Universidade Estadual do Maranhão – UEMA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação – PPG
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT

Enio Valdo Costa Mouzinho

FUNÇÕES ELEMENTARES: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

São Luís–MA

2020

Enio Valdo Costa Mouzinho

FUNÇÕES ELEMENTARES: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) como parte dos resquisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Felix Silva Costa

São Luís–MA

2020

Mouzinho, Enio Valdo Costa.
Funções elementares: problemas e aplicações / Enio Valdo Costa Mouzinho. – São Luís, 2020.

83 f

Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

1.Funções elementares. 2.Ensino contextualizado. 3.Resolução de problemas. I.Título

CDU: 517.5:37

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

Enio Valdo Costa Mouzinho

FUNÇÕES ELEMENTARES: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) como parte dos resquisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. São Luís–MA, 30 de junho de 2020:

Felix Silva Costa

Dr. Felix Silva Costa - UEMA
Orientador

Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS
Examinadora Externo

Dr. Sergio Noleto Turibus - UEMA
Examinador Interno

São Luís–MA
2020

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por minha vida, saúde e forças para superar as dificuldades e tornar meus sonhos em realidade no tempo determinado por Ele.

A meus pais, Maria Raimunda e Raimundo Mouzinho, pelo amor, carinho e apoio.

A minha querida esposa pela parceria e incentivo incondicional, a ela, eterna gratidão.

Ao Prof. Dr João Coelho pela forma heroica, competente e sonhadora que conduz o programa PROFMAT–UEMA.

Aos professores do Mestrado da UEMA, em especial ao Prof. Dr. Sérgio Turiubis, pelo ensino e palavras de incentivo durante o Exame de Qualificação.

Aos meus colegas de mestrado: Kleyton, Agnaldo, Marcelo, Neto, Vicente e tantos outros, que além de parceiros de curso, se mostraram amigos de batalhas durante esta jornada acadêmica

À Ananda, secretária do curso, pela disponibilidade e atenção a todos.

Ao meu orientador Dr. Félix Silva pelo companheirismo e empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da idealização e construção desta obra.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal fornecer uma abordagem diferenciada para o ensino de funções elementares no contexto do Ensino Médio, preocupando-se com a compreensão dos conceitos, definições, caracterizações e aplicações das principais funções elementares. Através de um estudo bibliográfico realizado à luz das principais diretrizes e conceitos elaborados acerca da temática escolhida e aliando prática e teoria, tem-se como meta o entendimento do aluno e reconhecimento das características da função afim, quadrática, exponencial e logarítmica como modelos matemáticos de situações concretas em contextos interdisciplinares. Esperamos com isso diminuirmos as dificuldades dos estudantes em entender a linguagem matemática bem como seu uso no cotidiano e em disciplinas correlatas, como a Física, a Química e a Biologia.
Palavras-chave: Funções Elementares. Ensino Contextualizado . Resolução de Problemas.

Abstract

The present work has as main objective to provide a differentiated approach to the teaching of elementary functions in the context of High School, being concerned with the understanding of the concepts, definitions, characterizations and applications of the main elementary functions. Through a bibliographic study carried out in the light of the main guidelines and concepts developed about the chosen theme and combining practice and theory, the goal is to understand the student and recognize the characteristics of the affine, quadratic, exponential and logarithmic function as mathematical models of concrete situations in interdisciplinary contexts. With this we hope to reduce students' difficulties in understanding mathematical language as well as its use in everyday life and in related disciplines, such as Physics, Chemistry and Biology.

Keywords: Elementary functions. Contextualized teaching.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática no cenário atual da educação brasileira possui muitos desafios e um destes desafios é a contextualização do aprendizado matemático. Conforme o Prof. Elon Lages Lima afirma, em (LIMA, 1999), o ensino da matemática se apoia em três componentes básicas: Conceituação, Manipulação e Aplicação, explicando que, a primeira componente compreende o trabalho usualmente feito pelo professor nas "aulas teóricas", em que as definições e proposições são apresentadas, as fórmulas são (possivelmente) deduzidas, e são estabelecidas as relações dos conceitos com outros já conhecidos dos alunos. A segunda componente é usualmente realizada através dos chamados "exercícios de fixação", em que o aluno tem a oportunidade de aplicar os conceitos e, principalmente as fórmulas ensinadas, em uma sequência de situações progressivamente mais complicadas. A terceira consiste na solução de problemas com enunciados que se referem a situações concretas com o objetivo de mostrar interações da Matemática com os diversos domínios do conhecimento.

Identificamos esta estrutura presente nos livros didáticos atuais e adotada massivamente como recurso metodológico por boa parte dos professores. Porém, essa Metodologia tem gerado resultados poucos satisfatórios para o ensino da Matemática. Este fato decorre da pouca ênfase na busca, tratamento e uso de situações com mais aplicabilidade. Ora, a contextualização do conteúdo matemático fornece ao aluno o entendimento de como a matemática está integrada e relacionada com outras áreas do conhecimento; capacita-o para compreender, interpretar e modelar situações reais, a fim de obter suas próprias conclusões. É importante que o conhecimento matemático seja associado a alguma aplicabilidade, mas como vimos essa tarefa não é simples. "As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar os estudos, por vezes áridos, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe." (LIMA, 1999).

De fato, como cita (BRASIL.MEC, 2006), as características comuns à Biologia, à Física, à Química e à Matemática recomendam uma articulação didática e pedagógica, fazendo-se uso de procedimentos metodológicos comuns e linguagens compartilhadas que permitem competências gerais, traduzidas para a especificidade da área, desenvolvidas em cada uma das disciplinas científicas e, organicamente, pelo seu conjunto. As contextualizações apresentadas nos principais livros didáticos nacionais referentes ao conteúdo de funções elementares trazem, nem sempre, toda a eficácia em relação ao que é mais importante, construir o modelo. Na maioria das vezes, é apresentada uma fórmula com a função trabalhada em questão, sem apresentar, no entanto, a maneira como a função encaixou-se no problema. Fazer apenas cálculos por fórmulas dadas não significa aprender Matemática. Desta forma, a diretriz norteadora desta proposta reflete na seguinte questão: Como saber, se em determinada situação, o modelo matemático a ser adotado recai em uma função afim, quadrática, exponencial ou logarítmica? Fornecer meios, testes, análises e verificações de como tais funções podem ser usadas para descrever fenômenos do mundo real é o objetivo desta produção que apoia-se na nossa riquíssima bibliografia matemática nacional.

Paralelo à contextualização das funções elementares, vamos também trabalhar os principais problemas referentes a esta temática, numa perspectiva de aprofundar os conceitos apresentados e fornecer ao docente uma ampliação de seu acervo com problemas que geralmente não constam nos principais livros didáticos. Procuramos de uma forma simples apresentá-los, solucioná-los e estabelecer conexões com as possíveis contextualizações. Para tanto, procuramos o máximo possível fornecer exemplos de problemas desafiadores mas mantendo sempre o norte que é a aplicação prática. Assim, o professor pode usar as etapas de apresentação e solução dos problemas como orientadoras de sua proposta metodológica, e aprofundar seu conhecimento fazendo uso da parte teórica desta obra bem como da bibliografia referente a ela. Este é o objetivo maior, auxiliar, fornecer, esclarecer e aprofundar a formação matemática relativa ao conteúdo de funções do professor da educação básica.

Assim, a presente obra organiza-se em três capítulos. O segundo capítulo traz a parte teórica do conteúdo de funções buscando sempre o rigor, os conceitos, as caracterizações, as referências maiores e as conexões entre a Matemática e as disciplinas exatas correlatas. No último capítulo, apresentamos os problemas e as aplicações das principais funções elementares, buscando a contextualização com ênfase nas caracterizações de cada uma em particular.

Ao final da dissertação são apresentadas as considerações finais, e por fim, as referências bibliográficas.

1 Funções Elementares

Faremos aqui uma apresentação teórica das principais funções elementares, com suas propriedades características, gráficos, zeros reais e etc. Para começarmos nossa explanação, trataremos inicialmente do aspecto histórico e do conceito de função, uma das ideias mais fundamentais da Matemática.

1.1 Função

A noção intuitiva de função está presente quando existe uma relação entre duas grandezas variáveis. Por exemplo, o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles, isto é, o preço a pagar é dado em função do número de litros comprados. Existe neste caso uma relação de dependência entre a grandeza preço a pagar (p) e o número de litros de gasolina comprados (l) expressa pela equação, por exemplo $p = 4,88l$. A equação dada é denominada lei da função ou regra da função.

O conceito de função aparece de forma intuitiva desde a Antiguidade com tabelas que relacionavam valores de duas grandezas variáveis. Por exemplo, Cláudio Ptolomeu, cientista do século II que viveu em Alexandria durante o período romano, elaborou a famosa Tabela de Cordas, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação. Essa tabela foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central θ, associava o comprimento l da corda correspondente (DANTE, 2013).

Figura 1 – Retrato de Cláudio Ptolomeu, cientista grego (90-168).

Fonte: (DANTE, 2013).

A palavra função, na forma que usamos hoje, vem aparecer pela primeira vez em correspondências entre dois grandes matemáticos: o suíço Jean Bernoulli e o alemão Gottfried Leibniz. Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função.

No século XVIII, o matemático suíço Leonard Euler forneceu grandes contribuições para que esse conceito ficasse bem definido e utilizado de forma precisa. É atribuída a Euler a representação de uma função pela notação $f(x)$ (leia-se f de x) (DANTE, 2013).

Figura 2 – Retrato de Leonhard Euler, matemático suíço.

Fonte: (DANTE, 2013).

No século XIX, Lejeune Dirichlet, famoso matemático alemão, escreveu uma primeira definição de função muito semelhante a que usamos atualmente.

Segundo (LIMA, 2014), de modo geral, dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B $(f : A \to B)$ é uma lei ou regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A é chamado domínio de f, o conjunto B, o contradomínio de f e o valor $y = f(x)$ (leia-se "y igual a f de x") para todo $x \in A$, a imagem de x pela função f, ou simplesmente a imagem de x.

Utilizaremos a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Ainda segundo (LIMA, 2014), a regra que determina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, estando sujeita apenas a duas condições:

1º Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$;

2º Não deve haver ambiguidade: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B.

Podemos concluir então pelas definições acima, que duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são iguais, se e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Isto é, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

Exemplo 1. *A função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2. *A função identidade $i : X \to X$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$.*

Exemplo 3. *A função afim restrita aos naturais $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Aqui definimos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.*

Exemplo 4. *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 10^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Sobre o ensino de funções, destacamos a seguinte observação:

> O que a Matemática Moderna fez com o ensino de funções redundou num desenvolvimento excessivamente formal, abstrato e longo desse tópico do programa, ocupando toda a primeira série do 2º grau, e afastado das aplicações que podem se constituir em boa motivação. Atualmente gasta-se muito tempo explicando as operações de união, interseção e produto cartesiano de conjuntos, para se chegar à definição de função como um caso particular de relação. Isto nada tem de motivador para o aluno e é irrelevante nos exemplos de funções que são discutidos nesse estágio do aprendizado, todos eles dados por fórmulas simples. (ÁVILA, 1983)

É importante notar que uma fórmula algébrica, por si só, não define uma função. Por exemplo a função $y = x^2$ pode ser usada para definir a lei de função de várias funções, tais como $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x^2$ e $f_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definida por $f_2(x) = x^2$. Apesar de estarem definidas pelas mesma fórmula algébrica, f_1 e f_2 são funções diferentes, pois, como veremos mais adiante, f_2 é bijetiva e f_1 não. Ademais, existem funções que não são definidas por uma única fórmula em todo o seu domínio, como por exemplo

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}
\end{aligned}
$$

A fixação do conceito de função à ideia de uma fórmula algébrica pode ser tão forte, que alguns alunos apresentam dificuldades em entender funções definidas por mais de uma expressão como uma função só; ou seja, cometem o erro de entender cada uma das expressões como uma função diferente.

Também deve-se observar o fato que as variáveis de uma função podem ser quaisquer objetos matemáticos, não somente números. Por exemplo, translações e homotetias são exemplos de funções, cujo domínio e o contradomínio são o plano (ou o espaço) euclidiano.

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções, com $C \subset B$. A função composta de g com f, indicada por $g \circ f$, com domínio em A e contradomínio em B, associa cada elemento $x \in A$ ao elemento $y = g \circ f(x) = g(f(x)) \in D$. Isto é:

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f: & A & \to & C \subset B & \to & D \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Uma função $f : A \to B$ é invertível se existe uma função $g : B \to A$ tal que

- $f \circ g = I_B$;
- $g \circ f = I_A$

Note que I_A representa a função identidade do conjunto A, ou seja, $I_A : x \in A \mapsto x \in A$. Neste caso, a função g é dita a função inversa de f e denotada por $g = f^{-1}$

Seja $f : A \to B$, temos as seguintes definições:

- f é injetiva se $\forall x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou equivalentemente, $\forall x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- f é sobrejetiva se $\forall\, y \in A$,$\exists x \in A$; $f(x) = y$;
- f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Exemplo 5. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é bijetiva.*

Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = f(y)$, vem

$$2x - 1 = 2y - 1 \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y,$$

logo f é injetiva. Agora, dado $y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f\left(\frac{y+1}{2}\right) = 2\left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 = y,$$

isto é, tomando $x = \dfrac{y+1}{2}$, vem $f(x) = y$. Portanto f é sobrejetiva.

Exemplo 6. *$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x^2$ não é injetiva. Com efeito $f_1(-2) = f_1(2)$ embora $-2 \neq 2$*

Teorema 1. *Uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, f é bijetiva.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que f ser bijetiva é condição necessária para f ser invertível. Com efeito, como f é invertível segue que existe $g : B \to A$ tal que: (i) $f \circ g = I_B$ e (ii) $g \circ f = I_A$. Seja agora $y \in B$ e $x = g(y)$. Da condição (i), segue que $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = I_B(y) = y$. Assim, dado $y \in B$ exibimos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, f é sobrejetiva. Sejam agora $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Da definição de função, segue que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Daí, pela condição (ii), tem-se que $I_A(x_1) = I_A(x_2)$, portanto $x_1 = x_2$, isto é, f é injetiva.Por fim, vamos mostrar que f ser bijetiva é condição suficiente para f ser invertível. De fato, desejamos construir uma função $g : B \to A$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição de função invertível. Para tanto, considere $y \in B$ qualquer. Como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e, como f é injetiva, o elemento x com esta propriedade é único. Desta forma, definiremos $g(y) = x$ como o único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, as duas condições almejadas decorrem imediatamente da construção de g. □

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita:

- Crescente, se para todos $x_1 < x_2$ em D, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
- Decrescente, se para todos $x_1 < x_2$ em D, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
- Monótona não-decrescente, se para todos $x_1 < x_2$ em D, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- Monótona não-crescente, se para todos $x_1 < x_2$ em D, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer um dos casos, dizemos que f é monótona em D. Nos dois primeiros (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é estritamente monótona. Note que nestes dois casos, f é uma função injetiva.

Dada uma função $f : A \to B$, o seu gráfico é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$, $y \in B$ e $y = f(x)$, isto é,

$$G(f) = \{(x, y);\ x \in A,\ y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

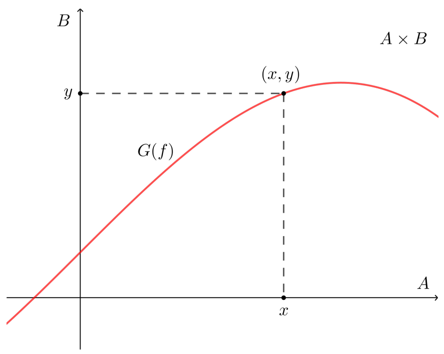


Figura 3 – O gráfico de $f : A \to B$

Fonte: Autor, 2019.

Agora, sabemos que para ter uma função de A em B, a cada $x \in A$ deve corresponder um único $y \in B$. Geometricamente, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo das abscissas, traçadas por um ponto de A, deve cortar o gráfico G em um e somente em um ponto.

De posse da ideia ou conceito de função abordaremos as principais funções elementares: Linear, Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica.

1.2 A Função linear

Nesta seção abordaremos as funções lineares que são apresentadas como modelos matemáticos para proporcionalidade. De acordo com (LIMA, 2012) a ligação entre estes dois conceitos é de fundamental importância, porém é negligenciada nos livros didáticos.

> Os assuntos proporcionalidade e funções lineares são, em geral, tratados em capítulos separados, até mesmo em anos distintos, sem que nenhuma relação seja explicitamente apontada. Como ocorre em muitas outras situações, a abordagem da noção de proporcionalidade representa uma importante oportunidade para estabelecer relações entre diferentes campos da matemática, como aritmética, geometria e funções.(LIMA, 2012)

O entendimento inadequado da noção de proporcionalidade pode levar à sua generalização indevida pelos alunos, considerando uma proporcionalidade qualquer situação em que o crescimento de uma grandeza implica no crescimento de uma outra. Por exemplo, não é incomum a afirmação de que "a área de um quadrado é proporcional ao seu lado". É fato que, quanto maior for o lado de um quadrado, maior será a sua área; no entanto, isto não implica que estas grandezas sejam proporcionais.

Dado $a \in \mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita linear se $f(x) = ax$ para todo x real. Mais adiante, veremos que a função linear é um caso particular da função afim e como mostraremos que o gráfico de uma função afim é uma reta, tem-se que o gráfico de uma função linear com domínio em $\mathbb{R}$ é uma reta que passa pela origem $(0,0)$ e não é vertical.

Exemplo 7. *A função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

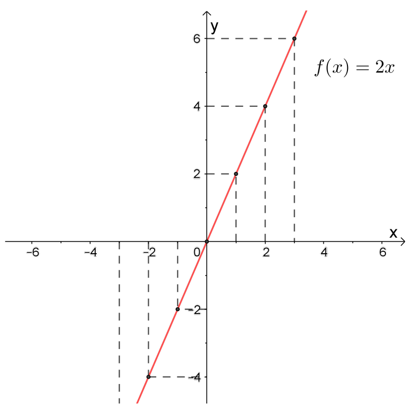


Figura 4 – O gráfico da função linear $f(x) = 2x$.

Fonte: Autor, 2019.

Como dito anteriormente as funções lineares estão implicitamente ligadas aos problemas de proporcionalidade. De acordo com (LIMA, 2012), temos que a noção matemática de proporcionalidade é a ideia mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios. Mas o que vem a ser de fato uma proporcionalidade?

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma proporcionalidade direta se, para quaisquer números reais x e c, tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$. Se $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$ para quaisquer $c \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, diremos que f é uma proporcionalidade inversa.

Agora note que se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo $c, x \in \mathbb{R}$ então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca$, isto é, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Adequando a notação, vemos que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função linear. A recíproca é imediata, isto é, se $f(x) = ax$ para todo $a, x \in \mathbb{R}$, então $f(cx) = a(cx) = c(ax) = c \cdot f(x)$.

Quanto à proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$ para $c, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. Assim, tomando $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = \dfrac{f(1)}{c} = \dfrac{a}{c}$. Portanto, $f(x) = \dfrac{a}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ e $a = f(1)$.

De agora em diante, trataremos apenas da proporcionalidade direta, ao qual denotaremos apenas de "proporcionalidade".

> Na prática, há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada explicitamente (ou quase). Por exemplo, se um quilo de açúcar custa a reais então x quilos custam $y = ax$ reais. Em muitos casos, porém, a constante a de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem mesmo tem relevância alguma para o problema. (LIMA, 2012)

A aplicação do Teorema de Tales para obtenção da medida de um segmento desconhecido é um caso em que a constante de proporcionalidade não tem relevância para o problema, como aponta (LIMA, 2012), por acaso tem-se que a constante é igual a razão entre o seno de dois ângulos relativos à situação.

Isto nos mostra que nos problemas relativos à proporcionalidade o que interessa muitas vezes é saber apenas que se $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ então $\dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_1}{x_1}$ é constante.

Assim, quando sabemos que a correspondência $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2$ é uma proporcionalidade a igualdade

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$$

permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a tradicional "regra de três".

O grande problema com a "regra de três"é encará-la como a essência da proporcionalidade sendo ela apenas uma consequência; por isso, não é de se espantar que nossos alunos sempre recorrem a ela em problemas, que digamos, possuem "números simples" em que apenas a aplicação da proporcionalidade já o resolveria de forma mental e eficiente. Por exemplo, se um quilograma de carne custa $R\$28,00$, quanto custaria $250g$ dela? Ora, $250g$ é a quarta parte do quilograma $(1000g)$, portanto como o preço é proporcional à quantidade de carne, segue que deve-se a pagar a quarta parte de $R\$28,00$, que é $R\$7,00$. Ademais, a constante de proporcionalidade neste problema é $0,028$, o que mostra que conhecê-la não ajudaria muito no cálculo mental. Portanto, é de fundamental importância que nossos professores trabalhem essa essência da proporcionalidade, para que nossos alunos não a conheçam simplesmente como uma regra mecânica e sem sentido.

Agora, como saber se uma determinada situação corresponde de fato uma proporcionalidade? Isto é, como teremos certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? Ora, precisamos que se tenha $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores reais de c e x, em particular, para todo c. Isto é fácil de verificar quando c é inteiro, porém e nos outros casos? E se c for irracional? Felizmente basta que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n inteiro, desde que se suponha que f é monótona (o que é fácil de constatar na prática)

O teorema a seguir, denominado o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e cuja demonstração encontra-se em (LIMA, 2012), é a chave para determinar, em todas a situações, se uma dada função é ou não linear.

Teorema 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) *Pondo* $a = f(1)$*, tem-se* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Agora, vamos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo 8. *Calcular a área de um retângulo de altura fixa igual a* 2 *e base* (b) *variável.*

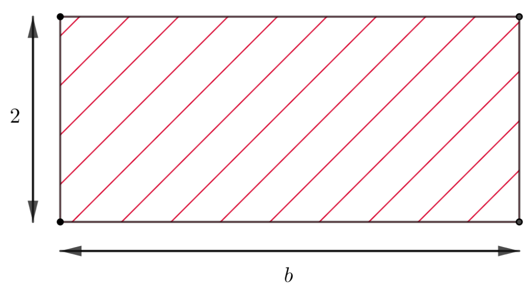


Figura 5 – Área do retângulo de altura fixa igual a $2m$

Fonte: Autor, 2019.

Note que dobrando ou triplicando o valor da base, a área do retângulo também tem seu valor dobrado ou triplicado, visto que um retângulo de altura 2 e base nb, $n \in \mathbb{N}$, pode ser decomposto em n retângulos de mesma altura 2, cada um com base b. Portanto, se indicarmos a área do retângulo por $f(b)$, tem-se que $f(nb) = nf(b)$. Por outro lado, observa-se que a área do retângulo também é uma função crescente em relação à base b. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade, neste caso, precisa ser aplicado a grandezas cujas medidas são expressas apenas por números positivos (área e comprimento). Assim, temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, com $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ sendo o conjunto dos números positivos. Neste caso, as afirmações do Teorema tornam-se assim:

(1^+) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(2^+) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(3^+) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Nesta nova forma, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade continua válido, ou seja, as afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) são ainda equivalentes. Para demonstrarmos tal fato, como aponta (LIMA, 2012), introduzimos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F.

Note que a função F do teorema acima sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No entanto, se f for decrescente vale um resultado análogo, com $a < 0$.

Portanto, a área do retângulo da Figura 5 deverá ser dada por $f(b) = A \cdot b$, onde $A = f(1)$ é área de um retângulo de altura 2 e base 1. Vamos mostrar que $A = 2$. De fato, o mesmo argumento, aplicado ao retângulo de mesma base 1 e altura variável, mostra que $A = U \cdot h$, onde h é a altura variável e U é a área do retângulo de base e altura iguais a 1. Mas, isto é precisamente, o quadrado de lado 1, que por definição é a unidade de área. Portanto, $U = 1$ e como $h = 2$, vem $A = 2$. Assim, concluímos que a área do retângulo de altura fixa igual a 2 e base b variável é igual a $2b$.

$$f(b) = 2b$$

A grandeza do Teorema 2 decorre do fato de que se queremos saber se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar duas informações:

- f deve ser crescente ou decrescente. (Note que é trivial f sendo identicamente nula)
- $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$

1.3 A Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que as funções lineares são casos particulares de funções afins, tem-se, neste caso o valor $b = 0$. São ainda exemplos de funções afins, a função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, as funções constantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$ e as funções translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x + b$.

Teorema 3. *O gráfico G de uma função afim com domínio em $\mathbb{R}$ é uma reta.*

Demonstração. Com efeito, tomando $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (ax_2 + b)$, $P_3 = (ax_3 + b)$ como três pontos quaisquer de G, basta mostrarmos que são colineares. Para tanto, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$, seja igual a soma dos outros dois. Agora, note que podemos supor as abcissas x_1, x_2 e x_3 numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

e

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Portanto, segue imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

□

Como o gráfico de uma função afim f é uma reta, então para que ela fique inteiramente determinada basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$.

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY, pois para $x = 0$ temos $f(x) = a \cdot 0 + b$. O número a chama-se inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (um sentido de "crescimento da esquerda para direita") e quando $a < 0$, a reta é descendente (um sentido de crescimento da direita para esquerda). Assim, vemos que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo OY.

O valor de x para o qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, isto é, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se zero da função afim. Para obtermos o zero de uma função afim, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, basta resolvermos a equação $ax + b = 0$, que implica $x = -\dfrac{b}{a}$.

Geometricamente, o zero da função afim $f(x) = ax + b$ é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

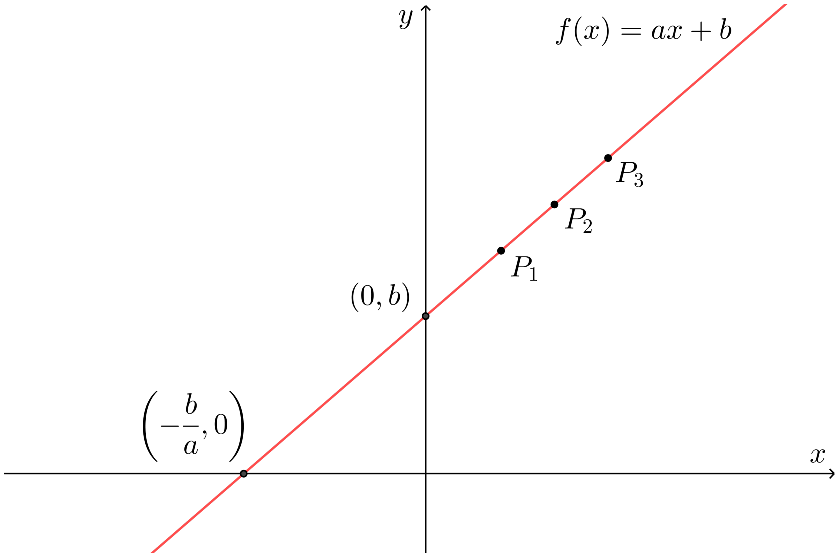


Figura 6 – Gráfico da função afim.

Fonte: Autor, 2019.

Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quando damos um acréscimo h á variável x, passando de x para $x + h$, há, em correspondência, um acréscimo $f(x+h) - f(x)$ no valor da função. Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, o número

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

chama-se taxa de variação média da função no intervalo $[x, x+h]$.

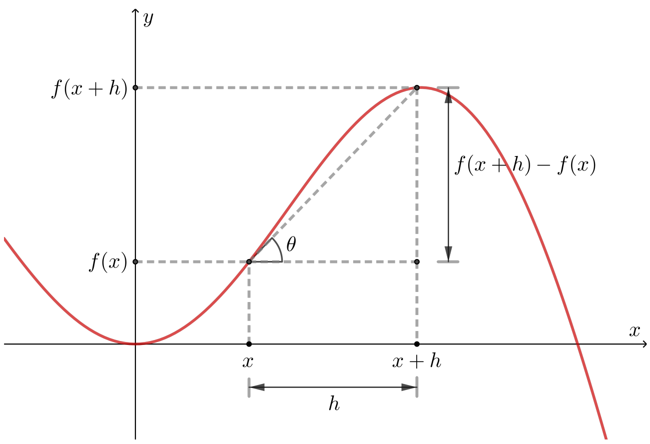


Figura 7 – Visão geométrica da taxa de variação de uma função no intervalo $[x, x+h]$ representada pela tangente do ângulo θ.

Fonte: Autor, 2019.

No caso da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}=\frac{ah}{h}=a.$$

Assim, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=a.$

Trataremos com mais detalhes sobre a taxa de variação média quando analisarmos a função exponencial. Agora, como a taxa de variação média de uma função afim é constante, nesse caso podemos dizer apenas taxa de variação e, no caso da função afim, pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ causada por cada aumento de uma unidade de x. Exemplo: a taxa de variação da função afim $f(x)=5x+2$ é 5, ou seja, cada acréscimo de uma unidade em x faz $f(x)$ aumentar 5 unidades; e da função $g(x)=-3x+2$ é -3, ou seja, cada acréscimo de uma unidade em x faz $g(x)$ diminuir 3 unidades. A taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$: $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, para $x_1\neq x_2$.

Evidentemente, uma função afim é crescente quando sua taxa de variação a é positiva, decrescente quando a taxa de variação a é negativa e constante quando $a=0$.

1.3.1 Caracterização da Função Afim

Como saber se em um determinado fenômeno ou situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim? Ora, no caso de uma tarifa de táxi não há problema, pois $f(x)=ax+b$ onde x é a distância percorrida, $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa por quilômetro rodado. Ou seja, o modelo de função afim é explicito bem como as constantes a e b. Mas nem todo problema é assim tão explícito.

No entanto, note que se f é uma função afim, o que implica f necessariamente monótona e injetiva, então o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ fica

$$f(x+h)-f(x)=a(x+h)+b-(ax+b)=ax+ah+b-ax-b=ah.$$

Ou seja, este acréscimo não depende de x, somente de h e ademais é proporcional a h. Porém, será que a recíproca é verdadeira? (LIMA, 2012) afirma que sim com base no seguinte teorema ao qual também demonstra com a aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Teorema 4. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h)-f(x)=\varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Se $f(x+h)-f(x)$ não depende de x, então podemos dizer que acréscimos iguais para x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$. Como sabemos que esse acréscimo é ah, então dizemos que acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

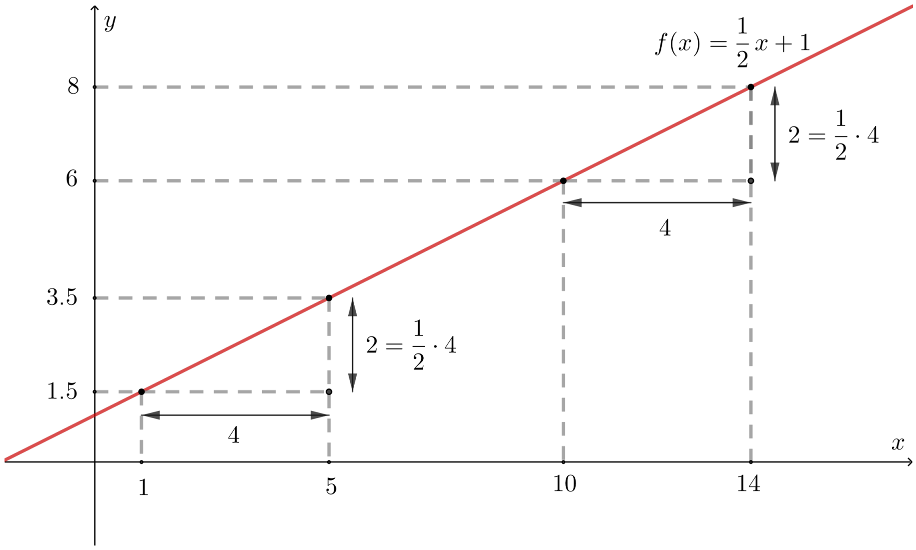


Figura 8 – Caracterização da Função Afim: acréscimos iguais para x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$.

Fonte: Autor, 2019.

1.3.2 Função Afim e Progressão Aritmética (PA)

Há uma conexão muito importante entre a funções afins e progressões aritméticas. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada razão da progressão aritmética. Geometricamente, uma (PA) é uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçados na reta. Isto implica que a razão $r = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$r = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots$$

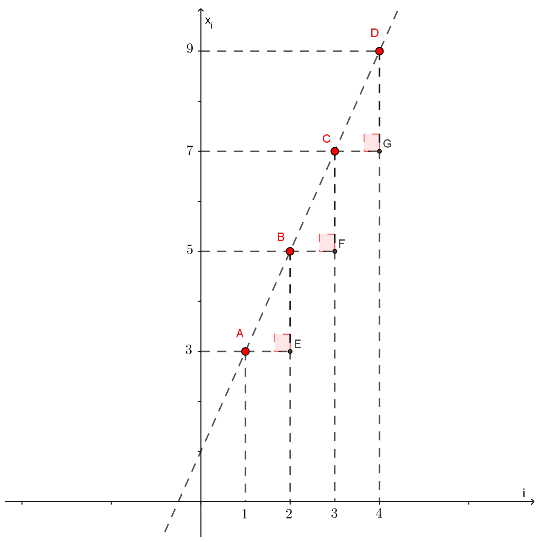


Figura 9 – Gráfico da P.A $3, 5, 7, 9, \ldots$

Fonte: Autor, 2019.

Com efeito, se a razão $r = 0$, então nada temos a provar, pois a diferença entre dois pontos quaisquer do domínio é constante e igual a 1 . Agora, se $r \neq 0$, como na Figura 9, os pontos do gráfico da P.A $3, 5, 7, 9, ...$ de fato pertencem a reta e estão igualmente espaçados, pois, novamente, a diferença entre um valor i do domínio da P.A é constante igual e igual a 1 e entre dois valores x_{i+1} e x_i é constante e igual a $r = 2$, daí como os ângulos em $\hat{E}$, $\hat{F}$ e $\hat{G}$ são congruentes, pelo caso (LAL), segue que os triângulos BAE, CBF e DCG são congruentes, isto é, as medidas dos segmentos AB, BC e CD são congruentes e os ângulos $\angle BAE$,$\angle CBF$ e $\angle DCG$ também são congruentes. Precisamente, a reta em questão, é dada pela equação $y = 2x + 1$. De modo geral, dado uma P.A de primeiro termo x_1 e razão $r \neq 0$, a equação da reta que contém o gráfico da P.A é dada pela equação

$$y = rx + (x_1 - r)$$

Reciprocamente, uma reta de equação $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sempre terá pontos que representam uma P.A de primeiro termo igual a $x_1 = a + b$ e razão $r = a$. Podemos, obter também todos estes fatos, vendo que se uma P.A é uma função que associa a cada natural n o valor x_n, então a P.A é uma restrição aos naturais da função afim $y = f(x) = rx + (x_1 - r)$.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, ..., x_i...$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ também estão igualmente espaçados, ou seja, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah$$

Por exemplo, consideremos a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$. Vamos constatar que $f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), ...$ é também uma progressão aritmética. Assim,

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(4) &= 9 \\ f(7) &= 15 \\ f(10) &= 21 \\ f(13) &= 27 \\ f(16) &= 33. \end{aligned}$$

Observe que:

$$3, 9, 15, 21, 27, 33, ...$$

é uma progressão aritmética e sua razão é $6 = 2 \cdot 3$.

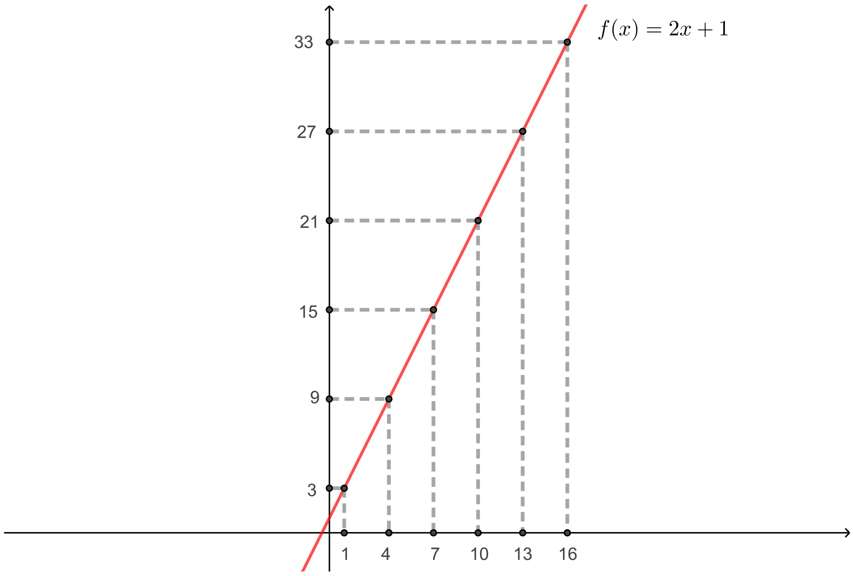


Figura 10 – Visão geométrica da conexão entre Função Afim e P.A.

Fonte: Autor, 2019.

Agora, o resultado mais interessante, cuja demonstração encontra-se em (LIMA, 2012), é que a recíproca também é verdadeira. Vejamos:

Teorema 5. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona que transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ então f é uma função afim.*

Note que, mais uma vez, é preciso supor f monótona.

1.4 A Função Quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função quadrática quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

Exemplos de funções quadráticas:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$ com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$;
- $f(x) = x^2$ com $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$;
- $f(x) = x^2 - 4$ com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$;
- $f(x) = -2x^2 + 5x$ com $a = -2$, $b = 5$, e $c = 0$.

Pode-se mostrar que quando x_1, x_2, x_3 são três números reais e distintos e y_1, y_2 e y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em

$\mathbb{R}^2$, então existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Obviamente, podemos restringir o domínio de uma função quadrática aos naturais. Por exemplo, podemos ter a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $f(n) = \frac{1}{3}n^2 - n + \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

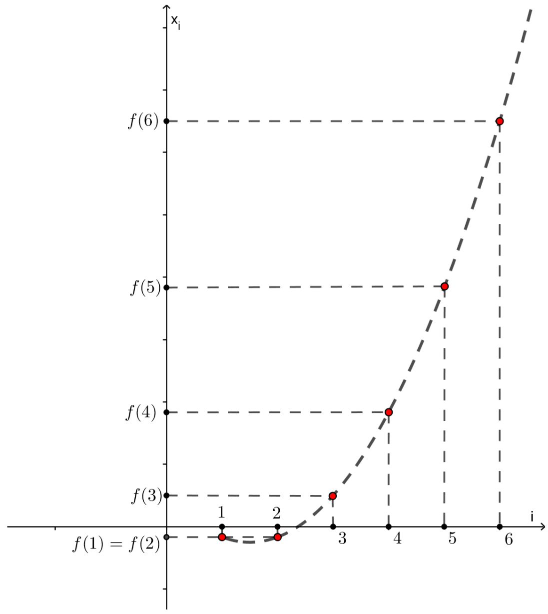


Figura 11 – Gráfico de $f(n) = \frac{1}{3}n^2 - n + \frac{1}{2}$

Fonte: Autor, 2019.

1.4.1 *Zeros da Função Quadrática*

Um problema muito antigo que recai numa equação do 2 grau é este: "Determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p".

Denotando por x um dos números, o outro será $s - x$. Assim,

$$p = x(s - x) \quad ou \quad p = sx - x^2$$

ou, ainda:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Para determinarmos x (e, portanto, $s - x$), basta resolvermos a equação do 2 grau $x^2 - sx + p = 0$, ou seja, basta determinar os valores x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Esses valores são chamados zeros da função quadrática ou raízes da equação do 2 grau que correspondem a $f(x) = 0$. Por exemplo, os dois números cuja soma é 5 e cujo produto é 6 são 2 e 3, que são raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$ ou zeros da função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Os problemas que envolvem equações do 2º grau são conhecidos desde a época dos babilônios, há quase 4 mil anos. Os textos e cálculos babilônicos eram impressos em placas de barro usando cunhas de madeira para imprimir os símbolos em relevo. Esse tipo de escrita foi chamado escrita cuneiforme (DANTE, 2013).

A Figura 12 abaixo mostra uma placa (tablet em inglês), em escrita cuneiforme, que aborda um problema cujo enunciado em linguagem atual seria o equivalente a: encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a $\frac{3}{4}$.

Figura 12 – Tablete de argila BM 13 901. Museu Britânico, Londres (Inglaterra).

Fonte: (DANTE, 2013).

O problema inicial de "Determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p" representava uma boa parte dos problemas encontrados nos tabletes dos babilônios. Este problema era encontrado na forma de encontrar os lados de um retângulo conhecendo seu perímetro e a área. De igual modo, podemos perguntar aos alunos de hoje quais seriam as medidas (aproximadas) de um retângulo de $40\,cm$ de perímetro e $100\,cm^2$ de área.

Hoje, sabemos que os babilônios, naturalmente, não tinham fórmulas para solucionar estes problemas, mas conheciam "receitas"para resolvê-los. Essas receitas são equivalentes à fórmula de resolução da equação do 2º grau que conhecemos hoje. (STEWART, 2014) cita uma dessas receitas e a equivalência da mesma com a resolução moderna com a equação do 2º grau.

> Em primeiro lugar, alguém deve ter entendido o motivo de a receita funcionar, e portanto a anotou; mas uma vez descoberta, podia ser usada por qualquer um que tivesse o treinamento apropriado. Não sabemos se as escolas babilônicas meramente ensinavam a receita, nem se explicavam por que dava certo. (STEWART, 2014)

Agora, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, como determinar os zeros dessa função algebricamente? Para respondermos essa pergunta, escreveremos qualquer função quadrática em uma forma algébrica especial, denominada forma canônica da função quadrática.

Seja a função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$, então podemos escrever

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

Note que as duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesma duas primeiras parcelas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

Assim, completando quadrado, temos:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

isto é,

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

ou ainda:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Logo, chamando $m=-\dfrac{b}{2a}$ e $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, temos que para todo $x\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, qualquer função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ é da seguinte maneira

$$f(x)=a(x-m)^2+k$$

que é conhecida como forma canônica. Note que $k=f(m)$.

Exemplo 9. *vamos escrever a função $f(x)=x^2-8x+12$ na forma canônica:*

1ª maneira Completando o quadrado:

$$x^2-8x+12=(x^2-8x)+12=(x^2-8x+16)-16+12=(x-4)^2-4$$

logo, $f(x)=x^2-8x+12=(x-4)^2-4$.

2ª maneira Calculando $m=-\dfrac{b}{2a}$, $k=f(m)$ e substituindo em $f(x)=a(x-m)^2+k$:

$$f(x)=x^2-8x+12\Rightarrow a=1,\ b=-8,\ c=12\Rightarrow m=\frac{8}{2}=4$$

Daí,

$$k=f(4)=(4)^2-8\cdot(4)+12=16-32+12=-4$$

Portanto, $f(x)=(x-4)^2-4$.

Agora, a forma canônica nos conduz imediatamente à fórmula das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. De fato, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 && (1.1)\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && (1.2)\\
&\Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (1.3)\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. && (1.4)
\end{aligned}
$$

A passagem da linha (1.2) para a linha (1.3) só tem sentido quando o discriminante

$$\Delta = b^2-4ac$$

é ≥ 0. Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (1.1) e (1.2) significa que a equação dada não possui solução real, visto que o quadrado de $x+\dfrac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

O método de completar quadrado é importantíssimo em diversos problemas matemáticos, por exemplo, no reconhecimento de uma cônica pela sua equação. Além disso, é super recomendado e instrutivo fazer os alunos praticarem seu uso em exemplos concretos, para resolverem a equação do segundo grau sem aplicar diretamente a fórmula (1.4).

Da fórmula (1.4) tem-se imediatamente que, se o discriminante $\Delta = b^2-4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2+bx+c=0$$

tem duas raízes reais e distintas

$$x_1=\frac{-b+\Delta}{2a}$$

e

$$x_2=\frac{-b-\Delta}{2a}$$

com $x_1 < x_2$, cuja soma é $s=-\dfrac{b}{a}$ e cujo produto é $\dfrac{c}{a}$.

Em particular, a média aritmética das raízes é $-\dfrac{b}{2a}$, isto é, as raízes x_1 e x_2 são equidistantes do ponto $-\dfrac{b}{2a}$.

Se $\Delta = 0$, a equação dada possui uma única raiz, chamada raiz dupla, igual a $-\dfrac{b}{2a}$.

Agora, vamos supor $a > 0$. A forma canônica

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

mostra, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é obviamente ≥ 0. A segunda é constante. Note que o menor valor dessa soma é atingindo quando

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

é igual a zero, ou seja, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$. Logo, quando $a > 0$, o menor valor assumido por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Se $a < 0$, o valor $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo: é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo: é ilimitada superiormente.

Com auxílio da forma canônica demonstra-se que $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são equidistantes de $-\dfrac{b}{2a}$.

Com auxílio do menor valor ou maior valor possível assumido pela função quadrática, vejamos como se dá o comportamento de $f(x)$ no domínio desta função.

Teorema 6. *Sejam a, b e c* $\in \mathbb{R}$, *com* $a \neq 0$ *e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Então temos os seguintes resultados:*

(i) *Se* $a > 0$, *então f é decrescente em* $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ *e crescente em* $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$

(ii) *Se* $a < 0$, *então f é crescente em* $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ *e decrescente em* $\left[-\dfrac{b}{2a} + \infty\right)$.

Demonstração. Faremos a demonstração do item (i), sendo a prova do item (ii) completamente análoga. Se $x_2 > x_1 \geq -\dfrac{b}{2a}$, note que $x_2 - x_1 > 0$ e $x_2 + x_1 > -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$, isto é, $x_2 + x_1 + \dfrac{b}{a} > 0$. Assim,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0.$$

De modo análogo, para $x_1 < x_2 \leq -\dfrac{b}{2a}$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$ e $x_2 + x_1 < -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$, isto é, $x_2 + x_1 + \dfrac{b}{a} < 0$. Portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) < 0.$$

A prova do item (ii) é análoga. □

Note que a função quadrática nunca pode ser monótona, portanto quando tratarmos de sua caracterização, vamos trabalhar sempre com a hipótese da continuidade em vez da monotonicidade.

1.4.2 O Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática com domínio em $\mathbb{R}$ é uma parábola.

Consideremos um ponto F pertencente a um plano α e uma reta d contida em α, com $F \notin d$. Chamamos parábola de foco F e diretriz d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

$$\text{parábola} = \left\{P \in \alpha | PF = PP'\right\}$$

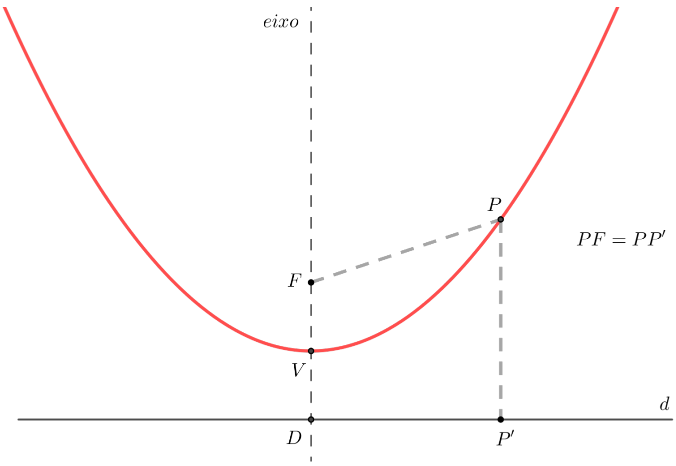


Figura 13 – Definição da Parábola

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 13 destacamos os seguintes elementos principais:

F : foco

d : diretriz

V : vértice

$\overleftrightarrow{VF}$: eixo de simetria (é a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz)

Devemos lembrar que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Exemplo 10. *(LIMA, 2012) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \dfrac{1}{4})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4}$.*

Com efeito, a distância de um ponto qualquer (x,x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ é igual a

$$\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

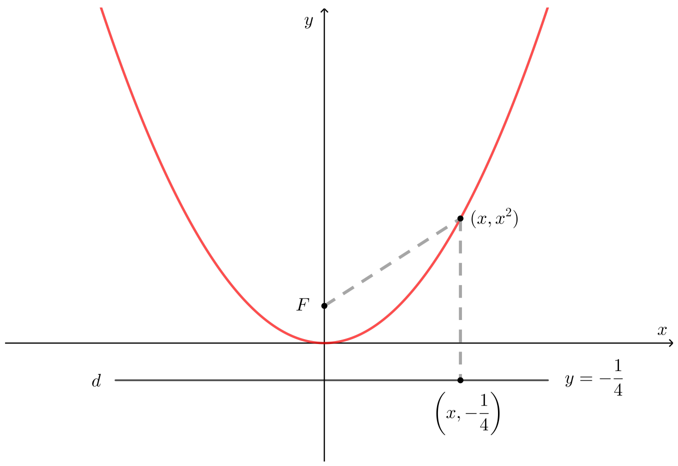


Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = x^2$

Fonte: Autor, 2019.

A distância do mesmo ponto (x,x^2) à reta $y = -\dfrac{1}{4}$ é $x^2 + \dfrac{1}{4}$.

Note que temos números positivos e para verificarmos a igualdade entre estas duas distâncias, basta ver que seus quadrados são iguais. De fato, tem-se

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, como se verifica facilmente.

Exemplo 11. *Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$.*

Com efeito, basta verificarmos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

em que o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância ao mesmo ponto P à reta $y = -\dfrac{1}{4a}$.

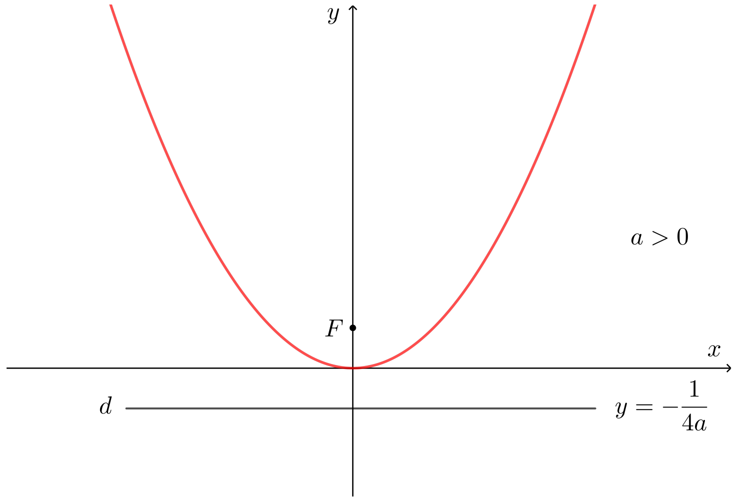


Figura 15 – Gráfico da função $f(x) = ax^2$, $a > 0$.

Fonte: Autor, 2019.

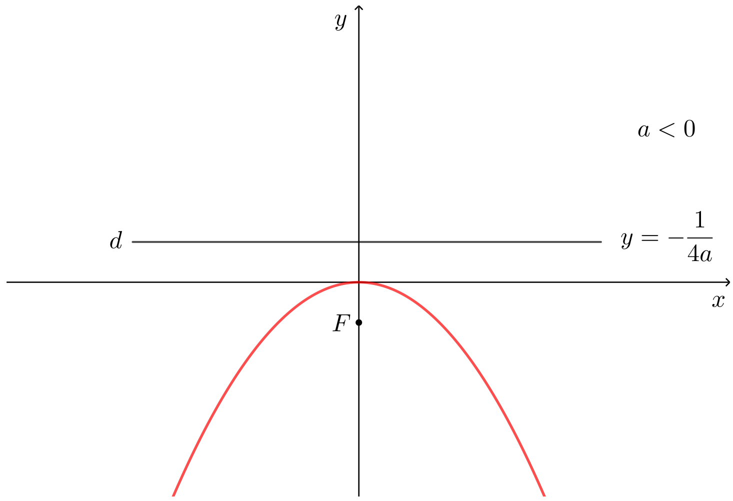


Figura 16 – Gráfico da função $f(x) = ax^2$, $a < 0$.

Fonte: Autor, 2019.

Exemplo 12. *Seja $a \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$, então o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$.*

(LIMA, 2012) aponta que para chegarmos a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$(x-m^2) + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

ou então observa-se naturalmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x,y) \mapsto (x+m,y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$. Ou seja, como afirma (DANTE, 2013),o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, no entanto, sua posição, em valores absolutos, é m unidades à direita ou à esquerda do gráfico de $g(x) = ax^2$, conforme m seja positivo $(m > 0)$ ou negativo $(m < 0)$, respetivamente.

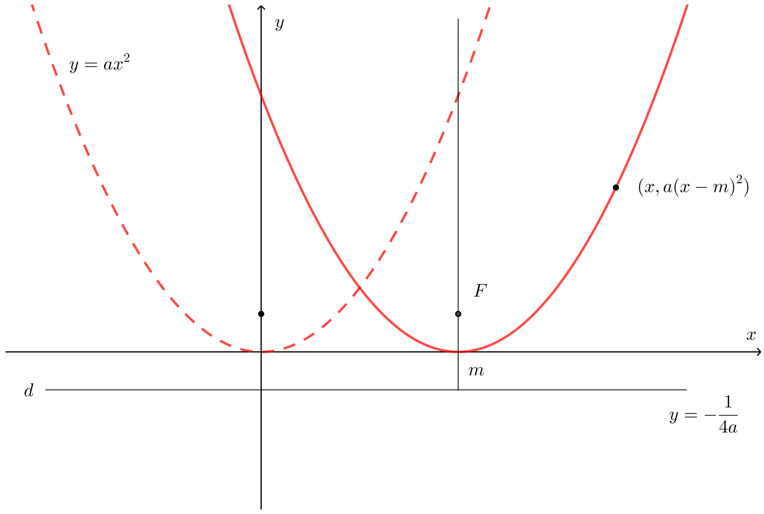


Figura 17 – Gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2$.

Fonte: Autor, 2019.

Exemplo 13. *Sejam a, m, $k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \dfrac{1}{4a}$, conforme ilustra a Figura 18 abaixo.*

> *A afirmação acima resulta imediatamente do exemplo anterior, levando em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$. (LIMA, 2012)*

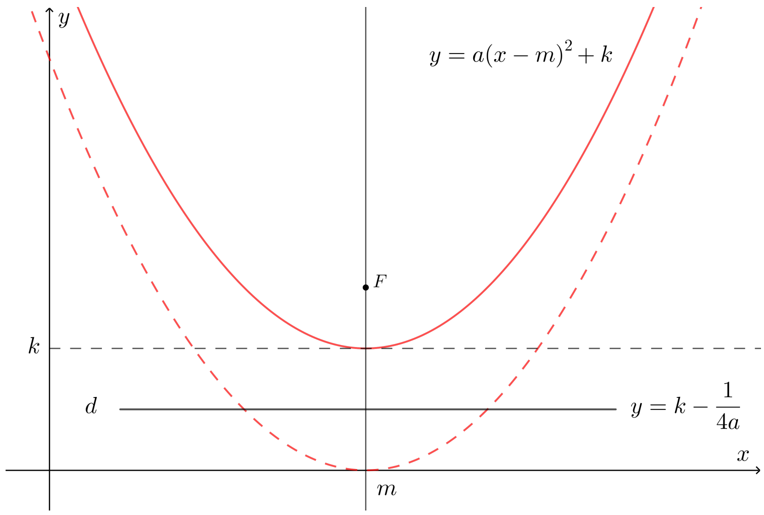


Figura 18 – Gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2 + k$.

Fonte: Autor, 2019.

Em resumo, o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, tendo x uma posição que está, em valores absolutos, m unidades à direita $(m > 0)$ ou à esquerda

$(m < 0)$ do gráfico de $g(x) = ax^2$ e k unidades acima $(k > 0)$ ou abaixo $(k < 0)$ do gráfico de $g(x) = ax^2$. O eixo de simetria da parábola dada por $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é $x = m$.

Exemplo 14. *(DANTE, 2013) Construir os gráficos das funções quadráticas* $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2(x-3)^2 + 1$ *e* $h(x) = 2(x+3)^2 + 1$.

A parábola dada por $g(x) = 2(x-3)^2 + 1$ está 3 unidades à direita e 1 unidade acima da parábola dada por $f(x) = 2x^2$ e é simétrica em relação ao eixo $x = 3$.

A parábola dada por $h(x) = 2(x+3)^2 + 1$ está 3 unidades à esquerda e 1 unidade acima da parábola dada por $f(x) = 2x^2$ e é simétrica ao eixo $x = -3$.

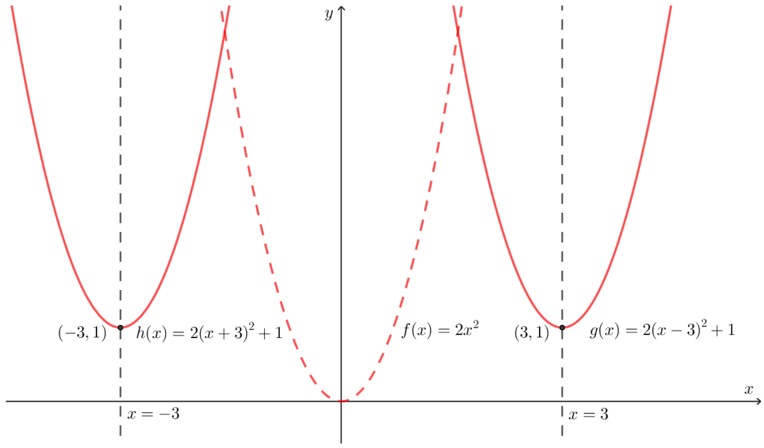


Figura 19 – Gráfico das funções $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2(x-3)^2 + 1$ e $h(x) = 2(x+3)^2 + 1$.

Fonte: Autor, 2019.

Assim, segue do Exemplo 13 que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right).$$

Note que esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

Com efeito, a forma canônica do trinômio

$$ax^2 + bx + c$$

nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + k$$

com

$$m = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

O ponto do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mais próximo da diretriz é aquela de abscissa $x = -\dfrac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo se $a < 0$. Quando $x = -\dfrac{b}{2a}$, dizemos que o ponto $(x, f(x)$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$. Pode-se demonstrar que a reta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico de f; mais precisamente, é o eixo dessa parábola.

Com auxílio do gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos entender muito do comportamento desta função. As abscissas x_1, x_2 dos pontos onde esse gráfico intersecta o eixo OX são as raízes da equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

O ponto médio do segmento $[x_1, x_2]$ é a abscissa do vértice da parábola. Note que se o gráfico está completamente acima, ou inteiramente abaixo do eixo horizontal OX, a equação não possui raízes reais. Se o gráfico tangencia o eixo OX, a equação tem uma raiz (única) dupla.

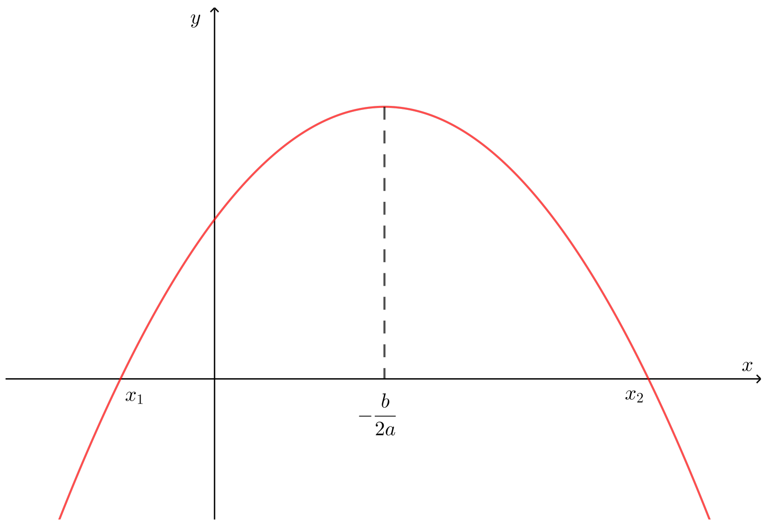


Figura 20 – O vértice como ponto médio do segmento formado pelas raízes x_1 e x_2.

Fonte: Autor, 2019.

1.4.3 Caracterização da Função Quadrática

Seja x_1, x_2, x_3,... uma sequência de números reais. Se as diferenças sucessivas

$$d_1 = x_2 - x_1, \qquad d_2 = x_3 - x_2, \qquad d_3 = x_4 - x_3, \ldots$$

formam uma progressão aritmética usual de razão $r \neq 0$, então diremos que x_1, x_2, x_3,... é uma progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada.

Exemplo 15. *A sequência* $1,4,9,16,25...$ *dos quadrados dos números naturais é uma progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada.*

De fato, a sequências das diferenças sucessivas

$$d_1 = 4-1 = 3, \qquad d_2 = 9-4 = 5, \qquad d_3 = 16-9 = 7, ...$$

formam a progressão aritmética $3,5,7,11,...$ cuja razão é $r = 2$. Agora note que, desta forma, a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ transforma a progressão aritmética $1,2,3,4,5,...$ na progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada

$$f(1), f(2), f(3), f(4), ...$$

Mas, isto não é por acaso. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, uma função quadrática arbitrária e

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ...$$

uma progressão aritmética qualquer, então a sequência

$$y_1, y_2, y_3, y_4, ...$$

dos valores $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, etc. goza da propriedade de que as diferenças sucessivas

$$d_1 = y_2 - y_1, \qquad d_2 = y_3 - y_2, \qquad d_3 = y_4 - y_3, ... \tag{1.5}$$

formam uma progressão aritmética. Precisamente, pode-se demonstrar que, se $x_{i+1} - x_i = r$, para todo $i = 1,2,3,...$ então $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$. Este resultado constitui ua propriedade exclusiva das funções quadráticas.

Agora, será que a recíproca é verdadeira? Isto é, será que toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$?

(LIMA, 2000) afirma e demonstra que sim, pelo seguinte teorema

Teorema 7. *(Caracterização da Função Quadrática) Uma função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é quadrática se, e somente se,* f *transforma toda progressão aritmética não-constante* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada* $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n), ...$

Observe que é a função quadrática nunca pode ser monótona, por isso, a hipótese de continuidade em f.

1.5 A Função Exponencial

Seja a um número real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, indicada por $f(x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam x e y reais:

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(ii) $f(1) = a^1 = a$

(iii) $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando } a > 1 \\ a^x > a^y, & \text{quando } 0 < a < 1 \end{cases}$

Exemplos de funções exponenciais:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = (0,4)^x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = (\sqrt{2})^x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 10^x$

1.5.1 O Gráfico da Função Exponencial

Esboçaremos os gráficos de duas funções exponenciais $f(x) = a^x$, a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$.

1ª $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, isto é, $a > 1$

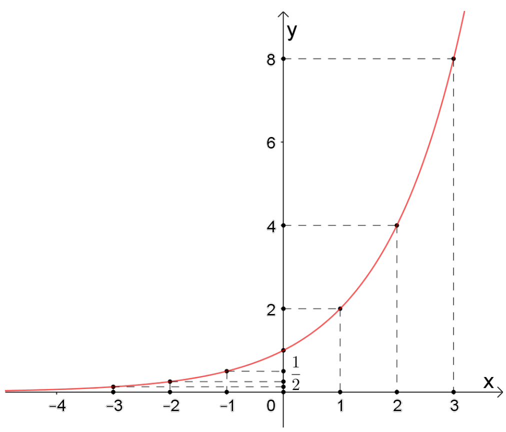


Figura 21 – Gráfico da função exponencial $y = 2^x$

Fonte: Autor, 2019.

2ª $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$

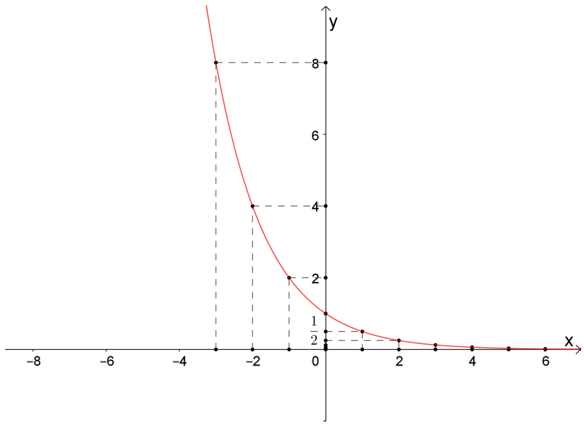


Figura 22 – Gráfico da função exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Fonte: Autor, 2019.

Em geral, o gráfico de $f(x) = a^x$, nos casos em que $a < 1$ e $0 < a < 1$, tem a seguinte forma:

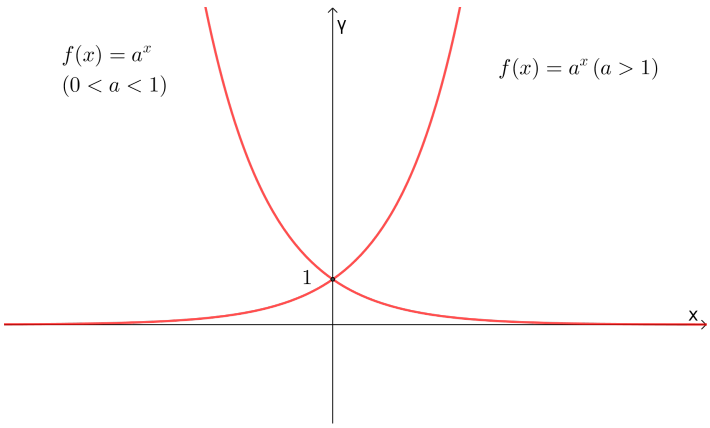


Figura 23 – Gráfico geral de uma função exponencial de base a

Fonte: Autor, 2019.

Segundo (IEZZI, 2004), com auxílio do gráfico de uma função exponencial, podemos obter as seguintes conclusões:

- o gráfico é uma figura denominada curva exponencial e que obviamente passa por $(0,1)$;
- se $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. Ao passo que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acentuado;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;

- $f(nx) = (f(x))^n$, para todo n inteiro e x real;
- para $a > 1$, a função é crescente $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$;
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);
- a função exponencial é injetiva ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou usando a contrapositiva $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$), visto que ela é crescente ou decrescente;
- como a função exponencial é injetiva e sobrejetiva, logo é bijetiva, isto é, admite função inversa;
- a função exponencial é ilimitada superiormente.

Definiremos agora uma função exponencial de forma mais geral, a saber as funções de tipo exponencial.

Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes reais positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

1.5.2 Caracterização da Função Exponencial

Segundo (LIMA, 2012), as funções afins, quadráticas e exponenciais são os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola, por exemplo, nos problemas de proporcionalidade, mas com menos exclusividade nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais despontam nesses três anos últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais.

Quando obtemos um modelo adequado para um determinado problema, que poderá ser uma função afim, quadrática ou exponencial, vemos que não há maiores dificuldades para o tratamento matemático da questão. Mas como escolher o instrumento matemático adequado para o problema que se estuda? Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é necessário saber quais as propriedades características de cada tipo de função, como visto, por exemplo, na função afim. Vamos agora fazer o mesmo com as funções exponenciais.

Teorema 8 (Caracterização da Função Exponencial)**.** *(LIMA, 2012) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$*

(2) *$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a = f(1)$;*

(3) *$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Em outras palavras, se estamos diante de uma função que sabemos ser uma função crescente ou decrescente, e que a imagem da soma de quaisquer valores é o produto das imagens destes valores, então, a função, em questão, é exponencial.

Agora, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função de tipo exponencial, isto é, $g(x) = ba^x$, com b, a constantes positivas. Note que, para quaisquer x, $h \in \mathbb{R}$, o quociente:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$$

depende apenas de h, mas não de x. Este quociente é definido como o acréscimo relativo da função g dado o acréscimo h em x. Observe que dado uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então se o acréscimo relativo de g dependa exclusivamente de h, isto é, $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \varphi(h)$, tem-se, equivalentemente, que o quociente $\dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ também depende exclusivamente de h, isto é, $\dfrac{g(x+h)}{g(x)} = \psi(h)$. Com efeito, tomando $\psi(h) = \varphi(h) + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} &= \varphi(h) \Leftrightarrow \\ \frac{g(x+h)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} &= \psi(h) - 1 \Leftrightarrow \\ \frac{g(x+h)}{g(x)} &= \psi(h) \end{aligned}$$

Portanto, para mostrarmos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possua um acréscimo relativo que dependa apenas de h, é suficiente e necessário que o quociente $\dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ dependa somente de h.

(LIMA, 2012) usa deste fato e o Teorema 8 para obter a Caracterização das Funções de Tipo Exponencial, a saber:

Teorema 9. *[Caracterização Das Funções De Tipo Exponencial] Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Fica estabelecido assim, um critério elegante e matematicamente simples para determinar quando uma bijeção crescente ou decrescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é da forma $f(x) = ba^x$. Porém, para aplicar este critério em situações concretas é indispensável saber decidir, para cada caso específico, se $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x ou não.

Conforme aponta (LIMA, 2012), fixando h como constante, isto equivale a querer saber se $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ é constante, isto é, se $f(x+h) = k \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou ainda, se $f(x+h)$ é uma função linear de $f(x)$.

Assim, escrevendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ e pondo $f(x_1+h) = \xi(y_1)$, $f(x_2+h) = \xi(y_2)$, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que ξ é uma função linear de y se, e somente se, para quaisquer $y_1 \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se a implicação:

$$y_2 = n \cdot y_1 \;\Rightarrow\; \xi(y_2) = n \cdot \xi(y_1)$$

Em termos da função original f isto significa:

$$f(x_2) = n \cdot f(x_1) \;\Rightarrow\; f(x_2+h) = n \cdot f(x_1+h).$$

A implicação acima é portanto, o critério que nos permitirá decidir se uma função f é ou não é do tipo exponencial.

1.5.3 A Função Exponencial de Base e

Seja a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \{1,2,3,4,...\}$. Se aumentamos n indefinidamente, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende muito lentamente ao número irracional $e = 2,7182818284...$, conhecido como número de Euler, número de Napier ou número exponencial.

Uma função exponencial muito importante em Matemática é aquela cuja base é e:

$$f(x) = e^x$$

Funções que envolvem a função exponencial e^x, como $f(x) = b \cdot e^{ax}$, surgem com muita frequência nas aplicações em Matemática e na descrição de fenômenos naturais. Algumas calculadoras, por exemplo, possuem uma tecla com o número irracional e. Pode se mostrar que toda função de tipo exponencial pode ser expressa na forma $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$.

Há uma preferência entre matemáticos e cientistas em escrever as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento de f.

Vimos na seção da Função Afim que dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a taxa de crescimento ou taxa de variação média de f no intervalo de extremidades x, $x+h$ é, por definição, o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Podemos interpretar este quociente como a inclinação da secante que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$ do gráfico de f, conforme esboçamos na Figura 7.

Chama-se derivada da função f no ponto x ao limite da taxa $[f(x+h) - f(x)]/h$ quando h tende para zero. Este número representa a taxa instantânea de crescimento de f no ponto x e é representado por $f'(x)$. Se este limite existe, ele é o número real cujos valores aproximados são os quocientes $[f(x+h) - f(x)]/h$ para valores muito pequenos de h. Geometricamente, a derivada $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x.

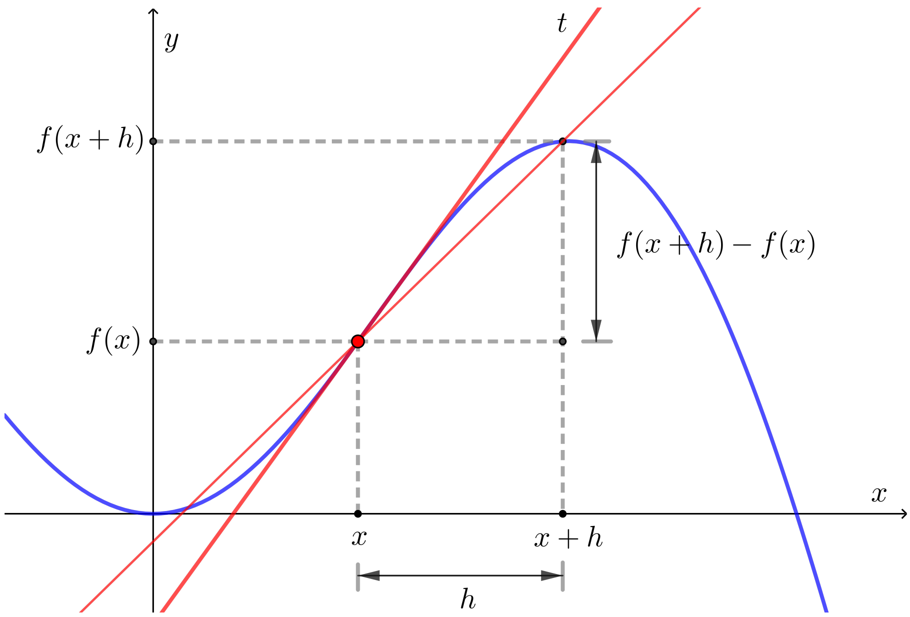


Figura 24 – A derivada como inclinação da reta tangente ao gráfico da função.

Fonte: Autor, 2019.

O sinal e o valor da derivada $f'(x)$ mostram a tendência da variação de f a partir do ponto x. Note que se $f'(x) > 0$ então $f(x+h) > f(x)$ para pequenos valores positivos de h. Por outro lado, se $f'(x) < 0$, tem-se, $f(x+h) < f(x)$ para h pequeno e positivo. Se $f'(x)$ é um número positivo grande, então f cresce rapidamente a partir de x. E assim por diante. A ideia de derivada é a semente ou germe do Cálculo Diferencial e Integral.

> A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal. Sua descoberta, há três séculos e meio, teve uma grande repercussão e provocou um progresso extraordinário na Ciência e em toda a civilização a partir daquela época.(LIMA, 2012)

Podemos provar que a derivada da função $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ é igual a $\alpha \cdot f(x)$. Isto significa que a taxa instantânea de crescimento de uma função exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. Note que α é precisamente o fator de proporcionalidade. Observe que, se sabemos a derivada da função f no ponto x, então podemos obter o acréscimo $f(x+h) - f(x)$ como aproximadamente sendo o produto $f'(x) \cdot h$. Este valor é tão bem mais aproximado de $f(x+h) - f(x)$ conforme tão pequeno seja h.

1.5.4 Conexão entre Funções Exponenciais e Progressões

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante diferente de zero, chamada razão da PG. Por exemplo, a sequência $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ é uma PG de razão 2.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão r, isto é $x_{n+1} = x_n + r$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + r} = (ba^{x_n}) \cdot a^r$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nr$, segue que

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_1 + nr} = ba^{x_1} \cdot (a^r)^n$$

isto é, $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^r$. Em particular, se $x_1 = 0$, então $f(x_1) = b$, e assim, $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

Teorema 10. *(LIMA, 2012) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

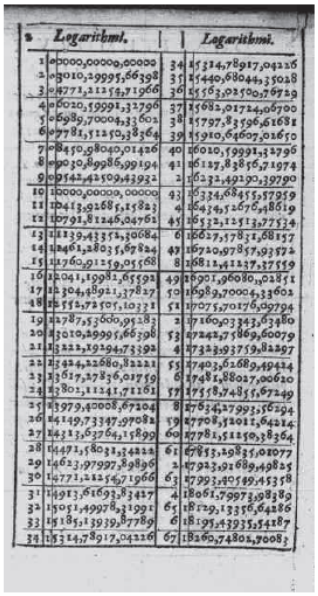
Este teorema garante que se uma função transforma uma PA de razão r em uma PG de razão a^r, então essa função é do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$, com $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.

1.6 A Função Logarítmica

Desde a Idade Antiga, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos. Mais adiante, com o início das navegações e com sua intensificação entre os diversos povos, os cálculos envolvidos tornaram-se um grande problema. O fato era que até o século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente trabalhosas e realizadas com base nos senos (DANTE, 2013).

A ideia de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Burgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617).

Atualmente, com o advento das calculadoras eletrônicas, as operações de multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não representam mais dificuldade. Porém, nem por isso, os logaritmos tornaram-se obsoletos, visto que a possibilidade de definir logaritmos como



	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959
11	10413,92685,15823	4	16434,52676,48619
12	10791,81246,04762	45	16532,12513,77534
13	11139,43352,30684	6	16627,57831,68157
14	11461,28035,67824	47	16720,97857,93572
15	11760,91259,05568	8	16812,41237,37559
16	12041,19982,65592	49	16901,96080,02851
17	12304,48921,37827	50	16989,70004,33602
18	12552,72505,10331	51	17075,70176,09794
19	12787,53600,95283	2	17160,03343,63480
20	13010,29995,66398	53	17242,75869,60079
21	13222,19294,73392	4	17323,93759,82297
22	13424,22680,82221	55	17403,62689,49424
23	13617,27836,01759	6	17481,88027,00620
24	13802,11241,71161	57	17558,74855,67249
25	13979,40008,67204	8	17634,27993,56294
26	14149,73347,97082	59	17708,52011,64214
27	14313,63764,15899	60	17781,51250,38364
28	14471,58031,34222	61	17853,29835,01077
29	14623,97997,89896	2	17923,91689,49825
30	14771,21254,71966	63	17993,40549,45358
31	14913,61693,83427	4	18061,79973,98389
32	15051,49978,31991	65	18129,13356,64286
33	15185,13939,87789	6	18195,43935,54187
34	15314,78917,04226	67	18260,74802,70083

Figura 25 – Tabela de logaritmos feita pelo matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), com os logaritmos de 1 a 67 na base 10 e catorze casas decimais. Microfilme do Museu Britânico, Londres (Inglaterra).

Fonte: (DANTE, 2013).

expoentes (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones, em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais. Essa importância é permanente, jamais desaparecerá porque, sendo a função logarítmica a inversa da função exponencial, ela está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais.

Figura 26 – Retrato de John Napier, matemático escocês (1561-1630).

Fonte: (DANTE, 2013).

Na seção anterior estudamos a função exponencial, na qual para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$. Ela é crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$ e tem a seguinte propriedade:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

ou seja,

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

Assim, essas considerações garantem que f possui uma função inversa.

A inversa da função exponencial de base a é a função $log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que a cada número real positivo x associa o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log(a^x) = x$$

desta forma, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da definição de logaritmo acima, as seguintes propriedades:

(1ª) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$;

(2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

(3ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;

(4ª) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,\; 0 < a \neq 1,\, b > 0$ e $c > 0$;

5ª $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,\;\; 0 < a \neq 1,\, b > 0$ e $c > 0$;

6ª $\log_a b^N = N \cdot \log_a b,\;\; 0 < a \neq 1,\, b > 0$ e $N \in \mathbb{R}$;

7ª $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\;\; a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e a, c diferentes de 1;

8ª $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} \log_a b,\;\; a, b, \in \mathbb{R}_+^*,\;\; a \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$.

São exemplos de funções logarítmicas, as funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

- $f(x) = \log_2 x$
- $g(x) = \log_{10} x = \log x$
- $h(x) = \log_e x = \ln x$
- $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

1.6.1 O gráfico da Função Logarítmica

Esboçaremos os seguintes gráficos de funções logarítmicas:

a) $f(x) = \log_2 x$

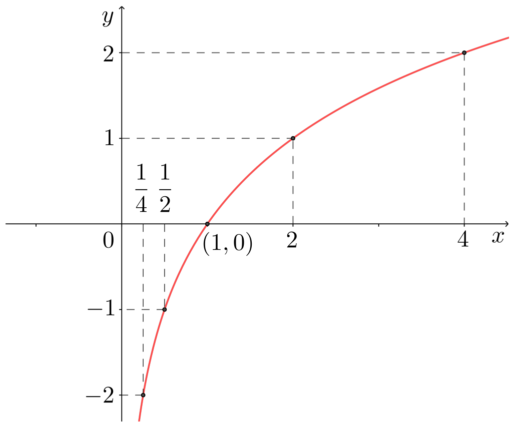


Figura 27 – Gráfico da função logarítmica $y = \log_2 x$

Fonte: Autor, 2019.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

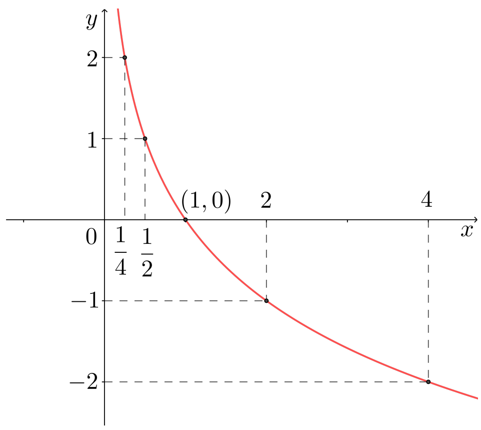


Figura 28 – Gráfico da função logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fonte: Autor, 2019

Portanto, em consequência da definição de função logarítmica e da análise dos gráficos acima, podemos concluir que:

- O gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(1,0)$, ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$;
- o gráfico nunca toca o eixo y nem ocupa pontos dos quadrantes *II* e *III*;

- se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;
- a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente.
- quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente $(x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2)$;

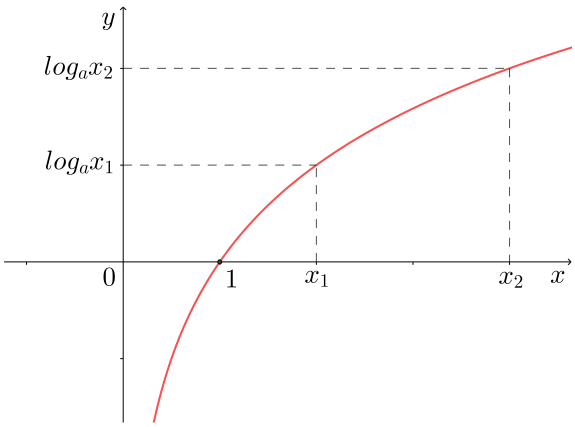


Figura 29 – Função logarítmica crescente, $a > 1$

Fonte: Autor, 2019

- quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente $(x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2)$;

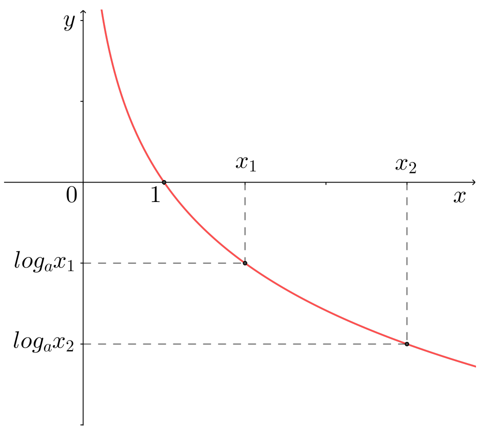


Figura 30 – Função logarítmica decrescente, $0 < a < 1$

Fonte: Autor, 2019

- a função logarítmica $\log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente, ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$, que cresce rapidamente. Note, por exemplo, que se $\log_a x = 1\,000$ então $x = 10^{1\,000}$. Desta forma, se quisermos que $\log_a x$ seja maior do que $1\,000$, será preciso tomar um número x que tenha pelo menos $1\,001$ algarismos. Esse decréscimo lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$, que, como sabemos, são simétricos em relação à diagonal de $\mathbb{R}^2$.

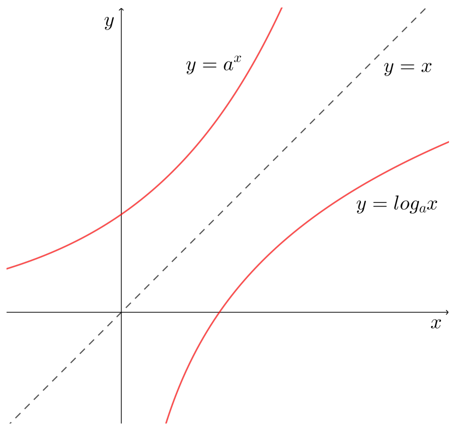


Figura 31 – A simetria entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica

Fonte: Autor, 2019

- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real b, existe sempre um único número real positivo x tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$);
- na função logarítmica $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), sendo ela crescente ou decrescente, o eixo das ordenadas é uma assíntota vertical do gráfico, isto é, a medida que x tende para zero, o valor da função cresce ou decresce ilimitadamente.

1.6.2 Caracterização das Funções Logarítmicas

Diante de um determinado problema, como saber se para resolvê-lo devemos usar o modelo dado pelas funções logarítmicas?

Note que a função logarítmica, tendo em vista a (4ª) propriedade, nos diz que a imagem do produto é a soma das imagens. Será que a recíproca é verdadeira?

Teorema 11. *(LIMA, 2000) Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

Portanto, entre as funções monótonas injetivas, $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas.

2 Problemas e Aplicações

2.1 Função Linear e proporcionalidade

Problema 1. *(LIMA, 2010) Seja P um ponto fora da reta r. Se X e Y são pontos distintos em r, prove que a área do triângulo PXY é proporcional ao comprimento de XY. Qual é o fator de proporcionalidade?*

Admitindo a fórmula da área de um triângulo, vamos denotar o comprimento do segmento XY por x e por $f(x)$ a área do triângulo desejado. De acordo com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, se mostrarmos, inicialmente que aumentando x implica que $f(x)$ também aumenta e que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, o que implica $f(x)$ proporcional a x, então $f(x) = ax$, com $a = f(1)$.

Com efeito, como vemos na Figura 32, aumentando x a área $f(x)$ também aumenta, o que mostra que $f(x)$ é uma função crescente de x. Também vemos que dobrando, triplicando, ou multiplicando o comprimento x por n e sendo o ponto P fixo, o que implica a altura h comum a todos os triângulos, a área do triângulo torna-se:

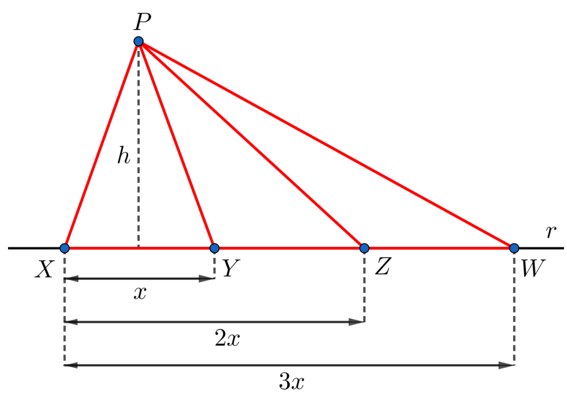


Figura 32 – Área do triângulo de altura fixa (h) e base x variável sobre uma reta r.

Fonte: Autor, 2019.

$$f(nx) = \frac{1}{2} \cdot (nx \cdot h) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot h\right) = n \cdot f(x)$$

Logo, a área $f(x)$ do triângulo PXY é proporcional ao comprimento x do segmento XY. Isto equivale, de acordo com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que $f(x) = ax$, sendo a a constante de proporcionalidade. Portanto,

$$a = f(1) = \frac{1}{2}(1 \cdot h) = \frac{h}{2}.$$

Problema 2. *(LIMA, 2010) Viajando de carro, a uma velocidade média de* $60\,km$ *por hora, consigo ir da cidade A para B em* 2 *horas e* 40 *minutos. Qual deve ser a minha velocidade média para que eu percorra a mesma rota em* 2 *horas?*

Note que aqui, temos uma correspondência

$$\text{tempo gasto} \mapsto \text{velocidade empregada}$$

Observamos que quanto maior for o tempo disponível, menor será a velocidade necessária. É claro que dobrando (ou triplicando, etc) o tempo disponível, será necessária apenas a metade (ou um terço, etc) da velocidade empregada.

Portanto, se escrevermos $v = f(t)$ para indicar a relação tempo $\mapsto$ velocidade, teremos $f(n \cdot t) = \dfrac{1}{n} \cdot f(t)$. Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, a velocidade média no percurso de A para B é inversamente proporcional ao tempo gasto na viagem.

Desta forma, se a $60\,km/h$ gasta-se 160 minutos, então, para termos 1 minuto (160 minutos $\div$ 160) de viagem, há de ser empregada uma velocidade média de $9.600\,km/h$ ($60\,km/h \times 160$). Portanto, para termos 120 minutos (1 minuto $\times$ 120) de viagem, deve ser empregada uma velocidade média de $80\,km/h$ ($9.600\,km/h \div 120$). Se v é inversamente proporcional a t, então $v = k/t$, onde k é igual a $v(1) = 9600$. A curva do gráfico de $v \times t$ é uma parte de uma curva denominada hipérbole equilátera.

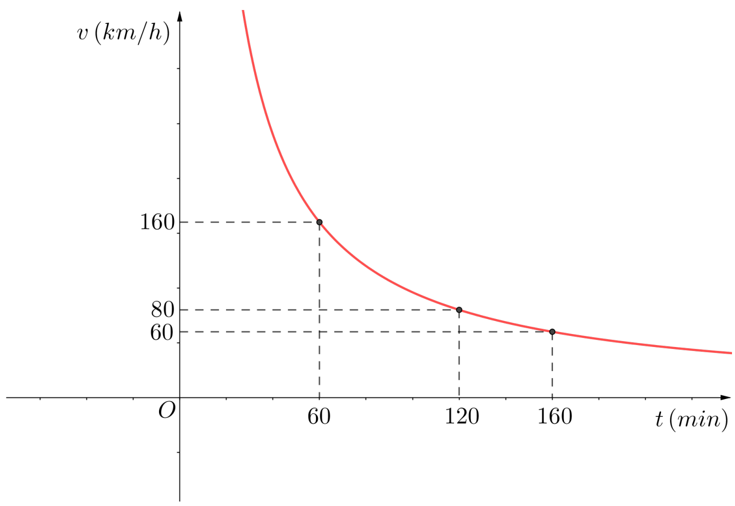


Figura 33 – Gráfico da da curva $v \times t$.

Fonte: Autor, 2019

Aplicação 1. *Uma quantia de dinheiro x é aplicada em uma caderneta de poupança. Após* 1 *mês, qual será o montante y obtido?.*

Vamos verificar se a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade, ou seja, se o montante y no fim do mês é proporcional à quantia aplicada.

Note que quanto maior a quantidade investida, maior será o montante. Logo y é uma função crescente de x. Também temos que, ao ser dobrada, triplicada, etc. a quantia x, duplicado, triplicado será o montante y. Com efeito, tanto faz abrir uma caderneta de poupança com o capital inicial $x_2 = nx_1$ como abrir (no mesmo dia) n cadernetas, cada uma com o valor inicial x_1. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos permite concluir que y é proporcional a x.

Por exemplo, uma aplicação de $R\$1\,000,00$ que rende $0,8\,\%$ ao mês resulta em um montante de $R\$1\,008,00$. No fim de um mês:

Capital inicial (x)	Juros (j)	Montante ($y = x + j$)
R$ 1000,00	R$ 8,00	R$ 1008,00
R$ 2000,00	R$ 16,00	R$ 2016,00

Tabela 1 – Proporcionalidade entre o Montante y de uma caderneta de poupança e o Capital x investido em um período fixo

Entretanto, no segundo mês calculamos $0,8\%$ de R$ 1008,00 (e não de R$ 1000,00), sendo obtido um montante de R$ 1016,06:

Capital inicial (x)	Juros (j)	Montante ($y = x + j$)
R$ 1000,00	R$ 8,00	R$ 1008,00
R$ 1008,00	R$ 8,06	R$ 1016,06

Tabela 2 – Retorno de uma aplicação de poupança e tempo de investimento

Portanto, em um período fixo, o retorno é proporcional ao capital investido, mas não ao tempo de investimento.

Aplicação 2. *A Lei de Gravitação Universal de Newton.*

A Lei de Gravitação Universal afirma que dois corpos de massas m_1 e m_2 respectivamente, situados a uma distância d um do outro, se atraem segundo uma força cuja intensidade f é proporcional a essas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Desta forma, vamos mostrar que sendo $f = (m_1, m_2, d)$, isto é, uma função de três variáveis, então $f(m_1, m_2, d) = \dfrac{k \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2}$, onde a constante k depende do sistemas de unidades utilizado.

Seja w uma grandeza cujo valor depende de cinco outras grandezas x, y, z, u, v . Vamos escrever $w = f(x, y, z, u, v)$. Diremos que w é proporcional a x, y, z, u ou v, quando, mantendo fixos quatro quaisquer dos valores x, y, z, u e v, w for proporcional à variável restante e w é uma função crescente em relação a esta variável restante. Por exemplo, se w é proporcional a x, então mantendo-se fixos y, z, u e v, dobrando, triplicando, etc. x, implica w dobrado, triplicado, etc. Note que se w é simultaneamente proporcional a x, y, z, u e v, então, do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue:

$$w = f(x,y,z,u,v) = f(x\cdot 1,y,z,u,v) = x\cdot f(1,y,z,u,v) = xy\cdot f(1,1,z,u,v) = xyzuv\cdot f(1,1,1,1,1).$$

Portanto, w é proporcional a x, y, z, u e v quando é proporcional ao produto $xyzuv$, ou seja, quando $w = k\cdot xyzuv$, sendo k o fator de proporcionalidade, $k = f(1,1,1,1,1)$.

Agora, se w é inversamente proporcional a x, y, z, u ou v, então mantendo fixos quatro quaisquer dos valores x, y, z, u e v, w é inversamente proporcional à variável restante e w é uma função decrescente em relação a esta variável restante. Por exemplo, se w é inversamente proporcional a u, então mantendo-se fixos x, y, z e v, dobrando, triplicando, etc u, implica o valor de w reduzido à metade, à terça parte, etc.

Mais geralmente, seja $w = f(x,y,z,u,v)$ uma grandeza diretamente proporcional às grandezas x, y, z e inversamente proporcional a u e v. Tomando $c \neq 0$, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade temos:

$$f(c\cdot x,y,z,u,v) = c\cdot f(x,y,z,u,v)$$

e

$$f(x,y,z,c\cdot u,v) = \frac{1}{c} f(x,y,z,u,v),$$

sendo de modo análogo para y e z no lugar de x e v no lugar de u. Daí, como se tem $f(x,y,z,u,v) = f(x\cdot 1, y\cdot 1, z\cdot 1, u\cdot 1, v\cdot 1)$, tem-se que

$$f(x,y,z,u,v) = xyz\cdot f(1,1,1,u\cdot 1,v\cdot 1) = \frac{xyz}{uv}\cdot f(1,1,1,1,1)$$

portanto,

$$f(x,y,z,u,v) = k\cdot \frac{xyz}{uv},$$

com $k = f(1,1,1,1,1)$ sendo o fator de proporcionalidade.

Resumindo se $w = f(x,y,z,u,v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u, v, então w é diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$. Note que esta é a verdadeira fundamentação teórica dos problemas de "regra de três composta".

Portanto, resulta do exposto acima, que para a lei de Gravitação Universal de Newton, $f(m_1, m_2, d) = k\cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}$.

2.2 Função Afim

Aplicação 3. *(LIMA, 2012) E.W. e a escala de sapatos*

E.W. observou, numa sapataria, que um vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala, na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ...36,37,38. O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, ou seja, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que a acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outra forma: se um certo pé precisa de crescer h centímetros para passar de, por exemplo, 33 para 34, então precisará de crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39, isto porque na escala do vendedor, os pontos da escala estão igualmente espaçados, o que implica dizer que para cada uma unidade dessa escala há um valor fixo em centímetros. Portanto, pelo Teorema de Caracterização da função afim, E.W. teve a certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim: $f(x) = ax + b$

E.W. sabia que, para determinar os coeficientes a, b da função afim, bastava conhecer $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer x_1 e x_2. Então, com auxílio de uma régua que media até milímetros, enquanto a escala do vendedor só marcava pontos e meio pontos, escolheu dois valores $x_1 \neq x_2$ tais que os números de sapatos correspondentes, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, assinalados na escala, fossem inteiros, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Tomou $x_1 = 20$ e $x_2 = 28$ e viu que $f(x_1) = 32$, $f(x_2) = 42$. Assim, calculou os coeficientes $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ e $b = y_1 - ax_1$ chegando a fórmula

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4}$$

que fornece o número do sapato de uma pessoa em função do comprimento do seu pé em centímetros.

Aplicação 4. *Variação de Temperatura: Conversão entre as escalas Celsius e Fahrenheit*

A Termologia é a parte da Física que estuda os fenômenos relativos ao aquecimento, ao resfriamento ou às mudanças de estado físico em corpos que recebem ou cedem determinado tipo de energia.

A temperatura é uma grandeza que mede o estado de agitação das partículas de um corpo, caracterizando o seu estado térmico. Portanto, as palavras "quente"e "frio"estão associados à temperatura de um corpo.

A temperatura de um corpo indica se esse corpo vai ganhar ou perder energia interna ao entrar em contato com outro corpo. Os aparelhos que permitem medir a temperatura de um corpo são chamados termômetros.

É importante diferenciar calor de temperatura, pois são grandezas diferentes. A temperatura é a medida do nível de energia interna de um corpo, e o calor é a passagem de energia de um corpo para o outro, devido a diferença de temperatura entre eles.

Escala Termométrica é um conjunto de valores numéricos em que cada valor está associado a uma determinada temperatura. Se por exemplo, a temperatura de um sistema *A* é representada pelo valor 40 e a de um sistema *B*, pelo valor 20, em uma mesma escala termométrica, dizemos que a temperatura de *A* é maior que a de *B*. Isso indica que as partículas do sistema *A* estão em um nível energético mais elevado que a do sistema *B*. Os valores numéricos de uma escala termométrica são obtidos a partir de dois valores atribuídos previamente a dois estados térmicos de referência, bem definidos, denominados pontos fixos. Pela facilidade de obtenção prática, são adotados usualmente como pontos fixos os estados térmicos correspondentes ao gelo fundente e à água em ebulição, ambos sob pressão normal. Esses estados térmicos costumam ser denominados ponto de gelo e ponto de vapor, respectivamente, e constituem os pontos fixos fundamentais.

A escala termométrica mais utilizada no mundo, inclusive no Brasil, foi criada pelo astrônomo e físico sueco Ander Celsius (1701-1744) e oficializada em 1742 por uma publicação da Real Academia Sueca de Ciências.

Por outro lado, uma escala termométrica mais utilizada no dia a dia, especialmente nos países de língua inglesa, é a escala Fahrenheit.

Celsius utilizou, originalmente, o valor 0 para o ponto de ebulição da água e o valor 100 para seu ponto de congelamento. Dessa forma, ele evitava valores negativos no estudo da variação de temperatura da água. Após sua morte, em 1744, esses valores foram invertidos e essa escala tomou a forma que conhecemos hoje. Daniel Gabriel Fahrenheit, autor da escala Fahrenheit, somente mais tarde, quando passou a utilizar a água como referência, observou que sua escala assinalava 32 para o ponto de gelo e 212 para o ponto de vapor. Portanto, nos dias atuais, as escalas assumem a forma:

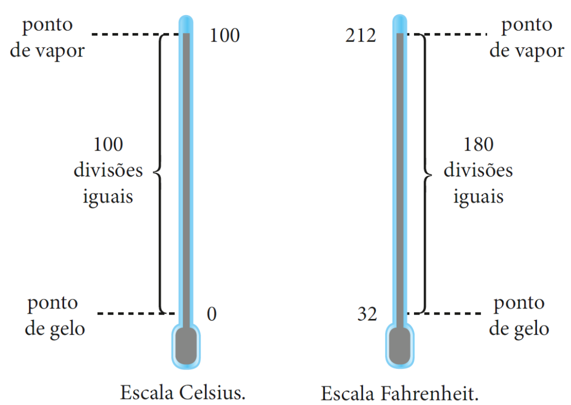


Figura 34 – Relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

Fonte: (DOCA, 2016).

Podemos observar que em ambas as escalas os números estão igualmente espaçados. Portanto, fixada um valor na escala Fahrenheit vemos que acréscimos iguais a esta temperatura deve corresponder naturalmente à acréscimos iguais ao valor correspondente na escala Celsius. Portanto, pelo Teorema de Caracterização da Função Afim, vemos que a relação entre a temperatura C em Celsius e o valor F correspondente em Fahrenheit é o modelo de função afim.

Assim, como sabemos os valores correspondentes de cada uma para os pontos de gelo e vapor da água, tem-se:

$$C = \frac{5F - 160}{9}$$

Aplicação 5. *O Movimento Uniforme*

Na Mecânica Clássica, um movimento é denominado uniforme quando um ponto material possui uma velocidade escalar que não se modifica com o passar do tempo. Na natureza, podemos encontrar casos interessantes de movimentos uniformes, como a propagação da luz e do som em meios homogêneos ou o movimento de uma rocha numa região do Universo em que o campo gravitacional seja desprezível.

> Movimento Uniforme (MU) é aquele em que a velocidade escalar instantânea é constante e diferente de zero, de modo que o móvel sofre iguais variações de espaço em iguais intervalos de tempo. (DOCA, 2016)

Podemos observar que na definição apresentada, não foi feita nenhuma restrição à forma da trajetória do móvel, podendo ser reta ou curvilínea.

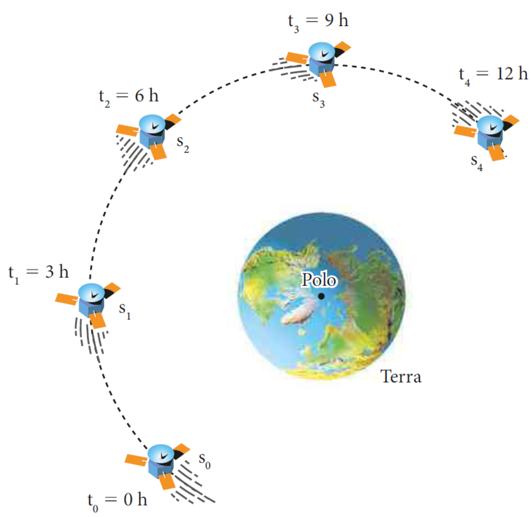


Figura 35 – Movimento uniforme e circular de um satélite artificial.

Fonte: (DOCA, 2016).

Note que de acordo com a Figura 35, em iguais intervalos de tempo, as distâncias percorridas pelo satélite são iguais, isto é, $s_1 - s_0 = s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = s_4 - s_3$.

Agora, consideremos uma móvel em movimento uniforme descrevendo a trajetória representada a seguir:

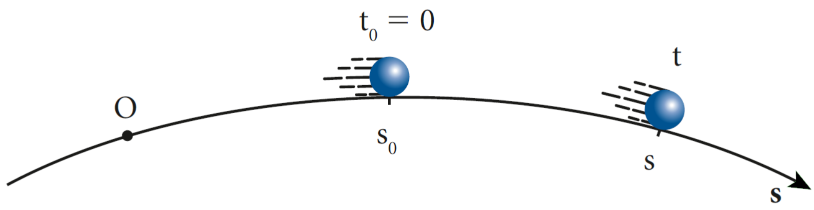


Figura 36 – Trajetória orientada de um móvel em Movimento Uniforme.

Fonte: (DOCA, 2016).

Vamos supor que o móvel se desloca sempre no mesmo sentido (isto é, a função que relaciona a posição s em função do instante t é uma função monótona). Como sabemos que no movimento uniforme, o móvel percorre em tempos iguais, espaços iguais, então $s(t+h)-s(t)$, espaço percorrido no tempo h, a partir da posição $s(t)$, depende apenas de h, mas não de t. Portanto, s é uma função afim: $s(t) = at + b$, onde $a = s(t+1) - s(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo e denominado velocidade escalar, e $b = s_0 = s(0)$ é a posição inicial.

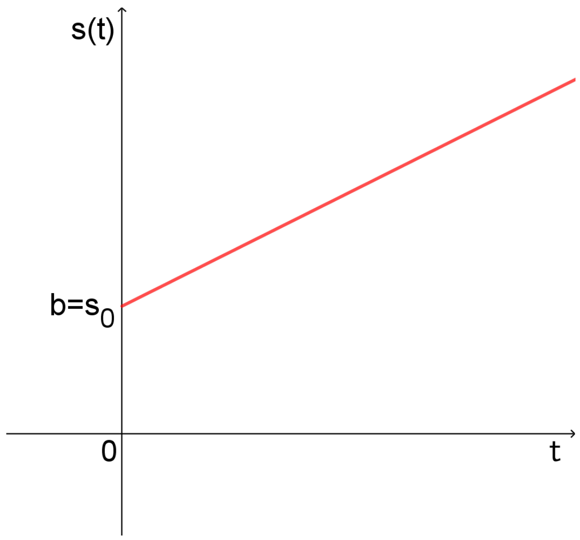


Figura 37 – Gráfico de $s \times t$ no Movimento Uniforme.

Fonte: Autor, 2019.

Note também que a declividade da reta, dada pela relação $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, fornece a velocidade escalar do móvel que descreve o movimento uniforme.

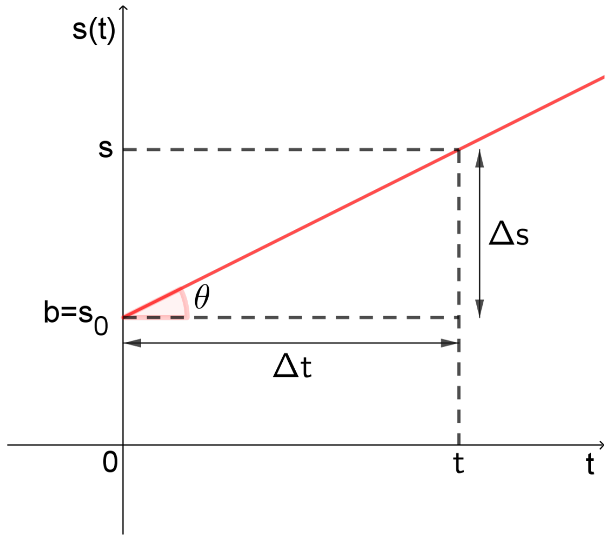


Figura 38 – A velocidade escalar como declividade da reta de $s \times t$ no Movimento Uniforme

Fonte: Autor, 2019.

$$a = \operatorname{tg}\theta = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Na definição comum de movimento uniforme, a condição de que o móvel se desloque sempre no mesmo sentido não é imposta. A razão para isto é que se supõe sempre que, no movimento a função $f(t)$ que dá a posição do instante t seja contínua. Porém, no Teorema Fundamental da Proporcionalidade, a monotonicidade de f pode ser substituída por sua continuidade, sem alterar a conclusão.

Problema 3. *(LIMA, 2012) Uma Caixa d'água de* 1000 *litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às* 6 *da tarde desse dia, só tinha* 850 *litros. Quando ficará pela metade?*

Temos que o Volume $V(t)$ de água na caixa no instante t é $V(t) = 1000 - at$. Sabemos que $V(6) = 850$, logo $1000 - 6a = 850$ e daí $a = 25$. Portanto $1000 - 25t = 500 \rightarrow t = 20$, isto é, a água ficará pela metade após 20 horas, o que ocorrerá às 8 da manhã do dia seguinte.

2.3 Função Quadrática

Aplicação 6. *O Movimento Uniformemente Variado*

O modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado é a função quadrática.

O movimento uniformemente variado (MUV) é aquele no qual o móvel sofre iguais variações de velocidade em iguais intervalos de tempo.

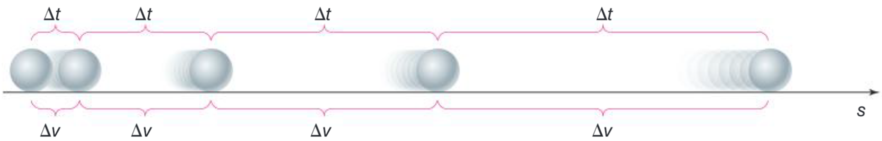


Figura 39 – Representação esquemática de um móvel em movimento uniformemente variado.

Fonte: (TORRES, 2016).

A aceleração escalar média (a_m) de um corpo em movimento uniformemente variado é a razão entre a variação de sua velocidade escalar (Δv) e a duração do intervalo de tempo (Δt) em que ocorreu a variação

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Portanto, no MUV, a aceleração escalar média é a mesma em qualquer intervalo de tempo.

Aceleração escalar instantânea (a) é a aceleração escalar média tomada em um intervalo de tempo muito pequeno, tendendo a zero ($\Delta t \to 0$); é o valor da aceleração em determinado instante.

Vamos supor uma partícula em movimento uniformemente variado, numa trajetória orientada. Denominemos por v_0 sua velocidade escalar no instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos) e de v sua velocidade escalar num instante t qualquer.

Figura 40 – Trajetória orientada de um móvel em movimento uniformemente variado.

Fonte: (DOCA, 2016).

Note que, como a aceleração escalar é constante, podemos obter uma equação que relaciona a velocidade escalar da partícula ao tempo t:

$$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Se o instante inicial t_0 for nulo, teremos:

$$a = \frac{v - v_0}{t - 0} \Rightarrow v - v_0 = at$$

Desta forma, obtemos a função de velocidade no MUV, dada por:

$$v = v_0 + at$$

Essa expressão fornece a velocidade escalar v num instante t qualquer do movimento. Ela é, por isso, denominada função horária da velocidade escalar instantânea.

A função horária da velocidade escalar no MUV é uma função afim; logo, a curva que representa essa função é uma reta inclinada, em relação aos eixos, no gráfico $(v \times t)$.

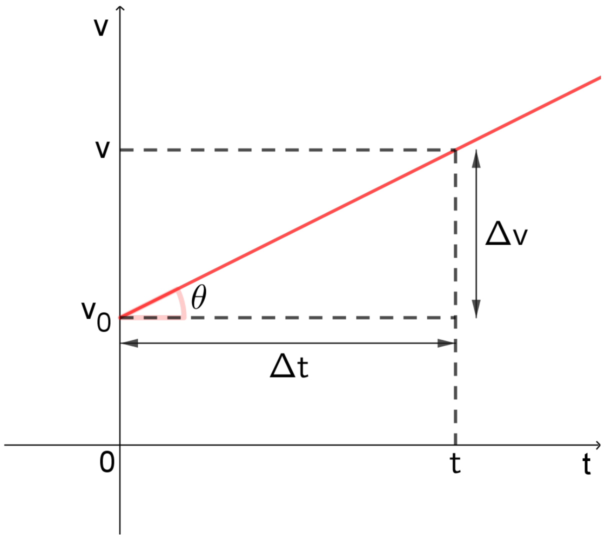


Figura 41 – Gráfico $v \times t$ no MUV.

Fonte: Autor, 2019.

Na Física Clássica, os corpos abandonados do repouso próximos à superfície da Terra e que se deslocam verticalmente para baixo sob a ação exclusiva da gravidade, isto é, no vácuo ou em um local onde se considera desprezível a força de resistência do ar. Em queda livre, o módulo da velocidade do corpo aumenta, ou seja, o movimento é acelerado. Essa aceleração, conhecida como aceleração da gravidade costuma ser indicada por g e tem módulo igual a $9,8\,m/s^2$, independentemente da massa do corpo. Para simplificar os cálculos, arredondamos esse valor para $10\,m/s^2$, isto é, o módulo da velocidade do corpo varia $10\,m/s$ em cada segundo, ou equivalentemente, $1\,m/s$ em cada décimo de segundo $(0,1s)$.

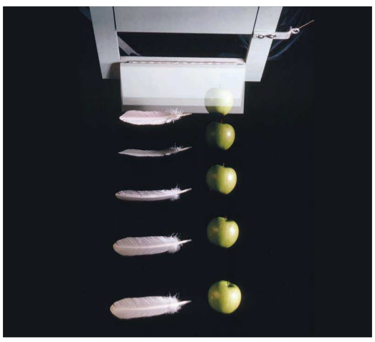


Figura 42 – Fotografia estroboscópica da queda simultânea de uma pena e maçã abandonadas no repouso no vácuo. Em uma fotografia estroboscópica, o intervalo de tempo entre os registros de duas posições sucessivas é constante.

Fonte: (FUKUI, 2016).

Para analisarmos algumas características desse movimento, podemos considerar um corpo em queda livre abandonado do repouso.Além disso, podemos orientar a trajetória para baixo e adotarmos a sua origem na posição em que o corpo foi abandonado.

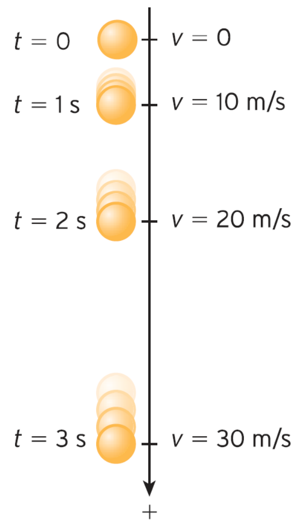


Figura 43 – Queda livre com trajetória orientada para baixo.

Fonte: (FUKUI, 2016).

A função da velocidade em função do tempo em um MUV permite prever, em um instante, qualquer velocidade do corpo, mas não fornece informação alguma sobre o seu espaço na trajetória. Para conseguir essa previsão, pode-se deduzir uma nova equação do MUV, conhecida como função de posição.

Vamos supor inicialmente um móvel que, em determinado instante inicial t_0, possua uma velocidade v_0 e ocupa um espaço inicial s_0 em uma trajetória orientada.

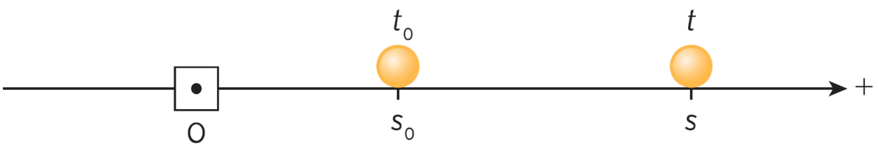


Figura 44 – Trajetória orientada no MUV

Fonte: (FUKUI, 2016).

Temos que no instante t, o espaço é s e a velocidade escalar é v. Desejamos expressar s em função de t. Para isso, vamos traçar o gráfico de $v \times t$, como mostrado na Figura 45.

Segundo (NUSSENZVEIG, 2002), se sabemos a lei horária de um movimento, ou seja, a função $s = s(t)$, então, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral é possível obter a velocidade instantânea $v(t)$ no decurso do movimento: basta tomar o valor da derivada $\dfrac{dx}{dt}$ naquele instante t.

Como vimos na seção da função exponencial o valor da derivada em um dado ponto do domínio de uma função é, se existir, a taxa instantânea de crescimento de f no ponto x.

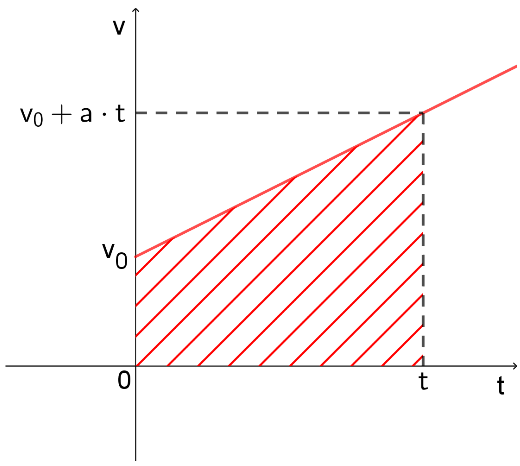


Figura 45 – Gráfico $v \times t$ no Movimento Uniformemente Variado.

Fonte: Autor 2019..

No nosso caso, temos o problema inverso, isto é, temos a função horária da velocidade instantânea do móvel e desejamos obter a função posição $(s \times t)$.

Ainda segundo (NUSSENZVEIG, 2002) métodos de cálculo de integrais são vistos nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e mostram que o problema se reduz a calcular a área compreendida entre a curva da função $(v \times t)$ e o eixo das abscissas (levando em conta que áreas situadas abaixo do eixo devem ser contatadas como negativas).

Portanto, a área sob o a curva $(v \times t)$ do MUV define o espaço percorrido $\Delta s = s - s_0$.

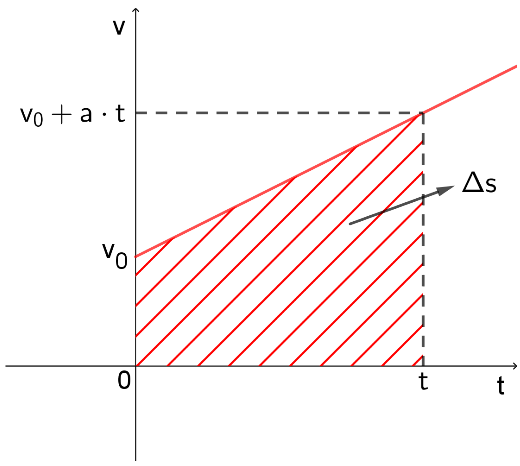


Figura 46 – A variação do espaço percorrido Δs como área sob a curva do gráfico de $v \times t$ de 0 a t.

Fonte: Autor 2019..

Como na figura acima a área sob a curva $(v \times t)$ é representada pelo trapézio, temos:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v_0 + at) \cdot t}{2} = \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \Delta s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Portanto, a função que relaciona a posição s de um corpo em MUV com velocidade incial v_0, aceleração escalar a e posição inicial s_0 é dada por:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Assim, o modelo matemático do movimento uniformemente variado é a função quadrática.

O movimento uniformemente variado pode ocorrer também no plano. Por exemplo, o movimento de um projétil como uma bala, uma bola, uma pedra, lançada por uma força instantânea e, a partir daí, sujeitos apenas à ação da gravidade, este movimento é denominado lançamento oblíquo. Neste caso, desprezamos a resistência do ar. Apesar do processo ocorrer no espaço tridimensional, a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Sabemos que quando se tem um movimento retilíneo sobre um eixo, a velocidade do móvel é expressa por um número, porém, quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama a velocidade escalar do móvel. A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

Consideremos um lançamento oblíquo no plano que se dá o movimento e tomemos um sistema de coordenadas xOy cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo Oy é a reta vertical que passa por esse ponto.

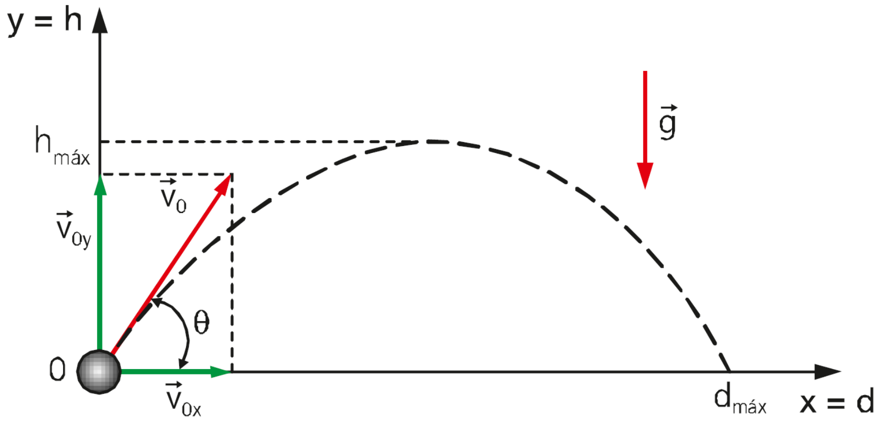


Figura 47 – Lançamento oblíquo de um projétil no plano xOy.

Fonte: (YAMAMOTO, 2016).

A velocidade inicial do projétil é o vetor $\vec{v_0}$, de módulo v_0, tal que este forma um ângulo θ $(0 < \theta < 90°)$ com eixo Ox. Agora, podemos entender este movimento como a composição de dois movimentos distintos, para isso vamos decompor o vetor velocidade em dois vetores independentes: o vetor velocidade horizontal ($\vec{v_0}_x$) e o vetor velocidade vertical ($\vec{v_0}_y$), como indicado na Figura 47.

Note que os módulo dos vetores $\vec{v_0}_y$ e $\vec{v_0}_x$, aos quais indicaremos respectivamente por v_{0_y} e v_{0_x}, devem ser dados por:

$$v_{0_y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

e

$$v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta$$

Desprezando a resistência do ar e como a única força atuando sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre o movimento horizontal, que é portanto um movimento uniforme. Em outras palavras, o módulo, $v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta$, calculado a partir da decomposição de $\vec{v_0}$, permanecerá constante durante toda a duração do movimento.

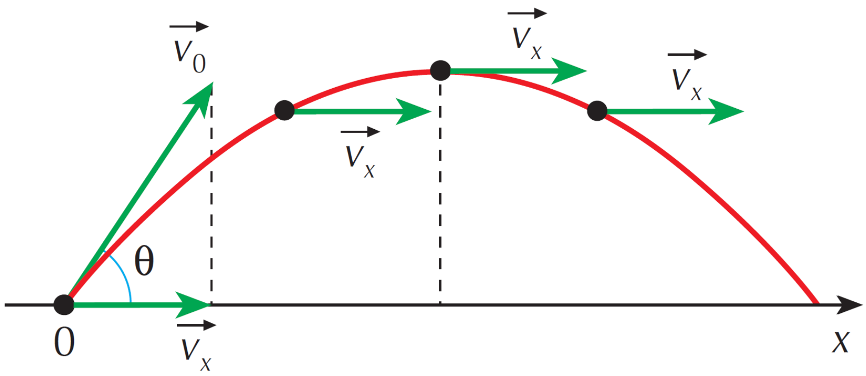


Figura 48 – A velocidade horizontal v_x constante durante o movimento oblíquo.

Fonte: (RAMALHO, 2009).

A Figura 48 , na qual não foi representada a velocidade vertical v_y, mostra que, qualquer que seja o ponto da trajetória em que o corpo esteja, a velocidade horizontal é sempre a mesma:

$$v_{0_x} = v_x = cte.$$

Logo, na horizontal tem-se $x = v_x t$.

Por outro lado, a aceleração da gravidade é constante, vertical, igual a $-g$ (O sinal negativo se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical Oy). Portanto, o módulo da velocidade vertical v_y diminui à medida que o corpo sobe, anula-se no ponto mais alto e aumenta à medida que o corpo desce.

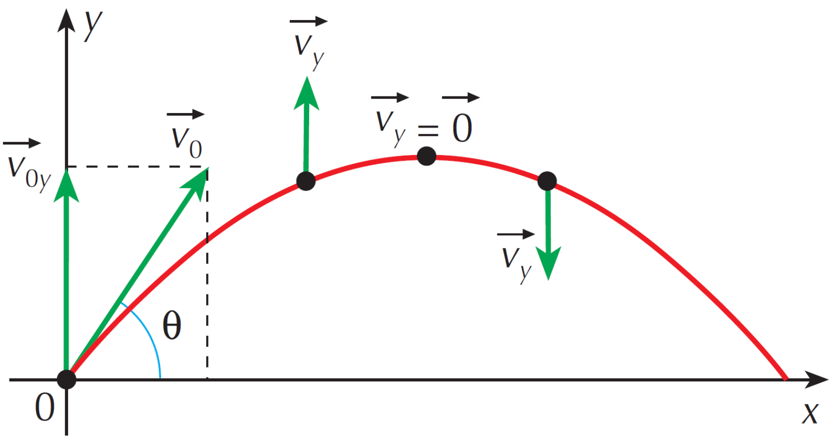


Figura 49 – Movimento vertical no lançamento oblíquo em MUV.

Fonte: (RAMALHO, 2009).

Assim, na vertical o movimento realizado é uniformemente variado, logo:

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \theta) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{e} \quad v_y = v_{0_y} - gt$$

Note que não há termo constante porque $y = 0$ quando $t = 0$.

Se $v_{0_x} = 0$ então, para todo instante t, tem-se $x = v_x = 0$, logo a ordenada do móvel é

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta) \cdot t.$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical.

Agora, se tomamos $v_x \neq 0$. Então de $x = v_x t$, vem $t = \dfrac{x}{v_0 \cos \theta}$.

Em seguida, ao substituir o instante de tempo na equação do y, temos:

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{g t^2}{2} \Rightarrow y = v_0 \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

Realizando-se algumas substituições algébricas, temos que a equação de um corpo em lançamento oblíquo a partir do solo é:

$$y = \operatorname{tg} \theta x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

Problema 4. *Um objeto é lançado obliquamente do solo, com velocidade de* $50\, m/s$ *em um ângulo de lançamento* θ *em relação à linha horizontal. São dados:* $g = 10\, m/s^2$, $\operatorname{sen} \theta = 0,6$ *e* $\cos \theta = 0,8$. *Desprezando-se a resistência do ar, determine, em relação ao objeto, o instante em que ele atinge a altura máxima, a altura máxima alcançada, sua velocidade no ponto mais alto e seu alcance horizontal.*

Determinemos inicialmente as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial do objeto:

$$v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta = 50 \cdot 0,8 \quad \Rightarrow \quad v_{0_x} = 40\,m/s$$
$$v_{0_y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta = 50 \cdot 0,6 \quad \Rightarrow \quad v_{0_y} = 30\,m/s$$

Na altura máxima, $v_y = 0$:

$$v_y = v_{0_y} - gt \Rightarrow 0 = 30 - 10t \Rightarrow t = 3\,s$$

Agora, para determinarmos a altura máxima, vamos utilizar a função horária de y, isto é, $h_{max} = y_{max}$. Assim:

$$h = v_{0_y} t - \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow h = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 \Rightarrow h_{max} = 45\,m$$

No ponto de altura máxima a velocidade vertical do corpo é nula, a velocidade resultante é exclusivamente a velocidade horizontal.

$$v = v_x = 40\,m/s$$

Quando o corpo atinge o chão novamente, sua posição na direção vertical é nula.

$$y = 30t - 5t^2 \Rightarrow 0 = 30t - 5t^2$$

Resolvendo-se a equação do segundo grau, as raízes são $t = 0$ e $t' = 6\,s$. Assim, o corpo atinge o chão de novo no instante $t' = 6s$. Agora, o alcance máximo é obtido pela posição do corpo no eixo x, no instante em que ele atinge o solo. Isto é,

$$x = 40 \cdot t = 40 \cdot 6 \Rightarrow x = 240\,m$$

Problema 5. *(LIMA, 2000) O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a $R\$9,00$, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de $R\$1,00$ no preço dos ingressos, o público aumenta em 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?*

Este é um clássico exemplo de função quadrática pouco abordado nos livros didáticos. Aqui, há uma situação problema na qual uma variável, neste caso, o desconto x no preço de cada ingresso vendido determina o valor de outra variável, no caso a receita $R(x)$ da orquestra. Ora, a receita é dada pelo produto entre o total de ingressos vendidos e o preço do ingresso. Esta receita é máxima, para algum valor de x.

Assim, se a cada $R\$\,1,00$ a menos do preço do ingresso implica 100 pessoas a mais no espetáculo, então reduzindo x reais do preço do ingresso são vendidos $300 + 100x$ ingressos a $9 - x$ reais cada. Logo, a receita é de $(300 + 100x) \cdot (9 - x) = 100 \cdot (-x^2 + 6x + 27)$ reais.

Portanto, a receita será máxima para $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$. O preço dever ser $(9 - 3 = 6)$ reais.

Problema 6. *(LIMA, 2000) Com* $80\,m$ *de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?*

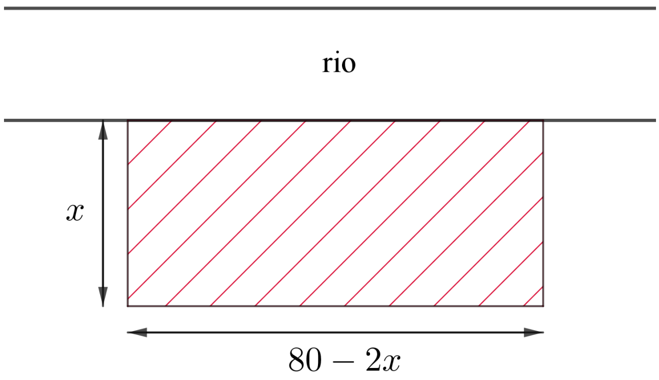


Figura 50 – Área circundada pelo fazendeiro.

Fonte: Autor 2019.

Denotando por x os lados paralelos do retângulo, o outro lado oposto ao rio tem $(80-2x)\,m$. A área é $x(80-2x) = -2x^2+80x$ e deve ser máxima. Devemos ter $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{80}{2\cdot(-2)} = 20$. Portanto, a cerca deve ter os lados perpendiculares ao rio medindo $20\,m$ e o lado paralelo ao rio medindo $40\,m$.

Problema 7. *Em um terreno retangular de* $80\,m$ *por* $50\,m$ *foi construído um barracão para servir como depósito de uma firma. Esse depósito ocupa uma área de* $1\,000\,m^2$*. Em torno do barracão foi deixado um recuo de x metros de cada lado, para um gramado. Nessas condições, qual é a medida x do recuo?*

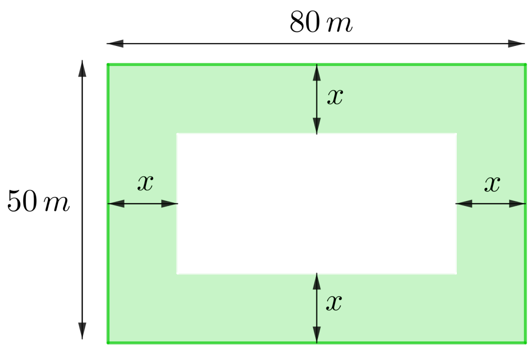


Figura 51 – Terreno retangular com o recuo x para a construção do depósito.

Fonte: Autor 2019.

De acordo com a Figura 51, temos que as dimensões do depósito devem ser $(50-2x)\,m$ de largura e $(80-2x)\,m$ de comprimento. Portanto,

$$\begin{aligned} (50-2x)\cdot(80-2x) &= 1000 \quad \Leftrightarrow \\ 4x^2-260x+3000 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ x^2-65x+750 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º acima, obtemos $x=15$ ou $x=50$. Porém, para $x=50$, tem-se $80-2x=-20$ o que não satisfaz o problema. Logo, o recuo x dever ser de $15\,m$.

2.4 Função Exponencial

Problema 8. *(LIMA, 2010) Uma piscina tem capacidade para $100\,m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado $1kg$ de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam $900g$ de cloro na piscina. Pergunta-se: Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação? E após meia hora de aplicação? E após t horas?*

Temos uma relação entre duas grandezas, a saber, a quantidade de cloro existente na piscina $c(t)$ e o tempo t horas após ser colocado a quantidade inicial de cloro. Uma resposta muitas vezes dada para primeira pergunta é que, após 10 horas, não há mais cloro na piscina. Esta resposta resulta da aplicação do modelo mais simples de variação de uma grandeza, isto é, a função afim. De acordo com este modelo, a variação sofrida em cada intervalo de 1 hora é sempre a mesma. Porém, para este caso, essa solução dada não é correta. Note que não é razoável admitir-se que a eliminação de cloro se dê a uma taxa constante. Com efeito, é muito mais razoável que esta taxa dependa da quantidade de cloro presente na piscina: quanto maior a quantidade de cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo. Intuitivamente, podemos ter a quantidade eliminada por unidade de tempo sendo proporcional à quantidade existente de cloro. Com efeito, ao invés de considerar que a água ingressa na piscina e é dela eliminada de modo contínuo, vamos dividir o tempo em pequenos intervalos de comprimento Δt e vejamos o que ocorre com a quantidade $c(t)$ de cloro em cada um destes intervalos. No início do processo, esta massa está uniformemente distribuída em um volume V de líquido. Após o ingresso de água pura, a quantidade de cloro não se altera, mas passa a estar distribuída e um volume igual a $V+v\Delta t$, onde v é a vazão (expressa, por exemplo, em m^3 por hora). Deste volume, retira-se $v\Delta t$, retendo-se um volume igual a V. Como o cloro está distribuído uniformemente, a quantidade de cloro que permanece na piscina é proporcional ao volume retido.

O valor desconhecido é, então, dado por

$$c(t+\Delta t) = c(t)\frac{V}{V+v\Delta t} \tag{2.1}$$

O mais importante a observar é que a fração $\dfrac{V}{V+v\Delta t}$ é constante para cada intervalo de comprimento Δt. Assim, em cada um destes intervalos, a quantidade de cloro é multiplicada por um valor constante. Observe que o mesmo ocorrerá em um intervalo maior, formado pela justaposição de n intervalos de comprimento Δt: a quantidade de cloro em um intervalo de tamanho $n\Delta t$ é multiplicada por $\left(\dfrac{V}{V+v\Delta t}\right)^n$. A variação da quantidade de cloro, por sua vez, é obtida da equação acima subtraindo-se a quantidade inicial $c(t)$ em cada lado de (2.1), o que fornece:

$$c(t+\Delta t)-c(t)=c(t)\left(\frac{V}{V+v\Delta t}-1\right)=c(t)\left(-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}\right) \tag{2.2}$$

Portanto, a variação relativa $\dfrac{c(t+\Delta t)}{c(t)}$ é constante e igual a $-\dfrac{v\Delta t}{V+v\Delta t}$, isto é, a variação da quantidade de cloro em intervalos de mesmo comprimento é proporcional à quantidade existente no início do intervalo.

Com a análise acima, vemos a inadequação da primeira tentativa de solução, isto é, a perda de cloro, nos períodos consecutivos de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa: se 10% do cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Equivalentemente, se 90% do cloro permanece após a primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Logo, após 10 horas de aplicação, a quantidade de cloro terá sido multiplicada por $(0,9)^{10}=0,349$. Portanto, neste instante haverá 349 gramas de cloro na piscina.

Agora, com o Teorema de Caracterização das Funções de Tipo Exponencial, temos que:

$$c(t)=1000\cdot 0,9^t$$

Assim, para $t=\dfrac{1}{2}$, tem-se:

$$c\left(\frac{1}{2}\right)=1000\cdot(0,9)^{\frac{1}{2}}\approx 948,7g$$

O problema de se determinar uma função conhecida a taxa de instantânea de crescimento de uma grandeza em relação a outra (geralmente o tempo) é abordado no Cálculo Diferencial em um campo de estudo denominado Equações Diferenciais (BOYCE, 2010). Como já exposto, a taxa de instantânea de crescimento de uma grandeza em relação a outra é representada por $f'(x)$ (Derivada da função f no ponto x) ou $\dfrac{dy}{dx}$. Segundo (ZILL, 2001) o problema de valor inicial (Equação Diferencial):

$$\frac{dx}{dt}=kx, \qquad x(t_0)=x_0 \tag{2.3}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade, ocorre em muitas teorias físicas envolvendo crescimento ou decrescimento. Por exemplo, em biologia, é frequentemente observado que a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes no dado instante. Durante um curto intervalo de tempo, a população de pequenos animais, tais como roedores, pode ser prevista com alto grau de precisão pela equação (2.3). Em Física, um problema de valor inicial como (2.3) proporcional um modelo para o cálculo aproximado da quantidade remanescente de uma substância que está sendo desintegrada através da radioatividade. A equação diferencial em (2.3) pode ainda determinar a temperatura de um corpo em resfriamento. Em Química, a quantidade remanescente de uma substância durante certas reações também pode ser descrita por (2.3).

A constante de proporcionalidade k em (2.3) é positiva ou negativa e pode ser determinado pela solução para o problema usando um valor subsequente de x em um instante $t_1 > t_0$.

Ainda segundo (ZILL, 2001) a equação (2.3) é uma Equação Diferencial separável e Linear e tem como solução uma família de funções dadas por:

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

isto é, uma família de funções de tipo exponencial.

Aplicação 7. *(ZILL, 2001) Em uma cultura, há inicialmente P_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.*

Como a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes temos que $P(t) = ce^{kt}$.

Em $t = 0$, concluímos que $P_0 = ce^0 = c$. Assim, $P(t) = P_0 e^{kt}$. Em $t = 1$, temos

$$\frac{3}{2}P_0 = P_0 e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2}$$

logo, $k = \ln\frac{3}{2} = 0,4055$ com quatro casas decimais. A expressão para $P(t)$ é portanto

$$P(t) = P_0 e^{0,4055t}$$

Para encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias seja triplicado, vamos resolver:

$$3P_0 = P_0 e^{0,4055t}$$

Segue-se dessa equação que $0,4055t = \ln 3$ e daí

$$t = \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71 \textit{ horas}$$

Note que podemos reescrever $N(t)$ em uma forma alternativa:

$$P(t) = P_0 (e^k)^t = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

pois $e^k = \frac{3}{2}$. Essa última solução proporciona um método conveniente de calcular $N(t)$ para valores inteiros pequenos de t.

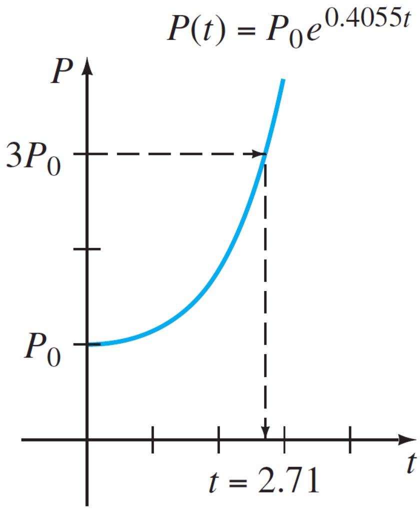


Figura 52 – Tempo em que a população triplica.

Fonte: (ZILL, 2001).

Como mostrado na Figura 53, a função exponencial e^{kt} cresce com o tempo quando $k > 0$, e decresce quando $k < 0$. Logo, problemas que descrevem crescimentos, como população, bactéria ou mesmo capital, são caracterizados por um valor positivo de k; por outro lado, problemas envolvendo decrescimento, como desintegração radioativa, conduzem a um valor negativo de k.

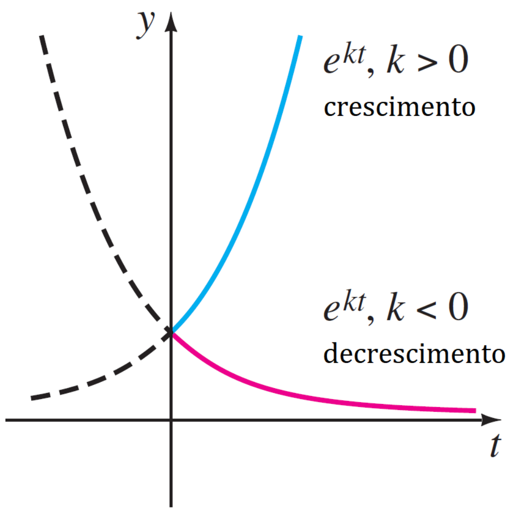


Figura 53 – Crescimento ($k > 0$) e decrescimento ($k < 0$).

Fonte: (ZILL, 2001).

Problema 9. *(LIMA, 2010) Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos. Qual é o crescimento estimado para um período de* 20 *anos? E em um período de t anos?*

Note que a cada período de 5 anos, a população é multiplicada por $1,02$. Logo, em 20 anos, ela é multiplicada por $1,02^4 = 1,0824$, isto é, o aumento estimado é de $0,0824$, ou seja, $8,24\%$.

Podemos ver pelo enunciado do problema que a população é multiplicada por uma constante em qualquer intervalo de tempo de duração fixa (não necessariamente com duração de 5 anos). Por exemplo, se o intervalo de tempo é de 40 anos, então ela é multiplicada por $1,02^8 = 1,1716$, independentemente do valor atual dela. Assim, o crescimento estimado é de $0,1716$, ou seja, $17,16\%$. Portanto, estamos diante de um crescimento populacional, com a propriedade de que o aumento da população, em um certo intervalo de tempo, é proporcional à população no início deste intervalo.

Assim, pelo Teorema de Caracterização da Função Exponencial, a população no instante t é expressa por uma função do tipo exponencial $p(t) = ba^t$, onde $b = p(0)$ é a população no instante inicial. O valor de a pode ser calculado usando o fato de que, em 5 anos, há um crescimento de 2%. Temos $p(5) = p(0) \cdot a^5 = p(0) \cdot 1,02$, logo $a^5 = 1,02$, isto é, $a = 1,02^{\frac{1}{5}}$ e $p(t) = p(0) \cdot 1,02^{\frac{t}{5}}$.

Desta forma, o crescimento relativo em um período de duração t anos é:

$$\frac{p(t) - p(0)}{p(0)} = \frac{p(0) \cdot 1,02^{\frac{t}{5}} - p(0)}{p(0)} = 1,02^{\frac{t}{5}} - 1.$$

Isto é,

$$p(t) - p(0) = p(0) \cdot \left(1,02^{\frac{t}{5}} - 1\right)$$

mostrando que de fato o aumento relativo, em um certo intervalo de tempo, é proporcional à população no início deste intervalo, posto que $1,02^{\frac{t}{5}} - 1$ é uma constante fixado o período de tempo t.

Aplicação 8. *(Juros Compostos) Uma pessoa deposita* $R\$1\,800,00$ *na poupança a uma taxa de juros compostos de* $0,5\%$ *ao mês. Considerando que não foi feita nenhuma retirada, após* 3 *meses qual será o saldo da poupança? E após x meses?*

Juros compostos são os juros calculados em determinados períodos fixos somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes.

Façamos uma tabela para encontrar o saldo até o terceiro mês:

Mês (x)	Montante $f(x)$
1	$1800 + 1800 \cdot 0,005 = 1800(1+0,005) = 1800 \cdot 1,005 = 1809,00$
2	$1809,00 + 1809,00 \cdot 0,005 = 1809(1+0,005) = 1\,800 \cdot 1,005^2 = 1818,04$
3	$1818,04 + 1818,04 \cdot 0,005 = 1818,04(1+0,005) = 1800 \cdot 1,005^3 = 1827,13$

Tabela 3 – Cálculo de Juros Compostos

Deste modo, o saldo da poupança passado 3 meses é de $R\$\,1\,827,13$. Os dados anteriores dão uma pista de como encontrar a resposta para o caso geral:

Fixando um mês (x)	Montante $f(x)$
$x+1$ (Após 1 mês)	$f(x+1) = 1,005 \cdot f(x)$
$x+2$ (Após 2 meses)	$f(x+2) = 1,005 \cdot f(x+1) = 1,005^2 \cdot f(x)$
$x+3$ (Após 3 meses)	$f(x+3) = 1,005 \cdot f(x+2) = 1,005^3 \cdot f(x)$
$\cdots$	$\cdots$
$x+h$ (Após h meses)	$f(x+h) = 1,005^h \cdot f(x)$

Tabela 4 – Cálculo de Juros Compostos: caso geral

Assim, temos que para o saldo $f(x+h), h \in \mathbb{N}$, no mês $x+h$, obteremos $\dfrac{f(x+h)}{f(x)} = 1,005^h$, quociente que independe de x, assegurando uma proporcionalidade entre $f(x+h)$ e $f(x)$. Além disso, note que o valor da poupança representa uma função monótona crescente e injetiva. Logo, com estas observações, podemos garantir, pelo Teorema de Caracterização de Função Exponencial, que uma função do tipo exponencial modela este problema. Neste caso, $f(x) = b \cdot a^x$, onde $b = f(0) = 1\,800$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{1809}{1800} = 1,005$, portanto, $f(x) = 1800 \cdot 1,005^x$.

2.5 Função Logarítmica

Problema 10. *(LIMA, 2010) Investindo seu capital a juros mensais de 8%, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?*

Temos $C_0(1+0.008)^n = 2C_0$. Daí, $1,08^n = 2$ e $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,08} \approx 9$.

Logo, em aproximadamente 9 meses você dobrará o seu capital inicial.

Aplicação 9. *(ZILL, 2001) Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após* 15 *anos, foi detectado que* $0,043\%$ *da quantidade inicial* A_0 *de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.*

Em física, meia-vida é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela é. Por exemplo, a meia-vida do ultra-radioativo rádio, Ra-226, é cerca de 1700 anos. Em 1700 anos, metade de uma dada quantidade de Ra-226 é transmutada em radônio, Rn-222. O isótopo de urânio mais comum, U-238, tem uma meia-vida de aproximadamente 4.500.000.000 de anos. Nesse tempo, metade de uma quantidade de U-238 é transmutada em chumbo, Pb-206.

Vamos denotar por $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t. Agora, de acordo com (ZILL, 2001)

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad A(0) = A_0$$

tem como solução

$$A(t) = A_0 e^{kt}.$$

Assim, se $0,043\%$ dos átomos de A_0 se desintegrou, então $99,957\%$ da substância permaneceu. Para calcular k, usamos o fato que $0,99957A_0 = A(15)$; ou seja,

$$0,99957A_0 = A_0 e^{15k}.$$

Agora, resolvendo $15k = \ln 0,99957$, ou

$$k = \frac{\ln 0,99957}{15} = -0,00002867.$$

Logo,

$$A(t) = A_0 e^{-0,00002867t}$$

Agora, a meia-vida é o tempo t no qual $A(t) = \frac{A_0}{2}$. Calculando o valor de t nessa equação temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A_0 &= A_0 e^{-0,00002867t} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2} &= e^{-0,00002867t} \Leftrightarrow \\
-0,00002867t &= \ln\frac{1}{2} = -\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
t &= \frac{\ln 2}{0,00002867} \approx 24,180 \text{ anos}
\end{aligned}$$

Problema 11. *(DANTE, 2013) Sabemos que o número de bactérias em uma cultura, depois de um tempo t, é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que N_0 é o número inicial (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% por minuto?*

De acordo com os dados do problema, a pergunta é: Em quanto tempo $N = 2N_0$?

Desta forma, temos:

$$N = N_0 \cdot e^{rt} \Rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{0,05t} \Rightarrow 0,05t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,8$$

$13,8$ min $=$ 13 min e $\frac{8}{10}$ min $=$ 13 min 48 s.

Assim, o número de bactérias dobrará em 13 minutos e 48 segundos.

Aplicação 10. *Potencial Hidrogeniônico*

Desde a Idade Média e da Renascença, os alquimistas, "químicos"daquela época, sabiam que determinadas substâncias, quando dissolvidas em água, formavam soluções com algumas características em comum: gosto azedo, e de um modo geral, capacidade de reagir com metais. Essas substâncias foram classificadas como ácidos.

Em Química, se um átomo possui um número de elétrons diferentes do número de protóns, ele chama-se íon. Sabe-se que as características ácidas das soluções devem-se à presença do íon hidrogênio, indicado por H^+, em concentração mais elevada do que na água pura. Por exemplo, ao dissolvermos em água a substância chamada cloreto de hidrogênio (HCL), forma-se o ácido clorídrico.

Os átomos de hidrogênio e cloro, formadores de molécula de HCL, separam-se e dão origem aos íons H^+ e CL^-. Quanto maior a quantidade de íons H^+ num determinado volume de solução, maior será sua acidez. A concentração desses íons é expressa pela concentração molar, ou seja, pelo número de mols de H^+ em cada litro de solução e é indicada por $[H^+]$ (1 mol de $H^+ \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ íons $H^+ = 602$ sextilhões de íons H^+).

Como as concentrações são dadas por potências de 10 com expoente negativo (por exemplo, 10^{-3},10^{-8}, 10^{-14}), o trabalho com esses números traz alguma dificuldade matemática, e por isso, criou-se a escala pH, que se utiliza de logaritmos decimais. O termo pH (abreviatura de potencial hidrogeniônico) é uma maneira de expressar a concentração de íons de hidrogênio. Foi criada, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Perter Lauritz Sorensen (1868-1939), para simplificar seu trabalho no controle de qualidade de cervejas.

Soren adotou o termo pH para indicar o cologaritmo na base 10 da concentração de H^+. Então, em linguagem matemática, temos: $pH = colog[H^+]$ ou $pH = -\log H^+$ o que implica dizer que $[H^+] = 10^{-pH}$.

Problema 12. *(LIMA, 2010) Considere as seguintes soluções ácidas: o suco de limão, cujo pH é* 2*, e o suco de tomate, cujo pH é* 4*. Qual é a concentração de íons H^+, em mol/L, no suco de limão? A concentração de íons H^+ no suco de limão equivale a quantas vezes essa concentração no suco de tomate?*

Indicando por x e y as concentrações de íons H^+, em mol/L, nos sucos de limão e tomate, respectivamente, e utilizando a expressão dada $pH = -\log[H^+]$, temos que:

$$2 = -\log x \Rightarrow -2 = \log x \Rightarrow x = 10^{-2}$$

e

$$4 = -\log y \Rightarrow -4 = \log y \Rightarrow y = 10^{-4}$$

Assim concluímos que:

A concentração de íons H^+ no suco de limão é $10^{-2} mol/L$.

A concentração de íons H^+ em mol/L no suco de limão equivale a 100 vezes essa concentração no suco de tomate, pois: $10^{-4} \cdot 100 = 10^{-4} \cdot 10^2 = 10^{-2}$.

Aplicação 11. *Magnitude Aparente Estelar*

A magnitude aparente é uma escala usada para comparar o brilho das estrelas. Foi desenvolvida pelo astrônomo grego Hiparco, há mais de 2000 anos, e fornece uma forma de comparar quão brilhante um objeto parece em relação ao outro, mas não quão brilhante ele é. Quanto maior for o brilho aparente do astro, menor será o valor da sua magnitude.

Hiparco criou uma escala para o brilho das estrelas de forma que as mais brilhantes tivessem uma magnitude de 1, as segundas mais brilhantes uma magnitude de 2 e assim por diante até á magnitude 6 que é a estrela menos brilhante que o olho humano consegue perceber.

Atualmente, através de equipamentos óticos, chegou-se a conclusão de que a cada vez que se soma, aproximadamente, $5,5$ á magnitude, o brilho é dividido por 10. De forma equivalente, temos que somar 1 à magnitude, o brilho é dividido por $2,5$ (10 elevado a dois quintos). Este tipo de comportamento, em que as razões das grandezas são constantes, e não a sua diferença, caracteriza o uso e uma escala logarítmica.

Sob certas condições, podemos relacionar a magnitude estelar M de uma estrela como o seu brilho B, visto da Terra, pela função $M = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$, que equivale a $B = B_0 \cdot 10^{\frac{-2M}{5}}$, em que B_0 é um nível padrão de brilho, indicado pela estrela Vega.

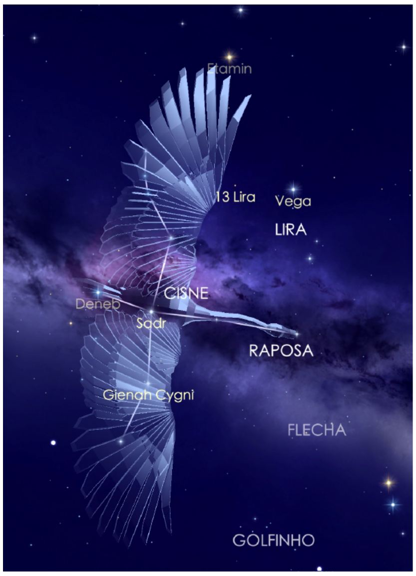


Figura 54 – A estrela Vega localizada na constelação de lira.

Fonte: (Star Walk 2, 2019). Disponível em
https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vitotechnology.StarWalk2Free.

Problema 13. *(SOUZA, 2010) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de magnitude aparente da estrela. Já a magnitude absoluta da estrela é a a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de* 10 *parsecs* (1 *parsec é aproximadamente* $3 \cdot 10^{13}\,km$)*.As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para determinar sua distância ao planeta Terra.*

Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M, sob certas condições, é dada aproximadamente pela fórmula $M = m + 5\log_3(3d^{-0,48})$, *em que d é a distância da estrela em parsecs. A estrela Rigel tem, aproximadamente magnitude aparente* $0,2$ *e magnitude absoluta* $-6,8$. *Determine a distância, em quilômetros, de Rigel ao planeta Terra.*

Substituindo os valores dados na relação, temos:

$$\begin{aligned}
-6,8 &= 0,2 + 5\log_3(3d^{-0,48}) \Rightarrow \\
-\frac{7}{5} &= log_3(3d^{-0,48}) \Rightarrow \\
3^{-\frac{7}{5}} &= 3d^{-0,48} \Rightarrow \\
3^{-\frac{12}{5}} &= d^{-\frac{12}{25}} \\
\left(3^{-\frac{12}{5}}\right)^{-\frac{25}{12}} &= \left(d^{-\frac{12}{5}}\right)^{-\frac{25}{12}} \Rightarrow d = 3^5
\end{aligned}$$

Portanto a distância de Rigel ao planeta Terra é de 3^5 parsecs ou $3^6 \cdot 10^{13}\,km$.

Figura 55 – A estrela Rigel (β órion) localizada na constelação de órion.

Fonte: (Star Walk 2, 2019). Disponível em
https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vitotechnology.StarWalk2Free

3 Considerações Finais

O presente trabalho final de curso do PROFMAT alcançou o objetivo proposto ao conceituar, aprofundar e aplicar as principais funções elementares. Desenvolveu-se uma abordagem diferenciada para seu ensino, por meio das aplicações contextualizadas e na ênfase de suas caracterizações.

Assim como as funções tratadas nessa produção, outros tópicos da Matemática do Ensino Médio podem ser explorados oriundos de contextos presentes nas demais disciplinas do currículo, aperfeiçoando e potencializando o ensino interdisciplinar. Isto permitirá ao aluno entender a importância e funcionalidade dos conteúdos que lhes são apresentados nas aulas de Matemática e demais disciplinas correlatas.

É fato que uma proposta de ensino aprofundado e contextualizado contribui para um melhor aprendizado e desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. Além disso, o aprofundamento teórico da matemática básica ao professor do Ensino Básico contribui, evidentemente a sua formação, mas também ao desenvolvimento do ensino matemático básico a nível nacional, papel este, que o programa PROFMAT vem desempenhando de forma eficiente. A matemática é uma disciplina exata, seus conceitos devem ser claros e precisos. A proposta deste trabalho também foi uma elucidação de ideias como "é proporcional", "taxa de variação instantânea, média, relativa", conceitos presentes em funções elementares, mas muitas das vezes, imprecisos nos principais livros didáticos atuais. Há de se buscar a fonte e aprofundamento de tais conceitos, por isso, este trabalho está apoiados nos grandes autores da literatura matemática atual, como Elon, Morgado e Àvila.

A abordagem e solução dos principais problemas apresentados nesta obra também baseiam-se nesta forte literatura nacional, assim procurei manter a essência das soluções, porém acrescentando, explanando e aprofundando tais soluções.

Há no contexto da função exponencial uma gama de problemas e aplicações, os quais não foram abordados nesta obra, como o crescimento populacional de bactérias e número de infectados por um determinado vírus, por exemplo, os relativos à COVID-19. Pretenderemos, em trabalhos subsequentes, aprofundarmos o estudo de aplicações da função exponencial ao quadro de transmissões da COVID-19 e assim mostrarmos o quão poderosa é esta ferramenta matemática para compreensão desta crise sanitária que assola o mundo atualmente.

Assim, esperamos que a presente obra tenha alcançado seu objetivo final, isto é, fornecer ao professor de matemática da educação básica um material sólido e aprofundado de como trabalhar os conteúdos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica de modo contextualizado.

Ressaltamos também que este trabalho é voltado para o ensino básico, porém oferece subsídios para que professores e estudantes de graduação ampliem seus conhecimentos sobre as funções elementares, posto que muito do conteúdo abordado está em conexão com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

BOYCE, W. E. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Citado na página 70.

BRASIL.MEC. *PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC, 2006. Citado na página 10.

DANTE, L. R. *Matemática:contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 12, 13, 28, 34, 36, 45, 46 e 75.

DOCA, R. H. *Física: mecânica*. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 56, 57, 58 e 60.

FUKUI, A. *Ser protagonista: física, 1º ano: ensino médio*. 3. ed. São Paulo: Edições SM, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar,1: conjuntos e funções*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. Citado na página 40.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 41, 1999. Citado na página 10.

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. 5. ed. [S.l.]: SBM, 2000. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 38, 50, 67 e 68.

LIMA, E. L. *Temas e Problemas Elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 51, 52, 69, 73, 74 e 76.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 16 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 23, 26, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 55 e 59.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Citado na página 13.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física básica*. 4. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.

RAMALHO, F. J. *Os Fundamentos da Física*. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.

SOUZA, J. *Novo olhar matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010. Citado na página 78.

STEWART, I. *Em busca do Infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014. Citado na página 28.

TORRES, C. M. A. *Física: ciência e tecnologia*. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2016. Citado na página 60.

ÁVILA, G. O ensino de matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 23, 1983. Citado na página 14.

YAMAMOTO, K. *Física para o ensino médio: mecânica*. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Citado na página 64.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 70, 71, 72, 74 e 75.