como a *Regra de Chió*, na maioria dos livros do Ensino Médio é estudada para resolver determinantes de matrizes de ordem 4, apesar de valer para qualquer ordem maior que 1. Existem ainda textos que nem apresentam o Teorema de Laplace, resumindo-se apenas à Regra de Chió. Vejamos como funciona este abaixamento de ordem de um determinante.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$, com $n \geq 2$, onde $a_{11} = 1$. Se $a_{11} \neq 1$, é possível aplicarmos o Teorema de Jacobi para que seja gerado o elemento $a_{11} = 1$, ou ainda se existir em $A$ algum elemento $a_{ij} = 1$, com $i \neq 1$ ou $j \neq 1$, basta aplicarmos $i+j-2$ trocas ordenadas, duas a duas, entre as linhas e as colunas respectivamente de $A$, de modo que se tenha $a_{11} = 1$. Nesse último caso, perceba que o determinante ficará multiplicado por $(-1)^{i+j}$, devido às trocas.

Iremos suprimir a primeira linha e a primeira coluna de $A$. De cada elemento restante, subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas extremidades das perpendiculares traçadas do elemento considerado, na primeira linha e na primeira coluna. Assim constrói-se uma matriz $A'$ de ordem $n-1$ cujo determinante é igual ao da matriz $A$.

Considere, a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vamos obter uma matriz $B = [b_{ij}]$ também de ordem $n$ a partir de $A$, adicionando à $n$-ésima linha a primeira linha previamente multiplicada por $(-a_{n1})$. Observe:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ 0 & a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{bmatrix}$$

Temos que $\det(A) = \det(B)$. Vamos então calcular o determinante de $B$ utilizando o Teorema de Laplace, desenvolvendo pela coluna 1. Então:

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{k1}\triangle_{k1}$$

Porém, na coluna 1 apenas o elemento $b_{11}$ é diferente de zero. Portanto, segue que:

$$\det(B) = b_{11}\triangle_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(B_{1,1}) = \det(B_{1,1})$$

onde:

$$B_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{bmatrix}$$

Note que $B_{1,1}$ de ordem $n-1$ é a matriz $A'$ obtida aplicando a Regra de Chió e, pelo nosso desenvolvimento, concluímos que $\det(A) = \det(A')$, de fato.

Alexandre-Theóphile Vandermonde (1735 – 1796) foi um matemático francês que é homenageado na teoria de determinante. Conhecida como a matriz de Vandermonde, seu determinante possui um cálculo específico e tem uma aplicação relevante que estudamos em 3.11.

**Definição 2.56** *Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$, com $n \geq 2$, é dita matriz das potências de Vandermonde se for do tipo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

A matriz $A$ é tal que os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1. Os elementos da segunda linha são ditos *característicos* da matriz e são as respectivas razões dessas progressões. Uma notação usual é $A = V(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Existem livros que definem uma matriz de Vandermonde de modo que em cada linha forma-se uma progressão geométrica de primeiro termo 1. Neste caso, trata-se da matriz transposta à qual enunciamos, e isto é possível porque o foco no estudo dessas matrizes é o seu determinante, e sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$ para qualquer $A$ de ordem $n$.

**Proposição 2.57** *Seja $V$ uma matriz de Vandermonde de ordem $n$, com $n \geq 2$. O determinante de $V$, conhecido como Determinante de Vandermonde, é o produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos:*

$$\det(V) = \prod (a_i - a_j)$$

*onde $i > j$, com $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

**Demonstração:** Faremos por indução sobre $n$. Tomando $n = 2$, temos a seguinte matriz de Vandermonde:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

Logo, segue que $\det(V) = a_2 - a_1$, e de fato é o determinante de Vandermonde, pois $a_2 - a_1$ é a única diferença possível. Portanto o resultado é válido para $n = 2$. Suponhamos agora que ele seja válido para alguma matriz de ordem $n - 1$, com $n \geq 3$, e considere uma matriz $V(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Sendo $2 \leq i \leq n$, adicionamos à $i$-ésima linha a respectiva linha anterior previamente multiplicada por $(-a_1)$, obtendo uma nova matriz que pelo Teorema de Jacobi terá o mesmo determinante que o da inicial. Observe:

$$\begin{aligned}
\det[V(a_1,...,a_n)] &= \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema de Laplace, desenvolvido pela primeira coluna, segue que:

$$\det[V(a_1,...,a_n)] = \det\begin{bmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{bmatrix}$$

Então, pelo determinante ser uma função linear, implica que

$$\det[V(a_1,...,a_n)] = (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\det[V(a_1,...,a_n)] = (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\det[V'(a_2,...,a_n)]$$

onde $V'(a_2,...,a_n)$ é uma matriz de Vandermonde de ordem $n-1$, cujo por hipótese de indução o determinante é $\prod\limits_{i>j}(a_i-a_j)$ com $i,j\in\{2,...,n\}$. Logo, segue que

$$\det[V(a_1,...,a_n)] = (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdot\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

sendo $i, j \in \{2, ..., n\}$, e isto implica que $\det[V(a_1, ..., a_n)] = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ onde $i, j \in \{1, ..., n\}$, como queríamos. ■

A seguir, são enunciados outros dois resultados, desenvolvidos pelos franceses Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), respectivamente, não concomitantemente.

**Teorema 2.58** *Considere uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$ e tome duas de suas linhas $r$ e $s$ distintas, $r, s \in \{1, ..., n\}$. Temos que:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk} \triangle_{sk} = 0$$

**Demonstração:** Tome $r < s$, sem perda de generalidade. Daí, temos $A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r)} \\ \vdots \\ A^{(s)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$ e considere a matriz $A' = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r)} \\ \vdots \\ A^{(r')} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$ obtida a partir de $A$ pela substituição da linha $A^{(s)}$ pela linha $A^{(r)}$. Note que $A'$ possui linhas iguais, por isso $\det(A') = 0$. Se tomarmos o Teorema de Laplace desenvolvido pela linha $A^{(r')}$, segue que $\det(A') = \sum_{k=1}^{n} a_{r'k} \triangle_{r'k} = 0$. Mas claramente $a_{r'k} = a_{rk}$ e pela construção de $A'$ temos que $\triangle_{r'k} = \triangle_{sk}$. Portanto $\sum_{k=1}^{n} a_{rk} \triangle_{sk} = 0$. ■

**Teorema 2.59** *Dadas $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$, temos que:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Para a demonstração deste *Teorema de Binet* vamos utilizar outros recursos sobre matrizes, os quais estudamos e os demonstramos em 4.4. Por hora, vamos demonstrar de forma direta para o caso de $n = 2$.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ de ordem 2. Temos que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

e daí

$$\det(A \cdot B) = (a_1b_1 + a_2b_3) \cdot (a_3b_2 + a_4b_4) - (a_1b_2 + a_2b_4) \cdot (a_3b_1 + a_4b_3) =$$

$$a_1b_1a_3b_2 + a_1b_1a_4b_4 + a_2b_3a_3b_2 + a_2b_3a_4b_4 - a_1b_2a_3b_1 - a_1b_2a_4b_3 - a_2b_4a_3b_1 - a_2b_4a_4b_3$$

ou seja

$$\det(A \cdot B) = a_1b_1a_4b_4 + a_2b_3a_3b_2 - a_1b_2a_4b_3 - a_2b_4a_3b_1.$$

Por outro lado, temos que

$$\det(A) = a_1a_4 - a_2a_3 \text{ e } \det(B) = b_1b_4 - b_2b_3$$

e daí

$$\det(A) \cdot \det(B) = (a_1a_4 - a_2a_3) \cdot (b_1b_4 - b_2b_3)$$

ou seja

$$\det(A) \cdot \det(B) = a_1a_4b_1b_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3.$$

Portanto, perceba que de fato $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ para $n = 2$.

O Teorema de Binet resulta em um corolário interessante.

**Corolário 2.60** *Dadas $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$, temos que:*

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$$

**Demonstração:** Temos que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Como o determinante de uma matriz é um número real, então $\det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A)$. Mas $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$, portanto $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$. ■

Note que mesmo o produto de matrizes sendo não comutativo, o determinante é igual. Isto é, tanto $A \cdot B = B \cdot A$ como $A \cdot B \neq B \cdot A$ implicam que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

## 2.4 Adjunta da Matriz

**Definição 2.61** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Damos o nome de matriz dos cofatores de $A$ a seguinte matriz:*

$$\triangle(A) = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{12} & \triangle_{13} & \cdots & \triangle_{1n} \\ \triangle_{21} & \triangle_{22} & \triangle_{23} & \cdots & \triangle_{2n} \\ \triangle_{31} & \triangle_{32} & \triangle_{33} & \cdots & \triangle_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{n1} & \triangle_{n2} & \triangle_{n3} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}$$

*onde $\triangle_{ij}$ é o cofator do elemento $a_{ij}$ da matriz $A$.*

**Definição 2.62** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$. Damos o nome de matriz adjunta de $A$ à transposta da matriz dos cofatores de $A$:*

$$adj(A) = [\triangle(A)]^t = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{21} & \triangle_{31} & \cdots & \triangle_{n1} \\ \triangle_{12} & \triangle_{22} & \triangle_{32} & \cdots & \triangle_{n2} \\ \triangle_{13} & \triangle_{23} & \triangle_{33} & \cdots & \triangle_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{1n} & \triangle_{2n} & \triangle_{3n} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}$$

Em relação as matrizes de ordem 2, podemos resumir o cálculo de sua adjunta da seguinte maneira: trocam-se os elementos da diagonal principal e invertem-se os sinais dos elementos da diagonal secundária. Esta regra é facilmente verificada pela própria definição anterior.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Proposição 2.63** *Sobre a matriz adjunta, são válidos os itens:*

*i)* $adj(I_n) = I_n$;

*ii)* $adj(A^t) = [adj(A)]^t$, *para qualquer matriz $A$ de ordem $n$;*

*iii) Se $A = [a_{ij}]$ é de ordem 2, então $adj[adj(A)] = A$.*

**Demonstração:**

i) Note que $\triangle(I_n) = I_n$, pois se $i = j$ então $(-1)^{i+j} = 1$ e $I_{n_{i,j}} = I_{n-1}$ e portanto cada $\triangle_{ij} = 1$; por outro lado, se $i \neq j$ então $\det(I_{n_{i,j}}) = 0$ e portanto cada $\triangle_{ij} = 0$. Como $I_n^t = I_n$, então $adj(I_n) = I_n$.

ii) Note que $[adj(A)]^t = \triangle(A)$. Além disso, temos que $\triangle(A^t) = (\triangle(A))^t$, pois:

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j}) \quad e \quad \triangle^t_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot \det(A^t_{j,i}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

Logo, $adj(A^t) = ((\triangle(A))^t)^t = \triangle(A)$. Portanto, $adj(A^t) = [adj(A)]^t$.

iii) Considere $A = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$. Seguindo a regra que enunciamos, temos que $adj(A) = \begin{bmatrix} z & -y \\ -w & x \end{bmatrix}$ e daí $adj[adj(A)] = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = A$, como queríamos.

■

O resultado mais expressivo a cerca de matrizes adjuntas é o seguinte teorema.

**Teorema 2.64** *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$, temos que:*

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

**Demonstração:** Seja $B = A \cdot adj(A)$. Pelo produto de matrizes e a definição de adjunta, temos que:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \triangle_{jk}$$

Note que se $i = j$, pelo Teorema de Laplace segue $b_{ij} = \det(A)$. Por outro lado, se $i \neq j$, pelo Teorema de Cauchy (2.58), segue $b_{ij} = 0$. Portanto:

$$B = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \cdot I_n$$

A demonstração é análoga caso consideremos $C = adj(A) \cdot A$. ■

**Corolário 2.65** *Uma matriz $A$ de ordem $n$ é inversível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

**Demonstração:** Por um lado, se $A$ é inversível, então existe $A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Daí,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A^{-1} \cdot A) = \det(I_n)$$

que implica $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, pelo teorema de Binet e o determinante de $I_n$. Portanto, $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) \neq 0$. Por outro lado, se $\det(A) \neq 0$, pelo teorema anterior, segue que $A \cdot \left[\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)\right] = I_n$, e analogamente, temos $\left[\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)\right] \cdot A = I_n$. Portanto, $A$ é inversível. ∎

Observe então que a demonstração deste último corolário nos fornece dois resultados notáveis. Primeiro que o determinante da inversa é o inverso do determinante, isto é, para qualquer matriz $A$ de ordem $n$ inversível, vale:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Ademais temos uma fórmula para calcular essa matriz inversa. Cada elemento de $A^{-1}$ corresponde ao seu cofator transposto dividido pelo determinante de $A$. Portanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

ou ainda

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\triangle_{11}}{\det(A)} & \frac{\triangle_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{\triangle_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{\triangle_{12}}{\det(A)} & \frac{\triangle_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{\triangle_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\triangle_{1n}}{\det(A)} & \frac{\triangle_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{\triangle_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}.$$

Ainda sobre o teorema 2.64, seguem duas consequências.

**Corolário 2.66** *Dada uma matriz $A$ de ordem $n$ singular, temos que:*

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = 0_n$$

**Demonstração:** Como $A$ não é inversível, temos que $\det(A) = 0$. Daí segue que $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n = 0 \cdot I_n = 0_n$. ∎

**Proposição 2.67** *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz inversível de ordem $n$, então:*

$$\det[adj(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

**Demonstração:** Como $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n$ então por propriedades de determinante segue as igualdades

$$\det[A \cdot adj(A)] = \det[\det(A) \cdot I_n] = [\det(A)]^n \cdot \det(I_n) = [\det(A)]^n$$

ou ainda, pelo Teorema de Binet, temos que $\det(A) \cdot \det[adj(A)] = [\det(A)]^n$. Mas, $A$ é inversível, e assim $\det(A) \neq 0$. Portanto, $\det[adj(A)] = [\det(A)]^{n-1}$. ■

# Capítulo 3

# Sistemas Lineares

Neste capítulo, justificamos conceitos, proposições e teoremas sobre sistemas de equações lineares, utilizando uma abordagem matricial. Exploramos erros comuns com relação à teoria e estudamos algumas propriedades e características pouco conhecidas. Utilizamos como referência [1], [2], [6], [7], [8], [9] e [10].

## 3.1 Equações e Sistemas Lineares

Uma das grandes aplicações de matrizes e determinantes, estudamos principalmente as classificações dos sistemas lineares.

**Definição 3.1** *Seja $n$ um número natural não nulo. Dados números reais $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e $b$, uma equação é dita linear se for da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

*onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são incógnitas reais. Dizemos ainda que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são coeficientes e $b$ é o termo independente.*

Uma $n$-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução de uma equação linear quando estes números satisfazem a equação, isto é, substituindo as incógnitas por estes números obtemos uma sentença verdadeira.

$$a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3 + \cdots + a_n \cdot \alpha_n = b$$

**Exemplo 3.2** *A equação* $2x - y - 4z + 3t = 10$ *é linear com* 4 *incógnitas* $(x, y, z, t)$, *seus respectivos coeficientes são* 2, $-1$, $-4$ *e* 3 *e o termo independente é* 10. *Note que* $(5, -4, 1, 0)$ *é solução da equação, pois* $2 \cdot (5) - (-4) - 4 \cdot (1) + 3 \cdot (0) = 10$. *Por outro lado,* $(-1, 0, 2, 7)$ *não é solução, pois* $2 \cdot (-1) - (0) - 4 \cdot (2) + 3 \cdot (7) = 11 \neq 10$.

**Definição 3.3** *Sejam* $m$ *e* $n$ *números naturais maiores que um. Um sistema linear* $S$ *de ordem* $m \times n$ *(lê-se:* $m$ *por* $n$*) é um conjunto de* $m$ *equações lineares em* $n$ *incógnitas, consideradas simultaneamente.*

$$S \ : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma $n$-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando estes números satisfazem simultaneamente todas as $m$ equações do sistema. Também damos o nome de *conjunto solução* do sistema à reunião de todas as soluções.

**Definição 3.4** *Um sistema linear* $m \times n$ *é dito homogêneo quando todos os termos independentes são nulos, isto é,* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Todo sistema linear homogêneo é satisfeito pela solução $(0, 0, 0, ..., 0)$, na qual chamamos de *solução trivial*, uma vez que para quaisquer $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ tem-se que:

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$$

**Definição 3.5** *Um sistema linear é dito quadrado quando o número de equações é igual ao número de incógnitas, isto é, quando for de ordem* $n \times n$, *ou simplesmente ordem* $n$.

Observe que, pelas definições de igualdade e de produto entre matrizes, qualquer sistema linear $S$, $m \times n$, pode ser expresso em uma forma matricial, por equações do tipo

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$$

onde $A$ é dita a *matriz de coeficientes*, $X$ é a *matriz coluna das incógnitas* e $B$ é a *matriz coluna dos termos independentes*.

Portanto, um sistema linear $S$ de ordem $m \times n$ fica escrito como:

$$S \ : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Cada solução do sistema, se existir, também pode ser representada por uma matriz. Por exemplo, se a $n$-upla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ for uma solução, então é escrita como:

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Um sistema linear sempre pode ser classificado quanto ao seu conjunto solução, e concluiremos que existem três tipos. Para isso, temos os seguintes resultados.

**Lema 3.6** *Se um sistema homogêneo $A \cdot X = 0$ de ordem qualquer possuir uma solução não trivial, então o sistema têm infinitas soluções.*

**Demonstração:** Seja $X_1 \neq 0$ uma solução de $A \cdot X = 0$. Logo, temos que $A \cdot X_1 = 0$, e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ segue que $\alpha \cdot X_1$ também é solução de $A \cdot X = 0$, pois

$$A \cdot (\alpha \cdot X_1) = \alpha \cdot (A \cdot X_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

e portanto o sistema tem infinitas soluções. ■

**Proposição 3.7** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem qualquer e $A \cdot X = 0$ seu sistema homogêneo associado. Considere $S$ e $S_h$ os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente. Se $X'$ é uma solução particular de $A \cdot X = B$ então $S = X' + S_h$, onde $X' + S_h = \{X' + X_0 \mid X_0 \in S_h\}$.*

**Demonstração:** Tome $X'' \in S$. Temos que $A \cdot X'' = B$ e, por hipótese $A \cdot X' = B$, donde segue $A \cdot X'' - A \cdot X' = B - B$ ou ainda $A \cdot (X'' - X') = 0$, o que significa que

$X'' - X' \in S_h$. Mas, note que $X'' = X' + (X'' - X')$. Desta forma, $X'' \in X' + S_h$. Por outro lado, sendo $X_0 \in S_h$ e tomando $Y = X' + X_0$, isto é, $Y \in X' + S_h$, segue as igualdades

$$A \cdot Y = A \cdot (X' + X_0) = A \cdot X' + A \cdot X_0 = B + 0 = B.$$

Logo $Y \in S$. Portanto, $S = X' + S_h$. ■

Como consequência, temos o seguinte teorema, considerando os conjuntos $S$ e $S_h$ definidos na proposição anterior.

**Teorema 3.8** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem qualquer. Se existirem $X_1$ e $X_2$ soluções distintas que o satisfaça, então o sistema possui infinitas soluções.*

**Demonstração:** Sejam $X_1$ e $X_2$ soluções distintas de $A \cdot X = B$, isto é, $X_1, X_2 \in S$. Temos que $A \cdot X_1 = B$ e $A \cdot X_2 = B$ implica $A \cdot (X_1 - X_2) = 0$, ou seja, $X_1 - X_2 \in S_h$ e $X_1 - X_2 \neq 0$. Logo, por 3.6, o $S_h$ é infinito, e por 3.7, o $S$ também é infinito. Portanto, $A \cdot X = B$ têm infinitas soluções. ■

Perceba então que o conjunto solução de um sistema linear pode ser categorizado de três formas: ou existirá apenas uma $n$-upla, ou existirão infinitas, ou não as existirão.

Portanto, um sistema linear de ordem qualquer será dito:

i) SPD (*Sistema Possível e Determinado*) quando possuir solução e for única;

ii) SPI (*Sistema Possível e Indeterminado*) quando possuir solução e forem infinitas;

iii) SI (*Sistema Impossível*) quando não possuir solução.

A partir daqui, discutiremos como obter o conjunto solução de um sistema linear, o que significa como resolvê-lo. Resumimo-nos aos sistemas quadrados, porque geralmente são mais explorados pela resolução de problemas no Ensino Médio.

Reconhecemos o Método de Eliminação de Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855), conhecido como *Escalonamento*, porém não o estudamos em nosso trabalho, porque o objetivo é investigar as contribuições das teorias de matriz e determinante na resolução de sistemas lineares. Desta forma, também não pontuamos qual é o melhor procedimento, uma vez que ambos têm suas vantagens.

A seguir um relevante teorema desenvolvido pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752), conhecido como a *Regra de Cramer*.

**Teorema 3.9** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear quadrado de ordem $n$. Se o determinante de $A$ é não nulo, então o sistema $A \cdot X = B$ é possível e determinado.*

*Considerando $A_{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ como sendo a matriz $A$ substituída a coluna $i$ pelos elementos da matriz coluna $B$, a solução do sistema é*

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_{(1)})}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_{(2)})}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_{(n)})}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

**Demonstração:** Temos que $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, existe sua inversa $A^{-1}$. Das propriedades matriciais, segue as equivalências:

$$A \cdot X = B \iff (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff X = A^{-1} \cdot B$$

Logo $X_0 = A^{-1} \cdot B$ é solução única e o sistema é possível e determinado. Lembremos que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$ e daí observe:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot B \\ &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{21} & \cdots & \triangle_{n1} \\ \triangle_{12} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{1n} & \triangle_{2n} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\triangle_{11}b_1 + \triangle_{21}b_2 + \cdots + \triangle_{n1}b_n}{\det(A)} \\ \frac{\triangle_{12}b_1 + \triangle_{22}b_2 + \cdots + \triangle_{n2}b_n}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\triangle_{1n}b_1 + \triangle_{2n}b_2 + \cdots + \triangle_{nn}b_n}{\det(A)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Perceba que

$$\triangle_{11}b_1 + \triangle_{21}b_2 + \cdots + \triangle_{n1}b_n = \sum_{k=1}^{n} \triangle_{k1}b_k$$

é o cálculo do determinante de $A_{(1)}$ desenvolvendo o Teorema de Laplace pela primeira coluna. Além disso, note que

$$\triangle_{12}b_1 + \triangle_{22}b_2 + \cdots + \triangle_{n2}b_n = \sum_{k=1}^{n} \triangle_{k2}b_2$$

é o cálculo do determinante de $A_{(2)}$ desenvolvendo o Teorema de Laplace pela segunda coluna. Então, seguindo o raciocínio análogo para as demais, concluímos que

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_{(1)})}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_{(2)})}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_{(n)})}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

■

Observe um exemplo prático da Regra de Cramer.

**Exemplo 3.10** *Considere o seguinte sistema linear* $3 \times 3$*:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

*Sua forma matricial* $A \cdot X = B$ *é*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*onde*

$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ A_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ e \ A_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Note que* $\det(A) = 4 \neq 0$ *e assim o sistema é SPD. Desenvolvendo os cálculos temos* $\det(A_{(1)}) = 6$*,* $\det(A_{(2)}) = -5$ *e* $\det(A_{(3)}) = 3$*. Portanto, segue que*

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

*ou seja,* $x = \dfrac{3}{2}$*,* $y = -\dfrac{5}{4}$ *e* $z = \dfrac{3}{4}$ *e o conjunto solução do sistema é* $\left\{ \left( \dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4} \right) \right\}$.

Em 2.57 estudamos um caso de determinante que possui uma aplicação relevante, que é sobre as matrizes de Vandermonde. Lembremos que, dados $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ números reais, um polinômio $P$ de grau $n$ na variável $x$ real, é uma expressão da forma:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \ , \quad a_n \neq 0$$

Observe o teorema a seguir.

**Teorema 3.11** *Dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$, existe um polinômio $P$ de grau menor ou igual a $n$ tal que $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, ..., $P(x_n) = y_n$.*

**Demonstração:** Pela hipótese podemos escrever o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

onde a matriz de coeficientes é de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

se considerarmos $r$ trocas ordenadas entre as colunas, duas a duas, da direita para a esquerda. Assim, pelo determinante de Vandermonde, segue que

$$\det(V) = (-1)^r \cdot \prod_{i>j} (x_i - x_j), \text{ com } i, j \in \{0, ..., n\}.$$

Porém, independe do valor de $(-1)^r$, pois pela hipótese $x_i \neq x_j$ para quaisquer $i$ e $j$ distintos, e desta forma temos que $\prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$ e então $\det(V) \neq 0$. Daí, pela Regra de Cramer o sistema é SPD, existindo únicos $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ reais que o satisfaçam. Portanto, existe um polinômio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ de grau no máximo $n$, tal que $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, ..., $P(x_n) = y_n$. ■

## 3.2 Determinante Nulo

A Regra de Cramer (3.9) é uma ferramenta que garante a existência de uma única solução quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Porém, se este determinante for igual a zero, nada de preciso pode-se concluir, apenas que ou o sistema é possível e indeterminado ou o sistema é impossível.

Observemos o que ocorre especificamente com um sistema linear homogêneo $A \cdot X = 0$, que por sua vez já possui a solução trivial e portanto caso $\det(A) \neq 0$ ela é única e temos um SPD. Se $\det(A) = 0$ a solução trivial não é única e temos um SPI. Demonstramos também este fato, parcialmente, em 3.17.

Um erro comum entre estudantes e professores, e até mesmo presente em livros didáticos, é afirmar se um sistema linear $A \cdot X = B$ que possui $\det(A) = 0$ é SPI somente pelos valores obtidos no cálculo dos determinantes de $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, ..., $A_{(n)}$. Afirma-se, equivocadamente, que se $\det(A_{(1)}) = \det(A_{(2)}) = \cdots = \det(A_{(n)}) = 0$, então se tem um SPI. Segundo Elon Lages Lima [10], isso acontece porque pela Regra de Cramer, sob essas hipóteses, a solução do sistema seria $X_0 = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} \\ \vdots \\ \frac{0}{0} \end{bmatrix}$ e como $\dfrac{0}{0}$ é uma indeterminada diz-se, erroneamente, que o sistema é possível e indeterminado. O exemplo a seguir verifica a falsidade de tal afirmação.

**Exemplo 3.12** *Considere o sistema linear $A \cdot X = B$ abaixo:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

*Note que* $\det(A) = 0$ *por possuir linhas iguais. Pelo mesmo motivo, segue que* $\det(A_{(1)}) = \det(A_{(2)}) = \det(A_{(3)}) = 0$. *Porém, esse sistema é impossível, pois*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot (x + y + z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*e não existe $x + y + z \in \mathbb{R}$ que satisfaça tal igualdade.*

Entretanto, é possível explorarmos um pouco mais o fato de $\det(A) = 0$, uma vez que se um sistema linear tem solução, então sempre ocorrerá $\det(A_{(i)}) = 0$, $1 \le i \le n$, porque isto é uma condição necessária, porém não suficiente. Observe o teorema a seguir.

**Teorema 3.13** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$ tal que $\det(A) = 0$. Se $A \cdot X = B$ tem solução, então $\det(A_{(1)}) = \det(A_{(2)}) = \cdots = \det(A_{(n)}) = 0$.*

**Demonstração:** Seja $X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ uma solução de $A \cdot X = B$. Consideremos $A^{(j)}$ a coluna $j$, $1 \le j \le n$, da matriz $A$. Assim, temos que $\alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \cdots + \alpha_n \cdot A^{(n)} = B$. Daí, pelo determinante ser uma função linear, segue:

$$\begin{aligned}
\det(A_{(1)}) &= \det \begin{bmatrix} B & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot A^{(1)} + \alpha_2 \cdot A^{(2)} + \cdots + \alpha_n \cdot A^{(n)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(2)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix} + \cdots \\
&+ \alpha_n \cdot \det \begin{bmatrix} A^{(n)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(n)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, por hipótese e pela propriedade sobre colunas iguais, temos que $\det(A_{(1)}) = 0$. Analogamente, concluímos que $\det(A_{(2)}) = \cdots = \det(A_{(n)}) = 0$ como queríamos. ∎

O teorema anterior nos fornece uma ferramenta em sua forma *contra-positiva*, onde o antecedente é a negação do consequente, e vice-versa.

**Corolário 3.14** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$ e $\det(A) = 0$. Se existir pelo menos um $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\det(A_{(i)}) \neq 0$, então $A \cdot X = B$ não tem solução.*

Repare que este resultado é um modo de verificar se um sistema linear é SI.

**Exemplo 3.15** *Considere o sistema linear $A \cdot X = B$ abaixo:*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

*Temos que $\det(A) = 0$ e $\det(A_{(1)}) = -35$. Portanto, pelo corolário 3.14, isto já é o suficiente para concluir que o sistema linear é impossível.*

Na seção 2.2 estudamos o teorema 2.44 garantindo que se uma matriz quadrada possui uma linha (resp. coluna) como combinação linear das outras linhas (resp. colunas) então seu determinante é nulo. A recíproca também é verdadeira e pode ser encontrada na íntegra em [7] no capítulo 1, teorema 13. A seguir, apresentaremos um resultado parcial que será relevante para a resolução, por meio de determinantes, de alguns sistemas possíveis e indeterminados, que muitas vezes acredita-se ser irrealizável.

**Teorema 3.16** *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n$ tal que $\det(A) = 0$. Se para algum $A_{i,j}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, o $\det(A_{i,j}) \neq 0$, então a linha $i$ (resp. coluna $j$) é combinação linear das outras linhas (resp. colunas).*

**Demonstração:** Vamos supor $i = j = n$. Desta forma, partimos de $\det(A_{n,n}) \neq 0$, e pela Regra de Cramer existem únicos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ reais tais que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

e desta forma temos:

$$\begin{aligned} a_{1n} &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{2n} &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ &\vdots \\ a_{(n-1)n} &= a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{aligned}$$

Queremos, então, que $a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}$. Primeiramente, como $\det(A) = 0$, aplicando o Teorema de Laplace pela linha $n$ segue que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot \det(A_{n,k}) = 0 \qquad (^*)$$

Vamos agora analisar o determinante da primeira parcela deste somatório. Note que

$$\det(A_{n,1}) = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\det(A_{n,1}) = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1(n-1)}\lambda_{n-1} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2(n-1)}\lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)1}\lambda_1 + a_{(n-1)2}\lambda_2 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}\lambda_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Daí, pelo determinante ser uma função linear e pela propriedade de colunas iguais, temos:

$$\det(A_{n,1}) = \lambda_1 \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)1} \end{bmatrix}$$

Podemos então realizar $n-2$ trocas ordenadas entre as colunas, duas a duas da direita para a esquerda, de modo que, considerando tais trocas:

$$\det(A_{n,1}) = \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det(A_{n,n})$$

Seguindo o mesmo raciocínio, e fazendo os ajustes necessários, concluímos que:

$$\begin{aligned} \det(A_{n,2}) &= \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det(A_{n,n}) \\ \det(A_{n,3}) &= \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det(A_{n,n}) \\ &\vdots \\ \det(A_{n,(n-1)}) &= \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{0} \cdot \det(A_{n,n}) \end{aligned}$$

Logo, de (*) temos

$$\begin{aligned} a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{n-2} \cdot \det(A_{n,n}) &\; + \\ a_{n2} \cdot (-1)^{n+2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{n-3} \cdot \det(A_{n,n}) &\; + \\ a_{n3} \cdot (-1)^{n+3} \cdot \lambda_3 \cdot (-1)^{n-4} \cdot \det(A_{n,n}) &\; + \\ \cdots &\; + \\ a_{n(n-1)} \cdot (-1)^{n+n-1} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{0} \cdot \det(A_{n,n}) &\; + \\ a_{nn} \cdot (-1)^{n+n} \det(A_{n,n}) &\; = \; 0 \end{aligned}$$

donde, juntando as potências de $(-1)$ e por $\det(A_{n,n}) \neq 0$, implica

$$a_{n1} \cdot \lambda_1 \cdot (-1)^{2n-1} + a_{n2} \cdot \lambda_2 \cdot (-1)^{2n-1} + \cdots + a_{n(n-1)} \cdot \lambda_{n-1} \cdot (-1)^{2n-1} + a_{nn} \cdot (-1)^{2n} = 0$$

e como $(-1)^{2n-1} = -1$ e $(-1)^{2n} = 1$, concluímos:

$$a_{nn} = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{n(n-1)}\lambda_{n-1}$$

Portanto, a coluna $j = n$ é combinação linear das outras colunas da matriz $A$. Analogamente, concluímos que a linha $i = n$ é combinação linear das outras linhas da matriz $A$. Caso tenhamos $\det(A_{i,j}) \neq 0$ com $i \neq n$ ou $j \neq n$ podemos trocar ordenadamente, duas a duas, na matriz $A$ as linha ou as colunas, respectivamente, de modo que a linha $i$ fique na linha $n$ ou a coluna $j$ fique na coluna $n$, o que transformará $A$ em $A'$, onde $A'_{n,n} = A_{i,j}$ e $\det(A') = \det(A) = 0$. ∎

Como consequência, justificamos o caso dos sistemas homogêneos que possuem infinitas soluções quando o $\det(A) = 0$.

**Corolário 3.17** *Seja $A \cdot X = 0$ um sistema linear homogêneo de ordem $n$. Se $\det(A) = 0$, então o sistema é possível e indeterminado.*

**Demonstração:** Temos que se $\det(A) = 0$ então uma das colunas de $A$ é combinação linear das demais. Seja, sem perda de generalidade, a coluna $n$. Logo, existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_{in} = a_{i1} \cdot \lambda_1 + a_{i2} \cdot \lambda_2 + \cdots + a_{i(n-1)} \cdot \lambda_{n-1}$$

para qualquer $i \in \{1, ..., n\}$. Desta forma, concluímos que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}, -1)$ é uma solução, não nula, de $A \cdot X = 0$. De fato

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e por 3.6 segue que $A \cdot X = 0$ possui infinitas solução, ou seja, é SPI. ∎

Utilizando o resultado de 3.16, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.18** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$ tal que $\det(A) = 0$. Com $i, j \in \{1, ..., n\}$, se para algum $A_{i,j}$ tenhamos $\det(A_{i,j}) \neq 0$ e $\det(A_{(j)}) = 0$, então $A \cdot X = B$ é um sistema possível e indeterminado.*

**Demonstração:** Suponha, sem perda de generalidade, $i = j = n$. Então, temos que $\det(A_{n,n}) \neq 0$ e $\det(A_{(n)}) = 0$. Deste modo, pelo teorema 3.16, existem reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdot \lambda_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \lambda_{n-1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Logo, concluímos que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}, 0)$ é uma solução do sistema $A \cdot X = B$, que tem $\det(A) = 0$. Portanto, pelos resultados de 3.17 e 3.7, $A \cdot X = B$ é um SPI. ■

Há de se observar que para os sistemas lineares de ordem $2 \times 2$ o resultado falso que fora comentado no início dessa seção será verdadeiro, mas trata-se de uma exceção. Possivelmente isso também leve um estudante, ou até mesmo um professor, a tencionar uma generalização, que já vimos ser incorreta. Para justificar esse caso particular, utilizamos o teorema anterior.

**Corolário 3.19** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem 2. Se $\det(A) = 0$ e ainda $\det(A_{(1)}) = \det(A_{(2)}) = 0$, então o sistema é SPI.*

**Demonstração:** Note que as matrizes $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ ou $A_{2,2}$ são de ordem 1 e pelo menos uma será não nula, e seu determinante também, para que haja pelo menos uma equação no sistema. E para qualquer que seja, como $\det(A) = 0$ e $\det(A_{(1)}) = \det(A_{(2)}) = 0$, por 3.18 segue que o sistema é possível e indeterminado. ■

Os respectivos passos de demonstração dos teoremas 3.16 e 3.18 nos garante, sob certas hipóteses, uma maneira de resolver sistemas lineares quadrados que são SPI através do cálculo de determinante, usando inclusive a Regra de Cramer. Pela nossa pesquisa, uma ferramenta que não é apresentada em livros de matemática. Observe o exemplo.

**Exemplo 3.20** *Considere o sistema linear $A \cdot X = B$ abaixo:*

$$S: \begin{cases} 5x + 6y + 7z = 8 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

*Temos que*

- $\det(A) = 0$

- $\det(A_{3,3}) = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$

- $\det(A_{(3)}) = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$

*Desta forma, por 3.18, o sistema é SPI. Resolveremos, pela Regra de Cramer, o sistema auxiliar a seguir*

$$S' : \begin{cases} 5x + 6y = 8 - 7z \\ -3x - 2y = z \end{cases}$$

*que é possível e determinado pois* $\det(A_{3,3}) \neq 0$*, considerando* $z$ *uma incógnita real livre. Calculando:*

$$\begin{aligned} \det(A_{3,3_{(1)}}) &= \det \begin{bmatrix} 8 - 7z & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} = 8z - 16 \\ \det(A_{3,3_{(2)}}) &= \det \begin{bmatrix} 5 & 8 - 7z \\ -3 & z \end{bmatrix} = 24 - 16z \end{aligned}$$

*Logo, temos que*

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(A_{3,3_{(1)}})}{\det(A_{3,3})} = \frac{8z - 16}{8} = z - 2 \\ y &= \frac{\det(A_{3,3_{(2)}})}{\det(A_{3,3})} = \frac{24 - 16z}{8} = 3 - 2z \end{aligned}$$

*é a solução de* $S'$ *e, de fato, o terno* $(z - 2, 3 - 2z, z)$ *é solução da primeira e da segunda equação de* $S$*, para qualquer valor de* $z$*. Por fim, a demonstração do teorema 3.16 garante que será também solução da terceira equação, pois:*

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7z - 8 \\ -3 & -2 & -z \\ 1 & 2 & 3z - 4 \end{bmatrix} = z \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

*Portanto, o conjunto solução de* $S$ *é* $\{(z - 2, 3 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$*.*

Enunciamos então um algoritmo usando determinantes para resolver sistemas lineares quadrados que sejam possíveis e indeterminados, e que atendam condições iniciais. Tal procedimento é adequado para a discussão de sistemas de ordem 3 ou até mesmo 4, que inclusive são os mais propostos no Ensino Médio.

Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$ com $\det(A) = 0$.

i) Verifique se existem $i, j \in \{1, ..., n\}$ tais que $\det(A_{i,j}) \neq 0$ e $\det(A_{(j)}) = 0$, o que garante ser SPI o sistema.

ii) Monta-se então um sistema linear associado, eliminando de $A \cdot X = B$ a linha $i$, e para cada linha $l$ restante adicione $(-a_{lj}x_j)$.

iii) Use a Regra de Cramer para determinar a solução deste sistema associado em função de $x_j$, que será algo do tipo

$$\begin{bmatrix} x_1(x_j) \\ x_2(x_j) \\ \vdots \\ x_{j-1}(x_j) \\ x_{j+1}(x_j) \\ \vdots \\ x_n(x_j) \end{bmatrix}$$

iv) Por fim, conclui-se que a solução do sistema inicial $A \cdot X = B$ é

$$\begin{bmatrix} x_1(x_j) \\ \vdots \\ x_{j-1}(x_j) \\ x_j \\ x_{j+1}(x_j) \\ \vdots \\ x_n(x_j) \end{bmatrix}$$

Pelos passos deste algoritmo, resolvemos o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.21** *Considere o sistema linear* $A \cdot X = B$ *a seguir, onde* $\det(A) = 0$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \\ -3x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

*i) Verifica-se que o sistema é SPI, pois* $\det(A_{2,1}) = -4$ *e* $\det(A_{(1)}) = 0$.

*ii) O sistema auxiliar associado é:* $\begin{cases} y + 2z = 4 - x \\ y - 2z = -4 + 3x \end{cases}$

*iii) Então, temos que* $\det(A_{2,1_{(1)}}) = -4x$ *e* $\det(A_{2,1_{(2)}}) = 4x - 8$ *e assim:*

$$y = \frac{-4x}{-4} = x \quad e \quad z = \frac{4x-8}{-4} = 2 - x$$

*iv) Portanto, a solução do sistema linear inicial é:* $\{(x, x, 2 - x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

A escolha de $A_{i,j}$ é livre, desde que esteja de acordo com as hipóteses. Portanto, o mesmo sistema pode ser resolvido com determinantes distintos, entretanto a classe de soluções é sempre a mesma. Observe o mesmo exemplo anterior, resolvido de outra forma.

**Exemplo 3.22** *Considere o sistema linear* $A \cdot X = B$ *a seguir, onde* $\det(A) = 0$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \\ -3x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

*i) Verifica-se que o sistema é SPI, pois* $\det(A_{3,2}) = -3$ *e* $\det(A_{(2)}) = 0$.

*ii) O sistema auxiliar associado é:* $\begin{cases} x + 2z = 4 - y \\ 2x + z = 2 + y \end{cases}$

*iii) Então, temos que* $\det(A_{3,2_{(1)}}) = -3y$ *e* $\det(A_{3,2_{(2)}}) = 3y - 6$ *e assim:*

$$x = \frac{-3y}{-3} = y \quad e \quad z = \frac{3y-6}{-3} = 2 - y$$

*iv) Portanto, a solução do sistema linear inicial é:* $\{(y, y, 2 - y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

Podemos estudar ainda situações quando, em um sistema linear, o número de incógnitas é superior ao número de equações. Uma ideia errada é afirmar que, apenas com isso, o sistema seja possível e indeterminado. Por exemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot (3x + 2y + z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

claramente não tem solução. Porém, se tratando dos sistema lineares homogêneos, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.23** *Se $S : A \cdot X = 0$ é um sistema linear homogêneo de ordem $m \times n$, com $m < n$, então $S$ é possível e indeterminado.*

**Demonstração:** Temos que

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

e, considerando que $m < n$, podemos reescrevê-lo como

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &=& -a_{1(m+1)}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m &=& -a_{2(m+1)}x_{m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m &=& -a_{m(m+1)}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

Seja $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$. Daí temos duas possibilidades:

i) se $\det(A') \neq 0$ então para quaisquer que sejam $x_{m+1}, ..., x_n$ existirão valores para $x_1, ..., x_m$ que satisfaçam $S$;

ii) se $\det(A') = 0$ então fixados $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$ existirão infinitos valores para $x_1, ..., x_m$ que satisfaçam $S$.

De todo caso, são infinitas as $n$-uplas $(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$ que satisfazem $A \cdot X = 0$, que por sua vez é SPI. ■

Note que, pelo resultado 3.7 e como consequência também do teorema anterior, qualquer sistema linear com menos equações do que incógnitas, e que tenha solução, será possível e indeterminado.

## 3.3 Sistemas com Soluções Inteiras

Pela Regra de Cramer (3.9), se um sistema linear de ordem $n$ é SPD então qualquer incógnita é dada por um quociente cujo denominador sempre é o determinante da matriz $A$ dos coeficientes do sistema. Ora, é relevante estudarmos então quando estes quocientes geram números inteiros, isto é, quando a divisão é exata.

Note que sempre quando $\det(A) = \pm 1$ e para todo $A_{(i)}$ o $\det(A_{(i)})$ for inteiro, isso ocorrerá. Em situações assim as contas podem se tornar relativamente mais fáceis. Deste modo, enunciamos o seguinte teorema.

**Teorema 3.24** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$, onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$ para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$. Se $\det(A) = \pm 1$, então a solução $X_0$ do sistema possui apenas elementos inteiros.*

**Demonstração:** Lembre-se que $\mathbb{Z}$ é fechado para soma e produto, e pela definição de determinante concluímos que este será um número inteiro quando a matriz possuir apenas inteiros. Portanto, por hipótese, temos que $\det(A_{(i)}) \in \mathbb{Z}$ para todo $i$, e daí sempre $x_i = \dfrac{\det(A_{(i)})}{\det(A)} = \pm \det(A_{(i)})$. ■

Há outra forma de verificar este teorema. Perceba que se $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, então $\triangle_{ij} \in \mathbb{Z}$. Além disso, se $\det(A) = \pm 1$, então existe $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$, onde $\dfrac{1}{\det(A)} = \pm 1$ e $adj(A)$ possui apenas elementos inteiros. Portanto, como $X_0 = A^{-1} \cdot B$ e $b_i \in \mathbb{Z}$, a solução do sistema também possui apenas inteiros.

Logo, para se obter um sistema linear com soluções inteiras basta tomarmos $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$ de modo que a matriz dos coeficientes tenha determinante igual a $\pm 1$.

**Exemplo 3.25** *Considere o sistema linear $A \cdot X = B$ abaixo:*

$$\begin{cases} -3x + y - z = 7 \\ 2x + y + z = -6 \\ 8x + 3y + 4z = -5 \end{cases}$$

*Temos que* $\det(A) = -1$, *e ainda* $\det(A_{(1)}) = 39$, $\det(A_{(2)}) = 19$ *e* $\det(A_{(3)}) = -91$. *Portanto, a solução única do sistema é:*

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{39}{-1} \\ \frac{19}{-1} \\ \frac{-91}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 \\ -19 \\ 91 \end{bmatrix}$$

É preciso observar que $\det(A) = \pm 1$ é uma condição suficiente, porém não necessária, para que um sistema linear de coeficientes e termos independentes inteiros tenha solução apenas inteira.

Outra maneira de se obter um sistema linear com soluções inteiras, com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$, é se cada termo independente for múltiplo de $\det(A)$. Observe o teorema a seguir.

**Teorema 3.26** *Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear de ordem $n$, onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$ para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$. Se $\det(A) \neq 0$ e $b_i = k_i \cdot \det(A)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, então a solução $X_0$ do sistema possui apenas elementos inteiros.*

**Demonstração:** Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema é SPD e $X_0 = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) \cdot B$. Ora, como $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, temos $\triangle_{ij} \in \mathbb{Z}$, e por hipótese ainda segue que cada $b_i$ é divisível por $\det(A)$. Portanto, $X_0$ tem apenas elementos inteiros. ∎

**Exemplo 3.27** *Considere o sistema linear $A \cdot X = B$ abaixo:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -9 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ -3x - 4y - z = 36 \end{cases}$$

*Temos que* $\det(A) = 9$, *e note que*

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \cdot \det(A) \\ b_2 &= 0 \cdot \det(A) \\ b_3 &= 4 \cdot \det(A) \end{aligned}$$

*Logo, a solução será composta apenas por números inteiros. E de fato, temos que* $\det(A_{(1)}) = 234$, $\det(A_{(2)}) = -225$ *e* $\det(A_{(3)}) = -126$, *donde pela Regra de Cramer a solução única do sistema é:*

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{234}{9} \\ \frac{-225}{9} \\ \frac{-126}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -25 \\ -14 \end{bmatrix}$$

# Capítulo 4

# Artigos RPM

Neste capítulo, apresentamos cinco textos da Revista do Professor de Matemática (RPM) que complementam o que estudamos, além de justificar alguns pontos que ficaram em aberto. Outros ainda são interessantes resultados que podem ser trabalhados em sala de aula.

## 4.1 O Produto de Matrizes

Esta seção foi redigida com base no artigo de Possani [12].

O ensino nas escolas segue uma ordem partindo de Matrizes, depois os Determinantes e em seguida Sistemas Lineares, o que logicamente faz sentido. Porém, historicamente, o desenvolvimento dessas teorias não ocorreu nessa sequência. O matemático Cauchy já usava o termo *determinante* em 1812, mas ele dizia determinante de um sistema linear e não de uma matriz. Apenas em 1858, o matemático britânico Arthur Cayley (1821 – 1895) usou o termo *matriz* sobre transformações no plano, que são praticamente mudanças de variáveis.

Considere as duas transformações $T_1$ e $T_2$ abaixo.

$$T_1 : \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \qquad T_2 : \begin{cases} r = Au + Bv \\ s = Cu + Dv \end{cases}$$

Como seria possível escrever $r$ e $s$ em termos de $x$ e $y$? Ora, basta substituir $T_1$ em $T_2$, isto é, compor $T_2 \circ T_1$. Daí temos:

$$\begin{cases} r = A \cdot (ax + by) + B \cdot (cx + dy) \\ s = C \cdot (ax + by) + D \cdot (cx + dy) \end{cases} \implies \begin{cases} r = (Aa + Bc) \cdot x + (Ab + Bd) \cdot y \\ s = (Ca + Dc) \cdot x + (Cb + Dd) \cdot y \end{cases}$$

Cayley chamava de matriz de $T_1$ à $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e de matriz de $T_2$ à $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Assim, se definia:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}$$

Com o tempo, essa *composição de matrizes* se torna a multiplicação de matrizes, e como $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$, segue que o produto entre duas matrizes não é comutativo, e surgem as condições de existências deste produto, no qual exploramos em nosso trabalho.

O século XIX foi de grande desenvolvimento da álgebra, principalmente pelo estudo de estruturas abstratas. Além de Cayley, os matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809 – 1880) e Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) criaram a *Álgebra de Matrizes*, um dos primeiros exemplos de estrutura algébrica com uma operação não comutativa.

## 4.2 A Questão da Unicamp

Esta seção foi redigida com base no artigo de Machado [11].

Trata-se de uma interessante questão presente em um dos vestibulares da Universidade Estadual de Campinas/SP (Unicamp), cujo enunciado era:

*Sejam $A$ e $B$ duas matrizes de ordens $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente, com $m < n$. Prove que* $\det(A \cdot B) = 0$, *baseado em propriedades do sistema linear de equações lineares.*

$$(A \cdot B) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para solucionar o problema, considere as matrizes abaixo:

$$X_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad e \qquad 0_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que $(A \cdot B) \cdot X = 0$ é um sistema linear homogêneo de ordem $n$. Logo, temos que $\det(A \cdot B) = 0$ se, e somente se, $(A \cdot B) \cdot X = 0$ for SPI.

Analisando, o sistema linear $B \cdot X = 0$ é homogêneo de ordem $m \times n$, com $m < n$, e portanto é SPI, por 3.23.

Por outro lado, toda solução $X_0$ de $B \cdot X = 0$ é também solução de $(A \cdot B) \cdot X = 0$, pois seguem as igualdades

$$(A \cdot B) \cdot X_0 = A \cdot (B \cdot X_0) = A \cdot 0 = 0$$

e como $B \cdot X = 0$ é SPI concluímos que $(A \cdot B) \cdot X = 0$ é também SPI.

Portanto, $\det(A \cdot B) = 0$ como queríamos.

## 4.3 Usando Determinantes para Fatorar

Esta seção foi redigida com base no artigo de Garbi [5].

Apresenta-se um problema de uma Olimpíada Juvenil de Matemática, de muito tempo atrás. Os participantes deveriam fatorar a expressão:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Não é uma tarefa fácil até mesmo para um professor de matemática, se não conhecer algumas manipulações algébricas. Entretanto, a teoria de determinantes fornece uma solução prática.

Pela Regra de Sarrus, segue:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Pelo Teorema de Jacobi, temos

$$\det\begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

e como o determinante é uma função linear, chegamos a:

$$(a+b+c)\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

Ainda temos que

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

e concluímos

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

solucionando o problema.

## 4.4 Matrizes em Blocos

Esta seção foi redigida com base no artigo de Tamarozzi [13].

Lembremos que matrizes triangulares (1.4) são aquelas em que os elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal são nulos, e que seu determinante corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal (2.54). Por exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

Toda matriz pode ser reduzida à forma triangular, a fim de facilitar o cálculo do determinante. Para isso, utilizamos as trocas entre linhas ou colunas e o Teorema de

Jacobi, pois esses dois resultados preservam o determinante original, ou pelo menos o seu módulo.

Desta forma, apresentamos a definição de matrizes em blocos, uma vez que o objetivo é mostrar que também podemos triangularizar uma matriz em blocos, de modo a simplificar as contas com o determinante.

**Definição 4.1** *Uma matriz $A$ de ordem $n$ é dita matriz em blocos se estiver particionada em submatrizes, também chamadas de blocos, de ordem $r \times s$, com $1 \leq r, s < n$, obtidas de $A$ pela exclusão de $n - r$ linhas e $n - s$ colunas.*

As submatrizes cujas diagonais principais são partes da diagonal principal de $A$ são chamadas de *blocos diagonais* de $A$. Observe o exemplo abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & | & a_{13} & a_{14} & a_{15} & | & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & | & a_{23} & a_{24} & a_{25} & | & a_{26} \\ -- & -- & - & -- & -- & -- & - & -- \\ a_{31} & a_{32} & | & a_{33} & a_{34} & a_{35} & | & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & | & a_{43} & a_{44} & a_{45} & | & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & | & a_{53} & a_{54} & a_{55} & | & a_{56} \\ -- & -- & - & -- & -- & -- & - & -- \\ a_{61} & a_{62} & | & a_{63} & a_{64} & a_{65} & | & a_{66} \end{bmatrix}$$

Os blocos diagonais neste caso são $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_{66} \end{bmatrix}$.

Assim sendo, uma matriz está na forma triangular em blocos se todas as submatrizes abaixo (ou acima) dos blocos diagonais são nulas, e para obtê-la basta aplicar as operações básicas. Tomando o exemplo anterior, devemos ter:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & | & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & | & a'_{16} \\ a'_{21} & a'_{22} & | & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & | & a'_{26} \\ -- & -- & - & -- & -- & -- & - & -- \\ 0 & 0 & | & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} & | & a'_{36} \\ 0 & 0 & | & a'_{43} & a'_{44} & a'_{45} & | & a'_{46} \\ 0 & 0 & | & a'_{53} & a'_{54} & a'_{55} & | & a'_{56} \\ -- & -- & - & -- & -- & -- & - & -- \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & a'_{66} \end{bmatrix}$$

O objetivo do estudo é mostrar que se uma matriz está triangularizada em blocos, então o determinante da matriz é igual ao produto dos determinantes dos blocos diagonais. Essa propriedade facilita os cálculos porque para triangularizar em blocos introduz-se uma quantidade menor de zeros do que se fosse triangularizar a matriz toda.

**Teorema 4.2** *Seja $M$ a matriz triangular em blocos abaixo, de ordem $(m+n)\times(m+n)$, $m, n > 1$, onde seus blocos são as matrizes $A$, $B$, $0$ e $D$ com as ordens indicadas.*

$$M = \begin{bmatrix} A_{m\times m} & B_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & D_{n\times n} \end{bmatrix}$$

*Então* $\det(M) = \det(A)\cdot\det(D)$.

**Demonstração:** Note que podemos triangularizar a matriz $A$ operando nas $m$ primeiras linhas e colunas, o que transformará $B$ em $B'$. Em seguida, triangularizamos a matriz $D$ operando nas últimas $n$ linhas e colunas, o que transformará $B'$ em $B''$. Perceba que a matriz $0$ não se alterará. Daí, a matriz $M$ gera uma matriz $M'$ totalmente triangularizada, onde $\det(M) = \pm\det(M')$ dependendo das trocas entre linhas ou colunas que forem feitas.

$$M' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \ddots & \ddots & | & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & | & & B'' & \\ 0 & 0 & a'_{mm} & | & & & \\ -- & -- & -- & - & -- & -- & -- \\ & & & | & d'_{11} & \ddots & \ddots \\ & 0 & & | & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & | & 0 & 0 & d'_{nn} \end{bmatrix}$$

Consideremos então $A'$ a matriz triangularizada de $A$ após $k$ trocas entre linhas e colunas, e respectivamente $D'$ de $D$ após $l$ trocas. Temos que:

$$\det(A') = a'_{11}\cdots a'_{mm},\ \det(D') = d'_{11}\cdots d'_{mm} \text{ e } \det(M') = a'_{11}\cdots a'_{mm}\cdot d'_{11}\cdots d'_{nn}$$

Observe que:

i) se $k$ for par, então $\det(A) = \det(A')$, e se $l$ for par, então $\det(D) = \det(D')$

ii) se $k$ for ímpar, então $\det(A) = -\det(A')$, e se $l$ for ímpar, então $\det(D) = -\det(D')$

De todo caso, teremos que $k+l$ é par. Logo:

$$\det(M) = \det(M') = \det(A') \cdot \det(D') = \det(A) \cdot \det(D)$$

ou

$$\det(M) = \det(M') = \det(A') \cdot \det(D') = [-\det(A)] \cdot [-\det(D)] = \det(A) \cdot \det(D)$$

Entretanto:

iii) se $k$ for ímpar, então $\det(A) = -\det(A')$, e se $l$ for par, então $\det(D) = \det(D')$

Deste modo, teremos $k+l$ ímpar. Logo:

$$\det(M) = -\det(M') = -[\det(A') \cdot \det(D')] = -[-\det(A)] \cdot \det(D) = \det(A) \cdot \det(D)$$

Análogo para:

iv) se $k$ for par, então $\det(A) = \det(A')$, e se $l$ for ímpar, então $\det(D) = -\det(D')$

De qualquer forma, concluímos que $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$. ∎

O resultado ainda se estende caso os blocos da matriz $M$ estejam deslocados. Primeiramente, lembremos que o determinante é invariante por transposição. Logo

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \iff M^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ 0 & D^t \end{bmatrix}$$

e daí: $\det(M) = \det(M^t) = \det(A^t) \cdot \det(D^t) = \det(A) \cdot \det(D)$.

Todavia, se

$$M = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & B_{m \times m} \\ C_{n \times n} & D_{n \times m} \end{bmatrix}$$

pode-se trocar $B$ por 0, e consequentemente $D$ por $C$, efetuando $m \cdot n$ trocas ordenadas entre as colunas, duas a duas. Logo: $\det(M) = (-1)^{m \cdot n} \cdot \det(B) \cdot \det(C)$.

Analogamente, se

$$M = \begin{bmatrix} A_{m \times n} & B_{m \times m} \\ C_{n \times n} & 0_{n \times m} \end{bmatrix}$$

temos: $\det(M) = (-1)^{m \cdot n} \cdot \det(B) \cdot \det(C)$.

O teorema 4.2 é verdadeiro para qualquer número de blocos diagonais, pois podemos particionar de vários modos distintos uma mesma matriz triangularizada. Por exemplo, se tivermos a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 95 & | & -23 & 0,5 & \sqrt{2} \\ 3 & 4 & | & 47 & | & 2,6 & -\pi & 0 \\ -- & -- & - & -- & - & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & | & 8 & | & -50 & \dfrac{9}{7} & 84 \\ -- & -- & - & -- & - & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -6600$$

Apresentamos, então, uma justificativa para o Teorema de Binet (2.59), de modo prático e utilizando a teoria de matrizes em blocos, diferentemente de outros modos presentes nos diversos livros de matemática. Tal demonstração completa nosso trabalho a respeito de propriedades de determinantes.

**Teorema 2.59** *Dadas $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$, temos que:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**Demonstração:** Considere a matriz em blocos $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix}$ de ordem $2n \times 2n$, e temos que $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$. Utilizaremos $n$ vezes o Teorema de Jacobi da seguinte forma: multiplicar cada coluna $k$, $1 \leq k \leq n$, por $b_{k1}$ e adicioná-las à coluna $n+1$; em seguida, multiplicar cada coluna $k$ por $b_{k2}$ e adicioná-las à coluna $n+2$; e assim sucessivamente, até previamente multiplicar cada coluna $k$ por $b_{kn}$ e adicioná-las à coluna $2n$. Desta forma, pelo produto de matrizes, a matriz $M$ gerará

$$M' = \begin{bmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

e ainda $\det(M) = \det(M')$. Mas, temos que

$$\begin{aligned}
\det(M') &= (-1)^{n \cdot n} \cdot \det(-I_n) \cdot \det(A \cdot B) \\
&= (-1)^{n^2} \cdot (-1)^n \cdot \det(A \cdot B) \\
&= (-1)^{n(n+1)} \cdot \det(A \cdot B) \\
&= 1 \cdot \det(A \cdot B), \; \textit{pois } n(n+1) = 2p, \; p \in \mathbb{N} \\
&= \det(A \cdot B)
\end{aligned}$$

Portanto $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. ■

A seguir, exemplificamos como funciona a transformação da matriz $M$ para $M'$, proposta na demonstração anterior.

**Exemplo 4.3** *Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. *Temos, então, a seguinte matriz em blocos:*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 7 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & - & -- & -- & -- \\ -1 & 0 & 0 & | & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

*Previamente multiplicando cada coluna $k$, $1 \leq k \leq 3$, por $b_{k1}$ e adicionando à coluna 4:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 7 & | & 1 \cdot (-9) + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & - & ---------- & -- & -- \\ -1 & 0 & 0 & | & 1 \cdot (-1) + 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 \cdot (-1) + 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 6 \cdot (-1) + 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

*Agora, previamente multiplicando cada coluna $k$, $1 \leq k \leq 3$, por $b_{k2}$ e adicionando à coluna 5:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 13 & 5\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+(-4)\cdot 2 & 0 \\ -9 & 1 & 7 & | & 35 & 5\cdot(-9)+(-1)\cdot 1+(-4)\cdot 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 7 & 5\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-4)\cdot 1 & 0 \\ -- & -- & -- & - & -- & ---------------- & -- \\ -1 & 0 & 0 & | & 0 & 5\cdot(-1)+5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & (-1)\cdot(-1)+(-1) & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & (-4)\cdot(-4)+(-4) & 8 \end{bmatrix}$$

*Por fim, previamente multiplicando cada coluna $k$, $1 \leq k \leq 3$, por $b_{k3}$ e adicionando à coluna 6:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 13 & 8 & (-2)\cdot 3+3\cdot(-1)+8\cdot 2 \\ -9 & 1 & 7 & | & 35 & -74 & (-2)\cdot(-9)+3\cdot 1+8\cdot 7 \\ 1 & 0 & 1 & | & 7 & 1 & (-2)\cdot 1+3\cdot 0+8\cdot 1 \\ -- & -- & -- & - & -- & -- & ------------ \\ -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & (-2)\cdot(-1)+(-2) \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 3\cdot(-1)+3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 8\cdot(-1)+8 \end{bmatrix}$$

*Portanto, chegamos à*

$$M' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 13 & 8 & 7 \\ -9 & 1 & 7 & | & 35 & -74 & 77 \\ 1 & 0 & 1 & | & 7 & 1 & 6 \\ -- & -- & -- & - & -- & -- & -- \\ -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*onde* $\det(M) = \det(M')$. *Note que, de fato:*

$$\begin{bmatrix} 13 & 8 & 7 \\ 35 & -74 & 77 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix} = A \cdot B$$

## 4.5 Uma Representação Matricial para o Algoritmo de Euclides

Esta seção foi redigida com base no artigo de Carvalho [3].

O Algoritmo de Euclides calcula o máximo divisor comum ($m.d.c.$) entre dois números inteiros $a$ e $b$ através do método das divisões sucessivas. Além disso, ainda é possível calcular valores inteiros $r$ e $s$ tais que $mdc(a, b) = a \cdot r + b \cdot s$.

Pelo algoritmo, dividimos um número pelo outro, e em seguida dividimos o divisor desta última divisão pelo seu resto, e assim sucessivamente até que o resto seja zero. Afirma-se, então, que o $mdc$ é o último resto não nulo. Vejamos um exemplo, calculando o maior divisor comum entre 36 e 14 pelas divisões sucessivas:

$$\begin{aligned} 36 &= 14 \cdot 2 + 8 \\ 14 &= 8 \cdot 1 + 6 \\ 8 &= 6 \cdot 1 + 2 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Logo, $mdc(36, 14) = 2$. Em seguida, para calcular os inteiros $r$ e $s$ tais que $36 \cdot r + 14 \cdot s = 2$ substitui-se as equações encontradas uma nas outras, da última para a primeira. Essas manipulações podem ser confusas muitas vezes, mas note como o produto de matrizes e a matriz inversa organizam essas contas. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 36 \\ 14 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e daí, segue que

$$\begin{bmatrix} 36 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} 36 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (^*)$$

Note que $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível, pois seu determinante é igual a $-1$, e sua inversa é:

$$\frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Logo, de $(^*)$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 36 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e portanto $36 \cdot (2) + 14 \cdot (-5) = 2$, ou seja, $r = 2$ e $s = -5$.

Equações do tipo $36 \cdot r + 14 \cdot s = mdc(36, 14)$ com coeficientes e variáveis inteiras são ditas *equações diofantinas*, e elas possuem infinitas soluções inteiras a partir de uma solução inicial, que pode ser determinada por esse método. A seguir, explicitamos o algoritmo de modo geral.

É preciso calcular

$$P = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $q_1, q_2, ..., q_n$ são todos os quocientes das divisões sucessivas, exceto o último. Assim, segue que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} d_n \\ mdc(a, b) \end{bmatrix}$$

onde $d_n$ é o último divisor logo antes do próprio $mdc(a, b)$.

Pelo Teorema de Binet, temos $\det(P) = \pm 1$, pois cada matriz de $P$ tem determinante igual a $-1$. Assim, $P$ sempre admitirá inversa e, por 3.24, $P^{-1}$ possuirá apenas elementos inteiros.

Segue então que

$$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ mdc(a, b) \end{bmatrix}$$

e portanto os valores $r$ e $s$ estão presentes na segunda linha da matriz $P^{-1}$.

# Conclusão

Esperamos que o nosso trabalho venha a contribuir para toda a comunidade de professores, e também de alunos que gostam ou pretendem estudar a matemática. O texto investigou a teoria de determinante e pontuou aplicações dentro da própria matemática, trazendo até mesmo possibilidades para a sala de aula. O objetivo era desenvolver uma base sólida, e assim foi feito.

Resumimos a teoria de grupos de permutações em uma linguagem acessível, que por vezes não é contemplada pelos currículos dos cursos de formação de professores. Enunciamos a definição de determinante com suas propriedades fornecendo um material rico para estudo próprio ou até mesmo para planejamento de aulas. Apresentamos os sistemas lineares sob um olhar matricial, mostrando como, e o quanto, a teoria de determinante influencia nesse tópico. Corrigimos erros, ensinamos ferramentas, redigimos teoremas pouco conhecidos, tudo a favor do processo de ensino e aprendizagem. Além de trazer artigos importantes que caminham junto à proposta do nosso texto.

Evidentemente é impossível dizer que esgotamos o assunto. Entretanto, temos um minucioso trabalho desenvolvido como forma de engrandecer o conhecimento matemático específico sobre o determinante de uma matriz.

# Referências Bibliográficas


[1] *BOLDRINI, J. L.* [*et al.*]. **Álgebra Linear.** 3ª ed, São Paulo: editora HARBRA, 1986.

[2] *CALLIOLI, C. A. DOMINGUES, H. H. COSTA, R. C. F.* **Álgebra Linear e Aplicações.** 6ª ed, São Paulo: Atual Editora, 1990.

[3] *CARVALHO, J. B. P. D.* (2009). **Uma Representação Matricial para o Algoritmo de Euclides.** Revista do Professor de Matemática. RPM 70, p. 34-36.

[4] *DOMINGUES, H. H. IEZZI, G.* **Álgebra Moderna.** 4ª ed, São Paulo: Atual Editora, 2003.

[5] *GARBI, G.* (1999). **Usando Determinantes para Fatorar.** Revista do Professor de Matemática. RPM 41, p. 38.

[6] *HEFEZ, A. FERNANDEZ, C. S.* **Introdução à Álgebra Linear.** 1ª ed, Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

[7] *HOFFMAN, K. KUNZE, R.* **Álgebra Linear.** 2ª ed, tradução de Renate Watanabe, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[8] *IEZZI, G. HAZZAN, S.* **Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 4.** 2ª ed, São Paulo: Atual Editora, 1977.

[9] *LIMA, E. L.* **Números e Funções Reais.** 1ª ed, Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2013.

[10] *LIMA, E. L.* (1993). **Sobre o Ensino de Sistemas Lineares.** Revista do Professor de Matemática. RPM 23, p. 8-18.

[11] *MACHADO, A. D. S.* (1992). **A Questão da Unicamp.** Revista do Professor de Matemática. RPM 21, p. 47.

[12] *POSSANI, C.* (1992). **O Produto de Matrizes.** Revista do Professor de Matemática. RPM 21, p. 35-39.

[13] *TAMAROZZI, A. C.* (1999). **Matrizes em Blocos.** Revista do Professor de Matemática. RPM 40, p. 41-45.

[14] *UEL.* **Matemática Essencial.** Ensino Superior: Álgebra Linear: Adjunta de uma matriz e suas propriedades, 2006. [on-line] Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/alinear/adjunta.htm>. Acesso em: 22 nov. 2019.