COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Bruno dos Santos Migon

A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS, MEMES E GIFS COMO RECURSO DIDÁTICO EM MATEMÁTICA

Rio de Janeiro

2020

Bruno dos Santos Migon

A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS, MEMES E GIFS COMO RECURSO DIDÁTICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Drª. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro

2020

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M636 Migon, Bruno dos Santos
A utilização de problemas olímpicos, memes e gifs como recurso didático em matemática / Bruno dos Santos Migon. – Rio de Janeiro, 2020.
164 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Resolução de problemas. 3. Recursos didáticos multidisciplinares. 4. Memes. 5. Olimpíada de Matemática. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Bruno dos Santos Migon

A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS, MEMES E GIFS COMO RECURSO DIDÁTICO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: **20** / **03** / **2020**.

Banca Examinadora:

____

Prof^{a} Dr^{a}. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
PROFMAT Colégio Pedro II

____

Prof Dr. Nicolau Corção Saldanha
PUC-RJ

____

Prof Dr. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT Colégio Pedro II

____

Prof Dr. Diego de Souza Nicodemos
PROFMAT Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2020

Dedico esta pesquisa primeiramente à Deus, ao meu núcleo familiar, à minha orientadora e, principalmente, à minha esposa Alessandra, por ter me dado todo o apoio necessário para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Roberto e Marisa, pela vida proporcionada, pela educação e ensinamentos. São os meus heróis que não usam capa. Ao meu irmão Thiago, pelo incansável incentivo e palavras de apoio do início ao final deste curso.

Aos meus filhos Lucas, o primogênito que se viu obrigado a dividir o pai entre nossas brincadeiras e o curso de mestrado, e Matheus, o anjo recém-nascido que já foi obrigado a dividir o pai entre suas trocas de fraldas e as páginas deste trabalho. Lucas e Matheus, vocês são o motivo da minha existência, me desculpe por tanta ausência. À minha esposa, Alessandra, a espinha dorsal da minha vida, minha eterna gratidão pois sem você nem sequer teria iniciado este curso. Obrigado pela paciência e parceria desde sempre e a compreensão por cada ausência devido aos estudos.

Aos meus colegas das turmas no curso PROFMAT, as turmas 2017 e 2018, tanto aqueles que concluíram o curso quanto aos que, pelos mais variados motivos, não conseguiram, vocês todos são, sem dúvida alguma, guerreiros.

Um agradecimento especial aos colegas da turma 2017, Cláudio Passos e Márcio Antônio. Dois exemplos de professores, meus padrinhos de casamento, verdadeiros irmãos e amigos que o PROFMAT me deu. Nunca esquecerei toda essa jornada de curso e toda a parceria realizada de trabalhos, estudos para avaliações, das muitas cervejadas, churrascos e festas. Grande parte da conclusão deste curso lhes é devida, meus amigos.

Quero agradecer aos funcionários da PROPGPEC do Colégio Pedro II, que direta ou indiretamente me ajudaram no decorrer do curso e, em maior escala aos professores do PROFMAT: Tânia Boffoni, Anderson Vargas, Luciana Martino, Patrícia Erthal, Andreia Maciel e Marilis Venceslau, por proporcionar meu crescimento acadêmico. Obrigado por tudo o que fizeram e fazem em prol do ensino.

Aos integrantes da banca, os professores do PROFMAT do Colégio Pedro II, Daniel Martins e Diego Nicodemos, agradeço pela relevância nos comentários para a melhoria deste trabalho e, em especial, ao Professor Nicolau Saldanha, pela importância de seus apontamentos e pelas contribuições feitas, que aprimoraram sobremaneira esta pesquisa.

Por fim, um agradecimento especial à minha orientadora, a Professora Drª. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa pelo auxílio, orientação, ensinamentos e dedicação desde a disciplina MA13 (Geometria) até ser minha Professora-Orientadora. Exemplo de ser humano, pelas suas qualidades como pessoa, e de profissional de matemática, pelo seu exímio conhecimento e pelo dom do magistério. Meu muito obrigado por todo o apoio, orientação e compreensão desde a escolha do tema até a conclusão desta dissertação, com muito carinho e paciência. Seu trabalho é inspirador para professores e alunos.

"Nobody is gonna hit as hard as life. But ain't about how hard you hit. It's about how hard you can get hit... and keep moving forward... how much you can take, and keep moving forward. That's how winning is done!".

(Rocky Balboa)

RESUMO

MIGON, Bruno dos Santos. **A Utilização de Problemas Olímpicos, Memes e GIFs como Recurso Didático em Matemática.** 2020. 165 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

O Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas busca desenvolver no aluno um raciocínio mais lógico e interpretativo, tendo em vista que ao longo de sua vida será necessário interpretar e solucionar diversos problemas. Solucionar problemas como busca de alternativas para a transmissão de conhecimento pode colaborar com a motivação e aprendizagem dos estudantes, e proporcionar o prazer da descoberta inerente ao estudo da Matemática. Um conceito de matemática pode não fazer sentido para o aluno ou pode ser compreendido de maneira incorreta, gerando uma confusa associação entre o objeto matemático e seu real significado. Surgiram, com o advento da informática, objetos tecnológicos presentes no dia-a-dia daqueles que estão conectados na internet e nas redes sociais: os Memes e os GIFs. Podemos utilizar Memes e GIFs que estão presentes em larga escala na internet para ajudar a explicar assuntos matemáticos e elucidar nossas aulas, trazendo conceitos necessários e aproximando a matemática para a realidade que o aluno vive hoje. Assim, o presente trabalho que, após apresentar um mapeamento das dissertações do PROFMAT sobre esta temática, vai em busca de diferentes resoluções para alguns Problemas Olímpicos de Matemática (OBMEP, IMO), visando atingir um maior potencial pedagógico com um mesmo problema. Em seguida, passamos pelas possibilidades pedagógicas que podemos explorar utlilizando alguns Memes e GIFs nas aulas e, finalizamos com a proposta de algumas atividades, visando concatenar a Resolução de Problemas, Memes e GIFs em aulas. As Figuras apresentadas neste trabalho (imagens, Memes e GIFs) encontram-se organizadas por ordem numérica e disponíveis para visualização/download no seguinte link: **<https://drive.google.com/backup-figuras-dissertacao-profmat2020>**.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Olimpíada de Matemática; IMO; OBMEP; Meme; GIF; Recurso Didático.

ABSTRACT

MIGON, Bruno dos Santos. **The Use of Olympic Problems, Memes and GIFs as a Didactic Resource in Mathematics.** 2020. 165 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

The Teaching of Mathematics through Problem Solving seeks to develop in the student a more logical and interpretative reasoning, with a view throughout his life it will be necessary to interpret and solve various problems. Solving problems such as searching for alternatives for the transmission of knowledge can collaborate with students' motivation and learning, and provide the pleasure of discovery inherent in the study of Mathematics. A math concept may not make sense to the student or it may be misunderstood, generating a confused association between the mathematical object and its real meaning. With the advent of informatics, technological objects present in the day-to-day lives of those who are connected to the internet and social networks have emerged: Memes and GIFs. We can use Memes and GIFs that are present on a large scale on the internet to help explain mathematical subjects and clarify our classes, bringing necessary concepts and mathematics closer to the reality that the student lives today. Thus, the present work, which, after presenting a mapping of PROFMAT's dissertations on this theme, seeks a different resolution for some Olympic Mathematical Problems (OBMEP, IMO), aiming at reaching a greater pedagogical potential with the same problem. Then, we go through the pedagogical possibilities that we can explore using some Memes and GIFs in classes and, we end with the proposal of some activities, aiming to concatenate Problem Solving, Memes and GIFs in classes. The Figures presented in this work (images, Memes and GIFs) are organized in numerical order and available for viewing/downloading at the following link: **<https://drive.google.com/backup-figuras-dissertacao-profmat2020>**.

Keywords: Problem solving; Mathematics Olympiad; IMO, OBMEP; Meme; GIF; Didactic Resource.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

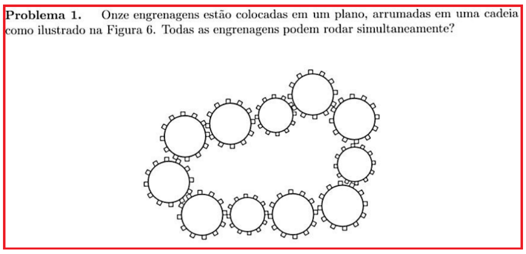
1 INTRODUÇÃO

A gênese deste trabalho ocorreu no bairro de Bangu (Rio de Janeiro), na Escola Municipal Leônidas Sobriño Pôrto e possui uma data, um registro por foto e uma questão motivadora, conforme se ilustra na Figura 1:

Figura 1 – Projeto Turma Preparatória OBMEP

(a) 1ª aula turma OBMEP, 2019

(b) 1º Problema apresentado

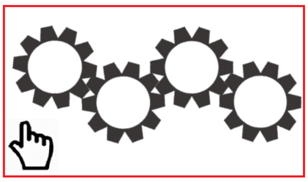


Problema 1. Onze engrenagens estão colocadas em um plano, arrumadas em uma cadeia como ilustrado na Figura 6. Todas as engrenagens podem rodar simultaneamente?

Fonte: (a) O autor, 2019 ; (b) Fomin, Genkin e Itenberg (2017, p. 5)

Na primeira aula preparatória para a OBMEP, em 16 mar. 2019 (Figura 1a), propus aos alunos o problema presente na Figura1b, que versa sobre o funcionamento efetivo de um sistema de 11 engrenagens girando em conjunto. Trata-se de um problema típico de paridade que foi apresentado aos alunos e os mesmos tiveram grande dificuldade em visualizar todo o sistema de engrenagens em funcionamento. Na ocasião, fui ao quadro tentar desenhar o sistema de engrenagens para sanar a dúvida dos alunos, mas não obtive êxito e a dúvida permanecia ainda com os jovens. Num dado momento da aula, tive a ideia de pesquisar no celular algo que expusesse o funcionamento de algum sistema de engrenagens, pois acreditava que a visualização de um sistema desse tipo iria sanar as dúvidas e que conduziria ao entendimento sobre o conceito de paridade que está por trás do problema. No retorno dessa pesquisa, surgiu o GIF[1] (Graphics Interchange Format ou Formato de Intercâmbio de Gráficos) da Figura 2.

Figura 2 – GIF animado sobre engrenagens



Fonte: Disponível em: <https://gifimage.net/engrenagens-gif/>. Acesso em: jan. 2020

[1] Para ser direcionado aos GIFs animados deste trabalho, basta clicar na legenda da Figura correspondente.

Os alunos após visualizarem o GIF das engrenagens em funcionamento, conseguiram associar que o sistema fechado travaria se houver um número ímpar de engrenagens, e como 11 é ímpar, o sistema não funciona. Nesse momento, percebi que seria possível utilizar alguns recursos tais como GIFs e Memes para elucidar alguma dúvida ou até mesmo utilizá-lo como ponto de partida para solucionar problemas de matemática ou mesmo ensinar a parte teórica, já que esses instrumentos fazem parte do dia-a-dia das pessoas que possuem algum acesso à internet.

Dessa possibilidade, surgiu a razão para elaborar este trabalho, no qual propomos resoluções de Problemas de Matemática (de Olimpíadas) e utilizaremos, sempre que for possível, Memes e GIFs como meio auxiliar de ensino, vinculados às habilidades e competências previstas na Base Curricular Nacional Comum (BNCC). O presente trabalho, além da Introdução, está estruturado em mais 4 (quatro) Capítulos e a Conclusão, e 1 (um) Apêndice.

No segundo Capítulo, procederemos ao mapeamento dos trabalhos de conclusão de curso do Mestrado PROFMAT relativamente aos assuntos OBMEP, Olimpíadas de Matemática, Memes e GIFs, visando com isso não só conhecer o estado da arte, mas também evitar a sobreposição de assuntos e abordagens; será discorrido também sobre a metodologia de pesquisa e, de uma forma geral, sobre a bibliografia utilizada.

No terceiro Capítulo, serão abordados alguns aspectos sobre o histórico da BNCC (BRASIL, 2018) e a sua importância no que diz respeito a orientar o Ensino de Matemática; abordaremos a relevância do ensino de matemática sob a ótica da resolução de problemas, aonde solucionaremos 12 problemas oriundos de Olimpíadas de Matemática (OBMEP, IMO, etc) por métodos diversificados buscando uma maior riqueza e potencial pedagógico do problema, tecendo comentários sobre os métodos e enquadrando os conceitos utilizados nas resoluções sob à luz da BNCC (BRASIL, 2018).

No quarto Capítulo, comentaremos inicialmente sobre as Teorias das Representações de Duval, com foco na conversão de representações semióticas, passando pela identificação do perfil do jovem aluno que integra os bancos escolares (Geração Z) e culminando com algumas catalogações por assunto sobre as potencialidades pedagógicas de Memes e GIFs para o Ensino de Matemática, tendo sempre que possível um equadramento desses potenciais pedagógicos sob a égide da BNCC (BRASIL, 2018).

No quinto Capítulo serão apresentadas 5 propostas para Atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, planejadas com foco em alunos a partir do 8º ano do Ensino Fundamental (preferencialmente em Turmas de Olimpíadas de Matemática), e fazendo uma culminância entre as exposições dos capítulos anteriores (Teoria das Representações de Duval + Utilização de Memes e GIFS + Resoluções de Problemas Olímpicos de Matemática).

Na Conclusão serão expostas as considerações finais acerca da reflexão, impressão e objetivos deste trabalho, sob a ótica deste autor.

Há, ainda, um Apêndice. Ele será reservado para soluções do que foi proposto a título de desafios e atividades no decorrer do trabalho. A cada um dos Memes-desafios que foram propostos no terceiro Capítulo e a cada uma das 5 atividades propostas no quinto Capítulo serão apresentadas as respectivas soluções no Apêndice.

As Figuras apresentadas neste trabalho (imagens, Memes e GIFs) encontram-se organizadas por ordem numérica e disponíveis para visualização/download no seguinte link: **<https://drive.google.com/backup-figuras-dissertacao-profmat2020>**.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA E O MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES PROFMAT SOBRE OLIMPÍADAS

Neste capítulo começaremos por apresentar algumas considerações acerca da Metodologia de Pesquisa utilizada, tendo por ponto de partida um levantamento efetuado por intermédio do banco de dados do site do PROFMAT utilizando a ferramenta de busca das Dissertações referentes às Olimpíadas de Matemática.

2.1 Classificação Metodológica deste Trabalho

2.1.1 Finalidade e Objetivos

Este trabalho tem por finalidade aprofundar o conhecimento sobre o tema Ensino por Resolução de Problemas e utilização de Memes e GIFs como meio de apoio ao Ensino de Matemática, enquadrando ambos à luz da BNCC, visando motivar e facilitar a compreensão pelos discentes da relação entre os objetos matemáticos e seu real significado.

Trata-se de uma pesquisa descritiva, voltada para a apresentação de aspectos teóricos, como a Resolução de Problemas Olímpicos feita de formas diferentes ou também a interpretação do conteúdo matemático presentes em GIFs. Sobre as fontes utilizadas, nos baseamos, a título de revisão bibliográfica, em livros nacionais e estrangeiros, em artigos publicados em revistas científicas, em dissertações de mestrado, em sites confiáveis da internet e em canais de mídias sociais do Instagram e do Telegram.

2.1.2 Abordagem

Esta pesquisa possui uma abordagem do tipo qualitativa, onde iremos analisar criticamente os dados coletados, de maneira valorativa, os quais serão lidos, interpretados e analisados para, após isso, podermos chegar a conclusões e enquadramentos; por exemplo quando separamos algum Meme, o apresentamos, o interpretamos e concluímos sobre o teor da mensagem a ser repassada pela imagem e enquadramos esse teor em face da BNCC.

2.1.3 Método

No que diz respeito ao método, seguimos o hipotético-dedutivo onde temos basicamente um problema, que consiste na dificuldade que os alunos revelam em compreender alguns conteúdos matemáticos. É nossa convicção que uma das oportunidades apresentadas para resolvê-lo, passa pela resolução de problemas, e pela utilização de recursos do cotidiano dos estudantes, como os Memes e GIFs e, quando possível, todos combinados.

2.1.4 Procedimentos

Quanto aos procedimentos, foi utilizado o bibliográfico, tendo sido lidos os materiais constantes na Referência deste trabalho, a partir dos quais foi estabelecido o referencial teórico do mesmo.

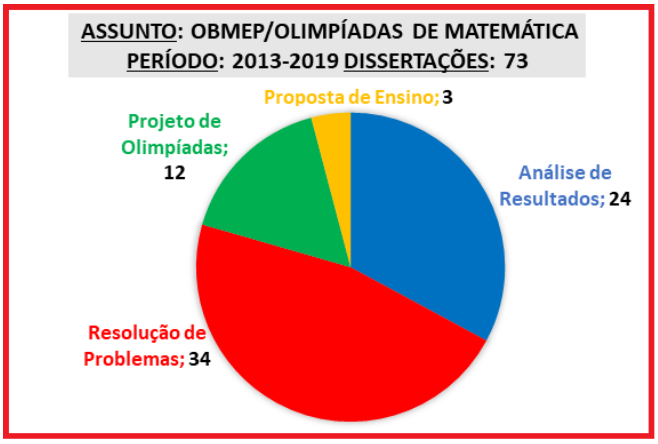
2.2 Mapeamento das Dissertações do PROFMAT e desenvolvimento da Pesquisa

Nesta seção, será apresentado um mapeamento das Dissertações do PROFMAT que versam sobre OBMEP e Olimpíadas de Matemática, motivação inicial deste Trabalho, com o objetivo de as agrupar segundo *Análise de Resultados*, *Projeto de Olimpíadas*, *Proposta de Ensino* e *Resolução de Problemas por Tema/Nível.*

Nesse sentido, foram pesquisadas as Dissertações disponibilizadas no site Banco de Dissertações do PROFMAT[1], através da ferramenta de pesquisa utilizando a palavra-chave **obmep**, resultando em 47 registros; ao utilizarmos a palavra-chave **olimpíada** através da ferramenta de pesquisa no referido site, o resultado foi de 30 registros e, ao utilizarmos o filtro de palavras-chave com **Meme** ou com **GIF**, o resultado foi de nenhum registro.

Após analisar cada um dos trabalhos, elaboramos uma planilha os catalogando por nome, autor, data de defesa, tema e um hiperlink que reporta diretamente ao site do PROFMAT para que a dissertação nos seja disponibilizada on line. Pudemos perceber que 4 Dissertações se repetiram no resultado das duas buscas feitas, reduzindo o universo de 77 (setenta e sete) para 73 (setenta e três) Dissertações tabuladas. Pode-se verificar, por intermédio do gráfico da Figura 3, o panorama de Trabalhos disponibilizados na plataforma do PROFMAT acerca dos temas que versam sobre OBMEP e Olimpíadas (data da pesquisa: 15 set. 2019):

Figura 3 – Gráfico Análise das Dissertações do PROFMAT



Fonte: O autor, 2019

[1] Pesquisa realizada no site de busca de dissertações PROFMAT (2019).

Nesse levantamento, não foi encontrada alguma Dissertação versando sobre potencialidades pedagógicas de problemas olímpicos, conectando suas resoluções com habilidades e competências delineadas pela BNCC, tão pouco trabalhos que utilizassem Memes ou GIFs. Acerca da proposta de ensino por Resolução de Problemas, foram encontrados 34 resultados com possibilidade de serem referenciáveis.

Após o mapeamento das Dissertações PROFMAT, foi revisada a bibliografia necessária para a consecução do terceiro Capítulo, que propõe a Resolução de Problemas Olímpicos sob diferentes óticas, objetivando maximizar o potencial pedagógico do problema. Em termos de revisão bibliográfica, os aspectos teóricos sobre o ensino por resolução de problemas e o que foi desenvolvido sobre a BNCC, apresentados no início do Capítulo, foram obtidos principalmente a partir das leituras da BNCC (BRASIL, 2018), Polya (1995), Posamentier (1996) e Onuchic (1999). Após essa fundamentação foram selecionados, resolvidos e comentados dentro do que delineia a BNCC, 12 problemas olímpicos de matemática nacionais e internacionais, obtidos a partir de leitura das obras do romeno Titu Andreescu, do norte-americano Samuel Greitzer e dos Bancos de Questões da OBMEP e das provas de 1ª fase da OBMEP, ocorridos nos anos de 2013 a 2019. Para apoiar as resoluções dos problemas olímpicos e/ou aprofundar conhecimentos, serão disponibilizadas citações e notas de rodapé, referenciando livros, artigos, revistas e teses de mestrado.

No que tange ao quarto Capítulo, que trata da potencialidade pedagógica de Memes e GIFs, para introduzir o assunto, foi necessário buscar literatura externa ao PROFMAT sobre Memes e GIFs, dentre as quais destacamos as obras de Kellner (2001) e de Flusser (2010) e a tese de Nadal (2014). Fez parte também dentro do escopo deste capítulo, uma introdução sobre a Teoria das Representações, onde nos baseamos em Duval (1993). Com relação aos Memes e GIFs apresentados, foram selecionados a partir de uma pesquisa iniciada em jul. 2019 e concluída em jan. 2020, tendo como meio de busca os mais diversos canais das mídias sociais, Telegram e Instagram. Após a seleção dos Memes e GIFs, os mesmos foram catalogados por assunto, tiveram suas fontes referenciadas, foram explicados pelo teor de suas mensagens e, sempre que foi possível, comentados sob a perspectiva da BNCC.

Com relação ao quinto Capítulo, a construção das várias Atividades propostas para sala de aula foi pensada de modo a obedecer a um padrão que concatenasse os dois capítulos principais desta dissertação. Foi elaborado um roteiro padrão de aula e as diferenças consistem nas atividades propriamente ditas, as quais envolvem Memes, GIFs e problemas olímpicos, tendo o principal objetivo de conectar a Teoria das Representações de Duval, o Ensino por Resolução de Problemas e os aspectos tecnológicos dos Memes e GIFs. Em apêndice apresentam-se as resoluções passo-a-passo, de todos os 6 Memes-desafios que propusemos no quarto Capítulo e também das 5 atividades propostas para serem aplicadas em sala de aula, que foram apresentadas no quinto Capítulo.

3 EXPLORANDO O POTENCIAL PEDAGÓGICO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS

3.1 Introdução

Desde a apresentação das quatro etapas para se chegar à solução de um problema descritas por Polya, em seu livro intitulado *How to Solve It*, cuja primeira edição data de 1945, muito já se pesquisou. A tendência da Educação Matemática por "resolução de problemas" avança hoje para além das fronteiras de um método de resolução e passa a ser desenvolvida como uma perspectiva metodológica para o ensino da Matemática.

Onuchic (1999) faz uma retrospectiva do desenvolvimento dessa tendência, evidenciando o trabalho realizado por Schroeder e Lester (1989) que aponta para diferentes modos de abordá-la. Pode-se adotar uma atitude educativa que corresponda a ensinar resolução de problemas. Nessa abordagem, os modelos de resolução constituem o foco da atividade. Pode-se, por outro lado, ensinar a resolver problemas, o foco nesse caso é concentrar-se no ensino de matemática e no que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros ou não; e, por último, pode-se assumir uma conduta de ensinar a matemática por meio da resolução de problemas, na qual

> (...) os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas também, como um primeiro passo para se fazer. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis (...), deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar símbolos). (ONUCHIC, 1999, p. 207)

Para Onuchic, essa abordagem é a mais coerente com as indicações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e estendemos aqui essa coerência à BNCC, pela qual se espera que os alunos "desenvolvam a capacidade de indentificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações" BNCC (BRASIL, 2018, p. 265). Onuchic afirma ainda que nessa abordagem "o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas com aprende matemática para resolver problemas" (p. 211). Antes de prosseguirmos sobre o Ensino de Matemática por Resolução de Problemas e relacionarmos esses problemas às competências elencadas na BNCC, iremos comentar, inicialmente, aspectos sobre a Base Nacional Curricular Comum e o Ensino de Matemática.

3.2 A BNCC e o Ensino de Matemática

Para que possamos iniciar nossas abordagens e reflexões acerca da Base Nacional Curricular (BNCC) e suas indicações, principalmente na área da Matemática, julgamos interessante realizar uma breve apresentação dos movimentos que precederam à sua homologação.

Não podemos desprezar a dimensão do nosso país, seja em territorialidade ou em diversidade, nem ignorar a desigualdade social ainda presente em todo território e evidente em inúmeras pesquisas e dados estatísticos. Um de nossos desafios, na área da educação, é propiciar oportunidades iguais para todos os nossos estudantes sem perder a particularidade e singularidade de cada região ou grupo.

Desde 1988, a Constituição Federal determina o direito à educação e apresenta os conteúdos mínimos a serem a serem desenvolvidos em todo o território nacional. Nesse mesmo documento, podemos encontrar indicações da necessidade de resguardar os valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.

Quase dez anos depois, no ano de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) estabelece as competências e diretrizes para a Eduação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que deveriam nortear os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum salientando que os conteúdos deveriam ser complementados com a parte diversificada que garantiria as características locais e regionais.

No Plano Nacional de Educação (PNE), de 2014, essa necessidade é reafirmada, ou seja, em parceria, a União, os estados, o Distrito Federal e os municípios deveriam criar uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que garantisse a todos os alunos do território nacional as aprendizagens essenciais preservando-se as identidades étnicas, culturais e linguísticas. Para isso, cada Secretaria de Educação teria autonomia para pensar e planejar as ações de suas unidades escolares a partir das necessidades locais.

Desta forma, a BNCC, homologada em dezembro de 2017, é um documento que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica, independentemente da região onde moram. O principal objetivo é garantir que todos os alunos brasileiros tenham a mesma oportunidade de aprender o que é considerado essencial. O documento é exclusivo à educação escolar e está orientado por princípios que visam uma formação humana integral e uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

Além da equiparação das oportunidades de aprendizagens, buscando reduzir as desigualdades históricas estabelecidas, o desenvolvimento de uma base comum curricular visa outros fatores, como assegurar aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, orientar a elaboração de um currículo específico de cada escola ou rede escolar, pública ou privada, e instruir as matrizes de referência das avaliações e dos exames externos.

Com foco no desenvolvimento de competências e no compromisso com a educação integral, o documento apresenta uma abordagem bastante clara no que diz respeito ao desenvolvimento integral dos estudantes (cognitivo e emocional) e a importância da experimentação, articulação e aplicabilidade dos conhecimentos e ao acesso e utilização da informação e da tecnologia. Uma das características desse documento é que ele não define o modo como ensinar nem impede que sejam contempladas no dia a dia escolar as especificidades regionais. Assim, a BNCC (BRASIL, 2018) estabelece um conjunto de conhecimentos básicos que devem ser assegurados, sem interfirir na diversidade cultural e regional e na autonomia dos educadores. Essas aprendizagens essenciais devem coexistir para assegurar aos alunos o desenvolvimento de dez competências gerais tendo em consideração que, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 8):

> (...) competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A seguir, estão listadas as dez competências gerais da Educação Básica definidas pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 9-10):

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
>
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
>
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
>
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
>
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Na BNCC, a matemática é destacada como uma área do conhecimento essencial para os alunos da Educação Básica tanto por suas aplicações como também por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e engajados. Nesse sentido, o documento explicita que a Matemática não se restringe à qualificação de fenômenos determinísticos e a técnicas de cálculo, mas envolve, ainda, o estudo de fenômenos de caráter aleatório.

Outro aspecto da BNCC em relação à Matemática consiste em estender a ideia dessa área como uma ciência hipotético-dedutiva. Na Educação Básica, é importante considerar o papel heurístico dessa área, pois são fundamentais as experimentações matemáticas feitas pelos alunos.

O documento também apresenta o compromisso que se deve ter no Ensino Fundamental com o letramento matemático, definido como:

> (...) as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p. 266)

Nesse compromisso, fica evidente a preocupação em utilizar os conhecimentos matemáticos para compreender o mundo e nele atuar. Para o desenvolvimento desse letramento e do pensamento computacional, a BNCC cita os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem. Esses processos podem ser tomados como formas de organização da aprendizagem matemática e levam em consideração a análise de situações do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática.

Com base no que foi exposto anteriormente, a BNCC (BRASIL, 2018, p.267) delimita as seguintes competências específicas para a área de Matemática para o Ensino Fundamental:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
>
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
>
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
>
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
>
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

No que tange ao Ensino Médio, a BNCC preconiza que a área de Matemática e suas Tecnologias objetive consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens trabalhadas no Ensino Fundamental, dando ênfase a uma constituição de uma visão mais integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos, tendo como aspecto relevante o cotidiano vivido pelo aluno. Há o foco em aperfeiçoar o letramento matemático obtido no Ensino Fundamental visando uma maior abstração e reflexão.

Para que esses objetivos sejam alcançados, é imperativo que o estudante desenvolva habilidades relativas a processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Com isso, nesta etapa serão desenvolvidas e aperfeiçoadas competências que abranjam raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Temos então, conforme delimita a BNCC (BRASIL, 2018, p. 531), as seguintes competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.3 Importância do Ensino por Resolução de Problemas

Um dos pioneiros em pesquisa sobre resolução de problemas foi George Polya[1]. Em sua publicação *A arte de resolver problemas*, ele apresenta um modelo teórico em que classifica as etapas que ocorrem na resolução de um problema: *compreensão do problema, elaboração de um plano e retospecto ou exame da solução produzida*. O autor também identifica tipologias de procedimentos (analogia, observação, experimentação e indução) e de problemas (de determinação e de demonstração).

Ao abordar a noção de problema em seus estudos, Polya (1995) afirmou que só existe um problema quando há uma dificuldade que se deseja vencer. Com essa mesma abordagem, Saviani (1999) trata problema como uma questão cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer.

A palavra problema é formada pelo prefixo *pró*, que significa “diante, à frente”, e o complemento *bállein*, que significa “colocar, lançar”. Assim, o sentido etimológico do termo problema pode ser interpretado como “lançar-se à frente”. No contexto do ensino

[1] George Polya (1887-1985), matemático húngaro.

de Matemática, Onuchic e Allevato (2004, p.221) consideram que problema consiste em "tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer".

Lange (2003) ressalta ser essencial que o professor propicie aos alunos situações dos contextos sociocultural, escolar, familiar, pessoal, entre outros, de tal maneira que a Matemática seja vista como um conhecimento que nos ajuda a resolver problemas. Nesse sentido, Sadovsky corrobora essa afirmação quando ressalta a essência da prática docente:

> Destacamos o papel do docente numa função essencial: a de formular problemas que emergem da produção específica da classe, mas que levanta tendo como referência a atividade matemática. Exigir mais precisão nas formulações dos alunos, reperguntar, discutir e interpelar são questões que fazem parte dos intercâmbios com os alunos. (SADOVSKY, 2007, p. 55)

Ainda sobre a importência que o professor tem, acerca da sistemática por resolução de problemas, segundo Polya têm-se que:

> Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (POLYA, 1995, p. 5)

O professor que utiliza a resolução de problemas em suas aulas como veículo de ensino, oportuniza a aprendizagem aos seus alunos. Sadovsky esclarece que:

> Para aprender, os estudantes, por sua vez, precisam assumir a tarefa de reconstrução matemática como um projeto pessoal. Isso implica que considerem suas resoluções como objeto de reflexão e que possam produzir teoria com base nelas (por exemplo, que estejam em condições de sintetizar o que sabem até um certo momento, com relação a um determinado tema); que possam voltar atrás, e revisar e modificar ideias já elaboradas; que admitam a possibilidade de deixar pendentes, em dado momento, questões ainda não compreendidas por inteiro, mas que possam ser recuperadas depois; que tomem consciência de seus aprendizados e reconheçam, no presente, sua capacidade de resolver algo que antes não sabiam; e que enfoquem a resolução de um problema com ideias que contribuam para sua abordagem. (SADOVSKY, 2007, p. 55)

Na perspectiva da resolução de problemas, o aluno deixa de apresentar um desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutivo de habilidades para se tornar alguém que utiliza a matemática em um movimento que possibilite análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias. Com esse movimento, o aluno é capaz de compreender o papel da matemática na sociedade.

Acreditamos que a prática de resolução de problemas oferece aos alunos a oportunidade de "fazer matemática", ou seja, desenvolver habilidades de construção e reconstrução de propriedades matemáticas, bem como comunicar ideias, resultados e experiências. A respeito de resolução de problemas, o tamanho do desafio depende da pessoa que o está resolvendo, pois o que pode ser um problema para uma pessoa, para outra pode não ser. Uma condição determinante é que o aluno sinta vontade de encontrar uma solução para o problema, e não tenha, de imediato, caminhos óbvios a seguir, sendo importante que ele pare para pensar e buscar ideias, pois se solucionar o desafio com rapidez e precisão, o problema não deveria ter sido tão desafiador.

A partir da próxima secção, tendo em vista a importância acerca de ensinar por intermédio de resolução de problemas, pretende-se abordar alguns problemas de forma a extrair o máximo de seu potencial pedagógico aliado à sua catalogação enquadrada nas habilidades norteadas na BNCC. A título de uma simples exemplificação, ao nos depararmos com um problema tipicamente classificado como de álgebra, será que não podemos resolvê-lo utilizando outros tópicos da própria álgebra, ou as ferramentas da geometria, ou de trigonometria, atingindo, assim, mais habilidades tabeladas na BNCC, conseguindo, deste modo, a maximização pedagógica do mesmo problema.

Os problemas selecionados a seguir, foram retirados de diversas fontes, com foco principal naqueles já ocorridos em provas de Olimpíadas de Matemática e no Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (BANCO OBMEP), todos classificados como problemas a nível da Escola Básica, fundamental e média.

3.4 Problema 1: Triângulo da Olimpíada de Matemática de Moscou (1952)

Apresentaremos, em primeiro lugar, um problema quase sempre presente em listas de exercícios preparatórios para Olimpíadas de Matemática, o Problema do Triângulo Russo, conhecido como *the hardest easy geometry problem of the world*, ou *o problema mais difícil de geometria fácil do mundo*.

3.4.1 Um Problema bem antigo... um pouco de história

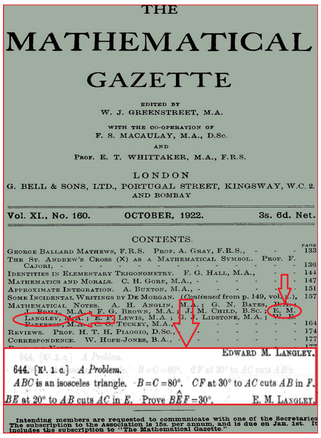
Popularmente conhecido no Brasil como problema do "Triângulo Russo", fez parte da Olimpíada de Matemática da Cidade de Moscou - URSS, de 1952, (Figura 5). Este famoso problema de geometria plana, ainda hoje, intriga a quem investe preciosos minutos – ou talvez até horas, dias – para tentar solucioná-lo devido à sua aparente facilidade. Podemos verificar seu enunciado em Jiagu (2010, p. 58)

Em outubro de 1922, E. Langley[2] publica na página 173 do Volume 11 da Revista Gazeta Matemática, o problema n° 644, de geometria (Figura 4), que mais tarde ficaria

[2] Eduard Mann Langley (1851 - 1933), matemático britânico e fundador da Revista Mathematical Gazette.

conhecido como o “Problema de Langley” ou também “Ângulos Adventícios de Langley” mas no Brasil, seria o popular “Triângulo Russo”.

Figura 4 – Revista Mathematical Gazette, out. 1922



THE

MATHEMATICAL

GAZETTE

EDITED BY
W. J. GREENSTREET, M.A.

WITH THE CO-OPERATION OF
F. S. MACAULAY, M.A., D.Sc.
AND
PROF. E. T. WHITTAKER, M.A., F.R.S.

LONDON
G. BELL & SONS, LTD., PORTUGAL STREET, KINGSWAY, W.C. 2.
AND BOMBAY

Vol. XI., No. 160. OCTOBER, 1922. 3s. 6d. Net.

CONTENTS.

	PAGE
George Ballard Mathews, F.R.S. Prof. A. Gray, F.R.S.,	133
The St. Andrew's Cross (X) as a Mathematical Symbol. Prof. F. Cajori,	136
Identities in Elementary Trigonometry. F. G. Hall, M.A.,	144
Mathematics and Morals. C. H. Gore, M.A.,	147
Approximate Integration. A. Buxton, M.A.,	151
Some Incidental Writings by De Morgan. (Continued from p. 149, vol. x.),	157
Mathematical Notes. A. H. Anglin, M.A.; G. N. Bates, B.A.; J. Brill, M.A.; F. G. Brown, M.A.; J. M. Child, B.Sc.; E. M. Langley, M.A.; E. P. Lewis, M.A.; G. J. Lidstone, M.A.; W. E. Paterson, M.A.; C. O. Tuckey, M.A.,	164
Reviews. Prof. H. T. H. Piaggio, D.Sc.,	174
Correspondence. W. Hope-Jones, B.A.,	177

EDWARD M. LANGLEY.

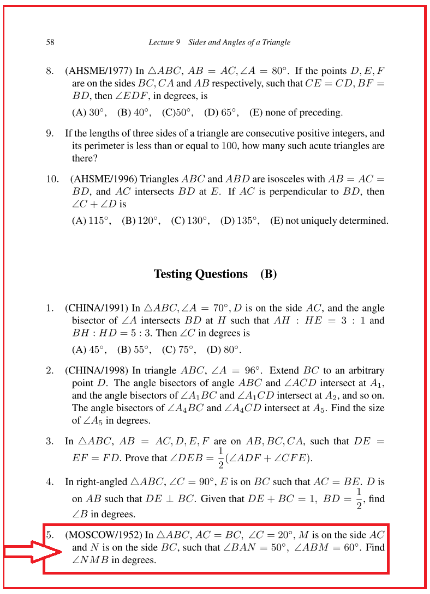
644. [K¹. 1. c.] *A Problem.*

ABC is an isosceles triangle. $B=C=80°$. CF at 30° to AC cuts AB in F. BE at 20° to AB cuts AC in E. Prove $B\hat{E}F=30°$. E. M. LANGLEY.

Intending members are requested to communicate with one of the Secretaries. The subscription to the Association is 15s. per annum, and is due on Jan. 1st. It includes the subscription to "The Mathematical Gazette."

Fonte: Disponível em: <https://www.cambridge.org/>. Acesso em: 15 ago. 2019.

Figura 5 – Olimpíada de Moscou (URSS) - 1952



58 *Lecture 9 Sides and Angles of a Triangle*

8. (AHSME/1977) In $\triangle ABC$, $AB = AC, \angle A = 80°$. If the points D, E, F are on the sides BC, CA and AB respectively, such that $CE = CD, BF = BD$, then $\angle EDF$, in degrees, is

   (A) 30°, (B) 40°, (C)50°, (D) 65°, (E) none of preceding.

9. If the lengths of three sides of a triangle are consecutive positive integers, and its perimeter is less than or equal to 100, how many such acute triangles are there?

10. (AHSME/1996) Triangles ABC and ABD are isosceles with $AB = AC = BD$, and AC intersects BD at E. If AC is perpendicular to BD, then $\angle C + \angle D$ is

    (A) 115°, (B) 120°, (C) 130°, (D) 135°, (E) not uniquely determined.

Testing Questions (B)

1. (CHINA/1991) In $\triangle ABC, \angle A = 70°, D$ is on the side AC, and the angle bisector of $\angle A$ intersects BD at H such that $AH : HE = 3 : 1$ and $BH : HD = 5 : 3$. Then $\angle C$ in degrees is

   (A) 45°, (B) 55°, (C) 75°, (D) 80°.

2. (CHINA/1998) In triangle ABC, $\angle A = 96°$. Extend BC to an arbitrary point D. The angle bisectors of angle ABC and $\angle ACD$ intersect at A_1, and the angle bisectors of $\angle A_1BC$ and $\angle A_1CD$ intersect at A_2, and so on. The angle bisectors of $\angle A_4BC$ and $\angle A_4CD$ intersect at A_5. Find the size of $\angle A_5$ in degrees.

3. In $\triangle ABC$, $AB = AC, D, E, F$ are on AB, BC, CA, such that $DE = EF = FD$. Prove that $\angle DEB = \frac{1}{2}(\angle ADF + \angle CFE)$.

4. In right-angled $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, E is on BC such that $AC = BE$. D is on AB such that $DE \perp BC$. Given that $DE + BC = 1,\ BD = \frac{1}{2}$, find $\angle B$ in degrees.

5. (MOSCOW/1952) In $\triangle ABC$, $AC = BC$, $\angle C = 20°$, M is on the side AC and N is on the side BC, such that $\angle BAN = 50°$, $\angle ABM = 60°$. Find $\angle NMB$ in degrees.

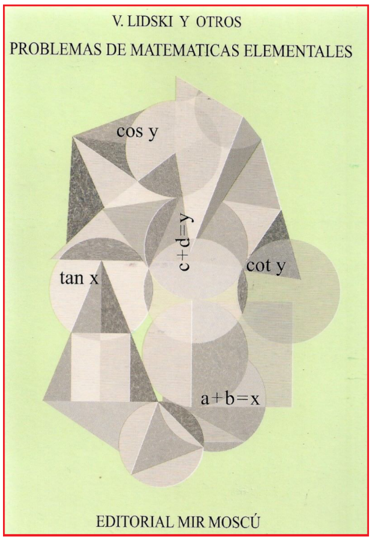
Fonte: (JIAGU, 2010, p. 58)

Ao longo da história, provavelmente o nome “Triângulo Russo” tenha surgido através do problema 348 presente em Lidski et al. (1972), (Figura 6a), que é a versão em espanhol do livro russo que é conhecido no Brasil por LIDSKI – talvez seja pelo fato de um dos seus autores, o mais famoso, ser o matemático Viktor Borissovich Lidski, a quem se deve o Teorema de Lidski[3]. Cabe ressaltar que este livro ganhou versão traduzida para o português através da editora Vestseller, em 2014 (Figura 6b):

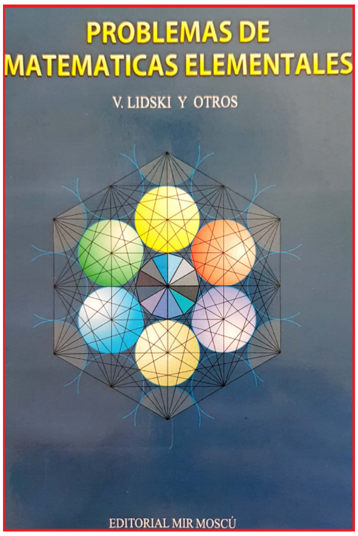
[3] Para saber sobre o Teorema de Lidski, descoberto por Viktor Borissovich Lidski (1924 - 2008) matemático soviético/ucraniano, consultar Parado (1986).

Figura 6 – Edições do livro Problemas de Matemática Elementar, MIR

(a) Em espanhol (1972)



(b) Em português (2014)



Fonte: Disponível em: <https://www.vestseller.com.br/problemas-de-matematica-elementar-lidski>. Acesso em: 15 ago. 2019.

3.4.2 Diversas aparições ao longo do tempo

Há diversas citações e soluções deste problema em diversos artigos, livros e provas espalhados pelo mundo. Não queremos – e nem podemos – esgotar todas as ocorrências ao longo do tempo, mas citaremos algumas, presentes em obras conhecidas:

1. Em Coxeter e Greitzer (1975, cap.1, p. 26) é apresentado o problema, seguido da solução em Coxeter e Greitzer (1975, p. 159);

2. Em Honsberger (1976, cap. 2, p. 16-18), há uma variação do problema original, com o autor referindo-se ao mesmo como sendo "uma das quatro pequenas gemas da geometria", acompanhada de solução;

3. Em Morgado e Wagner (1990, p. 66), o problema de nº 63 é o "Triângulo Russo";

4. Em Honsberger (2001, cap.2, p. 9-13), são apresentadas três variações para o problema, com as respectivas soluções. O autor refere-se ao problema original como sendo "uma antiga castanha";

5. Em Rufino e Pinheiro (2016, p. 53, p. 217, p. 414 e p. 521), são apresentadas 4 resoluções distintas para o problema.

6. Em Knop (1994, p. 46-49), uma versão americana da a revista russa *Kvant*, são apresentadas nove soluções para o problema do triângulo russo (Figura 7).

Figura 7 – Revista Quantum Magazine, Jun/Jul 1994

QUANTUM

MAY/JUNE 1994 VOLUME 4, NUMBER 5

Cover art by Leonid Tishkov

Some of us can recall, with a twinge of shame, a time when it was oh-so-easy to make a bit of money. All you had to do was strike a little deal with a younger kid: "Here, I'll trade you this nice, big nickel for that little dime of yours." It was a nice scam—for a while, at least. Either the kid got wise, or someone older intervened—with dire consequences for the clever currency trader.

Who can blame the four-year-old for thinking a nickel is worth more than a dime? Only an adult would think of making a bigger coin less valuable than a smaller one. It all but invites fraud in the seven-year-old mind. Of course, grown-ups aren't immune to psychological mishaps when it comes to money. In fact, the noble Roman on our cover has fallen prey to a cunning emperor. Just how cunning? You be the judge. The story begins on page 16.

FEATURES

DEPARTMENTS

QUANTUM/CONTENTS 1

Fonte: Knop (1994)

As Figuras 8 até 14 ilustram algumas das possíveis soluções para o problema do triângulo russo, utilizando ferramentas básicas da geometria plana. A resolução utiliza a técnica de traçar segmentos auxiliares.[4]

PROBLEMA 1

(The Mathematical Gazette Vol.11 – E. M. Langley – Out/1922)

ABC é um triângulo isósceles. $B = C = 80°$. $\overline{CF}$ a $30°$ de $\overline{AC}$ corta $\overline{AB}$ em F. $\overline{BE}$ a $20°$ de $\overline{AB}$ corta $\overline{AC}$ em E. Prove que $\widehat{BEF} = 30°$.

3.4.3 Resoluções para o Problema 1

1ª resolução - Geometria Plana

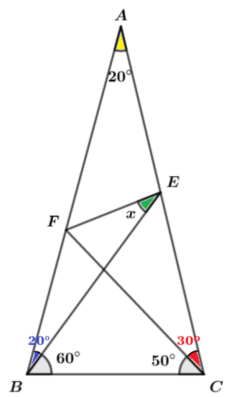
Na Figura 8 temos a interpretação geométrica do enunciado clássico do Triângulo Russo. Note que pelo fato do $\triangle ABC$ ser isósceles de base $\overline{BC}$, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$, e com isso, seus ângulos da base serão $\widehat{B} = \widehat{C} = 80°$ e consequentemente, $\widehat{A} = 20°$.

A demonstração de $\widehat{BEF} = 30°$ é o nosso problema e, a partir de agora, chamaremos $\widehat{BEF} = x$.

Nesta solução, buscaremos encontrar, dentro da figura, triângulos isósceles e equiláteros, para ir identificando ângulos e lados congruentes, conforme forem aparecendo.

Para isso, utilizaremos a técnica de traçar linhas auxiliares.

Figura 8 – Interpretação do problema

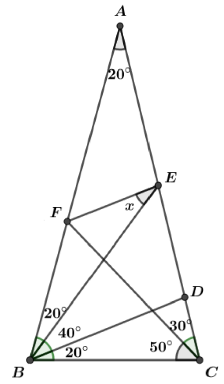


Fonte: O autor, 2019

[4] Recomendamos Orihuela (2007) para aprofundar a técnica de traçar segmentos auxiliares.

Na Figura 9, perceba que $\widehat{FCB}+\widehat{FCA}=\widehat{C}$ e como pelo enunciado, nos foi dado que $\widehat{FCA}=30°$ e que $\widehat{C}=80°$, consequentemente teremos $\widehat{FCB}=50°$.
Agora, iremos traçar o segmento auxiliar $\overline{BD}$ com $D\in\overline{AC}$ de tal forma que $\widehat{CBD}=20°$. Isso fará com que $\widehat{B}=80°$ seja partido nos ângulos $\widehat{CBD}=20°$, $\widehat{DBE}=40°$ e $\widehat{ABE}=20°$ (este pelo enunciado), pois $\widehat{CBD}+\widehat{DBE}+\widehat{ABE}=\widehat{B}$.

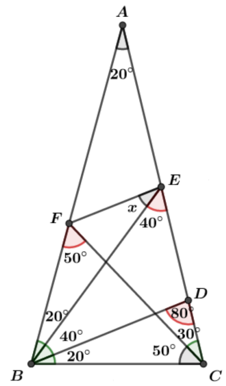
Figura 9 – Traçado de um segmento auxiliar



Fonte: O autor, 2019

Iremos identificar (Figura 10) o máximo de ângulos possível, após usar o fato de que a soma dos ângulos internos em um triângulo qualquer vale 180°.
No $\triangle BCD$, como já temos $\widehat{C}=80°$ e $\widehat{CBD}=20°$, consequentemente teremos $\widehat{BDC}=80°$, pois é sabido que $\widehat{C}+\widehat{CBD}+\widehat{BDC}=180°$.
No $\triangle BCF$, como já temos $\widehat{B}=80°$ e $\widehat{FCB}=50°$, consequentemente teremos $\widehat{BFC}=50°$, pois é sabido que $\widehat{B}+\widehat{FCB}+\widehat{BFC}=180°$.
No $\triangle EBC$, como já temos $\widehat{C}=80°$ e $\widehat{CBE}=60°$, consequentemente teremos $\widehat{BEC}=40°$, pois é sabido que $\widehat{C}+\widehat{CBE}+\widehat{BEC}=180°$.

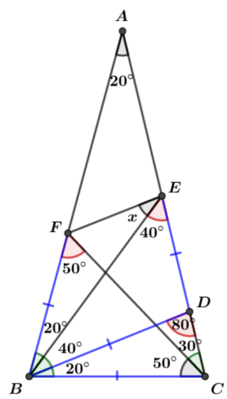
Figura 10 – Identificação de ângulos



Fonte: O autor, 2019

Iremos identificar (Figura 11) alguns segmentos congruentes, após usar o fato de que um triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes e lados opostos a esses ângulos, também congruentes.
O $\triangle BCD$ é isósceles, pois possui $\widehat{C}=\widehat{BDC}=80°$ e, portanto $\overline{BC}=\overline{AD}$.
O $\triangle DBE$ é isósceles, pois possui $\widehat{DBE}=\widehat{BED}=40°$ e, portanto $\overline{BD}=\overline{ED}$.
O $\triangle BCF$ é isósceles, pois possui $\widehat{FCB}=\widehat{BFC}=50°$ e, portanto $\overline{BD}=\overline{BF}$.

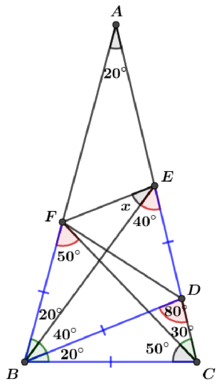
Figura 11 – Segmentos congruentes



Fonte: O autor, 2019

Na Figura 12, podemos observar que, ao traçarmos o segmento auxiliar $\overline{DF}$ estaremos criando um $\triangle BDF$ isósceles de base $\overline{DF}$, pois o mesmo possui $\overline{BD} = \overline{BF}$.
Isso trará algumas implicações como se verá a seguir.

Figura 12 – O segundo segmento auxiliar

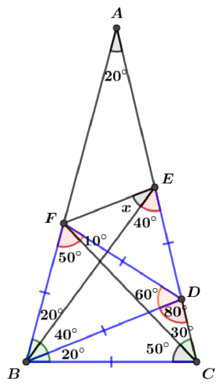


Fonte: O autor, 2019

Após construirmos o $\triangle BDF$ isósceles (Figura 13), poderemos verificar que, pelo fato do $\triangle BDF$ possuir os lados $\overline{BD} = \overline{BF}$ formadores do ângulo $\widehat{DBF} = 60°$, que é o ângulo do vértice B do $\triangle BDF$, o referido triângulo será também equilátero e, com isso, teremos:

- Ângulos $\widehat{BDF} = \widehat{BDF} = \widehat{BFD} = 60°$
- Lados $\overline{BD} = \overline{BF} = \overline{DF}$
- Como $\widehat{BFD} = 60°$ e sabemos que $\widehat{BFC} = 50°$ e também que $\widehat{BFC} + \widehat{CFD} = \widehat{BFD}$, teremos $\widehat{CFD} = 10°$.

Figura 13 – O $\triangle$BDF



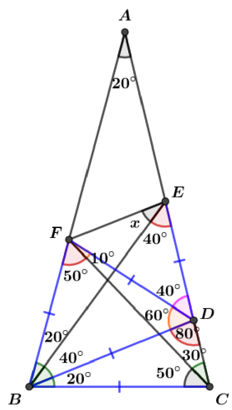
Fonte: O autor, 2019

Observamos (Figura 14) que :

- $\widehat{BDE} = 100°$, pois é ângulo suplementar do $\widehat{BDC} = 80°$ e, por outro lado, como $\widehat{BDF} = 60°$ e $\widehat{BDF} + \widehat{FDE} = \widehat{BDE}$, concluímos que $\widehat{FDE} = 40°$.
- Note que o $\triangle DFE$ é isósceles e como seu vértice $\widehat{FDE} = 40°$, seus ângulos da base $\overline{FE}$ serão $\widehat{DFE} = \widehat{DEF} = 70°$.
- Como $\widehat{BEF} + \widehat{BED} = \widehat{DEF}$, teremos:

$$x + 40° = 70° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \boxed{\widehat{BEF} = 30°} \blacksquare$$

Figura 14 – A Solução



Fonte: O autor, 2019

PROBLEMA 1

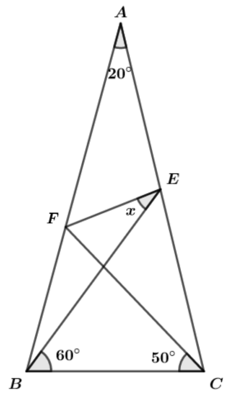
(The Mathematical Gazette Vol.11 – E. M. Langley – Out/1922)

ABC é um triângulo isósceles. $B = C = 80°$. $\overline{CF}$ a $30°$ de $\overline{AC}$ corta $\overline{AB}$ em F. $\overline{BE}$ a $20°$ de $\overline{AB}$ corta $\overline{AC}$ em E. Prove que $\widehat{BEF} = 30°$.

2ª resolução - Trigonometria

Na Figura 15, apresentamos a interpretação clássica do Problema do Triângulo Russo e, antes de tecermos uma abordagem trigonométrica para solucionar o problema, faremos as seguintes observações:

Figura 15 – Interpretação do problema



Fonte: O autor, 2019

- Chamaremos $\widehat{BEF} = x$.
- O $\triangle ABC$ é isósceles, então pelo fato de $\widehat{A} = 20°$, teremos $\widehat{B} = \widehat{C} = 80°$.
- $\widehat{EBF} = 20°$, $\widehat{FCE} = 30°$, $\widehat{BCF} = 50°$, $\widehat{AFC} = 130°$ e $\widehat{EBC} = 60°$.
- Note que $\widehat{BFC} = 50°$, pois $\widehat{B} + \widehat{BCF} + \widehat{BFC} = 180°$ e sabemos que $\widehat{B} = 80°$ e $\widehat{BCF} = 50°$.
- Com isso, o $\triangle BCF$ é isósceles, portanto, $\overline{BF} = \overline{BC}$.

1. Utilizando a Lei dos Senos no $\triangle EAB$, teremos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{sen(\widehat{AFC})}{sen(\widehat{ACF})} = \frac{sen130°}{sen\,30°} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{sen(180° - 50°)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = 2 \cdot sen50° \quad \text{o que equivale dizer que} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = 2 \cdot cos40° \tag{3.1}$$

2. Utilizando a Lei dos Senos no $\triangle EBC$, teremos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{sen(\widehat{C})}{sen(\widehat{BEC})} = \frac{sen80°}{sen40°} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{sen(40° + 40°)}{sen\,40°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot sen\,40° \cdot cos\,40°}{sen\,40°} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot \cancel{sen\,40°} \cdot cos\,40°}{\cancel{sen\,40°}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = 2 \cdot cos40° \tag{3.2}$$

3. Observando que os resultados das equações 3.1 e 3.2 são equivalentes, podemos dizer que:

$$\text{Pela ocorrência de } 2 \cdot sen\ 40^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \text{ e de } \widehat{EBF} = \hat{A} = 20^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Teremos a semelhança: } \triangle EAB \sim \triangle CAF \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{FCA} = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{BEF} = 30^\circ} \quad \blacksquare$$

PROBLEMA 1

(The Mathematical Gazette Vol.11 – E. M. Langley – Out/1922)

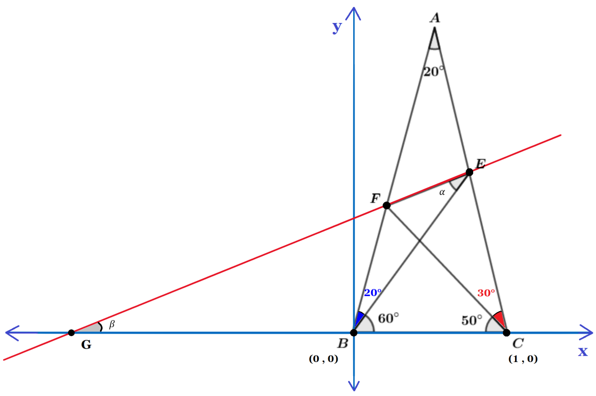
ABC é um triângulo isósceles. $B = C = 80°$. $\overline{CF}$ a 30° de $\overline{AC}$ corta $\overline{AB}$ em F. $\overline{BE}$ a 20° de $\overline{AB}$ corta $\overline{AC}$ em E. Prove que $\widehat{BEF} = 30°$.

3ª resolução - Geometria Analítica

A resolução a seguir, terá uma abordagem baseada em geometria analítica. Mas antes, teceremos algumas considerações:

- A Figura 16 mostra o triângulo conforme interpretação do enunciado enquadrada num sistema de coordenadas cartesianas xOy conveniente, onde o vértice B é a origem do sistema, o ponto $(0,0)$, o segmento $\overline{BC}$ corresponde a 1 unidade padrão de medida e, consequentemente, o ponto C possuirá coordenadas $(1,0)$.
- Prolongamos o segmento $\overline{EF}$ tal que $\overleftrightarrow{EF} \cap eixo\ x = \{G\}$
- Para concluir a demonstração, levaremos em conta que no $\triangle BEG$ temos $\widehat{BEF} + \widehat{EGB} = \widehat{EBC}$, ou seja, queremos encontrar $\widehat{BEF} = \alpha$ na equação $\alpha + \beta = 60°$.

Figura 16 – O triângulo num referencial cartesiano



Fonte: O autor, 2019

Observando o $\triangle BCF$, percebemos que $\widehat{BCF} = \widehat{BFC} = 50^\circ$, portanto, o referido triângulo é isósceles, consequentemente teremos $\overline{BC} = \overline{BF} = 1$.

Pelo fato de passar pela origem do sistema xOy, as retas $\overleftrightarrow{BA}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ terão suas equações, respectivamente, dadas por por $y = x \cdot tg\ 80^\circ$ e $y = x \cdot tg\ 60^\circ$.

Como a reta $\overleftrightarrow{BA}$ passa por F como $\overline{BF} = 1$, o ponto F pertencerá ao círculo trigonométrico, logo tem coordenadas $(cos\ 80^\circ, sen\ 80^\circ)$.

Por outro lado, como a reta $\overleftrightarrow{CA}$ tem como equação $y = tg\ 80^\circ - x \cdot tg\ 80^\circ$ e como $\overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{BE} = \{E\}$, então as coordenadas de E serão $(cos\ 40^\circ, 2 \cdot sen\ 40^\circ)$.

Das equações das retas $\overleftrightarrow{BA}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ resulta que

$$x \cdot tg\ 60^\circ = tg\ 80^\circ - x \cdot tg\ 80^\circ \Rightarrow \quad x = \frac{tg\ 80^\circ}{tg\ 60^\circ + tg\ 80^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{sen\ 80^\circ}{\cancel{cos\ 80^\circ}} \cdot \frac{\cancel{cos\ 80^\circ} \cdot cos\ 60^\circ}{sen\ 140^\circ} \Rightarrow \quad x = \frac{sen\ 40^\circ \cdot cos\ 40^\circ}{2 \cdot sen\ 70^\circ \cdot cos\ 70^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{sen\ 40^\circ \cdot cos\ 40^\circ}{2 \cdot sen\ 20^\circ \cdot cos\ 20^\circ} \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{sen\ 40^\circ} \cdot cos\ 40^\circ}{\cancel{sen\ 40^\circ}} \Rightarrow \quad \boxed{x = cos\ 40^\circ}$$

$$\Rightarrow \text{ Com isso, teremos } \boxed{y = 2 \cdot sen\ 60^\circ \cdot cos\ 40^\circ}$$

Podemos saber agora o valor de β, atendendo a que $tg\beta$ é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BA}$ e que possuímos as coordenadas de F e E:

$$tg\beta = \frac{2 \cdot sen60^\circ \cdot cos40^\circ - sen80^\circ}{cos40^\circ - cos80^\circ} \Rightarrow \quad tg\beta = \frac{2 \cdot sen60^\circ \cdot cos40^\circ - 2 \cdot sen40^\circ \cdot cos40^\circ}{2 \cdot sen60^\circ \cdot sen20^\circ} \Rightarrow$$

$$tg\beta = \frac{2 \cdot sen40^\circ(sen60^\circ - sen40^\circ)}{2 \cdot sen60^\circ \cdot sen20^\circ} \Rightarrow \quad tg\beta = \frac{2 \cdot sen40^\circ(2 \cdot sen10^\circ \cdot cos50^\circ)}{2 \cdot sen60^\circ \cdot sen20^\circ} \Rightarrow$$

$$tg\beta = \frac{2 \cdot sen\ 40^\circ(2 \cdot cos\ 80^\circ \cdot sen\ 40^\circ)}{2 \cdot sen\ 60^\circ \cdot sen\ 20^\circ} \Rightarrow \quad tg\beta = \frac{\cancel{sen\ 160^\circ}}{\sqrt{3} \cdot \cancel{sen\ 20^\circ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \quad tg\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 30^\circ}$$

Observe que no $\triangle BEG$, podemos usar o *teorema do ângulo externo* para descobrir $\widehat{BFC} = \alpha$, logo:

$$\widehat{BEF} + \widehat{EGB} = \widehat{EBC} \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \quad \alpha + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{BEF} = 30^\circ} \ \blacksquare$$

Embora a abordagem sobre Memes, GIFs e suas potencialidades pedagógicas se faça em capítulo posterior, pareceu-nos oportuno mostrar o Meme da Figura 17, que trata de forma humorada, a dificuldade para solucionar o Problema do Triângulo Russo[5]:

Figura 17 – Meme sobre o Triângulo Russo.

Fonte: Disponível em: <https://www.instagram.com/prof-curti/>. Acesso em: 20 set. 2019

3.4.4 Análise pedagógica do Problema 1: Triângulo da Olimpíada de Matemática de Moscou (1952) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

Após apresentar as resoluções, podemos constatar que foram utilizadas ferramentas específicas dos assuntos de geometria plana, trigonometria e geometria analítica, sendo que este último assunto não possui habilidades delimitadas pela BNCC no Ensino Médio. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando competências e habilidades respeitantes aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas resoluções do problema. As habilidades referentes ao Ensino Fundamental são:

> **(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
>
> **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
>
> **(EF06MA26)** Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
>
> **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
>
> **(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
>
> **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

[5] Para aprofundamento na resolução do Problema do Triângulo Russo, recomendamos a leitura de Honsberger (2001, p. 9-13).

As competências e habilidades respeitantes ao Ensino Médio são:

> **(Competência 3)**: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **(Competência 4)**: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
>
> **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

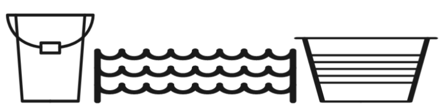
3.5 Problema 2 : Banco de Questões OBMEP Nível 1/2018 (balde ou bacia)

O segundo problema escolhido faz parte das propostas do nível 1 do BANCO (OBMEP, 2018a, p. 12, exercício 3), pois consideramos o mesmo como um desafio bem acessível, que podemos propor para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que por raciocínio lógico serão capazes de solucioná-lo. Trata-se de um “desafio” bem popular e presente em alguns sites de enigmas.

O interessante deste problema é que podem ser trazidos conceitos introdutórios de Teoria dos Grafos, tópico não presente de maneira expressa no currículo da Escola Básica.

PROBLEMA 2 (Banco de Questões OBMEP Nível 1/2018)
Dois recipientes, um balde e uma bacia, possuem 3 e 5 litros de volume, respectivamente. Retirando água de um lago, como podemos deixar a bacia com exatamente 4 litros de água usando somente esses dois recipientes?.

Figura 18 – Balde ou bacia



Fonte: BANCO (OBMEP, 2018a, p. 57)

3.5.1 Resoluções para o Problema 2

1ª resolução - Abordagem usando o raciocínio lógico

Para solucionar o problema proposto usando o raciocínio lógico, partiremos do pressuposto de que o balde e a bacia não são graduados e utilizaremos as possíveis estratégias: abastecer algum dos recipientes com a água do rio, despejar água para fora do recipiente ou ficar transferindo água de um recipiente para o outro. Essa lógica é concluída até que reste na bacia os 4 litros pretendidos. Segue que:

- Primeiro, iremos encher de água a bacia completamente (ficam $5l$ na bacia e o balde fica vazio) e encher o balde utilizando a água da bacia (ficam $2l$ na bacia e $3l$ no balde);

- Após isso, iremos jogar fora a água do balde (ficam $2l$ na bacia e o balde fica vazio) e despejar o que houver na bacia no balde (ficam $2l$ no balde e a bacia vazia);

- Por fim, iremos encher a bacia completamente (ficam $5l$ na bacia e $2l$ no balde) e completar a água que falta no balde utilizando com o que há na bacia, ou seja, a bacia perde $1l$ de seus $5l$ e nela ficam os $4l$ pretendidos.

2ª resolução - Utilizando conceitos de Teoria dos Grafos

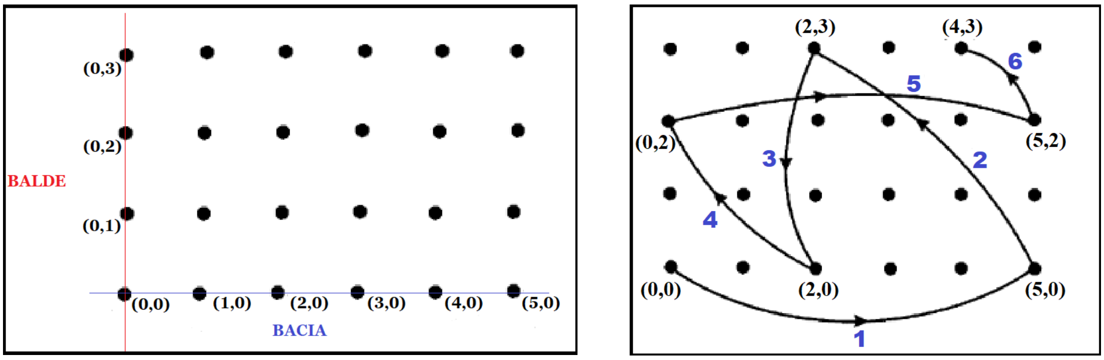
Antes de solucionarmos a questão utilizando Grafos, cabe o seguinte comentário:

> “Teoria dos grafos: ferramentas para resolver problemas matemáticos” é uma tentativa de demonstrar como esse ramo relativamente moderno da matemática pode ser usado para resolver problemas tipicamente tentados por outros meios, para tópicos como combinatória, jogos e teoria dos números. Uma das vantagens do uso de grafos como ferramenta de solução de problemas é que eles permitem a visualização de idéias que, de outra forma, permanecem muito abstratas. (POSAMENTIER, 1996, p. 12)

Neste tipo de solução, onde faremos uma síntese do proposto como solução oficial no BANCO (OBMEP, 2018a, p. 57-58), utilizaremos conceitos de Teoria dos Grafos, assunto um pouco mais avançado de matemática e não contemplado no currículo da Escola Básica atualmente.

Figura 19 – Grafo da quantidade de água no balde e na bacia

(a) Grafo inicial (b) Grafo final



Fonte: 19a - O autor, 2019 ; 19b - BANCO (OBMEP, 2018a, p. 57)

Vamos inicialmente, interpretar as quantidades inteiras de água nos recipientes como sendo coordenadas de pares ordenados do plano como na Figura 19a, onde o eixo x (primeira coordenada do par ordenado) refere-se à bacia e o eixo y refere-se ao balde (segunda coordenada do par ordenado), ou seja, por exemplo, se tivermos 5l de água na bacia e 3l no balde, isso significa o par ordenado $(5, 3)$ ou se tivermos a bacia e o balde vazios, isso significa o par ordenado $(0, 0)$.

Por outro lado, note que se estabelece uma conecção entre pares ordenados, quando existe algum tipo de manobra (despejar água de um recipiente para o outro, encher algum recipiente ou esvaziar algum recipiente) que faz a transformação de um par ordenado em outro. Por exempo, a conexão $(0, 0) \longrightarrow (0, 3)$ significa encher o balde por completo e deixar a bacia vazia.

Após compreendermos o exposto, a solução do problema consiste em efetuar conecções entre os pares partindo do $(0, 0)$ até chegarmos no par $(4, y)$, onde y é uma quantidade inteira de água no balde.

Perceba que na Figura 19b encontra-se um caminho partindo de $(0, 0)$ até chegar em $(4, 3)$, que apresentamos abaixo:

$$(0,0) \xrightarrow{\mathbf{1}} (5,0) \xrightarrow{\mathbf{2}} (2,3) \xrightarrow{\mathbf{3}} (2,0) \xrightarrow{\mathbf{4}} (0,2) \xrightarrow{\mathbf{5}} (5,2) \xrightarrow{\mathbf{6}} (4,3)$$

significando que a configuração final é a seguinte: ficam 3l no balde e 4l na bacia, sendo esta, a solução para o problema utilizando Teoria dos Grafos.

Uma generalização para o Problema da Bacia e Balde que foi apresentado

Iremos abordar neste ponto, uma solução do problema abaixo, que é uma generalização do problema proposto nesta seção:

Dois recipientes, R_1 e R_2, possuem a e b litros de volume, respectivamente, $(a, b \in \mathbb{Z}_+^*$ com $a > b$ e $2b > a)$. Retirando-se água de um lago, como podemos deixar a o recipiente R_2 com exatamente $(3b - a)$ litros de água usando somente esses dois recipientes?

Resolução:

Utilizaremos a Teoria dos Grafos, com o intuito de construir um caminho inicial, a partir do par ordenado $(0, 0)$, sendo feitas conecções até que se evidencie a configuração final, ou seja, um par ordenado do tipo $(3a - b, y)$, que será a resposta do problema.

Primeiramente, vamos adotar a interpretação de que as quantidades inteiras de água nos recipientes serão coordenadas de pares ordenados do plano cartesiano, onde o eixo x (primeira coordenada do par ordenado) refere-se ao recipiente R_1 e o eixo y refere-se ao recipiente R_2 (segunda coordenada do par ordenado), ou seja, por exemplo, se tivermos a litros de água em R_1 e b litros em R_2, isso significa o par ordenado (a, b) ou se tivermos ambos, R_1 e R_2 vazios, isso significa o par ordenado $(0, 0)$.

Uma conexão entre pares ordenados é quando existe algum tipo de manobra, que pode ser despejar água de um recipiente para o outro, encher algum recipiente ou esvaziar algum recipiente, o que faz um par ordenado se transformar em outro, atentando-se para o fato de $a > b$, ou seja, $R_1 > R_2$ (capacidades). São exemplos: a conexão $(0, 0) \longrightarrow (a, 0)$ significa encher R_1 por completo e deixar R_2 vazio; a conexão $(0, b) \longrightarrow (b, 0)$ significa despejar toda a água de R_2 em R_1, a conexão $(b, b) \longrightarrow (a, 2b - a)$, que significa retirar a quantidade $(a - b)$ de água de R_2 despejando-a em R_1, que já possui b litros anteriormente.

Perceba que no caminho abaixo, encontra-se um caminho iniciado em $(0, 0)$ que chega em $(3b - a, 0)$, ou seja, a configuração final é que ficam $(3b - a)$ litros de água no recipiente R_1 e o recipiente R_2 fica vazio, sendo esta, a solução para uma abordagem genérica apresentada para o problema desta seção, utilizando Teoria dos Grafos.

$$(0,0) \xrightarrow{\mathbf{1}} (a,0) \xrightarrow{\mathbf{2}} (a-b,b) \xrightarrow{\mathbf{3}} (0,b) \xrightarrow{\mathbf{4}} (b,0) \xrightarrow{\mathbf{5}} (b,b) \xrightarrow{\mathbf{6}} (a,2b-a)$$

$$(a,2b-a) \xrightarrow{\mathbf{7}} (0,2b-a) \xrightarrow{\mathbf{8}} (2b-a,0) \xrightarrow{\mathbf{9}} (2b-a,b) \xrightarrow{\mathbf{10}} (3b-a,0)$$

Curiosamente, caso fixemos que a quantidade de água a restar em R_1 seja a média aritmética entre as capacidades a e b, ao observarmos o resultado a seguir, encontraremos como solução particular os parâmetros $a = 5$ e $b = 3$, que representam os dados do problema original proposto nesta seção:

$$3b - a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 6b - 2a = a + b \Rightarrow 5b = 3a \Rightarrow \boxed{\boxed{a = 5 \text{ e } b = 3}}$$

3.5.2 Análise pedagógica do Problema 2 : Banco de Questões OBMEP Nível 1/2018 (balde ou bacia) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

Podemos constatar que foram utilizadas ferramentas específicas ao raciocínio lógico-dedutivo e a Teoria dos Grafos. sendo que o primeiro assunto é basilar para a resolução de problemas (raciocínio) e o segundo assunto não possui habilidades delimitadas pela BNCC. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e a habilidade referentes aos Ensinos Médio e Fundamental, respectivamente utilizadas nas soluções do problema:

> **(Competência 3)** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

3.6 Problema 3: Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016 (Agrupando bolinhas de gude e o Teorema Chinês dos Restos)

O problema a seguir é o 10° exercício do nível 1 do BANCO (OBMEP, 2016, p. 12). É um problema típico de aritmética e solucionável por alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental utilizando conceitos de Mínimo Múltiplo Comum e de divisibilidade.

Iremos abordá-lo, primeiramente, através de um aspecto mais tradicional utilizando M.M.C e divisibilidade, para posteriormente, solucioná-lo utilizando o Teorema Chinês dos Restos, assunto de Teoria dos Números e não presente no currículo da Escola Básica.

PROBLEMA 3 (Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016)
Juca possui menos do que 800 bolinhas de gude. Ele gosta de separar as bolinhas em grupinhos com a mesma quantidade de bolinhas. Ele percebeu que se formar grupinhos com 3 bolinhas cada, sobram exatamente 2 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 4 bolinhas, sobram 3 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 5 bolinhas, sobram 4 bolinhas. E, finalmente, se ele formar grupinhos com 7 bolinhas cada, sobram 6 bolinhas.

(A) Se Juca formasse grupinhos com 20 bolinhas cada, quantas bolinhas sobrariam?

(B) Juca possui quantas bolinhas de gude?

3.6.1 Resoluções para o Problema 3

1ª resolução - Múltiplos e a identificação de padrões em sequências

Observe as sequências numéricas abaixo:

$$\begin{gathered} 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\dots \\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\dots \\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\dots \\ 6,\ 13,\ 20,\ 27,\ 34,\dots \end{gathered}$$

Note que a primeira sequência numérica é formada pelos múltiplos de 3 subtraídos de 1. A segunda sequência forma-se a partir dos múltiplos de 4 subtraídos de 1. Na terceira sequência temos os múltiplos de 5 subtraídos de 1 e, seguindo o mesmo raciocínio, a quarta sequência apresenta múltiplos de 7 subtraídos de 1. Ao somarmos 1 a cada elemento de cada sequência, teremos o seguinte:

$$\begin{gathered} 2+1,\ 5+1,\ 8+1,\ 11+1,\ 14+1,\dots \\ 3+1,\ 7+1,\ 11+1,\ 15+1,\ 19+1,\dots \\ 4+1,\ 9+1,\ 14+1,\ 19+1,\ 24+1,\dots \\ 6+1,\ 13+1,\ 20+1,\ 27+1,\ 34+1,\dots \end{gathered}$$

ou seja, as sequências são:

$$\begin{gathered} 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\dots \longrightarrow \text{sequência dos múltiplos de 3} \\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\dots \longrightarrow \text{sequência dos múltiplos de 4} \\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\dots \longrightarrow \text{sequência dos múltiplos de 5} \\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\dots \longrightarrow \text{sequência dos múltiplos de 7} \end{gathered}$$

A partir daí, devemos encontrar o número menor que 801 e simultâneo em todas as sequências acima. Com isso, faz-se necessário encontrar os múltiplos comuns a 3, 4, 5 e 7, ou seja, os múltiplos de $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$, sendo eles a sequência $420, 840, 1260\dots$ e existe apenas um deles que é menor do que 801, que é o 420. Retornando às sequências originais, vamos ter que subtrair 1, com isso o número de bolinhas que Juca tem é $420 - 1 = \boxed{419}$, o que responde a assertiva **(A)**. Para responder a assertiva **(B)**, basta calcular o resto da divisão de 419 por 20, que é $\boxed{19}$.

2ª resolução - Utilizando MMC e Divisibilidade

Designando a quantidade de bolinhas por x , com $x < 800$, e podemos reescrever x da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 3k_1 + 2 \\ x = 4k_2 + 3 \\ x = 5k_3 + 4 \\ x = 7k_4 + 6 \end{cases}, \quad k_1, k_2, k_3 \text{e } k_4 \in \mathbb{Z}_+$$

Adicionando 1 em cada membro de cada uma das equações, teremos $x+1$ múltiplo de 3, 4, 5 e 7 como segue:

$$\begin{cases} x+1 = 3k_1 + 2 + 1 \\ x+1 = 4k_2 + 3 + 1 \\ x+1 = 5k_3 + 4 + 1 \\ x+1 = 7k_4 + 6 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3k_1 + 3 \\ x+1 = 4k_2 + 4 \\ x+1 = 5k_3 + 5 \\ x+1 = 7k_4 + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3k_5 \\ x+1 = 4k_6 \\ x+1 = 5k_7 \\ x+1 = 7k_8 \end{cases}, \quad k_5, k_6, k_7 \text{ e } k_8 \in \mathbb{Z}_+$$

Assim, a quantidade $x+1$ de bolinhas é um múltiplo de 3, de 4, de 5 e de 7, então podemos utilizar como parâmetro o cálculo do Menor Múltiplo Comum:

$\underbrace{\text{M.M.C}\,(3,4,5,7)}_{=420} \longrightarrow x+1 = 420{\cdot}\text{k} \longrightarrow x = 420{\cdot}\text{k} - 1$, como $x < 800$, teremos $k = 1$, então $\boxed{x = 419}$

Portanto, a quantidade de bolinhas é $x = 419$.

Para saber quantas bolinhas sobram após Juca formar grupos de 20 bolinhas, basta saber o resto da divisão de 419 por 20, que é $\boxed{19}$.

Perceba que pelo fato de $x+1$ ser um múltiplo de 420, o próximo valor possível seria 840, o que acarretaria em $x+1 = 840 \Rightarrow x = 839$, absurdo pois $x < 800$. Logo, o único valor possível é $x = 419$.

3ª resolução - Utilizando Teorema Chinês dos Restos

Iremos apenas enunciar o Teorema Chinês dos Restos, e após, o problema em tela será resolvido utilizando este tópico de Teoria dos Números.

Teorema 3.6.1 (Teorema Chinês dos Restos)**.** *Sejam $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ números positivos tais que $MDC(n_i, n_j) = 1$, para $i \neq j$. O sistema de congruências lineares:*

$x \equiv a_1 \,(mod\ n_1)$
$x \equiv a_2 \,(mod\ n_2)$
$x \equiv a_3 \,(mod\ n_3)$
$\cdots$
$x \equiv a_k \,(mod\ n_k)$

Admite uma solução simultânea, que é única módulo inteiro $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

Demonstração. A demonstração do Teorema Chinês dos Restos é construtiva e indica o algoritmo de determinação da solução que pretendemos apresentar. Para uma demonstração formal deste Teorema, sugerimos a leitura de Hefez (2016, p. 217). □

Iremos escrever um sistema de congruências que admita o número de bolinhas x como solução ($0 < x < 800$):
$x \equiv 2\,(mod\, 3)$
$x \equiv 3\,(mod\, 4)$
$x \equiv 4\,(mod\, 5)$
$x \equiv 6\,(mod\, 7)$

Como 3, 4, 5 e 7 são números primos entre si dois a dois, usaremos o Teorema Chinês dos Restos para determinar a solução geral do sistema.

Tomemos $M = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420,\ M_1 = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140,\ M_2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105,\ M_3 = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84,\ e\ M_4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Continuando, pondo $m_1 = 3,\ m_2 = 4,\ m_3 = 5\ e\ m_4 = 7$ e ainda, $c_1 = 2,\ c_2 = 3,\ c_3 = 4\ e\ c_4 = 6$, temos que a solução geral do sistema é dada por:

$$x \equiv M_1 \cdot y_1 \cdot c_1 + M_2 \cdot y_2 \cdot c_2 + M_3 \cdot y_3 \cdot c_3 + M_4 \cdot y_4 \cdot c_4\,(mod\ M)$$

onde cada y_i é solução de $M_i \cdot y_i \equiv 1\,(mod\, m_i)$, com $i = 1, 2, 3, 4$.

Cálculo dos valores de $y_1, y_2, y_3\ e\ y_4$:

$$\begin{cases} 140 \cdot y_1 \equiv 1\,(mod\, 3) \\ 105 \cdot y_2 \equiv 1\,(mod\, 4) \\ 84 \cdot y_3 \equiv 1\,(mod\, 5) \\ 60 \cdot y_4 \equiv 1\,(mod\, 7) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot y_1 \equiv 1\,(mod\, 3) \\ y_2 \equiv 1\,(mod\, 4) \\ 4 \cdot y_3 \equiv 1\,(mod\, 5) \\ 4 \cdot y_4 \equiv 1\,(mod\, 7) \end{cases}$$

Portanto, $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 4\ e\ y_4 = 2$ e, assim:

$$x \equiv 140 \cdot 2 \cdot 2 + 105 \cdot 1 \cdot 3 + 84 \cdot 4 \cdot 4 + 60 \cdot 2 \cdot 6 = 2939\,(mod\, 420)\,.$$

Com isso, temos que $x = 2939 + 420t$, com $t \in \mathbb{Z}$. Como $0 < x < 800$, obteremos:

$$x = 2939 + 420 \cdot (-6) \Rightarrow \boxed{x = 419}$$

Como encontramos a quantidade de bolinhas, para saber quantas bolinhas sobram após Juca formar grupos de 20 bolinhas, basta saber o resto da divisão de 419 por 20, que é $\boxed{19}$.

3.6.2 Análise pedagógica do Problema 3: Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016 (Agrupando bolinhas de gude e o Teorema Chinês dos Restos) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

As soluções apresentadas para o problema 3, utilizam conceitos básicos de múltiplos, de divisibilidade e de menor múltiplo comum (M.M.C), que estão presentes na BNCC e o Teorema Chinês dos Restos, que não é previsto na BNCC.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e a habilidade atinentes aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções do problema:

> **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
>
> **(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
>
> **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
>
> **(Competência 3)** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

3.7 Problema 4: Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016 (Somando pecinhas em Progressão Aritmética)

O problema a seguir foi retirado do BANCO (OBMEP, 2016, p.14, exercício 15). Inicialmente, é um problema tipicamente proposto a alunos de 6º e 7º anos, para ser solucionado utilizando raciocínio e identificação de regularidades e padrões nas sequências.

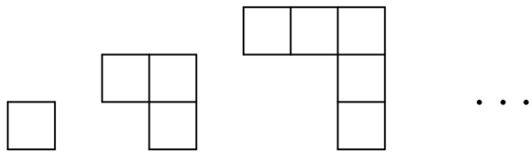
É possível também, serem utilizados conceitos de Progressão Aritmética para abordá-lo, dando assim, uma maior abrangência pedagógica à questão.

PROBLEMA 4 **(Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016)**
Considere a seguinte sequência de pecinhas, conforme a figura 20, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.
(A) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?
(B) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50
(C) Observando o resultado do item **(B)**, calcule
$2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100.$
(D) Calcule
$1 + 2 + 3 + 4 + + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100.$

3.7.1 Resoluções para o Problema 4

1ª resolução - Utilizando raciocínio e identificando padrões

Figura 20 – Sequência de quadradinhos



Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p.74)

Ao observar a sequência de figuras, pode-se perceber um padrão definido.

Observe que, a partir da segunda peça, podemos saber a quantidade de quadradinhos somando aqueles que compõem a linha vertical da peça com aqueles que compõem a linha horizontal da peça e descontando 1 quadradinho, pois ele é contado duas vezes, pois aparece na linha e na coluna da peça ao mesmo tempo.

Perceba que a peça número 2 possui $2 + 2 - 1 = 3$ quadradinhos, pois possui 2 quadradinhos na sua linha e 2 quadradinhos na sua coluna e o 1 é descontado por aparecer nas duas contagens. A peça número 3 possui $3 + 3 - 1 = 5$ quadradinhos, pois possui 3 na linha, 3 na coluna e o 1 é descontado por aparecer nas duas contagens. Esse padrão é repetido em qualquer peça, a partir da segunda.

Portanto, para saber a quantidade de quadradinhos que aparecem na peça 50, basta efetuarmos $\boxed{50 + 50 - 1 = 99}$ quadradinhos, que é a resposta da assertiva **(A)**.

Na assertiva **(B)** devemos perceber que, ao encaixarmos todas as peças uma na outra, desde a primeira, ou seja, a peça número 1 encaixar na peça número 2, esse conjunto na peça número 3 e assim consequentemente até o encaixe final na peça número 50, o conjunto total será um quadrado com o lado de medida a quantidade de quadradinhos da última peça.

No caso, como a última é a peça número 50, para sabermos a quantidade de quadradinhos que há no quadrado de 50×50, basta efeturamos $\boxed{50 \cdot 50 = 2500}$, que é o total de quadradinhos do conjunto.

Ao solucionarmos o item anterior, podemos perceber que efetuamos a seguinte soma:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 95 + 97 + 99 = 2500 \tag{3.3}$$

Para calcular a soma dos 50 números pares de 2 até 100, basta considerar que cada uma das parcelas da soma $2 + 4 + ... + 100$ excede as parcelas da soma anterior (Equação

3.3) em 1 unidade. Como temos 50 parcelas, esta segunda soma vai ser igual à primeira mais 50. Ou seja, $2500 + 50 = \boxed{2550}$.

Perceba uma forma diferente de contar somas grandes de números mas que possuem um certo padrão, basta reorganizá-la de maneira conveniente e contar a quantidade de parcelas iguais:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 95 + 97 + 99 = \ ? \tag{3.4}$$

$$\underbrace{\underbrace{(1+99)}_{=100} + \underbrace{(3+97)}_{=100} + \underbrace{(5+95)}_{=100} + \underbrace{(7+93)}_{=100} + \cdots + \underbrace{(47+53)}_{=100} + \underbrace{(49+51)}_{=100}}_{25\ \ parcelas} =$$

$$25 \cdot 100 = \boxed{2500} \tag{3.5}$$

Baseados no raciocínio realizado para obter a soma dos números ímpares da Equação 3.4, iremos efetuar a soma dos números pares abaixo:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 96 + 98 + 100 = \ ? \tag{3.6}$$

$$\underbrace{\underbrace{(2+100)}_{=102} + \underbrace{(4+98)}_{=102} + \underbrace{(6+96)}_{=102} + \underbrace{(8+94)}_{=102} + \cdots + \underbrace{(48+54)}_{=102} + \underbrace{(50+52)}_{=102}}_{25\ \ parcelas} =$$

$$25 \cdot 102 = \boxed{2550} \tag{3.7}$$

Com isso, o resultado Equação 3.7 é a resposta da assertiva **(C)** e para encontrar o resultado da assertiva **(D)**, basta efetuar a soma entre o resultado da Equação 3.5 com o da Equação 3.7, ou seja, iremos somar os números pares e ímpares de 1 até 100, que é $\boxed{2500 + 2550 = 5050}$.

2ª resolução - Utilizando Progressão Aritmética

Antes de solucionarmos o problema utilizando progressão aritmética, cabe a seguinte definição, retirada de Neto et al. (2009, p. 72):

Definição 1. *Chamamos de **Progressão Aritmética - P.A** qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante denominada razão da progressão. Em outras palavras, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência tal que*

$$a_n = a_{n-1} + r \ , \quad (n > 1)$$

Numa acepção utilizando progressões aritméticas, cada peça representa um termo da progressão aritmética e o seu valor será a quantidade de quadradinhos que a peça possui.

Devemos explorar o exercício identificando que se trata de uma sequência de peças que seguem um padrão no qual para se saber a quantidade de quadradinhos de uma peça, basta saber a quantidade de quadradinhos da peça de ordem anterior e somar 2 unidades, isto ocorre a partir da primeira peça.

Da interpretação do problema, temos que $a_1 = 1$ é o primeiro termo e a razão é $r = 2$. Desejamos saber, conforme é solicitado pela assertiva **(A)**, o valor de a_{50}, ou seja, o termo da progressão de ordem $n = 50$. Ao utilizar a expressão do termo genérico de uma progressão aritmética para encontrar o valor de a_{50}. Então:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{50} = a_1 + (50-1) \cdot 2$$

$$a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{50} = 99} \tag{3.8}$$

Para encontrar o que solicita a assertiva **(B)**, devemos perceber que a quantidade de quadradinhos da união das pecinhas de número 1 a 50 significa saber a soma dos termos da progressão aritmética do primeiro termo ao termo de ordem 50.

Para se chegar a esse resultado, podemos utilizar a fórmula da soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética e para isso, devemos saber o primeiro e o último termos da soma pretendida. No caso, queremos saber a soma dos 50 primeiros termos da progressão, que é $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{50}$. Pela expressão da soma dos termos de uma progressão aritmética, teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Do enunciado, temos $a_1 = 1$ e a ordem do último termo $n = 50$. Pela Equação 3.8, que $a_{50} = 99$. Então:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50$$

$$S_{50} = \frac{(1 + 99)}{2} \cdot 50$$

$$S_{50} = \frac{(100)}{2} \cdot 50 \Rightarrow \boxed{S_{50} = 2500} \tag{3.9}$$

Na assertiva **(C)**, queremos saber a soma dos termos de uma progressão aritmética onde o primeiro termo é $a_1 = 2$, a razão é $r = 2$ e o último termo é $a_n = 100$. Para saber a ordem desse último termo, utilizaremos a fórmula do termo genérico da progressão aritmética e encontraremos n:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$100 = 2 + (n-1) \cdot 2$$
$$100 = 2 + 2 \cdot n - 2$$

$$2 \cdot n = 100 \Rightarrow \boxed{n = 50} \tag{3.10}$$

Agora, temos os dados necessários e podemos utilizar a fórmula da soma dos termos da progressão aritmética, com $a_1 = 2$, $r = 2$ $a_{50} = 100$ e $n = 50$:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$
$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50$$
$$S_{50} = \frac{(2 + 100)}{2} \cdot 50$$

$$S_{50} = \frac{(102)}{2} \cdot 50 \Rightarrow \boxed{S_{50} = 2550} \tag{3.11}$$

Na assertiva **(D)**, queremos a soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética, onde o primeiro termo é $a_1 = 1$, a razão é $r = 1$ e o último termo é $a_{100} = 100$, com $n = 100$. Pela fórmula da soma dos termos da progressão aritmética, teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$
$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})}{2} \cdot 50$$
$$S_{100} = \frac{(1 + 100)}{2} \cdot 100$$

$$S_{100} = \frac{(101)}{2} \cdot 100 \Rightarrow \boxed{S_{100} = 5050} \tag{3.12}$$

3.7.2 Análise pedagógica do Problema 4: Banco de Questões OBMEP Nível 1/2016 (Somando pecinhas em Progressão Aritmética) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

As soluções apresentadas possuem características semelhantes no tocante à necessidade de se identificar um padrão. Foram utilizadas ferramentas relacionadas aos assuntos raciocínio lógico, sequências e progressões aritméticas, todos possuindo habilidades delimitadas pela BNCC. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades relativas aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções do problema:

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

(Competência 4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

3.8 Problema 5: OBMEP/2013 1ª Fase Nível 2 (Progressão Geomérica e Repunits)

A seguir, propomos um problema retirado da 1ª fase do nível 2 da prova OBMEP (2013). Refere-se a uma soma sequencial de números formados apenas pelo algarismo 7, em que a quantidade de algarismos vai aumentando. É proposto, a priori, a alunos a partir do 8° ano, mas acreditamos que alunos de séries inferiores com uma base matemática sólida consigam resolvê-lo.

Inicialmente iremos propor uma solução mais simples, utilizando reciocínio lógico e verificação de padrões e, posteriormente, o problema será solucionado usando conceitos de Progressão Geométrica e *Repunits*[6]

PROBLEMA 5 (OBMEP/2013 1ª Fase Nível 2)

Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\cdots777}_{\text{setenta e sete setes}} \ ?$$

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

[6] Para um maior entendimento sobre *Repunits*, recomendamos a leitura dos artigos de Pereira (2009, p. 27-31) e de Brito (2006, p. 35-42).

3.8.1 Resoluções para o Problema 5

1ª resolução - Identificando padrões e usando Raciocínio

Podemos observar que há uma soma onde os números são compostos por alguma quantidade do algarismo 7 não havendo outro tipo de algarismo na formação dos números. Há uma sequência de números onde o menor deles possui um dígito 7 e o maior possui setenta e sete dígitos 7. Para efetuarmos esta soma com setenta e sete parcelas, faríamos o seguinte:

$$\left.\begin{array}{r} 777\cdots7777 \\ 77\cdots7777 \\ 7\cdots7777 \\ \vdots \\ 7777 \\ 777 \\ 77 \\ \underline{+\qquad\quad 7} \end{array}\right\}\text{setenta e sete parcelas}$$

Note que o algarismo que ocupará a casa das unidades será obtido quando somarmos $\underbrace{7+7+7+7+\cdots+7+7+7}_{setenta\ e\ sete} = 77\cdot 7 = 53\boxed{9}$

Com isso, permanece como resultado na posição das unidades o algarismo $\boxed{9}$ mas seguirão para a próxima etapa da adição as 53 unidades de dezena restantes, que irão se agregar ao resultado conforme veremos abaixo:

Perceba que o algarismo que ocupará a casa das dezenas resultará da soma $\underbrace{7+7+7+7+\cdots+7+7+7}_{setenta\ e\ seis}+53 = 76\cdot 7+53 = 532+53 = 58\boxed{5}$

Note que não é necessário calcular a soma inicial já que $\boxed{5}$ será o algarismo que ocupará a casa das dezenas. O gabarito a assinalar é a assertiva **(A)**.

2ª resolução - Utilizando Progressão Geométrica e os Repunits

Nessa segunda abordagem, buscaremos obter uma expressão matemática correspondente à soma

$$\underbrace{7}_{um\ sete} + \underbrace{77}_{dois\ setes} + \underbrace{777}_{três\ setes} + \underbrace{7777}_{quatro\ setes} + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{setenta\ e\ seis\ setes} + \underbrace{777\cdots777}_{setenta\ e\ sete\ setes}$$

utilizando as ferramentas Progressões Geométricas e os Repunits, mas antes disso, definiremos o que elas são.

Segundo Neto et al. (2009, p. 107), temos:

Definição 2. *Chamamos de* ***Progressão Geométrica - P.G*** *qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante denominada razão da P.G. Em outras palavras, uma progressão geométrica de razão q é uma sequência tal que*

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \ , \ (n > 1)$$

Uma outra informação, temos em Beiler (1966, p. 83-87), que aglutinou os termos **Repeat** (repetir) e **Unit** (unidade) numa só palavra, e daí, seguimos para:

Definição 3. *Chamamos de* ***Repunits***[7] *a representação de números monodígitos constituídos apenas pelo dígito 1. E a representação numérica é a seguinte:*

$$\underbrace{1111...1111}_{n\ termos} = \frac{10^n - 1}{9} \ , \ (n \in \mathbb{N})$$

Agora, retomando o problema, a soma aí apresentada pode ser reescrita sob novo prisma. Todas as parcelas da soma são divisíveis por 7, podendo ser escritas como um produto de 7 por um Repunit. Após colocar o fator 7 em evidência, aparecerão diversos Repunits[8] que podem ser reescritos, dando origem ao que segue:

$$\underbrace{7}_{um\ sete} + \underbrace{77}_{dois\ setes} + \underbrace{777}_{três\ setes} + \underbrace{7777}_{quatro\ setes} + \cdots + \underbrace{777\cdots 77}_{setenta\ e\ seis\ setes} + \underbrace{777\cdots 777}_{setenta\ e\ sete\ setes} =$$

$$= 7 \cdot \left(\underbrace{1}_{um\ um} + \underbrace{11}_{dois\ uns} + \underbrace{111}_{três\ uns} + \underbrace{1111}_{quatro\ uns} + \cdots + \underbrace{111\cdots 11}_{setenta\ e\ seis\ uns} + \underbrace{111\cdots 111}_{setenta\ e\ sete\ uns} \right) =$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \frac{10^4 - 1}{9} + \cdots + \frac{10^{76} - 1}{9} + \frac{10^{77} - 1}{9} \right) =$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + 10^4 - 1 + \cdots + 10^{76} - 1 + 10^{77} - 1}{9} \right) =$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \cdots + 10^{76} + 10^{77} \overbrace{-1 - 1 - 1 - 1 \cdots - 1 - 1}^{77\ parcelas\ =\ 77 \cdot (-1)}}{9} \right) =$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{\overbrace{10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \cdots + 10^{76} + 10^{77}}^{É\ soma\ de\ P.G\ com\ a_1=10^1\ ,\ n=77\ e\ a\ razão\ q=10} + 77 \cdot (-1)}{9} \right) = \tag{3.13}$$

---

7 Para um aprofundamento sobre os Repunits, sugerimos a leitura de Andreescu e Gelka (2009, p. 74-77).

8 Sugerimos a questão sobre Repunits presente no BANCO (OBMEP, 2018a, Problema 25, Nível 2, p. 120), para aprofundamento.

Devemos agora, calcular a Soma dos Termos da P.G finita destacada acima, usando $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ onde } a_1 = 10^1, \ q = 10 \text{ e } n = 77$$

$$S_{77} = \frac{10^1 \cdot (10^{77} - 1)}{10 - 1}$$

$$S_{77} = \frac{10^1 \cdot (10^{77} - 1)}{10 - 1} \Rightarrow \boxed{S_{77} = \frac{10^{78} - 10}{9}} \tag{3.14}$$

O próximo passo será substituir resultado encontrado em 3.14 no lugar da PG destacada na Equação 3.13:

$$= 7 \cdot \left(\frac{\frac{10^{78}-10}{9} + 77 \cdot (-1)}{9} \right) \Leftrightarrow 7 \cdot \left(\frac{\frac{10^{78}-10+9\cdot 77\cdot(-1)}{9}}{9} \right) \Leftrightarrow 7 \cdot \left(\frac{10^{78} - 10 + 9 \cdot 77 \cdot (-1)}{81} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{7 \cdot \left(\frac{10^{78} - 703}{81} \right)} \tag{3.15}$$

Podemos perceber que, pelo fato de $81 = 9 \times 9$ e 7 serem números primos entre si, o resultado numérico de $7 \cdot \left(\dfrac{10^{78} - 703}{81} \right)$ será construído ao efetuarmos, primeiramente, $\dfrac{10^{78} - 703}{9} = k_1$, após efetuarmos $\dfrac{k_1}{9} = k_2$ e, por último, calculando $7 \times k_2 = k$. E temos por objetivo encontrar o algarismo das dezenas do número k. Procederemos a alguns passos para atingir esse objetivo:

Note que $\overbrace{999999\ldots99999}^{75 \text{ algarismos } 9}297$ é divisível por 9, pois a soma de seus dígitos é obtida pela expressão $75 \cdot 9 + 2 + 9 + 7 = 693$, que é divisível por 9 e $693 \div 9 = 77$. Teremos então:

Cálculo de k_1:

$$\begin{array}{l|l} 9999....9297 & \quad 9 \\ \cline{2-2} 0 & 1111\ldots1033 \\ \ \ 0 & \\ \ \ \ \ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 \ldots & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 29 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 27 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow k_1 = \overbrace{111111\ldots11111}^{75 \text{ algarismos } 1}033$$

Note que $\overbrace{1111111\ldots11111}^{75 \text{ algarismos } 1}033$ é divisível por 9, pois a soma de seus dígitos é obtida pela expressão $75 \cdot 1 + 0 + 3 + 3 = 81$, que é divisível por 9 e $81 \div 9 = 9$. Teremos então:

Cálculo de k_2:

$$
\begin{array}{l|l}
1111111111111\ ...1033 & \quad 9 \\ \hline
21 & 123456789012\ldots12337 \\
\ \ 31 & \\
\ \ \ \ 41 & \\
\ \ \ \ \ \ 51 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 61 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 71 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 81 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 011 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 21\ldots21 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 30 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 33 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \ \ 63 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
\qquad \Rightarrow
$$

$$\Rightarrow\ k_2 = \overbrace{12345678012...80}^{8 \text{ grupos}}12337$$

Segue então que:

$$k = 7 \cdot \left(\overbrace{12345678012...80}^{8 \text{ grupos}}12337 \right).$$

Como desejamos obter o algarismo das dezenas de k, basta multiplicar 7 pelos últimos dígitos de k, ou seja:

$$k = 7 \cdot \left(\overbrace{12345678012...80}^{8 \text{ grupos}}12337 \right) \Rightarrow k = \ldots 76359 \Rightarrow \boxed{\text{o algarismo das dezenas é 5.}}$$

Segue que o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{um\ sete} + \underbrace{77}_{dois\ setes} + \underbrace{777}_{três\ setes} + \underbrace{7777}_{quatro\ setes} + \ldots + \underbrace{777\cdots77}_{setenta\ e\ seis\ setes} + \underbrace{777\cdots777}_{setenta\ e\ sete\ setes} \quad \text{é } 5.$$

3.8.2 Análise pedagógica do Problema 5: OBMEP/2013 1ª Fase Nível 2 (Progressão Geomérica e Repunits) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

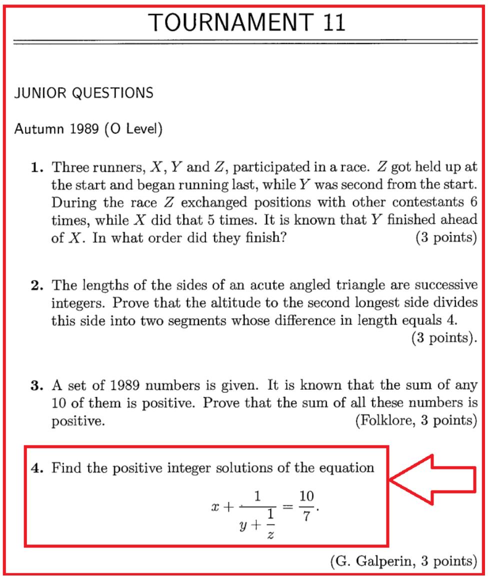
Observando as resoluções apresentadas, a primeira é bem acessível a alunos a partir do 6° ano, pois utiliza raciocínio lógico na operação de adição; já a questão alternativa requer, na sua resolução, o uso de progressões geométricas, assunto abarcado pela BNCC, e Repunits, assunto fora do escopo do currículo da Escola Básica. Segue o rol apresentando as competências e as habilidades presentes na BNCC (BRASIL, 2018) e relativas aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções do problema:

> **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
>
> **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
>
> **(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
>
> **(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
>
> **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **(Competência 5)** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
>
> **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

3.9 Problema 6: OBMEP/2018 1ª Fase Nível 2 (Frações contínuas)

O problema que iremos resolver, esteve presente na 1ª Fase, Nível 2 da prova OBMEP (2018b) mas tinha sido proposto anteriormente em uma competição internacional de matemática, o *Tournament of the Towns 1989* (Torneio das Cidades 1989), (Figura 21):

Figura 21 – Olimpíada Torneio das Cidades 1989



TOURNAMENT 11

JUNIOR QUESTIONS

Autumn 1989 (O Level)

1. Three runners, X, Y and Z, participated in a race. Z got held up at the start and began running last, while Y was second from the start. During the race Z exchanged positions with other contestants 6 times, while X did that 5 times. It is known that Y finished ahead of X. In what order did they finish? (3 points)

2. The lengths of the sides of an acute angled triangle are successive integers. Prove that the altitude to the second longest side divides this side into two segments whose difference in length equals 4. (3 points).

3. A set of 1989 numbers is given. It is known that the sum of any 10 of them is positive. Prove that the sum of all these numbers is positive. (Folklore, 3 points)

4. Find the positive integer solutions of the equation

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

(G. Galperin, 3 points)

Fonte: (TAYLOR, 1994, p.11)

Abordaremos, a seguir, uma forma de resolução do exercicio e depois, teceremos alguns comentários sobre Frações Contínuas.

PROBLEMA 6 (OBMEP/2018 1ª Fase Nível 2)

Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 7

3.9.1 Resolução para o Problema 6

Resolução do problema usando comparação entre números

Comecemos por observar que o número $\frac{10}{7}$ está compreendido entre os inteiros 1 e 2. Assim, podemos reescrevê-lo como a soma de 1 com uma fração positiva, tendo $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}$, ou seja, $a = 1$. Observe

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Isso nos deixa com

$$\frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{1}{\frac{7}{3}}$$

Ora, $\frac{7}{3}$ é menor que 3 e pode escrever-se como a soma de um inteiro positivo com uma fração positiva de duas maneiras. Assim, as únicas possibilidades inteiras positivas para os valores de b são 1 e 2. Caso $b = 1$ teríamos:

$$\frac{1}{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

Teríamos $c = \frac{3}{4}$, ou seja, $c \notin \mathbb{Z}$, absurdo.

Nos resta então $\boxed{\text{b = 2}}$ como a única possibilidade, e isso leva a $\frac{1}{c} = \frac{1}{3}$, ou seja, $\boxed{\text{c = 3}}$. Portanto, a única solução inteira positiva é $\boxed{\text{(a, b, c) = (1,2,3)}}$.

Gabarito: assinalar a assertiva **(B)**.

Questão da OBMEP e uma abordagem sobre Frações Contínuas[9]

Após resolver questões como as do problema anterior, podemos fazer referência às Frações Contínuas, exemplificando outras maneiras de representar os números racionais. Segue a Definição abaixo:

Definição 4. *Chamamos de* ***Fração contínua*** *a expressão que possui a forma*

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}$$

tais que $a_1 \in \mathbb{Z}$ *e* $a_2, a_3, \cdots, a_n$ *e* $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{Z}_+$[10]. *(OLDS, 1963, p.7)*

Em particular, quando uma Fração contínua tiver a seguinte forma

[9] Para um maior entendimento e aprofundamento acerca de Frações Contínuas, sugerimos a leitura de Beskin (1996), Posamentier e Salkind (1988, p. 34, p. 149-150) e de Yaglom, Shklarsky e Chentzov (1993, p. 40 e p. 273).

[10] A notação $\mathbb{Z}_+$ refere-se ao conjunto dos números inteiros não negativos, ou seja, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \quad (\text{com } a_1 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}_+)$$

ela é chamada de **Fração contínua finita simples**. Prova-se que todo número racional pode ser expresso sob esta forma de fração. Vejamos os casos seguintes:

$$\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

Para se entender como se chega ao resultado acima, cuja forma é chamada de expansão de frações racionais, faremos os procedimentos a seguir:

- Inicialmente efetua-se a divisão de 10 por 7, obtendo quociente 1 e resto 3, o que significa $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$.
- Após isso, efetuamos a inversão da fração que figura na segunda parcela, ficando: $\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}}$
- Efetuamos a divisão de 7 por 3, obtendo quociente 2 e resto 1, o que significa $\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}$.
- Deste modo, conclui-se o procedimento de expansão em fraçoes racionais do número $\frac{10}{7}$

Podemos também reescrever $\frac{10}{7}$ utilizando a seguinte notação: $\frac{10}{7} = [1, 2, 3]$, onde $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 3$.

Vejamos o exemplo da expansão de frações racionais do número $\frac{67}{29}$:

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{9}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{9}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}} = \boxed{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Assim, podemos reescrever o racional $\frac{67}{29}$ sob esta forma $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}$ e também sob esta forma $[2, 3, 4, 2]$, com $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_3 = 4$ e $a_4 = 2$.

A seguir, mostraremos alguns resultados históricos interessantes, conforme consta em Olds (1963, p. 134-139). Apresentaremos justificativas e indicações para os resultados, os quais podem ser usados em um possível debate sobre números irracionais (por exemplo números primos sob radicais, π e o número e), pois serão exibidas frações contínuas originadas de números irracionais:

1. Sem utilizar a notação que conhecemos atualmente, Bombeli [11], em 1572, sabia essencialmente que:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}}$$

Justificativa 1. *Note que pelo fato de* $9 < 13 < 16$*, sabe-se que* $3 < \sqrt{13} < 4$*. Então podemos reescrever* $\sqrt{13}$ *como:*

$$\boxed{\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{x}} \quad , \ com\ x \in \mathbb{R}_+^* \tag{3.16}$$

Desta forma, teremos:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{13} - 3 \overset{Racionalizando}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{1}{x} = \frac{4}{3 + \sqrt{13}}} \tag{3.17}$$

[11] Rafael Bombelli (1526 – 1572), matemático italiano.

Substituindo o resultado de $\dfrac{1}{x}$ *da equação 3.17 na equação 3.16, teremos:*

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{3 + \sqrt{13}}} \tag{3.18}$$

Substituindo o resultado de $\sqrt{13}$ *da equação 3.16 na equação 3.18, teremos:*

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{3 + \sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{3 + \left(3 + \dfrac{1}{x}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \dfrac{1}{x}}} \tag{3.19}$$

Podemos perceber que há um padrão ao substituirmos, ora o resultado de $\dfrac{1}{x}$ *da equação 3.17, ora o resultado de* $\sqrt{13}$ *da equação 3.16, em sequência, nos resultados gerados. Do exposto, chegamos ao raciocínio abaixo, que conclui a justificativa:*

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{4}{3 + \sqrt{13}} = 3 + \frac{4}{6 + \dfrac{1}{x}} = \cdots \Rightarrow \sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}}$$

2. Em 1613, Cataldi[12] expressou em frações contínuas, a expansão de $\sqrt{18}$:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}$$

Justificativa 2. *Note que pelo fato de* $16 < 18 < 25$*, sabe-se que* $4 < \sqrt{18} < 5$*. Então podemos reescrever* $\sqrt{18}$ *como:*

$$\boxed{\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{x}} \quad , \textit{ com } x \in \mathbb{R}_+^* \tag{3.20}$$

A partir daqui, procedendo de maneira análoga à anterior, chega-se ao resultado pretendido.

[12] Pietro Antonio Cataldi (1548 – 1626), matemático italiano.

3. O resultado de Lambert[13], em 1770, expressou o valor de π em frações contínuas:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

Justificativa 3. *Note que pelo fato de $\pi \simeq 3,1415926535897932\ldots$, podemos reescrever π como:*

$$\boxed{\pi = a_1 + \frac{1}{x_1}} \quad , \textit{ com } a_1 = 3 \textit{ e } x_1 \in \mathbb{R}_+^* \qquad (3.21)$$

Desta forma, teremos:

$$\pi = 3 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \pi - 3 = 0,141592\ldots \Rightarrow x_1 = \frac{1}{0,141592\ldots} \Rightarrow x_1 = 7,062513\cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 7 + 0,062513\ldots \Leftrightarrow x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \boxed{a_2 = 7 \;\; e \;\; \frac{1}{x_2} = 0,062513...}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, teremos:

$$\frac{1}{x_2} = 0,062513... \Rightarrow x_2 = 15,996594... \Leftrightarrow x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \boxed{a_3 = 15 \;\; e \;\; \frac{1}{x_3} = 0,996594...}$$

Prosseguindo com a mesma ideia:

$$\frac{1}{x_3} = 0,996594... \Rightarrow x_2 = 1,003417... \Leftrightarrow x_3 = a_4 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \boxed{a_4 = 1 \;\; e \;\; \frac{1}{x_4} = 0,003417...}$$

Continuando no mesmo sentido, tem-se:

$$\frac{1}{x_4} = 0,003417... \Rightarrow x_4 = 292,634598... \Leftrightarrow x_4 = a_5 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow \boxed{a_5 = 292 \;\; e \;\; \frac{1}{x_5} = 0,634598...}$$

Se dermos prosseguimento ao processo anterior, chegaremos a aproximações cada vez mais precisas do número irracional π, sob a forma de frações contínuas. Diante do exposto, segue o raciocínio abaixo, que não é uma demonstração matemática mas justifica o resultado obtido por Lambert em 1770:

$$\pi = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}} \Leftrightarrow \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

[13] Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), matemático suíço.

4. O número e, a base dos logarítmos naturais, teve a seguinte expressão por frações contínuas publicada por Euler[14], em 1737:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}$$

Justificativa 4. *Note que pelo fato de* $e \simeq 2,71828182846\ldots$, *podemos reescrever* e *como:*

$$\boxed{e = a_1 + \frac{1}{x_1}} \quad , \textit{ com } a_1 = 2 \textit{ e } x_1 \in \mathbb{R}_+^* \tag{3.22}$$

Desta forma, teremos:

$$e = 2 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = e - 2 = 0,71828182846... \Rightarrow x_1 = \frac{1}{0,71828182846...} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,392211... \Leftrightarrow x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \boxed{a_2 = 1 \textit{ e } \frac{1}{x_2} = 0,392211...}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, teremos:

$$\frac{1}{x_2} = 0,392211... \Rightarrow x_2 = 2,549646... \Leftrightarrow x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \boxed{a_3 = 2 \textit{ e } \frac{1}{x_3} = 0,549646...}$$

Prosseguindo com a mesma ideia:

$$\frac{1}{x_3} = 0,549646... \Rightarrow x_2 = 1,819350... \Leftrightarrow x_3 = a_4 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \boxed{a_4 = 1 \textit{ e } \frac{1}{x_4} = 0,819350...}$$

Continuando no mesmo sentido, tem-se:

$$\frac{1}{x_4} = 0,819350... \Rightarrow x_4 = 1,220479... \Leftrightarrow x_4 = a_5 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow \boxed{a_5 = 1 \textit{ e } \frac{1}{x_5} = 0,220479...}$$

Dando continuidade ao processo, teremos:

$$\frac{1}{x_5} = 0,220479... \Rightarrow x_5 = 4,535573... \Leftrightarrow x_5 = a_6 + \frac{1}{x_6} \Rightarrow \boxed{a_6 = 4 \textit{ e } \frac{1}{x_6} = 0,535573...}$$

Se dermos prosseguimento ao processo anterior, chegaremos a aproximações cada vez mais precisas do número irracional e*, sob a forma de frações contínuas. Diante*

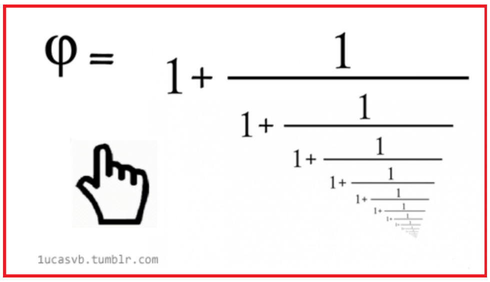
[14] Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático alemão.

do exposto, segue o raciocínio abaixo, que não é uma demonstração matemática mas justifica o resultado obtido por Euler em 1737:

$$e = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \ddots}}}}} \Leftrightarrow e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}$$

5. No GIF da figura abaixo, tem-se $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, o conhecido número de ouro, escrito como uma fração contínua:

Figura 22 – GIF sobre Funções Contínuas



Fonte: Disponível em: <htpps://www.mathmajik.tumblr.com>. Acesso em: 20 set. 2019

Justificativa 5. *Fica como sugestão para o leitor efetuar o procedimento apresentado nos itens* 3 *e* 4 *para construir a representação do número de ouro, o número irracional* $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803398875\ldots$, *sob a forma de frações contínuas.*

6. Lord Brouncker[15], em 1658, expressou em frações contínuas o número $\dfrac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}} \Longleftrightarrow \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ddots}}}}}$$

[15] William Brouncker (1620 – 1684), matemático inglês.

Justificativa 6. *Apresentamos nesta pesquisa o resultado de Brouncker em 1658, devido à sua relevância histórica, mas desconhecemos uma justificativa elementar, a nível de matemática do Ensino Básico, para o resultado. Diferente das justificativas apresentadas nos itens anteriores, como esta foge ao escopo desta pesquisa, sugerimos a um leitor interessado em compreender o resultado de Brouncker, a leitura dos artigos de Jacques Dutka (matemático norte-americano, 1919-2002), que versa sobre produto de Wallis, fração contínua de Brouncker e séries de Leibniz, disponível em: <http://personal.colby.edu/wallisbrouncker.pdf/>, acesso em: 20 mar. 20 e de Thomas J. Osler (Rowan University-EUA), entitulada "A sequência esquecida de Lord Brouncker de frações contínuas para π", disponível em: <https://www.researchgate.net/lord-brounckers-forgotten-sequence-of-continued-fractions-for-pi/>, acesso em: 20 mar. 20.*

3.9.2 Análise pedagógica do Problema 6: OBMEP/2018 1ª Fase Nível 2 (Frações contínuas) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

A primeira das resoluções apresentadas é bem acessível a alunos a partir do 6° ano, pois envolve o conceito de fração e a operação de adição. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades atinentes aos Ensinos Fundamental e Médio, que podem ser abordadas durante ou na sequência da resolução:

> **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
>
> **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
>
> **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
>
> **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
>
> **(EF07MA33)** Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
>
> **(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
>
> **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico,

estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.10 Problema 7: OBMEP/2014 1ª Fase Nível 3 (Fatores primos e o Teorema de Legendre)

O problema a seguir, retirado da prova OBMEP (2014b), é voltado para alunos do ensino médio, mas devido à forma clara e objetiva como, no enunciado, é definido o fatorial de um número maior que 1, o problema pode ser resolvido com êxito por alunos do ensino fundamental, utilizando raciocínio lógico e regras de potenciação.

Iniciaremos a resolução, utilizando conceitos simples de raciocínio e de potenciação, para após, tecermos comentários acerca do Teorema de Legendre, assunto estudado na Teoria dos Números (não presente no currículo da Escola Básica):

PROBLEMA 7 (OBMEP/2014 1ª Fase Nível 3)
O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n ?
(A) 13 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** 18

3.10.1 Resoluções para o Problema 7

1ª resolução - Utilizando regras básicas de potenciação e o raciocínio lógico

Utilizando o conceito definido pelo enunciado, deveremos reagrupar o número $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ de forma que tenhamos $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$, daí, n será a nossa resposta procurada.

Note que n é um número par porque 2 figura na sua expansão e $13 \leq n < 17$, pois 13 é número primo e aparece na expansão e 17 é um número primo mas não aparece na expansão desenvolvida no $n!$ do enunciado. Por outro lado, $n > 13$ já que na expansão o fator 7 aparece duas vezes. Assim, n será 14, 15 ou 16. Então, podemos iniciar uma organização de $n!$ conforme segue:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2^2) \cdot 5 \cdot (2 \times 3) \cdot 7 \cdot (2^3) \cdot (3^2) \cdot (2 \times 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \times 3) \cdot 13 \cdot (2 \times 7) \cdot (3 \times 5) \cdot (2^4)$$

Pode verificar-se que todos os fatores primos da expansão de $n!$ foram utilizados, ou seja, reorganizamos os quinze fatores 2, seis fatores 3, três fatores 5, dois fatores 7, um fator 11 e um fator 13. Efetuando os produtos da equação acima, teremos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16! \Rightarrow \boxed{n = 16}$$

E a resposta correta a ser assinalada é **(D)**.

2ª resolução - Utilizando o Teorema de Legendre

Antes de iniciarmos a próxima resolução, faz-se necessário apresentar as definições de **parte inteira de um número real** e de **função de Legendre**, provenientes, respectivamente de Rufino e Pinheiro (2010, p. 250) e e de Andreescu e Andrica (2009, p. 135-140), como segue:

Definição 5. *A **parte inteira de um número real** x é denotada por $\lfloor x \rfloor$ que é o maior inteiro menor ou igual a x.*

Definição 6. *Seja um número primo p, denota-se por $V_p\,(a)$ o expoente de p na decomposição em fatores primos do número a*

Definição 7. *Para qualquer inteiro positivo n, definimos a função aritmética E_p como **função de Legendre** associada ao primo p, estando relacionada com a função V_p através da relação $E_p\,(n) = V_p\,(n!)$.*

Pelo fato do enunciado do problema apresentar a notação de fatorial ($n!$), podemos resolvê-lo utilizando o teorema a seguir, denominado **Teorema de Legendre**[16], advindo de Hefez (2016, p. 153):

Teorema 3.10.1 (Teorema de Legendre)**.** *Sejam n um número natural e p um número primo. Então*

$$E_p\,(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \tag{3.23}$$

Note, inicialmente que o resultado da equação 3.23 é finita, pois existe um número natural r tal que $p^i > n$ para todo $i \geq r$; portanto $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0$, se $i \geq r$.

Demonstração. A demonstração do Teorema de Legendre foge ao escopo deste trabalho. Para uma demonstração formal do mesmo, sugerimos a leitura de Hefez (2016, p. 153-154). □

Atendendo a que $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, devemos utilizar o Teorema de Legendre da seguinte forma:

[16] Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), matemático francês.

Determinar n tal que $E_2(n!) = 15$, ou seja, n é o menor número natural tal que 2^{15} divide $n!$. Com isso, teremos:

$$E_2(n!) = 15 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor = 15$$

Note que $2^4 = 16 \ > \ 15$ e as parcelas restantes seriam nulas. Devemos perceber que a soma das partes inteiras dos quocientes é menor que a soma desses mesmos quocientes. Assim,

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} \geq 15 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor$$

A seguir, desenvolveremos a desigualdade:

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} \geq 15 \Rightarrow \frac{15 \cdot n}{16} \geq 15 \Rightarrow \boxed{n \geq 16}$$

Agora, devemos analisar que necessariamente, $n < 17$, senão constaria algum fator primo de 17 ao decompor $n!$. Diante do exposto, conclui-se que $\boxed{n = 16}$.

3.10.2 Análise pedagógica do Problema 7: OBMEP/2014 1ª Fase Nível 3 (Fatores primos e o Teorema de Legendre) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

Com base na primeira resolução apresentada, entendemos que, pelo fato da boa clareza do enunciado mesmo em se tratando de um conteúdo inserido no currículo de Ensino Médio (a ideia de Fatorial de um número), alunos do Ensino Fundamental, preferencialmente do 9° ano, estão aptos a desenvolverem-na, pois utilizam-se conhecimentos de fatoração e de potenciação; já na segunda resolução, utilizamos conteúdos de Teoria dos Números, o Teorema de Lagrange, que não é delimitado pela BNCC, estando fora do currículo da Escola Básica. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades referentes aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas resoluções do problema:

> **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
>
> **(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico,

estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.11 Problema 8: Banco de Questões OBMEP Nível 3/2018 (Radicais de Ramanujan)

O problema a seguir foi extraído do nível 3 do BANCO (OBMEP, 2018a, p. 51). Pode ser trabalhado utilizando a identificação de padrões nas sequências de radicais junto da racionalização de denominadores. Também podemos apresentar o assunto da assertiva **(B)**, que em 1911 foi proposto por Ramanujan[17], como uma oportunidade para solucionar radicais infinitos, conhecido como Radicais de Ramanujan[18].

PROBLEMA 8 (Banco de Questões OBMEP Nível 3/2018)

(A) Qual o valor de

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

(B) Se $x = \sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+\sqrt{3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\cdots}}}}}}$ é um número real, qual o seu valor?

3.11.1 Resoluções para o Problema 8

1ª resolução - Observando os padrões, racionalizando e eliminando simétricos

A resolução da assertiva **(A)** utiliza conceitos de racionalização e cancelamento de termos simétricos e devemos identificar o padrão das frações. Observe a reorganização dos denominadores das frações e a racionalização dos dois primeiros termos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\boxed{\sqrt{2}-1}$$

[17] Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 – 1920), matemático indiano.

[18] O problema da assertiva **(B)** já teve ocorrência no torneio matemático Harvard-MIT (2000).

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Observando o padrão gerado acima e efetuando a racionalização em todas as frações da sequência, teremos o seguinte:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} \cdot \left(\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{100}-\sqrt{99}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99} =$$

$$= \cancel{\sqrt{2}}\underbrace{-1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{4}}+\cancel{\cdots}+\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{98}}+\underbrace{\sqrt{100}}-\cancel{\sqrt{99}} =$$

$$= -1+\sqrt{100} = \boxed{9}$$

Para a assertiva **(B)**, iremos utilizar, com adaptações, a forma de resolução apresentada no BANCO (OBMEP, 2018a, p. 156), que usa a identificação/análise de padrões. Observe a seguinte sequência de quadrados de inteiros positivos

$$\begin{array}{rcr}
3^2 = 1+8 = 1+2\cdot 4 & & \\
4^2 = 1+15 = 1+3\cdot 5 & \Rightarrow & 4 = \sqrt{1+3\cdot 5} \\
5^2 = 1+24 = 1+4\cdot 6 & \Rightarrow & 5 = \sqrt{1+4\cdot 6} \\
6^2 = 1+35 = 1+5\cdot 7 & \Rightarrow & 6 = \sqrt{1+5\cdot 7} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n^2 = 1+n^2-1 = 1+(n-1)\cdot(n+1) & \Rightarrow & n = \sqrt{1+(n-1)\cdot(n+1)}
\end{array}$$

Podemos então iterar cada uma das equações anteriores de modo a obtermos

$$3^2 = 1+2\cdot 4$$

$$3^2 = 1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot 5}$$

$$3^2 = 1+2\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot 6}}$$

$$3^2 = 1+2\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot 7}}}$$

A partir do padrão apresentado no processo para a construção de novos radicais, sequencialmente, no interior de expressões anteriores, podemos conjecturar que será produzido à direita da igualdade, uma quantidade infinita de radicais sobrepostos e isso não alterará o valor que está à esquerda da igualdade (o valor 3), sendo este valor o limite da sequência cujo termo geral se apresenta no segundo membro, evidenciando o seguinte raciocínio:

$$3^2 = 1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{\cdots}}}} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{\cdots}}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \sqrt{1 + 5 \cdot \sqrt{1 + 6 \cdot \sqrt{1 + 7 \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot \sqrt{\cdots}}}}}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Observação: A título de informação, uma demonstração formal e rigorosa sobre a convergência desta sequência infinita de radicais, possui como pré-requisitos necessários à compreensão, tópicos de Ensino Superior, portanto, foge ao escopo desta pesquisa.

2ª resolução - Falar sobre os radicais de Ramanujan

Antes de solucionarmos o radical infinito de Ramanujan[19], devemos observar o comportamento de uma sequência infinita de radicais em soma, para a partir daí, utilizarmos o raciocínio adequado. Antes disso, apresentaremos algumas definições e resultados (sem demonstrações) sobre séries infinitas de radicias em soma[20], visando familiarização com os termos exibidos nesta resolução:

Definição 8. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma simples*** *como o seguinte resultado, com* $x > 0$

$$\boxed{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots \infty}}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}}.$$

Definição 9. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma com termo fora da raiz*** *como o seguinte resultado, com* $x > 0$ *e* $y > 0$

$$\boxed{\sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x + \ldots \infty}}}} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}}.$$

Definição 10. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma com termos em produto e um termo fora da raiz*** *como o seguinte resultado,* $\forall\ xy \in \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\sqrt{xy + z\sqrt{xy + z\sqrt{xy + z\sqrt{xy + \ldots \infty}}}} = \frac{z + \sqrt{z^2 + 4xy}}{2}}.$$

[19] Uma solução do problema consta no Blog norte-americano Mind your Decisions, de Tawalkar (2016), disponível em: <https://mindyourdecisions.com/ramanujans-nested-radical/>. Acesso em: 5 dez. 2019.

[20] Recomendamos a leitura do artigo “Ramanujan’s route to roots of roots” de B. Sury, disponível em: <https://www.isibang.ac.in/ sury/ramanujanday.pdf>. Acesso em: 5 dez. 2019 .

Definição 11. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma com produto de termos consecutivos*** *como o seguinte resultado,* $\forall\ x(x+1) \in \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\ldots\infty}}}} = x+1}.$$

Definição 12. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma com termos consecutivos e com termo fora da raiz*** *como o seguinte resultado,* $\forall\ x(x+1),\ (x+2) \in \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\sqrt{x(x+1)+(x+2)\sqrt{x(x+1)+(x+2)\sqrt{x(x+1)+\ldots\infty}}} = \frac{(x-2)+\sqrt{5x^2+4}}{2}}.$$

Definição 13. *Define-se uma* ***série infinita de radicias em soma com termo ao quadrado e com termo fora da raiz em progressão aritmética*** *como o seguinte resultado,* $\forall\ x, y > 0$

$$\boxed{\sqrt{x^2+y\cdot\sqrt{x^2+(x+y)\cdot\sqrt{x^2+(2x+y)\sqrt{\cdots\infty}}}} = x+y}$$

Iremos apresentar uma demonstração construtiva do último resultado, a série infinita de radicais em soma com termos em PA, afim de endossarmos esta resolução.

Teorema 3.11.1 (Radicais em Soma com termos em Progressão Aritmética)**.** *Para uma série infinita de radicais em soma com termo ao quadrado e termos em Progressão Aritmética, temos o seguinte resultado:*

$$\sqrt{a^2+b\cdot\sqrt{a^2+(a+b)\cdot\sqrt{a^2+(2a+b)\sqrt{\cdots\infty}}}} = a+b \tag{3.24}$$

Demonstração. Partindo da seguinte identidade, $a+b=\sqrt{(a+b)^2}$, teremos:

$$a+b=\sqrt{(a+b)^2} \quad\Rightarrow\quad a+b=\sqrt{a^2+2ab+b^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a+b=\sqrt{a^2+b(2a+b)}}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a partir de $(2a+b)=\sqrt{(2a+b)^2}$, teremos:

$$(2a+b)=\sqrt{(2a+b)^2} \quad\Rightarrow\quad (2a+b)=\sqrt{(a+(a+b))^2} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2a+b=\sqrt{a^2+2a\cdot(a+b)+(a+b)^2} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2a+b=\sqrt{a^2+(a+b)\cdot(2a+a+b)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{2a+b=\sqrt{a^2+(a+b)\cdot(3a+b)}}$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, a partir de $(3a+b) = \sqrt{(3a+b)^2}$, teremos:

$$(3a+b) = \sqrt{(3a+b)^2} \quad \Rightarrow \quad (3a+b) = \sqrt{(a+(2a+b))^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 3a+b = \sqrt{a^2 + 2a\cdot(2a+b) + (2a+b)^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 3a+b = \sqrt{a^2 + (2a+b)\cdot(2a+2a+b)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3a+b = \sqrt{a^2+(2a+b)\cdot(4a+b)}}\cdots$$

Com isso, teremos o seguinte:

$$a+b = \sqrt{a^2 + b(2a+b)} \quad \Rightarrow \quad a+b = \sqrt{a^2 + b\sqrt{a^2+(a+b)\cdot(3a+b)}} \quad \Rightarrow$$

$$a+b = \sqrt{a^2 + b\sqrt{a^2+(a+b)\cdot\sqrt{a^2+(2a+b)\cdot(4a+b)}\cdots}} \quad \Rightarrow$$

O que significa que:

$$\sqrt{a^2 + b\cdot\sqrt{a^2+(a+b)\cdot\sqrt{a^2+(2a+b)\sqrt{\cdots\infty}}}} = a+b \tag{3.25}$$

$\square$

Utilizaremos o resultado demonstrado acima para solucionar o problema da assertiva **(B)**, então:

$$x = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\cdots}}}}} = \sqrt{1^2+2\sqrt{1^2+3\cdot\sqrt{1^2+4\cdot\sqrt{1^2+5\cdot\sqrt{\cdots}}}}} \quad \Rightarrow$$

$$\text{onde} \quad a^2 = 1^2 \Rightarrow a = 1 \quad \text{e} \quad b = 2$$

$$x = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{\cdots}}}}} = a+b = 1+2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3}$$

Com isso, concluímos o problema que que trata de radicais infinitos.[21]

3.11.2 Análise pedagógica do Problema 8: Banco de Questões OBMEP Nível 3/2018 (Radicais de Ramanujan) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

A primeira resolução, pelo fato de utilizar a visualização dos padrões de uma sequência e racionalização, é acessível a alunos a partir do do 9° ano do Ensino Fundamental e contempla diversas habilidades elencadas na BNCC. Já a segunda resolução, em que se utiliza progressão aritmética como ferramenta principal, está conforme algumas competências e habilidades expressas na BNCC no Ensino Médio. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades relativas aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções para o problema:

[21] Para exercícios de aprofundamento sobre esse tema, sugerimos a leitura de Andreescu, Dospinescu e Mushkarov (2017, p. 44-48), de Araujo (2018, p. 61-81) e de Honsberger (1991, p. 140-144).

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(Competência 4): Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5): Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

3.12 Problema 9: Banco de Questões OBMEP Nível 3/2016 (Desigualdade das Médias, balança e equação)

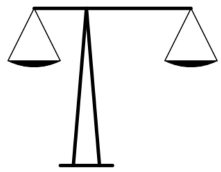
Esta questão, extraída do BANCO (OBMEP, 2016, p. 45, exercício 1), remete-se ao uso de uma balança de pesos e pratos. Há nela o conceito de pesos representados por números inversamente proporcionais ao comprimento de cada braço da balança para se obter o equilíbrio do sistema. Verificaremos a solução utilizando esses conceitos e uma possibilidade de utilizar a balança de pratos para o ensino de equação do 1º grau.

PROBLEMA 9 (Banco de Questões OBMEP Nível 3/2016)
Arquimedes possui uma balança de dois pratos com braços de comprimentos diferentes. Objetivando pesar dois quilos de açúcar, ele procedeu da seguinte forma: colocou um peso de um quilo no prato da esquerda e açúcar no outro lado até que a balança ficasse equilibrada. Em seguida, ele esvaziou os dois pratos, colocou o peso de um quilo no prato da direita e açúcar no prato da esquerda até que os dois pratos ficassem equilibrados. Somando as duas quantidades de açúcar nestas pesagens, ele obteve menos de dois quilos, mais de dois quilos ou exatamente dois quilos?
Observação: Para que ocorra o equilíbrio, os pesos nos pratos devem ser inversamente proporcionais aos comprimentos dos braços correspondentes.

3.12.1 Resoluções para o Problema 9

1ª resolução - Proposta pela OBMEP

Figura 23 – Balança de Arquimedes (I)



Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 135)

De acordo com a Figura 23, denotamos o comprimento do braço da esquerda por p, o da direita por q e por x e y as quantidades pesadas de açúcar na primeira e na segunda pesagem, respectivamente. Em virtude do equilíbrio, podemos escrever

$$1 \cdot p = x \cdot q$$

$$y \cdot p = 1 \cdot q$$

Portanto, a quantidade total de açúcar pesado foi de

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \right)^2 + 2 > 2$$

pois como os braços possuem comprimentos diferentes, temos $\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \right)^2 > 0$

2ª resolução - Utilizando Desigualdade das Médias

Antes de iniciarmos a resolução, cabe ser mencionado o Teorema da Desigualdade das Médias Aritmética-Geométrica:

Teorema 3.12.1 (Desigualdade das Médias Aritmética-Geométrica)**.** *Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números positivos, então*

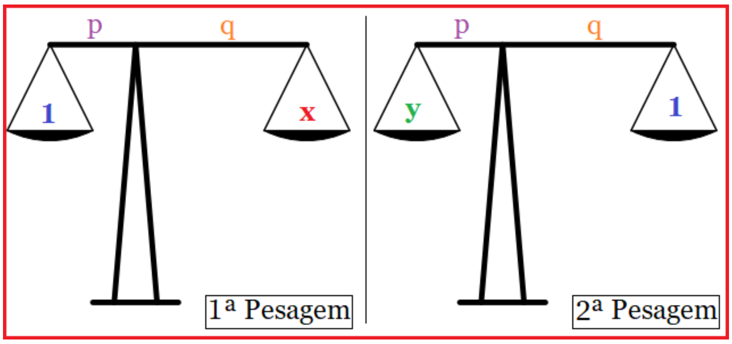
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \tag{3.26}$$

Além disso,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Demonstração. A demonstração da Desigualdade das Médias foge ao escopo deste trabalho. Para uma demonstração formal da mesma, sugerimos a leitura de Morgado e Carvalho (2014, p. 183). □

Figura 24 – Balança de Arquimedes (II)



Fonte: O autor, 2020

Na Figura 24 estão representadas as situações da 1ª e da 2ª pesagens, onde x e y são as quantidades de açúcar nas pesagens, p e q são os comprimentos dos braços da balança esquerdo e direito, respectivamente e, 1 é o peso de 1Kg.

Como em ambas pesagens, o sistema ficou em equilíbrio, podemos entender que:

$$1 \cdot p = x \cdot q \;\Rightarrow\; x = \frac{p}{q}$$

$$y \cdot p = 1 \cdot q \;\Rightarrow\; y = \frac{q}{p}$$

Portanto, utilizando o Teorema (3.12.1), a Desigualdade MA-MG, teremos que a a quantidade total de açúcar pesado foi de :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\frac{\cancel{p}}{\cancel{q}} \cdot \frac{\cancel{q}}{\cancel{p}}} \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{1} \Rightarrow\; x+y \geq 2$$

Como só teríamos a igualdade $x + y = 2$ caso $p = q$ e, devido ao fato de termos $p \neq q$, segue que $\boxed{\text{x+y} > 2}$, que é a resposta do problema.

Uso do Problema para o ensino de Equações de 1º Grau

Após examinarmos o problema acima resolvido, podemos nos utilizar do equilíbrio da balança para obter uma abordagem pedagógica para ensinar conceitos de equações do 1º grau. Sobre essa ideia tem-se por Goldsmith que:

> Uma área da matemática chamada de álgebra pode ser usada para calcular quantidades quando você já possui parte das informações de que precisa. Tudo o que você tem de fazer é equilibrar a equação - um cálculo que equilibra os dois lados de uma balança. (GOLDSMITH, 2016, p. 123)

Figura 25 – Uso da balança para resolver equações de 1º grau

Fonte: (GOLDSMITH, 2016, p.123)

Sobre a Figura 25, temos a seguinte orientação, por parte de Goldsmith:

> Uma equação, como $x = 2 + 1$, pode parecer estranha num primeiro momento, mas há uma maneira fácil de enxergar as equações que o ajudará a resolvê-las. Imagine uma balança antiga, daquelas com um prato pendente em cada extremidade, e que em cada um deles esteja um dos lados da equação. Tudo o que está à esquerda do sinal de igual precisa estar em equilíbrio com o que está à direita. A solução $-$ o valor de x $-$ terá que ter o mesmo valor de tudo o que está do outro lado.Você sabe que $2+1$ é igual a 3, então, para que as escalas estejam equilibradas, x também precisa ser 3. (GOLDSMITH, 2016, p.123)

3.12.2 Análise pedagógica do Problema 9: Banco de Questões OBMEP Nível 3/2016 (Desigualdade das Médias, balança e equação) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

A primeira resolução, a oficial proposta pela OBMEP, possui conceitos abrangidos pela BNCC, tais como razão e frações. Já a segunda resolução utiliza conceitos fora do escopo da BNCC, a Desigualdade das Médias Aritmética-Geométrica. Na terceira parte, apresentam-se comentários de uma possibilidade pedagógica com balanças de pratos e pesos para explicar o conceito de equações do 1º grau. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades relativas aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções e comentários para o problema:

> **(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
>
> **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes

de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

(Competência 3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(Competência 4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

3.13 Problema 10 : Olimpíada Internacional de Matemática (IMO/1959 P.1) (Questão sobre Teoria dos Números acessível ao Ensino Básico)

Embora problemas constantes da Olimpíada Internacional de Matemática (I.M.O) sejam considerados de dificuldade bem elevada, julgamos pertinente trazer para este trabalho alguns deles, com o intuito de desmistificar o fato de que nossos alunos, de um modo geral, não estão aptos a compreender problemas no “estilo IMO”. O primeiro desse estilo de problemas, é o que será apresentado a seguir, oriundo da 1ª Olimpíada Internacional de Matemática[22], realizada no mês de julho de 1959 na cidade de Brasov (Romênia).

[22] Sugerimos a bibliografia Greitzer (1978) que trata das provas IMO de 1959 a 1977.

PROBLEMA 10 (IMO/1959 P.1)
Prove que a fração $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para todo inteiro positivo n.

3.13.1 Resoluções para o Problema 10

1ª resolução - Utilizando propriedades do Máximo Divisor Comum

Apresentaremos o Lema de Euclides, resultado importante sobre o MDC e necessário para a sequência que será trabalhada nesta resolução:

Lema 1. ***(Euclides)*** *Sejam a, b, $n \in \mathbb{Z}$. Se existe $MDC(a\ ,\ b - n \cdot a)$, então $MDC(a\ ,\ b)$ existe e*

$$MDC(a\ ,\ b) \ = \ MDC(a\ ,\ b - n \cdot a)$$

(HEFEZ, 2016, p. 75)

Demonstração. Seja $d = \text{MDC}(a\ ,\ b - n \cdot a)$. Como $d|a$ e $d|(b - n \cdot a)$, segue que d divide $b = b - n \cdot a + n \cdot a$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b - n \cdot a$ e, portanto, $c|d$. Isso prova que $d = \text{MDC}(a\ ,\ b)$. □

Sabemos que uma fração é irredutível quando o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador vale 1. Posto isso, iremos aplicar duas vezes o Lema de Euclides no MDC entre $(21n + 4, 14n + 3)$ e se ao final, resultar em 1, a prova estará concluída. Teremos:

$$\text{MDC}(21n+4, 14n+3) = \text{MDC}(21n+4-14n+3, 14n+3) = \text{MDC}(7n+1, 14n+3) =$$

$$\text{MDC}(7n+1, 14n+3-[2\cdot(7n+1)]) = \text{MDC}(7n+1, 1) = 1 \Rightarrow \text{MDC}(21n+4, 14n+3) = 1$$

2ª resolução - Utilizando propriedades de divisibilidade

Vamos utilizar a propriedade de divisibilidade de um inteiro d. Caso d divida dois números inteiros, então ele divide os múltiplos desses dois números, somas entre esses múltiplos e também diferenças. Tem-se que:

$d|A$ e $d|B \Rightarrow d|3B - 2A$. Então ao tomarmos $A = 21n + 4$ e $B = 14n + 3$, teremos que:

$$d|3\cdot(14n+3) - 2\cdot(21n+4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad d|1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 1}$$

Segue o numerador e o denominador são primos entre si, pois d é um divisor comum do numerador e do denominador e, ainda, divide 1, portanto, a fração não pode ser simplificada.

3ª resolução - Utilizando propriedades de simplificação de frações

Note que se $\dfrac{a}{b} = e + \dfrac{c}{b}$, com (a, b, c, e) inteiros então $c = a - be$ e $a = c + be$, consequentemente os divisores comuns de a e b também dividem c. Da mesma forma, os divisores comuns de c e b dividem a. Por essa razão, $\dfrac{a}{b}$ pode ser simplificado se, e só se $\dfrac{c}{b}$ puder ser simplificado; e o mesmo vale para $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{b}{a}$. Teremos:

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3} \quad \text{e} \quad \frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1}$$

e o último termo não pode ser simplificado, o mesmo se aplicando à nossa expressão original, ou seja, é irredutível.

3.13.2 Análise pedagógica do Problema 10 : Olimpíada Internacional de Matemática (IMO/1959 P.1) (Questão sobre Teoria dos Números acessível ao Ensino Básico) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

Além de ser um problema oriundo da IMO/1959, foi também proposto na Avaliação Nacional nº 1 da disciplina Aritmética do Mestrado PROFMAT em 2012 (AV1-MA14 2012 Profmat). Refere-se aos assuntos divisibilidade, números primos, máximo divisor comum e irredutibilidade de frações, com uma abordagem mais profunda. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades referentes aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas nas soluções para o problema:

> **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
>
> **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
>
> **(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
>
> **(Competência 3)** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.14 Problema 11 : Olimpíada Internacional de Matemática - IMO/2005 P.1 (Solução geométrica, acessível ao Ensino Básico)

O problema a seguir foi extraído da Olimpíada Internacional de Matemática (I.M.O) de 2005, competição realizada em julho daquele ano na cidade de Mérida (México). Como é habitual, problemas de matemática de nível IMO[23] apresentam um grau de dificuldade bem elevado. Mas como a matemática sempre pode nos apresentar abordagens novas, faremos uma apresentação utilizando conteúdos e ideias totalmente acessíveis aos alunos da escola básica, no nível fundamental.

PROBLEMA 11 (IMO/2005 P.1)
Seis pontos são escolhidos sobre os lados de um triângulo equilátero ABC: A_1, A_2 sobre $\overline{BC}$; B_1, B_2 no $\overline{AC}$ e C_1, C_2 em $\overline{AB}$, de tal modo que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ são os vértices de um hexágono convexo com todos os lados iguais.
Prove que que os segmentos A_1B_2, B_1C_2 e C_1A_2 são concorrentes.

3.14.1 Resolução para o Problema 11

Uma resolução acessível de geometria [24]

Antes de uma abordagem mais conceitual de matemática, induziremos o leitor a um exercício imaginativo no qual observando-se a Figura 26, a partir do maior triângulo, deslizaremos os vértices dos triângulos congruentes coloridos (o verde, o azul e o vermelho), como se os triângulos fossem pecinhas de madeira, através dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, de modo que em cada um desses lados, a medida x (lado do hexágono) será nula, resultando assim, na construção de um triângulo equilátero menor, de lado $\overline{AB}$ e que tem no seu interior um triângulo equilátero de lado medindo x.

Em uma abordagem mais conceitual, a primeira parte da Figura 26 mostra a configuração inicial do problema, ou seja, temos um hexágono convexo de lados $\overline{A_1C_2} = \overline{B_2C_1} = \overline{A_2B_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_1A_2} = x$, cujos vértices pertencem aos lados de um triângulo equilátero.

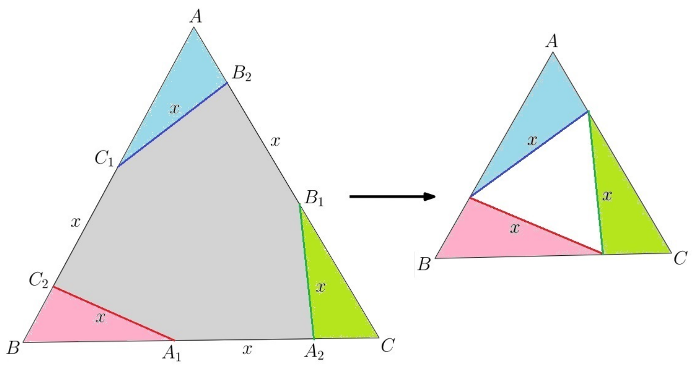
A segunda parte da Figura 26 mostra a ideia descrita anteriormente e que iremos utilizar para a demonstração do problema. Vamos fazer o seguinte procedimento: iremos "deslizar" o ponto A_1 sobre o lado $\overline{BC}$ de tal forma que A_1 coincida com A_2, fazendo com

[23] Sugerimos a compilação feita por Djukic et al. (2011) que trata das provas IMO de 1959 até 2009.
[24] A resolução apresentada é uma adaptação da proposta em Shine (2009, p. 145-155).

que o segmento $\overline{A_1A_2} = x$ se reduza a um ponto e que, assim, o segmento $\overline{BC}$ diminua a sua medida inicial. Faremos o mesmo processo com os pontos B_1 e B_2 do lado $\overline{AC}$ e com os pontos C_1 e C_2 do lado $\overline{AB}$. Com isso, geramos a segunda parte da Figura 26.

Note que, ainda continuamos com $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$, o triângulo ABC é equilátero e surgiu um triângulo equilátero menor, inscrito nele, cujo lado mede x (a mesma medida do lado do hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$).

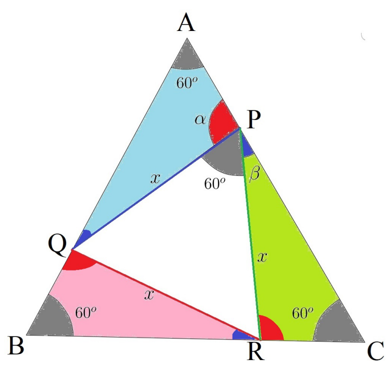
Figura 26 – IMO 2005 problema de geometria plana (I)



Fonte: O autor, 2020

Repare que no triângulo ABC obtido por supressão dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ existem três triângulos nos vértices, representados a colorido na figura e um triângulo, central, equilátero. Observe a Figura 27, nela tem-se que $\widehat{CPR} + \widehat{RPQ} + \widehat{QPA} = 180°$, designando $\widehat{QPA}$ por α e $\widehat{CPR}$ por β, como $\widehat{RPQ} = 60° = \widehat{PQR} = \widehat{PRQ}$, decorre, então, que $\widehat{AQP} = \beta$ e que $\widehat{CRP} = \alpha$ e que $\widehat{BQR} = \alpha$ e $\widehat{BRQ} = \beta$. Note ainda, que todos os triângulos possuem os ângulos cujas medidas são α (em vermelho), β (em azul) e 60°, além de um lado medindo x. Assim, os triângulos coloridos são todos congruentes pelo caso $LAA_{\circ}$, (lado x ($x = \overline{QP} = \overline{QR} = \overline{RP}$), ângulo α (em vermelho) e ângulo oposto a α (=60°)). Observando a primeira parte da Figura 26, vemos que são congruentes os $\triangle AB_2C_1$, $\triangle BA_1C_2$ e $\triangle CB_1A_2$

Figura 27 – IMO 2005 problema de geometria plana (II)

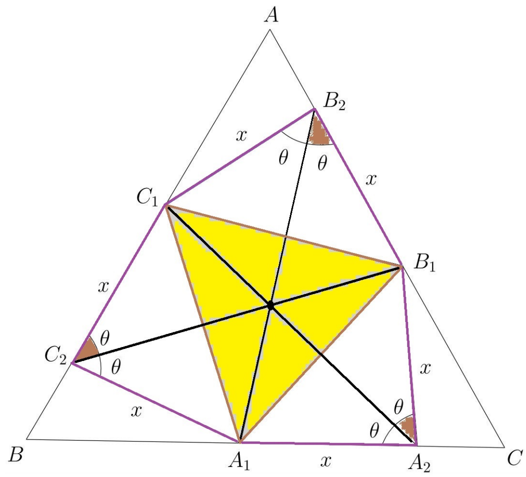


Fonte: O autor, 2020

Observando a Figura 26, note que serão congurentes os $\triangle C_1B_2B_1$, $\triangle A_1C_2C_1$ e $\triangle A_1A_2B_1$, pois todos eles possuem dois lados de medida x e o ângulo formado por eles medindo $\beta + 60°$ (note que $\angle A_1C_2C_1 = \angle C_1B_2B_1 = \angle B_1A_2A_1 = \beta + 60°$, que é a mesma medida de um dos ângulos externos dos $\triangle BQR$, $\triangle AQP$ e $\triangle CPR$ da Figura 26) , decorre dessa conguência que $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{A_1B_1}$, ou seja, o $\triangle A_1B_1C_1$ é equilátero.

Perceba, pela Figura 28, que $\overline{C_1A_2}$ é mediatriz do segmento $\overline{A_1B_1}$ devido ao fato de termos $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1A_2}$ e $\overline{C_1A_1} = \overline{C_1B_1}$. De modo inteiramente análogo, temos $\overline{A_1B_2}$ sendo mediatriz do segmento $\overline{C_1B_1}$ e o segmento $\overline{B_1C_2}$ sendo mediatriz do segmento $\overline{C_1A_1}$.

Figura 28 – IMO 2005 problema de geometria plana (III)



Fonte: O autor, 2020

Como $\overline{A_1B_2}$, $\overline{B_1C_2}$ e $\overline{C_1A_2}$ são todas mediatrizes no $\triangle A_1B_1C_1$, elas concorrem num único ponto, chamado circuncentro do $\triangle A_1B_1C_1$, e isso conclui a demonstração. ■

3.14.2 Análise pedagógica do Problema 11 : Olimpíada Internacional de Matemática - IMO/2005 P.1 (Solução geométrica, acessível ao Ensino Básico) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

O problema acima, que é o P.1 oriundo da IMO/2009, abarca assuntos predominantemente de geometria plana. Em resumo, são utilizados como ferramentas para a resolução, conceitos de classificação de triângulos, congruência de triângulos e pontos notáveis em triângulos. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue o rol apresentando as competências e as habilidades atinentes aos Ensinos Fundamental e Médio, utilizadas na solução do problema:

> **(EF06MA26)** Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
>
> **(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e

verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(Competência 3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(Competência 4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(Competência 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.15 Problema 12 : Olimpíada Internacional de Matemática (IMO/1963 P.5) (Problema demonstrável por diversas formas)

O problema a seguir, retirado da IMO de 1963, realizada em Breslávia (Polônia) é aparentemente enquadrado como sendo de trigonometria. Trata-se de um problema ocorrido na 5ª edição da Olimpíada Internacional de Matemática cuja abordagem pode ser feita conforme veremos a seguir:

PROBLEMA 12 (IMO/1963 P.5)

Prove que $cos\ \dfrac{\pi}{7} - cos\ \dfrac{2\pi}{7} + cos \dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$

3.15.1 Resoluções para o Problema 12

1ª resolução - Utilizando Números Complexos[25]

Seja $z = cos\frac{\pi}{7} + i \cdot sen\ \frac{\pi}{7}$. Então $z^7 + 1 = 0$, como $z \neq 1$ e $z^7 + 1 = (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$, tem-se que o segundo fator do produto anterior é zero. Essa condição é equivalente a $z^3 - z^2 + z = \dfrac{1}{1 - z^3}$.

A soma dada é

$$cos\ \frac{\pi}{7} - cos\ \frac{2\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} = Re(z^3 - z^2 + z) = Re\left(\frac{1}{1 - z^3}\right)$$

Temos que demonstrar $Re\left(\dfrac{1}{1 - z^3}\right) = \dfrac{1}{2}$. E essa relação decorre do seguinte lema:

[25] Solução traduzida de Andreescu e Andrica (2006, p. 218).

Lema 2. *Se* $z = cos\theta + i \cdot sen\ \theta \quad e \quad z \neq 1, \quad então \quad Re\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$

Demonstração.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)} = \frac{1}{(1-cos\ \theta) - i \cdot sen\ \theta} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot sen^2\ \frac{\theta}{2}\ -\ 2i \cdot sen\ \frac{\theta}{2} \cdot cos\ \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2 \cdot sen\ \frac{\theta}{2}\left(sen\ \frac{\theta}{2}\ -\ i \cdot cos\ \frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{sen\ \frac{\theta}{2} + i \cdot cos\ \frac{\theta}{2}}{2 \cdot sen\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{cos\ \frac{\theta}{2}}{2 \cdot sen\ \frac{\theta}{2}} \Rightarrow Re\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$$

□

2ª resolução - Utilizando Identidades Trigonométricas

Inicialmente, devemos perceber que:

$$-cos\ \frac{2\pi}{7} = cos\ \frac{5\pi}{7} \quad [1] \quad \text{e que} \quad sen\ \frac{6\pi}{7} = sen\ \frac{\pi}{7} \quad [2]$$

Queremos mostrar que $cos\ \dfrac{\pi}{7} - cos\ \dfrac{2\pi}{7} + cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$. Note que:

$$cos\ \frac{\pi}{7} \underbrace{-\cos\ \frac{2\pi}{7}}_{[1]} + cos\frac{3\pi}{7} = cos\ \frac{\pi}{7} + cos\ \frac{5\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} = cos\ \frac{\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} + cos\ \frac{5\pi}{7} \quad [3]$$

Iremos utilizar a seguinte identidade trigonométrica, com os parâmetros $n = 3$ e $\theta = \dfrac{\pi}{7}$:

$$cos\ \theta + cos\ 3\theta + cos\ 5\theta + \cdots + cos\ (2n-1)\theta = \frac{sen\ (2 \cdot n \cdot \theta)}{2 \cdot sen\ \theta}$$

$$cos\ \frac{\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} + cos\ \frac{5\pi}{7} = \frac{sen\left(2 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{7}\right)}{2 \cdot sen\ \frac{\pi}{7}} = \frac{\overbrace{sen\ \frac{6\pi}{7}}^{[2]}}{2 \cdot sen\ \frac{\pi}{7}} = \frac{\cancel{sen\ \frac{\pi}{7}}}{2 \cdot \cancel{sen\ \frac{\pi}{7}}} = \frac{1}{2}$$

$$\overbrace{cos\ \frac{\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} + cos\ \frac{5\pi}{7}}^{[3]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{cos\ \frac{\pi}{7} - cos\ \frac{2\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}}$$

3ª resolução - Utilizando Equações Trigonométricas e Relações de Girard

Note que $3 \cdot \frac{\pi}{7} + 4 \cdot \frac{\pi}{7} = \pi$, $3 \cdot \frac{3\pi}{7} + 4 \cdot \frac{3\pi}{7} = 3\pi$ e $3 \cdot \frac{5\pi}{7} + 4 \cdot \frac{5\pi}{7} = 5\pi$, então $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$ e $\frac{5\pi}{7}$ são soluções da equação

$$cos\ 4x = -cos\ 3x \ \Rightarrow\ cos\ 4x + cos\ 3x = 0 \ \Rightarrow\ 2 \cdot cos\ \frac{7x}{2} \cdot cos\ \frac{x}{2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ cos\ \frac{7x}{2} = 0 \text{ ou } cos\ \frac{x}{2} = 0.$$

Parte 1: Resolver a equação $cos\ \frac{7x}{2} = 0$ em $[0, 2\pi]$:

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$$

Perceba que

$$cos\ \frac{\pi}{7} = cos\ \frac{13\pi}{7},\ cos\ \frac{3\pi}{7} = cos\ \frac{11\pi}{7} \ \text{ e } \ cos\ \frac{5\pi}{7} = cos\ \frac{9\pi}{7}$$

Com isso, há 4 soluções distintas: $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ e π

Parte 2: Resolver a equação $cos\ \frac{x}{2} = 0$ em $[0, 2\pi]$:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow\ x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi \text{ é a única solução}$$

Por outro lado, temos que:

$$cos\ 4x = 8\ cos^4\ x - 8\ cos^2\ x + 1 \text{ e } cos\ 3x = 4\ cos^3\ x - 3\ cos\ x$$

$$cos\ 4x = -cos\ 3x \ \Rightarrow\ 8\ cos^4\ x + 4\ cos^3\ x \ - 8\ cos^2\ x - 3\ cos\ x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = 0, \text{ onde } t = cos\ x.$$

Claramente -1 é raiz desse polinômio. Temos então que $8t^4 + 4t^3 - 8t^2 - 3t + 1 = (t+1)(8t^3 - 4t^2 - 4t + 1)$ e o polinômio $8t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ tem como raízes $cos\ \frac{\pi}{7}, cos\ \frac{3\pi}{7}, cos\ \frac{5\pi}{7}$.

Pelas Relações de Girard, temos:

$$cos\ \frac{\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} + cos\ \frac{5\pi}{7} = \frac{-(-4)}{8} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \boxed{cos\ \frac{\pi}{7} - cos\ \frac{2\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}}$$

4ª resolução - Utilizando Exponencial Complexa (Cosseno de Euller) e Progressão Geométrica

Sabemos que $cos\ \alpha = \dfrac{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}}{2}$. A partir disso, temos que:

$$cos\ \frac{\pi}{7} - cos\ \frac{2\pi}{7} + cos\ \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{-i\cdot\pi}{7}} + e^{\frac{i\cdot\pi}{7}}}{2} + \frac{e^{\frac{-2i\cdot\pi}{7}} + e^{\frac{2i\cdot\pi}{7}}}{2} + \frac{e^{\frac{-3i\cdot\pi}{7}} + e^{\frac{3i\cdot\pi}{7}}}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

Fazendo $w = e^{\frac{i\cdot\pi}{7}}$, temos que:

$$\frac{w^{-1} + w^1}{2} - \frac{w^{-2} + w^2}{2} + \frac{w^{-3} + w^3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow w^{-1} + w^1 - w^{-2} - w^2 + w^{-3} + w^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + w^2}{w} - \frac{1 + w^4}{w^2} + \frac{1 + w^6}{w^3} = 1 \Leftrightarrow w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Note que o primeiro membro da útima equação é a soma dos termos de uma progressão geométrica. Pela soma dos termos da progressão geométrica, teremos:

$$\Leftrightarrow S_7 = \frac{1 \cdot [(-w)^7 - 1]}{(-w) - 1} = \frac{-w^7 - 1}{-w - 1} = \frac{-(-1) - 1}{-w - 1} = 0, \text{ pois } w^7 = e^{i\pi} = cos\ \pi + i\cdot sen\ \pi = -1$$

Então a identidade da Equação 3.27 é verdadeira.

5ª Solução - Uma segunda abordagem utilizando números complexos[26]

Seja[27]

$$\zeta = \exp \frac{2\pi i}{7} = cos \frac{2\pi}{7} + isen \frac{2\pi}{7}.$$

Temos $1 - \zeta^7 = 0$ donde $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = (1 - \zeta^7)/(1 - \zeta) = 0$ e portanto $\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = -1$. Temos

$$cos \frac{2k\pi}{7} = \frac{1}{2}(\zeta^k + \zeta^{-k});$$

[26] Esta solução foi apontada pelo Prof. Dr. Nicolau Corção Saldanha, da PUC-RJ, membro convidado para compor a banca examinadora desta pesquisa. O Professor Nicolau, quando aluno, foi o primeiro brasileiro a conquistar uma medalha de ouro *perfect score* na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), nos EUA, em 1981. Disponível em: <https://www.imo-official.org/hall-of-the-fame/>. Acesso em: 20 mar. 2020.

[27] Notação exponencial para números complexos utilizada nesta questão: $\zeta = \exp(\theta \cdot i) = cos\ \theta + isen\ \theta$, com $0 \leq \theta \leq 2k\pi$.

em particular

$$cos\frac{\pi}{7} = -cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}(\zeta^3+\zeta^4), \qquad cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}(\zeta+\zeta^6),$$
$$cos\frac{3\pi}{7} = -cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{2}(\zeta^2+\zeta^5)$$

donde

$$cos\frac{\pi}{7} - cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} = -\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^6) = \frac{1}{2}.$$

3.15.2 Análise pedagógica do Problema 12 : Olimpíada Internacional de Matemática (IMO/1963 P.5) (Problema demonstrável por diversas formas) à luz das soluções apresentadas e da BNCC

O problema foi solucionado de 5 formas distintas, ele foi proposto na 5ª Olimpíada Internacional de Matemática, em 1963. A princípio, é um problema de trigonometria, mas possui uma riqueza tão grande, que podemos solucioná-lo utilizando ferramentas de trigonometria (identidades trigonométricas e equações trigonométricas), utilizando números complexos, utilizando equações polinomiais (relações de Girard), utilizando Progressões Geométricas e Exponencial Complexa (Cosseno de Euler). A maioria desses assuntos elencados nas soluções, mesmo já tendo sido pertencentes ao currículo escolar, não são mais delineados pela BNCC. Em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018), segue a lista apresentando as competências relativas aos Ensinos Médio, utilizadas nas soluções para o problema:

> **(Competência 3)** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> **(Competência 4)** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> **(Competência 5)** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

4 EXPLORAÇÃO DO POTENCIAL PEDAGÓGICO DE MEMES E GIFS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

4.1 Uma breve introdução acerca da Teoria das Representações de Duval

Segundo Duval (1995, p. 15)[1], ensinar matemática é, antes de tudo, propiciar situações para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

No campo da análise do conhecimento, há uma grande discussão entre a diferença intrinseca um de objeto matemático e a sua representação. Nesse campo de estudos, o aprendizado é estudado por meio de uma abordagem cognitiva que leva em consideração a importância das *representações semióticas*[2] na matemática e a variedade destas representações que nela são utilizadas.

A compreensão matemática requer a associação de vários desses registros de representação citados e como bem sabemos, há uma grande dificuldade para compreendê-la, por parte de alunos, o que é, em parte devido à confusão entre o objeto matemático e sua representação. Segundo Duval (1993):

> O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto. (DUVAL, 1993, p. 53)

Para Duval (2009), existe a possibilidade para solucionar esse problema e, consequentemente, corroborando com a compreensão correta entre o objeto matemático e a sua representação. Para isso seria a realização da *conversão*, que é tratada pelo autor como uma transformação que se faz de uma representação semiótica para outra, fazendo referência ao mesmo objeto, ou seja, é mudada a forma (representante), mas não se muda o objeto (representado). Veremos a seguir, como seria essa possibilibade de solução.

Podemos usar, a título de exemplo para essa conversão, o ensino dos produtos notáveis e fatoração, assunto em que os alunos revelam manifesta dificuldade. Trata-se de um assunto que tem uma acepção preponderantemente algébrica e abstrata, mas podemos representá-lo sob um prisma geométrico, utilizando áreas de quadrados e de retângulos, abordagem que possui um aspecto completamente visual. Com isso, efetuamos uma

[1] Antes de iniciarmos o assunto propriamente dito do presente capítulo, iremos ressaltar algumas ideias de Raymond Duval, Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale − Dunquerque (França).

[2] Segundo Duval (1993), um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente. São considerados três tipos de registros de representação: o figural, o simbólico e o da língua natural. As representações semióticas têm dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado).

transformação que se faz de uma representação semiótica para outra, fazendo referência ao mesmo objeto (representado), os produtos notáveis e fatoração, mas alterando a forma (representante), da álgebra para a geometria.

4.2 O aluno da Geração Z, os Memes e os GIF

O jovem nascido a partir do ano 2000 é classificado como “jovem da geração Z”, ele faz parte de uma geração nascida quando a internet era uma realidade presente no seu cotidiano. Segundo pesquisa realizada por Dado Shneider[3], em 2017[4], esses jovens são praticamente conectados à rede. Esse é o mundo dessa nova geração, aonde um fato ocorrido em outro país, uma viagem de um parente, uma festa de aniversário de um colega, entre muitas outras coisas, são fatos compartilhados em tempo real. É um mundo globalizado e tecnológico no qual a informação viaja a uma velocidade surpreendente e os acontecimentos estão à distância de um clique. O jovem da geração Z traz consigo essa velocidade para consumir informação.

Nesse contexto, tudo se torna muito rápido e alguma informação um pouco mais lenta ou que requeira um pouco mais de paciência para ser entendida se torna, muitas das vezes chata e enfadonha. Esse é o perfil de massa do jovem atual, dos 11 aos 17 anos, que se senta nos bancos escolares no segundo segmento do Ensino Fundamental e no final do Ensino Médio. É o aluno da “Geração Z”.

Assim, em tempos atuais, temos informações trazidas por uma curta imagem que circula velozmente pelas redes sociais, a figura do **Meme**. Segundo Silva (2014), o termo “Meme” foi criação do biólogo britânico Richard Dawkins, no livro O Gene Egoísta, cuja intenção era nomear uma unidade de informação cultural – assim como “gene” é uma unidade de informação genética. Numa busca por uma palavra que lembrasse gene, o autor reduziu o termo grego *mimesis* (imitação). O mundo hoje em dia se apropriou, e muito, dos Memes, pois são informações rápidas trazidas no contexto de uma simples foto. O aluno da geração Z adora Memes.

A seguir, na Figura 29, tem-se um Meme onde recorrendo a uma cena do filme Os Vingadores Ultimato, 2019, em que um personagem recebe altas cargas de Radiação Gama, se satiriza o tempo de espera da publicação de resultados pela comunidade científica.

---

[3] Dado Schneider é Graduado em Comunicação e Pós-Graduado em Marketing pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, além de Mestre e Doutor em Comunicação pela PUC/RS. Trabalhou em grandes agências de publicidade nacionais, como MPM, Ogilvy e DM9. Foi considerado pelo site BuzzFeed como “um dos palestrantes imperdíveis da Campus Party”, de onde passou a ser embaixador. Campus Party é o maior festival de inovação e tecnologia do mundo, contando com 22 anos de história.

[4] Disponível em: <https://gauchazh.clicrbs.com.br/comportamento/noticia/2017/10/geracao-2000-professor-detecta-mudancas-radicais-nos-ultimos-anos>. Acesso em: 10 ago. 2019.

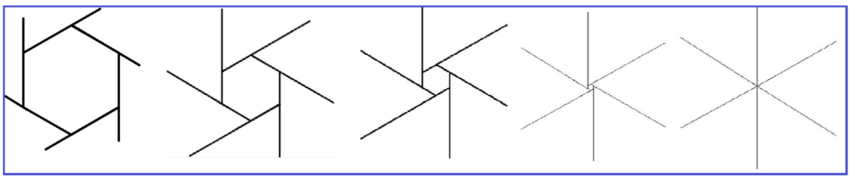
Figura 29 – Meme do Filme Os Vingadores Ultimato

Fonte: Canal <https://www.instagram.com/humorquantico/>. Acesso em: jan. 2020.

Um outro formato de imagem bastante utilizado na internet e nas redes sociais, foi lançado pela CompuServe, em 1987, visando disponibilizar um formato de imagem com cores para substituir um formato mais antigo o RLE, que usava apenas o preto e branco. Esse é o formato **GIF** (Graphics Interchange Format ou formato de intercâmbio de gráficos), que possui como características, além de outras, ser utilizado para armazenar ícones e pequenas animações. Dentre diversos tipos de GIF, iremos destacar o comumente chamado de GIF animado. Na verdade ele é composto de várias imagens do formato GIF, compactadas em um só arquivo. Essa variante é utilizada para compactar objetos em jogos eletrônicos e para usar como fonte de pequenas animações.

Na figura seguinte (Figura 30) vemos as imagens do GIF que ilustram que a soma dos ângulos externos de um polígono vale 360°.

Figura 30 – GIF quadro a quadro



Fonte: Blog <https://amandagirao.wordpress.com/>. Acesso em: jan. 2020

Partindo da premissa de que o jovem aluno que atualmente integra nossas escolas necessita de uma informação rápida, útil e de fácil assimilação, associado ao fato de que muitos conteúdos constantes do currículo de matemática da escola básica possuem uma dificuldade de assimilação por parte do aluno, lançaremos mão dos recursos associados à tecnologia, e nas próximas seções, daremos enfoque à utilização de Memes e GIFs, encontrados em diversas fontes da internet, bem como em postagens nas redes sociais, que permitam elucidar conceitos, exemplificar exercícios e fazer abordagens diversificadas em aula.

4.3 Potencial Pedagógico de Memes nas aulas de Matemática

A discussão sobre o uso de recursos digitais e do seu potencial pedagógico vem sendo feita por diversos autores. Sobre o surgimento e massificação da cultura digital, é importante recordar Nadal (2014), que afirma:

> A cultura digital, processo contínuo resultante da inserção das tecnologias digitais nos processos comunicacionais, começou a dar sinais de sua existência a partir da digitalização da informação: o desenvolvimento da microinformática e das tecnologias de rede possibilitou uma conversão maciça dos dados analógicos para códigos binários, aumentando a compatibilidade entre plataformas e a conexão entre indivíduos. Tal interconexão, potencializada no ambiente digital, proporcionou uma imensa integração das notações visuais, estimulando o fluxo de informações e imagens no interior da sociedade. (NADAL, 2014, p. 3)

Reforçando a ideia anterior e a importância da influência da mídia e do uso da imagem na sociedade, tem-se que:

> Com o advento da cultura da mídia, os indivíduos são submetidos a um fluxo sem precedentes de imagens e sons dentro de sua própria casa, e um novo mundo virtual de entretenimento, informação, sexo e política está reordenando percepções de espaço e tempo, anulando distinções entre realidade de imagem, enquanto produz novos modos de experiência e subjetividade. (KELLNER, 2001, p. 27)

Aproveitando esse fluxo intenso de imagens, dentre elas os Memes, podemos introduzir assuntos de matemática, ou mesmo incrementar uma aula, usando a potencialidade da Figura que o Meme carrega.

De acordo com Flusser (2010), a imagem funciona como um modelo para a ação humana e apresenta-se como superfície que conserva a realidade material de forma bidimensional. A compreensão das imagens ocorre por meio da imaginação, capacidade humana de sintetizar o mundo em cenas e de transformar cenas em acontecimentos a partir da decodificação de seus símbolos. E é por esse motivo, que achamos válido utilizar Memes nas aulas de matemática, devido à simplicidade do seu uso e facilidade de compreensão, podendo se tornar em algo eficiente no ensino.

A seguir, apresentaremos diversas situações nas quais são exploradas algumas capacidades pedagógicas de Memes para ensinar matemática, sem ter o intuito de esgotar a pesquisa sobre o assunto.

4.3.1 Memes que envolvem Trigonometria

O primeiro exemplo a ser abordado (Figura 31) poderá ser utilizado em uma aula de Trigonometria, e envolve a Relação Fundamental da Trigonometria. Conforme a BNCC (BRASIL, 2018), no Ensino Médio, dentro da Competência 3, tem-se a seguinte habilidade:

> **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Figura 31 – Memes a serem utilizados em aula de Trigonometria

(a) Canal Matemática da Depressão (b) Canal Matemática Curiosa

Fonte:[5] Canais de Matemática no Instagram, 2019

Observando os dois Memes, vemos que eles têm algo em comum. Ambos recorrem à linguagem matemática, exibindo as expressões sen^2x e cos^2x e apresentam uma frase em língua portuguesa que tem o mesmo sentido e traduz a ideia de uma relação una entre duas pessoas. Sendo assim, teremos:

- No Meme da Figura 31a, temos a percepção de uma relação afetuosa entre duas pessoas ao se casar, na qual uma delas tatuou em sua perna a inscrição sen^2x, já a outra tatuou o cos^2x. Conforme sabemos pelo dito popular, quando duas pessoas se casam, elas se tornam uma pessoa só, e partindo desse pressuposto, é possível estabelecer o resultado $sen^2x + cos^2x = 1$, que é a Relação Fundamental da Trigonometria, que envolve o seno e o cosseno de um mesmo ângulo, representam as duas parcelas que ao serem somadas, vão dar origem a 1, concluindo a analogia feita entre a relação afetiva entre duas pessoas com a relação trigonométrica fundamental.

- O sentido do Meme da Figura 31b é o mesmo que o do Meme anterior, só que aqui estamos perante duas alianças de casamento, uma contendo a gravação sen^2x e a

[5] Fig. 31a Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[5] Fig. 31b Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: out. 2019.

outra contendo o cos^2x. Pela união simbolizada pelas duas alianças, duas pessoas se tornam em uma só pessoa, e partindo desse pressuposto, é possível escrever o resultado $sen^2x + cos^2x = 1$, a Relação Fundamental da Trigonometria que envolve o seno e o cosseno de um mesmo ângulo, pois a união das duas alianças representa a soma que será igual a 1, concluindo a analogia feita entre duas alianças de casamento com a relação trigonométrica fundamental.

A discussão deste Meme poderia ser, então o ponto de partida de uma aula inicial ou de revisão de trigonometria.

4.3.2 Memes em uma aula de Função Inversa

Vejamos um exemplo (Figuras 32 e 33) a ser utilizado em uma aula sobre Função Inversa, assunto necessário para completar o entendimento sobre Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Conforme a BNCC Brasil (2018), encontra-se descrita dentro da da Competência 4, a seguinte habilidade:

> **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Figura 32 – Memes sobre Função Inversa (I)

(a) Canal Engenheiro Sincero

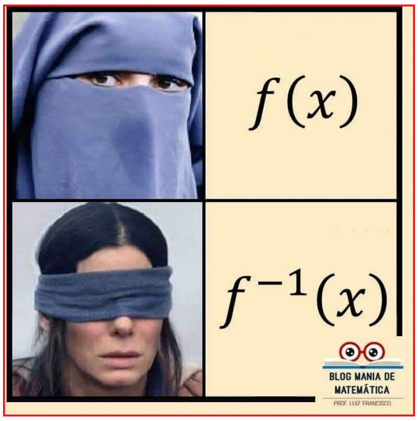
(b) Canal Equaciona Matemática

Fonte:[6] Canais de Matemática no Instagram, 2019

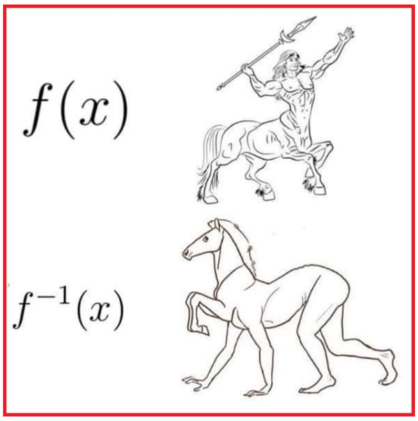
[6] Fig. 32a Disponível em: <https://instagram.com/engsincero/>. Acesso em: ago. 2019.
[6] Fig. 32b Disponível em: <https://instagram.com/equacionamatematica/>. Acesso em: out. 2019.

Figura 33 – Memes sobre Função Inversa (II)

(a) Canal Matemática sem Dúvidas



(b) Canal Matemática da Depressão



Fonte:[7] Canais de Matemática no Instagram, 2019

Em cada um dos Memes presentes nas Figuras 32 e 33, há uma comparação entre duas figuras. Em uma delas, há a identificação em linguagem matemática de uma função qualquer $f(x)$; na outra figura, há a identificação com a função inversa de $f(x)$, ou seja, a função $f^{-1}(x)$. As Figuras têm, em todos os exemplos, algo que as contrapõem.

Vamos, agora, tentar perceber as semelhanças e as diferenças em cada foto, ou seja, entender o confronto que há entre elas. Sendo assim, teremos:

- No Meme da Figura 32a, temos a imagem de dois homens que aparentam ser irmãos gêmeos, onde um deles, o homem relacionado a $f(x)$, possui apenas 1 dente na boca; já o outro homem, relacionado à inversa $f^{-1}(x)$, possui todos os dentes na boca, exceto um 1 único dente, sendo exatamente o que o outro homem possui.

- Observando o Meme da Figura 32b, temos a imagem de duas mulheres que aparentam ser irmãs gêmeas, em que uma delas, a irmã relacionada a $f(x)$ possui a parte superior de sua roupa na cor preta e a parte inferior, em azul; já a outra mulher, a relacionada com $f^{-1}(x)$, apresenta a parte superior de sua roupa na cor azul e a parte inferior, em preto. Há uma ideia nítida da inversão de cores nas peças de roupa em uma pessoa só, pois há o uso da figura de “irmãs gêmeas”.

- No Meme da Figura 33a, temos a contraposição da imagem de 2 mulheres, onde a função $f(x)$ refere-se à mulher que apresenta o rosto coberto por um tecido azul, exceto uma faixa descoberta aonde aparecem os olhos; já a mulher referenciada por $f^{-1}(x)$, é representada apenas com uma faixa feita de tecido azul cobrindo os olhos

[7] Fig. 33a Disponível em: <https://instagram.com/matematicasemduvidas/>. Acesso em: ago. 2019.
[7] Fig. 33b Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: set. 2019.

mas com o restante do rosto descoberto. A imagem da mulher com os olhos vendados é uma referência ao filme Bird Box, NETFLIX, de 2018 .

- Observando o Meme da Figura 33b, temos a imagem de um centauro, um ser mitológico que é um misto de homem/cavalo, à qual se associa $f(x)$; já a função inversa $f^{-1}(x)$ refere-se à figura composta pela cabeça de um cavalo com o corpo de um homem. Há a ideia latente de Figuras inversas.

Em todos estes Memes temos presente a ideia de "operação inversa" o que uma das funções faz, a outra "desfaz". Assim, estes Memes podem ser usados para definir inversa de uma função, isto é, àquela que composta com $f(x)$ vai originar a função identidade, que é $f^{-1}(f(x)) = x$.

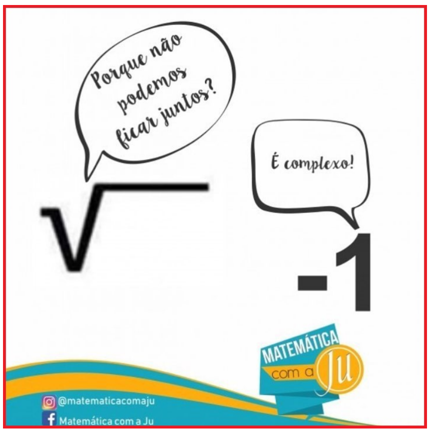
4.3.3 Memes em uma aula de Números Complexos

O terceiro exemplo, (Figuras 34 e 35), poderá ser utilizado em uma aula sobre Números Complexos. Embora a BNCC (BRASIL, 2018) não tenha contemplado o tema Números Complexos entre os conteúdos obrigatórias no currículo mínimo de matemática no Ensino Médio, trazemos uma proposta de exemplo para introduzir o referido tópico, que faz parte do 3º Ano do Ensino Médio.

A título de exemplificação, podemos citar que o estudo dos Complexos é importante para descrever um campo eletromagnético, onde há uma componente elétrica e outra magnética e por isso, é preciso um par de números reais para a sua descrição. Este par pode ser visto como um número complexo e encontramos, assim, uma aplicação direta na Física, para a regra da multiplicação de números complexos.

Figura 34 – Memes sobre Números Complexos (I)

(a) Canal Matemática com a Ju

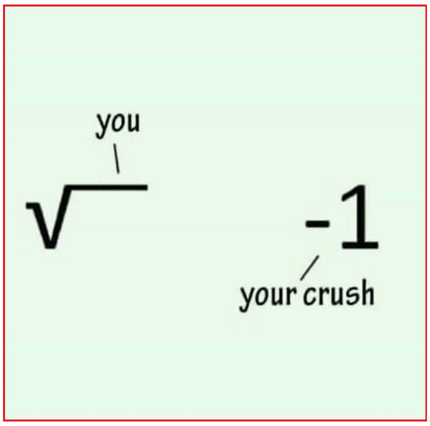


(b) Canal Meme for Mathematicians

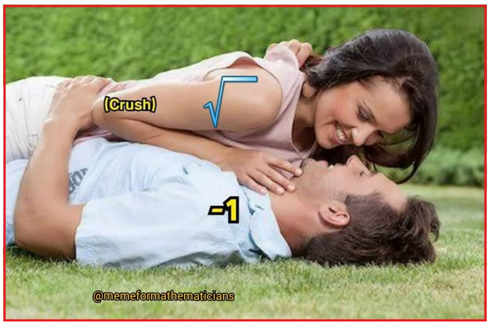
Fonte:[8] Canais de Matemática no Instagram, 2019

Figura 35 – Memes sobre Números Complexos (II)

(a) Canal Meme for Mathematicians



(b) Canal Meme for Mathematicians



Fonte:[9] Canais de Matemática no Instagram, 2019

Em cada um dos Memes anteriores há presente uma mesma ideia: a representação simultânea do símbolo matemático $\sqrt{}$, que representa a raiz quadrada com o número -1.

Para uma correta interpretação do que os Memes anteriores traduzem sobre Números Complexos, temos que ter presente o significado da expressão que se obtém ao juntarmos as $\sqrt{}$ e -1, ou seja, o que significaria $\sqrt{-1}$ matematicamente. Diante disso, temos:

- No Meme da Figura 34a, há um diálogo entre os símbolos $\sqrt{}$ e -1, sendo que há uma indagação sobre o que ocorre se houver a junção de ambos, ou seja, o que representa $\sqrt{-1}$, e tendo como explicação matemática que decorre da definição de unidade imaginária, denotada por i, que é $i^2 = -1$, onde uma das raízes quadradas de -1 será i.

- No Meme da Figura 34b, há um jogo de palavras com o nome de um produto cosmético para cabelos. O jogo de palavras consiste na dicotomia entre o conjunto dos *números reais*, $\mathbb{R}$, e o o conjunto dos *números imaginários*, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. A expressão LO' **REAL** PARIS está associada ao número 1, unidade do conjunto dos *números reais*; enquanto que à imagem da embalagem do cosmético LO' **IMAGINARY** PARIS está associada ao número i, unidade imaginária do conjunto dos *números complexos*, ao inserirmos a embalagem do produto antecedida do sinal $-$ no interior da $\sqrt{}$.

[8] Fig. 34a Disponível em: <https://instagram.com/matematicacomaju/>. Acesso em: ago. 2019.
[8] Fig. 34b Disponível em: <https://instagram.com/memeformathematicians/>. Acesso em: nov. 2019.
[9] Fig. 35a Disponível em: <https://instagram.com/memeformathematicians/>. Acesso em: jan. 2020.
[9] Fig. 35b Disponível em: <https://instagram.com/memeformathematicians/>. Acesso em: set. 2019.

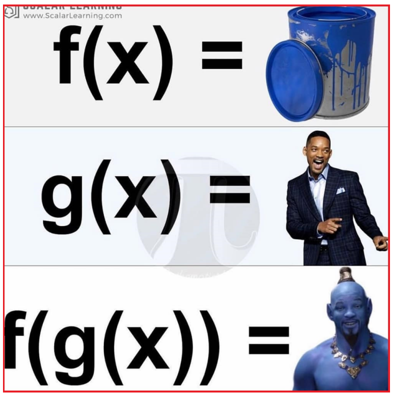
- Nos Memes 35a e 35b, os símbolos $\sqrt{}$ e -1 aparecem separados. Na gíria usada pelos jovens, a palavra “crush” designa um relacionamento amoroso ou até mesmo uma paixão impossível. A interpretação mais correta de ambos memes é que trata-se de um romance imaginário, pois denominação de $\sqrt{-1}$ é i, a unidade imaginária.

4.3.4 Memes sobre a composição de Funções

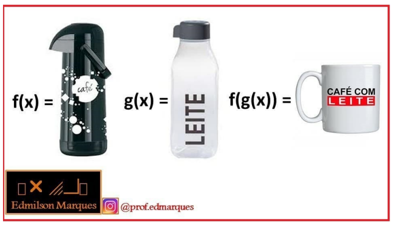
A composição de funções é um assunto que os alunos tendem a complicar. A ideia de aplicar a um objeto uma dada lei de transformação e, em seguida, aplicar à respectiva imagem uma nova lei de transformação é traduzida nos Memes seguintes (Figura 36). O fato da composição de funções ser uma operação não comutativa é salientado nos dois últimos exemplos.

Figura 36 – Memes para a composição de Funções

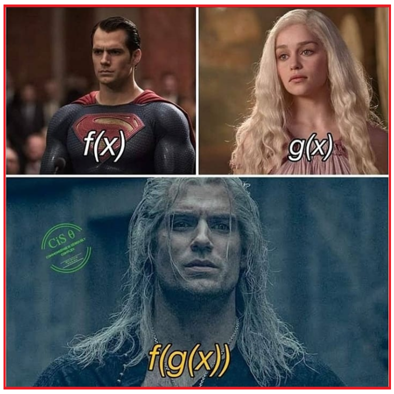
(a) Canal Rodrigo Tcp



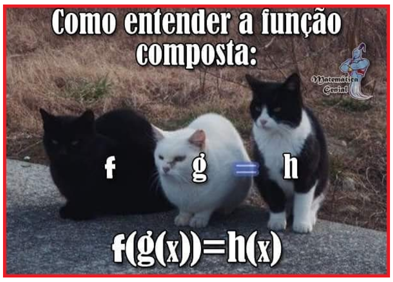
(b) Canal Prof Edmarques



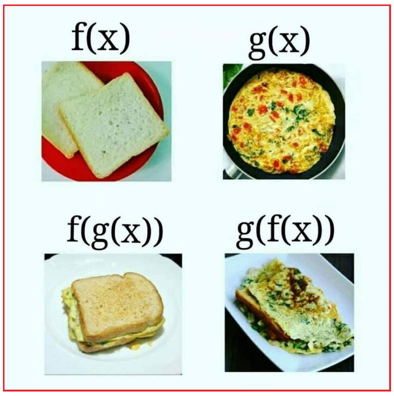
(c) Canal MemeforMathematicians



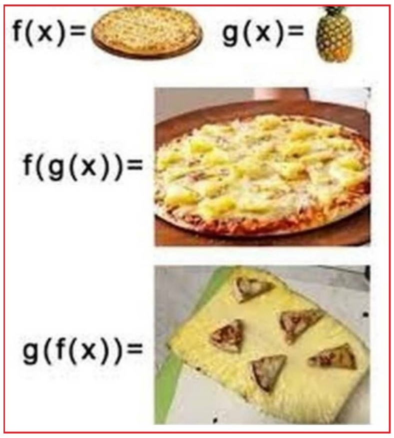
(d) Canal MatemáticadaDepressão



(e) Canal Engenheiro Sincero



(f) Canal MemeforMathematicians



Fonte:[10] Canais de Matemática no Instagram, 2019

[10] Fig. 36a Disponível em: <https://instagram.com/rodrigotcp/>. Acesso em: dez. 2019.
[10] Fig. 36b Disponível em: <https://instagram.com/prof.edmarques/>. Acesso em: ago. 2019.
[10] Fig. 36c Disponível em: <https://instagram.com/memeformathematicians>. Acesso em: dez. 2019.
[10] Fig. 36d Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.

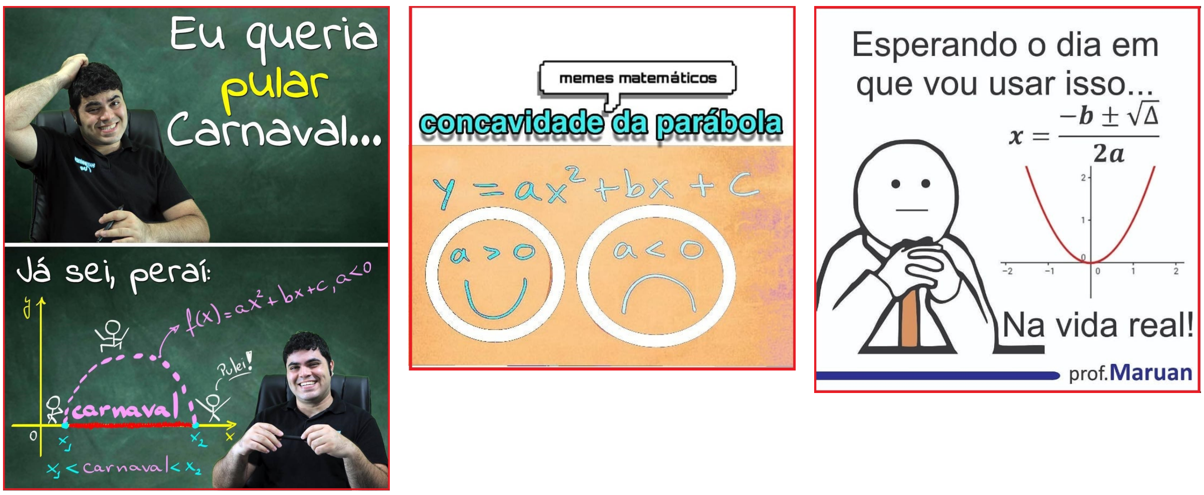
- Podemos utilizar os Memes da Figura 36 para revisar ou explicar o conceito da composição de funções, ou seja, em todos os exemplos, há as Figuras associadas à função f e à função g e ao resultado de compor ambas. Os quatro primeiros exemplos (Figuras 36a, 36b, 36c e 36d) mostram a composta $f \circ g$, sendo denominada por h no exemplo 36d.

- Nos exemplos 36e e 36f faz-se alusão à importância da ordem pela qual se faz a composição: no exemplo 36e, ora resulta um sanduíche de omelete ou uma omelete com recheio de pão e, no exemplo 36f obtém-se uma pizza com pedaços de abacaxi ou um abacaxi com pedaços de pizza.

4.3.5 Memes que envolvem Função Quadrática

Figura 37 – Memes associados à Função Quadrática

(a) Canal Matemática Rio (b) Canal Memes Matemáticos (c) Canal Prof.Maruan



Fonte:[11] Canais de Matemática no Instagram, 2019

- Podemos utilizar os Memes da Figura 37 para referir algumas características da função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, como o comportamento de seu gráfico, que é uma parábola no *plano cartesiano*, a concavidade do gráfico depende so sinal do a, sendo voltada no sentido positivo quando $a > 0$, e no sentido negativo quando $a < 0$, situação ilustrada nos exemplos 37a e 37b.

[10] Fig. 36e Disponível em: <https://instagram.com/engsincero/>. Acesso em: nov. 2019.
[10] Fig. 36f Disponível em: <https://instagram.com/memeformathematicians>. Acesso em: ago. 2019.
[11] Fig. 37a Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: ago. 2019.
[11] Fig. 37b Disponível em: <https://instagram.com/memesmatematicos/>. Acesso em: ago. 2019.
[11] Fig. 37c Disponível em: <https://instagram.com/profmaruan>. Acesso em: nov. 2019.

- No exemplo 37c, é retomada a questão da finalidade da necessidade de aprender a fórmula resolutiva equações polinomiais do 2° grau, conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara, bem como a localização das raízes do gráfico no plano cartesiano.

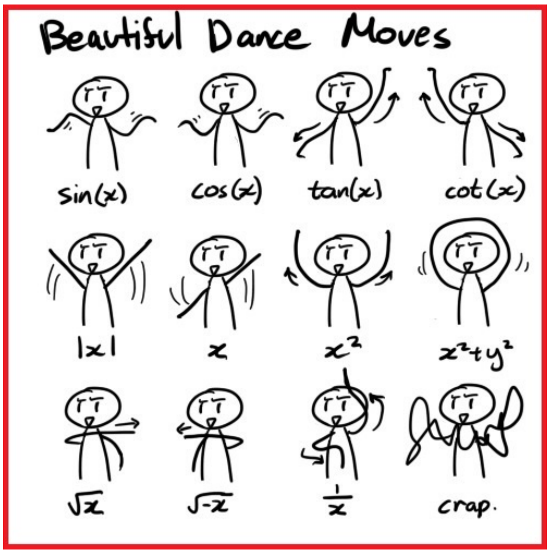
- Uma das interrogações por parte dos alunos está relacionada com a utilidade do que aprendem. A função quadrática é bastante importante pelas suas aplicações e os Memes da Figura 37 ilustram isso.

4.3.6 Memes envolvendo Gráficos de algumas Funções

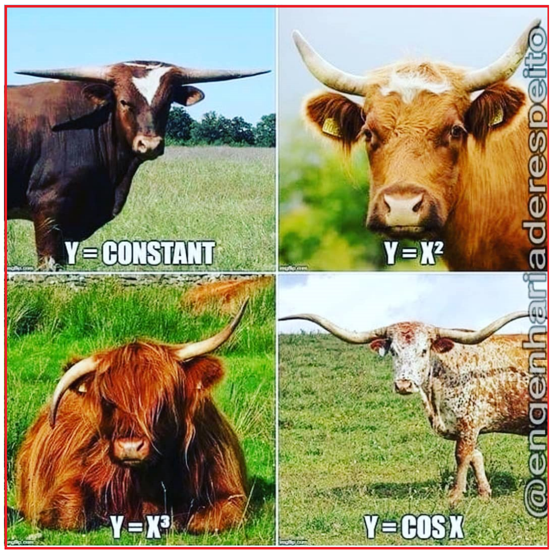
Podemos utilizar os Memes da Figura 38 para identificar e distinguir diversos gráficos de funções matemáticas, de acordo com suas formas e características.

Figura 38 – Memes associados a Gráficos de Funções

(a) Blog O Mundo de Osvaldo



(b) Canal Matemática sem Dúvidas



Fonte:[12] Blog da Internet e Canal no Instagram, 2019

- Gráficos das funções trigonométricas, função afim, função quadrática, função modular, função inversa entre outros gráficos podem ser visualizadas por intermédio desses Memes.

- No primeiro exemplo, o 38a, existe uma referência ao movimento e posicionamento dos braços, como se estes representassem o gráfico da função, simbolizado por movimentos de dança; já no exemplo 38b, a analogia ao gráfico da função é feita pelos chifres de um bovino.

[12] Fig. 38a Disponível em: <https://omundodeosvaldo.wordpress.com/>. Acesso em: ago. 2019.
[12] Fig. 38b Disponível em: <https://instagram.com/matematicasemduvidas/>. Acesso em: ago. 2019.

4.3.7 Memes sobre representações

Algumas representações de um mesmo objeto matemático podem ser motivo de alguns Memes, conforme a Figura 39 mostra. A seguir, temos alguns exemplos de diferentes representações de um mesmo número ou de uma mesma expressão.

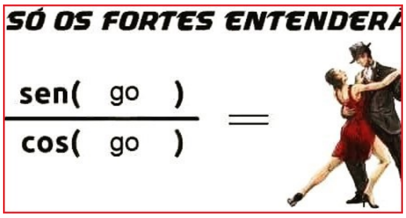
Figura 39 – Memes que utilizam jogo de palavras e/ou imagens

(a) Canal I Discepoli di Archimeme

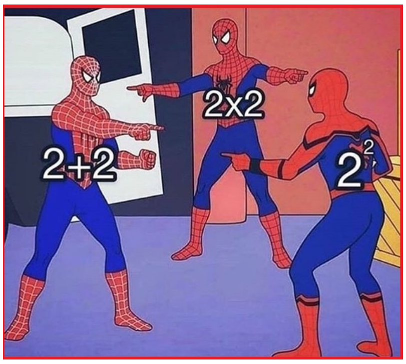
(b) Canal Imemercedes

(c) Canal Física Posting

(d) Canal MatemáticadaDepressão



(e) Canal Física Posting



(f) Canal Rocky Baldosa

Fonte:[13] Canais de Matemática no Instagram, 2019

- Os Memes das Figuras 39a e 39b, referem ambos ao fato, pouco intuitivo, da igualdade entre 1 e o número decimal periódico $0,999...$, ou seja, $0,999... = 1$ ou, usando outra notação, $0,\overline{9} = 1$.

- Podemos utilizar os Memes das Figuras 39c e 39d para mostrar o jogo de palavras e Figuras relacionadas à razão trigonométrica *tangente*, usando a notação $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$. A interpretação correta dos Memes são Ti**TAN**ic, referente ao conhecido

[13] Fig. 39a Disponível em: <https://instagram.com/idiscepolidiarchimeme/>. Acesso em: ago. 2019.
[13] Fig. 39b Disponível em: <https://instagram.com/imemercedes/>. Acesso em: ago. 2019.
[13] Fig. 39c Disponível em: <https://instagram.com/fisicaposting>. Acesso em: out. 2019.
[13] Fig. 39d Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[13] Fig. 39e Disponível em: <https://instagram.com/fisicaposting/>. Acesso em: ago. 2019.
[13] Fig. 39f Disponível em: <https://instagram.com/rockybaldosa/>. Acesso em: out. 2019.

navio Titanic, naufragado em 1914; e a a palavra **TAN**go, fazendo referência ao estilo de dança Tango.

- Os Memes das Figuras 39e e 39f referem-se ao jogo de palavras e imagens, onde cada uma das imagens possui o mesmo significado matemático.

- Na Figura 39e, os 3 herois fictícios de histórias em quadrinhos, o *Homem-Aranha*, se apontam e representam, cada um $2+2$, 2×2 e 2^2, que são representações equivalentes do mesmo número, já que $2+2 = 2\times 2 = 2^2 = 4$;

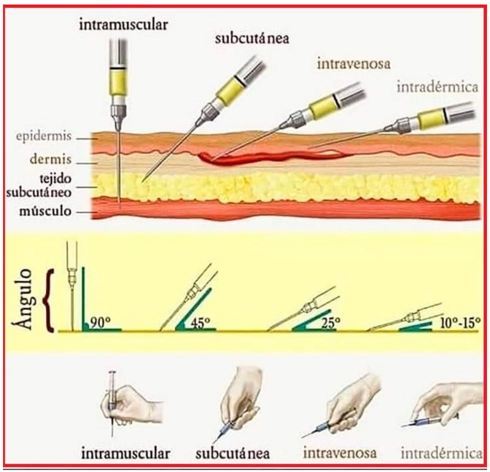
- Já na Figura 39f, a imagem de uma cena em que a personagem Nebula, do filme Vingadores - Ultimato, de 2019, e a sua duplicata dialogam entre si. A cada uma delas é atribuído um mesmo significado em termos de notação de funções, uma sendo y e a outra $f(x)$, mas $y = f(x)$.

4.3.8 Memes com aplicações matemática em profissões

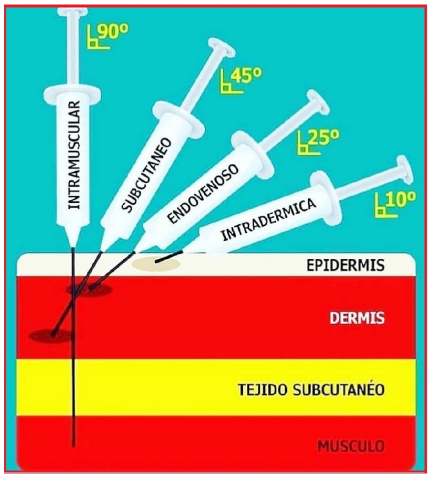
Os Memes que se seguem (Figuras 40 e 41) estão relacionados com aplicações da matemática, em particular da geometria na atividade profissional. Qual o ângulo ideal para dar corretamente uma injeção ou para efetuar um corte de cabelo? De qual forma é que esse mesmo ângulo vai influenciar o resultado final?

Figura 40 – Memes matemáticos em algumas profissões (I)

(a) Canal Matemática Depressão



(b) Canal Sou Acadêmico

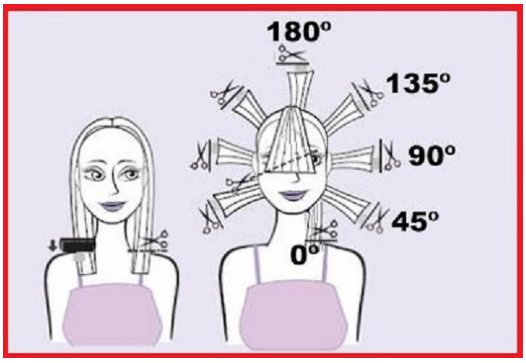


Fonte:[14] Canais de Matemática no Instagram, 2019

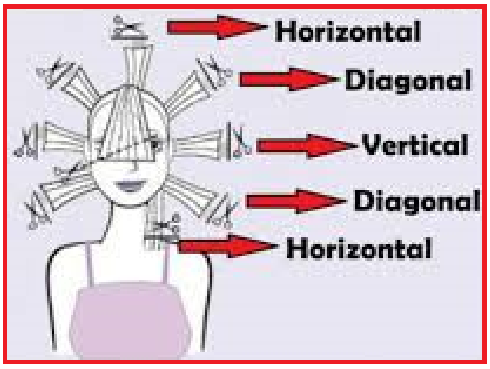
[14] Fig. 40a Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[14] Fig. 40b Disponível em: <https://instagram.com/souacademico/>. Acesso em: ago. 2019.

Figura 41 – Memes matemáticos em algumas profissões (II)

(a) Blog Eu Amo Cabelo



(b) Blog Eu Amo Cabelo



Fonte: Blog disponível em: <http://euamocabelo.blogspot.com/>. Acesso em: out. 2019.

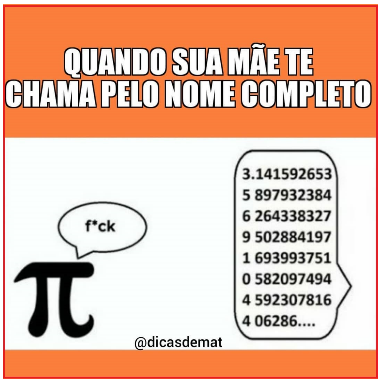
- Conforme vemos nas Figuras 40a e 40b, para uma aplicação correta de injeção há que se respeitar o ângulo que a agulha faz com o corpo. E a variação desse ângulo está associada ao tipo de injeção a ser ministrada.
- A importância do ângulo de posicionamento da tesoura é, também fundamental para um cabeleireiro obter determinado efeito ao cortar o cabelo. Os valores desse ângulo estão de acordo com o apresentado nas Figuras 41a e 41b.

4.3.9 **Memes que mostram ideias acerca da definição e irracionalidade de π**

Alguns Memes (Figuras 42 e 43) servem para se referirem a algumas das características do número π. Por um lado, ele representa a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência qualquer, e, por outro lado é um número irracional, com representação decimal infinita e não periódica.

Figura 42 – Memes sobre a irracionalidade e a infinitude de π (I)

(a) Canal Dicas de Mat



(b) Canal Matemática Curiosa

(c) Canal Matemática Curiosa

Fonte:[15] Canais de Matemática no Instagram, 2019 e 2020

Figura 43 – Memes sobre a irracionalidade e a infinitude de π (II)

(a) Canal Matemática Curiosa (b) Canal Mat. Depressão (c) Canal Memes Matemáticos

Fonte:[16] Canais de Matemática no Instagram, 2019

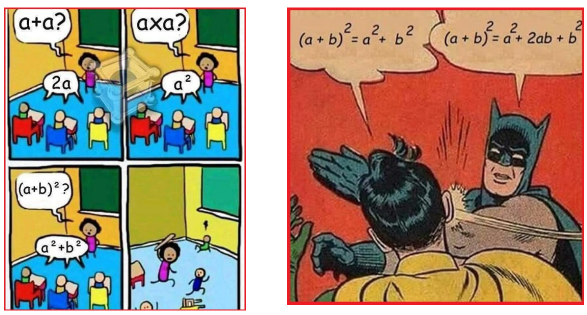
- Os Memes das Figuras 42 e 43 salientam o fato do número π ser um número com a representação decimal infinita e, por ser não periódica, ser irracional. O exemplo 43a mostra uma situação em que é oportuno perguntar aos alunos qual a relação entre uma bicicleta e o número π e, a partir dessa discussão, iniciar uma explanação para a definição do mesmo.

4.3.10 Memes que servem para alertar erros gerais feitos em matemática

A aprendizagem pelo erro é uma das estratégias presentes nos Memes seguintes (Figuras 44 e 45). Repare na forma hiperbólica de alguns deles:

Figura 44 – Memes com erros comuns em matemática (I)

(a) Mat. Curiosa (b) Mat. Depressão

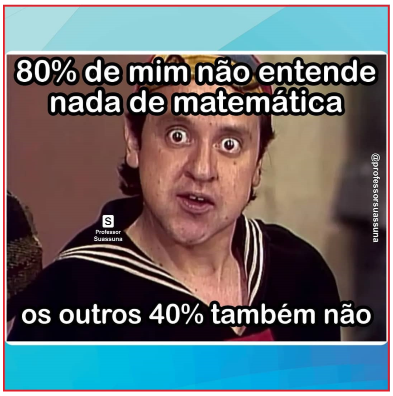


Fonte: (44a) Disponível em: <www.instagram.com/mat-curiosa/>. Acesso em: jan. 2020.
(44b) Disponível em: <www.instagram.com/mat-depressao/>. Acesso em: ago. 2019.

[15] Fig. 42a Disponível em: <https://instagram.com/dicasdemat/>. Acesso em: ago. 2019.
[15] Fig. 42b Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: dez. 2019.
[15] Fig. 42c Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: jan. 2020.
[16] Fig. 43a Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: out. 2019.
[16] Fig. 43b Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: out. 2019.
[16] Fig. 43c Disponível em: <https://instagram.com/memesmatematicos/>. Acesso em: ago. 2019.

Figura 45 – Memes com erros comuns em matemática (II)

(a) Canal do Professor Suassuna



(b) Canal do Professor Suassuna

(c) Canal Mates con Andres

(d) Canal Mates con Andres

Fonte:[17] Canais de Matemática no Instagram, 2019.

- Um dos erros mais comuns cometidos pelos alunos é na expansão do quadrado de um binômio e é apresentado nos exemplos 44a e 44b. Sabe-se que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mas é habitual os alunos escreverem $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Repare que em ambos os Memes esse erro origina uma reação devastadora.

- No exemplo 45d apresentamos um erro comum que envolve a definição de potência de expoente de expoente natural. O “correto” será o rapaz olhar para a sua acompanhante e não para a garota que passa, já que $3^2 = 3 \times 3 = 9$, mas o erro comum é $3^2 = 3 \times 2 = 6$

- Nos exemplos 45a, 45b e 45c são referenciados erros usuais no cálculo de porcentagens, em trocas nos sinais de expressões matemáticas e operações algébricas e também na simplificação de frações.

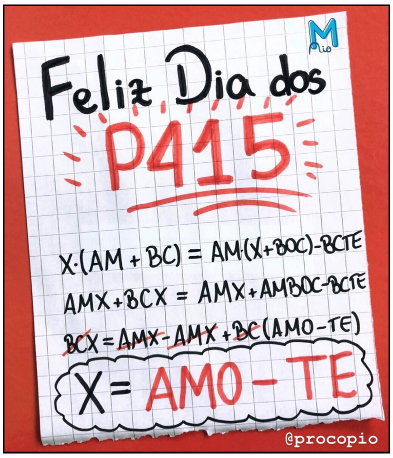
[17] Fig. 45a Disponível em: <https://instagram.com/professorsuassuna/>. Acesso em: ago. 2019.
[17] Fig. 45b Disponível em: <https://instagram.com/professorsuassuna/>. Acesso em: ago. 2019.
[17] Fig. 45c Disponível em: <https://instagram.com/matesconandres/>. Acesso em: ago. 2019.
[17] Fig. 45d Disponível em: <https://instagram.com/matesconandres/>. Acesso em: ago. 2019.

4.3.11 Memes contendo felicitações matemáticas

Memes que surgem em datas festivas no decorrer do ano são muito comuns. Por exemplo, nas épocas das festas de final de ano, é muito comum surgirem na internet equações ou charadas sob a forma de Memes que, ao serem solucionados, informam o número do ano que se iniciará. Apresentamos a seguir, exemplos (Figura 46) de Memes com o intuito de felicitações em datas especiais.

Figura 46 – Memes de felicitações em datas especiais

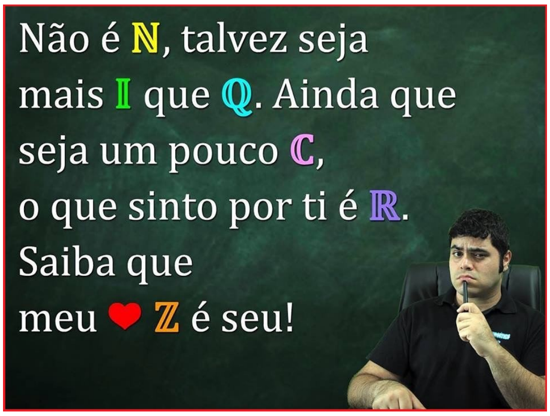
(a) Canal Matemática Rio



(b) Canal Matemática Rio

(c) Canal Matemática Rio

(d) Canal Matemática Rio



Fonte:[18] Canal Matemática Rio com Rafael Procópio, Instagram, 2019.

- Os Memes da Figura 46a, 46b e 46c surgem para felicitações no Dia dos Pais ou no Dia das Mães, apresentando uma declaração de afeto como solução da charada ou desafio neles propostos. A ocorrência desse tipo de Meme se dá também em outras datas, como na Páscoa ou no Natal.

[18] Fig. 46a Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: set. 2019.
[18] Fig. 46b Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: ago. 2019.
[18] Fig. 46c Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: ago. 2019.
[18] Fig. 46d Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: ago. 2019.

- A declaração contida na última imagem faz alusão à denotação de alguns conjuntos numéricos. Vejamos o que quer dizer a Figura 46d:

  "Não é $\mathbb{N}$*atural*, talvez seja mais $\mathbb{I}$*rracional* que *Racional*. Ainda que seja um pouco $\mathbb{C}$*omplexo*, o que sinto por ti é $\mathbb{R}$*eal*. Saiba que meu *coração Inteiro* é seu."

4.3.12 Memes que trazem piadas estilo nerd

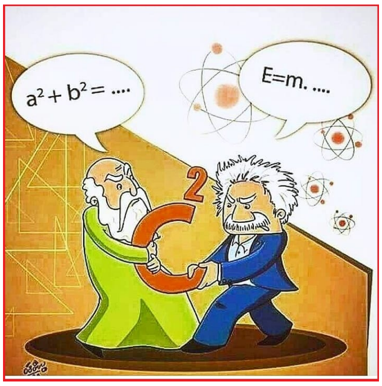
Memes sob a forma de piadas matemáticas são muito comuns na internet. Os exemplos da Figura 47 servem para mostrar aos alunos algum tipo de humor matemático que há nas entrelinhas destas piadas no estilo Nerd que circulam em diversos canais da internet.

Figura 47 – Memes de piadas nerd

(a) Marcelle Roriz

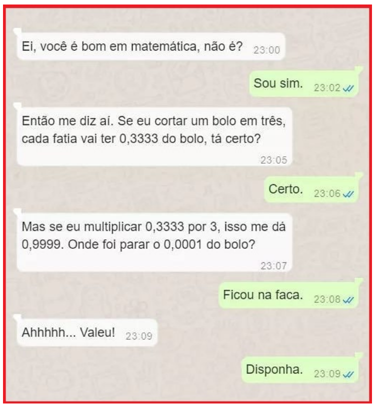
(b) Matemática da Depressão

(c) Matemática da Depressão



(d) Canal Memesmakerbr

(e) Matemática Curiosa



(f) Matemática Curiosa

Fonte:[19] Canais de Matemática, Instagram, 2019.

---

[19] Fig. 47a Disponível em: <https://instagram.com/marcelleroriz/>. Acesso em: ago. 2019.
[19] Fig. 47b Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[19] Fig. 47c Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[19] Fig. 47d Disponível em: <https://instagram.com/memesmakerbr/>. Acesso em: dez. 2019.
[19] Fig. 47e Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: out. 2019.
[19] Fig. 47f Disponível em: <https://instagram.com/matematicacuriosa/>. Acesso em: ago. 2019.

- No exemplo 47a mostra uma conversa entre o número 0 e o número $\sqrt{-1}$, ambos demonstrando o respectivo complexo de inferioridade, um por ser zero, o outro por ser imaginário.

- O exemplo 47b exibe a "verdadeira" raiz quadrada, exibindo uma árvore cuja raiz vai se desenvolvendo com o aspecto de um quadrado.

- No exemplo 47c tem-se a disputa entre Pitágoras e Einstein sobre quem é o verdadeiro dono do c^2 presente nas fórmulas que traduzem o teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$ e a teoreia da relatividade, $e = m \cdot c^2$. Convém destacar que c^2 representa objetos distintos, no primeiro caso a área de um quadrado de lado c, e no segundo representa o quadrado da velocidade da luz.

- O exemplo 47d apresenta uma sátira sobre as promoções da Black Friday, a Black Fraude, onde produtos são anunciados para venda com desconto pela metade do dobro de seu preço, ou seja, uma fraude pois não há desconto algum em uma venda desse tipo, pois o produto será vendido pelo preço original. Este é um bom exemplo para o estudo da função inversa

- O exemplo 47e mostra o registro de um diálogo em que se usam aproximações. A explicação incorreta, porém convincente para uma dúvida na divisão de números racionais que geram dízimas periódicas.

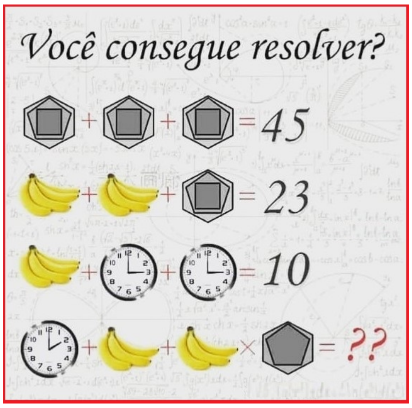
- O exemplo 47f mostra o ponto de vista vencedor em uma disputa de par ou ímpar entre soldados romanos. A dupla interpretação da imagem está relacionada com a ambiguidade das representações simbólicas, aqui o raciocínio numérico deverá utilizar algarismos romanos e não a quantidade de dedos representados.

4.3.13 Memes de Desafios Matemáticos que circulam na Internet/Redes Sociais

Os Memes da Figura 48 servem como atividades desafiadoras para os alunos, pois circulam pela internet desafiando a capacidade interpretativa e matemática de qualquer pessoa. São verdadeiros passatempos que podem motivar os estudantes nas aulas de matemática. O estilo de desafios como os dos exemplos 48a, 48b, 48e e 48f geralmente é solucionável por *Sistemas de Equações do 1º Grau*; já nos exemplos 48c e 48d devemos utilizar *Raciocínio Lógico* para solucioná-los.

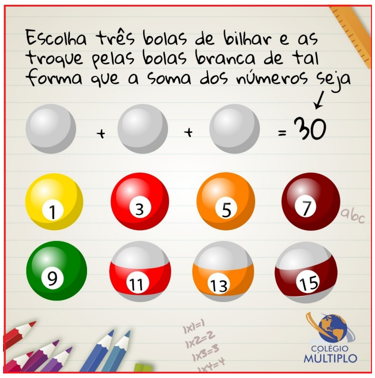
Figura 48 – Memes dos desafios matemáticos que viralizam na net

(a) Canal Matemática da Depressão



(b) Canal Cinta Moebius

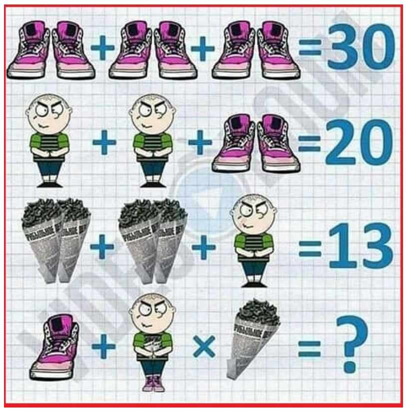
(c) Colégio Múltiplo Sorocaba



(d) Canal Matemática Rio

(e) Cursinho Logos on Line

(f) Canal Prof. Jair Bueno



Fonte:[20] Canais de Matemática, Instagram, 2019.

- Estes 6 Memes-desafios encontram-se resolvidos no Apêndice *A* deste trabalho.

[20] Fig. 48a Disponível em: <https://instagram.com/matematicadadepressao/>. Acesso em: ago. 2019.
[20] Fig. 48b Disponível em: <https://instagram.com/cintademoebius/>. Acesso em: ago. 2019.
[20] Fig. 48c Disponível em: <https://instagram.com/colegiomultiplosorocaba/>. Acesso em: ago. 2019.
[20] Fig. 48d Disponível em: <https://instagram.com/matematicario/>. Acesso em: ago. 2019.
[20] Fig. 48e Disponível em: <https://instagram.com/cursinhologosonline/>. Acesso em: ago. 2019.
[20] Fig. 48f Disponível em: <https://instagram.com/profjairbueno/>. Acesso em: ago. 2019.

4.4 Potencial Pedagógico de GIF nas aulas de Matemática

A influência do meio digital no cotidiano de nossa sociedade é uma constatação. Entre os vários tópicos debatidos destaca-se o desenvolvimento de uma cultura visual. Sob esse aspecto o filósofo norte-americano Douglas Kellner diz que:

> (...)a presença dos meios massivos, da fotografia e da microinformática, passou a definir formas de transcodificar esteticamente as experiências e práticas sociais. Esse movimento de fusão entre meios de comunicação e sociedade estimula o desenvolvimento de uma cultura visual própria. (KELLNER, 2001, p. 42)

Seguindo nessa direção, foi apropriado pela nossa cultura visual, a figura emblemática dos GIF e, segundo Nadal (2014), tem-se que:

> (...) o GIF, que existia enquanto uma simples extensão para comprimir gráficos, revela-se uma fonte potencial para a criação de produtos culturais específicos, a aproximação com os indivíduos, liberta-o do caráter exclusivamente funcional e transforma o GIF em uma estrutura para formas de enunciações que revelam modos de pensar e de sentir na sociedade contemporânea. (NADAL, 2014, p. 8)

Consequentemente, o GIF pode ser visto como um novo recurso pedagógico a ser utilizado em sala de aula, servindo para motivar os alunos, visando um maior entendimento e assimilação dos conteúdos ministrados e, também, procurando despertar neles a curiosidade e o interesse pelos assuntos estudados e pelas conexões que são possíveis efetuar. O que vai ao encontro de Flusser quando afirma:

> As imagens se tornam cada vez mais conceituais e os textos, cada vez mais imaginativos. Atualmente o maior poder conceitual reside em certas imagens, e o maior poder imaginativo, em determinados textos da ciência exata. Deste modo, a hierarquia dos códigos vai se perturbando: embora os textos sejam metacódigo de imagens, determinadas imagens passam a ser metacódigo de textos. (FLUSSER, 1985, p. 8)

Nadal (2014, p. 69) afirma que a noção de busca visual é fundamental para a compreensão de um GIF, pois é a partir da sucessão de imagens em seu interior que surgem os sentidos e, como cada leitura que fazemos de algo é diferente de outras, há possibilidade de novas leituras brotarem a cada interação entre a imagem e o indivíduo, e por isso vemos a importância do incremento de GIFs nas aulas de matemática.

A seguir, apresentaremos diversas situações que apresentam potencialidades pedagógicas para serem exploradas nas aulas de matemática. Muito poderá ser acrescentado ao que foi feito, já que não temos o intuito de esgotar a pesquisa sobre o assunto.

Nesta parte, é conveniente que o leitor, para visualizar o arquivo em GIF, clique no link em baixo de cada uma das imagens dos GIF abaixo exibidos, para que haja a reprodução do mesmo em seu navegador de internet.

4.4.1 GIFs de Álgebra e de Equações

Apresentamos a seguir, algumas habilidades referentes ao 7°, 8° e 9° anos do Ensino Fundamental, presentes na Base Nacional Curricular Comum, segundo (BRASIL, 2018), referentes a assuntos de Álgebra e Equações:

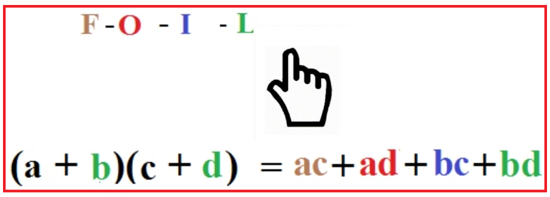
> **(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1° grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
>
> **(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2° grau do tipo $ax^2 = b$.
>
> **(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau.

Teremos abaixo uma sequência de GIFs referentes a Álgebra e que estão relacionados com o desenvolvimento das habilidades referenciadas acima.

1. Multiplicação de binômios

   - É um GIF de manipulação algébrica onde se exemplifica o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Figura 49 – GIF sobre multiplicação de binômios

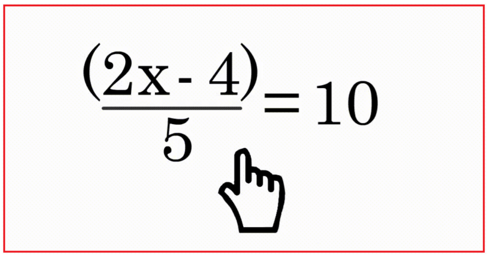


Fonte: Disponível em: <https://i.imgur.com/61xf967.gif>. Acesso em: 20 set. 2019.

2. Equação do 1º Grau

   - Neste GIF são exploradas várias situações referentes aos princípios de equivalência da relação de igualdade e que justificam a resolução de equações do 1º grau. Convém salientar que após encontrar a solução da equação, o processo de manipulação da igualdade continua, proporcionando uma discussão muito rica.

Figura 50 – GIF sobre equação do 1º grau

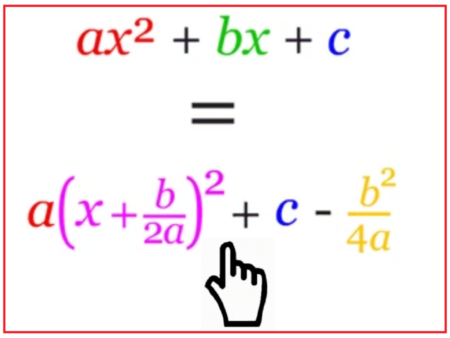


Fonte: Disponível em: <https://reddit.com/interactive-equation/>. Acesso em: 2 set. 2019

3. Fatoração de um trinômio

    - O GIF escreve um trinômio como a soma do quadrado de um binômio com uma constante. O processo de completação do quadrado é feito por manipulação algébrica acompanhado da explicação geométrica. Este é o passo que antecede a dedução da fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

Figura 51 – GIF sobre fatoração de um trinômio



Fonte: Disponível em: <https://media.giphy.com/>. Acesso em: 20 set. 2019.

4.4.2 GIFs envolvendo Círculo e o número π

A seguir, apresentaremos as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) referentes ao 7°, 8° e 9° anos do Ensino Fundamental, que são relativas à área do círculo e ao número π:

> **(EF07MA33)** Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
>
> **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

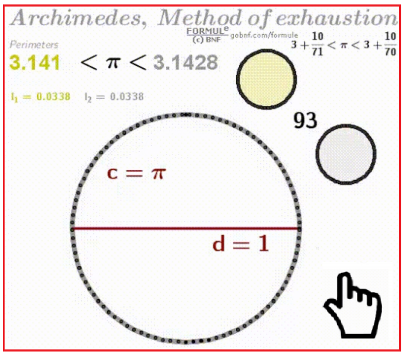
> **(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
>
> **(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Os próximos itens serão uma sequência de GIFs referentes à área do círculo e a demonstrações do números π, baseados nas habilidades da BNCC referenciadas no tópico acima:

1. Método de Arquimedes para aproximar π

   - O GIF abaixo exemplifica o método de exaustão utilizado por Arquimedes, para chegar obter uma melhor aproximação possível do número π: inscrevendo e circunscrevendo uma circunferência de comprimento π por polígonos regulares cujo número de lados vai aumentando, vão-se obtendo as sucessivas aproximações desse número irracional.

Figura 52 – GIF sobre o Método de Arquimedes para aproximar π

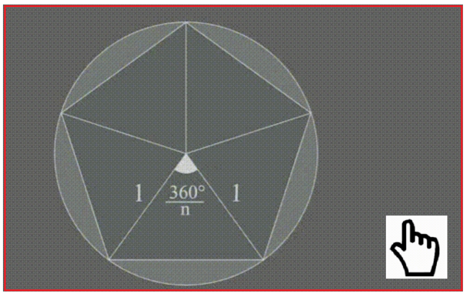


Fonte: Disponível em:<https://reddit.com/r/educational-gifs>. Acesso em: 20 set. 2019.

2. Cálculo de π

   - O GIF abaixo ilustra o cálculo de π ao considerar uma sequência de polígonos regulares cujas áreas se aproximam, por falta, a área de um círculo de raio 1. O limite dessa sequência, quando o número de lados tende a infinito é π.

Figura 53 – GIF sobre o cálculo de π

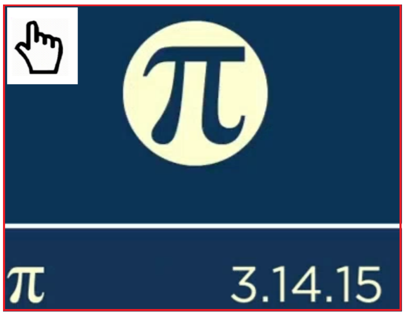


Fonte: Disponível em: <https://reddit.com/educationalgifs/pi>. Acesso em: 20 set. 2019.

3. Aproximação de π por comparação

   - Neste GIF, compara-se o comprimento de uma circunferência de diâmetro unitário com o seu diâmetro e apresenta-se a aproximação $\pi \simeq 3,14$:

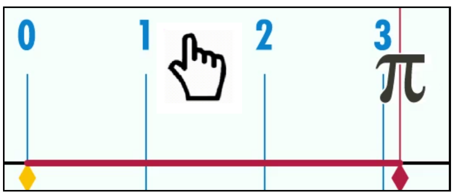
Figura 54 – GIF sobre a aproximação de π por comparação (I)



Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/GIFs/>. Acesso em: 20 set. 2019.

   - O próximo GIF recorre também à comparação do comprimento da circunferência com o seu diâmetro e conclui que é um número entre 3 e 4:

Figura 55 – GIF sobre a aproximação de π por comparação (II)

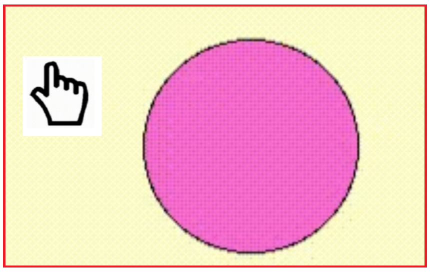


Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/pi>. Acesso em: 20 set. 2019.

4. Área do círculo

   - Recorrendo a retângulos de área “igual” à de coroas circulares que recobrem o círculo, obtém-se um triângulo com a mesma área deste. Obtendo, assim, para o cálculo da área do círculo a fórmula matemática $A_\circ = \pi r^2$, onde r é a medida do seu raio:

Figura 56 – GIF sobre a área do círculo



Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/circle>. Acesso em: 20 set. 2019.

4.4.3 GIFs sobre o Teorema de Pitágoras

Seguem abaixo as habilidades presentes na BNCC (BRASIL, 2018) relativas ao 9° ano do Ensino Fundamental que dizem respeito ao Teorema de Pitágoras:

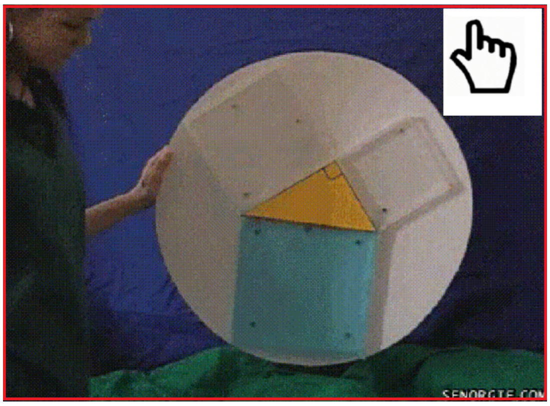
> **(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
>
> **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Os itens a seguir serão alguns GIFs que abordam o Teorema de Pitágoras, com vínculo nas habilidades da BNCC referenciadas no tópico acima:

1. Demonstração do Teorema de Pitágoras usando volumes

   - Este GIF usa o volume de prismas quadrangulares retos com a mesma altura para mostrar que a soma dos volumes de dois desses prismas é igual ao volume de um terceiro. Como a altura é constante, esta igualdade equivale à que se estabelece com as áreas das bases respectivas dos mesmos prismas, que em resumo, afirma a validade do Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são catetos e c é a hipotenusa em um Triângulo Retângulo:

Figura 57 – GIF sobre Teorema de Pitágoras (I)

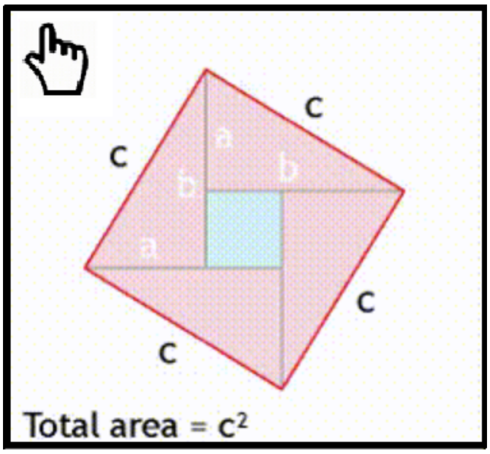


Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/pitagoras/>. Acesso em: 20 set. 2019.

2. Demonstração do Teorema de Pitágoras

   - Neste GIF, reorganizando os elementos que constituem um quadrado de lado c, surge uma figura equivalente formada por dois quadrados de lados a e b:

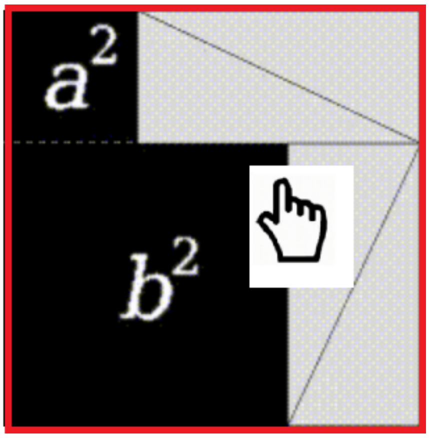
Figura 58 – GIF sobre Teorema de Pitágoras (II)



Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/pitagoras-area>. Acesso em: 20 set. 2019.

   - A ideia presente neste GIF é semelhante à anterior, diferindo no tipo de animação proposta para demonstrar o Teorema de Pitágoras:

Figura 59 – GIF sobre Teorema de Pitágoras (III)



Fonte: Disponível em: < https://giphy.com/pythagorean-theorem>. Acesso em: 20 set. 2019.

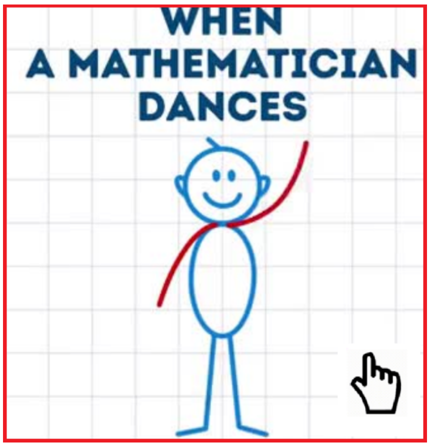
4.4.4 GIFs dos gráficos de diversas Funções

Algumas habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) referentes ao 9° ano do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, relacionadas com Funções e Gráficos são apresentadas a seguir:

> **(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
>
> **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

- No GIF seguinte conhecido como a “Dança das Funções”, podemos visualizar um personagem que gesticula seus os braços imitando esboços-padrão de alguns gráficos, tais como: função identidade, função quadrática, função modular, função cúbica, função recíproca, função logarítmica, função exponencial, função seno e função cosseno:

Figura 60 – GIF sobre gráficos de diversas Funções



Fonte: Disponível em: <https://homdor.com/the-math-dance>. Acesso em: 20 set. 2019.

4.4.5 GIFs sobre Trigonometria

Algumas habilidades referentes ao 9° ano do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, retiradas da BNCC (BRASIL, 2018) e que são referentes à Trigonometria:

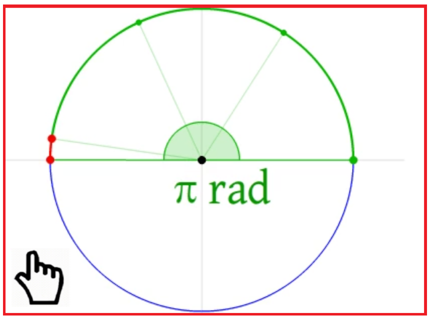
> **(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> **(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
>
> **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
>
> **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Apresentam-se abaixo alguns GIFs sobre Trigonometria e que estão relacionados às habilidades que foram citadas:

1. O radiano

   - Este GIF começa por apresentar a definição de radiano (1 rad), que é a amplitude de um ângulo definido em uma circunferência por um arco com o mesmo comprimento que o raio da referida circunferência. Em seguida, exibe os ângulos de π e 2π radianos:

Figura 61 – GIF sobre o que é radiano (1 rad)

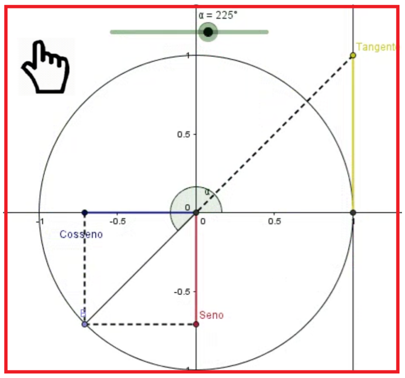


Fonte: Disponível em: <https://1ucasvb.tumblr.com/circle-radians.gif>. Acesso em: 20 set. 2019.

2. As linhas trigonométricas

 - No GIF abaixo, é possível visualizar uma circunferência de raio unitário e os segmentos de reta que representam o $sen(\alpha)$ (em vermelho), o $cos(\alpha)$ (em azul) e a $tg(\alpha)$ (em amarelo), sendo α o ângulo com lado origem no semieixo positivo das abscissas e com lado extremidade na semirreta $\overrightarrow{AB}$. A variação do ponto B dessa circunferência mostra a forma como variam as razões trigonométricas:

Figura 62 – GIF sobre as linhas trigonométricas

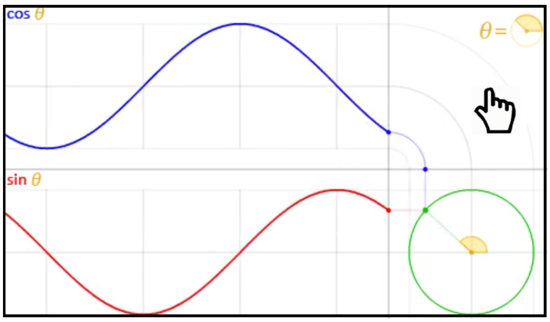


Fonte: Disponível em: <https://giphy.com/GIFs/>. Acesso em: 20 set. 2019.

3. Gráficos do seno e do cosseno

 - No GIF a seguir, recorrendoàs linhas do cosseno e do seno dadas no círculo trigonométrico, desenham-se os gráficos dessas funções. A linha do cosseno a azul e a do seno, a vermelha: $cos(\theta)$ (parte superior do GIF) e $sen(\theta)$ (parte inferior do GIF):

Figura 63 – GIF sobre os gráficos de seno e cosseno

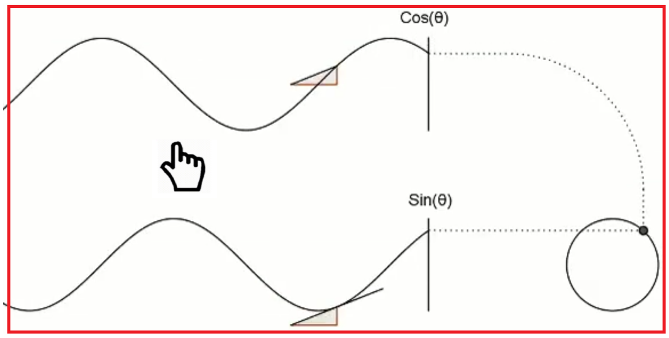


Fonte: Disponível em: <https://ww.1ucasvb.tumblr.com/graphics-sin-and-cos/>. Acesso em: 20 set. 2019.

4. Relação da variação do cosseno e do seno

 - Este GIF apresenta, também, a construção dos gráficos das funções cosseno e seno e apresenta a reta tangente em cada ponto do gráfico do seno e o que a sua declividade representa no gráfico do cosseno:

Figura 64 – GIF sobre a relação da variação de seno e cosseno

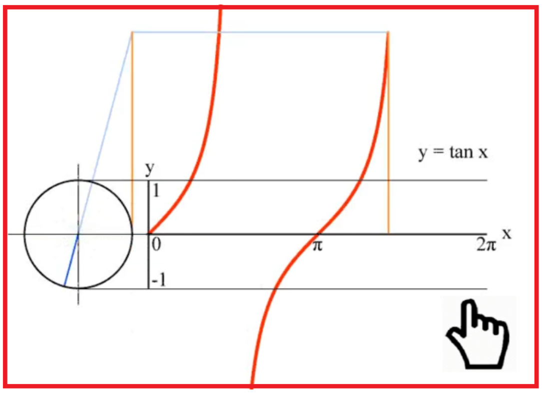


Fonte: Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/gif.pagespeed.ic.>. Acesso em: 20 set. 2019.

5. Gráfico da tangente

 - O GIF abaixo, nos mostra o comportamento gráfico da função $tg(x)$, onde x é um ângulo tal que $0 \leq x \leq 2\pi$, recorrendo para tal, à linha da tangente no círculo trigonométrico:

Figura 65 – GIF sobre o gráfico da tangente

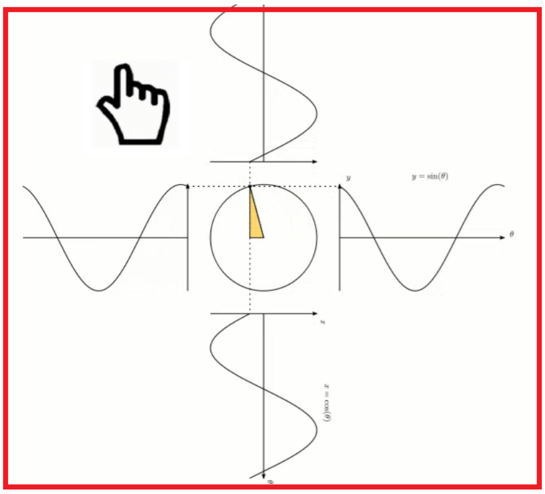


Fonte: Disponível em: <https://www.giphy.com/GIFs/>. Acesso em: 20 set. 2019.

6. Gráfico de $y = sen(x)$ e $x = \cos(y)$

   - Observamos no GIF a seguir, os gráficos das funções seno e cosseno, com a particularidade de que a variável independente de um é a dependente do outro. Por esse fato, um gráfico desenvolve-se segundo o eixo x (na horizontal), e o outro segundo o eixo y (na vertical):

Figura 66 – GIF sobre os gráficos de $y = sen(x)$ e $x = \cos(y)$



Fonte: Disponível em: <https://www.giphy.com/GIFs/math-geometry>. Acesso em: 20 set. 2019.

4.4.6 GIFs sobre Cônicas

Embora não esteja previsto nos conteúdos mínimos presentes na BNCC, o assunto secções cônicas é bastante interessante, sobretudo por suas aplicações. Assim, parece pertinente apresentar alguns GIFs que facilitam uma abordagem mais abrangente para exemplificar como se constroem a *parábola*, a *elipse* e a *hipérbole*.

1. A parábola

   - O GIF abaixo apresenta a construção da *parábola*, definida como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto e de uma reta dados:

Figura 67 – GIF sobre Parábola

Fonte: Disponível em: Site https://giphy.com/GIFs/NfbEk17QgK1zO>. Acesso em: 20 set. 2019.

2. A elipse

   - O GIF a seguir permite visualizar como é construída uma *elipse*, definida como o conjunto de pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos é constante e maior que a distância entre eles:

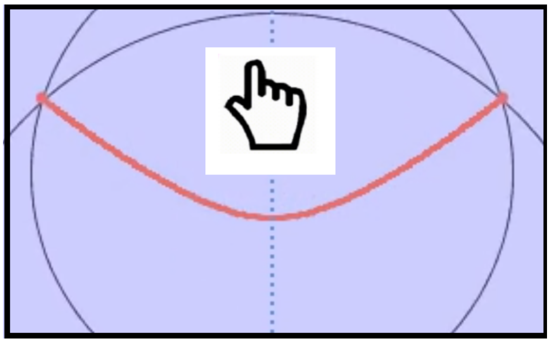
Figura 68 – GIF sobre Elipse

Fonte: Disponível em: <https://www.mathwarehouse.com/ellipse/what-makes-an-ellipse.php>. Acesso em: 20 set. 2019.

3. Ramo de hipérbole

   - O GIF abaixo possibilita compreender a construção de um ramo de *hipérbole* e seu aspecto geométrico. É definida como o conjunto de pontos do plano tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante (e positiva):

Figura 69 – GIF sobre Hipérbole



Fonte: Disponível em: <https://www.mathwarehouse.com/graph-equation-of-a-hyperbola.php>. Acesso em: 20 set. 2019.

No capítulo a seguir apresentamos propostas de atividades para sala de aula desenvolvidas partindo de alguns problemas olímpicos, Memes e GIFs.

5 ATIVIDADES ENVOLVENDO MEMES, GIF E PROBLEMAS OLÍMPICOS PARA SALA DE AULA

5.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar algumas propostas para atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, com a finalidade de expor uma aula mais atrativa e motivar o aluno a aprender matemática, utilizando a concatenação entre problemas de matemática (de olimpíadas), Memes e GIFs.

Iremos fazer uma conexão entre as ideias de alguns autores e culminá-las com a execução de algumas atividades. As ideias de Duval (1993), afirmando sobre a dificuldade do aluno em compreender corretamente o vínculo que existe entre o objeto matemático com a sua representação (relação entre o representado e o representante), com as ideias de Duval (2009) para solucionar essa dificuldade, que seria a realização da *conversão* - que é a transformação de uma representação semiótica para outra (uma mudança da forma (o representante) mas mantendo-se o objeto (o representado), associadas com as ideias de Posamentier (1996, p. 34) sobre representação visual, onde a qualidade de muitas experiências de ensino são consideravelmente aprimoradas quando da utilização de representações pictóricas adequadas, onde o mesmo conclui que os processos cognitivos em matemática que utilizam diagramas, imagens, tabelas, gráficos e vídeos podem nem sempre ser necessários, mas sempre tornam as coisas mais aprazíveis para o aluno.

Diante do exposto, traremos algumas atividades com a finalidade principal de utilizarmos Memes e GIFs (seriam as representações pictóricas adequadas) para explicar conteúdos de álgebra mas utilizando as explanações visuais que contêm aspectos predominantemente geométricos (seria a conversão - transformação de uma representação semiótica para outra, a álgebra para a geometria), impulsionando, assim, a resolução de problemas (alguns olímpicos) correlacionados com o conteúdo algébrico (seria a solução para o aluno compreender corretamente o objeto matemático com a sua representação)..

5.2 Estrutura Básica das Aulas referentes às Atividades

Cada uma das atividades foi planejada para 1 tempo de aula com a duração de 50 minutos em turmas a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, sendo necessário para a sua execução, que se utilize quadro branco, pilot, computador conectado a um projetor e iluminação adequada da sala de aula.

As atividades abaixo seguirão basicamente a mesma estrutura, com a sugestão para o tempo gasto em cada tópico:

1. Apresentação da atividade proposta no quadro, sendo necessário revisar/relembrar os tópicos abaixo (de modo breve) para uma melhor execução da atividade (10 minutos nesta etapa):

   - compreensão sobre a notação matemática de somatórios
   - cálculo do comprimento da circunferência e do valor de áreas de figuras planas (triângulo, retângulo, quadrado, círculo) - fórmulas;
   - cálculo do volume de prismas (paralelepípedo e cubo) - fórmulas;
   - noção de que juntarmos figuras planas significa somar as áreas (superfície) dessas mesmas figuras;
   - noção de que ao juntarmos figuras no espaço, significa somar os volumes (capacidade) dessas mesmas figuras;
   - regras básicas de potenciação e de resolução de equações do 1º grau (cancelamento de termos simétricos e operações inversas).

2. Apresentação via projeção do Meme e do GIF referentes à atividade trabalhada em sala, dando tempo para que o aluno interprete as imagens e tire suas conclusões preliminares para, após isso, ocorrer a explicação do professor acerca da interpretação correta do Meme e GIF apresentados. Utilização de material concreto/manipulativo, se houver produzido. (15 minutos nesta etapa)

3. Apresentação dos problemas propostos referentes à atividade para a resolução pelo aluno. (20 minutos nesta etapa)

4. Resposta dos problemas, reflexão/dúvidas sobre a aula e conclusão. (5 minutos nesta etapa)

A seguir estão elencadas as atividades, contendo seus Memes, GIFs e problemas respectivos:

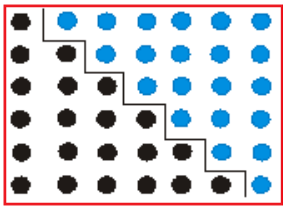
5.3 Atividade 1: Soma dos n primeiros números naturais

A soma dos n primeiros números naturais é dada por

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\boxed{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

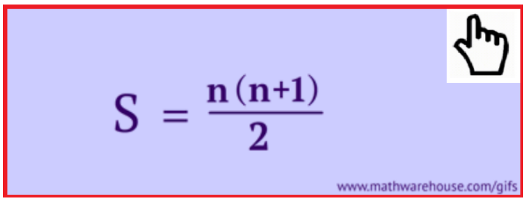
A seguir, temos na Figura 70, o Meme e, na Figura 71, o GIF referentes a esta atividade para serem projetados no quadro:

Figura 70 – Meme da soma dos n primeiros números naturais



Fonte: Disponível em:<http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Figura 71 – GIF da soma dos n primeiros números naturais



Fonte: Disponível em: <https://www.mathwarehouse.com/gifs/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Os problemas propostos[1] para esta atividade são os seguir apresentados:

5.3.1 Problemas da Atividade 1

$\boxed{01 - 1^{a} parte}$ **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n-1$ números iguais a $n-1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

Figura 72 – Banco OBMEP (2016)

$$\begin{array}{cccccc} n & n & n & \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & & \\ n-2 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & & \\ n & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n & n-1 & & & & \\ n & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & & \\ 3 & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n-1 & n & & & & \\ n & & & & & \end{array}$$

Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 48)

[1] Os problemas propostos nesta seção encontram-se resolvidos no Apêndice B deste Trabalho.

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n+n+1 = 2n+1$.

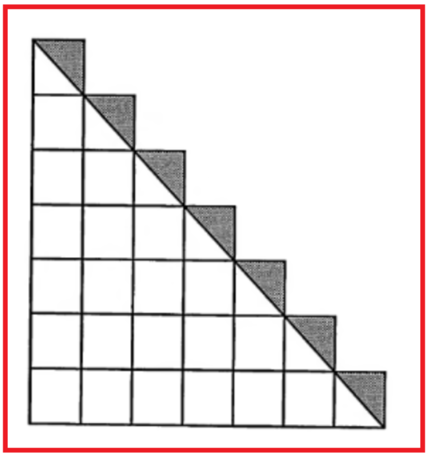
(a) Um modo de verificar quantos números tem em cada tabela é virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra para formar um retângulo com n linhas e o dobro de números de uma tabela. Sabendo disto, quantos números existem em uma tabela?

(b) Quantas vezes aparece cada número k em todas as três tabelas?

(c) Para cada posição, linha i e coluna j, determine os números escritos nela nas três tabelas e na tabela resultado.

02 O resultado do cálculo da área da Figura 73 representa numericamente o mesmo que a soma dos n primeiros números naturais. Interprete a figura corretamente e explique com suas palavras como se chegar na fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$:

Figura 73 – Área da figura $= 1 + 2 + 3 + 4 \cdots + n$



Fonte: (NELSEN, 1993, p. 70)

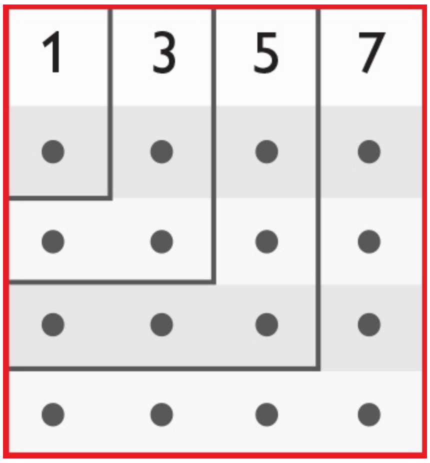
5.4 Atividade 2: Soma dos n primeiros números naturais ímpares

Soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

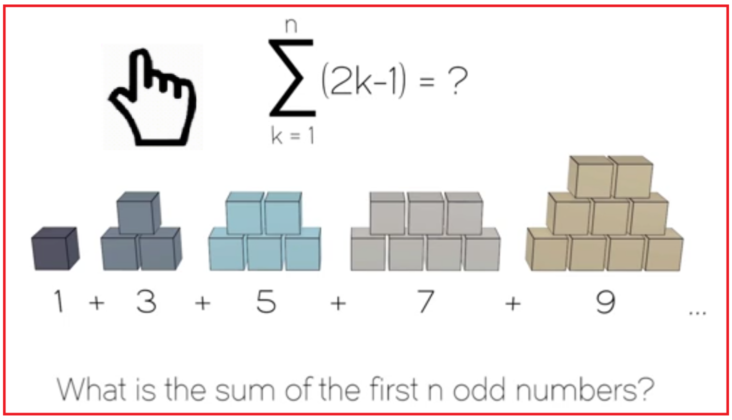
A seguir, temos na Figura 74 o Meme e, na Figura 75, o GIF referentes a esta atividade para serem projetados no quadro:

Figura 74 – Meme da soma dos n primeiros números naturais ímpares



Fonte: Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/86/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Figura 75 – GIF da soma dos n primeiros números naturais ímpares



Fonte: Disponível em: <https://reddit.com/r/educationalgifs/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Os problemas propostos[2] para esta atividade são os a seguir apresentados:

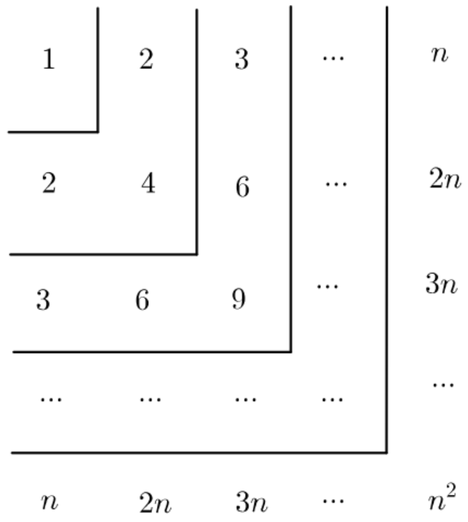
5.4.1 Problemas da Atividade 2

03 **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha possui os números de 1 até n. A segunda possui o dobro dos números de 1 até n. As linhas seguem esse padrão até a última linha que apresenta n vezes cada número de 1 até n.

[2] Os problemas propostos nesta seção encontram-se resolvidos no Apêndice B deste Trabalho.

Figura 76 – Banco OBMEP (2016)



Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 49)

Vamos usá-la para calcular o valor da expressão

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3$$

Além da tabela, usaremos o fato de que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

(a) Determine a soma de todos os números da linha de número k. Com isto, determine uma expressão para a soma de todos os números da tabela.

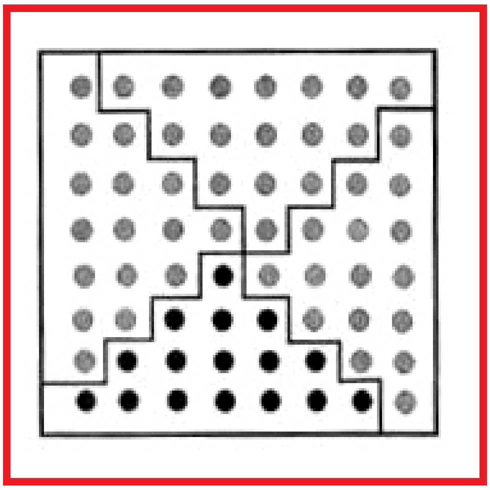
(b) Observe pedaços na tabela separando-a em camadas em forma de L. Os números em uma certa camada k são: $k, 2k, \cdots, (k-1)k, k^2, (k-1)k, \cdots, 2k, k$. Determine a soma dos números desta camada em função de k.

(c) Somando os resultados de todas as camadas, chegaremos ao mesmo resultado que somando todas as linhas. Juntando estas informações determine o valor da expressão:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3$$

$\boxed{04}$ Ao calcularmos a área da Figura 77 encontramos algebricamente o mesmo que uma fórmula fechada para a soma de números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

Figura 77 – A área da figura representa qual fórmula fechada para a soma de números?



Fonte: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

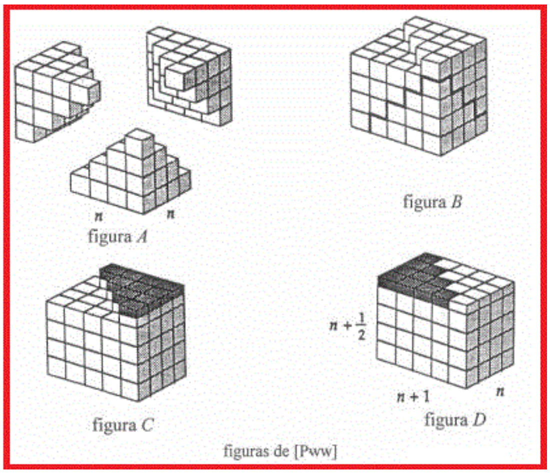
5.5 Atividade 3: Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais

Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \boxed{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}$$

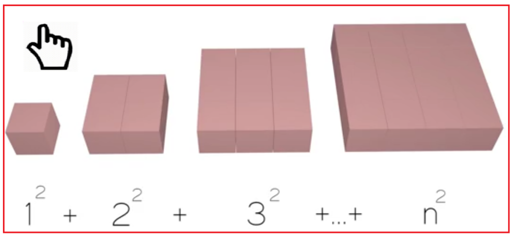
A seguir, temos na Figura 78, o Meme e, na Figura 79, o GIF referentes a esta atividade para serem projetados no quadro:

Figura 78 – Meme da soma dos quadrados dos n primeiros números naturais



Fonte: Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/39/images/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Figura 79 – GIF da soma dos quadrados dos n primeiros números naturais



Fonte: Disponível em: <https://reddit.com/r/educationalgifs/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

A seguir estão listados os problemas propostos[3] para esta atividade:

5.5.1 Problemas da Atividade 3

$\boxed{01 - 2^{\text{a}} parte}$ **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n-1$ números iguais a $n-1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

Figura 80 – Banco OBMEP (2016)

$$\begin{array}{cccccc} n & n & n & \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & & \\ n-2 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & & \cdots & 2 & \\ n & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n & n-1 & & & & \\ n & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & & \\ 3 & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n-1 & n & & & & \\ n & & & & & \end{array}$$

Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 48)

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n+n+1 = 2n+1$.

(a), (b) e (c) Já resolvidos no exercício nº 1 da atividade 1

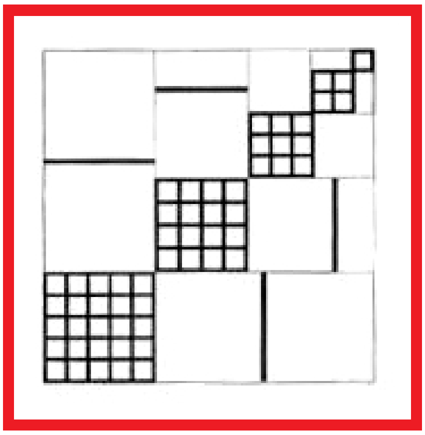
(d) Usando as informações dos itens anteriores, verifique que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

[3] Os problemas propostos nesta seção encontram-se resolvidos no Apêndice B deste Trabalho.

$\boxed{05}$ Ao calcularmos a área da Figura 81 encontramos algebricamente o mesmo que uma fórmula fechada para a soma de números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

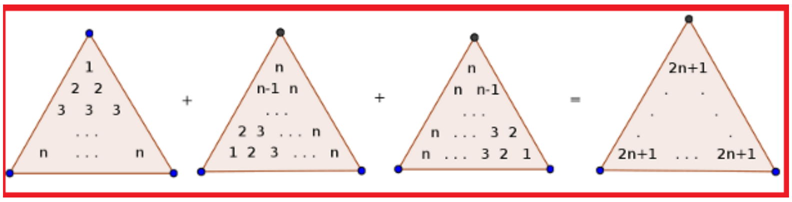
Figura 81 – A área da figura representa qual fórmula fechada para a soma de números?



Fonte: Disponível em: <http://rpm.org.br/images/1.htm79.jpg>. Acesso em: 15 dez. 2019.

$\boxed{06}$ Na Figura 82, temos quatro triângulos equiláteros compreendidos em uma relação de igualdade. Após interpretarmos a mensagem contida nas figuras e simplificarmos essa relação, encontraremos algebricamente a fórmula fechada para a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

Figura 82 – Fórmula fechada para a soma dos quadrados dos n primeiros naturais



Fonte: Disponível em: <https://jeremykun.files.wordpress.com>. Acesso em: 15 dez. 2019.

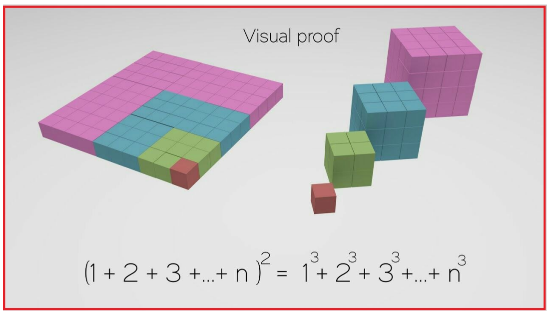
5.6 Atividade 4: O quadrado da soma dos n primeiros números naturais

O quadrado da soma dos n primeiros números naturais é igual à soma dos cubos dos n primeiros números naturais:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (n-1)^3 + n^3$$

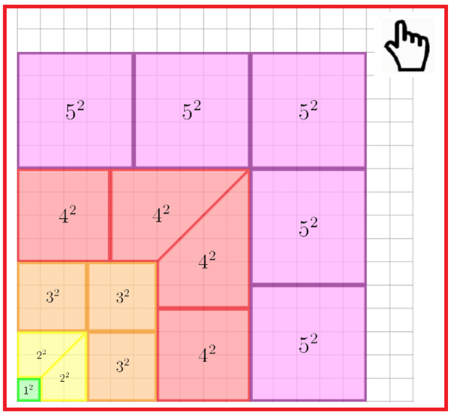
A seguir, temos na Figura 83 o Meme e, na Figura 84, o GIF referentes a esta atividade para serem projetados no quadro:

Figura 83 – Meme do quadrado da soma dos n naturais é igual à soma dos n^3



Fonte: Disponível em: <https://t.me/mathvisuals/29>. Acesso em: 5 jan. 2020.

Figura 84 – GIF do quadrado da soma dos n naturais é igual à soma dos n^3



Fonte: Disponível em: <https://www.reddit.com/r/educationalgifs/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

A seguir estão listados os problemas propostos[4] para esta atividade:

5.6.1 Problemas da Atividade 4

07 **BANCO (OBMEP, 2014a)**

Joãozinho começou a somar os primeiros cubos e reparou algo curioso:

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1 + 2)^2.$$

[4] Os problemas propostos nesta seção encontram-se resolvidos no Apêndice B deste Trabalho.

O mesmo vale se somarmos até ao terceiro:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1 + 2 + 3)^2.$$

Ou mesmo até ao quarto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Surpreso com isso, Joãozinho foi perguntar ao seu professor de matemática se isso sempre aconteceria. O professor então deu a Joãozinho os seguintes passos para mostrar esse fato: Seja

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

a soma dos n primeiros números,

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

a soma dos n primeiros quadrados e

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

a soma dos n primeiros cubos.

(a) Calcule a diferença $(n + 1)^2 - n^2$. Agora calcule a soma

$$(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots ((n + 1)^2 - n^2)$$

e conclua que $2 \cdot S_n + n = (n + 1)^2 - 1$. Ache uma fórmula para S_n

(b) Calcule $(n + 1)^3 - n^3$. Conclua que $3 \cdot Q_n + 3 \cdot S_n + n = (n + 1)^3 - 1$, e ache uma fórmula para Q_n.

(c) Calcule $(n + 1)^4 - n^4$. Conclua que $4 \cdot C_n + 6 \cdot Q_n + 4 \cdot S_n = (n + 1)^4 - 1$, e ache uma fórmula para C_n. Conclua que $C_n = S_n^2$ para todo natural n.

$\boxed{08}$ **(Instituto Militar de Engenharia / 2000)**
Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

5.7 Atividade 5: Calculando áreas hachuradas de quadrados e de círculos

Utilizaremos o GIF a seguir (Figura 85) para introduzir algumas ideias de arco de circunferência, raio do círculo, lado do quadrado e áreas hachuradas de figuras planas:

Figura 85 – GIF quem disse que a Trigonometria não serve para nada?

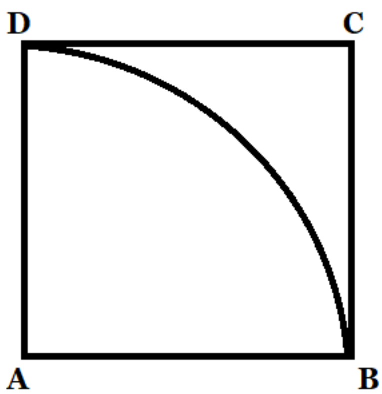
Fonte: Disponível em: <https://www.instagram.com/estudematemática>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Após isso, passaremos aos problemas propostos[5] para que sejam solucionados:

5.7.1 Problemas da Atividade 5

$\boxed{09}$ Após assistir ao GIF da figura 85, associe o vídeo com a figura geométrica abaixo (Figura 86), ou seja, faça uma relação entre os objetos e fatos assistidos no vídeo com a figura abaixo, que é um quadrado $ABCD$ de lado x metros contendo $\frac{1}{4}$ de uma circunferência inscrita nele. Após isso, responda o que se pede:

Figura 86 – Arco de circunferência inscrita em um quadrado $ABCD$ de lado x metros



Fonte: O autor, 2020

[5] Os problemas propostos nesta seção encontram-se resolvidos no Apêndice B deste Trabalho.

(a) Quanto mede o lado do quadrado $ABCD$?

(b) Quanto mede o raio do arco de circunferência inscrito no quadrado $ABCD$?

(c) O que representa, geometricamente, a linha imaginária percorrida pela ponta do poste até bater na cabeça do gato?

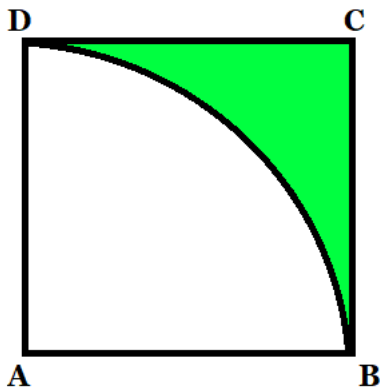
(d) O que representa, geometricamente, o poste?

(e) O que representa, geometricamente, a região plana compreendida entre o poste quando está na vertical, o chão e a linha imaginária percorrida pela ponta do poste até bater na cabeça do gato?

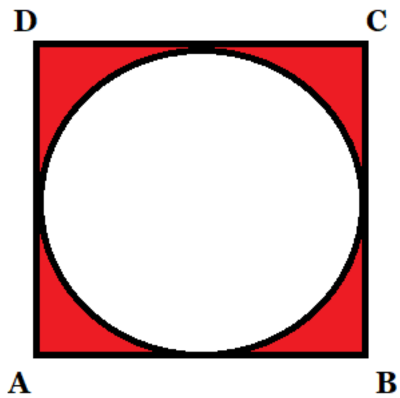
$\boxed{10}$ A Figura 87 contém quadrados $ABCD$ cujos lados medem 2 metros. Calcule o que é pedido em cada figura abaixo, utilizando seu conhecimento sobre comprimento da circunferência e o cálculo de áreas:

Figura 87 – Cálculo de área e perímetro

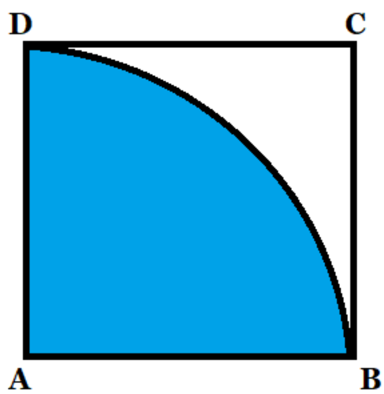
(a) A área destacada em verde



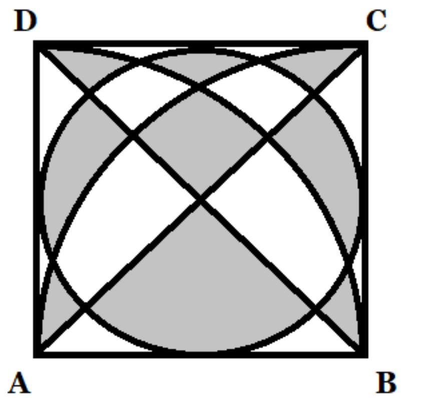
(b) A área destacada em vermelho



(c) A área destacada em azul



(d) O perímetro da região em cinza



Fonte: O autor, 2020.

6 CONCLUSÃO

A matemática não se restringe apenas no trabalho com as operações e os números; ela vai muito além. Devemos considerar toda a amplitude que essa área de conhecimento pode oferecer para a formação de um indivíduo. Considerando a importância do ensino da matemática na esfera escolar, devemos salientar que

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. BNCC (BRASIL, 2018, p. 265)

Dessa forma, durante seu estudo, há uma série de habilidades que podem ser desenvolvidas visando capacitar o aluno a assimilar as aprendizagens para resolver situações do cotidiano. O aprendizado durante esse processo certamente servirá ao aluno como exercício para o desempenho de seu papel como cidadão em interação com o mundo que o cerca; afinal, não queremos formar uma pessoa que apenas saiba, mas que, com seus conhecimentos, possa estabelecer relações com o mundo ao seu redor, fazer intervenções e modificações em seu ambiente de maneira eficiente, consciente e com responsabilidade.

Podemos dizer que compreender a matemática é uma tarefa ampla e repleta de variáveis. Quando estamos diante da aprendizagem de um novo conceito, precisamos formular nossas próprias hipóteses, escutar as dos outros, planejar uma maneira para resolver determinado problema, confrontar as nossas respostas ou nossas hipóteses com as dos outros, antecipar e validar resoluções. Dentre as várias habilidades que são adquiridas ao desenvolver os conhecimentos matemáticos, podemos destacar a possibilidade de analisar várias formas de resolver determinados problemas e de conforontar e validar hipóteses. Isso propicia uma aprendizagem que extrapola o ensino de matemática, culminando na formação de um indivíduo mais atuante na sociedade, que se relaciona com grupos e que enfrenta situações-problema buscando soluções e não se inibindo diante de questões mais complexas.

Nosso trabalho teve grande enfoque nas resoluções de problemas e nas potencialidades advindas dessas soluções. Demos também uma perspectiva sobre o papel da BNCC no ensino de matemática. Houve também uma grande parte dedicada à apresentação, comentários e conclusões acerca das possibilidades geradas através do uso de Memes e GIFs como recursos pedagógicos. Ressaltamos nesse momento, a necessidade de haver senso crítico ao nos depararmos com esses artefatos tecnológicos tão corriqueiros em nosso dia-a-dia, pois podemos receber Memes ou GIFs matematicamente errados, sendo então crucial o papel em primeira instância, do Professor que os coleta e utiliza, mas também, num segundo momento, do aluno que, ao receber essa informação, tem, em nosso ponto de vista, o dever de criticar, discordar, debater e duvidar sempre que houver necessidade. Isso é algo que merece ser destacado: o senso crítico ao receber informação, sempre com o objetivo de refletir e de raciocinar sobre o que nos é repassado.

Por outro lado, em determinado ponto do trabalho admitimos que o modelo teórico da convergência, dentro de uma perspectiva acerca das Teorias das Representações preconizadas por Duval, nos parece ir ao encontro do uso de Memes e de GIFS como intermediários para o Ensino de Matemática. Esse é um tópico relevante e talvez seja mais profundamente abordado em trabalhos futuros.

Concluímos esta Dissertação sem a menor pretensão de esgotar os assuntos centrais até aqui tratados, sejam a proposta de Ensino por Resolução de Problemas, o foco delineador e orientador da BNCC para o Ensino de Matemática e a utilização de Memes e de GIFs como recurso pedagógico para a Matemática. Esperamos que este trabalho sirva de incentivo para a elaboração de outros de mesmo tema, que seja utilizado como recurso pedagógico em turmas regulares de Ensinos Fundamental e Médio, tudo em prol de uma melhor qualidade no Ensino de Matemática deste País.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Complex Numbers from A to... Z**. Boston: Birkhäuser, 2006.

ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Number Theory: Structures, Examples and Problems**. EUA: Birkhäuser, 2009.

ANDREESCU, T.; DOSPINESCU, G.; MUSHKAROV, O. **Number Theory: Concepts and Problems**. EUA: XYZ Press, 2017.

ANDREESCU, T.; GELKA, R. **Mathematical Olympiad Challenges**. 2. ed. Berlim: Birkhauser, 2009.

ARAUJO, M. D. de. **Os Segredos da Álgebra para IME-ITA-Olimpíadas**. Fortaleza: Vestseller, 2018.

BEILER, A. H. **Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1966.

BESKIN, N. **Fracciones Maravillosas - lecciones populares de matemáticas**. 3. ed. Moscou: Editora MIR Moscou, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum (BNCC): Ensino Fundamental e Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2018.

BRITO, F. R. M. de. **Números Místicos**, Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 58, p. 35–42, 2006.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. 2. ed. Havana: MAA New Mathematical Library, 1975.

DJUKIC, D. et al. **The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads 1959-2009**. 2. ed. EUA: Springer, 2011.

DUVAL, R. **Registres de representation semiótique e fonctionnement cognitif de la penseé**, Annales de Didactique et de Sciences Gognitives, v. 5, p. 37–64, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Sémiosis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. L. F. Levy e M. R. A. da Silveira**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FLUSSER, V. **Filosofia da Caixa Preta: Ensaios para uma filosofia da fotografia**. São Paulo: HUCITEC, 1985.

FLUSSER, V. **Into the Universe of Tecnical Images**. London: University of Minesota Press, 2010.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

GOLDSMITH, M. **Do Zero ao Infinito (e Além): Tudo o que você sempre quis saber sobre matemática e tinha vergonha de perguntar**. 1. ed. EUA: Saraiva, 2016.

GREITZER, S. **International Mathematical Olympiads 1959-1977**. EUA: Mathematical Association of America, 1978.

HARVARD-MIT. **Harvard-MIT Mathematics Tournament**. 2000. Data de acesso: 5 dez. 2019. Disponível em: <https://hmmt-archive.s3.amazonaws.com/tournaments/2000/feb/guts/problems.pdf>.

HEFEZ, A. **Aritmética: Coleção PROFMAT**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

HONSBERGER, R. **Mathematical Gems II**. 2. ed. EUA: The Mathematical Association of America, 1976.

HONSBERGER, R. **More Mathematical Morsels**. EUA: The Mathematical Association of America, 1991.

HONSBERGER, R. **Mathematical Chestnuts from Around the World**. 1. ed. EUA: The Mathematical Association of America, 2001.

JIAGU, X. **Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses: For Junior Section**. 1. ed. Singapore: World Scientific, 2010. v. 1.

KELLNER, D. **A Cultura da Mídia**. Bauru, SP: EDUSC, 2001.

KNOP, C. **Nine solutions to one problem**, Quantum Magazine, v. 4, n. 5, p. 46–49, 1994.

LANGE, J. de. In: MADISON, B. L.; STEEN, L. A. (Ed.). **Quantitative Literacy: Why Numeracy Matthers for Schools and Colleges**. Princeton: The National Council on Education and the Disciplines, 2003.

LIDSKI, V. B. et al. **Problemas de Matematicas Elementales**. 1. ed. URSS: MIR, 1972.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta: Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Geometria I**. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1990.

NADAL, J. H. D. **A Cultura do GIF: Reconfigurações de imagens técnicas a partir dos usos e apropriações de narrativas cíclicas.** Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tuiuti do Paraná, Curitiba, 2014.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking**. EUA: The Mathematical Association of America, 1993.

NETO, A. A. et al. **Progressões e Logarítmos**. 1. ed. Fortaleza: VestSeller, 2009. v. 2.

OBMEP. **Provas/Soluções OBMEP**. 2013. Data de acesso: 5 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>.

OBMEP. **Banco de Questões OBMEP**. 2014. Data de acesso: 10 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>.

OBMEP. **Provas/Soluções OBMEP**. 2014. Data de acesso: 5 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>.

OBMEP. **Banco de Questões OBMEP**. 2016. Data de acesso: 10 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>.

OBMEP. **Banco de Questões OBMEP**. 2018. Data de acesso: 10 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>.

OBMEP. **Provas/Soluções OBMEP**. 2018. Data de acesso: 5 dez. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>.

OLDS, C. D. **Continued Fractions**. 3. ed. Toronto: Random House New Mathematical Library, 1963.

ONUCHIC, L. de L. R. **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. (Ed.). **Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. São Paulo: NCTM, 2004.

ORIHUELA, J. B. **Congruencia de Triángulos - Teoría - Demonstraciones - Trazos Auxiliares**. 1. ed. Peru: Editorial CUZCANO, 2007. v. 3.

PARADO, R. F. **Teorema de Lidski para hatre cuadráticos de operadores**. 1. ed. Havana: Academia de Ciências de Cuba, 1986.

PEREIRA, V. R. F. **Domingo regado a Repunits**, Revista Eureka, n. 29, p. 27–31, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo método matemático**. 2 reimpr. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciencia, 1995.

POSAMENTIER, A. S. **The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher**. California: Corwin Press, 1996.

POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging Problems in Algebra**. 6. ed. New York: Dover Publications, 1988.

PROFMAT. **Busca de Dissertações PROFMAT**. 2019. Data de acesso: 15 set. 2019. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno= >.

RUFINO, M. de O.; PINHEIRO, M. R. da R. **Elementos da Matemática: Conjuntos, Funções e Aritmética**. 3. ed. Pará: Livraria do Rufino, 2010. v. 1.

RUFINO, M. de O.; PINHEIRO, M. R. da R. **Elementos da Matemática: Geometria Plana**. 2. ed. Pará: Livraria do Rufino, 2016. v. 2.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje: Enfoque, sentidos e desafios**. São Paulo: Ática, 2007.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações**. São Paulo: Cortez, 1999.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. In: SHULTE, A. P.; TRAFTON, P. R. (Ed.). **Developing Understanding in Mathematics via Problems Solving**. Reston: NCTM, 1989. p. 31–42.

SHINE, C. Y. **21 Aulas de Matemática Olímpica**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

SILVA, D. da. **De onde vêm as palavras: frases e curiosidades da língua portuguesa**. 17. ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2014.

TAWALKAR, P. **Ramanujan's Radical Brain Teaser - Sunday Puzzle**. 2016. Data de acesso: 5 dez. 2019. Disponível em: <https://mindyourdecisions.com/blog/2016/05/01/ramanujans-nested-radical-sunday-puzzle/>.

TAYLOR, P. J. **International Mathematics Tournament of the Towns 1989 to 1993 Questions and Solutions**. 3. ed. Australia: Australian M Trust, 1994.

YAGLOM, I. M.; SHKLARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N. **The URSS Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics**. 1. ed. Canadá: Dover Publications, 1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS MEMES-DESAFIOS APRESENTADOS NO CAPÍTULO 4

Neste apêndice iremos solucionar os Memes-desafios propostos no 4° capítulo (Exploração do Potencial Pedagógico de Memes e GIFs para o Ensino de Matemática):

A.1 Resoluções dos Memes de Desafios Matemáticos que circulam na Internet/Redes Sociais

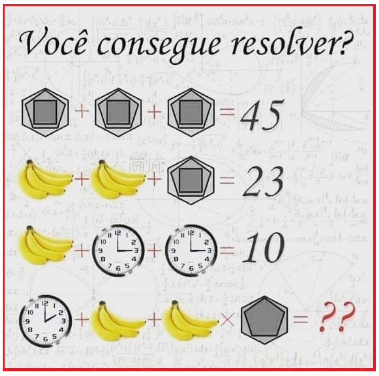
A.1.1 Problema apresentado na Figura 48a (Figuras geométricas, relógios e bananas):

- 1ª Linha: Chamaremos de A a figura que é o quadrado inscrito no pentágono e ambos inscritos no hexágono, logo $A + A + A = 45 \Rightarrow 3A = 45 \Rightarrow A = 15$.

- 2ª Linha: Chamaremos de B o cacho de bananas, então $B+B+A = 23 \Rightarrow 2B+15 = 23 \Rightarrow B = 4$.

- 3ª Linha: Chamaremos a imagem do relógio mostrando 3horas "cheias" de C, portanto $B + C + C = 10 \Rightarrow 4 + 2C = 10 \Rightarrow C = 3$

Figura 88 – Figuras geométricas, relógios e bananas



Fonte: É a mesma Figura 48a

Para solucionar a 4ª linha, devemos seguir o seguinte raciocínio:

- Como $C = 3$ é o relógio mostrando 3horas "cheias", então o relógio mostrando 2horas "cheias" valerá $x = 2$;

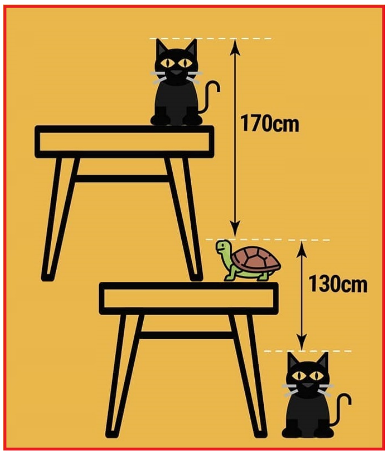
- Como $B = 4$ é o cacho contendo 4 bananas, então o cacho contendo 3 bananas valerá $y = 3$;

- Como $A = 15$ representa um quadrado inscrito em um pentágono e ambos inscritos num hexágono, ou seja, $A = 4 + 5 + 6 = 15$, então a figura que é o pentágono inscrito no hexágono valerá $z = 5 + 6 = 11$.

Solução Desafio: $x+y+y\cdot z \Rightarrow 2+3+3\cdot 11 = \boxed{38}$

A.1.2 Problema apresentado na Figura 48b (Gato, tartaruga e mesa):

Figura 89 – Gato, tartaruga e mesa



Fonte: O autor, 2020.

Utilizando como ponto de partida a Figura 48b, devemos sobrepor a mesa da esquerda sobre a da direita, resultando na Figura 89. Após definirmos mesa $= x$, gato $= y$ e tartaruga $= z$, teremos a seguinte equação:

$$\begin{cases} y + x - z = 170 \\ z + x - y = 130 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + x + y - y + z - z = 170 + 130 \;\Rightarrow\; 2x = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 150}$$

A.1.3 Problema apresentado na Figura 48c (3 Bolas de sinuca que somam 30):

No desafio proposto na Figura 48c, devemos escolher 3 bolas de sinuca, representadas por números, de tal forma que a soma delas seja 30. Perceba, inicialmente, que os números apresentados são todos ímpares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. Note que, pelo princípio da paridade, a soma de três números ímpares sempre resultará num número ímpar, portanto é impossível que essa soma resulte em 30. Para que o resultado da soma entre três números seja par, deveremos ter ou três números pares somados ou 2 números ímpares e 1 número par somados. Esta última hipótese é, então a solução do desafio, pois como estamos tratando de bolas de sinuca, a bola que aparenta ser a 9, trata-se na realidade da bola 6, o que se vê girando a bola. Com isso, podemos ter as soluções: $11 + 13 + 6 = \boxed{30}$ ou $9 + 15 + 6 = \boxed{30}$.

Figura 90 – 3 bolas que somam 30

Fonte: É a mesma figura 48c

A.1.4 Problema apresentado na Figura 48d (Descobrir as 3 cores em uma soma):

Utilizando como ponto de partida a Figura 48d, iremos substituir as três parcelas da soma pelo produto de uma parcela por 3, resultando na Figura 91. Após definirmos X sendo a bola vermelha, Y sendo a bola branca, **Z** sendo a bola azul, iremos nos ater a resultados da tabuada de 3 e fazer as análises:

Figura 91 – 3 cores em uma soma

Fonte: O autor, 2020.

$$3 \times \boxed{X} = 1\boxed{X} \Rightarrow 3 \times 5 = 15 \Rightarrow \boxed{X} = 5$$

$$1+3\times\boxed{Y} = \boxed{d}5 \Rightarrow 1+3\times 8 = 25 \Rightarrow \boxed{Y} = 8$$

$$2 + 3 \times \boxed{\mathbf{Z}} = 5 \Rightarrow 2 + 3 \times 1 = 5 \Rightarrow \boxed{\mathbf{Z}} = 1$$

Portanto, teremos $\boxed{\mathbf{Z}} = 1$, $\boxed{Y} = 8$ e $\boxed{X} = 5$.

A.1.5 Problema apresentado na Figura 48e (Menino, boné e luvas de boxe):

- 1ª Linha: Chamaremos cada luva de boxe de L, então $2L + 2L + 2L = 24 \Rightarrow 6L = 24 \Rightarrow L = 4$.

- 2ª Linha: Chamaremos o boné de B, então $B + 2L = 11 \Rightarrow B + 2 \cdot 4 = 11 \Rightarrow B = 3$.

- 3ª Linha: Chamaremos o menino de M, então $M+2B = 11 \Rightarrow M+2\cdot 3 = 11 \Rightarrow M = 5$

Figura 92 – Menino, boné e luvas

Fonte: É a mesma Figura 48e

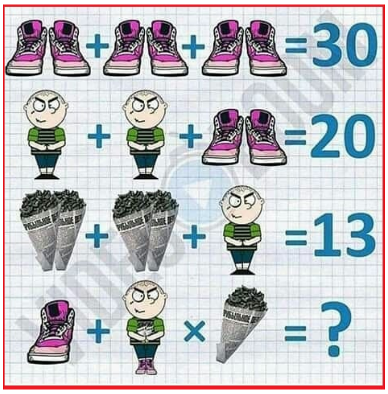
A leitura da 4ª linha tem a seguinte situação: Luva + Boné × (Menino usando o Boné e um par de Luvas). Então ao substituirmos cada valor encontrado, teremos:

$L+B\times(M+B+2L) = 4+3\times(5+3+2\cdot 4) = \boxed{52}$.

A.1.6 Problema apresentado na Figura 48f (Menino, tênis rosa e 2 pacotes):

- 1ª Linha: Chamaremos cada pé do tênis rosa de T, então $2T + 2T + 2T = 30 \Rightarrow 6T = 30 \Rightarrow T = 5$.
- 2ª Linha: Chamaremos o menino de M, então $M + M + 2T = 20 \Rightarrow 2M + 2 \cdot 5 = 20 \Rightarrow M = 5$.
- 3ª Linha: Chamaremos cada pacote de P, então $2P + 2P + M = 13 \Rightarrow 4P + 5 = 13 \Rightarrow P = 2$

Figura 93 – Menino, tênis e pacotes



Fonte: É a mesma Figura 48f

A leitura da 4ª linha tem a seguinte situação: Tênis + (Menino usando um par de Tênis e segurando 2 Pacotes) × Pacote. Então ao substituirmos cada valor encontrado, teremos:
$T+(M+2T+2P)\times P = 5+(5+2\cdot5+2\cdot2)\times 2 = \boxed{43}$.

APÊNDICE B – RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NO CAPÍTULO 5

B.1 Resoluções das Atividades envolvendo Memes, GIF e Problemas Olímpicos para Sala de Aula

B.1.1 Problemas propostos na Atividade 1: Soma dos n primeiros números naturais

$\boxed{01 - 1^{\text{a}} parte}$ **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n-1$ números iguais a $n-1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

Figura 94 – Banco OBMEP (2016)

$$
\begin{array}{cccccc}
n & n & n & \cdots & n & n \\
n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & & \\
n-2 & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & & \\
2 & 2 & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{cccccc}
n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\
n & n-1 & \cdots & 2 & & \\
n & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & & \\
n & n-1 & & & & \\
n & & & & &
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & \cdots & n & & \\
3 & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
n-1 & n & & & & \\
n & & & & &
\end{array}
$$

Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 48)

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n+n+1 = 2n+1$.

(a) Um modo de verificar quantos números tem em cada tabela é virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra para formar um retângulo com n linhas e o dobro de números de uma tabela. Sabendo disto, quantos números existem em uma tabela?

Solução

Ao virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra, formamos um retângulo $n \times (n+1)$. Como este retângulo possui o dobro de números de uma tabela, cada uma delas possui $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ números.

(b) Quantas vezes aparece cada número k em todas as três tabelas?

Solução

Cada número k aparece k vezes na primeira tabela, k vezes na segunda e k vezes na terceira. Portanto, cada número k aparece $3k$ vezes no total.

(c) Para cada posição, linha i e coluna j, determine os números escritos nela nas três tabelas e na tabela resultado.

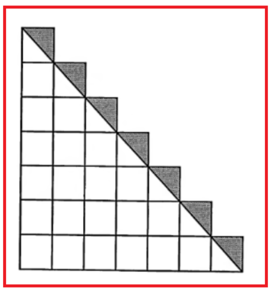
Solução

Na primeira tabela, a linha determina o valor daquela posição. Como o número inicial n é reduzido em uma unidade a cada linha mais abaixo, então na linha i e coluna j teremos $n+1-i$. Usando o mesmo raciocínio na segunda tabela, na linha i e coluna j teremos o número $n+1-j$. Já na terceira tabela, observe que as posições associadas a elementos de uma diagonal possuem a soma de sua linha e coluna constante. Além disto, o número escrito em uma casa de uma diagonal é uma unidade a menos que esta constante. Logo, na linha i e coluna j teremos $i+j-1$. Na tabela resultante de somar as três tabelas teremos o número

$$(n+1-i)+(n+1-j)+(i+j-1)=2n+1.$$

$\boxed{02}$ O resultado do cálculo da área da Figura 95 representa numericamente o mesmo que a soma dos n primeiros números naturais. Interprete a figura corretamente e explique com suas palavras como se chegar na fórmula $\dfrac{n(n+1)}{2}$:

Figura 95 – Área da figura $= 1+2+3+4\cdots+n$



Fonte: (NELSEN, 1993, p. 70)

Solução

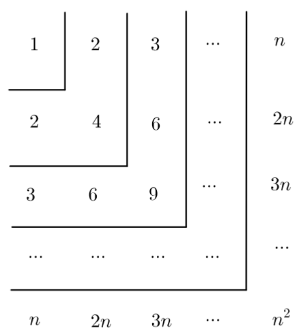
Temos inicialmente que os quadradinhos da figura possuem lado medindo 1. Podemos perceber que a parte clara da figura é a metade da área de um quadrado de lado n, ou seja, é $\dfrac{n \cdot n}{2} = \dfrac{n^2}{2}$. Já a parte escura da figura representa n metades de quadradinhos de lado 1, ou seja, sua área total é $n \cdot \dfrac{1^2}{2} = \dfrac{n}{2}$. Ao somarmos as áreas da parte clara e da parte escura teremos $\dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

B.1.2 Problemas propostos na Atividade 2: Soma dos n primeiros números naturais ímpares

$\boxed{03}$ **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha possui os números de 1 até n. A segunda possui os dobros dos números de 1 até n. As linhas seguem esse padrão até a última linha que apresenta n vezes cada número de 1 até n.

Figura 96 – Banco OBMEP (2016)



Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 49)

Vamos usá-la para calcular o valor da expressão

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 100^3$$

Além da tabela, usaremos o fato de que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

(a) Determine a soma de todos os números da linha de número k. Com isto, determine uma expressão para a soma de todos os números da tabela.

Solução

Os números na linha t são os números de 1 até n multiplicados por t. A soma deles é $t+2t+3t+...+nt = t(1+2+3+...+n) \Rightarrow t+2t+3t+\cdots+nt = t\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.
A soma dos números na tabela pode ser calculada usando a soma de todas as linhas. Como $\dfrac{n(n+1)}{2}$ é fator comum, ele pode ser colocado em evidência e teremos

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(1+2+3+...+n) = \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$

(b) Observe pedaços na tabela separando-a em camadas em forma de L. Os números em uma certa camada k são: $k, 2k, \cdots, (k-1)k, k^2, (k-1)k, \cdots, 2k, k$. Determine a soma dos números desta camada em função de k.

Solução

Somando os números teremos:

$$\begin{aligned} k+2k+\cdots+(k-1)k+k^2+(k-1)k+\cdots+k &= k^2+2k(1+2+3+\cdots+(k-1)) \\ &= k^2+2k\frac{(k-1)k}{2} \\ &= k^2+(k^3-k^2) \\ &= \boxed{k^3}. \end{aligned}$$

(c) Somando os resultados de todas as camadas, chegaremos ao mesmo resultado que somando todas as linhas. Juntando estas informações determine o valor da expressão:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$$

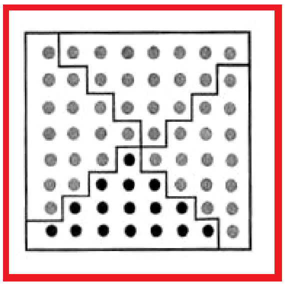
Solução

Se fizermos a tabela para $n=100$ teremos 100 linhas e 100 camadas. Com as informações dos itens anteriores podemos concluir que:

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+\cdots+100^3 &= \left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2 \\ &= 5050^2 \\ &= \boxed{25502500}. \end{aligned}$$

$\boxed{04}$ Ao calcularmos a área da Figura 97 encontramos algebricamente o mesmo que uma fórmula fechada para a soma de números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

Figura 97 – A área da figura representa qual fórmula fechada para a soma de números?



Fonte: Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Solução

Podemos perceber que o quadrado está dividido internamente em 4 figuras iguais. Verificamos que cada um desses pedaços representa a soma dos primeiros números ímpares $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots (2n - 1)$.
Com isso, a fórmula fechada será:
$S = 4 \cdot [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)] \Rightarrow \boxed{S = 4 \cdot n^2}$

B.1.3 Problemas propostos na Atividade 3: Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais

$\boxed{01 - 2^{\text{a}} parte}$ **BANCO (OBMEP, 2016)**

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n - 1$ números iguais a $n - 1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

Figura 98 – Banco OBMEP (2016)

$$\begin{array}{lllll} n & n & n \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & \\ n-2 & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \\ 2 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{llllll} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & & \cdots & 2 & \\ n & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n & n-1 & & & & \\ n & & & & & \end{array} \quad + \quad \begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & & n & \\ 3 & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n-1 & n & & & & \\ n & & & & & \end{array}$$

Fonte: BANCO (OBMEP, 2016, p. 48)

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n+n+1 = 2n+1$.

(a), (b) e (c) Já resolvidos na atividade 1

(d) Usando as informações dos itens anteriores, verifique que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \tag{B.1}$$

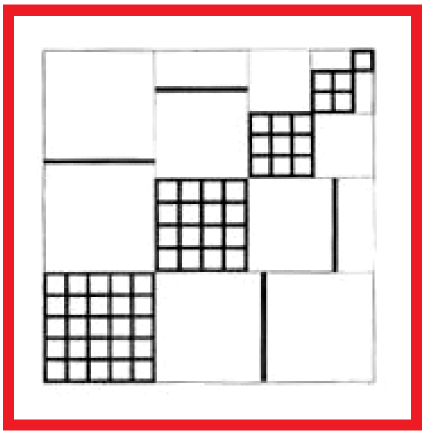
Solução

Usando os itens anteriores, notamos que a tabela do resultado possui $\dfrac{n(n+1)}{2}$ elementos iguais a $2n+1$. Deste modo, podemos somar os números das três tabelas dadas de duas maneiras diferentes: somando cada número k nas três tabelas ou somando os números da tabela resultante. Assim,

$$\begin{aligned} (3 \cdot 1) \cdot 1 + (3 \cdot 2) \cdot 2 + \cdots (3 \cdot n) \cdot n &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1) \\ 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) &= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

$\boxed{05}$ Ao calcularmos a área da Figura 99 encontramos algebricamente o mesmo que uma fórmula fechada para a soma de números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

Figura 99 – A área da figura representa qual fórmula fechada para a soma de números?



Fonte: Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

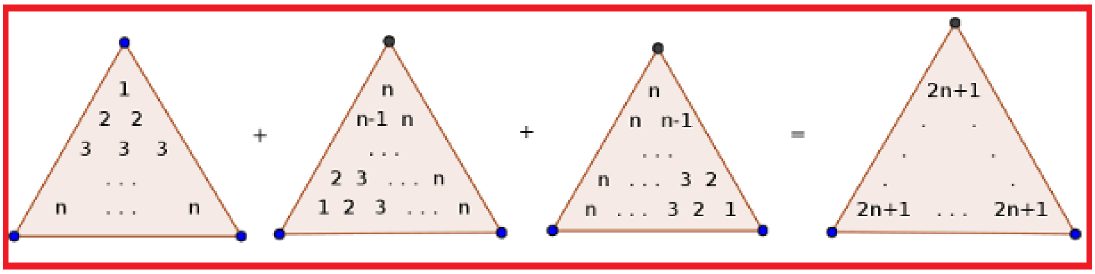
Solução

Observando a figura, podemos perceber a diagonal do maior quadrado passando por uma sequência de quadrados negritados cujos lados vão aumentando a partir do canto superior direito no sentido do canto inferior esquerdo ($1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ e etc todos negritados). Perceba que o quadrado negrito $1^2 = 1$ está encaixado com um quadrado negrito 2^2 e com dois retângulos do tipo 2×1, ou seja, $2 \cdot 2 \times 1 = 2^2$, com isso, teremos $2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2$. Agora note que o quadrado no qual estão inseridos os negritados 1^2 e o 2^2 está encaixado com um quadrado negrito 3^3 e com mais dois quadrados 3^3, ou seja, $3^3 + 3^3 + 3^3 = 3 \cdot 3^3$. Prosseguindo com o raciocínio da sequência, o quadrado no qual estão inseridos os negritados 1^2, o 2^2 e o 3^2 está encaixado com um quadrado negrito 4^2, com dois quadrados 4^2 e dois retângulos do tipo 4×2, ou seja, $2 \cdot 4 \times 2 = 4^2$, com isso, teremos $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 4 \cdot 4^2$. Na última etapa visível na figura, podemos verificar que o quadrado no qual estão inseridos os quadrados negritados 1^2, 2^2, 3^2 e 4^2, está encaixado com um quadrado negrito 5^2 e com quatro quadrados 5^2, com isso, teremos $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5 \cdot 5^2$. Note que esta sequência continua e ao somarmos todas as parcelas que a compõem, chegaremos na seguinte fórmula fechada

$$S = 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 5^2 + \cdots + n \cdot n^2 \Rightarrow S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3$$

$\boxed{06}$ Na Figura 100, temos quatro triângulos equiláteros compreendidos em uma relação de igualdade. Após interpretarmos a mensagem contida nas figuras e simplificarmos essa relação, encontraremos algebricamente a fórmula fechada para a soma dos quadrados do n primeiros números naturais. Interprete a figura e explique como se chegar a essa fórmula fechada:

Figura 100 – Fórmula fechada para a soma dos quadrados dos n primeiros naturais



Fonte: Disponível em: <https://jeremykun.files.wordpress.com/>. Acesso em: 15 dez. 2019.

Solução

Na figura 100 temos uma igualdade envolvendo 4 triângulos, a qual chamaremos $\triangle T_1 + \triangle T_2 + \triangle T_3 = \triangle T_4$. Note que podemos calcular a soma dos números no interior do $\triangle T_1$, verificando o padrão numérico que percorre as linhas no interior do triângulo, a partir do vértice superior até a linha da base:

$$T_1 = (1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4)+(5+5+5+5+5)+\cdots+\overbrace{n+n+\cdots+n}^{n \text{ termos}}) \Rightarrow$$
$$T_1 = 1+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5+\cdots+n\cdot n \Rightarrow \; T_1 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2$$

Observe agora, que podemos calcular a soma dos termos no interior do $\triangle T_4$, seguindo o mesmo raciocínio utilizado com $\triangle T_1$, pois teremos um padrão numérico que percorre as linhas no interior do $\triangle T_4$, a partir do vértice superior até a linha da base:

$$T_4 = ((2n+1)+(2n+1+2n+1)+(2n+1+2n+1+2n+1)+(2n+1+2n+1+2n+$$
$$1+2n+1)+\cdots+\overbrace{(2n+1+2n+1+\cdots+2n+1)}^{n \text{ termos}} \Rightarrow$$
$$T_4 = 1\cdot(2n+1)+2\cdot(2n+1)+3\cdot(2n+1)+4\cdot(2n+1)+\cdots+n\cdot(2n+1) \Rightarrow$$
$$T_4 = (1+2+3+4+\cdots+n)\cdot(2n+1) \Rightarrow T_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Note que à esquerda da igualdade, temos três triângulos equiláteros idênticos, sendo apenas diferenciados por uma rotação no sentido anti-horário ($\triangle T_2$ é gerado após uma rotação do $\triangle T_1$ e $\triangle T_3$ após uma rotação do $\triangle T_2$). Com isso, teremos $\triangle T_1 = \triangle T_2 = \triangle T_3$, então:

$$\triangle T_1 + \triangle T_2 + \triangle T_3 = \triangle T_4 \Rightarrow 3\cdot \triangle T_1 = \triangle T_4 \Rightarrow$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \Rightarrow$$
$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

B.1.4 Problemas propostos na Atividade 4: O quadrado da soma dos n primeiros números naturais

$\boxed{07}$ **BANCO (OBMEP, 2014a)**

Joãozinho começou a somar os primeiros cubos e reparou algo curioso:

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1+2)^2.$$

O mesmo vale se somarmos até ao terceiro:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1+2+3)^2.$$

Ou mesmo até ao quarto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

Surpreso com isso, Joãozinho foi perguntar ao seu professor de matemática se isso sempre aconteceria. O professor então deu a Joãozinho os seguintes passos para mostrar esse fato: Seja

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

a soma dos n primeiros números,

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

a soma dos n primeiros quadrados e

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

a soma dos n primeiros cubos.

(a) Calcule a diferença $(n+1)^2 - n^2$. Agora calcule a soma

$$(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots ((n+1)^2 - n^2)$$

e conclua que $2 \cdot S_n + n = (n+1)^2 - 1$. Ache uma fórmula para S_n

Solução

Vale que $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$. Então podemos calcular a soma $(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots ((n+1)^2 - n^2)$ de duas maneiras. Primeiro vemos que a maioria dos fatores vão se cancelar, por exemplo, o 2^2 se cancela com o -2^2 que aparece logo depois; o mesmo vale para o 3^2. Na verdade, os únicos termos que não serão cancelados são o -1^2 e o $(n+1)^2$ (isso é chamado de uma soma telescópica). Portanto, essa soma vale $(n+1)^2 - 1$. Por outro lado, usando a diferença que calculamos acima, podemos reescrever a soma como

$(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \cdots + (2 \cdot n + 1) = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n = 2S_n + n$. Portanto, concluímos que $2S_n + n = (n+1)^2 - 1$. Sabendo disso, podemos achar uma fórmula para S_n:

$$\begin{aligned} 2S_n + n &= (n+1)^2 - 1 \\ 2S_n &= n^2 + 2n + 1 - 1 - n \\ 2S_n &= n^2 + n \\ S_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(b) Calcule $(n+1)^3 - n^3$. Conclua que $3 \cdot Q_n + 3 \cdot S_n + n = (n+1)^3 - 1$, e ache uma fórmula para Q_n.

Solução

Repetindo o processo anterior, calculamos
$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$
Calculando a soma
$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3)$
de modo telescópico, vemos que ela é igual a $(n+1)^3 - 1$. Por outro lado, podemos reescrevê-la como
$(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3n^2 + 3n + 1) = 3Q_n + 3S_n + n$
Logo, concluímos que
$3Q_n + 3S_n + n = (n+1)^3 - 1$
Substituindo o valor de S_n que encontramos anteriormente, ficamos com

$$\begin{aligned} 3Q_n + 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n &= n^3 + 3n^2 + 3n \\ 3Q_n &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2} \\ 3Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\ Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ Q_n &= \frac{n(n+1)(2n+1))}{6} \end{aligned}$$

(c) Calcule $(n+1)^4 - n^4$. Conclua que $4 \cdot C_n + 6 \cdot Q_n + 4 \cdot S_n = (n+1)^4 - 1$, e ache uma fórmula para C_n. Conclua que $C_n = (S_n)^2$ para todo natural n.

Solução

Por fim, calculamos o valor de C_n. Seguindo com o raciocínio, vemos que $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.
Calculando a soma $(2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \cdots + ((n+1)^4 - n^4)$ de modo telescópico, vemos que ela é igual a $(n+1)^4 - 1$. Por outro lado, podemos reescrevê-la como
$(4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1)+(4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1)+\cdots+(4n^3+6n^2+4n+1) = 4C_n+6Q_n+4S_n+n$.
Substituindo os valores de S_n e Q_n encontrados acima,

$$\begin{aligned}
4C_n + 6\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) + \left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n &= n^4+4n^3+6n^2+4n \\
4C_n + (2n^3+3n^2+n) + (2n^2+2n) + n &= n^4+4n^3+6n^2+4n \\
4C_n &= n^4+2n^3+n^2 \\
C_n &= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} \\
C_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Então, podemos concluir claramente que $C_n = (S_n)^2$ para todo valor de n natural. Portanto, a conjectura de Pedrinho estava certa.

$\boxed{08}$ **(Instituto Militar de Engenharia / 2000)**
Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Solução

Há uma alternativa para a resolução deste exercício utilizando o Teorema da Somação, mas nitidamente ficaria muito extensa. Iremos utilizar a mesma ideia do procedimento adotado na assertiva **(B)** do problema anterior. Calculamos
$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$
Calculando a soma
$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + ((n+1)^3 - n^3)$
de modo telescópico, vemos que ela é igual a $(n+1)^3 - 1$. Por outro lado, podemos reescrevê-la como
$(3\cdot1^2+3\cdot1+1)+(3\cdot2^2+3\cdot2+1)+\cdots+(3n^2+3n+1) = 3Q_n+3S_n+n$
Logo, concluímos que

$3Q_n + 3S_n + n = (n+1)^3 - 1$

Substituindo o valor de S_n que encontramos anteriormente, ficamos com

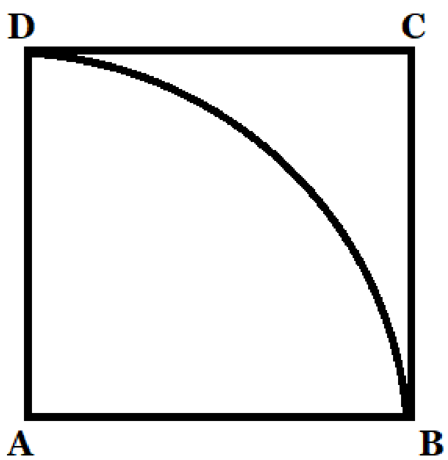
$$
\begin{aligned}
3Q_n + 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n &= n^3 + 3n^2 + 3n \\
3Q_n &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2} \\
3Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\
Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
Q_n &= \frac{n(n+1)(2n+1))}{6}
\end{aligned}
$$

Uma alternativa válida para se escrever o polinômio $Q(n)$ pedido é $Q(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

B.1.5 Problemas propostos na Atividade 5: Calculando áreas hachuradas de quadrados e de círculos

$\boxed{09}$ Após assistir ao GIF da figura 85, associe o vídeo com a figura geométrica abaixo (Figura 101), ou seja, faça uma relação entre os objetos e fatos assistidos no vídeo com a figura abaixo, que é um quadrado $ABCD$ de lado x metros contendo $\dfrac{1}{4}$ de uma circunferência inscrita nele. Após isso, responda o que se pede:

Figura 101 – Arco de circunferência inscrito em um quadrado



Fonte: O autor, 2020

(a) Quanto mede o lado do quadrado $ABCD$? **Solução:** 30 metros

(b) Quanto mede o raio do arco de circunferência inscrito no quadrado $ABCD$?

Solução: 30 metros

(c) O que representa, geometricamente, a linha imaginária percorrida pela ponta do poste até bater na cabeça do gato?

Solução: Representa o arco de uma circunferência

(d) O que representa, geometricamente, o poste?

Solução: Representa o raio da circunferência e também o lado do quadrado

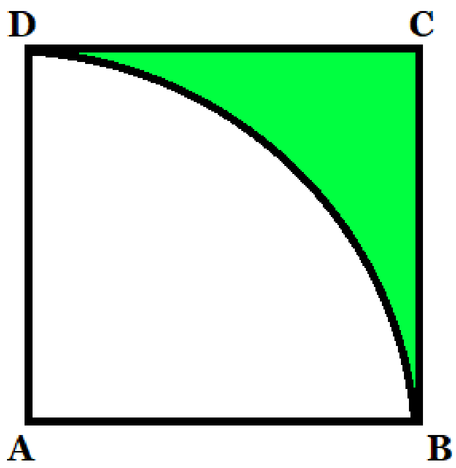
(e) O que representa, geometricamente, a região plana compreendida entre o poste quando está na vertical, o chão e a linha imaginária percorrida pela ponta do poste até bater na cabeça do gato?

Solução: Representa um setor circular de 90º

$\boxed{10}$ As Figuras 102 até 105 contém quadrados $ABCD$ cujos lados medem 2 metros. Calcule o que é pedido em cada figura abaixo, utilizando seu conhecimento sobre comprimento da circunferência e o cálculo de áreas:

Solução

Figura 102 – Calcule a área destacada em verde

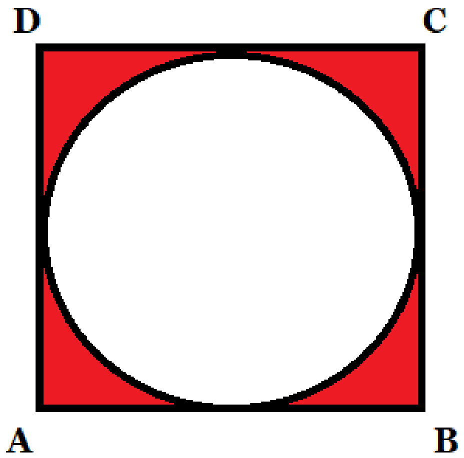


Fonte: O autor, 2020

Solução

Na Figura 102: Área Verde $= A_{\square} - \frac{1}{4} \cdot A_{\bigcirc} = 2^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow$ Área Verde $= 4 - \pi m^2$

Figura 103 – Calcule a área destacada em vermelho

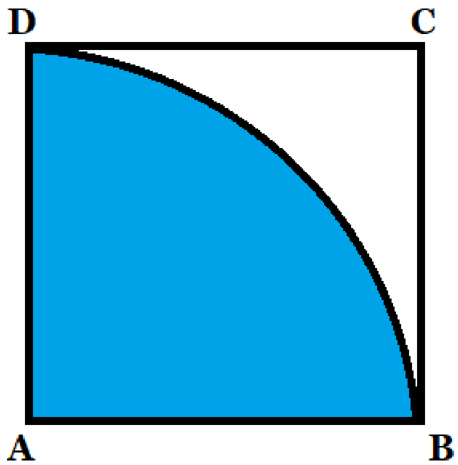


Fonte: O autor, 2020

Solução

Na Figura 103: Área Vermelha $= A_{\square} - A_{\bigcirc} = 2^2 - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow$ Área Vermelha $= 4(1-\pi)m^2$

Figura 104 – Calcule a área destacada em azul

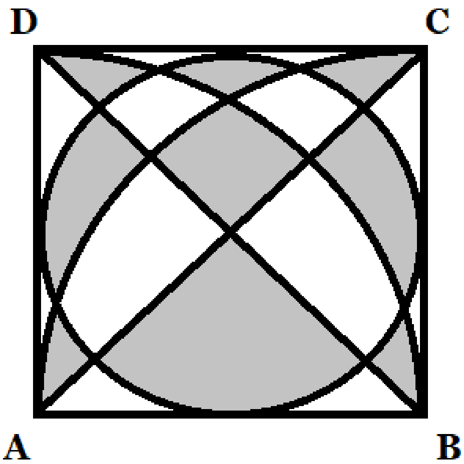


Fonte: O autor, 2020

Solução

Na Figura 104: Área Azul $= \frac{1}{4} \cdot A_{\bigcirc} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow$ Área Azul $= \pi m^2$

Figura 105 – Calcule perímetro da região em cinza



Fonte: O autor, 2020

Solução

Na Figura 105: Perímetro Cinza $= 2 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi R + 2 \cdot L\sqrt{2} \Rightarrow$

Perímetro Cinza $= 2\pi \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$ Perímetro Cinza $= 3\pi + 2\sqrt{2}$ m