COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Felipe Almeida de Oliveira

Atividades em Circuitos Lógicos para o Estudo e Desenvolvimento de Potencialidades acerca da Compreensão de Conectivos

Rio de Janeiro

2020

Felipe Almeida de Oliveira

Atividades em Circuitos Lógicos para o Estudo e Desenvolvimento de Potencialidades acerca da Compreensão de Conectivos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof(a) Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2020

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

O48 Oliveira, Felipe Almeida de
Atividades em circuitos lógicos para o estudo e desenvolvimento de potencialidades acerca da compreensão de conectivos / Felipe Almeida de Oliveira. – Rio de Janeiro, 2020.
152 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Lógica algébrica. 3. Álgebra booleana. 4. Circuitos lógicos. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Felipe Almeida de Oliveira

Atividades em Circuitos Lógicos para o Estudo e Desenvolvimento de Potencialidades acerca da Compreensão de Conectivos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____

Prof(a) Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II
Orientador

____

Prof(a) Drª Aline de Lima Guedes
IME- UERJ

____

Prof(a) Drª Andreia C. Maciel Barbosa
Colégio Pedro II

____

Prof(a) Dr. Rodrigo Trevisan de Barros
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro

2020

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, alunos, amigos e professores.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por me permitir chegar até aqui com saúde e paz no coração. Agradecer meus pais Adriana e Júlio que me permitiram chegar onde estou hoje dando todas as condições e apoio necessários para minha formação pessoal e academica, em especial minha esposa Camila por todo apoio, compreensão e força nos momentos mais difíceis durante essa árdua caminhada, minha irmã Juliana pelo apoio tecnológico durante esses dois duradouros anos e aos meus amigos de longa data Rafael Lima e Rafael Coelho por todos os conselhos dados e pela paciância nos momentos de frustração acadêmica. Reforço o agradecimento a todos citados a cima por toda paciência que tiveram comigo ao longo desses anos de estudo, independente da tempestade que a vida apresentou sempre estiveram ao meu lado como pilares de sustentação e nunca permitiram que eu esmorecesse. Sem vocês esse momento poderia não existir.

Agradeço, e muito, meu orientador Daniel por todo o apoio acadêmico e comprometimento, afim de apresentarmos o melhor trabalho possível. Agradeço pela paciência e compreensão nos momentos de desanimo, pelas palavras de incentivos, cada conselho e esporro que somaram para meu crescimento profissional e pessoal.

E por fim, mas não menos importante, quero deixar minha enorme gratidão aos amigos que fiz no PROFMAT por me apoiar e incentivar em cada fase do curso, em especial Jefferson, Diego, Flávio, Maria, Gisele e Evandro. Suas palavras de encorajamento e demostração de companheirismo foram fundamentais, em especial neste momento de escrita da pesquisa, onde contribuiram com críticas que me ajudaram a atingir um patamar diferenciado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo".

Pitágoras

RESUMO

OLIVEIRA, Felipe Almeida de. **Atividades em Circuitos Lógicos para o Estudo e Desenvolvimento de Potencialidades a cerca da Compreensão de Conectivos**. 2020. 152 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Tradicionalmente nos livros didáticos o assunto lógica matemática é apresentado com uma linguagem que, muitas vezes, deixam os alunos desinteressados. Após o conhecimento da metodologia STEM (acrônimo em inglês utilizado para designar as quatro áreas do conhecimento: Ciência, tecnologia, engenharia e matemática), afim de tornar a implementação desses conceitos matemáticos no ensino médio mais atrativo, a proposta é apresentar os mesmos conectivos baseado nesta metodologia. Para que esse objetivo fosse alcançado, aborda-se esses conceitos através de conteúdos pertencentes a eletrônica, a saber, a Álgebra Booleana e os Circuitos Digitais.

Palavras-chave: Metodologia STEM; Circuitos Lógicos; Álgebra Booleana.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Felipe Almeida de. **Atividades em Circuitos Lógicos para o Estudo e Desenvolvimento de Potencialidades a cerca da Compreensão de Conectivos**. 2020. 152 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Traditionally in textbooks the mathematical logic subject is presented with a language that often leaves students uninterested. After knowledge of the STEM methodology used to designate the four areas of knowledge: Science, Technology, Engineering and Mathematics, in order to make the implementation of these mathematical concepts in high school more attractive, the proposal is to present the same connective based. in this methodology. To achieve this goal, these concepts are approached through content belonging to electronics, namely, Boolean Algebra and Digital Circuits.

Keywords: STEM Methodology; Logic Circuits; Boolean Algebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata-se de uma tentativa de dinamizar o ensino da lógica matemática para além do que é apresentado tradicionalmente nos livros didáticos, apostilas, aulas organizadas por professores e apresentações em midias digitais. Todos esses materiais serviram de ferramentas para que pensassemos numa nova abordagem para o assunto já que versam muito sobre análise de tabelas, quando muito ligados a problemas de linguagem e conjuntos.

Na tentativa de estimular esse tipo de conteúdo que é árduo tanto para alunos quanto para professores, procuramos um embasamento matemática que justificasse a teoria da lógica. A Álgebra de Boole é o conteúdo matemático que justifica a teoria, que tem nos circuitos digitais o campo fértil para prática. Os circuitos digitais aparecem com a função de simular um circuito dando uma maior concretização ao aprendizado e trazendo os alunos para um campo mais interessante e prático, já que os circuitos lógicos estão presentes de maneira direta em suas vidas. Dessa forma estruturamos o texto dessa pesquisa em sete capítulos de modo que:

No **capítulo 2** apresentamos o conceito da metodologia **STEM** (acrônimo em inglês utilizado para designar as quatro áreas do conhecimento: Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), que servirá de justificativa teórica para o uso de um conteúdo pertencente à eletrônica para o ensino de conectivos. Trata-se de uma metodologia baseada em projetos que tem como principal objetivo trazer o aluno para o envolvimento direto com o conteúdo através de atividades que os levem a um aprendizado mais eficiente, colocando-o como protagonista do seu próprio conhecimento.

No **capítulo 3** procuramos descrever a lógica proposicional de primeira ordem evidenciando os conectivos **E**, **OU** e a **negação lógica**, com o objetivo de situar o leitor de como ela é apresentada tradicionalmente, com os seus principais conceitos e argumentos. Tais conceitos serviram como pano de fundo para o desenvolvimento da parte teórica do trabalho.

No **capítulo 4** foi apresentado um breve histórico do matemático George Boole destacando suas principais obras, dentre elas a "An investigation into the Laws of Thought" (As Leis do Pensamento) onde viu a lógica com um novo olhar, chegando a uma álgebra mais simples, que futuramente seria a base para a computação. Em seguida, apresentamos a teoria que compreende a Álgebra Booleana descrevendo seus principais elementos, definições, operações, postulados e teoremas. Por fim, exibimos a relação entre Circuitos Lógicos e a Álgeba Booleana, apresentando as principais portas lógicas, a construção de circuitos lógicos a partir de uma expressão booleana, a simplificação de um circuito através de sua expressão entre outros aspectos necessários para o desenvolvimento das atividades que serão propostas mais adiante.

No **capítulo 5** descrevemos uma proposta para implementação da lógica matemática para o ensino médio regular, em particular, a **negação** lógica e os conectivos **E** e **OU**. Essa proposta tem como objetivo elaborar atividades a serem resolvidas baseadas na metodologia STEM, relacionando a Álgebra de Boole, os circuitos digitais e a lógica proposicional. Foi utilizado um software (LogicCircuit) que cria e simula circuitos lógicos, afim de dar uma maior concretização ao aprendizado.

No **capítulo 6** pensamos em uma proposta para trabalharmos com os conectivos " se..., então" e "se e somente se" de maneira indireta, já que não existem portas lógicas que tratem diretamente desses conectivos. As propostas de atividades contidas neste capítulo foram intencionalmente pensadas e delineadas de modo que o professor possa criar o seu proprio material a partir das dicas e sugestões presentes no capítulo.

No **capítulo 7** temos o resultado de duas oficinas, uma apresentada no Festival da Matemática (FESTMAT) do Colégio Pedro II e outra feita com 29 alunos do curso de informática do ensino médio integrado do Colégio Pedro II, campus São Cristovão III, onde apresentamos um relato de como se desenvolveu as atividades e comentamos os resultados obtidos em um momento destinado a reflexão da oficina junto aos alunos.

2 METODOLOGIA STEM

Com a evolução da era digital, houve uma demanda significativa de trabalhadores que serão ou terão relação com a tecnologia, portanto se faz necessário que o aluno desde a educação básica tenha o aprendizado de conteúdos relacionados com a educação STEM. cuja a sigla é um acrônimo em inglês utilizado para designar as quatro áreas do conhecimento: Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (em inglês Science, Techology, Engineering, and Mathematics).

> Em um planeta altamente globalizado, a interação entre sistemas políticos, econômicos e culturais é bastante intrincada. Algumas nações tendem a atuar como produtoras de tendências globais, enquanto outras, em maior ou menor intensidade, incorporam essas tendências nos seus sistemas internos. As novas diretrizes econômicas são fortemente influenciadas pelas grandes corporações que produzem ou demandam conhecimento de alta complexidade e especialização, e isso gera consequências em outros setores além do econômico. No que diz respeito aos sistemas educacionais, diversos países têm se voltado para um formato de educação que enfatiza a Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, o chamado STEM Education. (PUGLIESE, 2017, p.38)

De acordo com (PUGLIESE, 2017) ao longo da década de 1990, especialistas alardeavam nos Estados Unidos a existência de uma crise no mercado de trabalho motivada pela escassez de pessoas qualificadas para ocupar cargos ou posições técnicas relacionadas as ciências. E foi dessa demanda que surgiu o conceito de educação STEM , popularizada a partir dos anos 2000 pela Fundação Nacional da Ciência, agência governamental norte-americana que promove pesquisa e educação em ciência e engenharia.

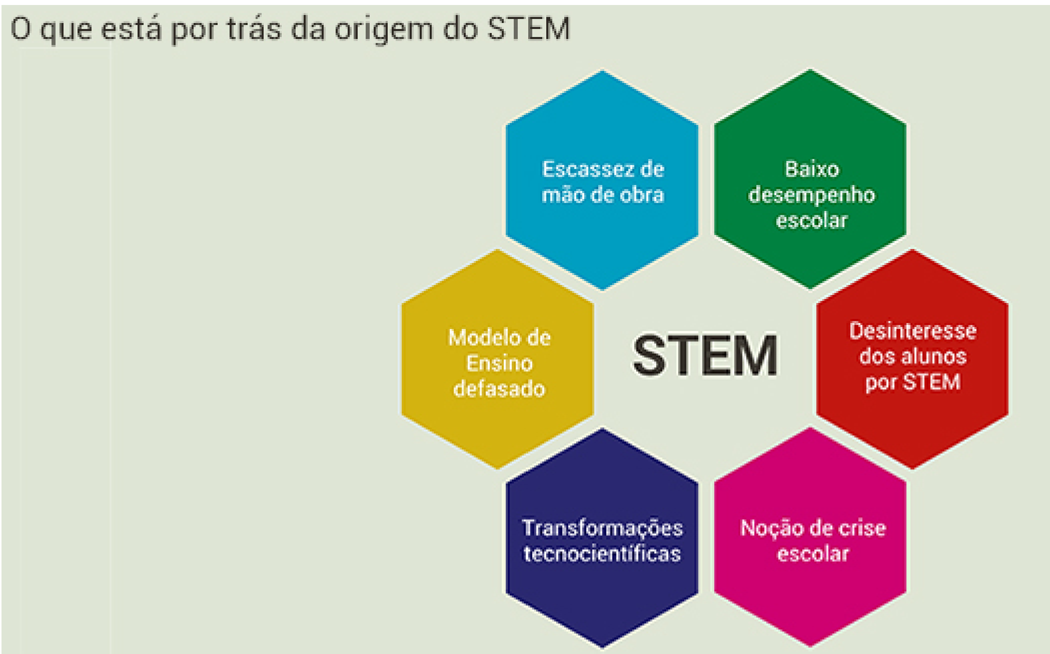
Em https://desafiosdaeducacao.com.br/microsoft-desenvolve-ia-e-programas-em-stem-para-revolucionar-ensino/, encontramos a entrevista ao site desafio da Educação (2019), dada por Antônio Moraes, diretor de Educação da Microsoft Brasil, onde afirma que STEM é baseado em um modelo de ensino com ênfase em projetos, em que propõe o envolvimento dos estudantes em atividades que os levam a uma aprendizagem mais prática e atrativa, que foge de metodologias conteudistas e pouco atraente. Colocando o aluno como centralizador do seu aprendizado, fazendo com que ele debata, interaja e arquitete o mundo com o seu olhar.

Segundo (PUGLIESE, 2017) a educação STEM apresenta-se como uma metodologia inovadora no ensino de ciência. Difundindo a ideia do ensino tradicional, onde o aluno pouco interage com o conteúdo trabalhado e não vê conexões com o mundo em que vivem. Em geral, o programa educacional STEM defende que é uma forma libertadora do ensino tradicional e não participativo, sendo substituído pela aprendizagem baseada em projetos e atrelada as futuras decisões profissionais.

De acordo com (PARK; KO, 2012 apud LOPES et al., 2017), com o avanço da Ciência, Tecnologia e Engenharia, houve uma defasagem no ensino da educação científica fazendo com que os jovens, que estão familiarizados com esse avanço tecnológico, percam o interesse. Ocasionando uma defasagem na criatividade na educação cientifica durante os anos escolares. Desta maneira, torna-se desafiador para o professor manter o ensino na atualidade algo atrativo. De acordo com (FREIRE; LEMOS, 2008), os jovens de hoje se destacam pela facilidade no manuseio de novas tecnologias. Detentores de muita criatividade, esses jovens necessitam de atividades que os desafiem e diversificadas para manter o foco em suas tarefas.

> Na sala de aula, isso se torna um grande desafio para o educador, uma vez que o docente de outra geração precisa compreender essa divergência de prioridades e auxiliar os estudantes a construir sua própria maneira de aprender. Para isso, as metodologias ativas de aprendizagem procuram atender essa geração, uma vez que pretendem mudar a forma de aprender e ensinar, tornando o ensino mais dinâmico e divertido, sendo as aulas mais interessantes para os alunos. (LIMA, 2016 apud SILVA, 2017, p.2)

Figura 1 – Por trás da origem STEM



Fonte – https://www.fenep.org.br/single-de-noticia/nid/stem-o-movimento-as-criticas-e-o-que-esta-em-jogo/

2.1 O STEM no Brasil

O programa STEM é algo relativamente novo no Brasil. Segundo (PUGLIESE, 2017) nas principais revistas especializadas em ciências, não existe nenhuma publicação relativa à educação STEM, já na mídia, tem-se pequenas reportagem introdutórias referente ao programa, mas sem o aprofundamento metodológico.

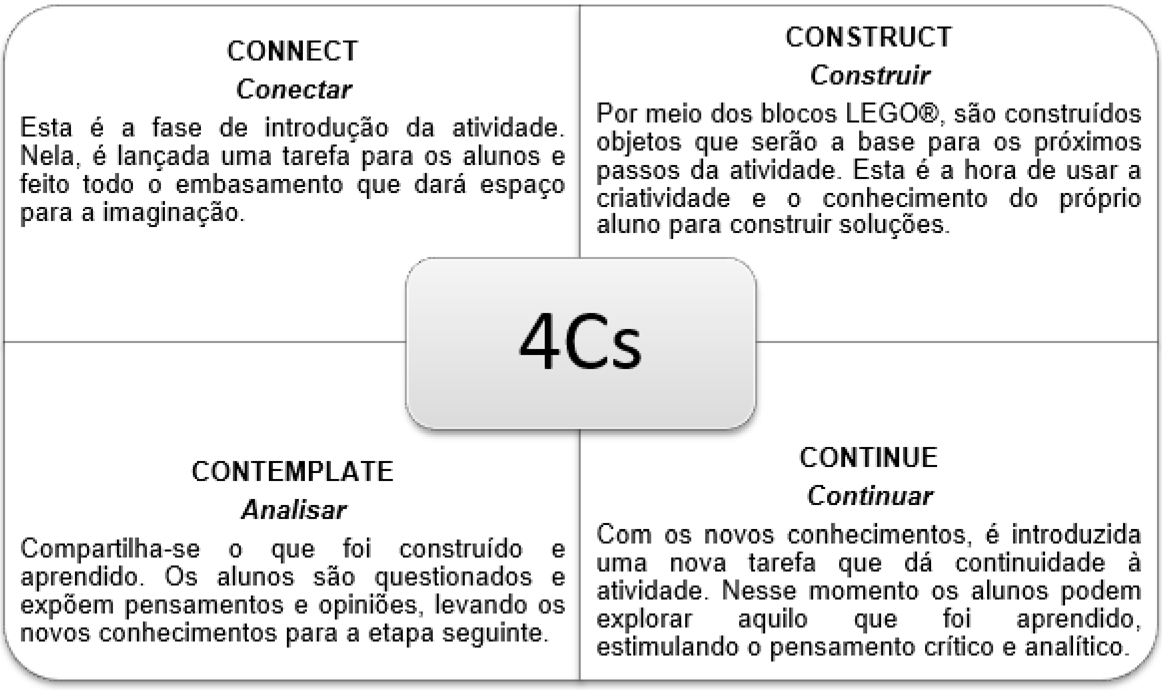
Um dos principais agentes da área no país, o programa STEM Brasil, surgiu em 2009 com o objetivo de melhorar a educação no país por meio dessa metodologia. O projeto, criado pela organização internacional Worldfund. O STEM Brasil forma professores da rede pública para inserirem o STEM em suas aulas regulares, seguindo uma metodologia própria, que enfatiza a pratica de resolução de problemas reais dando mais sentido ao currículo obrigatório de ciências e matemática dos estados brasileiros. Utilizam o ensino baseado em atividades práticas facilitando o aprendizado de conceitos teóricos. Professores são treinados a fazer estudantes colaborarem em projetos e a resolverem problemas juntos, com o professor como facilitador. O principal objetivo é fazer com que, aos poucos, os professores treinados substituam a metodologia tradicional, baseada em memorização e cálculos mecânicos, para algo que desenvolva habilidades reais nos alunos, diz Marcos Paim, Diretor do STEM Brasil.

A metodologia envolve quatro áreas de conhecimento: Física, Química, Biologia e Matemática e a todas elas, são incorporadas as habilidades do século XXI necessárias ao mundo do trabalho, a saber, a resolução de problemas, o trabalho em equipe, o pensamento crítico e a comunicação. Cada professor passa por intensas 180 horas de formação distribuídas em 2 anos. Desde o lançamento do STEM Brasil, em 2009, atua hoje em 17 estados e já atendeu quase 724 escolas, 6225 professores e 574.771 alunos.

De acordo com os dados publicados pelo site Educando (2019), na Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, verifica-se que dos 84% das escolas que incorporaram a metodologia STEM Brasil, 20% delas mostraram um aumento nas notas de matemática dos alunos. Entre as escolas participantes do STEM Brasil, 88% mantém o programa após a primeira fase, que tem duração de dois anos. Não há informações qualitativas sobre ganhos ou perdas que envolvem a aplicação da metodologia.

A aplicação da metodologia não se restringe a sua aplicação no espaço escolar. Desde 1980, a LEGO®Education (2019), braço educacional da LEGO, se dedica ao desenvolvimento de métodos de ensino focados em STEM por meio de recursos lúdicos que envolvem os blocos LEGO®, softwares, materiais e formação de professores. Com ênfase na Educação Infantil, Ensino Fundamental I e II, e ensino médio, a metodologia LEGO abrange currículos na área de Linguagem, Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Esta metodologia baseia-se na estrutura conhecida por 4Cs, sigla referente as quatro etapas do modelo de aprendizado: connect (conectar), constructo (construir), contemplate (analisar) e continue (continuar).

Figura 2 – Etapas metodologia 4Cs



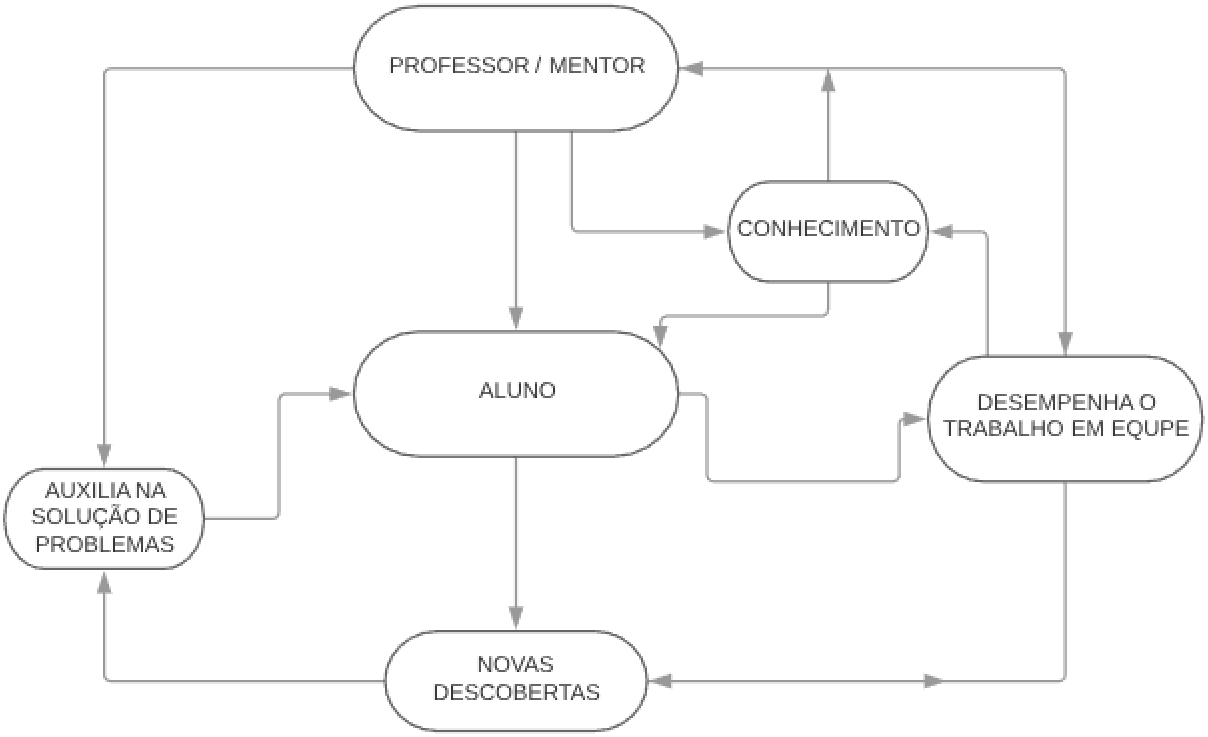
Fonte – O autor, 2019.

2.2 Papel do professor

Segundo (BRIGHENTI; BIAVATTI; SOUZA, 2015), o papel do professor deixa de ser o de detentor do saber e transmissor do conteúdo e passa a ser um orientador, um mentor, cuja principal função é fazer os questionamentos certos, provocar novas descobertas. Nesse novo olhar, o aluno deixa de ser apenas receptor e passa a ser produtor de conhecimento, assumindo o protagonismo de sua própria aprendizagem.

Dessa forma o processo de aprendizagem torna-se mais prazeroso para o aluno quanto para o professor. Pois o professor passa a ajudar o aluno a buscar respostas, resolver problemas, pensar de forma sistemática. O estudante precisa buscar tais conhecimentos para resolver os problemas, trabalhar em equipe, e quem faz isso é o próprio jovem, o docente atua como mentor.

Figura 3 – Professor e aluno trabalhando juntos



Fonte – O autor, 2019.

Com isso, através da metodologia educacional STEM, mostraremos neste trabalho uma proposta da aplicação desta metodologia, no cenário brasileiro. Com foco no ensino médio regular da rede estadual do Rio de Janeiro.

3 ASPECTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA RELEVANTES PARA O DESENVOLVIMENTO DESTA PESQUISA

Tradicionalmente nos livros didáticos que trazem o assunto lógica matemática, em particular, a negação lógica e os conectivos E e OU são apresentados através de tabelas, diagramas e exploração de linguagem corrente que muitas vezes deixam o aluno extremamente desinteressado.

Após o conhecimento da metodologia STEM, afim de tornar a implementação desses conceitos matemáticos no ensino médio mais atrativos fugindo desse ensino tradicional, onde o aluno pouco interage com o conteúdo trabalhado, a proposta desse capítulo é apresentar os mesmos conectivos segundo esta metodologia.

Para que esse objetivo fosse alcançado, aborda-se esses conceitos nesse trabalho através de conteúdos pertencente à eletrônica, a saber, a álgebra booleana e os circuitos digitais.

Estes dois conteúdos servirão de pano de fundo para justificar esta proposta de intervenção no ensino de lógica no ensino médio.

Vamos analisar a abordagem tradicional do tema:

3.1 Sobre a lógica matemática dos conectivos E ($\wedge$) e OU ($\vee$): A aboredagem tradicional

Em geral os livros didáticos abrem esta seção com a definição de proposição da seguinte maneira. (Foram utilizados como referências os autores: (IEZZI, 2013), (DAGHLIAN, 2006) e (ALENCAR, 2011)).

3.1.1 Proposição

Chama-se proposição ou sentença toda oração declarativa que exprime um pensamento que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Toda proposição deve possuir sujeito e predicado, ser declarativa, ou seja, não é exclamativa nem interrogativa e possui somente um valor lógico: verdadeira (V) ou falsa (F).

Exemplo 1. *Proposição:*

1. 3 é maior do que 2.

2. 1 é um número primo.

3. 5 é divisor de 100.

4. O Rio de Janeiro é a capital do Brasil.

Note que todas as orações são declarativas e que as proposições, 1 e 3 possuem valor lógico verdadeiro enquanto as proposições 2 e 4 possuem valores lógicos falso.

Exemplo 2. *Não são proposições:*

1. 2 é um número primo?
2. $(4 \cdot 5 - 1)$.
3. Que sorvete gostoso!

A frase 1 é interrogativa, a frase 2 não possui predicado e a frase 3 é exclamativa.

3.1.2 Princípios básicos da logica matemática

1. Principio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se somente um desses casos e nunca um terceiro.
2. Principio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

3.1.3 Proposição simples

Toda proposição que não contém nenhuma outra sentença integrada a ela é denominada proposição simples. Geralmente são designadas por letras minúsculas $p, q, r, s, ...,$ chamadas letras proposicionais.

Exemplo 3.

p : A matemática é linda.

q : O número 17 é um número primo.

3.1.4 Proposição composta

A proposição composta é formada por duas ou mais proposições simples, através de símbolos lógicos chamados de conectivos: o conectivo $(\wedge)$ (lê-se: e), o conectivo $(\vee)$ (lê-se: ou), o conectivo $(\veebar)$ (lê-se: ou exclusivo), o conectivo$(\rightarrow)$ (lê-se; se... então...) e o conectivo $(\leftrightarrow)$ (lê-se: ...se, e somente se,...). Geralmente é representada por uma letra maiúscula $P, Q, R, ...$

Exemplo 4.

P: A matemática é linda **e** todo quadrado é um retângulo.

Q: $2 > 8$ **ou** $\sqrt{16}$

R: **Ou** o Flamengo é o melhor time carioca **ou** o Vasco é campeão.

3.1.5 Tabela-Verdade

Pelo Principio do terceiro excluído, toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se somente um desses casos e nunca um terceiro.

Tabela 1 – Tabela de valores para uma proposição.

p
V
F

Fonte – O autor, 2019.

O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposicões simples componentes, ficando por eles univocamente determinado. Então para determinar o valor lógico de uma proposição composta, deve-se recorrer a tabela-verdade, onde encontram-se todos os possíveis valores lógicos atribuídos às proposições simples componentes.

Portanto, as atribuições de valores lógicos de uma proposição composta por duas proposições simples componentes estão denotados na tabela abaixo:

Tabela 2 – Tabela de valores para duas proposições.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Fonte – O autor, 2019.

No caso de uma proposição composta formada pelas proposições simples componentes p, q e r, temos as seguinte atribuições de valores lógicos, descritos na tabela abaixo:

Tabela 3 – Tabela de valores para três proposições.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

3.1.6 Operações Lógicas Sobre Proposições

3.1.6.1 Negação ($\sim$)

A partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo $\sim p$.

Exemplo 5.

1. p: Quatro é um número múltiplo de dois.

   $\backsim p$: Quatro não é um número múltiplo de dois.

2. p: Sete é um número ímpar.

   $\backsim p$: Sete é um número par.

A proposição $\sim p$ possui o valor lógico sempre oposto ao valor lógico de p, ou seja, quando o valor lógico de p é verdadeiro $\sim p$ é falso e quando o valor lógico de p é falso $\sim p$ é verdadeiro.

O que pode ser simplificado na tabela abaixo, denominada **tabela-verdade** da proposição $\sim p$.

Tabela 4 – Tabela-verdade $\sim p$

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte – O autor, 2019.

3.1.6.2 Conjunção ($\wedge$)

Unindo duas proposições p e q através do conectivo $\wedge$, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças p e q. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se as proposições p e q são ambas verdadeiras, se pelo menos uma proposição for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a conjunção $p \wedge q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

Tabela 5 – Tabela-verdade da $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

Exemplo 6.

1.

Tabela 6 – Exemplo 6.1

	Proposição	Valor lógico
p	$5 > 4$	Verdadeiro
q	$(3\|27)$	Verdadeiro
$p \wedge q$	$5 > 4$ e $3\|27(V)$	Verdadeiro

Fonte – O autor, 2019.

2.

Tabela 7 – Exemplo 6.2

	Proposição	Valor lógico
p	Um triângulo equilátero de lado a tem altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.	Verdadeiro
q	Um triângulo equilátero de lado a tem área a^2.	Falso
$p \wedge q$	Um triângulo de lado a tem altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e área a^2.	falso

Fonte – O autor, 2019.

3.1.6.3 Disjunção ($\vee$)

Unindo duas proposições p e q através do conectivo $\vee$, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada disjunção das sentenças p e q. A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições p e q são verdadeiras, se ambas as proposições p e q são falsas, então $p \vee q$ é falsa.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a disjunção $p \vee q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

Tabela 8 – Tabela-verdade da $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

Exemplo 7.

1.

Tabela 9 – Exemplo 7.1

	Proposição	Valor lógico
p	Dois é divisor de quatro.	Verdadeiro
q	Sete é um número primo.	Verdadeiro
$p \vee q$	Dois é divisor de quatro ou Sete é um número primo.	Verdadeiro

Fonte – O autor, 2019.

2.

Tabela 10 – Exemplo 7.2

	Proposição	Valor lógico
p	$2 + 8 = 13$	Falso
q	$(-1)^6 = -1$	Falso
$p \vee q$	$2 + 8 = 13$ ou $(-1)^6 = -1$	Falso

Fonte – O autor, 2019.

3.1.6.4 Disjunção Exclusiva ($\veebar$)

Conectando duas proposições p e q através do conectivo, $\veebar$ obtemos uma nova proposição, $p \veebar q$, denominada disjunção exclusiva das sentenças p e q, (lê-se: ou p ou q, mas não ambas). A disjunção exclusiva $p \veebar q$ é verdadeira quando as proposições p e q possuem valores lógicos opostos e falsa se ambas as proposições tiverem valor lógicos iguais.

Exemplo 8.

Consideremos as duas proposições compostas a seguir:

P: Jefferson é marinheiro *ou* professor.

Q: Um número natural não nulo é par *ou* ímpar.

Note que a proposição P, composta pelas proposições: "Jefferson é marinheiro" e "Jefferson é professor", pode assumir valor verdadeiro se pelo menos uma das proposições forem verdadeiras ou se ambas forem verdadeiras. Mas, a proposição Q, nos permite inferir que apenas uma das proposições pode assumir o valor verdadeiro, ou seja, *ou* "um número natural não nulo é par" *ou* "um número natural não nulo é ímpa", mas não ambos.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a disjunção exclusiva $p \veebar q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \veebar q$.

Tabela 11 – Tabela-verdade da $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

3.1.7 Construção de Tabelas-Verdade

3.1.7.1 Tabela-Verdade de uma proposição composta

Podemos combinar as proposições simples p, q, r, ..., com os conectivos lógicos: negação ($\sim$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$) e disjunção exclusiva ($\veebar$), e construir proposições compostas.

Com o uso das tabelas-verdade das operações fundamentais, podemos construir as tabelas-verdade das proposições compostas para determinar exatamente o seu valor lógico, verdadeira(V) ou falsa(F).

3.1.7.2 Número de linhas de uma Tabela-Verdade

O enunciado e a demonstração do teorema abaixo pode ser encontrados em vários textos, destacamos o de (ALENCAR, 2011).

Teorema 1 (Número de linhas de uma Tabela-Verdade)**.** *A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.*

Demonstração. Com efeito, toda proposição simples tem dois valores lógicos: V e F, que se excluem. Portanto, para uma proposição composta P$(p_1, p_2, ..., p_n)$ com n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$ há tantas possibilidades de atribuições dos valores lógicos V e F a tais componentes quantos são os arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, isto é, $A_{2,n} = 2^n$, segundo ensina a Análise Combinatória. □

3.1.7.3 Construção da Tabela-Verdade

Para construção da tabela-verdade de uma proposição composta, devemos seguir os seguintes passos:

1. Determinar o número de linhas da tabela-verdade;
2. Formar o par de colunas correspondente as proposições simples componentes;
3. Determinar a forma das proposições que ocorrem na composição;
4. Aplicar as operações lógicas que a composição exige.

Exemplo 9. *Construir a tabela-verdade das proposições:*

1. $\sim (\sim p \vee q)$

Tabela 12 – Tabela-verdade da proposição $\sim (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (\sim p \vee q)$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

Fonte – O autor, 2019.

2. $p \vee (\sim p \wedge q)$

Tabela 13 – Tabela-verdade da proposição $p \vee (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Fonte – O autor, 2019.

3. $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)$

Tabela 14 – Tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)$

p	q	r	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim q \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

Fonte – O autor, 2019.

3.1.8 Tautologia, Proposição logicamente falsa (Contradição) e Contingência

3.1.8.1 Tautologia

Chama-se tautologia toda a proposição composta cuja o valor lógico é sempre verdadeiro.

Exemplo 10. *É tautologia a seguinte proposição:*

Tabela 15 – Tabela-verdade da proposição $p \vee (q \vee \sim p)$

p	q	$\sim p$	$q \vee \sim p$	$p \vee (q \vee \sim p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

3.1.8.2 Proposição logicamente falsa (Contradição)

Chama-se contradição toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra F (falsidade).

Exemplo 11. *É contradição a seguinte proposição:*

Tabela 16 – Tabela-verdade da proposição $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Fonte – O autor, 2019.

3.1.8.3 Contingência

Chama-se contingência todo a proposição composta em que a última coluna da sua tabela-verdade figuram valores lógicos distintos, ou seja, V e F, pelo menos uma vez.

Exemplo 12. *É contingência a seguinte proposição:*

Tabela 17 – Tabela-verdade da proposição $p \vee (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

3.1.9 Equivalência Lógica

Quando duas proposições p e q dadas possuem tabelas-verdade iguais, dizemos que as proposições são equivalente ou logicamente equivalentes, ou seja, quando p e q têm o mesmo valor lógico.

Indica-se que a proposição p é logicamente equivalente a proposição q com a notação: $p \Longleftrightarrow q$.

Exemplificação

A proposições p e $\sim\sim p$ são equivalentes, ou seja, $p \Longleftrightarrow \sim\sim p$ (Regra da dupla negação). Como podemos ver na Tabela 18.

Tabela 18 – Dupla negação

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

Fonte – O autor, 2019.

Logo, a dupla negação equivale à afirmação.

3.1.10 Álgebra das Proposições

3.1.10.1 Propriedades da Conjunção

Sendo p, q e r proposições simples e sejam s e u proposições também simples em que seus valores lógicos são, respectivamente, verdade (V) ou falsa (F), demonstra-se propriedades:

(a) Idempotente: $p \wedge p \iff p$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge p$ e p, ou seja, a bicondicional $p \wedge p \longleftrightarrow p$ é tautológica:

Tabela 19 – Prova Idempotente da conjunção

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \longleftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(b) Comutatividade: $p \wedge q \iff q \wedge p$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$, ou seja, a bicondicional $p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$ é tautológica:

Tabela 20 – Prova Comutatividade da conjunção

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(c) Associatividade: $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$, ou seja, a bicondicional $(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ é tautológica:

Tabela 21 – Prova Associatividade da conjunção

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(d) Identidade: $p \wedge s \Longleftrightarrow p$ e $p \wedge u \Longleftrightarrow u$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge s$ e p $p \wedge u$ e u, ou seja, a bicondicional $p \wedge s \longleftrightarrow p$ e $p \wedge u \longleftrightarrow u$ é tautológica:

Tabela 22 – Prova Identidade da conjunção

p	s	u	$p \wedge s$	$p \wedge u$	$p \wedge s \longleftrightarrow p$	$p \wedge u \longleftrightarrow u$
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V

Fonte – O autor, 2019.

□

3.1.10.2 Propriedades da Disjunção

Sendo p, q e r proposições simples e sejam s e u proposições também simples em que seus valores lógicos são, respectivamente, verdade(V) ou falsa(F).

(a) Idempotente: $p \vee p \Longleftrightarrow p$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p, ou seja, a bicondicional $p \vee p \longleftrightarrow p$ é tautológica:

Tabela 23 – Prova Idempotente da disjunção

p	$p \lor p$	$p \lor p \longleftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

$\square$

(b) Comutativa: $p \lor q \iff q \lor p$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \lor q$ e $q \lor p$, ou seja, a bicondicional $p \lor q \longleftrightarrow q \lor p$ é tautológica:

Tabela 24 – Prova Comutativa da disjunção

p	q	$p \lor q$	$q \lor p$	$p \lor q \longleftrightarrow q \lor p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

$\square$

(c) Associatividade: $(p \lor q) \lor r \iff p \lor (q \lor r)$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $(p \lor q) \lor r$ e $p \lor (q \lor r)$, ou seja, a bicondicional $(p \lor q) \lor r \longleftrightarrow p \lor (q \lor r)$ é tautológica:

Tabela 25 – Prova Associatividade da disjunção

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \lor r$	$q \lor r$	$p \lor (q \lor r)$	$(p \lor q) \lor r \longleftrightarrow p \lor (q \lor r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(d) Identidade: $p \vee s \Longleftrightarrow s$ e $p \vee u \Longleftrightarrow p$

Demonstração. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee s$ e s $p \vee u$ e u, ou seja, a bicondicional $p \vee s \longleftrightarrow s$ e $p \vee u \longleftrightarrow p$ é tautológica:

Tabela 26 – Prova Identidade da disjunção

p	s	u	$p \vee s$	$p \vee u$	$p \vee s \longleftrightarrow s$	$p \vee u \longleftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Fonte – O autor, 2019.

□

3.1.10.3 *Propriedades da Conjunção e da Disjunção*

Dadas p, q e r proposições simples quaisquer temos as seguintes propriedades:

(a) Distributiva:

(i) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Demonstração. É possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $P : p \wedge (q \vee r)$ e $Q : (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são idênticas, logo a bicondicional $p \wedge (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é uma tautologia.

Tabela 27 – Prova Distributiva $(p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$P \longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(ii) $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Demonstração. Analogamente, é possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $R : p \vee (q \wedge r)$ e $S : (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são idênticas, logo a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é uma tautologia.

Tabela 28 – Prova Distributiva ($p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$R \longleftrightarrow S$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(b) Absorção:

(i) $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$

Demonstração. É possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são idênticas, logo a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \longleftrightarrow p$ é uma tautologia.

Tabela 29 – Prova Absorção $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \longleftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(ii) $p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$

Demonstração. Analogamente, é possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p são idênticas, logo a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \longleftrightarrow p$ é uma tautologia.

Tabela 30 – Prova Absorção ($p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \longleftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

□

(c) Regras de DE MORGAN:

(i) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Demonstração. É possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são idênticas, logo a bicondicional $\sim (p \wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é uma tautologia.

Tabela 31 – Prova DE MORGAN ($\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$)

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

□

Exemplo 13.

P: "Pedro é alto **e** Camila é baixa."

$\sim P$: "Pedro não é alto **ou** Camila é alta."

(ii) $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Demonstração. Analogamente, é possível identificar que as tabelas-verdade das proposições $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ são idênticas, logo a bicondicional $\sim (p \vee q) \longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é uma tautologia.

Tabela 32 – Prova DE MORGAN ($\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$)

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q) \longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

□

Estas regras de DE MORGAM nos diz que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

Exemplo 14.

Q: "Felipe é médico **ou** engenheiro."

$\sim Q$: "Felipe não é medico **e** não é engenheiro."

4 ÁLGEBRA DE BOOLE E CIRCUITOS DIGITAIS

4.1 História de Boole

Atualmente o modo em que vivemos depende da matemática. Nossos computadores, celulares, TVs, transporte, aparelhos domésticos tudo que utiliza circuitos elétricos depende de um conceito chamado Lógica booleana. A Lógica booleana é à base da computação moderna. George Boole foi o criador desse conceito determinante para evolução da tecnologia e informação moderna. Boole foi uma das primeiras pessoas a propor que nosso jeito de pensar é utilizando à lógica.

Nasceu em 2 de novembro de 1815 em Lincoln, Inglaterra, onde começou a frequentar a escola. Foi de seu pai, Jhon Boole, um sapateiro de profissão que mata sua sede de conhecimento estudando ciências, matemática, literatura e uma paixão por astronomia, que Boole herdou o apetite por conhecimento. Enquanto seu pai lutava para manter o negócio vivo dava total apoio a George para manter seus estudos. Quando começou a se interessar por idiomas, Boole aprendeu mais de cinco línguas e aos catorze anos traduziu o poema "Ode a Primavera" para o inglês, seu pai, orgulhoso, enviou para o jornal local o que causou muita desconfiança na época. Boole acreditava que esse conhecimento o ajudaria a melhorar sua condição social.

Boole não teve formação acadêmica, mas aos 16 anos já era um professor assistente. Aos 20 anos, ainda quando trabalhava como professor de escola, Boole escreveu mais de 50 artigos sobre álgebra. Um deles ganhou uma medalha de ouro da Royal Society por uma publicação na Trasactions of the Royal Society sobre métodos algébricos para a solução de equações diferenciais e a partir de então o seu trabalho começou a ser conhecido.

Seu primeiro trabalho em matemática teve como base os estudos de Laplace e Lagrange sendo encorajado por Duncan Gregory que estava em Cambridge. Boole não pode aceitar o conselho de Duncan para frequentar cursos em Cambridge, pois precisou cuidar de seus pais, mas ele começou a fazer publicações na recém fundada Cambridge Mathematical Journal.

Tornou-se amigo de De Morgan e interessou-se por uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir William Hamilton (1788-1856) tinha iniciado com De Morgan. O resultado foi que Boole em 1847 publicou uma obra curta chamada The Mathematical Analysis Logic, um pequeno livro que marcou época.

Em 1849 se candidatou e ganhou a cadeira de matemática no Queens College em Cork, com as indicações dos principais matemáticos da época, já que não tinha formação acadêmica. Onde passou o resto de sua vida ensinando.

Publicou, em 1854, An investigation into the Laws of Thought (As Leis do Pensamento) onde definiu as teorias matemáticas da lógica e da probabilidade estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra. Boole viu a lógica de um modo novo e chegou a uma álgebra mais simples. Ele fez uma analogia entre os símbolos algébricos e os que representavam a lógica. E isso deu inicio a álgebra da lógica conhecida como Álgebra Booleana, que levou 80 anos para ser aplicada. Em 1937, Claude Shannon, então estudante no MIT - Boston, USA - estabeleceu a relação entre a Álgebra de Boole e os circuitos eletrônicos.

Boole teve muitos outros trabalhos publicados, em 1859 um Tratado em Equações Diferenciais, em 1860 um Tratado em Cálculo de Diferenças Finitas, além de mais de 50 documentos sobre as propriedades básicas dos números.

No seu trabalho Boole foi reconhecido como gênio. Ele recebeu títulos das Universidades de Dublin e Oxford e foi eleito Fellow of Royal Society em 1857. Mas Boole teve uma carreira curta, pois começou tarde e terminou com sua morte aos 49 anos.

4.2 Elementos da Álgebra de Boole

Como visto em 4.1, a Álgebra Booleana foi apresentada pelo matemático inglês George Boole, através da obra An investigation into the Laws of Thought, em que trata-se de um sistema matemático de análise lógica.

Somente em 1937, o engenheiro americano Claude Elwood Shannon utilizou a teoria da álgebra de Boole para a solução de problemas de circuitos de telefonia com relés.

As variáveis Booleanas, representada por letras, só podem assumir dois valores, cada variável pode assumir um único dentre os dois valores possíveis; 0 e 1. Esses valores podem representar condições associadas com verdadeiro e falso, aberto e fechado, ligado e desligado, etc. Podemos determinar a relação de 0 para falso e 1 para verdadeiro, 0 para aberto e 1 para fechado e assim por diante.

4.2.1 Operações Básicas da Álgebra Booleana

Existe três operações básicas na álgebra Booleana; operador E, operador OU e complementação.

4.2.1.1 Operador E

A operação E, também denominada de multiplicação lógica, resulta em 0 se pelo menos uma de suas variáveis de entrada for 0 e terá resultado igual a 1 se, e somente se, todas as entradas valerem 1. Indicamos a operação a E b por $a \cdot b$.

A tabela-verdade representa o comportamento da expressão $a \cdot b$.

Tabela 33 – Operador E

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

4.2.1.2 Operador OU

Pela operação OU, também denominada de adição lógica, assumirá o valor 0 quando todas as variáveis de entrada for 0 e quando pelo menos uma das variáveis de entrada for 1 resultará em 1. Indicamos a operação a OU b por $a + b$.

A tabela-verdade representa o comportamento da expressção $a + b$.

Tabela 34 – Operador OU

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

4.2.1.3 Complementação

A operação complementação, também chamada de inversão ou negação, executa a inversão do valor ao qual a variável apresenta. Já que uma variável Booleana pode assumir somente um valor dos dois valores, ou seja, será 1 se a variável for 0 e resultará em 0 se a variável for 1. Indicamos a operação complementar de a por $\bar{a}$ ou a'.

A tabela-verdade representa o comportamento da operação $\bar{a}$.

Tabela 35 – Operador Complementar (Negação)

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Fonte – O autor, 2019.

4.2.2 Definição, Postulados e Propriedades da Álgebra de Boole

4.2.2.1 Definição da Álgebra de Booleana

Definição 1. *Uma álgebra de Boole é um conjunto B no qual estão definidas duas operações binárias, + (operador OU) e · (operador E), e uma uma operação unária,* $^{-}$ *(complementação), e que contém dois elementos distintos, 0 e 1. Tais que os seguintes propriedades são válidas, quaisquer que sejam a, b e c* $\in B$.

(P1)	$a + b \in B$	
(P2)	$a \cdot b \in B$	
(P3)	$a + b = b + a$	*Comutatividade da Soma*
(P4)	$a \cdot b = b \cdot a$	*Comutatividade da Multiplicação*
(P5)	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	*Distributiva da Soma*
(P6)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	*Distributiva da Multiplicação*
(P7)	$a + 0 = a$	*Elemento Neutro da Soma*
(P8)	$a.1 = a$	*Elemento Neutro da Multiplicação*
(P9)	$a + \bar{a} = 1$	*Complemento da Soma*
(P10)	$a \cdot \bar{a} = 0$	*Complemento da Multiplicação*

4.2.2.2 Postulados

Sendo $B = \{0, 1\}$ e a representação binárias + e · em B por $a + b$ e $a \cdot b$. Podemos representar as operações pelos seguintes postulados:

1. Postulado da complementação

   Se $a = 0$, então $\bar{a} = 1$ e

   Se $a = 1$, então $\bar{a} = 0$

2. Postulado da adição

   (1) $0 + 0 = 0$

   (2) $0 + 1 = 1$

   (3) $1 + 0 = 1$

   (4) $1 + 1 = 1$

3. Postulado da multiplicação

   (1) $0 \cdot 0 = 0$

   (2) $0 \cdot 1 = 0$

   (3) $1 \cdot 0 = 0$

   (4) $1 \cdot 1 = 1$

Através desses postulados podemos provar as propriedades descritas acima verificando todos os casos possíveis.

4.2.2.3 Propriedade Dual ou Princípio da Dualidade

Toda propriedade na álgebra Booleana apresenta sua propriedade dual como parte da definição, em que representa a permutação de + com $\cdot$ e 0 com 1.

Exemplo 15.

1. $X = a \cdot b + c \cdot d$, então a expressão dual de X é $Y = (a + b) \cdot (c + d)$
2. Se $a + 0 = a$, então a P8 (elemento neutro da multiplicação) $a \cdot 1 = a$ é a dual de P7 (elemento neutro da soma).

Logo, toda vez que uma propriedade da álgebra de Boole é demonstrada, cada passo na demonstração pode ser substituído pelo seu dual. Então, uma vez demonstrada uma propriedade, sua propriedade dual também é válida.

4.2.2.4 Prova das Propriedades Utilizando a Tabela-Verdade

As propriedades serão provadas verificando todos os casos possíveis de acordo com os postulado visto em 4.2.2.1. Será utilizada as tabelas-verdade para fazer a verificação dessas propriedades.

(1) Comutativa

$P3 : a + b = b + a$

$P4 : a \cdot b = b \cdot a$

Na construção da tabela-verdade 36 verifica-se que as colunas $a + b$ e $b + a$ são equivalentes, logo fica provado para $P3$ e as colunas $a \cdot b$ e $b \cdot a$ também são equivalentes e, portanto, fica provado para $P4$.

Tabela 36 – Prova da propriedade booleana comutatividade.

a	b	$a+b$	$b+a$	$a \cdot b$	$b \cdot a$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

(2) Distributiva

$P5 : a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

$P6 : a \cdot (a + b) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Nota-se que as colunas $a+(b\cdot c)$ e $(a+b)\cdot(a+c)$ são iguais, portanto a propriedade é válida pela Tabela 37.

Tabela 37 – Prova da propriedade booleana distributiva $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

a	b	c	$b \cdot c$	$a + (b \cdot c)$	$a+b$	$a+c$	$(a+b) \cdot (a+c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

A distributiva da multiplicação ($P6$) é dual da ($P5$) logo, pela propriedade da dualidade, o seu dual também está válido.

(3) Elemento Neutro (Identidade)

Prova feita através da tabela-verdade 38, pois as colunas a e $a + 0$ são equivalentes para $P7$ e a e $a \cdot 1$ são equivalentes para $P8$.

$P7 : a + 0 = a$

$P8 : a.1 = a$

Tabela 38 – Prova da propriedade elemento neutro.

a	$a+0$	$a \cdot 1$
0	0	0
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

(4) Complemento

Prova feita através da tabela-verdade. Tabela 39 para $P9$ e Tabela 40 para $P10$.

(P9) $a + \bar{a} = 1$

(P10) $a \cdot \bar{a} = 0$

Tabela 39 – Prova da propriedade complemento.

a	$\bar{a}$	$a+\bar{a}$
0	1	1
1	0	1

Fonte – O autor, 2019.

Tabela 40 – Prova da propriedade complemento.

a	$\bar{a}$	$a \cdot \bar{a}$
0	1	0
1	0	0

Fonte – O autor, 2019.

4.2.2.5 Teoremas

Existem outras propriedades que são validas na álgebra Booleana, onde denotaremos na forma de teoremas. Podemos provar esses teoremas usando as propriedades apresentadas na definição.

(1) Idempotência.

T1.a. $a + a = a$

T1.b. $a \cdot a = a$

Prova

$$\begin{aligned}
a + a &= (a + a) \cdot 1 && \text{P8}\\
&= (a + a) \cdot (a + \bar{a}) && \text{P9}\\
&= a + (a \cdot \bar{a}) && \text{P5}\\
&= a + 0 && \text{P10}\\
&= a && \text{P7}\\
&\text{Portanto}, a + a = a
\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Dualidade, fica provado que:

$a \cdot a = a$

(2) Elemento Unitário.

T2.a. $a + 1 = 1$

T2.b. $a \cdot 0 = 0$

Prova

$$\begin{aligned}
a + 1 &= (a + 1) \cdot 1 && \text{P8}\\
&= (a + 1) \cdot (a + \bar{a}) && \text{P9}\\
&= a + (1 \cdot \bar{a}) && \text{P5}\\
&= a + \bar{a} && \text{P8}\\
&= 1 && \text{P9}\\
&\text{Logo}, a + 1 = 1
\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Dualidade, fica provado que:

$a \cdot 0 = 0$

(3) Lei da Absorção.

T3.a. $a + (a \cdot b) = a$

T3.b. $a \cdot (a + b) = a$

Prova

$$\begin{aligned}
a + (a \cdot b) &= (a \cdot 1) + (a \cdot b) && \text{P8} \\
&= a \cdot (1 + b) && \text{P6} \\
&= a \cdot (b + 1) && \text{P3} \\
&= a \cdot 1 && \text{T2.a} \\
&= a && \text{P8} \\
&\text{Portanto, } a + (a \cdot b) = a
\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Dualidade, fica provado que:

$a \cdot (a + b) = a$

(4) Eliminação.

T4.a. $a + (\bar{a} \cdot b) = a + b$

T4.b. $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

Prova

$$\begin{aligned}
a + (\bar{a} \cdot b) &= (a + \bar{a}) \cdot (a + b) && \text{P5} \\
&= 1 \cdot (a + b) && \text{P9} \\
&= (a + b) && \text{P8} \\
&\text{Logo, } a + (\bar{a} \cdot b) = a + b
\end{aligned}$$

E pela Dualidade, temos:

$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

(5) Associativa.

T5.a. $(a + b) + c = a + (b + c)$

T5.b. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Prova

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &= ((a+b)+c)\cdot(a+\bar{a}) && \text{P8 e P9}\\
&= (((a+b)+c)\cdot a)+(((a+b)+c)\cdot\bar{a}) && \text{P6}\\
&= (a\cdot((a+b)+c))+(\bar{a}\cdot((a+b)+c)) && \text{P4}\\
&= ((a\cdot(a+b))+(a\cdot c))+((\bar{a}\cdot(a+b))+(\bar{a}\cdot c)) && \text{P6}\\
&= (a+(a\cdot c))+(((\bar{a}\cdot a)+(\bar{a}\cdot b))+(\bar{a}\cdot c)) && \text{T3.b e P6}\\
&= a+((0+(\bar{a}\cdot b))+(\bar{a}\cdot c)) && \text{T3.a, P4 e P10}\\
&= a+((\bar{a}\cdot b)+(\bar{a}\cdot c)) && \text{P3 e P7}\\
&= a+(\bar{a}\cdot(b+c)) && \text{P6}\\
&= a+(b+c) && \text{T4.a}\\
&\text{Então, }(a+b)+c = a+(b+c)
\end{aligned}
$$

Pelo Princípio da Dualidade, fica provado que:

$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

(6) T6. $\bar{\bar{a}} = a$.

Prova

Supondo que $\bar{a}$ seja o complemento de a, então temos que:

$$a+\bar{a} = 1$$
$$a\cdot\bar{a} = 0$$

Estas equações mostram que a é o complemento de $\bar{a}$, logo $a = \bar{\bar{a}}$.

(7) T7. $a\cdot b + a\cdot\bar{b} = a$

Prova

$$
\begin{aligned}
a\cdot b + a\cdot\bar{b} &= a\cdot(b+\bar{b}) && \text{P6}\\
&= a\cdot 1 && \text{P9}\\
&= a && \text{P8}\\
&\text{Portanto, } a\cdot b + a\cdot\bar{b} = a
\end{aligned}
$$

(8) T8. $\bar{0} = 1$ e $\bar{1} = 0$

Prova

$$
\begin{aligned}
&0 + 1 = 0 && \text{P3 e P7} \\
&\text{Portanto}, \bar{0} = 1 && \text{P9}
\end{aligned}
$$

E pelo Princípio da Dualidade $\bar{1} = 0$ é válida.

(9) De Morgan

T9.a. $\overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$

T9.b. $\overline{(a + b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Prova

Temos que:

$$
\begin{aligned}
(\overline{a} + \overline{b}) + (a \cdot b) &= (\overline{a} + \overline{b} + a) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + b) && \text{P5} \\
&= (1 + \overline{b}) \cdot (1 + \overline{a}) && \text{P9} \\
&= 1 \cdot 1 && \text{T2.a} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (a \cdot b) &= (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot a) + (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot b) && \text{P6} \\
&= 0 \cdot b + 0 \cdot a && \text{P10} \\
&= 0 + 0 && \text{T2.b} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Logo, $(a \cdot b)$ é o complemento de $(\overline{a} + \overline{b})$, ou seja, $\overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$. E pelo princípio da dualidade, temos que $\overline{(a + b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

(10) T10. $a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$.

Prova

$$
\begin{aligned}
a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c &= a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c \cdot (a + \bar{a}) \\
&= a \cdot b + \bar{a} \cdot c + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c \\
&= a \cdot b \cdot (1 + c) + \bar{a} \cdot c \cdot (1 + b) \\
&= a \cdot b + \bar{a} \cdot c \\
&\text{Logo, } a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c
\end{aligned}
$$

(11) T11. $(a + b) \cdot (\bar{a} + c) \cdot (b + c) = a \cdot c + \bar{a} \cdot b$.

Prova

$$
\begin{aligned}
(a + b) \cdot (\bar{a} + c) \cdot (b + c) &= (a \cdot \bar{a} + a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c) \cdot (b + c) \\
&= 0 + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot c + a \cdot c \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + b \cdot c \cdot c \\
&= a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c + a \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + b \cdot c \\
&= a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c + a \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c \\
&= a \cdot c \cdot (1 + b) + \bar{a} \cdot b \cdot (1 + c) + b \cdot c \\
&= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \\
&= a \cdot c + \bar{a} \cdot b \\
&\text{Portanto, } (a + b) \cdot (\bar{a} + c) \cdot (b + c) = a \cdot c + \bar{a} \cdot b
\end{aligned}
$$

(12) T12. $(a + b) \cdot (\bar{a} + c) = a \cdot c + \bar{a} \cdot b$.

Prova

$$
\begin{aligned}
(a + b) \cdot (\bar{a} + c) &= (a \cdot \bar{a} + a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c) \\
&= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \\
&= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \cdot (a + \bar{a}) \\
&= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \\
&= \bar{a} \cdot b \cdot (1 + c) + a \cdot c \cdot (1 + b) \\
&= \bar{a} \cdot b + a \cdot c \\
&\text{Então, } (a + b) \cdot (\bar{a} + c) = a \cdot c + \bar{a} \cdot b
\end{aligned}
$$

Essas propriedades e teoremas são de grande utilidade na simplificação de expressões Booleanas e ainda no desenvolvimento de circuitos digitais que veremos em tópicos posteriores.

4.2.3 Expressões Booleanas

Definição 2. *Uma* ***expressão booleana*** *é qualquer agrupamento finito de n variáveis booleanas. Se a e b, são expressões booleanas, então* $(a+b)$, $(a \cdot b)$ *e* $\bar{a}$ *também são.*

Quando em uma expressão booleana aparecem as operações $\cdot$, $+$ e $^{-}$ é necessário seguir as ordem de precedência, onde a multiplicação lógica tem precedência sobre a adição lógica e $^{-}$ tem precedência sobre $+$ ou $\cdot$. Na multiplicação lógica o símbolo $\cdot$ pode ser omitido e utilizar a justaposição, ou seja $a \cdot b$ será representado por ab.

Temos que, $a(b+c)$, ab, $(ab+a\bar{c})b$ e $\bar{a}b\bar{c}$ são exemplos de expressões booleanas.

4.2.4 Funções Booleanas

Definição 3. *Uma* ***função booleana*** *é uma função* f *tal que* $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$ *para algum inteiro* $n \geq 1$. *A notação* $\{0,1\}^n$ *representa o conjunto de todas as n-uplas formadas por 0 e 1. Uma função booleana, então, associa um valor 0 ou 1 a cada uma dessas n-uplas.*

As operações booleanas $+$ e $\cdot$ são representadas por uma tabela-verdade que descreve uma função booleana f com $n = 2$ e a operação $^{-}$ descreve uma função booleana com $n = 1$.

Qualquer expressão booleana define uma única função booleana.

4.2.5 Tabela-Verdede Extraida de Expressões Booleanas

Dada uma expressão booleana que define uma função booleana qualquer, pode-se avaliar o comportamento dessas funções utilizando a tabela-verdade, onde descreve um mapa com todas as possibilidades possíveis de uma dada combinação de variáveis booleanas.

O procedimento para obter a tabela-verdade de uma expressão booleana, segue os seguintes passos:

1. Construir o quadro de possibilidades e criar colunas para as variáveis de entrada listando todos os resultados possíveis.

2. Construir uma coluna para cada variável de entrada que apareça complementada na expressão e anotar os resultados.

3. Avaliar a expressão de acordo com a ordem de precedência descrita em 4.2.3.

4. Criar uma coluna para o resultado final e preenche-la com os resultados finais.

Exemplo 16. *A expressão booleana* $a + \overline{b}c$ *define a função booleana* $f(a,b,c)$ *descrita na Tabela 41.*

Tabela 41 – Tabela-verdade para função booleana $a + \bar{b}c$

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{b}c$	$a + \bar{b}c$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Fonte – O autor, 2019.

A função booleana do exemplo 16 também pode ser representada pela Tabela 42.

Tabela 42 – Outra repreentação para tabela-verdade da função booleana $a + \bar{b}c$

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

4.2.6 Expressões Booleanas Extraidas de Tabelas-Verdade

Tomando uma uma expressão booleana, descrita por sua tabela verdade, extrair a expressão que a representa é o processo inverso apresentado no item anterior.

Existem dois algoritmos para determinar a expressão derivada de uma tabela-verdade. Primeiro é chamado de **forma normal disjuntiva** ou **forma canônica em soma de produtos (SPD)**, que consiste em descrever todas as situações das variáveis de entrada cujos os valores da função corresponde a 1, enquanto que o segundo é denominado **forma normal conjuntiva** ou **forma canônica em produto de somas (PDS)**, onde determina-se todas as situações das variáveis de entrada para as quais a função vale 0.

A metodologia para a obtenção da expressão booleana extraída de uma tabela-verdade será introduzida através da aplicação do exemplo 17.

Exemplo 17. *Considere a função booleana f dada pela Tabela 42 do exemplo 16.*

Note que a tabela possui cinco combinações de entrada (linhas 2, 5, 6, 7 e 8) em que a função é igual a 1 e três combinações (linhas 1, 3 e 4) onde a função tem valor igual a 0.

Para a obtenção da expressão na **forma normal disjuntiva**, deve-se associar a cada combinação de entrada, que possui valor 1, uma operação **E** entre as variáveis da seguinte forma: se a variável correspondente vale 0, ela deve aparecer negada; se a variável vale 1, ela deve aparecer não negada, ou seja:

$$\text{Linha } 2 \rightarrow \overline{a}\overline{b}c$$
$$\text{Linha } 5 \rightarrow a\overline{b}\overline{c}$$
$$\text{Linha } 6 \rightarrow a\overline{b}c$$
$$\text{Linha } 7 \rightarrow ab\overline{c}$$
$$\text{Linha } 8 \rightarrow abc$$

Em seguida construir a expressão com o operador **OU** entre as combinações formadas.

$$f(a,b,c) = \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$$

Por outro lado, na obtenção da expressão em sua **forma normal conjuntiva**, deve-se associar a cada combinação de entrada, que possui valor 0, uma operação **OU** entre as variáveis da seguinte forma: se a variável correspondente vale 0, ela deve aparecer não negada; se a variável vale 1, ela deve aparecer negada, ou seja:

$$\text{Linha } 1 \rightarrow abc$$
$$\text{Linha } 3 \rightarrow a\overline{b}c$$
$$\text{Linha } 4 \rightarrow a\overline{b}\overline{c}$$

Em seguida construir a expressão com o operador **E** entre as combinações formadas.

$$f(a,b,c) = (a+b+c)(a+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+\overline{c})$$

4.2.7 Mintermos e Maxtermos

A representação de uma tabela-verdade pode ser feita em soma de produtos e em produto de soma. Essas representações podem sofrer simplificações utilizando os teoremas da álgebra de Boole.

Quando as expressões não sofrem simplificações, ou seja, em cada termo soma e em cada termo produto todas as variáveis da função estão presentes, ela é dita forma **canônica**, que pode ser representada como na seção anterior ou pela posição da combinação de entradas na tabela-verdade. As combinações de entradas por produto são denominadas mintermos e as combinações por soma é denominada maxtermos. A Tabela 43 lista todos os mintermos e maxtermos da função do exemplo 16.

Tabela 43 – Mintermos e Maxtermos

i	a	b	c	$f(a,\overline{b},c)$	$Mintermos$	$Maxtermos$
0	0	0	0	0	$m_0 = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$M_0 = (a+b+c)$
1	0	0	1	1	$m_1 = \overline{a}\overline{b}c$	$M_1 = (a+b+\overline{c})$
2	0	1	0	0	$m_2 = \overline{a}b\overline{c}$	$M_2 = (a+\overline{b}+c)$
3	0	1	1	0	$m_3 = \overline{a}bc$	$M_3 = (a+\overline{b}+\overline{c})$
4	1	0	0	1	$m_4 = a\overline{b}\overline{c}$	$M_4 = (\overline{a}+b+c)$
5	1	0	1	1	$m_5 = a\overline{b}c$	$M_5 = (\overline{a}+b+\overline{c})$
6	1	1	0	1	$m_6 = ab\overline{c}$	$M_6 = (\overline{a}+\overline{b}+c)$
7	1	1	1	1	$m_7 = abc$	$M_2 = (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$

Fonte – O autor, 2019.

Portanto, a função $f(a,b,c)$ pode se representada por:

$$f(a,b,c) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1,4,5,6,7)$$
$$f(a,b,c) = M_0 + M_2 + M_3 = \Pi(0,2,3)$$

4.2.8 Minimização de Funções Booleanas

Uma função booleana dada pode ser representada por mais de uma expressão booleana. Minimizar ou simplificar uma função booleana é reduzir ao mínimo o número de termos. Temos três métodos para a simplificação de uma função ou expressão booleana.

1. Método Algébrico;
2. Método do Mapa de Karnaugh;
3. Método de Quine-McKluskey.

4.2.8.1 Método Álgebrico

A simplificação pelo método algébrico necessitará das propriedades e teoremas visto na seção 4.2.2.

Exemplo 18. *Simplificar a função booleana, $f(a,b,c) = \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$, dada pela tabela 41, representada pela expressão em sua forma canônica por soma de produtos.*

$$
\begin{aligned}
\overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc &= \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc && \text{T1.a} \\
&= \overline{a}\overline{b}c + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + a\overline{b}c + abc && \text{P3} \\
&= \overline{b}c\overline{a} + \overline{b}ca + a\overline{c}\overline{b} + a\overline{c}b + ac\overline{b} + acb && \text{P4} \\
&= \overline{b}c(\overline{a} + a) + a\overline{c}(\overline{b} + b) + ac(\overline{b} + b) && \text{P6} \\
&= \overline{b}c1 + a\overline{c}1 + ac1 && \text{P9} \\
&= \overline{b}c + a\overline{c} + ac && \text{P8} \\
&= \overline{b}c + a(\overline{c} + c) && \text{P6} \\
&= \overline{b}c + a(1) && \text{P9} \\
&= \overline{b}c + a && \text{P8}
\end{aligned}
$$

Observção Os métodos de simplifição Mapa de Karnaugh e Quine-McKluskey não serão abordados neste trabalho por estar fora do objetivo a ser alcançado com o público alvo (Ensino Médio regular).

4.3 Circuitos Lógicos e sua relação com a Álgebra de Boole

A combinação de blocos lógicos básicos, conhecidos como portas lógicas, são denominados de circuitos lógicos. Portanto, é extremamento importante a correlação desses blocos na realização de uma função lógica e, a Álgebra de Boole é a principal ferramenta usada para análise e execução de circuitos lógicos.

Circuitos lógicos podem ser executados a partir de expressões lógicas, que são montadas através das combinações das operações básicas da álgebra boolena. Com essas expressões, podem-se construir circuitos lógicos que as implementam, utilizando as portas lógicas.

4.3.1 Portas Lógicas

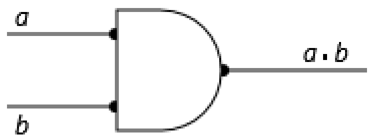
A combinação de portas lógicas criam circuitos que executam expressões booleanas, ou seja, portas lógicas são símbolos que representam de forma gráfica cada operador de uma função booleana.

A porta Lógica E se compara como a operação booleana $\cdot$, a porta lógica OU representa a operação booleana $+$ e um inversor corresponde à operação complemento $'$ ou $\bar{}$.

4.3.1.1 Função e Porta Lógica E

A função lógica E é aquela que executa a multiplicação lógica, descrita na seção 4.2.1.1, de duas ou mais variáveis. A porta lógica E é um circuito que executa a função E, sendo representada através do símbolo apresentado na Figura 4. À esquerda então dispostas as entradas e a direita a única saída. As linhas podem ser imaginadas como fios que carregam os sinais elétricos associados às variáveis.

Figura 4 – Porta lógica E de duas variáveis.

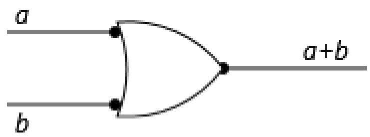


Fonte – O autor, 2019.

4.3.1.2 Função e Porta Lógica OU

A função lógica OU é aquela que executa a adição lógica, descrita na seção 4.2.1.2, de duas ou mais variáveis. A porta lógica OU é um circuito que executa a função OU, sendo representada através do símbolo apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Porta lógica OU de duas variáveis.

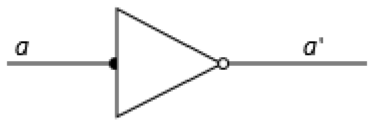


Fonte – O autor, 2019.

4.3.1.3 Função e Porta Lógica Inversora (Negação)

A porta lógica que simboliza o operador complementação é denominado inversor ou porta lógica inversora, como mostra a Figura 6. A função lógica inversora (negação) é aquela que executa a complementação lógica, descrita na seção 4.2.1.3. A porta lógica inversora só possui uma entrada e uma saída, pois o operador complementação só pode ser realizado sobre uma variável ou sobre o resultado de uma subexpressão.

Figura 6 – Pora lógica inversora.



Fonte – O autor, 2019.

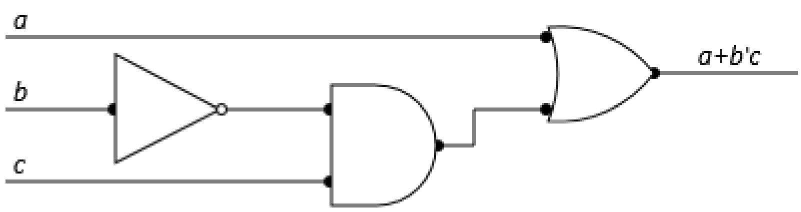
4.3.2 Exemplo de um Circuito Lógico

A combinação das portas lógicas E, OU e inversão, constroem circuitos lógicos que representam uma expressão booleana e monta a mesma função booleana que a expressão.

O processo para construir um circuito lógico a partir de uma expressão booleana, é o mesmo utilizado na avaliação da expressão, ou seja, é necessário seguir a ordem de precedência, onde a multiplicação lógica tem precedência sobre a adição lógica, a complementação tem precedência sobre $+$ ou $\cdot$ e parênteses devem respeitar a ordem dos mais internos para os mais externos.

Exemplo 19. *Tomemos como exemplo a expressão simplificada do exemplo 18:* $S = a+b'c$.

Figura 7 – Circuito da expressão $a + b'c$.

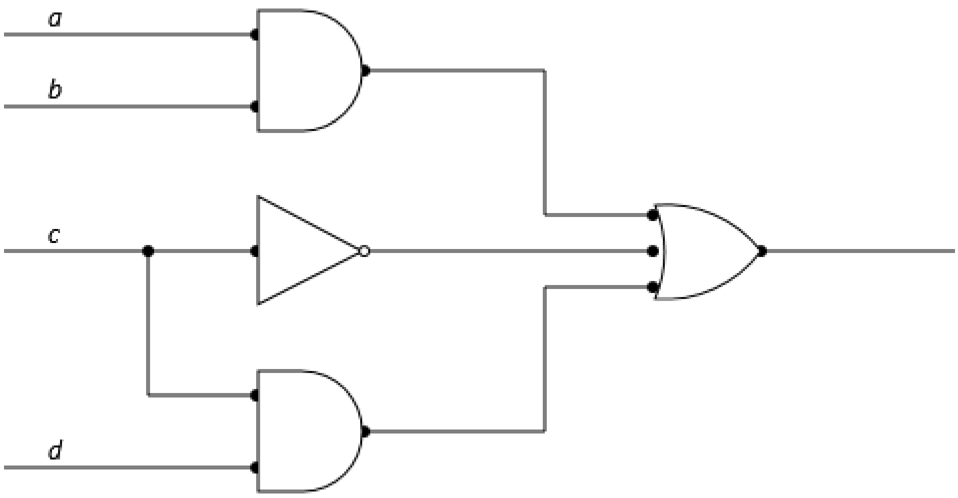


Fonte – O autor, 2019.

Como visto anteriormente, pode-se determinar um circuito lógico a partir de uma expressão booleana dada. O processo inverso também é valido, ou seja, obter a expressão booleana que é executada por um circuito lógico. Utilizaremos o exemplo 20 para mostras o procedimento de obter a expressão de um circuito.

Exemplo 20. *Determinar a expressão para o circuito representado na Figura 8.*

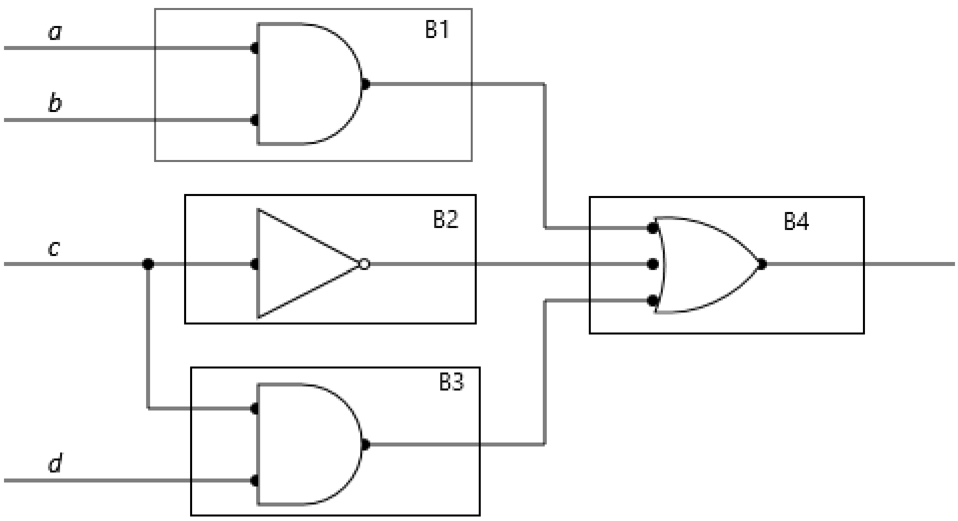
Figura 8 – Circuito exemplo 20.



Fonte – O autor, 2019.

Primeiro, deve-se separar o circuitos em partes e determinar as subexpressões das saídas dos blocos lógicos básicos que compõe o circuito, afim de melhorar a leitura e organização.

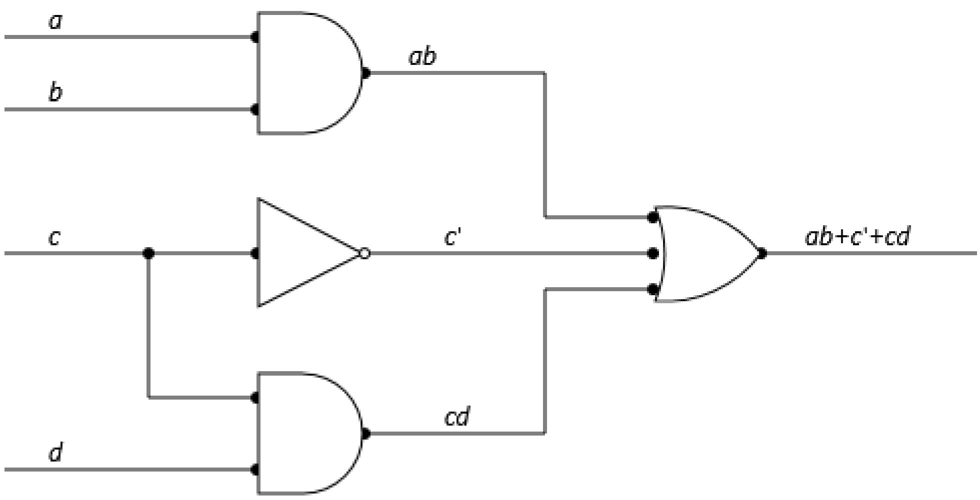
Figura 9 – Circuito dividido em quatro blocos.



Fonte – O autor, 2019.

Note que, no bloco 1 e 3 temos uma porta lógica E, onde as suas expressões de saída são, respectivamente, ab e cd, o bloco 2 trata-se de uma porta inversora c' e, por fim, o bloco 4 representa a porta lógica OU, onde suas entradas são o resultado dos blocos anteriores.

Figura 10 – Circuito com as expressões resultantes.

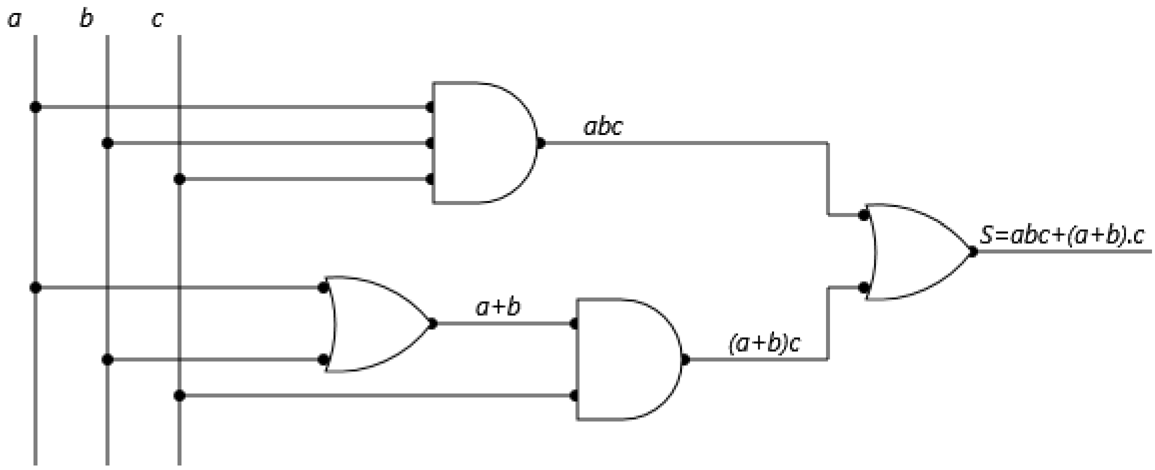


Fonte – O autor, 2019.

Portanto, a expressão obtida do circuito lógico apresentado é S= $ab + c' + cd$.

Exemplo 21. *Uma expressão booleana para o circuito lógico da Figura 11, utilizando o processe descrito no exemplo anterior, é* $S = abc + (a + b)c$.

Figura 11 – Um circuito lógico.



Fonte – O autor, 2019.

Vimos com os exemplos 20 e 21, respectivamente, como de uma expressão booleana encontrar um circuito lógico que a representa, e como determinar a expressão booleana que tem a mesma função booleana dado um circuito. Logo dado um circuito qualquer podemos determinar a função booleana que o implemente, pois vimos na seção 4.2.5 como extrair uma tabela-verdade de uma expressão que produz a mesma função booleana.

No próximo exemplo, determinaremos um circuito a partir de uma função booleana dada, ou seja, extrairemos a expressão booleana da tabela-verdade de acordo com a seção 4.2.6 e em seguida construir o circuito através de sua expressão.

Exemplo 22.

Dada a Tabela 44:

Tabela 44 – Uma função booleana

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

(a) Encontrar a expressão derivada da Tabela 44 em sua forma normal disjuntiva.

Deve-se associar a cada combinação de entrada, que possui valor 1, uma operação **E** entre as variáveis da seguinte forma: se a variável correspondente vale 0, ela deve aparecer negada; se a variável vale 1, ela deve aparecer não negada.

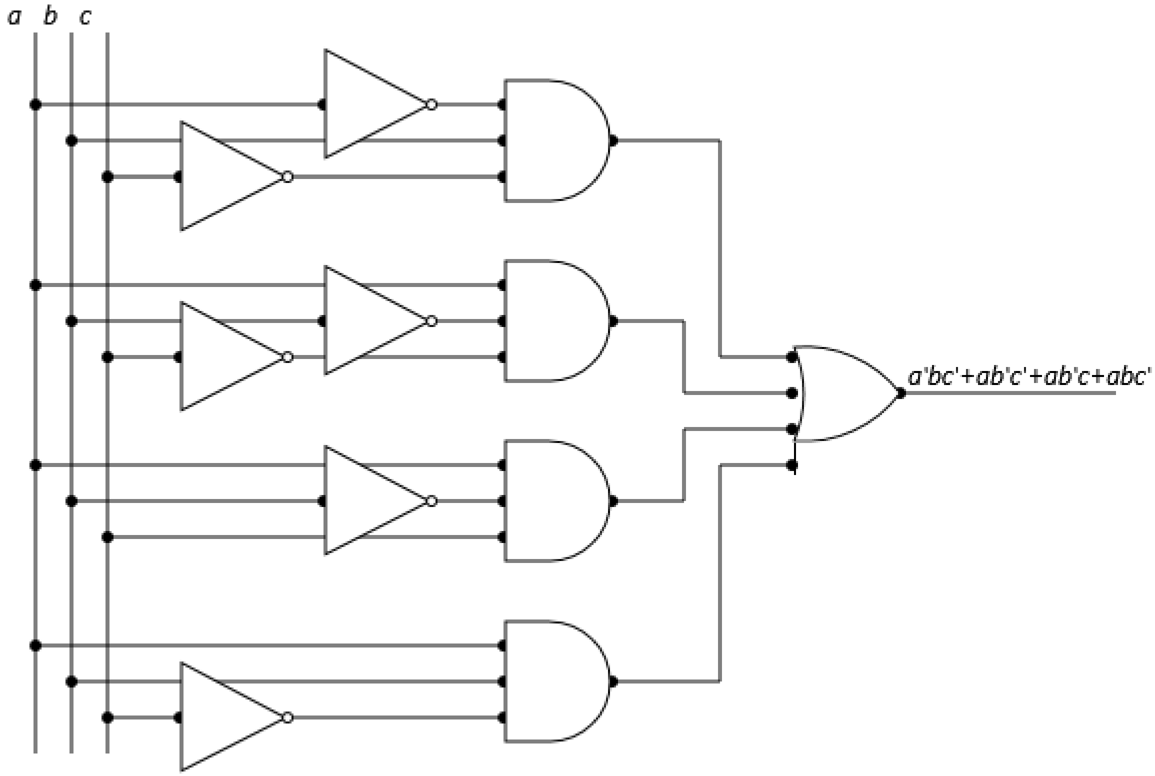
$$\text{Linha 3} \rightarrow a'bc'$$
$$\text{Linha 5} \rightarrow ab'c'$$
$$\text{Linha 6} \rightarrow ab'c$$
$$\text{Linha 7} \rightarrow abc'$$

Em seguida construir a expressão com o operador **OU** entre as combinações formadas.

$$f(a,b,c) = a'bc' + ab'c' + ab'c + abc'$$

(b) Construir o circuito correspondente à expressão no item (a).

Figura 12 – Circuito correspondente à expressão $a'bc' + ab'c' + ab'c + abc'$



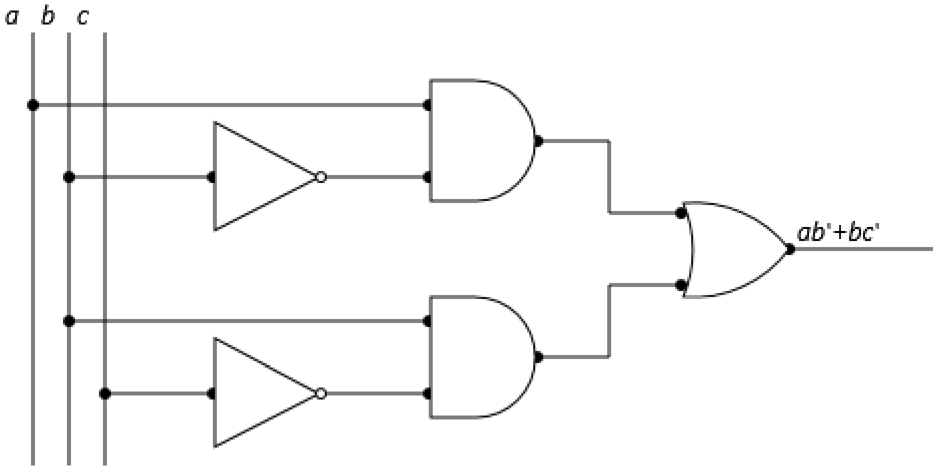
Fonte – O autor, 2019.

(c) Simplificar a expressão encontrada no item (a), utilizando os teoremas da álgebra booleana.

$$
\begin{aligned}
a'bc' + ab'c' + ab'c + abc' &= ab'c' + ab'c + a'bc' + abc' && \text{P3}\\
&= ab'c' + ab'c + c'a'b + cab && \text{P4}\\
&= ab'(c' + c) + c'(a'b + ab) && \text{P6}\\
&= ab'(c' + c) + c'(ba' + ba) && \text{P4}\\
&= ab'(c' + c) + c'(b(a' + a)) && \text{P6}\\
&= ab'1 + c'(b1) && \text{P9}\\
&= ab' + c'b && \text{P8}\\
&= ab' + bc' && \text{P4}
\end{aligned}
$$

(d) Construir o circuito encontrado no item (c).

Figura 13 – Circuito correspondente à expressão ab'+bc



Fonte – O autor, 2019.

Portando, podemos converter informação de uma função booleana para uma expressão e determinar o circuito que a representa, mas a volta também é valida, ou seja, de um circuito podemos encontrar a expressão e determinar a função.

4.3.3 Outras Portas Lógicas

Existem outras portas lógicas resultantes da combinação dos blocos lógicos básicos, que descreveremos a seguir.

4.3.3.1 Função e Porta Lógica NÃO-E (ou NE, ou Negação de E)

A função booleana NÃO-E, apresentada pela Tabela 45 e representada algebricamente por $(\overline{ab})$ ou $(ab)'$, é uma composição entre a função lógica E com a função lógica inversão, ou seja, trata-se da inversão lógica da função E.

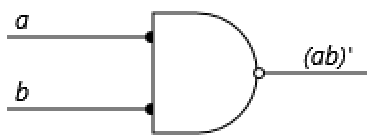
Tabela 45 – Operador NÃO-E.

a	b	$(ab)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

A porta lógica NÃO-E executa a função lógica NÃO-E representada pelo símbolo da Figura 14.

Figura 14 – Porta NÃO-E.



Fonte – O autor, 2019.

4.3.3.2 Função e Porta Lógica NÃO-OU (ou NOU, ou Negação de OU)

Formada pela função lógica OU com a função inversora, ou seja, uma inversão da função lógica OU, representada algebricamente por $(\overline{a+b})$ ou $(a+b)'$. A Tabela 46 apresenta a função NÃO-E para duas variáveis.

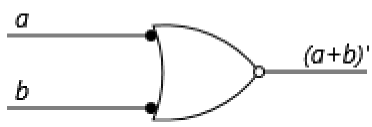
Tabela 46 – Operador NÃO-OU.

a	b	$(a+b)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

A porta lógica NÃO-OU executa a função NÃO-OU como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Porta NÃO-OU.



Fonte – O autor, 2019.

4.3.3.3 Função e Porta Lógica OU-Exclusivo.

A função OU Exclusivo, para duas variáveis, representada por a $\oplus$ b, é aquela que executa valor lógico 1 quando as variáveis de entrada possuem valores distintos entre si. A Tabela 47 exibe a função OU Exclusivo.

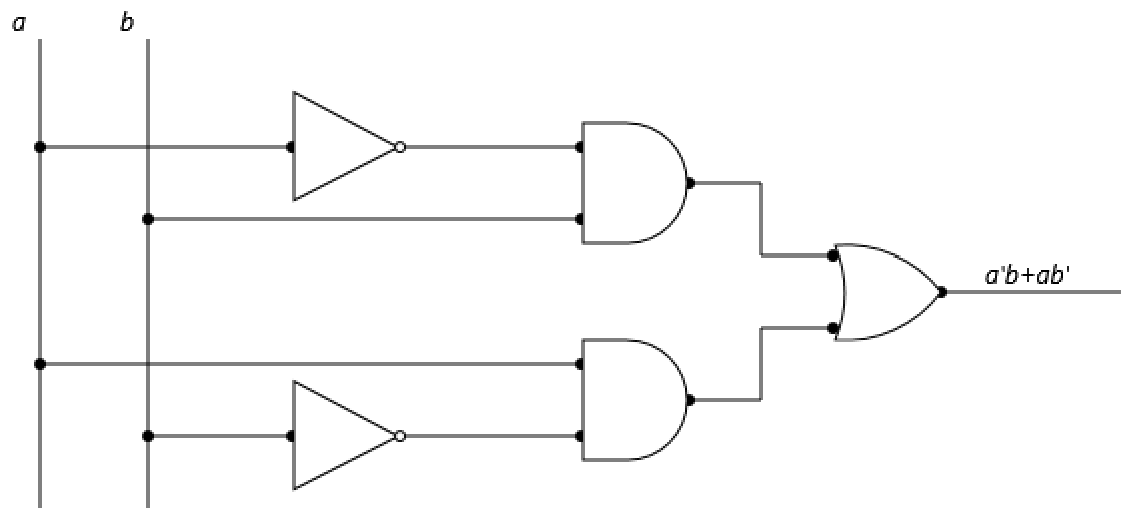
Tabela 47 – Operador OU-Exclusivo.

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

Note que a leitura em sua forma normal disjuntiva é representada pela expressão $a'b + ab'$.

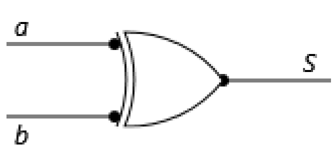
Figura 16 – Circuito da função OU Esclusivo.



Fonte – O autor, 2019.

A porta lógica OU-Exclusivo pode ser representada pelo circuito da Figura 16 ou, de modo mais simples, pelo símbolo da Figura 17.

Figura 17 – Porta OU-Exclusivo.



Fonte – O autor, 2019.

4.3.3.4 Função e Porta Lógica NÃO-OU-Exclusivo (ou Coincidência, ou NOU Exclusivo).

A função NÃO-OU-Exclusivo, para duas variáveis, representada por $a \odot b$, é aquela que executa valor lógico 1 quando as variáveis coincidem noa seus valores de entrada. A Tabela 48 exibe a função NÃO-OU-Exclusivo.

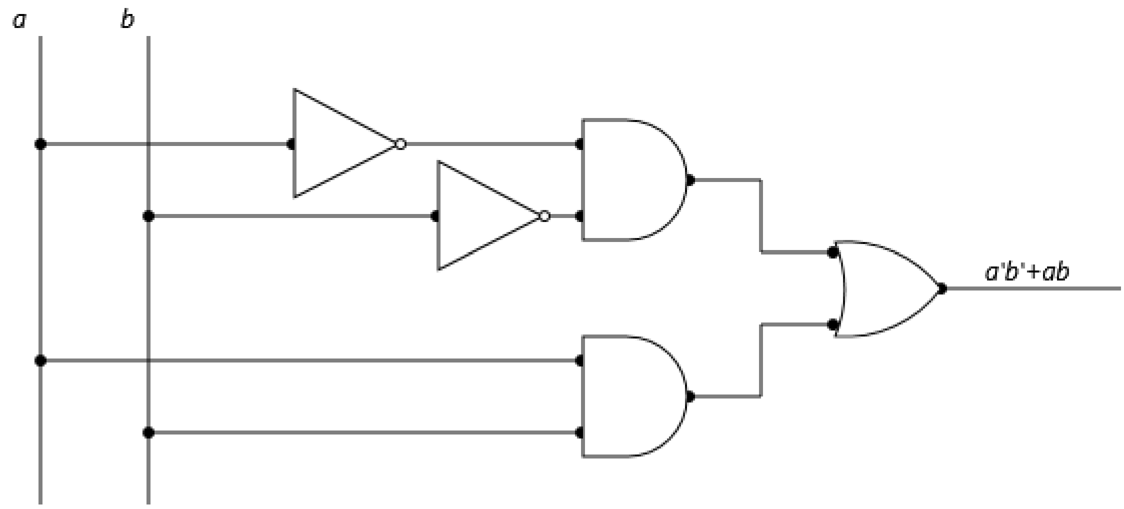
Tabela 48 – Operador NÃO-OU-Exclusivo.

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

A Representação da função booleana coincidência em sua forma normal disjuntiva é representada pela expressão $a'b' + ab$.

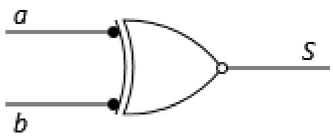
Figura 18 – Circuito da função NÃO-OU-Exclusivo.



Fonte – O autor, 2019.

A porta lógica Coincidência pode ser representada pelo circuito da Figura 18 ou, de modo mais simples, pelo símbolo da Figura 19.

Figura 19 – Porta NÃO-OU-Exclusivo.



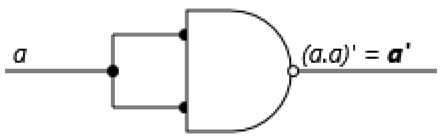
Fonte – O autor, 2019.

4.3.4 Implementação de Funções Booleanas Usando as Portas Lógicas NÃO-E e NÃO-OU

Os blocos lógicos NÃO-E e NÃO-OU, sozinhos, podem executar qualquer função booleana, pois a combinação de portas NE e NOU, entre si mesmas, realizam o papel de inversor, de portas E e portas OU.

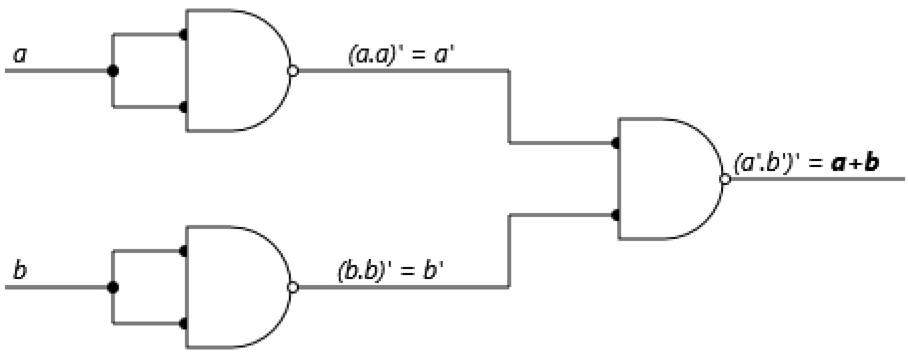
(1) Implementação da porta lógica NÃO-E.

Figura 20 – Porta NE executando inversão.



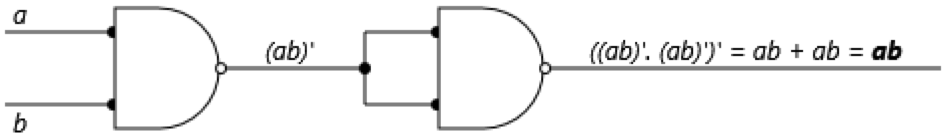
Fonte – O autor, 2019.

Figura 21 – Combinação de portas NE executando adição lógica.



Fonte – O autor, 2019.

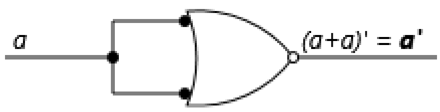
Figura 22 – Combinação de portas NE executando multiplicação lógica.



Fonte – O autor, 2019.

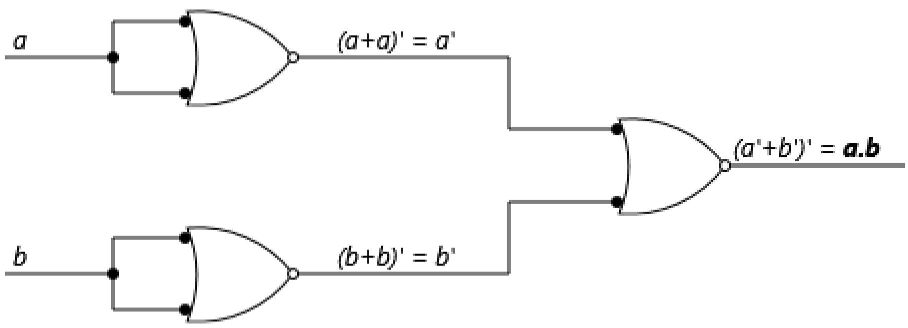
(2) Implementação da porta lógica NÃO-OU.

Figura 23 – Porta NOU executando inversão.



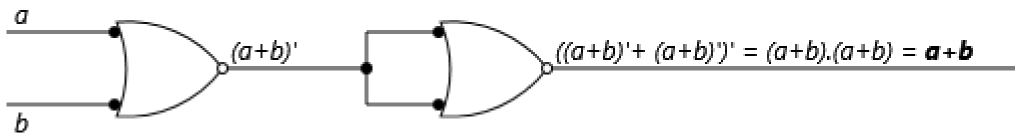
Fonte – O autor, 2019.

Figura 24 – Combinação de portas NOU executando multiplicação lógica.



Fonte – O autor, 2019.

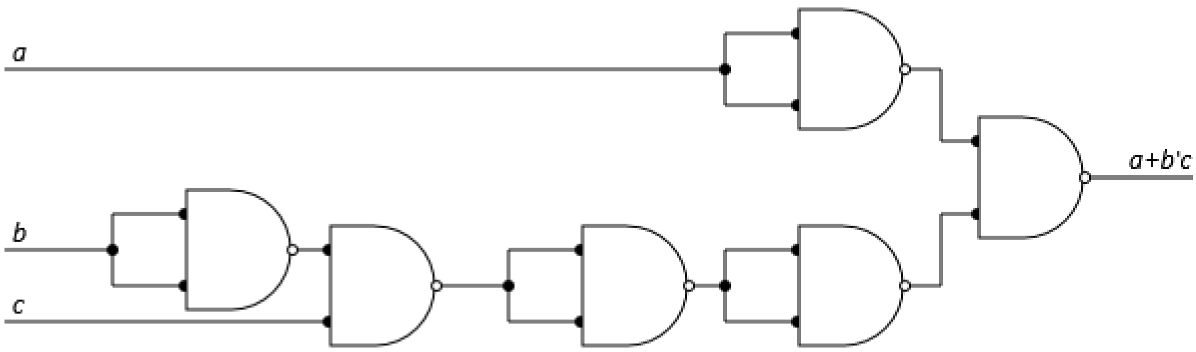
Figura 25 – Combinação de portas NOU executando adição lógica.



Fonte – O autor, 2019.

Exemplo 23. *Reconstruindo o circuito da Figura 7 substituindo as portas lógicas E, OU e inversora por portas NÃO-E.*

Figura 26 – Circuito da figura 7 redesenhado com portas lógicas NÃO-E.



Fonte – O autor, 2019.

4.3.5 Construção de uma Função Booleana pela Descrição de um Problema

Um carrinho de controle remoto é controlado por dois botões, um onde o carrinho se desloca para frente e outro onde se desloca pra trás. Encontre:

(a) uma função booleana que permita que o carrinho se desloque;

Vamos supor que o botão em que o carrinho de desloca para frente seja A e o que ele se desloca para trás B. Então o carrinho só irá se deslocar quando um dos dois botões, não os dois, forem acionados. Associando o valor 1 quando o botão A ou B forem acionados, mas não ambos e 0 para quando os botões não forem acionados ou ambos, temos a seguinte função booleana dada pela Tabela 49.

Tabela 49 – Função booleana referente ao deslocamento do carrinho.

A	B	D
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

(b) uma expressão booleana para o item (a);

Deve-se associar a cada combinação de entrada, que possui valor 1, uma operação **E** entre as variáveis da seguinte forma: se a variável correspondente vale 0, ela deve aparecer negada; se a variável vale 1, ela deve aparecer não negada.

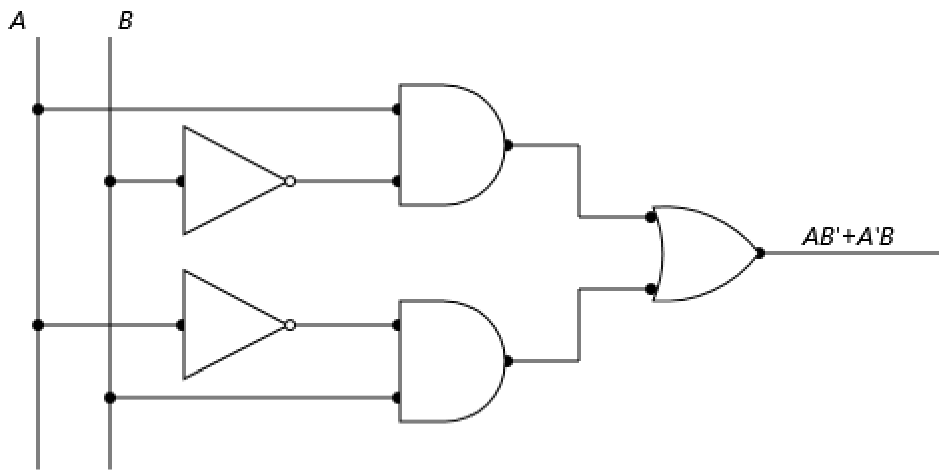
$$\text{Linha 2} \rightarrow AB'$$
$$\text{Linha 3} \rightarrow A'B$$

Em seguida construir a expressão com o operador **OU** entre as combinações formadas.

$$D = AB' + A'B.$$

(c) um circuito que permita que o carrinho ande para frente ou para trás.

Figura 27 – Um circuito para expressão $D = AB' + A'B$

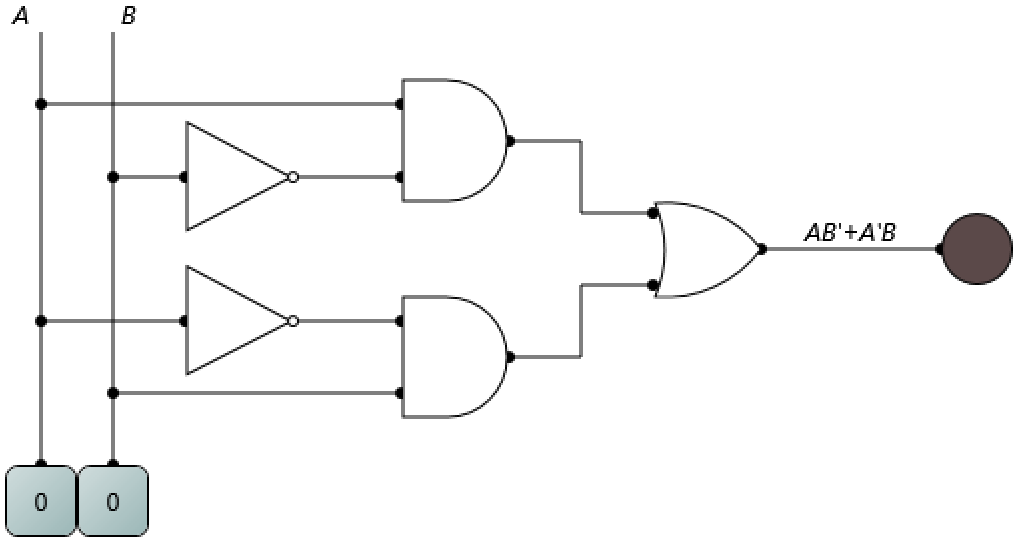


Fonte – O autor, 2019.

Agora, vamos simular a situação através de um software chamado LogicCircuit. Onde o circuito ganhará duas alimentações, uma em A e outa em B. A mediada que variarmos as entradas das variáveis, de acordo com os valores da tabela-verdade, uma luz de led em sua saída representará o valor da função, ou seja, quando a luz acender indicará que o carrinho se deslocou para frente ou para trás, caso contrário a luz permanecerá apagada.

Simulação 1: representa a primeira linha da tabela verdade.

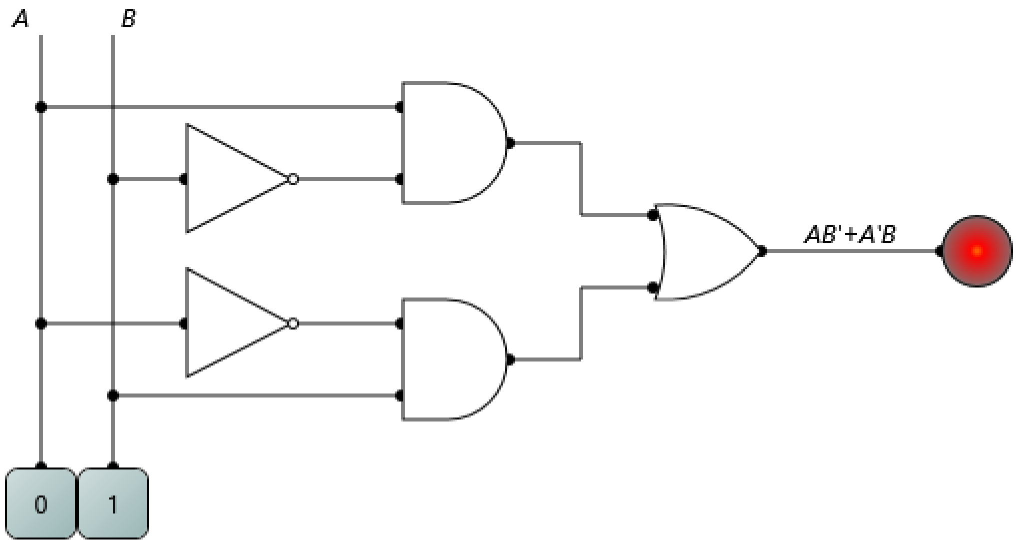
Figura 28 – Simulação 1: problema do carrinho.



Fonte – O autor, 2019.

Simulação 2: representa a segunda linha da tabela verdade.

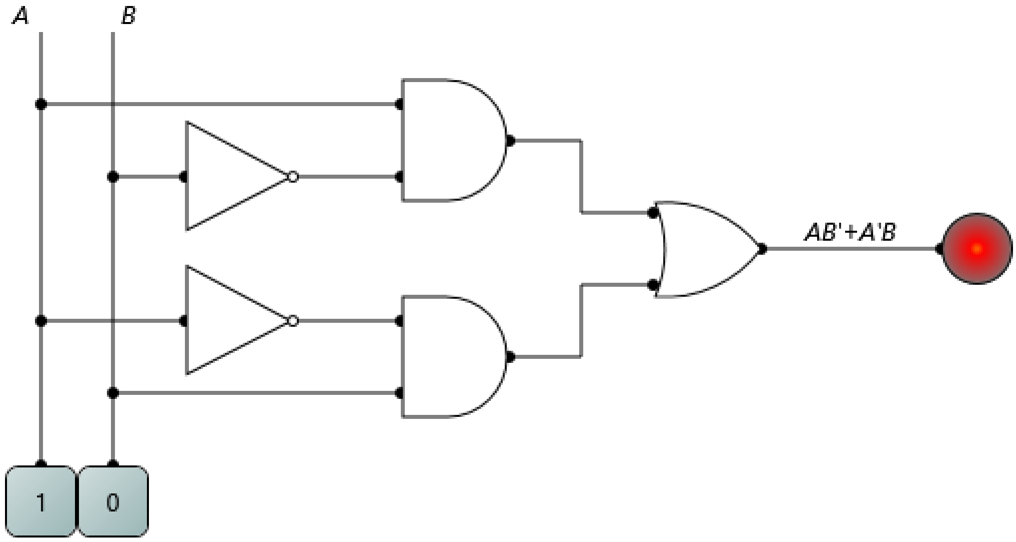
Figura 29 – Simulação 2: problema do carrinho.



Fonte – O autor, 2019.

Simulação 3: representa a terceira linha da tabela verdade.

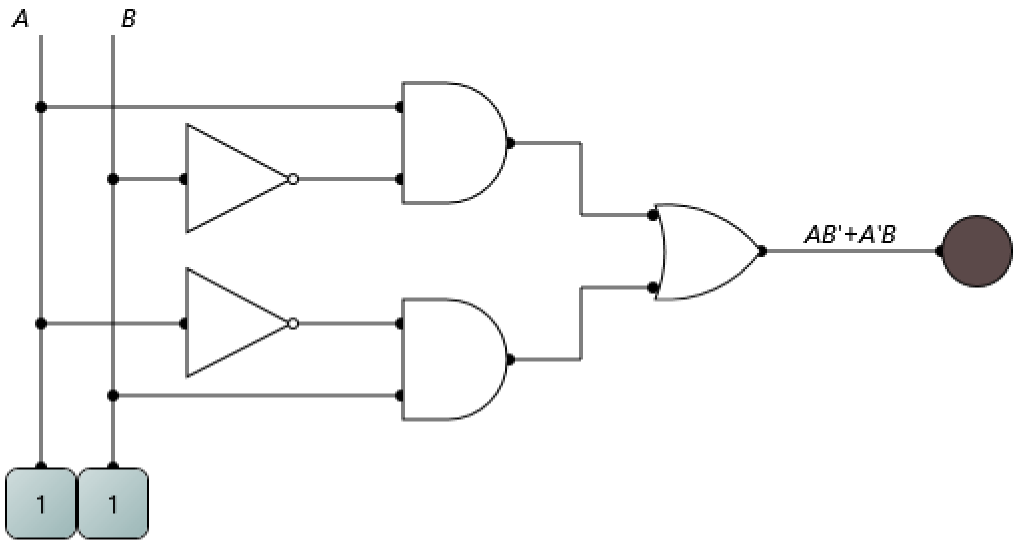
Figura 30 – Simulação 3: problema do carrinho.



Fonte – O autor, 2019.

Simulação 4: representa a quarta linha da tabela verdade.

Figura 31 – Simulação 4: problema do carrinho.



Fonte – O autor, 2019.

Foram utilizados como referência teórica para a abordagem dos coteúdos contidos neste capítulo os autores: (GÜNTZEL; NASCIMENTO, 2001), (GERSTING;, 2010), (PIMENTA, 2017), (DAGHLIAN, 2006) e (CAPUANO, 2014).

5 ATIVIDADES

Com o avanço da tecnologia e dos recursos digitais, é notório que os alunos se interessem cada vez mais por conteúdos ligados diretamente à tecnologia. Pensando em uma maior interação entre alunos, professores e o próprio conteúdo a ser apresentado, utilizaremos nesse trabalho atividades baseada na metodologia STEM, apresentada no capítulo 2. Lembrando que esta metodologia baseia-se em projetos buscando o envolvimento dos alunos em atividades que os levem a uma aprendizagem mais eficaz, colocando-os na situação de protagonistas do seu próprio aprendizado, é que tais atividades foram pensadas.

Neste capítulo descreveremos uma proposta para abordagem da lógica proposicional, em particular, a negação lógica e os conectivos E e OU apresentados no capítulo 3. A Álgebra Booleana, os Circuitos Lógicos e o software LogicCircuit, que simula um circuito lógico, dão uma maior concretização ao aprendizado levando o aluno a um patamar superior em relação a aquisição do conhecimento, pelo fato deste ambiente virtual de aprendizagem desenvolver a criatividade e as potencialidades de experimentação e raciocínio combinatório dos alunos.

O objetivo do uso de um conteúdo pertencente a eletrônica é trazer os alunos para algo que os interessem, já que os circuitos lógicos estão presentes de maneira direta no dia a dia, pois segundo Pimenta (2017) são base do funcionamento dos telefones móveis, tablets, computadores, televisores, jogos eletrônicos, entre outros.

> Os circuitos digitais estão tão intensamente presentes em nossas vidas, que é difícil imaginar viver sem eles. Eles estão claramente presentes em telefones móveis, tablets, computadores, televisores, jogos eletrônicos, equipamentos de acesso à internet, máquinas fotográficas, reprodutores de áudio e vídeo, entre outros. Os circuitos digitais também estão presentes em nossa infraestrutura de energia, telecomunicações e radiodifusão, saneamento, transportes e outros. Esses circuitos permitem a operações de equipamentos de alta tecnologia, como satélites e sondas especiais, equipamentos militares médicos, assim como eletrodomésticos (geladeiras, lava-roupas, lava-louças, máquinas de café, etc.), automóveis caminhões, tratores, barcos e aviões. Muitas vezes nem mesmo percebemos ou sabemos de seu emprego, como em rodovias e ferrovias, produção agrícola, portos e aeroportos. Ainda há a área de automação industrial e recentemente a automação residencial. Enfim, é difícil pensar em algum produto que não empregue circuitos digitais em sua operação, ou em sua produção. De fato a quase totalidade de produtos eletrônicos os emprega de alguma forma. (PIMENTA, 2017, p.1)

Dessa forma, vamos propor que através da aplicação dos circuitos lógicos na construção e simulação de circuitos com o auxilio do software LogicCircuit, os alunos possam conjecturar e tirar suas próprias conclusões em relação aos operadores E, OU e Inversão. Neste momento a mediação do professor deve ser feita de modo a instigar o aluno a questionamentos, principalmente em relação a inversão por ser um operador pouco natural na utilização de área, além de possibilitar aos alunos a visão de que cada inversão também é uma porta lógica. Esta prática é muito importante de ser realizada desta maneira, uma vez que um circuito lógico é a combinação de portas lógicas que representam graficamente as operações booleanas E, OU e Inversor, descritas na seção 4.3.

O trabalho contará com 10 atividades progressivas em níveis de dificuldade crescente. O objetivo é fazer com que o aluno atinja gradativamente um grau de abstração capaz de inserir o valor lógico da saída ou mesmo descobrir ao longo do circuito que valor lógico de uma saída erroneamente classificada pode influenciar no valor lógico final do circuito.

Iniciaremos as atividades explicando o que são circuitos lógicos, sua importância e aplicabilidade. Em seguida, será dado os conceitos iniciais sobre álgebra de boole e circuitos lógicos necessários para iniciarmos as atividades. A medida que formos passando de uma atividade para a outra, cobriremos todo o conteúdo da álgebra booleana suficiente para o que o trabalho se propõem (o estudo do E, OU e das inversões). Todo cuidado com a linguagem de apresentação da atividade assim como do conteúdo será uma atenção especial do professor mediador uma vez que são atividades para o ensino médio regular.

Ao final de cada atividade será implementada a relação da álgebra de boole com a lógica proposicional. Para cada atividade, iremos propor um projeto de simulação de um circuito, a ser solucionado pelo software LogicCircuit. O aluno receberá um roteiro apresentado pelo professor mediador. Em seguida, será feito alguns questionamentos sobre a solução do projeto proposto e, por fim, o professor formaliza a teoria associando os conteúdos presentes nos tópicos: circuitos lógicos, álgebra booleana e lógica proposicional de primeira ordem.

No início de cada atividade o professor fará uma breve apresentação dos conceitos iniciais presentes nos tópicos citados anteriormente. Será introduzido no início de cada atividade uma tabela que apresentará a proposta do projeto, o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento da atividade, o objetivo que se deseja ser alcançado pelo aluno e o nível de dificuldade.

Conceitos iniciais sobre álgebra de boole necessários para o desenvolvimento das atividades:

- Um pouco da História;

- Explicar o que são variáveis booleanas e os valores que podem assumir, ou seja, que as variável booleana só pode assumir dois valores 0 ou 1 e que cada variável só pode assumir um dos dois valores possíveis;

- Mostras que existem três operações básicas na álgebra de boole: operadores E, OU e complementação (inversão).

Conceitos iniciais sobre circuitos lógicos necessários para o desenvolvimento das atividades:

- Explicar o que são e para que serve os circuitos lógicos;

- Explicar o que são portas lógicas (seção 4.3.1);

- Mostrar exemplos e aplicações dos circuitos lógicos (seção 4.3.2).

5.1 Atividade 1

Tabela 50 – Proposta de atividade 1

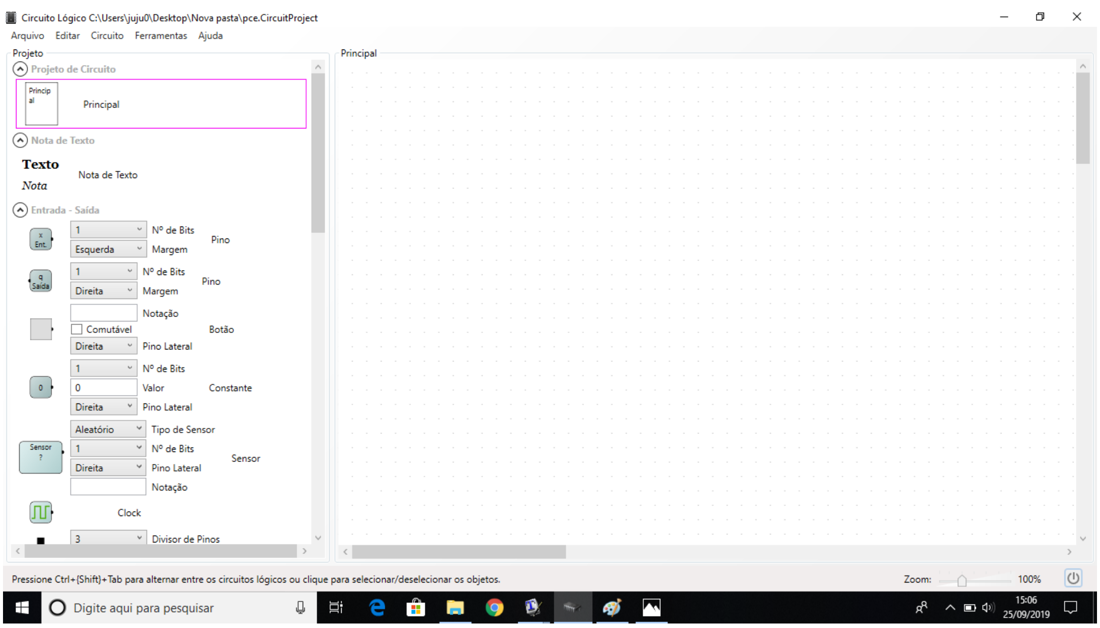
Projeto	Construir um circuito lógico formado por uma única porta lógica E, com dua variáveis, para a simulação de uma lâmpada de led.
Embasamento teórico	Saber o conceito de circuito lógico e conhecer a representação da porta lógica E.
Objetivo	Entender o operador lógico E.
Nível de dificuldade	Médio (Por ser a 1º atividade do aluno com o software).

Fonte – O autor, 2019.

Para as primeiras atividades o aluno deve seguir os seguintes passos iniciais com bastante atenção, pois será seu primeiro contato com o software.

1. Abra o software LogicCircuit.

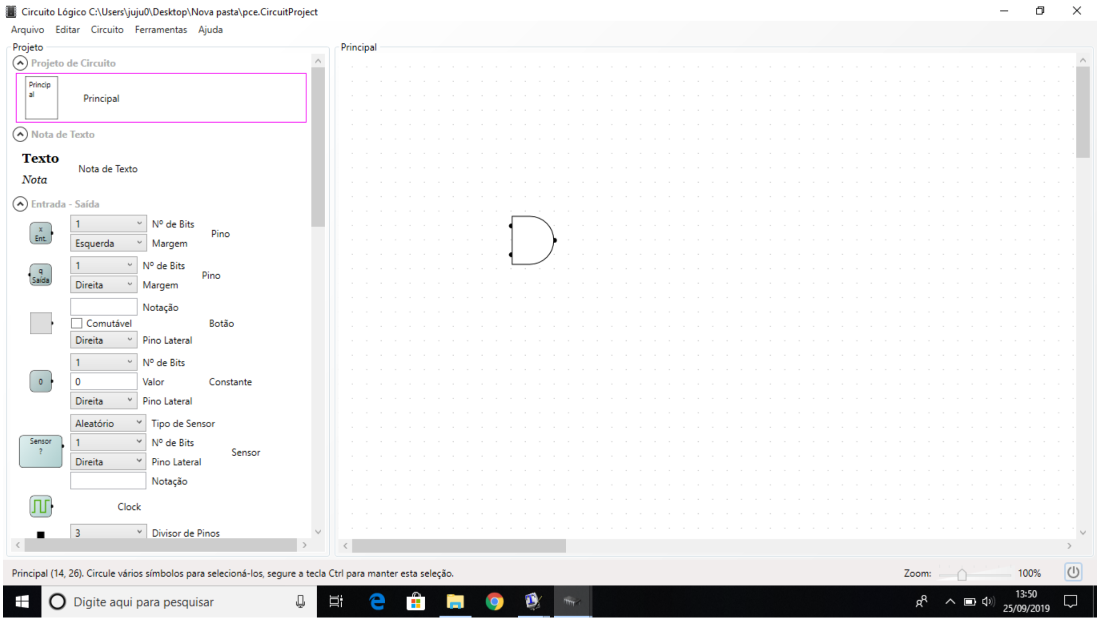
Figura 32 – Construção do circuito da atividade 1 no LogicCircuit: passo 1



Fonte – O autor, 2019.

2. Em projetos, vá até a aba Elementos, clique na porta lógica E (para duas variáveis) e arraste-a até a tela principal.

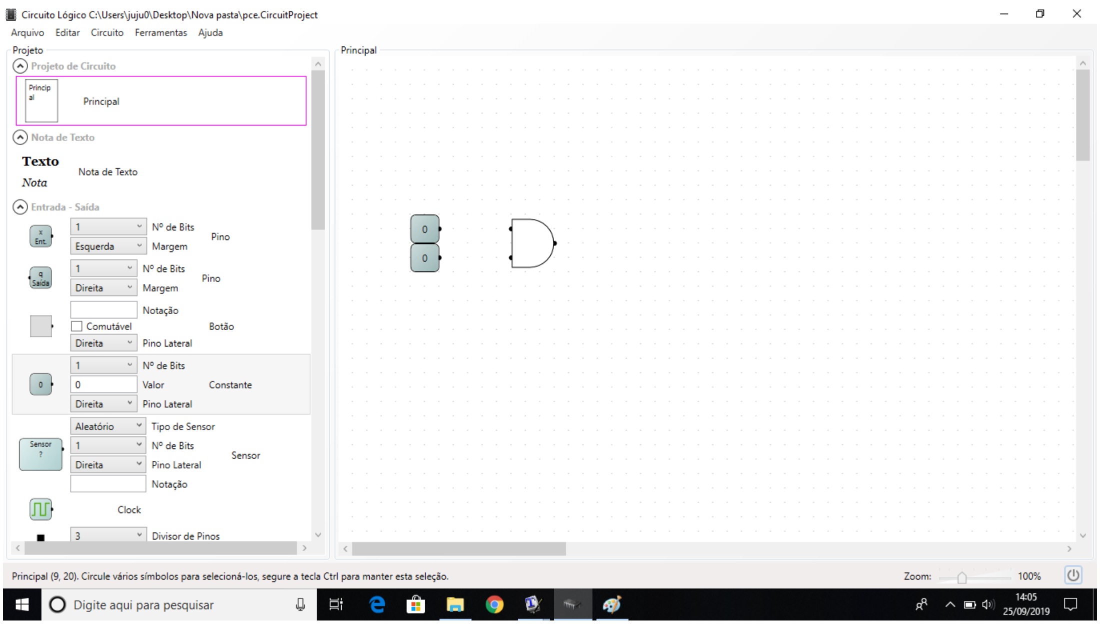
Figura 33 – Construção do circuito da atividade 1 no LogicCircuit: passo 2



Fonte – O autor, 2019.

3. Ainda em projetos, na aba Entrada-Saída, clique em constantes e arraste para a tela principal, repita por duas vezes. Em seguida, dê uma identificação para cada constante, por exemplo, a e b.

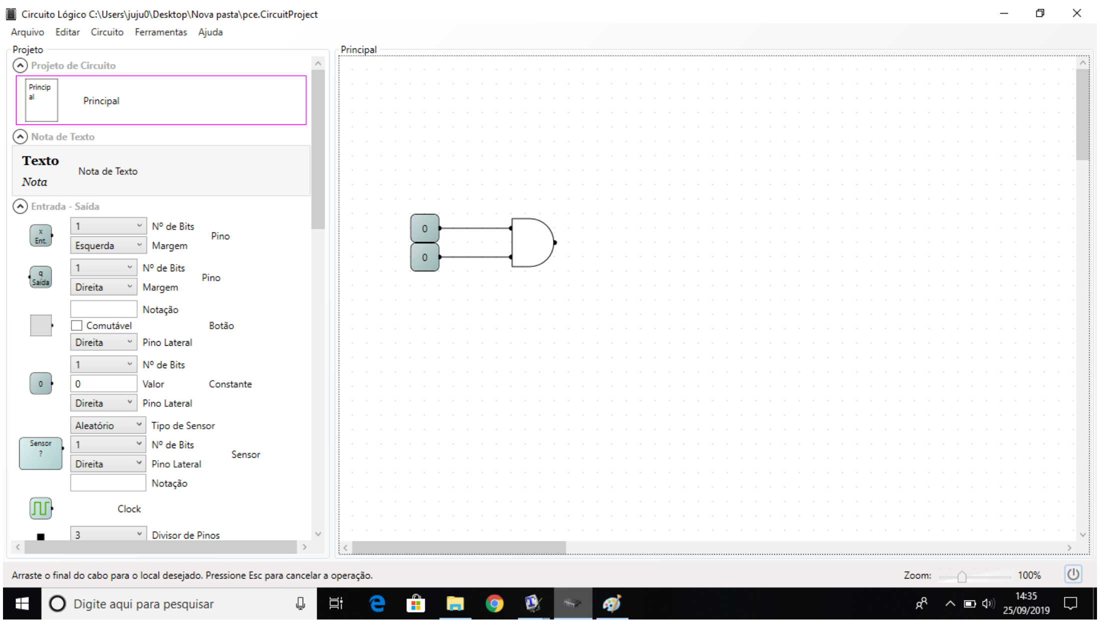
Figura 34 – Construção do circuito da atividade 1 no LogicCircuit: passo 3



Fonte – O autor, 2019.

4. Ligue as entradas da porta lógica E as constantes. (As constantes representam as variáveis do circuito)

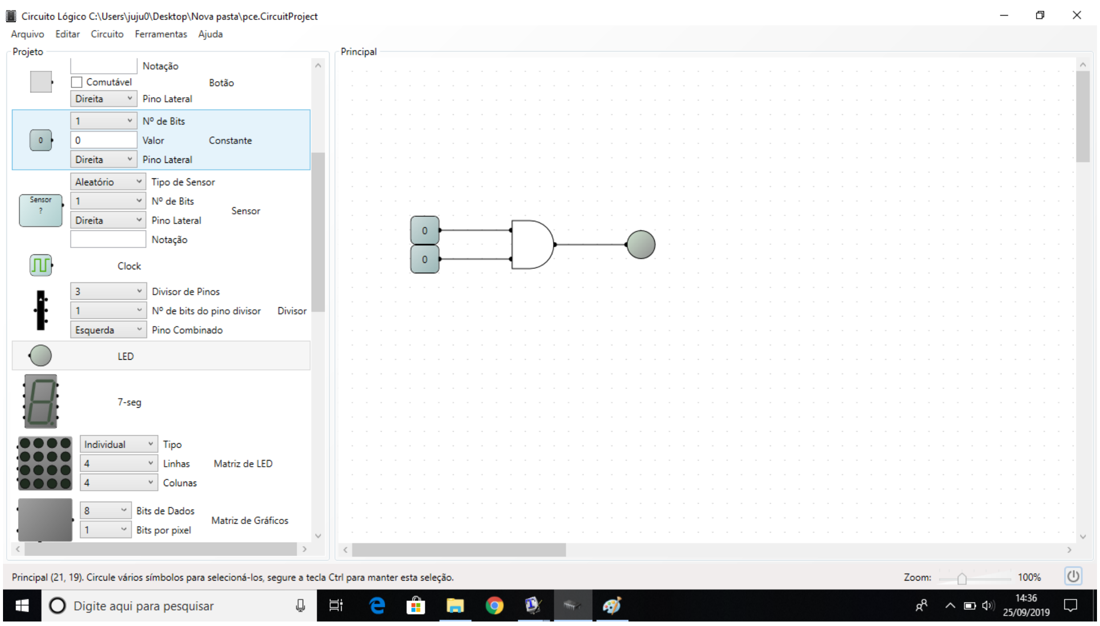
Figura 35 – Construção do circuito da atividade 1 no LogicCircuit: passo 4



Fonte – O autor, 2019.

5. Agora selecione e arraste para a tela principal uma lâmpada de led em Entradas-Saídas, em seguida ligue-a a saída da porta E.

Figura 36 – Construção do circuito da atividade 1 no LogicCircuit: passo 5



Fonte – O autor, 2019.

6. Por fim, na parte inferior da tela, clique no botão de ligar para que a simulação comece. Em comandos, varie todas as possibilidades possíveis de valores para as variáveis de entrada, anotando os valores de entrada e saída. Associe o valor 1 de saída quando a lâmpada de led acender, caso contrário será 0.

7. Construa uma tabela, como achar melhor, relacionando os valores de entrada e saída.

É importante que o professor facilite a aprendizagem através de questionamentos que proporcione a exploração do tema. São sugestões de questionamentos:

Mediação do professor

- O que podemos observar com as combinações de valores nas variáveis de entrada?

- Professor mostra a correlação da porta lógica E com a operação lógica E dando a definição formal, da seguinte maneira:

Note que:

A porta lógica E é aquela que executa a operação E, também denominada de multiplicação lógica. Em que resulta em 0 se pelo menos uma de suas variáveis de entrada for 0 e terá resultado igual a 1 se, e somente se, todas as entradas valerem 1. Indicamos a operação a E b por $a \cdot b$.

A tabela-verdade representa o comportamento do operador E.

Tabela 51 – Operador booleano E.

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

- Em seguida, o professor faz a associação da operação booleana E com a lógica proposicional.

Primeiro deve-se definir matematicamente os seguintes tópicos da lógica matemática:

(1º) O que é proposição (seção 3.1.1).

(2º) Princípios básicos da lógica matemática (seção 3.1.2).

(3º) Proposição simples e composta (seções 3.1.3 e 3.1.4).

Após formalização do operador booleano E e definições dos tópicos acima iremos associar os símbolos e elementos que possuem o mesmo significado.

$$\text{Multiplicação lógica} = \text{Conjunção}$$
$$\cdot = \wedge$$

- Por fim, definiremos formalmente o que é uma conjunção lógica.

Conjunção ($\wedge$)

Unindo duas proposições p e q através do conectivo $\wedge$, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças p e q. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se as proposições p e q são ambas verdadeiras, se pelo menos uma proposição for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a conjunção $p \wedge q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

Tabela 52 – Tabela-verdade da $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

5.2 Atividade 2

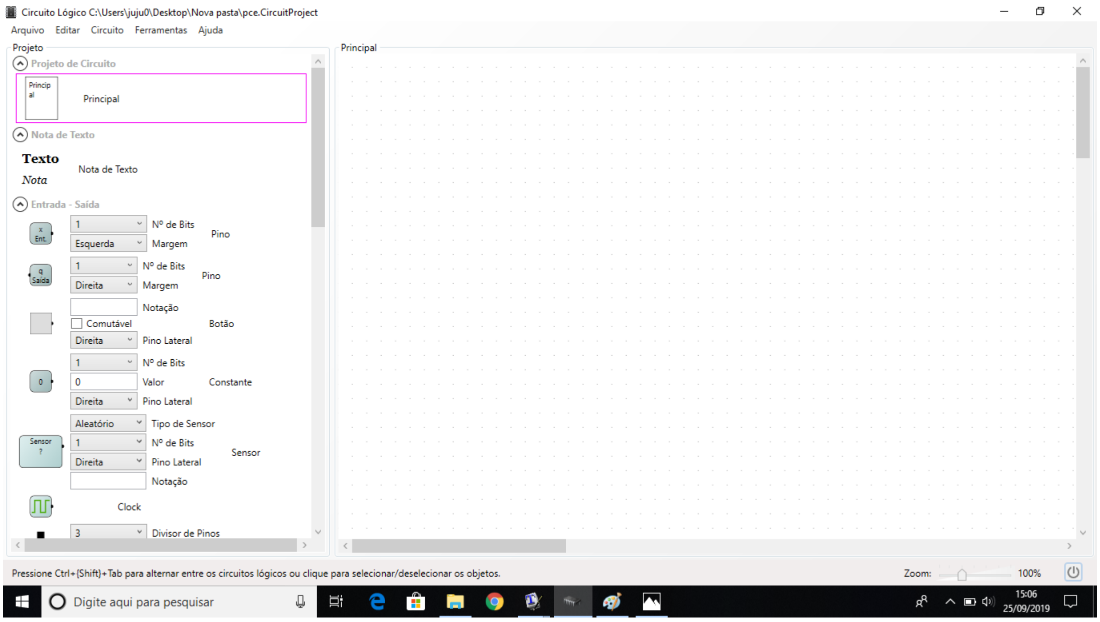
Tabela 53 – Proposta de atividade 2

Projeto	Construir um circuito lógico formado por uma única porta lógica OU, com dua variáveis, para a simulação de uma lâmpada de led.
Embasamento teórico	Saber o conceito de circuito lógico e conhecer a representação da porta lógica OU.
Objetivo	Entender o operador lógico OU.
Nível de dificuldade	Baixo (pelo fato do aluno ter experimentado a atividade 1).

Fonte – O autor, 2019.

1. Abra o software LogicCircuit.

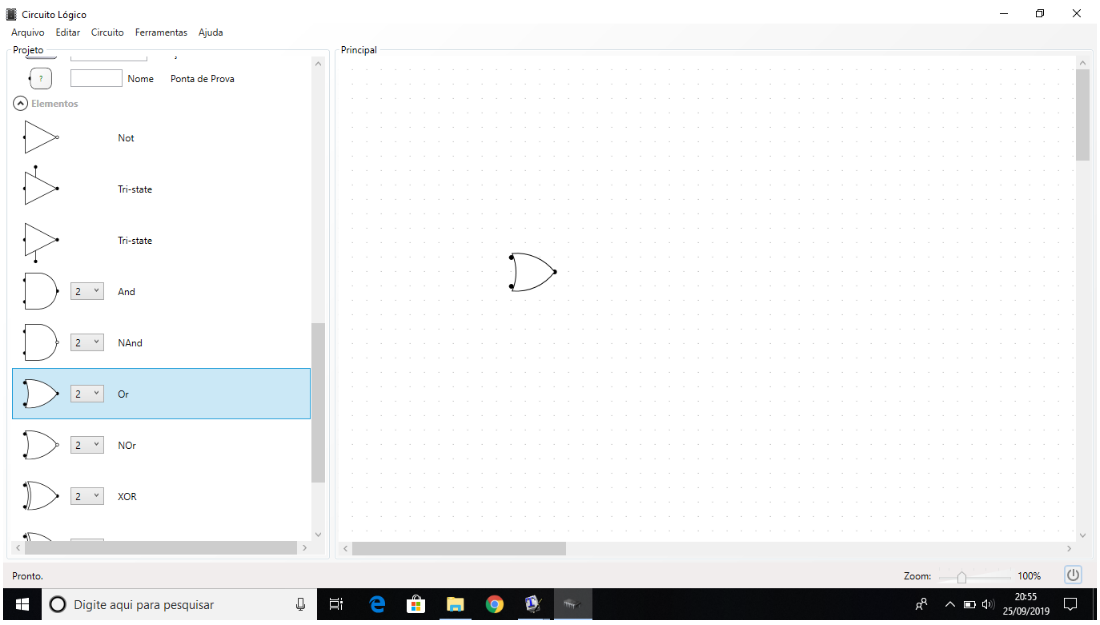
Figura 37 – Construção do circuito da atividade 2 no LogicCircuit: passo 1



Fonte – O autor, 2019.

2. Em projetos, vá até a aba Elementos, clique na porta lógica OU (para duas variáveis) e arraste-a até a tela principal.

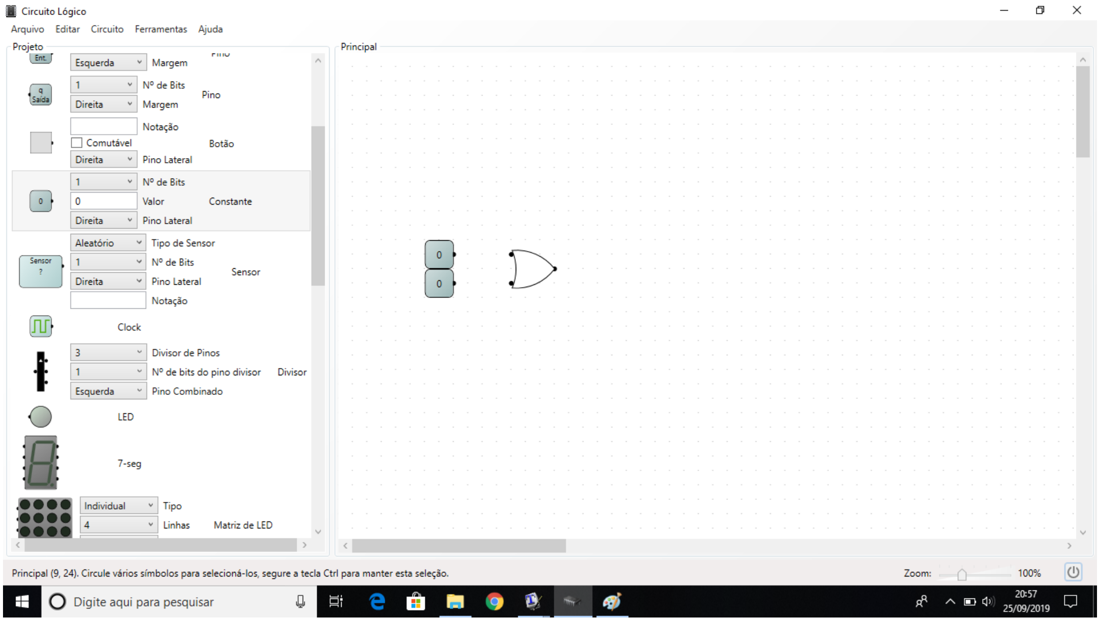
Figura 38 – Construção do circuito da atividade 2 no LogicCircuit: passo 2



Fonte – O autor, 2019.

3. Ainda em projetos, na aba Entrada-Saída, clique em constantes e arraste para a tela principal, repita por duas vezes.

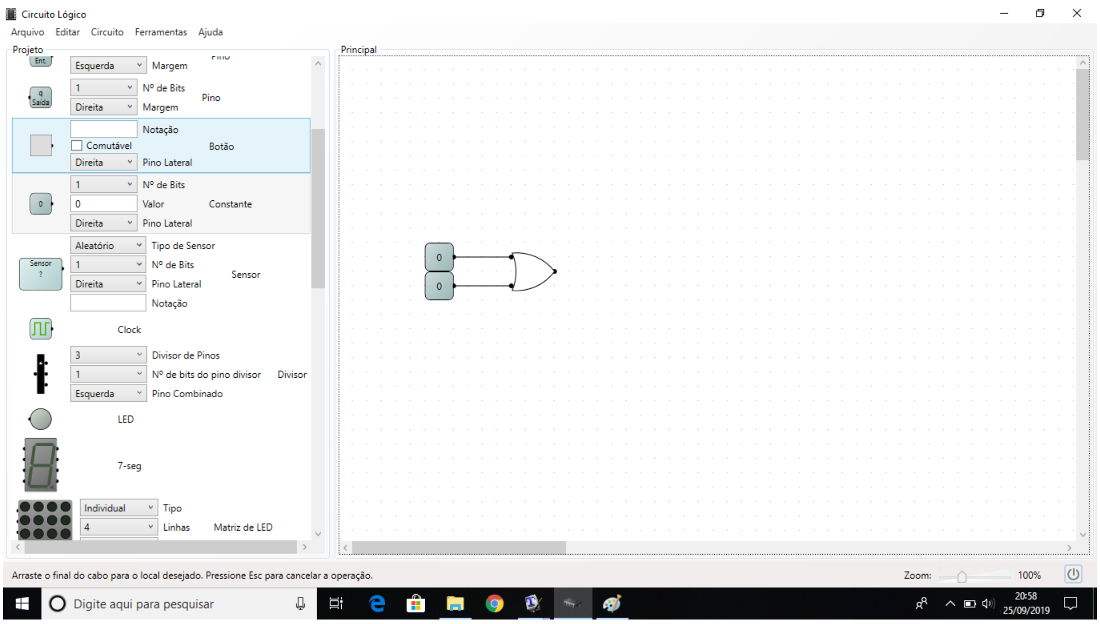
Figura 39 – Construção do circuito da atividade 2 no LogicCircuit: passo 3



Fonte – O autor, 2019.

4. Ligue as entradas da porta lógica OU as constantes. (As constantes representam as variáveis do circuito)

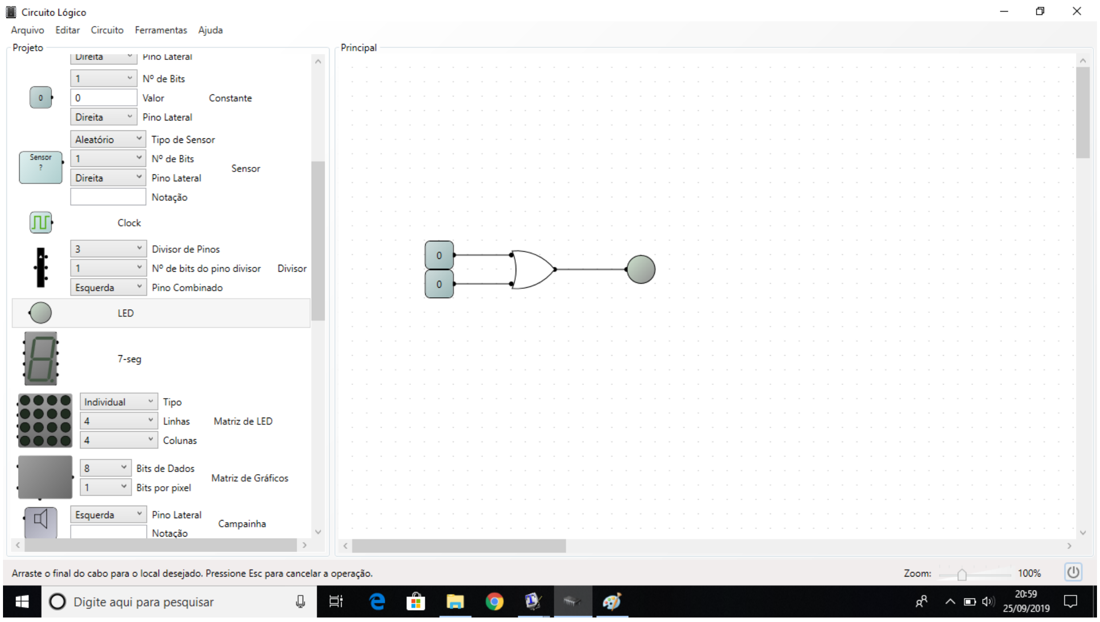
Figura 40 – Construção do circuito da atividade 2 no LogicCircuit: passo 4



Fonte – O autor, 2019.

5. Agora selecione e arraste para a tela principal uma lâmpada de led em Entradas-Saídas, em seguida ligue-a a saída da porta OU.

Figura 41 – Construção do circuito da atividade 2 no LogicCircuit: passo 5



Fonte – O autor, 2019.

6. Por fim, na parte inferior da tela, clique no botão de ligar para que a simulação comece. Em comandos, varie todas as possibilidades possíveis de valores para as variáveis de entrada, anotando os valores de entrada e saída. Associe o valor 1 de saída quando a lâmpada de led acender, caso contrário será 0.

Mediação do professor

- O que podemos observar com as combinações de valores nas variáveis de entrada?

- Professor mostra a correlação da porta lógica OU com a operação lógica OU dando a definição formal, da seguinte maneira:

Note que:

A porta lógica OU é aquela que executa a operação OU, também denominada de adição lógica. Que assumirá o valor 0 quando todas as variáveis de entrada for 0 e quando pelo menos uma das variáveis de entrada for 1 resultará em 1. Indicamos a operação a OU b por $a + b$.

A tabela-verdade representa o comportamento do operador OU

Tabela 54 – Operador booleano OU.

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

- Em seguida, o professor faz a associação da operação booleana OU com a lógica proposicional e também dos símbolos e elementos que possuem o mesmo sentido.

$$\text{Adição lógica} = \text{Disjunção}$$
$$+ = \vee$$

- Por fim, definiremos formalmente o que é uma disjunção lógica.

Disjunção ($\vee$)

Unindo duas proposições p e q através do conectivo $\vee$, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada disjunção das sentenças p e q. A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições p e q são verdadeiras, se ambas as proposições p e q são falsas, então $p \vee q$ é falsa.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a disjunção $p \vee q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

Tabela 55 – Tabela-verdade da $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte – O autor, 2019.

5.3 Atividade 3

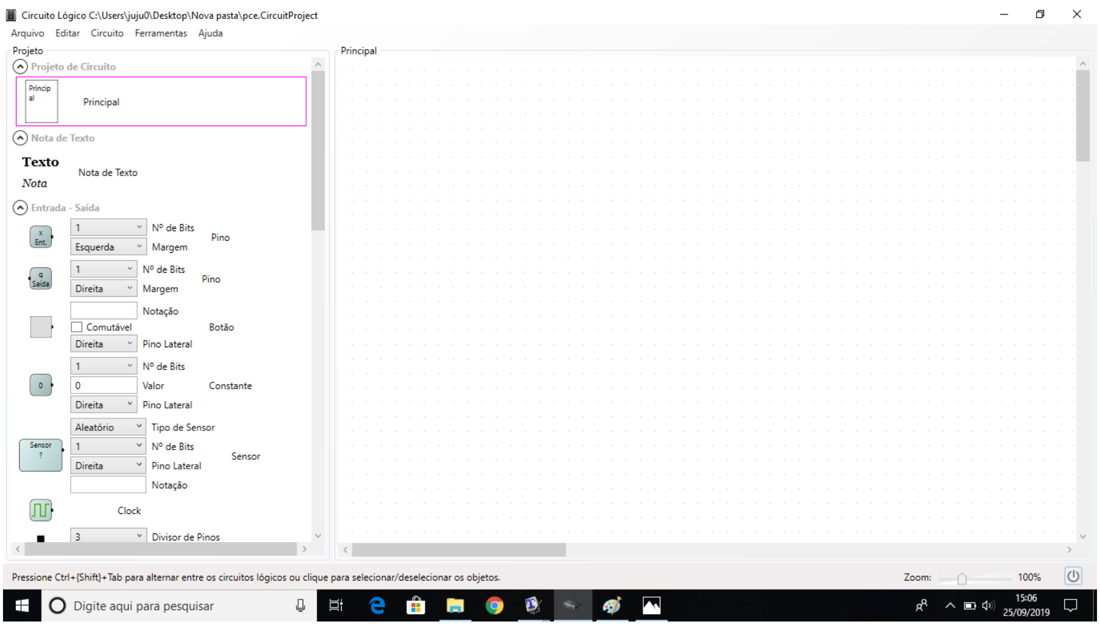
Tabela 56 – Proposta de atividade 3

Projeto	Construir um circuito lógico formado por uma única porta lógica inversora para a simulação de uma lâmpada de led.
Embasamento teórico	Saber o conceito de circuito lógico e conhecer a representação da porta lógica inversora.
Objetivo	Entender o operador lógico negação.
Nível de dificuldade	Baixo.

Fonte – O autor, 2019.

1. Abra o software LogicCircuit.

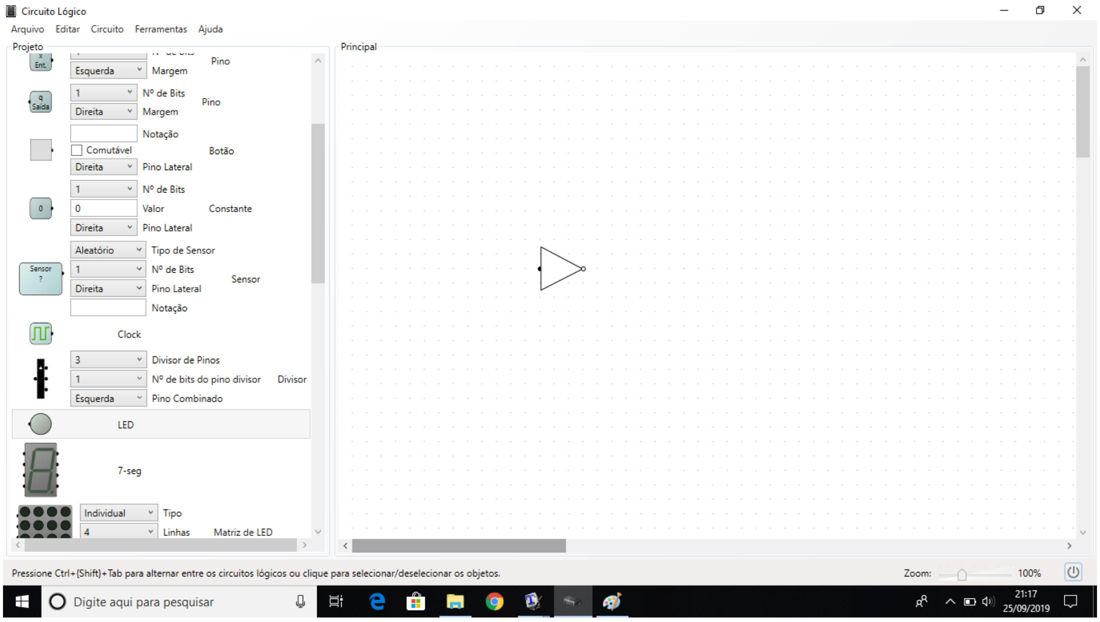
Figura 42 – Construção do circuito da atividade 3 no LogicCircuit: passo 1



Fonte – O autor, 2019.

2. Em projetos, vá até a aba Elementos, clique na porta lógica inversora e arraste-a até a tela principal.

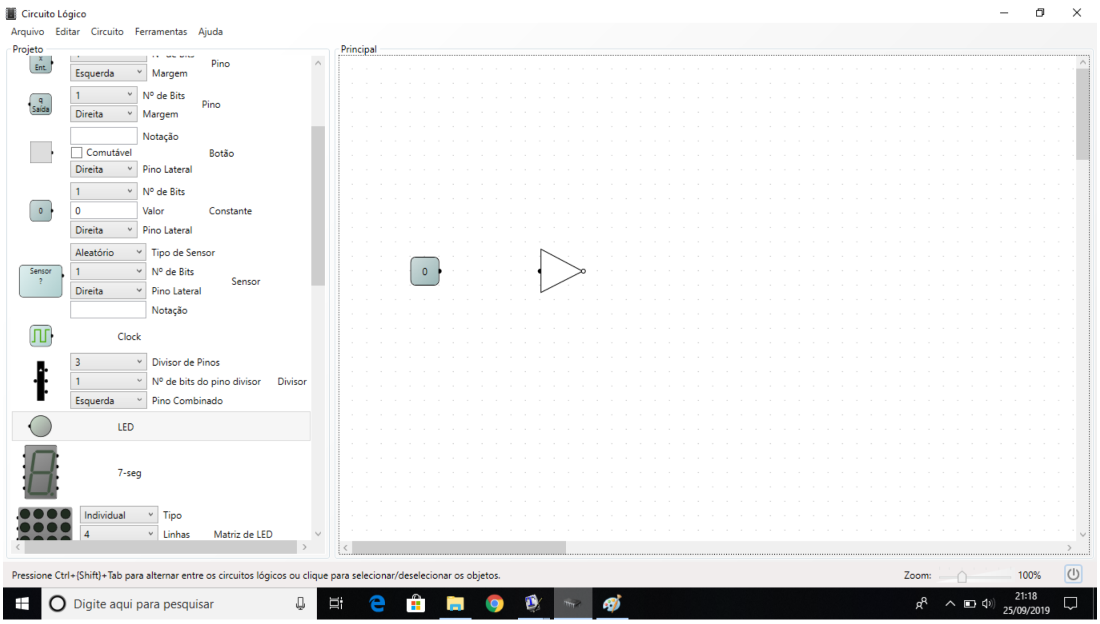
Figura 43 – Construção do circuito da atividade 3 no LogicCircuit: passo 2



Fonte – O autor, 2019.

3. Ainda em projetos, na aba Entrada-Saída, clique em constantes e arraste para a tela principal.

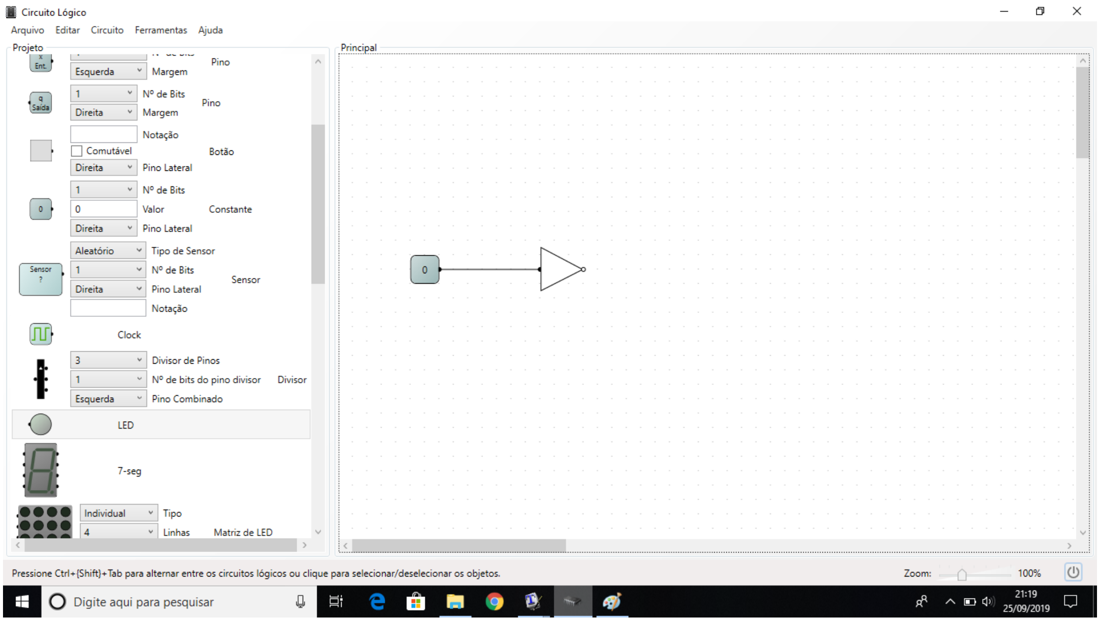
Figura 44 – Construção do circuito da atividade 3 no LogicCircuit: passo 3



Fonte – O autor, 2019.

4. Ligue as entradas da porta lógica inversora a constante.

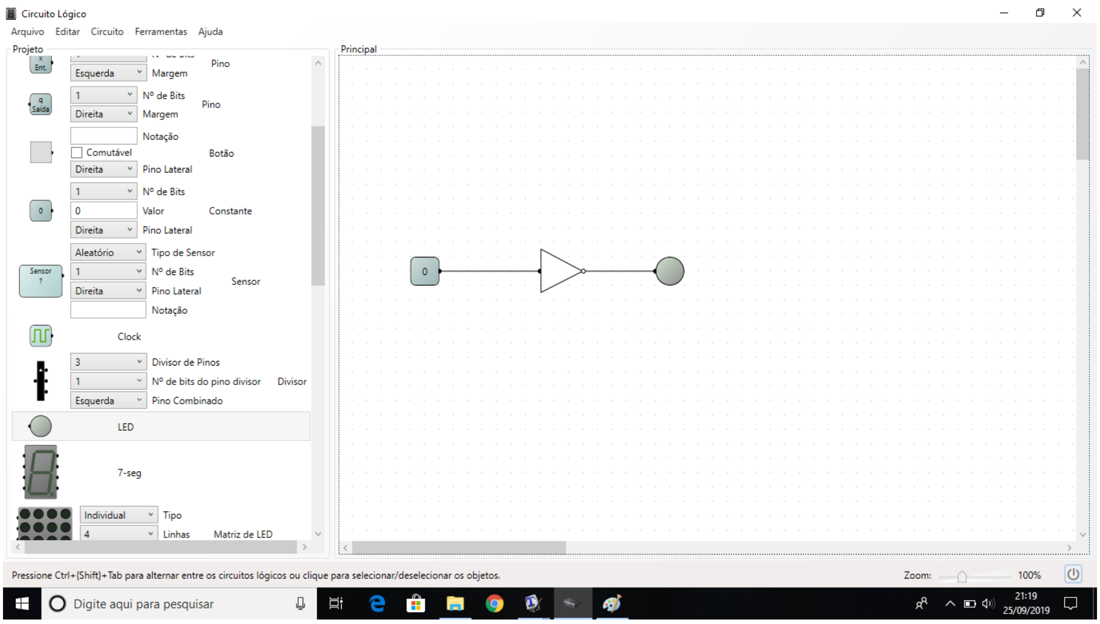
Figura 45 – Construção do circuito da atividade 3 no LogicCircuit: passo 4



Fonte – O autor, 2019.

5. Agora selecione e arraste para a tela principal uma lâmpada de led em Entradas-Saídas, em seguida ligue-a a saída da porta inversora.

Figura 46 – Construção do circuito da atividade 3 no LogicCircuit: passo 5



Fonte – O autor, 2019.

6. Por fim, na parte inferior da tela, clique no botão de ligar para que a simulação comece. Em comandos, varie todas as possibilidades possíveis de valores para a

variável de entrada, anotando os valores de entrada e saída.

Mediação do professor

Professor: O que podemos observar com as combinações de valores nas variáveis de entrada?

Sugestão: Professor mostra a correlação da porta lógica inversora com a negação lógica dando a definição formal, da seguinte maneira:

Note que:

E a porta inversora implementada pela operação complementação, também chamada de negação, executa a inversão do valor ao qual a variável apresenta. Já que uma variável pode assumir somente um valor dos dois valores,ou seja, será 1 se a variável for 0 e resultará em 0 se a variável for 1. Indicamos a operação complementar de a por $\bar{a}$ ou a'.

A tabela-verdade representa o comportamento da operação Negação.

Tabela 57 – Operador booleano inversão

a	a'
0	1
1	0

Fonte – O autor, 2019.

Em seguida, o professor faz a associação da operação booleana inversão com a lógica proposicional e também dos símbolos e elementos que possuem o mesmo sentido.

$$\text{Inversão} = \text{Negação}$$
$$' = \sim$$

- Por fim, definiremos formalmente o que é uma disjunção lógica.

Negação ($\sim$)

A partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indicada com o símbolo $\sim p$.

A proposição $\sim p$ possui o valor lógico sempre oposto ao valor lógico de p, ou seja, quando o valor lógico de p é verdadeiro $\sim p$ é falso e quando o valor lógico de p é falso $\sim p$ é verdadeiro.

O que pode ser simplificado na tabela abaixo, denominada **tabela-verdade** da proposição $\sim p$.

Tabela 58 – Tabela-verdade $\sim p$

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte – O autor, 2019.

5.4 Atividade 4

Tabela 59 – Proposta de atividade 4

Projeto	Construir um circuito lógico formado por uma única porta lógica E, com três variáveis, para a simulação de uma lâmpada de led.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores.
Objetivo	Número de linhas da tabela-verdade e construção da tabela-verdade.
Nível de dificuldade	Difícil.

Fonte – O autor, 2019.

1. Abra o software LogicCircuit.
2. Em projetos, vá até a aba Elementos, clique na porta lógica E (para três variáveis) e arraste-a até a tela principal.
3. Ainda em projetos, na aba Entrada-Saída, clique em contantes e arraste para a tela principal, repita por duas vezes.
4. Ligue as entradas da porta lógica E as contantes. (As constantes representam as variáveis do circuito)
5. Agora selecione e arraste para a tela principal uma lâmpada de led em Entradas-Saídas, em seguida ligue-a a saída da porta E.
6. Por fim, na parte inferior da tela, clique no potão de ligar para que a simulação comece. Em comandos, varie todas as possibilidades possíveis de valores para as variáveis de entrada, anotando os valores de entrada e saída em uma tabela-verdade.
7. Construa a tabela-verdade associando p, q e r para as variáveis de entrada e S para o resultado final do problema.
8. **Repita o mesmo processo para uma porta lógica OU com quatro variáveis.**

Mediação do professor

Professor: O que podemos observar com as combinações de valores nas variáveis de entrada?

Professor: Qual a diferença entre está atividade e a atividade 1, a qual aumentamos o número de variáveis?

Sugestão: Professor deve mostrar a definição formal da tabela-verdade de uma proposição composta e do número de linhas da tabela-verdade;

Tabela-Verdade de uma proposição composta

Podemos combinar as proposições simples p, q, r, ..., com os conectivos lógicos: ($\sim$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$) e disjunção exclusiva ($\veebar$), e construir proposições compostas.

Com o uso das tabelas-verdade das operações fundamentais, podemos construir as tabelas-verdade das proposições compostas para determinar exatamente o seu valor lógico, verdadeira(V) ou falsa(F).

Número de linhas de uma Tabela-Verdade

Teorema: A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Demonstração. Com efeito, toda proposição simples tem dois valores lógicos: V e F, que se excluem. Portanto, para uma proposição composta P$(p_1, p_2, ..., p_n)$ com n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$ há tantas possibilidades de atribuições dos valores lógicos V e F a tais componentes quantos são os arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, isto é, $A_{2,n} = 2^n$. □

5.5 Atividade 5

Tabela 60 – Proposta de atividade 5

Projeto	Dada uma expressão booleana o aluno constrói o circuito (no software) e sua tabela-verdade.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores e definição de uma expressão booleana.
Objetivo	Construção da tabela verdade de uma proposição com mais de um conectivo.
Nível de dificuldade	Médio.

Fonte – O autor, 2019.

Iniciaremos a atividade fazendo a definição formal do que são expressões booleanas:

Expressões Booleanas

Uma **expressão booleana** é qualquer agrupamento finito de n variáveis booleanas. Se a e b, são expressões booleanas, então $(a+b)$, $(a \cdot b)$ e a' também são.

Quando em uma expressão booleana aparecem as operações $\cdot$, $+$ e $'$ é necessário seguir as ordem de precedência, onde a multiplicação lógica tem precedência sobre a adição lógica e $'$ tem precedência sobre $+$ ou $\cdot$. Na multiplicação lógica o símbolo $\cdot$ pode ser omitido e utilizar a justaposição, ou seja $a \cdot b$ será representado por ab.

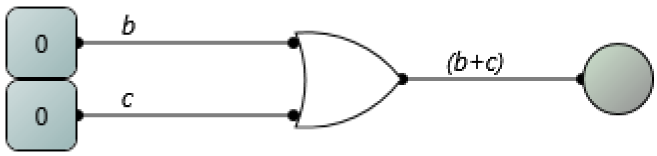
Temos que, $a(b+c)$, ab, $(ab+ac')b$ e $a'bc'$ são exemplos de expressões booleanas.

1. Construir o circuito para a expressão $a \cdot (b+c)$, no software (enfatizar para o aluno que na montagem do circuito deve-se respeitar as ordens de precedência de uma expressão booleana).

   \- Para uma melhor compreensão faremos o circuito por partes, respeitando a ordem de precedência.

2. Montar o circuito da subexpressão $(b+c)$ (como feita na atividade 2).

Figura 47 – Circuito da subexpressão $(b+c)$

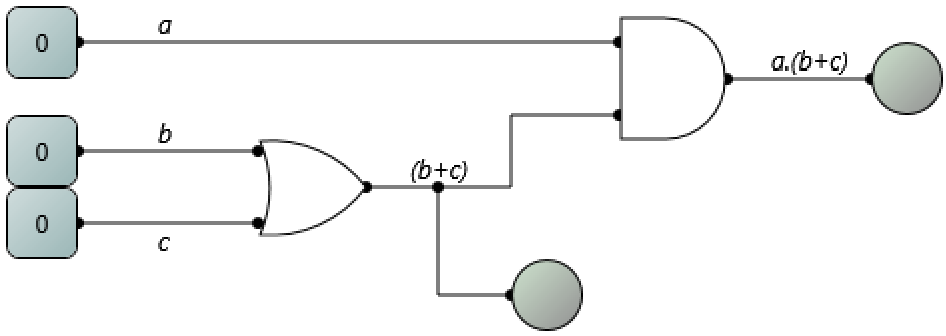


Fonte – O autor, 2019.

3. Variar os valores das variáveis de entrada e montar a tabela-verdade da subexpressão.

4. Montar o circuito da expressão $a \cdot (b+c)$, unindo a variável a a saída do circuito da subexpressão $(b+c)$, do item anterior, mantendo a lâmpada de LED conectada ao fio que leva o sinal lógico até a porta lógica E e outra lâmpada de LED a saída da porta lógica E. Como mostra a figura 49.

Figura 48 – Circuito da expressão $a.(b + c)$



Fonte – O autor, 2019.

5. Fazer a simulação do circuito variando todas as possibilidades de entrada e montar a tabela-verdade da expressão.

6. Reescrever a expressão e tabela-verdade trocando os operadores booleanos pelos conectivos lógicos.

   Mediação do professor

   - Professor define os passos para a construção da tabela-verdade de uma proposição composta.

   Construção da Tabela-Verdade

   Para construção da tabela-verdade de uma proposição composta, devemos seguir os seguintes passos:

   a) Determinar o número de linhas da tabela-verdade;
   b) Formar o par de colunas correspondente as proposições simples componentes;
   c) Determinar a forma das proposições que ocorrem na composição;
   d) Aplicar as operações lógicas que a composição exige.

5.6 Atividade 6

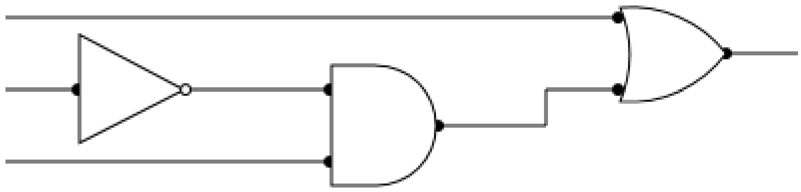
Tabela 61 – Proposta de atividade 6

Projeto	Dado um circuito, extrair sua expressão e tabela-verdade.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores.
Objetivo	Construção da tabela verdade de uma proposição com mais de um conectivo.
Nível de dificuldade	Médio.

Fonte – O autor, 2019.

1. Será dado ao aluno o circuito lógico.

Figura 49 – Circuito dado: atividade 6



Fonte – O autor, 2019.

2. Aluno deve designar para cada entrada uma letra minúscula do alfabeto.
3. Determinar as subexpressões das saídas de cada bloco lógico que compõe o circuito, anotando o resultado após cada saída e encontrar a expressão final.
4. Construir a tabela-verdade da expressão booleana.
5. Construir o circuito dado, no software, variando todas as possibilidades e comparar com a tabela encontrada no item anterior.
6. Reescreve a expressão e a tabela-verdade trocando os operadores booleanos pelos conectivos lógicos.

Observação Atividade com a mesma abordagem teórica da atividade 5, porém com uma dinâmica inversa a anterior.

5.7 Atividade 7

Tabela 62 – Proposta de atividade 7

Projeto	Apresentar três circuitos e o aluno identificar qual deles é uma tautologia, Proposição logicamente falsa (Contradição) ou contingência.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores, definição de tautologia, proposição logicamente falsa e contingência.
Objetivo	Entender na prática a diferença entre tautologia, proposição logicamente falsa e contingência.
Nível de dificuldade	Médio.

Fonte – O autor, 2019.

Iniciaremos a atividade fazendo a definição de tautologia, proposição logicamente falsa (contradição) e contingência.

Tautologia, Proposição logicamente falsa (Contradição) e Contingência

a) **Tautologia**

Chama-se tautologia toda a proposição composta cuja o valor lógico é sempre verdadeiro.

b) **Proposição logicamente falsa (Contradição)**

Chama-se contradição toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra F (falsidade).

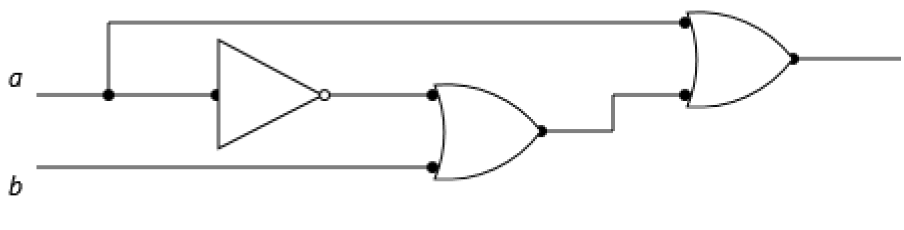
c) **Contingência**

Chama-se contingência todo a proposição composta em que a última coluna da sua tabela-verdade figuram valores lógicos distintos, ou seja, V e F, pelo menos uma vez.

1. Será apresentado três circuitos lógicos, onde cada um deles representará umas das três definições dada acima.

   (a)

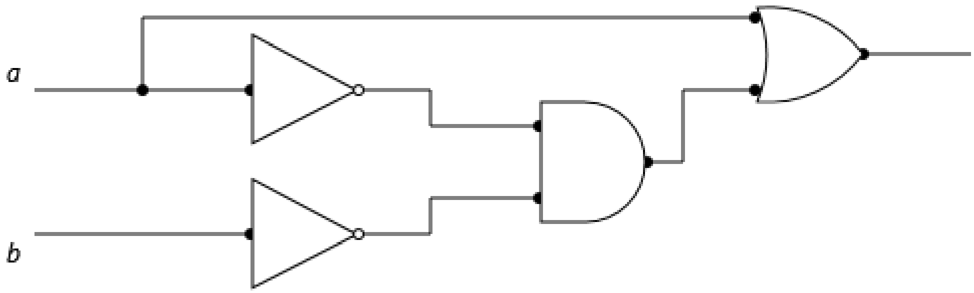
Figura 50 – Circuito item (a)



Fonte – O autor, 2019.

   (b)

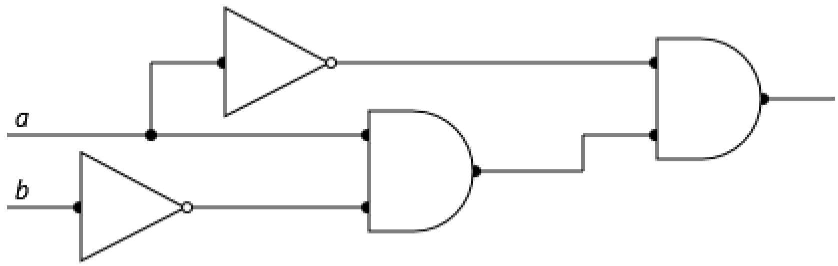
Figura 51 – Circuito item (b)



Fonte – O autor, 2019.

(c)

Figura 52 – Circuito item (c)



Fonte – O autor, 2019.

2. Extrair a expressão booleana de cada circuito e construir sua tabela verdade.

3. Trocar os operadores booleanos pelos conectivos lógicos.

Observação Professor pode propor que o aluno construa cada circuito das Figuras 50, 51 e 52 no software e faça a simulação, como nas atividades anteriores. Para uma melhor visualização e fixação.

5.8 Atividade 8

Tabela 63 – Proposta de atividade 8

Projeto	Dado duas proposições lógicas, o aluno reescrever as proposições na forma de uma expressão booleana e posteriormente montar o circuito.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores.
Objetivo	Entender o conceito de equivalência lógica.
Nível de dificuldade	Médio.

Fonte – O autor, 2019.

1. Dar duas proposições equivalentes, de preferência umas das propriedades algébricas das proposições. Daremos as proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
2. Aluno reescreve as proposições trocando os conectivos lógicos pelos operadores booleanos, assim, transformando as proposições em expressões booleanas.
3. Em seguida, aluno constrói os circuito lógicos no software e faz a simulação de ambos construindo suas tabelas-verdade, como feito em atividades anteriores.

Mediação do professor

- O que podemos observar com as tabelas-verdade das expressões?

- Professor define o que são proposições equivalentes.

Equivalência Lógica

Quando duas proposições p e q dadas possuem tabelas-verdade iguais, dizemos que as proposições são equivalente ou logicamente equivalentes, ou seja, quando p e q têm o mesmo valor lógico.

Indica-se que a proposição p é logicamente equivalente a proposição q com a notação: $p \iff q$.

Observação Professor pode aproveitar para aprofundar a assunto e definir a Álgebra das Proposições, como na seção 3.1.10.

5.9 Atividade 9

Tabela 64 – Proposta de atividade 9

Projeto	Construção e simulação de circuitos.
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores e a existências de outras portas lógicas.
Objetivo	Compreender as regras de De MORGAN
Nível de dificuldade	Difícil.

Fonte – O autor, 2019.

Iniciaremos a atividade mostrando que existem outras portas lógicas (seção 4.3.3).

1. Construir os circuitos, no software, referentes as expressões booleanas $(a+b)'$, $(a.b)'$, $a'b'$ e $a'+b'$ (utilizando as portas lógicas NOU e NE quando necessário).

2. Construir as tabelas-verdade para cada um dos circuitos acima.

   Mediação do professor

   - O que podemos observar com as tabelas-verdade das expressões?

   - Houve alguma semelhança entre as tabelas-verdades?

   - Professor propõe ao aluno a transformação das expressões em proposições lógicas, trocando os operadores booleanos pelos conectivos lógicos e Reforça a definição de equivalência dada na atividade 8.

   - Em seguida, Professor define as regras de **DE MORGAN**.

   (i) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$

   (ii) $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

   Estas regras de DE MORGAM nos diz que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

5.10 Atividade 10

Tabela 65 – Proposta de atividade 10

Projeto	Construir um circuito para um problema real
Embasamento teórico	Conceitos trabalhado nas atividades anteriores.
Objetivo	Conseguir extrair o sentido lógico de uma situação real.
Nível de dificuldade	Muito difícil.

Fonte – O autor, 2019.

Uma carro possui 3 sensores, nas portas, na ignição e nos faróis.

- Sensor 1: Quando alguma porta está aberta o sensor envia sinal igual a 1, caso contrário envia 0.

- Sensor 2: Quando a ignição está ligada o sensor envia sinal lógico igual a 1, caso contrário envia 0.

- Sensor 3: Quando o farol está ligado o sensor também envia sinal lógico igual a 1, caso contrário envia 0.

Projete um circuito lógico que faça acionar um sinal sonoro para o funcionamento do sistema que deverá atuar sob as seguintes premissas:

(i) Quando as portas estiverem abertas com a ignição ligada.

(ii) Quando os faróis estiverem acesos com a ignição desligada.

1. Determinar a proposição referente ao acionamento do sinal sonoro do carro, adotando letras para as variáveis componentes do sistema.
2. Construir a tabela-verdade da proposição encontrada no item 1, respeitando os passos de construção visto na atividade 5.
3. Trocar os conectivos lógicos pelos operadores booleanos, afim de determinar a expressão referente ao sistema dado.
4. Construir o circuito lógico para o acionamento sonoro do sistema.

6 SOBRE A NECESSIDADE DE CRIAR SOLIDARIEDADE LÓGICA PARA EXEMPLIFICAR O "SE..., ENTÃO" E O "SE E SOMENTE SE" ATRAVÉS DOS CIRCUITOS LÓGICOS

O desenvolvimento deste trabalho girou em torno dos conectivos E e OU e da negação lógica implementados através dos circuitos digitais. Como em circuitos digitais não existem portas lógicas que representam diretamente os conectivos **"se..., então"** e **"se e somente se"**, fez-se necessário uma abordagem indireta para representação desses conectivos utilizando a equivalência lógica. Trabalharemos com duas equivalências lógicas:

(i) $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$

(ii)$p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

Para iniciar a abordagem deve-se apresentar a definição corrente dos conectivos, pois como não existem representações gráficas que associem os conectivos à portas lógicas, fica inviável construirmos o conhecimento dos conectivos como feito nas atividades 1, 2 e 3 do capitulo anterior.

Iniciaremos as atividades definindo os conectivos, apresentado suas tabelas e exemplificações. Espera-se que a absorção dos mesmo, pelos alunos, ocorra de maneira mais natural, visto que estes já estão familiarizados com as notações e tabelas.

Então definiremos:

Condicional ($\rightarrow$)

Chama-se proposição condicional a composição de duas proposições p e q representadas por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade(F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade(V) nos demais casos. Indica-se com a notação: $p \rightarrow q$, que também lê-se das seguintes maneiras: p é condição suficiente para q e q é condição necessária para p.

Em uma condicional $p \rightarrow q$, temos que p é o antecedente e q é o conseguente. O símbolo $\rightarrow$ é denominado símbolo de implicação.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a condicional $p \rightarrow q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \rightarrow q$.

Tabela 66 – Tabela-verdade da $p \to q$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

Exemplo 24.

1.

Tabela 67 – Exemplo 9.1

	Proposição	Valor lógico
p	9 é um número múltiplo de 3.	Verdadeiro
q	Rio de Janeiro é uma cidade.	Verdadeiro
$p \to q$	Se 9 é um número ímpar, então o Rio de Janeiro é uma cidade.	Verdadeiro

Fonte – O autor, 2019.

2.

Tabela 68 – Exemplo 9.2

	Proposição	Valor lógico
p	π é um número irracional.	Verdadeira
q	15 é um número primo.	Falso
$p \to q$	Se π é um número irracional, então 15 é um número primo.	Falso

Fonte – O autor, 2019.

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Chama-se proposição bicondicional a composição de duas proposições p e q representadas por "p se e somente se q", cujo valor lógico é a verdade (V) no caso em que p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas e falsidade (F) nos demais casos. Indica-se com a notação: $p \leftrightarrow q$, que também lê-se das seguintes maneiras: p é condição necessária e suficiente para q e q é condição necessária e suficiente para p.

A tabela abaixo nos permite verificar todas as possibilidades de resultado para a condicional $p \leftrightarrow q$. Denominada tabela-verdade da proposição $p \leftrightarrow q$.

Tabela 69 – Tabela-verdade da $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte – O autor, 2019.

Exemplo 25.

1.

Tabela 70 – Exemplo 10.1

	Proposição	Valor lógico
p	24 é múltiplo de 3	Verdadeiro
q	6 é ímpar	Falso
$p \leftrightarrow q$	24 é múltiplo de 3 se, e somente se, 6 é ímpar.	Falso

Fonte – O autor, 2019.

2.

Tabela 71 – Exemplo 10.2

	Proposição	Valor lógico
p	Todo quadrado é retângulo.	Verdadeiro
q	$4+2 > 3$	Verdadeiro
$p \leftrightarrow q$	Todo quadrado é retângulo se, e somente se, $4+2 > 3$.	Verdadeiro

Fonte – O autor, 2019.

Após a definição dos conectivos, sugerimos algumas atividades que permitam uma melhor compreensão do significado lógico desses conectivos, seguido da validação de tais atividades.

Proposta 1: Esta proposta de atividade leva em consideração o domínio relativo do software pelo aluno, que deverá construir um circuito a partir da equivalência $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$ proposta pelo professor. Para turmas mais avançadas o professor pode sugerir circuitos mais complexos.

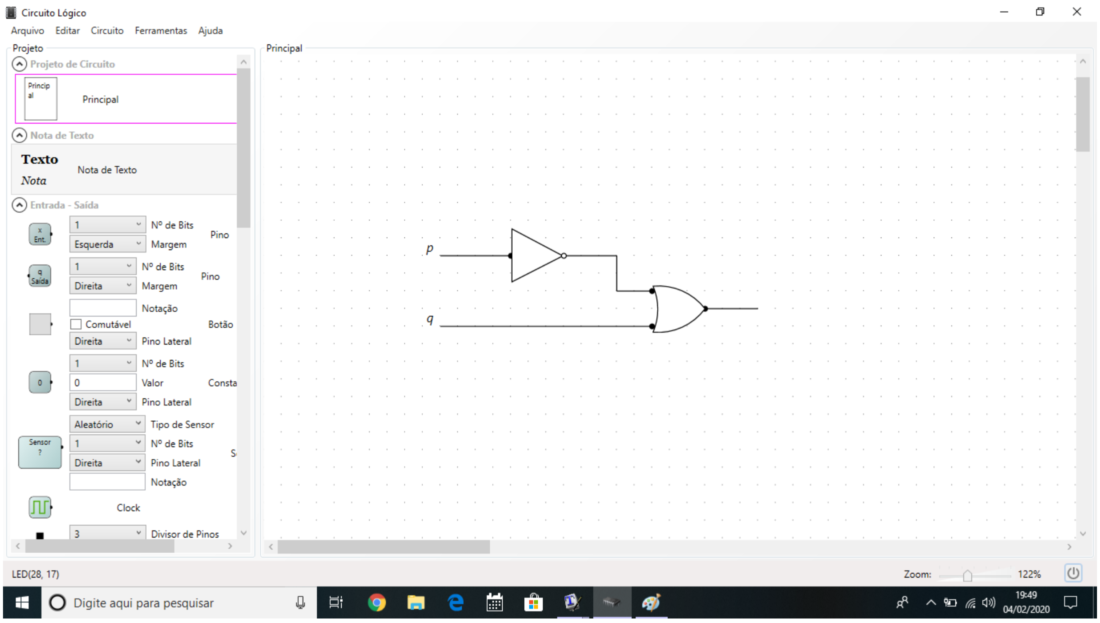
Espera-se que o aluno não encontre muita dificuldade, pois já terá sido trabalhado a montagem de circuitos em atividades anteriores.

A intenção é a verificação de que ambas proposições são equivalentes, mostrando a possibilidade da construção de um circuito com o mesmo sentido lógico da condicional.

A proposta pode seguir o seguinte roteiro:

1. Construir o circuito para a proposição $\sim p \vee q$.

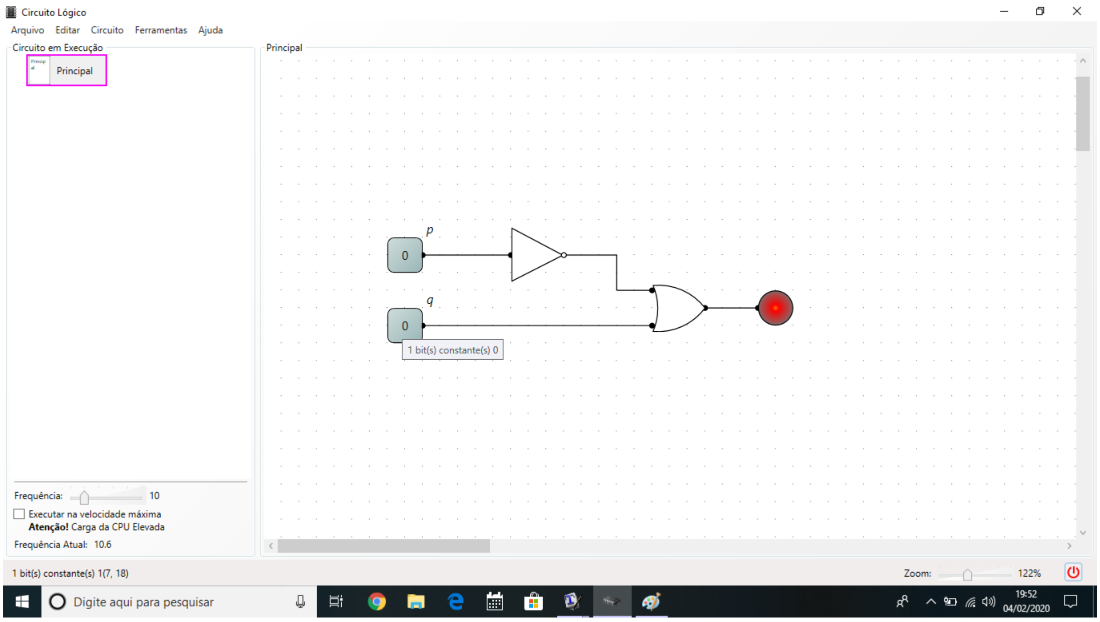
Figura 53 – Construção do circuito executado pela expressão $\sim p \vee q$ no LogicCircuit



Fonte – O autor, 2019.

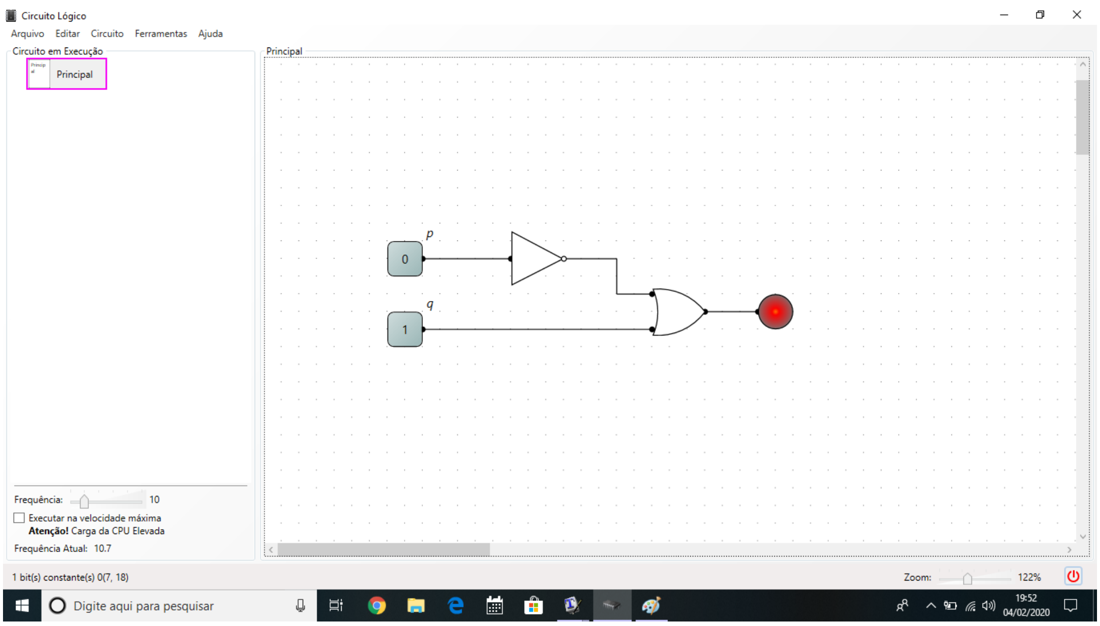
2. Fazer a simulação do circuito no software.

Figura 54 – Simulação 1



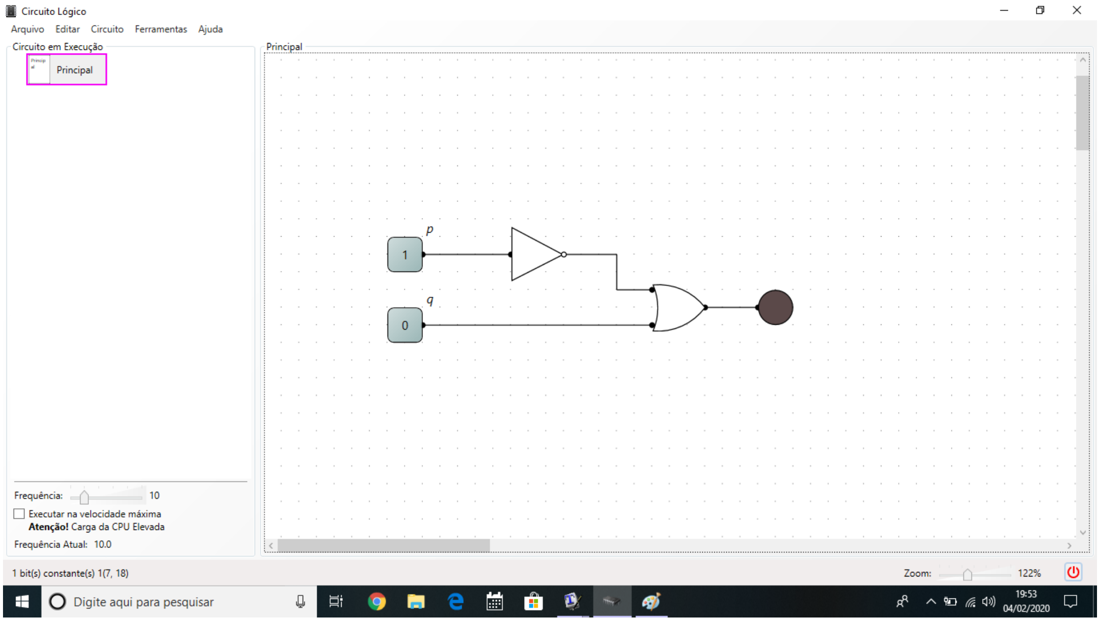
Fonte – O autor, 2019.

Figura 55 – Simulação 1



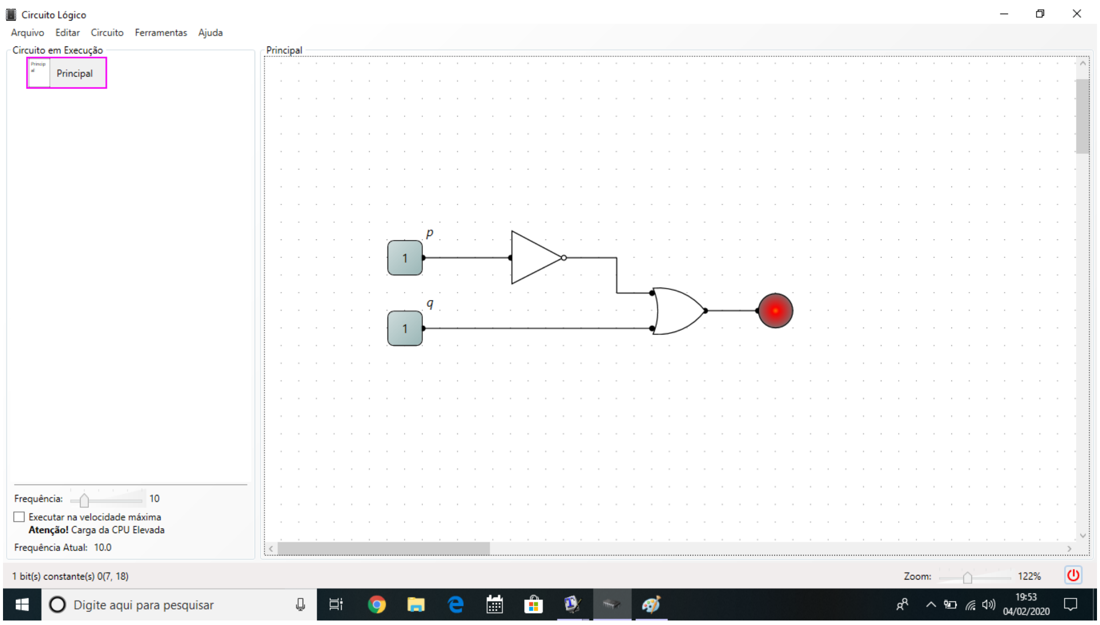
Fonte – O autor, 2019.

Figura 56 – Simulação 3



Fonte – O autor, 2019.

Figura 57 – Simulação 4



Fonte – O autor, 2019.

3. Após a simulação, pedir ao aluno que construa a tabela-verdade referente a proposição dada.

   Com isso, espera-se que o aluno consiga perceber a equivalência $p \to q \iff \sim p \vee q$ de maneira prática.

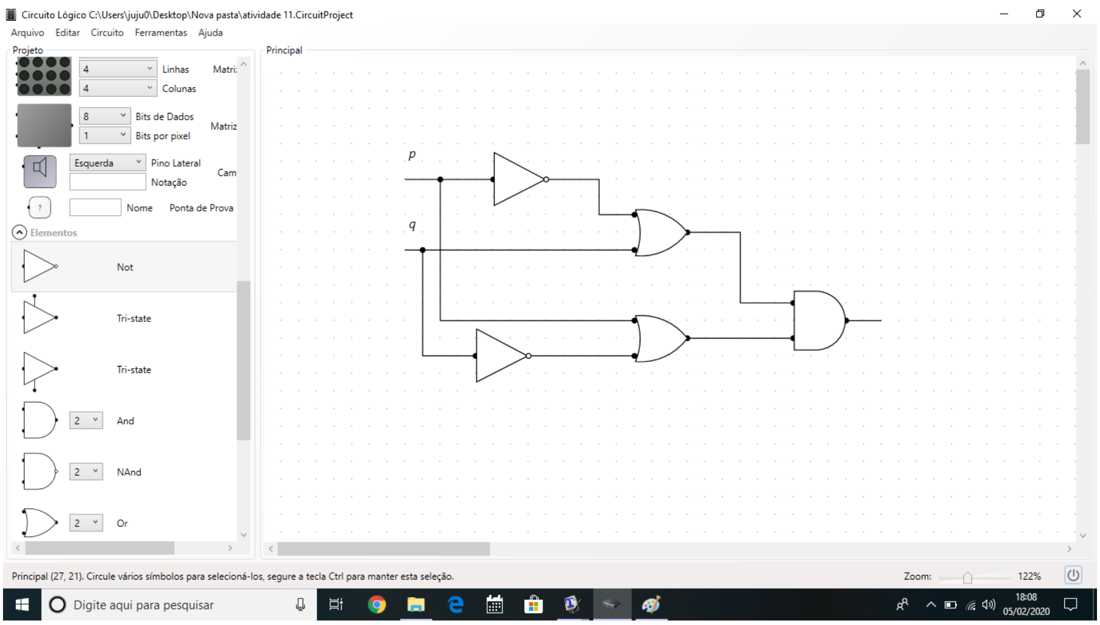
Proposta 2: É uma proposta que procura deduzir a equivalência $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$, montar o circuito, construir a tabela e comparar o resultado com a tabela-verdade da bicondicional.

Esta atividade deve ser realizada quando o professor avaliar pedagogicamente que a proposta 1 foi bem sucedida, caso contrário, haverá necessidade de realizar a proposta 1 novamente, uma vez que o atual exercício procura encontrar uma equivalência lógica para bicondicional baseado na atividade anterior.

A proposta pode seguir o seguinte roteiro:

1. Construir o circuito para a proposição $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

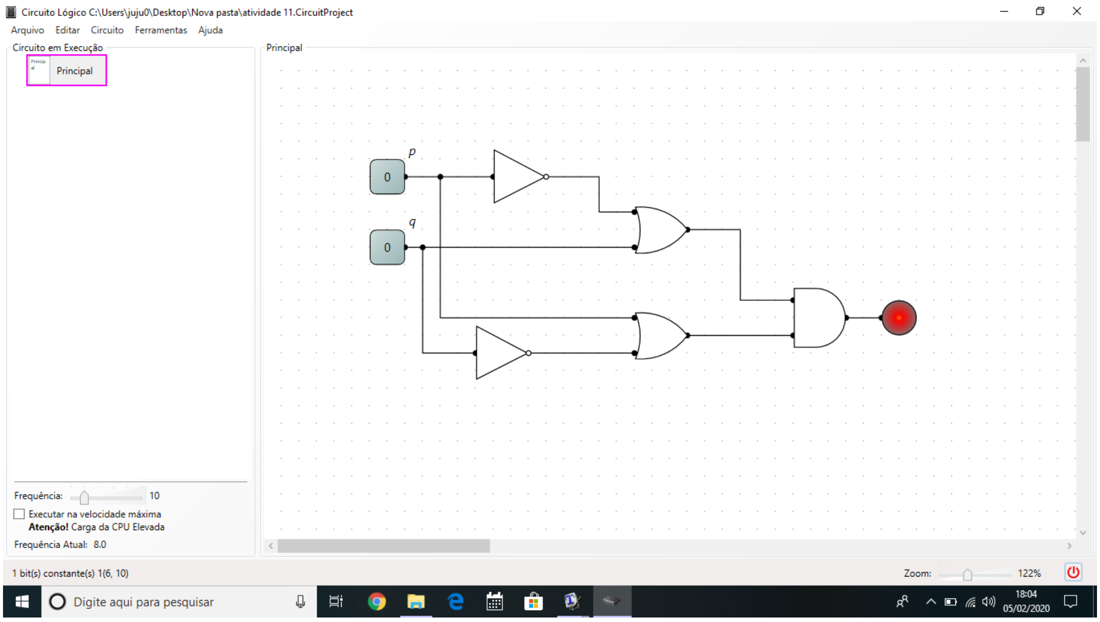
Figura 58 – Construção do circuito executado pela expressão $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ no LogicCircuit



Fonte – O autor, 2019.

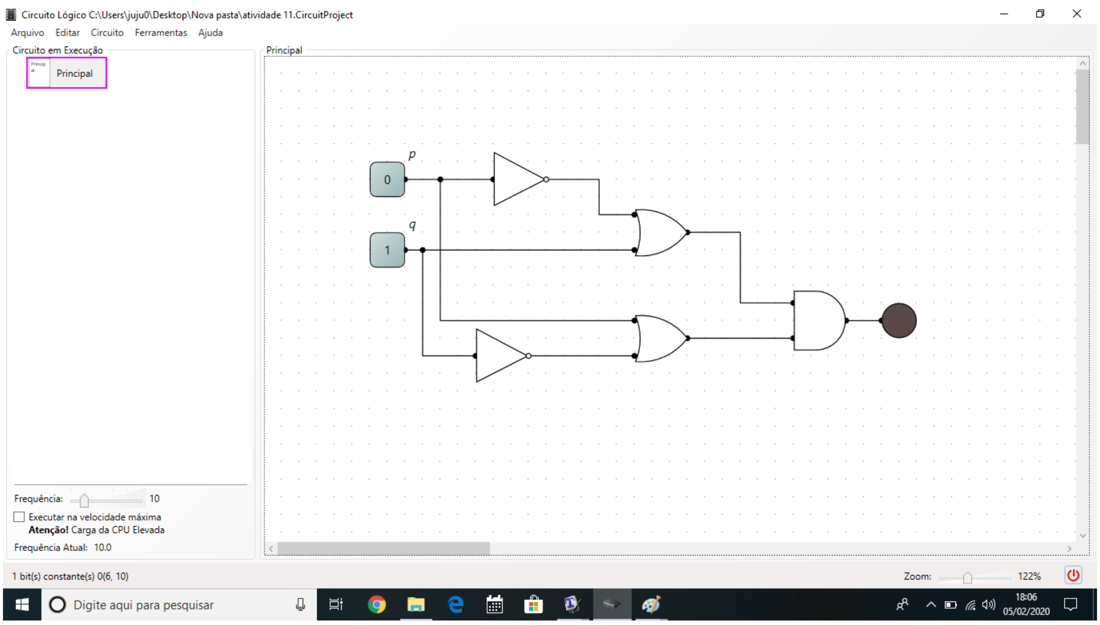
2. Fazer a simulação do circuito no software.

Figura 59 – Simulação 1



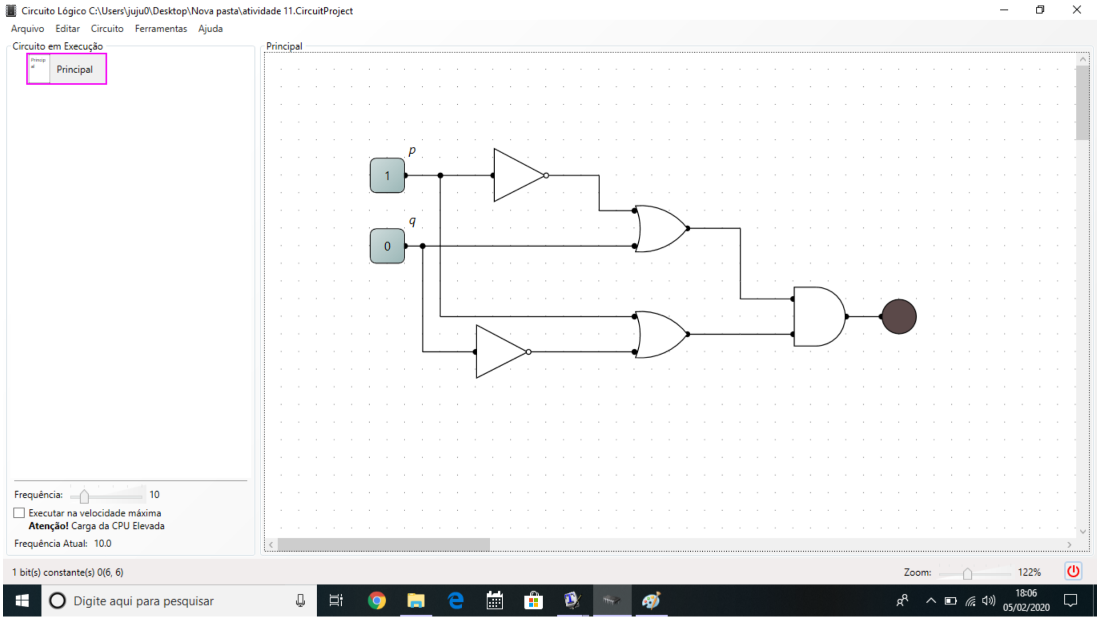
Fonte – O autor, 2019.

Figura 60 – Simulação 2



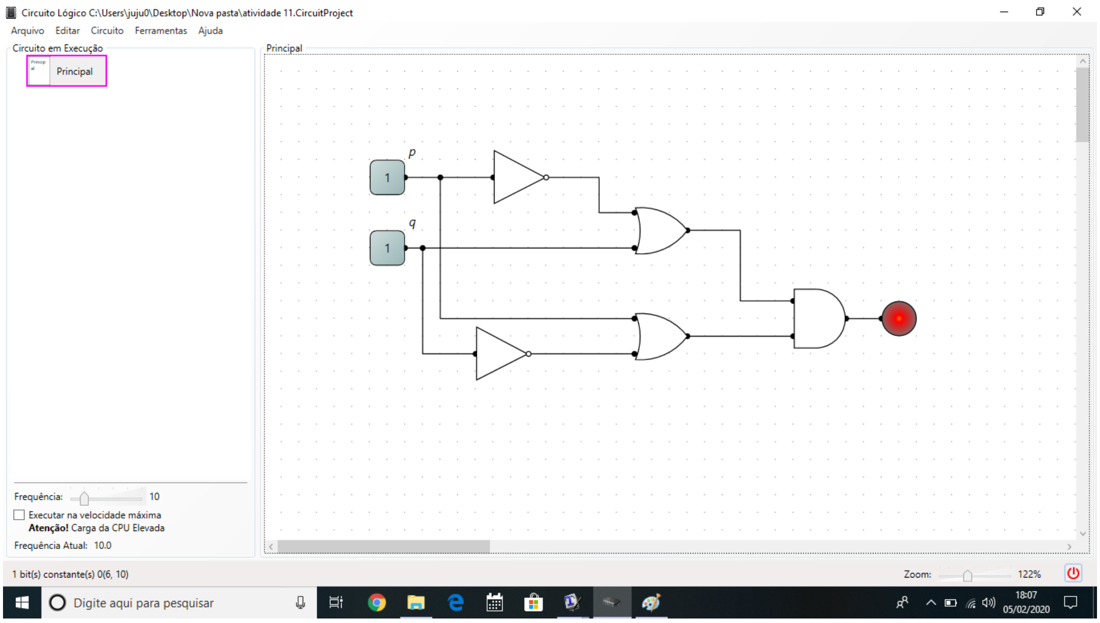
Fonte – O autor, 2019.

Figura 61 – Simulação 3



Fonte – O autor, 2019.

Figura 62 – Simulação 4



Fonte – O autor, 2019.

3. Após a simulação, pedir ao aluno que construa a tabela-verdade referente a proposição dada.

   Analogamente a proposta anterior, espera-se que o aluno consiga perceber a equivalência $p \leftrightarrow q \iff (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ de maneira prática.

Proposta 3: É uma proposta que requer um raciocínio lógico formal mais apurado, pois procura determinar a negação para condicional e bicondicional.

Pode-se implementar a negação da condicional e da bicondicional aplicando as regras de DE MORGAN, trabalhadas na atividade 9 da seção anterior. Tais equivalências estão presentes nas propostas 1 e 2. É importante que o professor solicite a construção dos circuitos referentes as negações das equivalências para que o aluno verifique na prática a negação destes conectivos.

7 VALIDAÇÃO DA PROPOSTA CONTIDA NESTA PESQUISA

No primeiro momento foi pensado uma apresentação que auxiliasse o professor na dinamização do conteúdo de lógica apresentado no ensino médio que fugisse da tradicional análise das tabelas-verdade e de problemas associados à linguagem. Concluída esta etapa, a necessidade de validação da proposta se fez presente. Como foi feito a validação?

(1) Apresentação de uma oficina no Festival da Matemática (FESTMAT) do Colégio Pedro II.

(2) Oficina com 29 alunos do curso de informática do ensino médio integrado do Colégio Pedro II.

A oficina no FESTMAT iniciou-se com uma sucinta apresentação sobre como o tema foi escolhido, e em seguida, como tradicionalmente aprendemos e ensinamos os conectivos no curso de lógica. Foi dada palavra aos alunos presentes cujas falas foram ao encontro dos resultados apresentados sobre uma pequena pesquisa feita com alunos da 2º série do curso de informática do ensino médio integrado do Colégio Pedro II. Esta entrevista abordou o que os estudantes achavam sobre o ensino de lógica e o seu desenvolvimento na matriz curricular. As principais respostas foram: (1) o tema é ensinado via decoreba de tabelas-verdades, (2) tema visto como complicado e (3) temática que dá margem a má interpretação e confusão em relação à compreensão plena do assunto, pois os significados das conjunções em lógica divergem das conjunções da língua portuguesa. Foi explicado aos participantes qual a proposta da pesquisa, destacando seus três principais pontos: trazer mais dinamismo ao conteúdo, associação com a metodologia STEM e exercício e desenvolvimento da criatividade. A primeira etapa da oficina foi finalizada com a definição de circuitos lógicos, suas aplicações e a apresentação do programa LogicCircuit.

Na segunda etapa foram escolhidas 5 atividades e uma atividade desafio. Essas atividades foram implementadas a partir de uma sequencia de problemas oriundos de tabelas-verdade pré definidas. O último problema trouxe da vida real um problema a fim de que os alunos o modelassem (atividade 10 já apresentada aqui).

Já a oficina com os 29 alunos do curso de informática seguiu a mesma abordagem da oficina do FESTMAT, porém ao final da oficina separamos um momento para reflexão junto com os alunos e se chegou a seguinte conclusão em relação a prática das atividades:

(1) Facilidade na compreensão do softwar

Tabela 72 – Pergunta 1

Nível de dificuldade	Número de alunos
Muito fácil	0
Fácil	28
Médio	0
Difícil	1
Muito difícil	0
Total	28

Fonte – O autor, 2019.

(2) Reconhecimento dos símbolos e associação com os conectivos

Tabela 73 – Pergunta 2

Nível de dificuldade	Número de alunos
Muito fácil	26
Fácil	2
Médio	0
Difícil	0
Muito difícil	0
Total	28

Fonte – O autor, 2019.

(3) Relacionamento com a tabele-verdade

Tabela 74 – Pergunta 3

Nível de dificuldade	Número de alunos
Muito fácil	0
Fácil	20
Médio	5
Difícil	0
Muito difícil	0
Não entendeu o que foi perguntado	1
Total	28

Fonte – O autor, 2019.

(4) Reconhecimento da saída de portas lógicas

Tabela 75 – Pergunta 4

Nível de dificuldade	Número de alunos
Muito fácil	0
Fácil	4
Médio	19
Difícil	5
Muito difícil	0
Não respondeu	1
Total	28

Fonte – O autor, 2019.

(5) Possibilidade de redução do circuito à circuitos mais simples

Tabela 76 – Pergunta 5

Nível de dificuldade	Número de alunos
Muito fácil	5
Fácil	20
Médio	1
Difícil	3
Muito difícil	0
Total	28

Fonte – O autor, 2019.

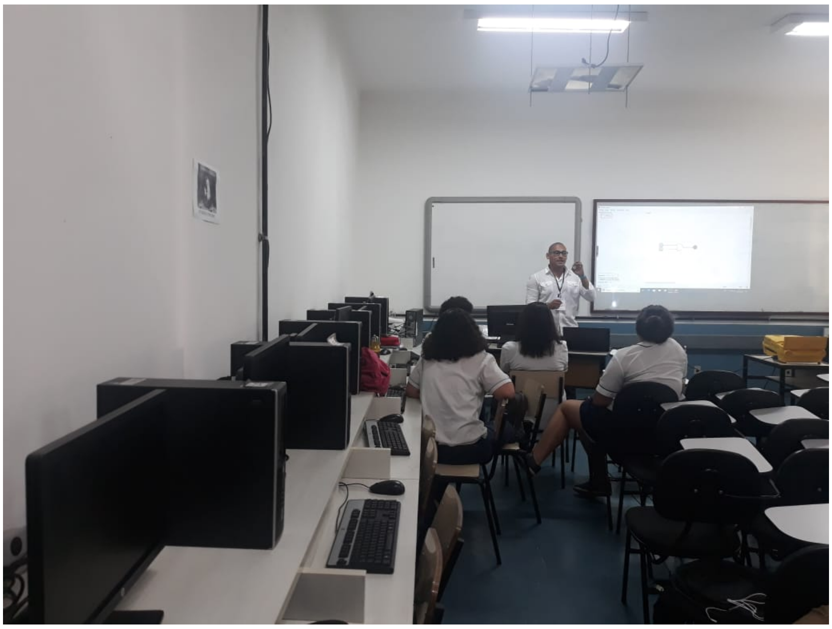
(6) Associação com funções booleanas: Como os alunos foram introduzidos ao conteúdo através das oficinas, todos escreveram não ter tido conhecimento do tema na justificativa, após terem assinalado **não observado**.

(7) **Observações mais relevantes**: A matéria teria sido muito mais assimilada caso tivesse sido dada no formato dessas atividades.

Figura 63 – FESTMAT CP2

Fonte – Cartaz FESTMAT

Figura 64 – Apresentação da oficina no FESTMAT



Fonte – O autor, 2019.

Figura 65 – Apresentação da oficina no FESTMAT

Fonte – O autor, 2019.

Figura 66 – Apresentação da oficina no FESTMAT

Fonte – O autor, 2019.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Num primeiro momento foi pensado em escrever um trabalho que contribuísse para o ensino e aprendizagem da lógica matemática no ensino médio de uma maneira diferente da abordada tradicionalmente, porém após uma detalhada revisão bibliográfica nas tradicionais bases de dados que guardam os textos e produções acadêmicas na área, encontra-se um certo numero de materiais muito criativos e interessantes, porém o que embasa o desenvolvimento didático do conteúdo proposto ao estudo desta pesquisa era sempre o mesmo ou com o mesmo pano de fundo.

A procura de uma atitude não passiva do aluno frente ao desenvolvimento e a aprendizagem do tema incentivou a busca de uma metodologia ativa que proporcionasse estabelecer conexão entre diversas áreas do conhecimento humano. Assim, as estruturas algébricas, a Física, a eletrônica digital, a lógica de primeira ordem, a álgebra booleana, a história de matemática e porque não as artes/design em momentos de delinear um circuito, estiveram presentes neste trabalho. Este enlace, ilustra e caracteriza bem as potencialidades da metodologia STEM para salas de aula da educação básica.

O movimento STEM contribuiu bastante para a realização desta pesquisa. Na verdade, é uma agregação de metedologias e apropriações de saberes e pensares próprios de cada área do conhecimento citadas para promover o desenvolvimento intelectual-científico, ético, social, estético e político dos alunos na modernidade em que vivem.

O estudo dos conectivos básicos e da lógica básica de primeira ordem voltados para esta proposta atingiram os objetivos esperados e todas as atividades propostas foram pensadas num crescente nível de dificuldade, além de dialogar diretamente com o referencial teórico escolhido. Tal fato ocorreu tanto em relação ao referencial que sustentou a lógica matemática quanto aos aspectos algébricos que sustentam matematicamente a teoria, a história da matemática e a eletrônica digital. Esta vista aqui, como a grande cereja do bolo.

Como as atividades foram desenvolvidas e aplicadas para um grupo de alunos que cursam um ensino médio técnico em informática, tanto nos encontros presenciais quanto nos retornos de suas impressões pessoais (através das auto avaliações e nas atividades mais complexas apresentadas no Festival da Matemática do Colégio Pedro II), os alunos sinalizaram grande ganho de aprendizagem. Alunos repetentes (02) ou alunos em cursos mais avançados (09) chegaram afirmar que a compreensão concreta do tema só se deu a partir da experimentação em laboratório, o que ratificou o que foi hipótese deste trabalho.

Dos 29 alunos deste ensino médio técnico em informática participantes das oficinas, cerca de 78 % desejam continuar seus estudos na área. Indecisos ainda sobre qual carreira específica, mas todos flutuando entre Informática, Ciência da Computação ou Engenharia de Sistemas e Computação, os alunos viram nas atividades a possibilidade de expandirem conhecimento e não verem o tema como um amontoado de tabelas ou mesmo de procedimentos que precisam ser decorados.

A compilação destas avaliações incentivou a procura e a análise das grades curriculares destes cursos de graduação citados. Os alvos foram as instituições públicas no município do Rio de Janeiro e sua região metropolitana, uma vez que nenhum aluno sinalizou desejo em cursar o nível superior fora desta área. Todos os cursos das instituições estudadas (UFRJ, UERJ, UFF, CEFET, UNIRIO e UFRRJ) possuem a disciplina Lógica Matemática ou Circuitos Lógicos ou Lógica ou Álgebra Booleana em seus cursos, fato este que ratifica a importância de dar uma significação mais concreta a esta aprendizagem no ensino médio, principalmente se levarmos em consideração a complexidade do tema e os aspectos cognitivos que caracterizam adolescentes e jovens adultos que são expostos ao tema ainda na educação básica.

Espera-se com este trabalho incentivar os professores da área e aos professores de matemática que têm a oportunidade de desenvolver em sala de aula este assunto. Deseja-se que a produção de outros tantos materiais embasados na metodologia STEM a fim de que o aluno se aproprie deste conhecimento de maneira mais significativa sejam propostos, que as temáticas sejam incentivadoras para a procura de soluções em grupo e para o desenvolvimento de projetos que permitam dar acima de tudo autonomia para o aluno e desenvolver plenamente sua criticidade, a partir de diferentes olhares que este aluno adquirirá frente a uma mesma temática.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, E. de F. **Iniciação à Lógica Matemática**. 3. ed. São Paulo: Nobel, 2011.

BRIGHENTI, J.; BIAVATTI, V. T.; SOUZA, T. R. de. Medodologias de ensino-aprendizagem: uma abordagem sob a percepção dos alunos. **Revista Gestão Universitária na América Latina**, Florianópolis, v. 8, n. 3, p. 281–304, set. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/gual/article/view/34582>. Acesso em: 27 ago 2019.

CAPUANO, F. G. **Sistemas Digitais: circuitos combinacional e sequenciais**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2014.

DAGHLIAN, J. **Lógica e Álgebra de Boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2006.

EDUCAÇÃO. **Competências STEM: a nova fronteira do ensino e da aprendizagem**. 2019. Disponível em: <https://desafiosdaeducacao.grupoa.com.br/competencias-stem-a-nova-fronteira-do-ensino/>. Acesso em: 10 abr 2019.

EDUCANDO. **Stem Brasil: Inovação para as Escolas Públicas**. 2019. Disponível em: <https://educando.org/stembrasil/>. Acesso em: 27 abr 2019.

FREIRE, J. F.; LEMOS, J. F. de. Imperativos de conduta juvenil no século xxi: a "geração digital" na mídia impressa brasileira. **Comunicação, mídia e consumo**, São Paulo, v. 5, n. 13, p. 11–25, jul. 2008. Disponível em: <http://revistacmc.espm.br/index.php/revistacmc/article/view/124/125>. Acesso em: 10 ago 2019.

GERSTING;, J. L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um tratamento moderno de matemática discreta**. 5. ed. Rio de Janeiro: Tradução: Valéria de Magalhães Iório - LTC, 2010.

GÜNTZEL, J. L.; NASCIMENTO, F. A. do. Álgebra booleana e circuitos lógicos. **Universidadee Federal de Santa Catarina**, Santa Catarina, v. 1, n. 2, p. 2–41, mar. 2001. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~j.guntzel/isd/isd.html>. Acesso em: 20 out 2019.

IEZZI, C. M. G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos e funções**. 9. ed. São Paulo: LTC, 2013.

LEGO®EDUCATION. 2019. Disponível em: <https://tecnologia.educacional.com.br/project/lego-education/>. Acesso em: 5 maio 2019.

LIMA, V. V. Espiral construtivista: uma metodologia ativa de ensino-aprendizagem. **Interface (Botucatu)**, São Paulo, v. 21, n. 61, p. 421–434, out. 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1414-32832017000200421&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 5 out 2019.

LOPES, T. B. et al. Atividades de campo e steam: possíveis interações na construção de conhecimento em visita ao parque mãe bonifácia em cuiabá-mt. **Reviata Reamec**, Cuiabá, v. 5, n. 2, p. 1–20, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/5739>. Acesso em: 20 set 2019.

PARK, N.; KO, Y. Métodos de ensino-aprendizagem da educação por computador usando linguagem de programação educacional baseada na educação steam. **Conferência Internacional IFIP sobre Redes e Computação Paralela**, v. 7513, n. 1, p. 320–327, jul./dez. 2012. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-35606-3_38>. Acesso em: 17 out 2019.

PIMENTA, T. C. **Circuitos Digitais: análise e síntese lógica: aplicações em FGPA**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

PUGLIESE, G. O. **Os Modelos Pedagógicos de Ensino de Ciências em Dois Programas Educacionais Baseados em STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). 2017.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2017.

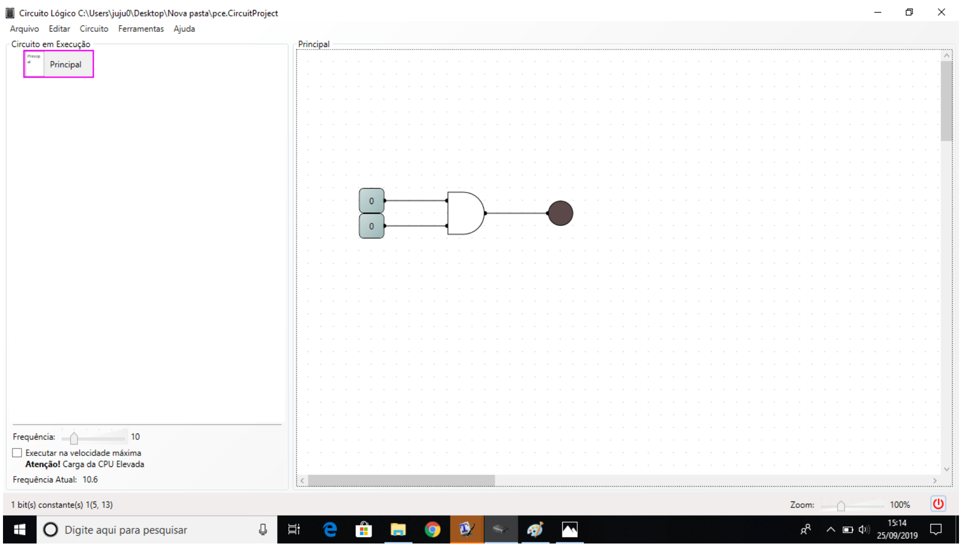
SILVA, P. da. **Uso do Programa STEM como Alternativa de Aprendizagem para Alunos de 9º Ano em Escola Pública e Privada da Rede de Ensino de Joinville - Santa Catarina**. 2017. Artigo (Especialização) - Universidade Federal de Santa Catarina, programa de especialização em Ciência e Tecnologia, Joinville, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/182217?show=full>. Acesso em: 20 out 2019.

APÊNDICE A – GABARITO DA ATIVIDADE 1

Resultados da simulação do circuito.

(a) Linha 1: 0 . 0 = 0

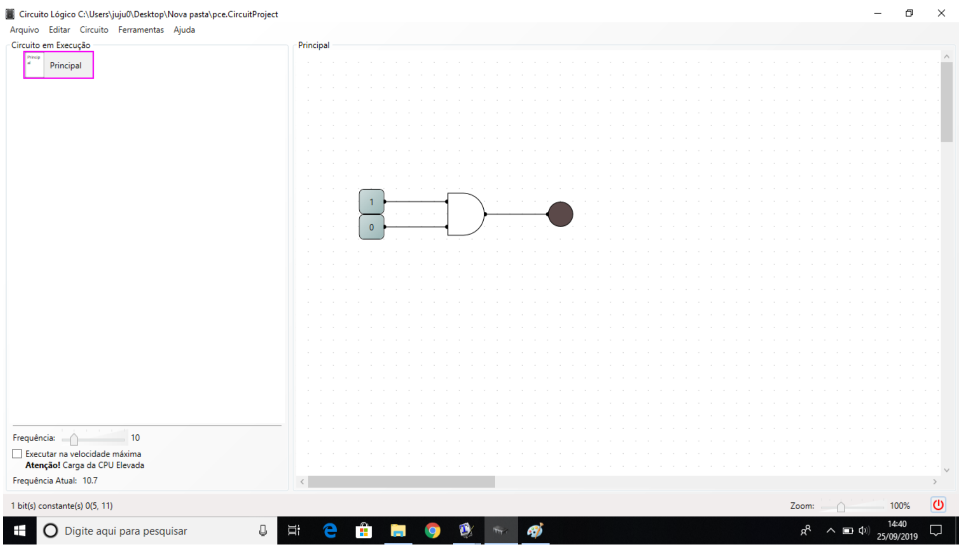
Figura 67 – Resultado simulação atividade 1: linha 1



Fonte – O autor, 2019

(b) Linha 2: 0 . 1 = 0

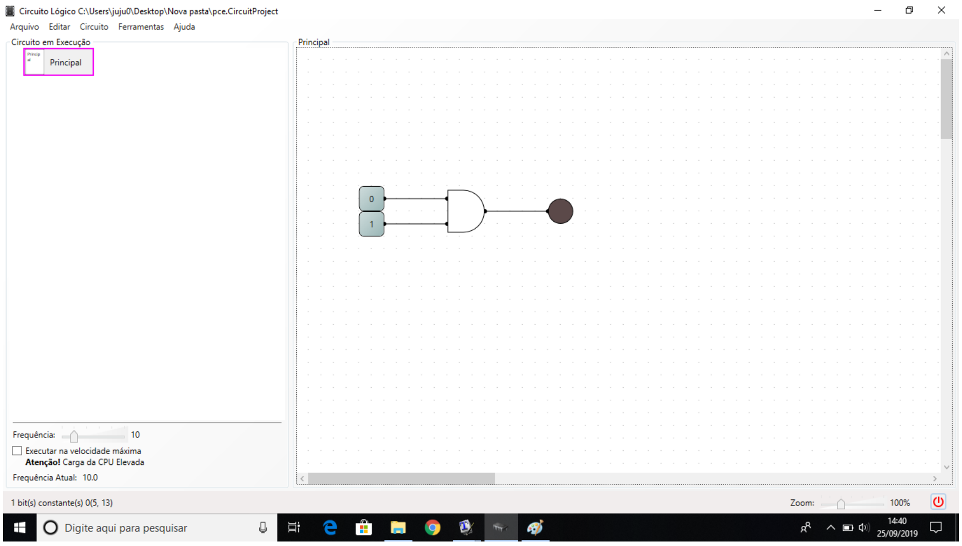
Figura 68 – Resultado simulação atividade 1: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 1 . 0 = 0

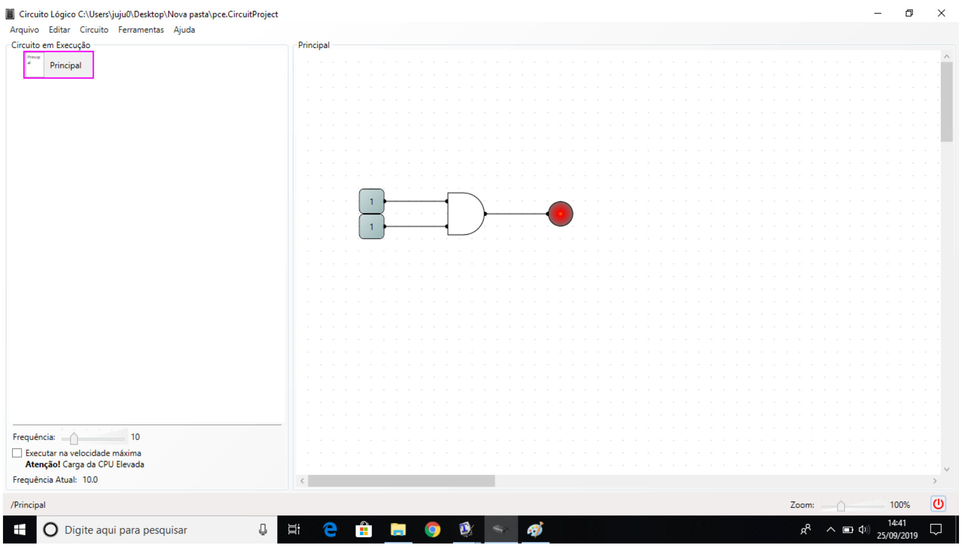
Figura 69 – Resultado simulação atividade 1: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 1 . 1 = 1

Figura 70 – Resultado simulação atividade 1: linha 4



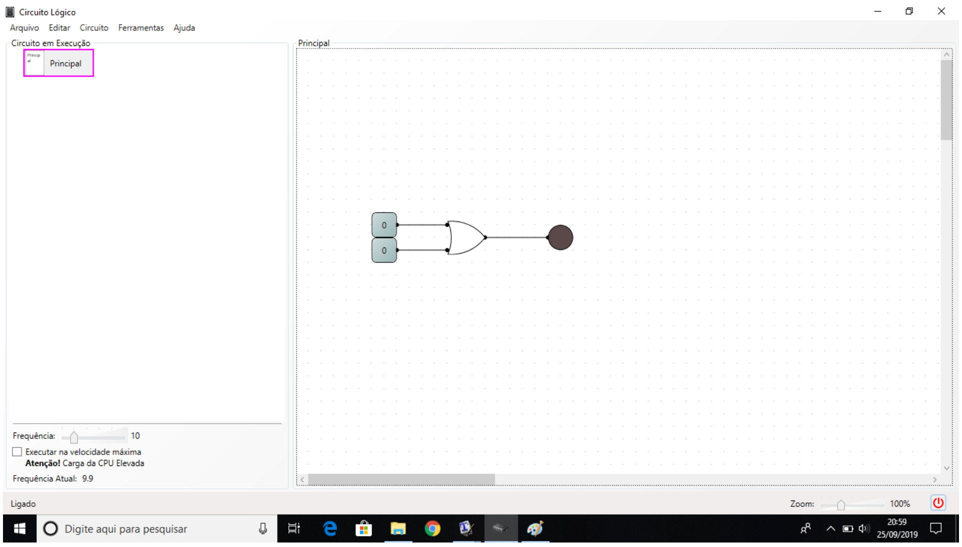
Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE B – GABARITO DA ATIVIDADE 2

Resultados da simulação do circuito.

(a) Linha 1: 0 + 0 = 0

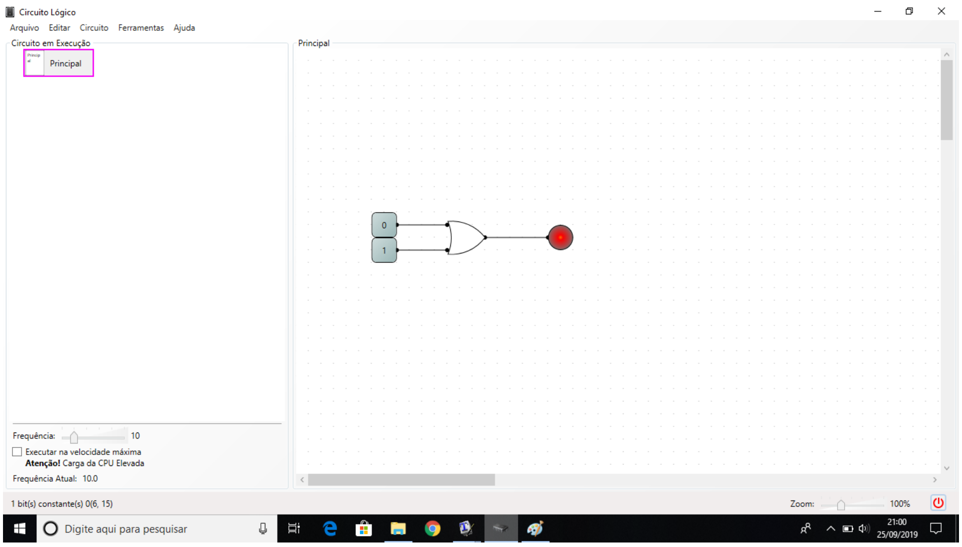
Figura 71 – Resultado simulação atividade 2: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

(b) Linha 2: 0 + 1 = 1

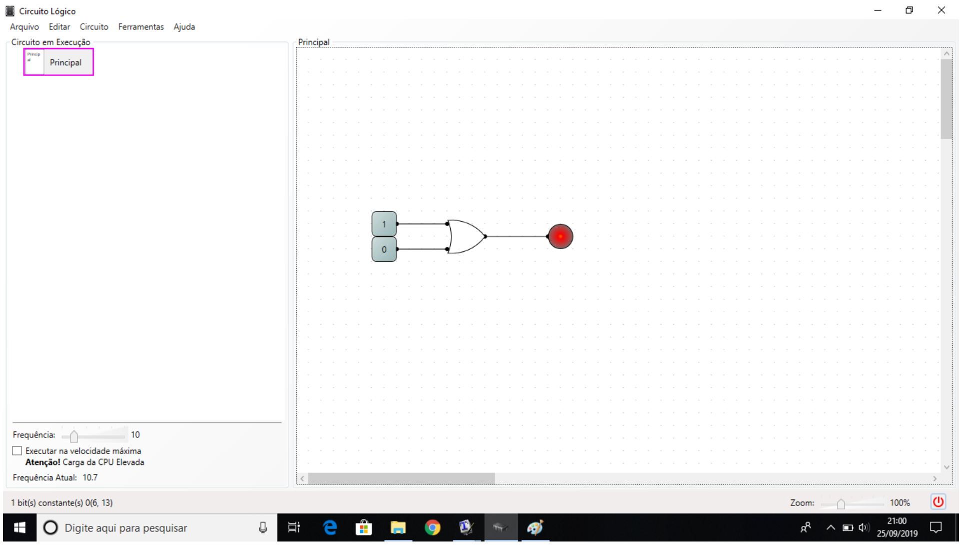
Figura 72 – Resultado simulação atividade 2: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 1+ 0 = 1

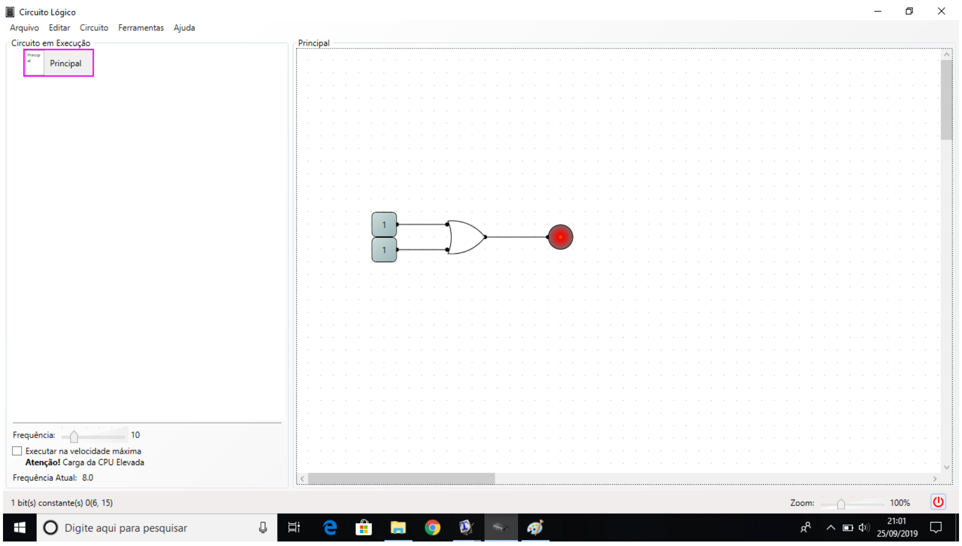
Figura 73 – Resultado simulação atividade 2: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 1 + 1 = 1

Figura 74 – Resultado simulação atividade 2: linha 4



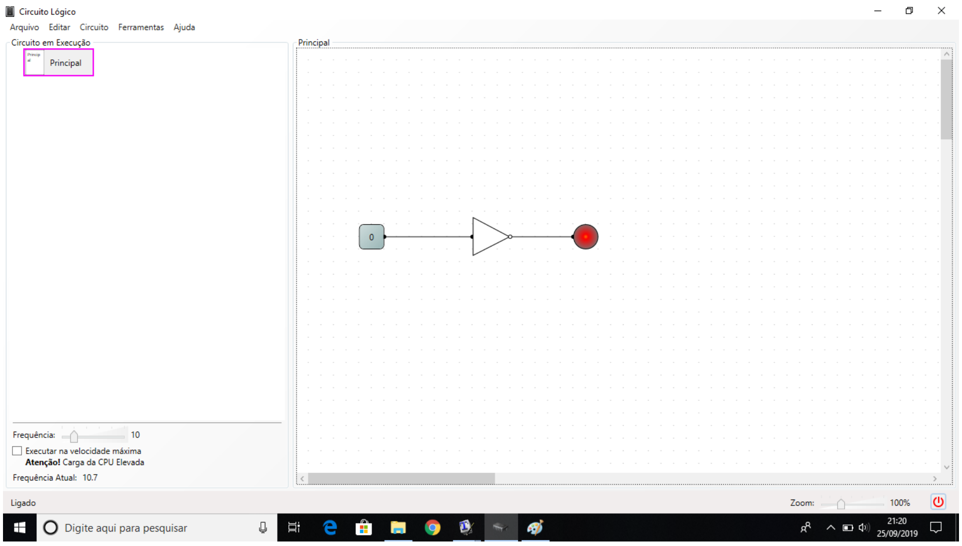
Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE C – GABARITO DA ATIVIDADE 3

Resultados da simulação do circuito.

(a) Linha 1: 0' = 1

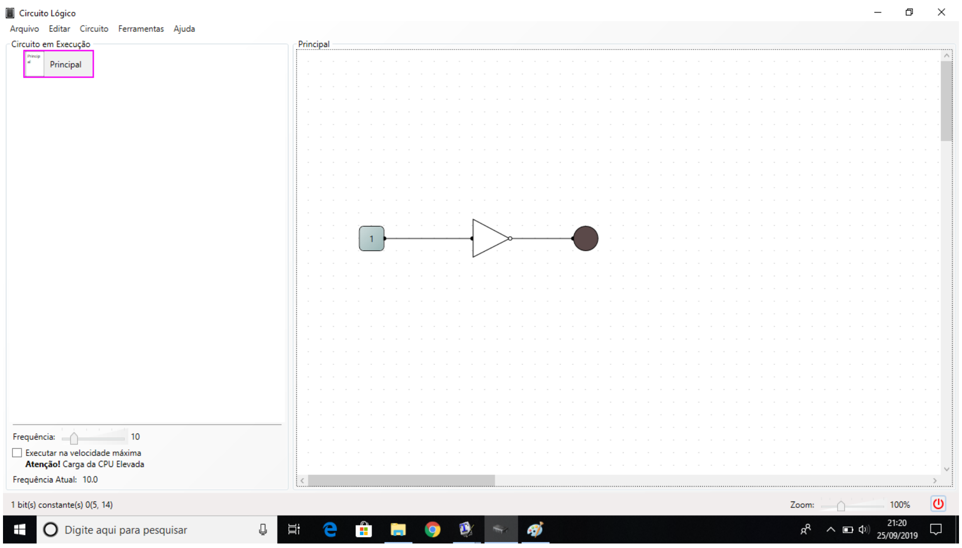
Figura 75 – Resultado simulação atividade 3: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

(b) Linha 2: 1' = 0

Figura 76 – Resultado simulação atividade 3: linha 2



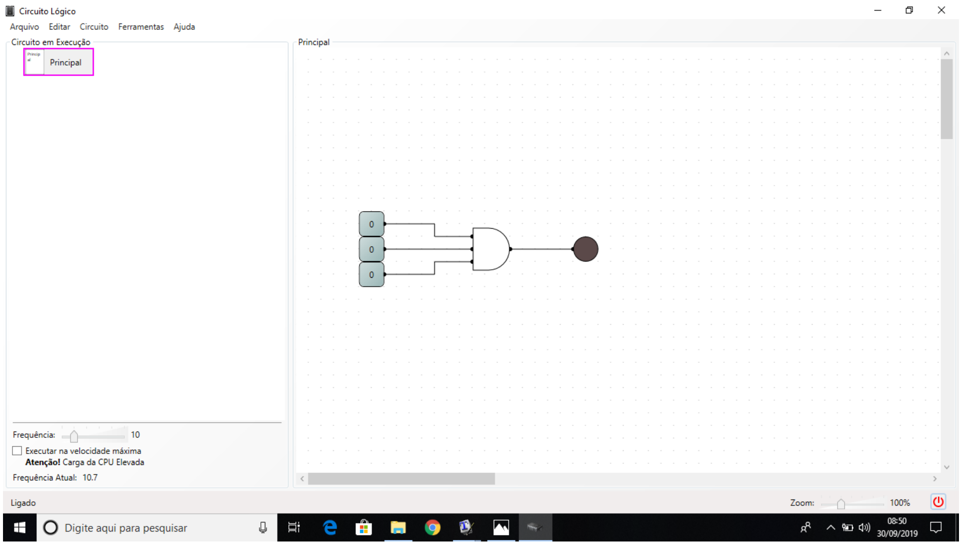
Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE D – GABARITO DA ATIVIDADE 4

1. Resultados da simulação do circuito.

   (a) Linha 1: 0 . 0 . 0 = 0

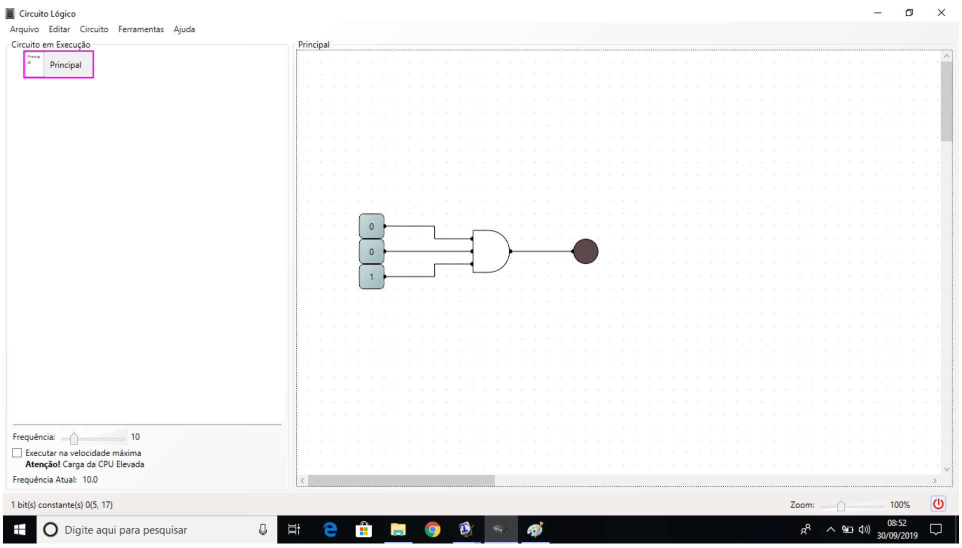
Figura 77 – Resultado simulação atividade 4: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

   (b) Linha 2: 0 . 0 . 1 = 0

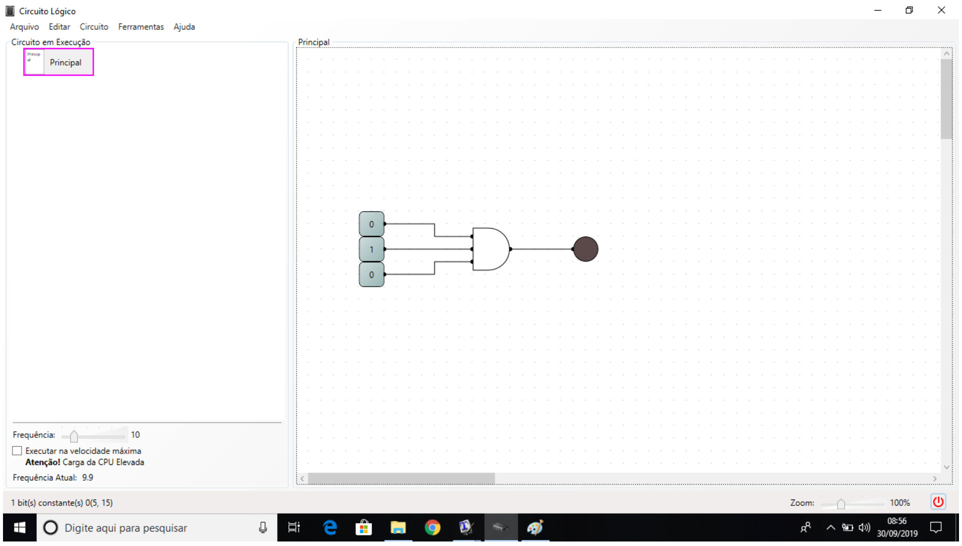
Figura 78 – Resultado simulação atividade 4: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 0 . 1 . 0 = 0

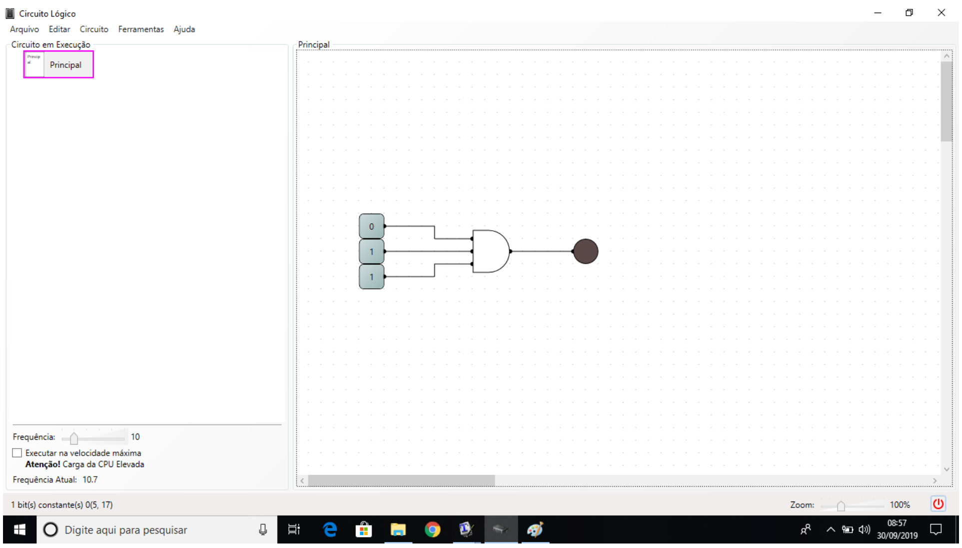
Figura 79 – Resultado simulação atividade 4: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 0 . 1 . 1 = 0

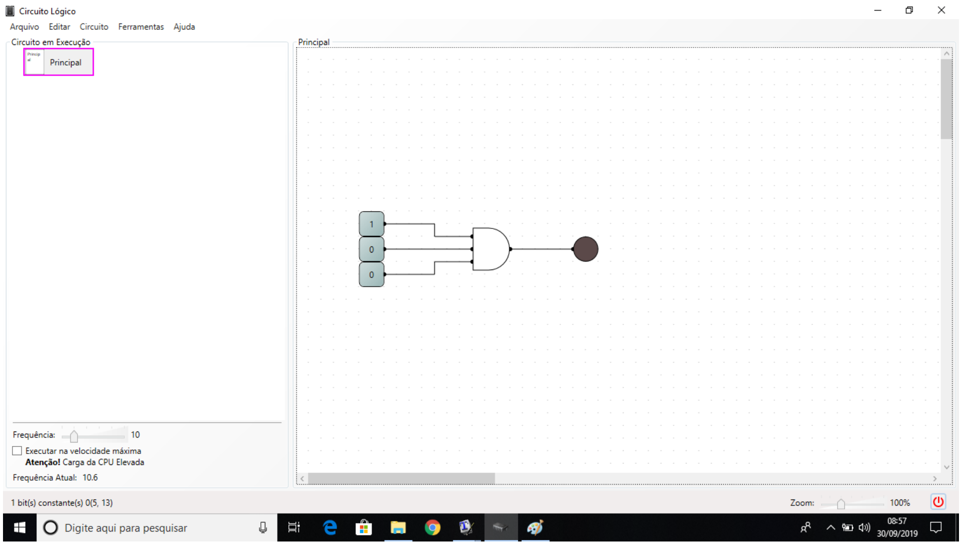
Figura 80 – Resultado simulação atividade 4: linha 4



Fonte – O autor, 2019.

(e) Linha 5: 1 . 0 . 0 = 0

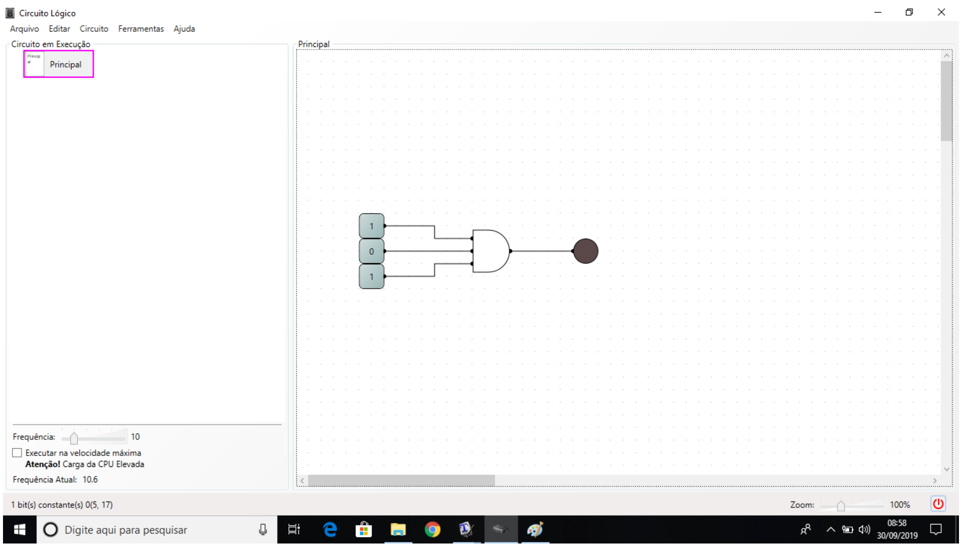
Figura 81 – Resultado simulação atividade 4: linha 5



Fonte – O autor, 2019.

(f) Linha 6: 1 . 0 . 1 = 0

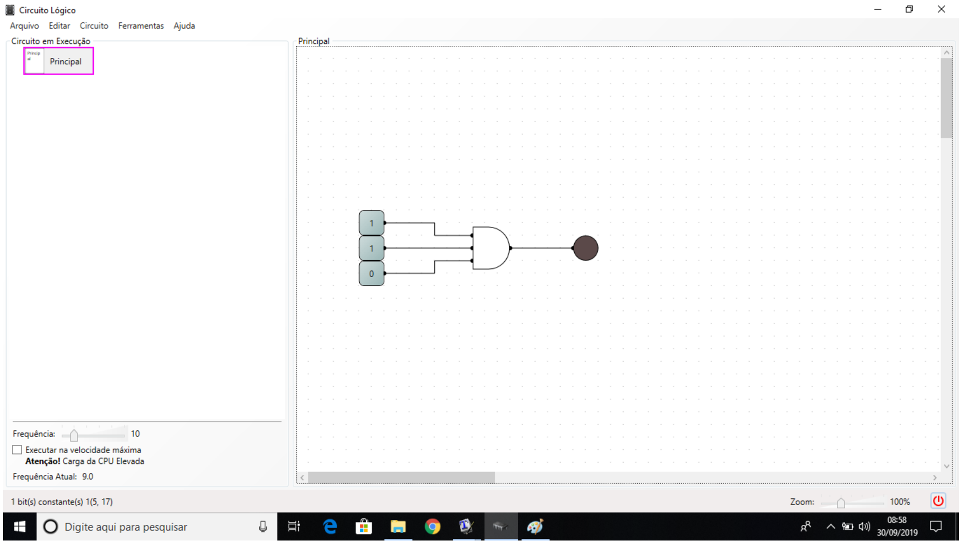
Figura 82 – Resultado simulação atividade 4: linha 6



Fonte – O autor, 2019.

(g) Linha 7: 1 . 1 . 0 = 0

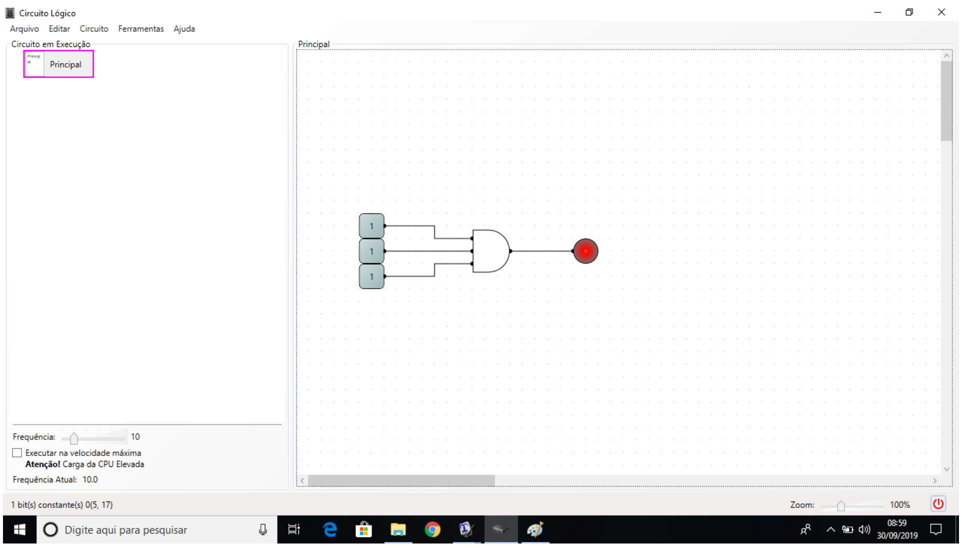
Figura 83 – Resultado simulação atividade 4: linha 7



Fonte – O autor, 2019.

(h) Linha 8: 1 . 1 . 1 = 1

Figura 84 – Resultado simulação atividade 4: linha 8



Fonte – O autor, 2019.

2. Tabela-verdade para a proposição $a \wedge (b \wedge c)$.

Tabela 77 – $a \wedge (b \wedge c)$

a	b	c	$b \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

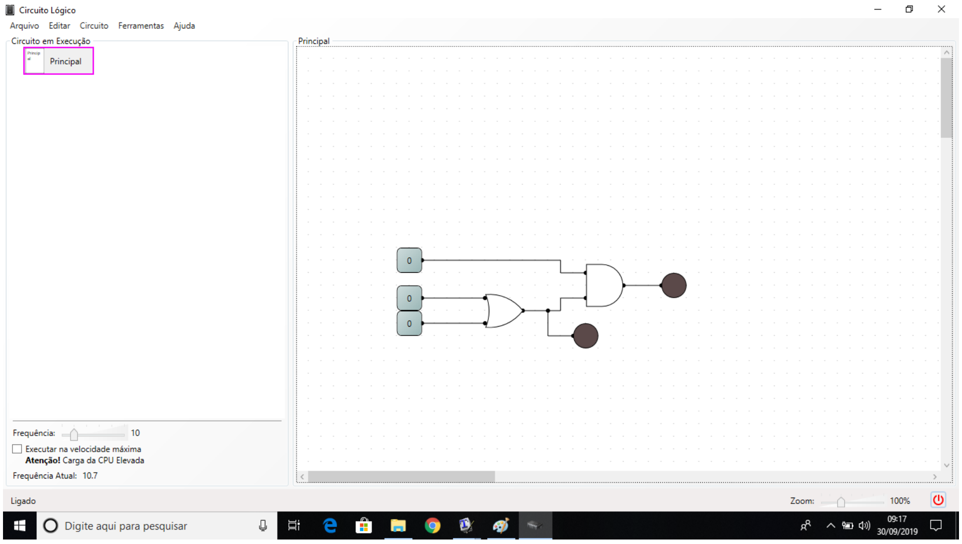
Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE E – GABARITO DA ATIVIDADE 5

1. Resultados da simulação do circuito.

   (a) Linha 1: 0 . (0 + 0) = 0

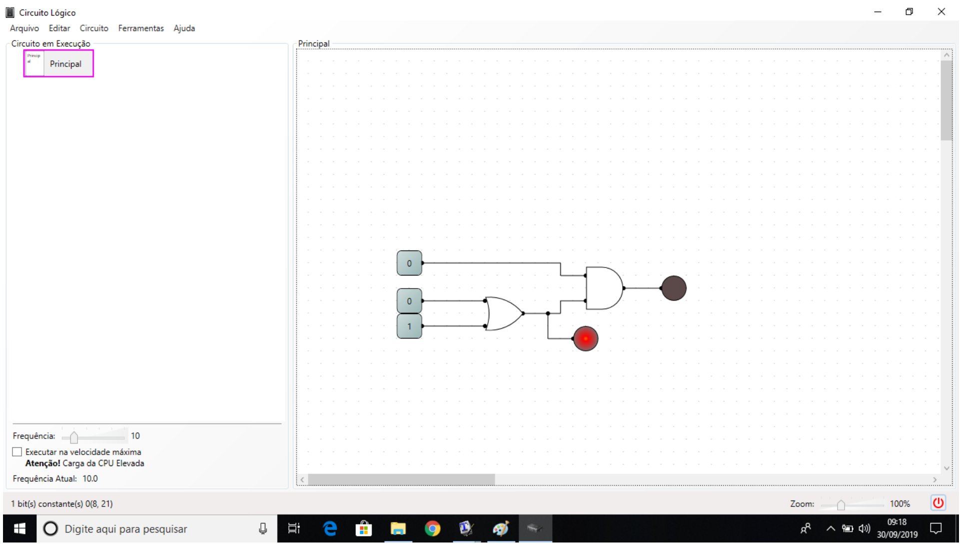
Figura 85 – Resultado simulação atividade 5: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

   (b) Linha 2: 0 . (0 + 1) = 0

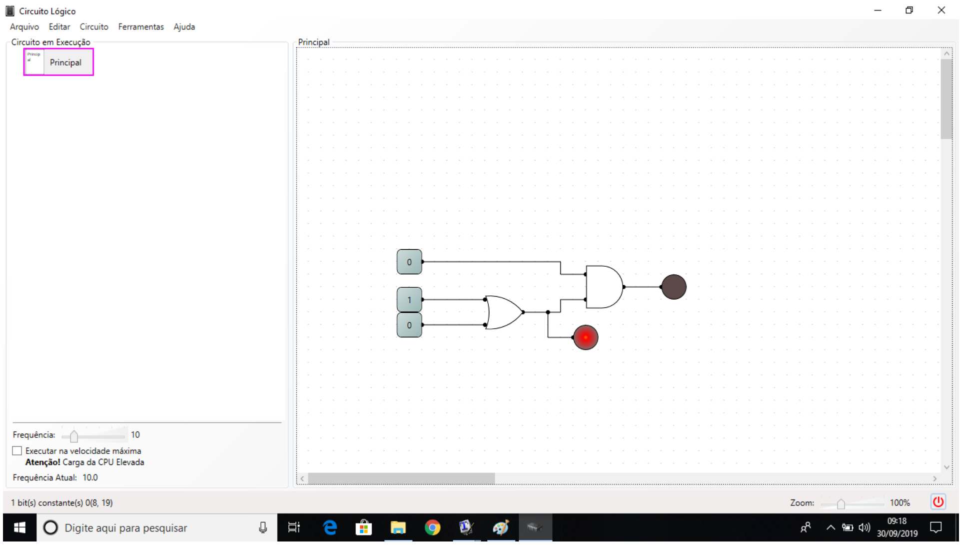
Figura 86 – Resultado simulação atividade 5: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 0 . (1 + 0) = 0

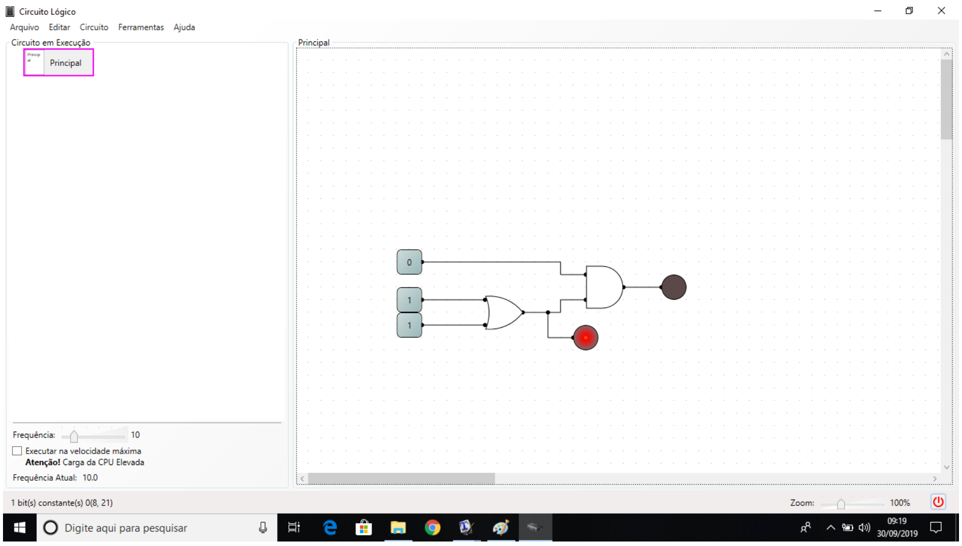
Figura 87 – Resultado simulação atividade 5: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 0 . (1 + 1) = 0

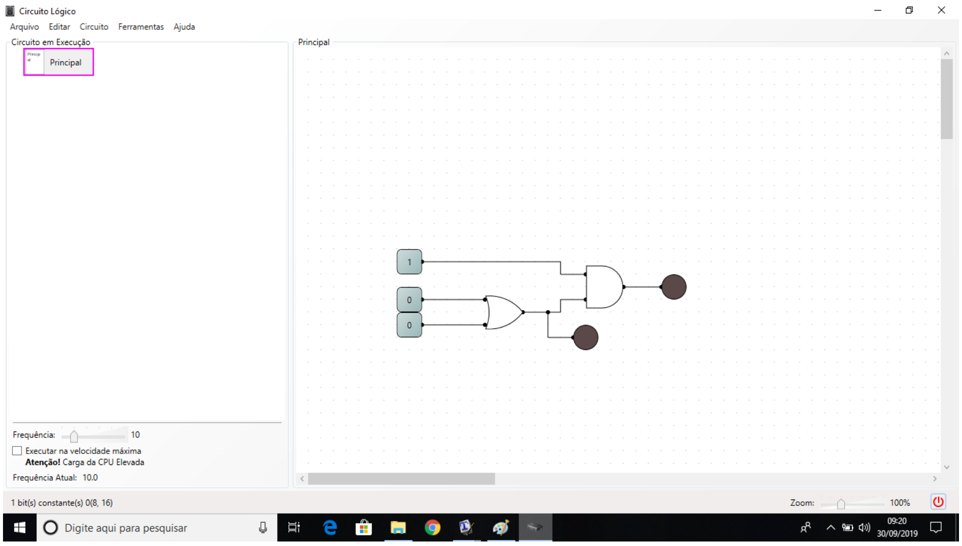
Figura 88 – Resultado simulação atividade 5: linha 4



Fonte – O autor, 2019.

(e) Linha 5: 1 . (0 + 0) = 0

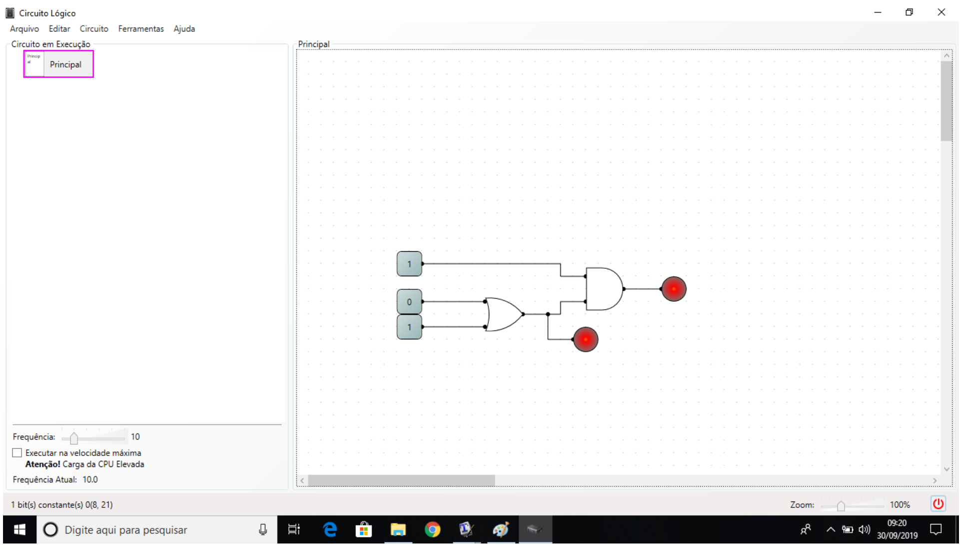
Figura 89 – Resultado simulação atividade 5: linha 5



Fonte – O autor, 2019.

(f) Linha 6: $1\ .\ (0 + 1) = 1$

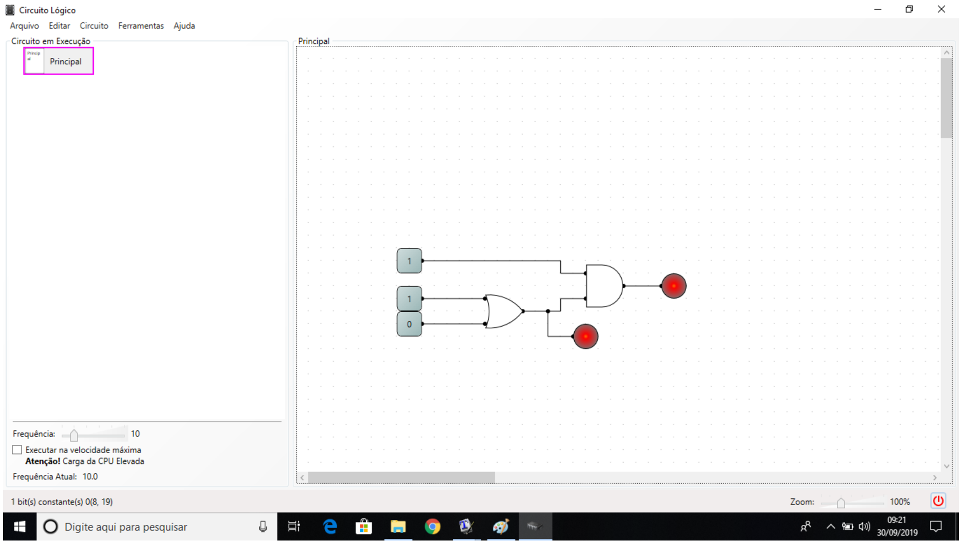
Figura 90 – Resultado simulação atividade 5: linha 6



Fonte – O autor, 2019.

(g) Linha 7: $1\ .\ (1 + 0) = 1$

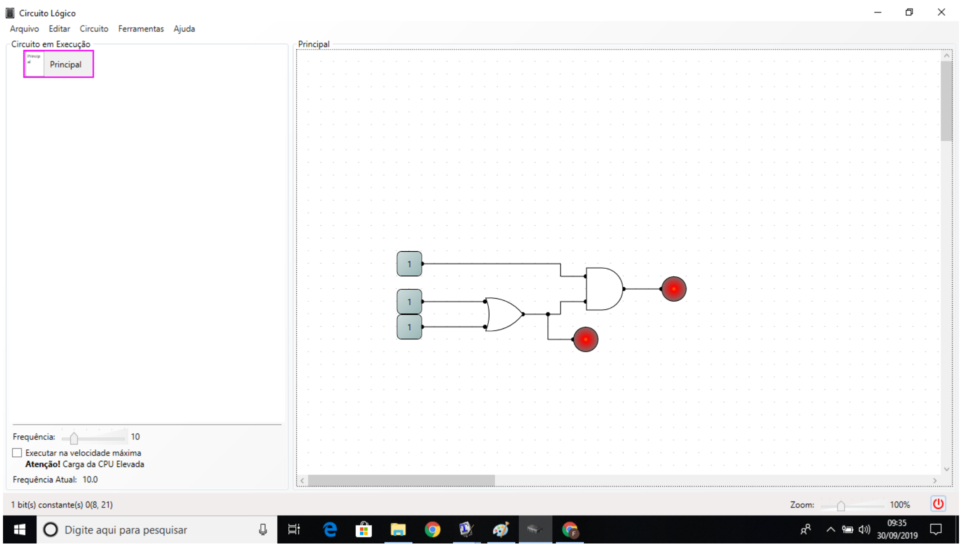
Figura 91 – Resultado simulação atividade 5: linha 7



Fonte – O autor, 2019.

(h) Linha 8: 1 . (1 + 1) = 1

Figura 92 – Resultado simulação atividade 5: linha 8



Fonte – O autor, 2019.

2. Tabela-verdade para a expressão: $a \cdot (b + c)$.

Tabela 78 – $a \cdot (b + c)$

a	b	c	$b + c$	$a \cdot (b + c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019

3. Tabela-verdade para a proposição: $a \wedge (b \vee c)$.

Tabela 79 – $a \wedge (b \vee c)$

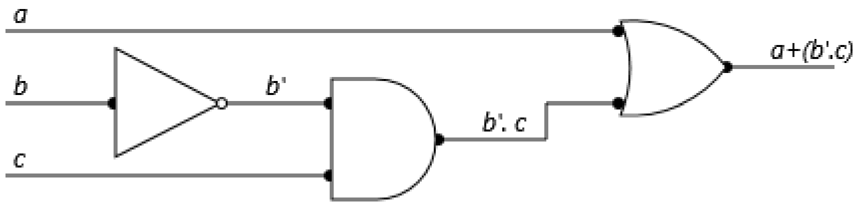
a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Fonte – O autor, 2019

APÊNDICE F – GABARITO DA ATIVIDADE 6

1. Determinação da expressão booleana do circuito dado.

Figura 93 – Circuito atividade 6



Fonte – O autor, 2019.

2. Tabela-verdade para expressão booleana: $a + (b' \cdot c)$.

Tabela 80 – $a + (b' \cdot c)$

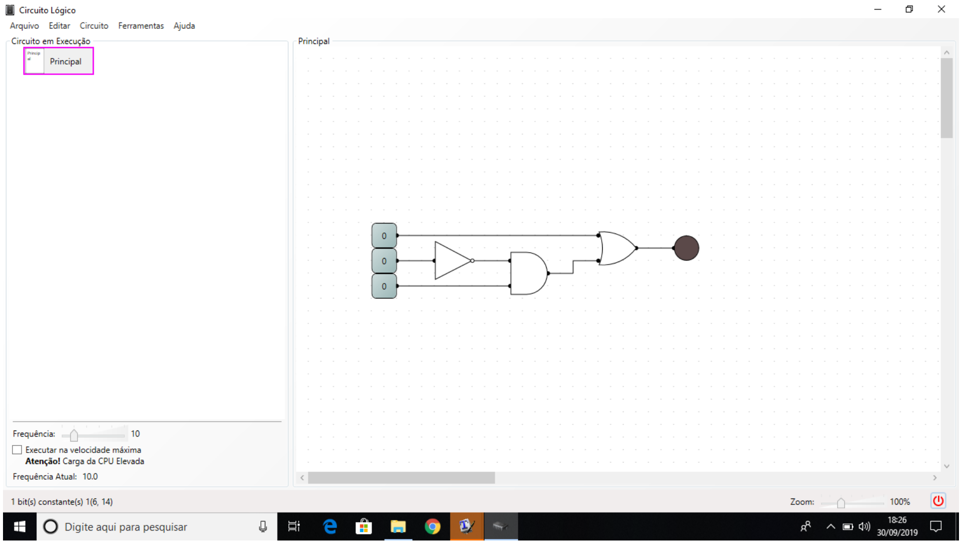
a	b	c	b'	$b' \cdot c$	$a + (b' \cdot c)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Fonte – O autor, 2019.

3. Resultados da simulação do circuito.

   (a) Linha 1: 0 + (0’ . 0) = 0

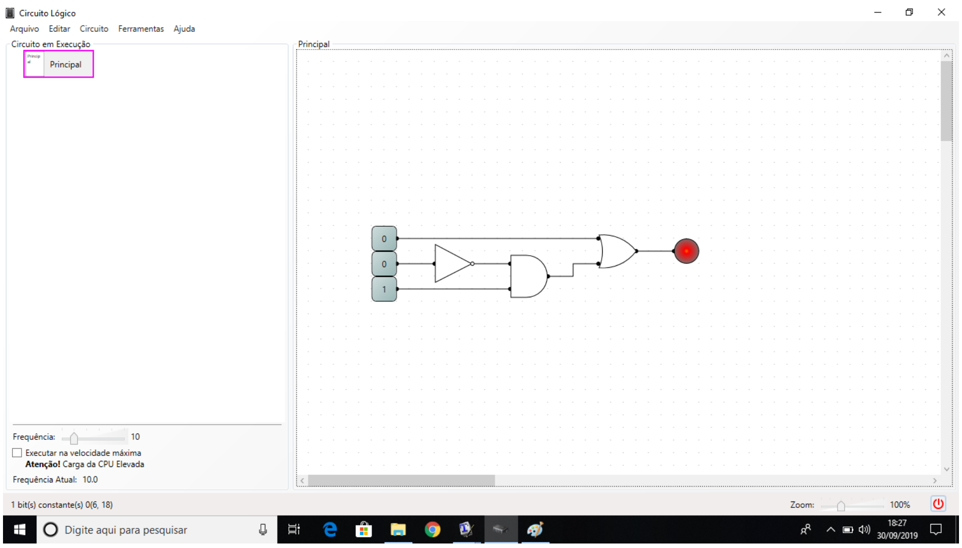
Figura 94 – Resultado simulação atividade 6: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

(b) Linha 2: 0 + (0’ . 1) = 0

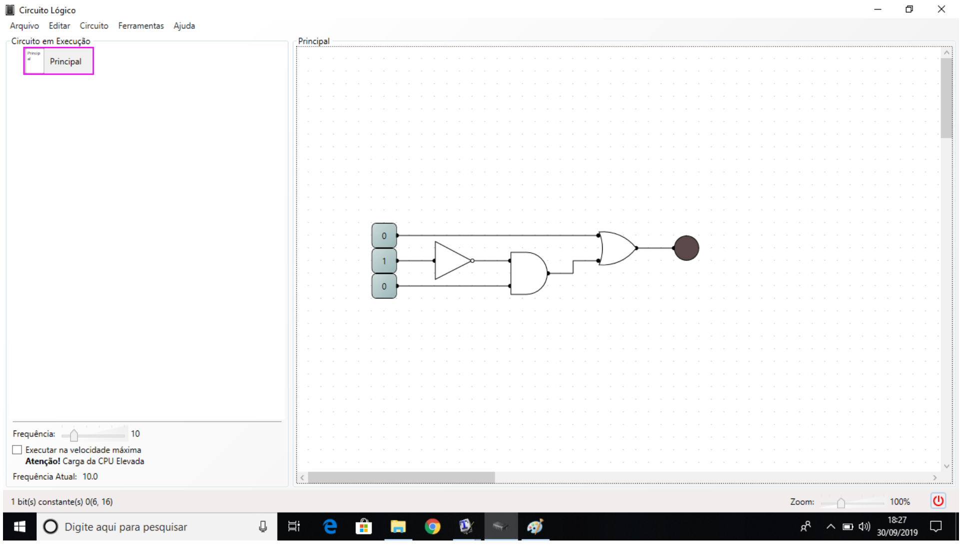
Figura 95 – Resultado simulação atividade 6: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 0 + (1’ . 0) = 1

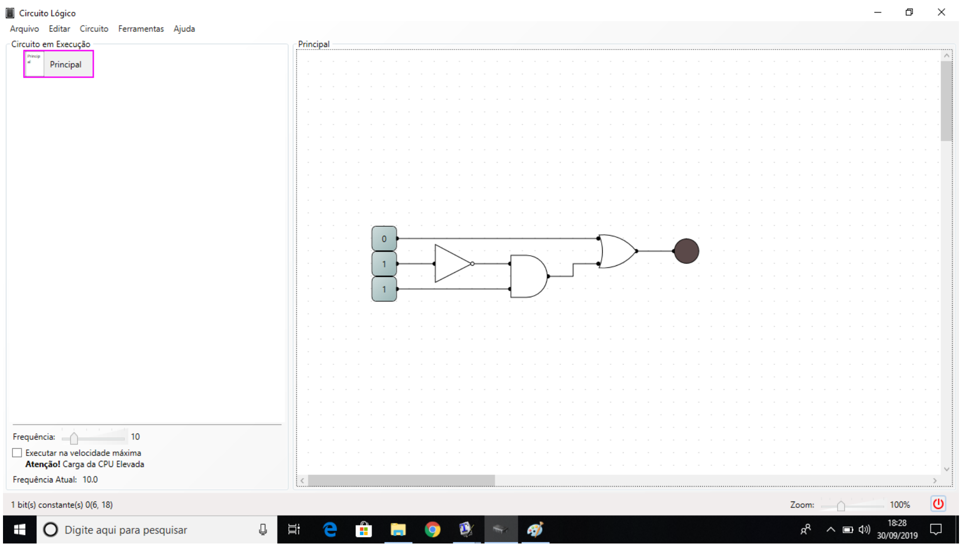
Figura 96 – Resultado simulação atividade 6: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 0 + (1' . 1) = 0

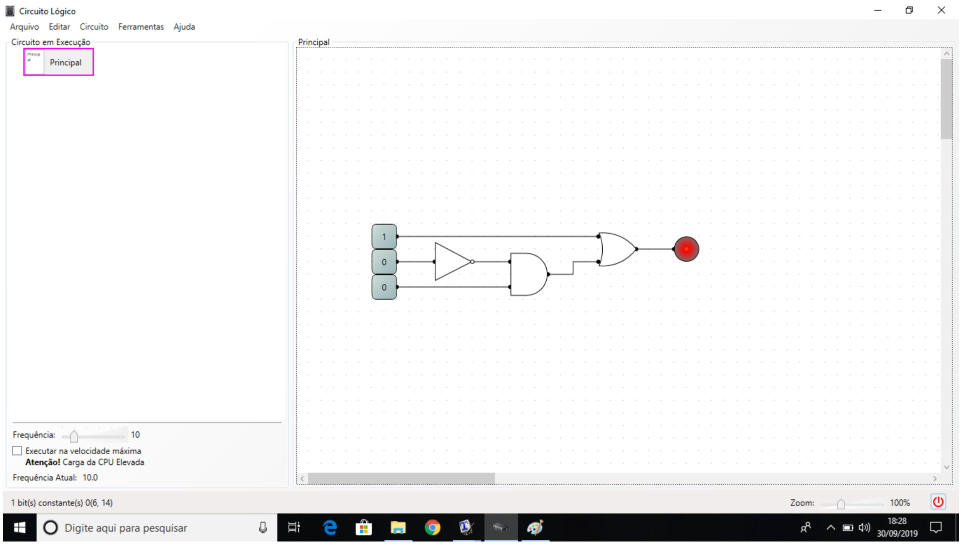
Figura 97 – Resultado simulação atividade 6: linha 4



Fonte – O autor, 2019.

(e) Linha 5: 1 + (0' . 0) = 1

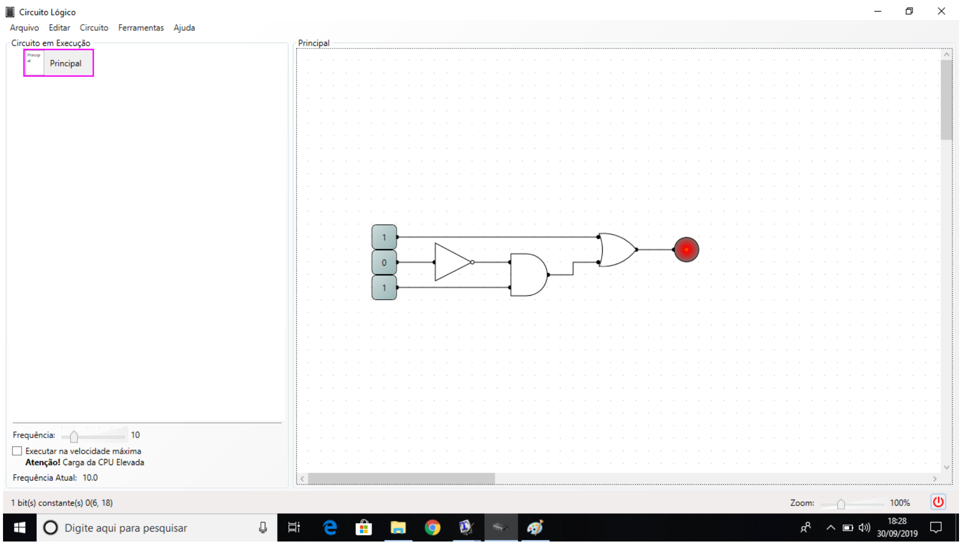
Figura 98 – Resultado simulação atividade 6: linha 5



Fonte – O autor, 2019.

(f) Linha 6: 1 + (0' . 1) = 1

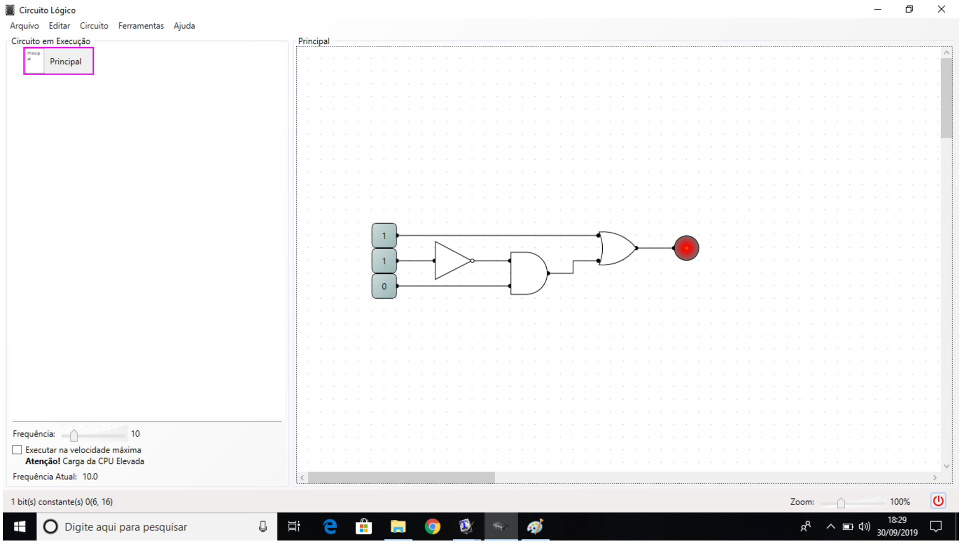
Figura 99 – Resultado simulação atividade 6: linha 6



Fonte – O autor, 2019.

(g) Linha 7: 1 + (1' . 0) = 1

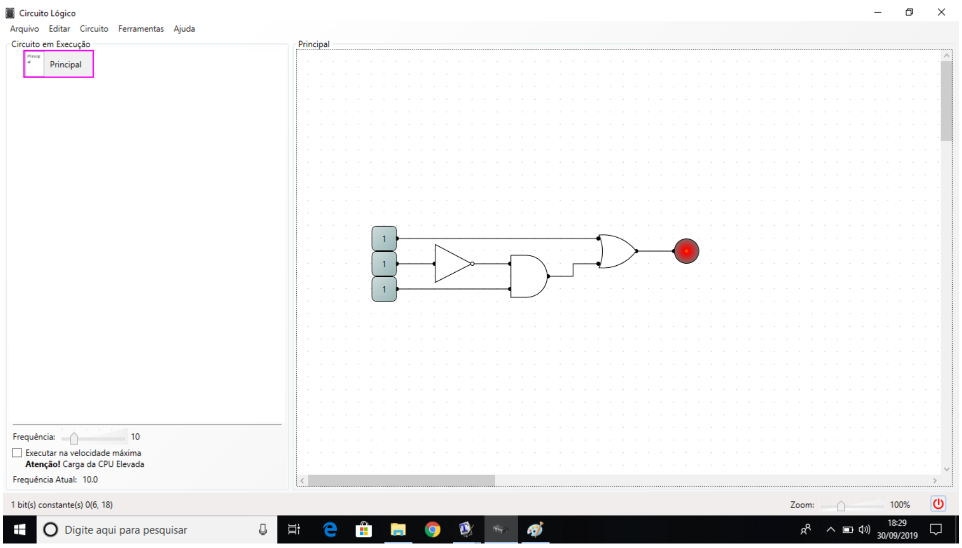
Figura 100 – Resultado simulação atividade 6: linha 7



Fonte – O autor, 2019.

(h) Linha 8: 1 + (1’ . 1) = 1

Figura 101 – Resultado simulação atividade 6: linha 8



Fonte – O autor, 2019.

4. Tabela-verdade para a proposição: $a \vee (\sim b \wedge c)$.

Tabela 81 – $a \vee (\sim b \wedge c)$

a	b	c	$\sim b$	$\sim b \wedge c$	$a \wedge (\sim b \vee c)$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE G – GABARITO DA ATIVIDADE 7

(a) É uma tautologia.

1- Expressão booleana e tabela-verdade.

Tabela 82 – $a + (b + a')$

a	b	a'	$b + a'$	$a + (b + a')$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Fonte – O autor, 2019.

2- Conversão para lógica proposicional.

Tabela 83 – $a \vee (b \vee \sim a$

a	b	$\sim a$	$b \vee \sim a$	$a \vee (b \vee \sim a)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

(b) É uma contingência.

1- Expressão booleana e tabela-verdade.

Tabela 84 – $a + (a' \cdot b')$

a	b	a'	b'	$a' \cdot b'$	$a + (a' \cdot b')$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Fonte – O autor, 2019.

2- Conversão para lógica proposicional.

Tabela 85 – $a \vee (\sim a \wedge \sim b)$

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \wedge \sim b$	$a \vee (\sim a \wedge \sim b)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Fonte – O autor, 2019.

(c) É uma Contradição.

1- Expressão booleana e tabela-verdade.

Tabela 86 – $a' \cdot (a \cdot b')$

a	b	a'	b'	$a \cdot b'$	$a' \cdot (a \cdot b')$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0

Fonte – O autor, 2019.

2- Conversão para lógica proposicional.

Tabela 87 – $\sim a \wedge (a \wedge \sim b)$

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \wedge \sim b$	$\sim a \wedge (a \wedge \sim b)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE H – GABARITO DA ATIVIDADE 8

1. $p \cdot (q + r)$ e $(p \cdot q) + (p \cdot r)$

2. Tabelas-verdade para as expressões.

Tabela 88 – $p \cdot (q + r)$

p	q	r	$q + r$	$p \cdot (q + r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

Tabela 89 – $(p \cdot q) + (p \cdot r)$

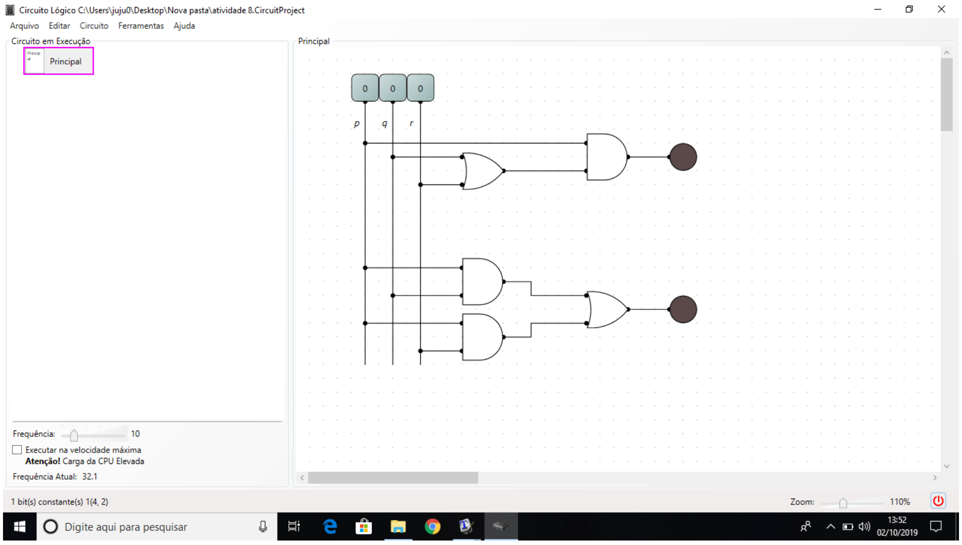
p	q	r	$p \cdot q$	$p \cdot r$	$(p \cdot q) + (p \cdot r)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Fonte – O autor, 2019.

3. Simulação dos circuitos.

   (a) Linha 1: 0 . (0 + 0) = 0 e (0 . 0) + (0 . 0) = 0

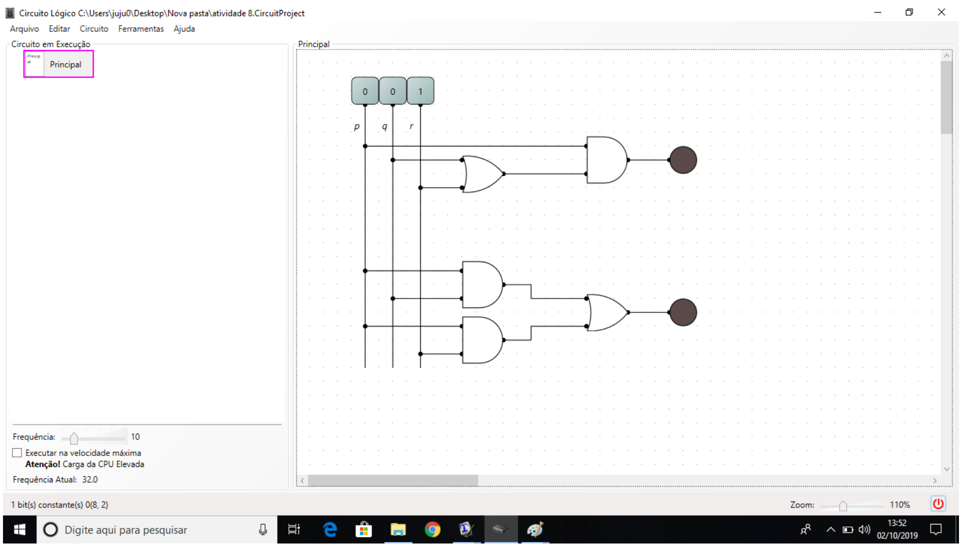
Figura 102 – Resultado simulação atividade 8: linha 1



Fonte – O autor, 2019.

(b) Linha 2: 0 . (0 + 1) = 0 e (0 . 0) + (0 . 1) = 0

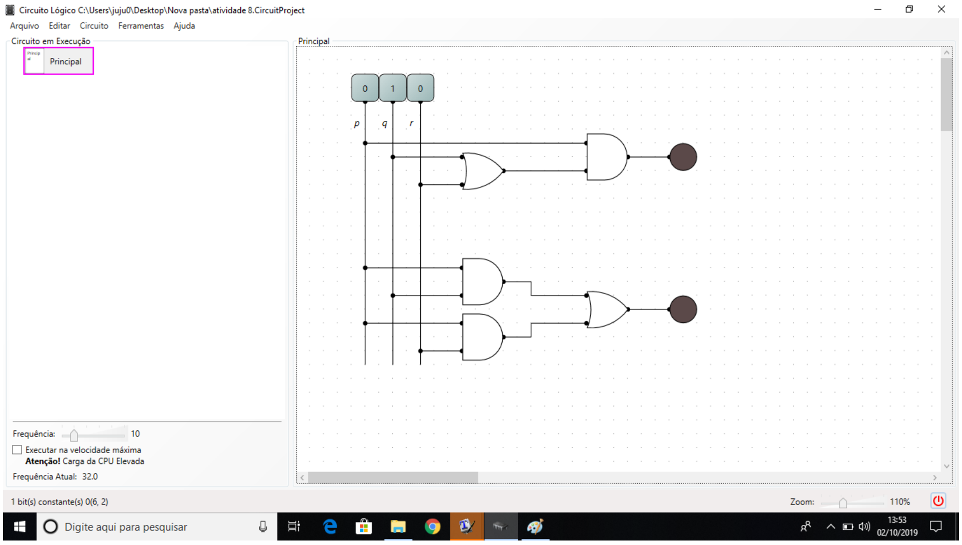
Figura 103 – Resultado simulação atividade 8: linha 2



Fonte – O autor, 2019.

(c) Linha 3: 0 . (1 + 0) = 0 e (0 . 1) + (0 . 0) = 0

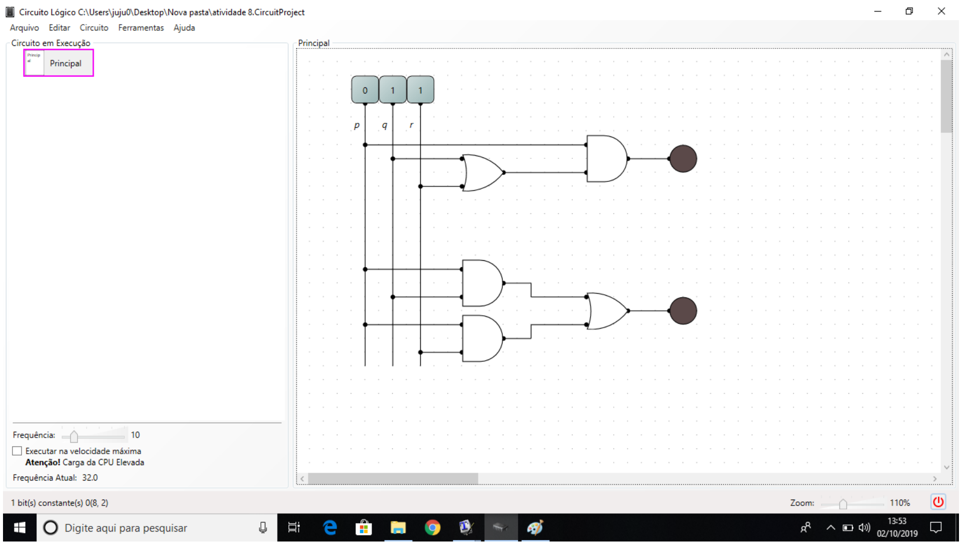
Figura 104 – Resultado simulação atividade 8: linha 3



Fonte – O autor, 2019.

(d) Linha 4: 0 . (1 + 1) = 0 e (0 . 1) + (0 . 1) = 0

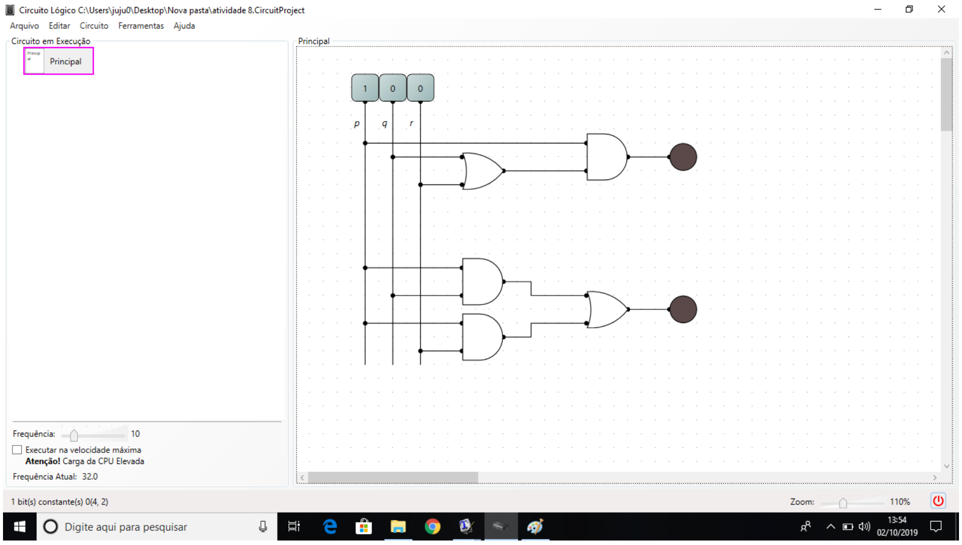
Figura 105 – Resultado simulação atividade 8: linha 4



Fonte – O autor, 2019.

(e) Linha 5: 1 . (0 + 0) = 0 e (1 . 0) + (1 . 0) = 0

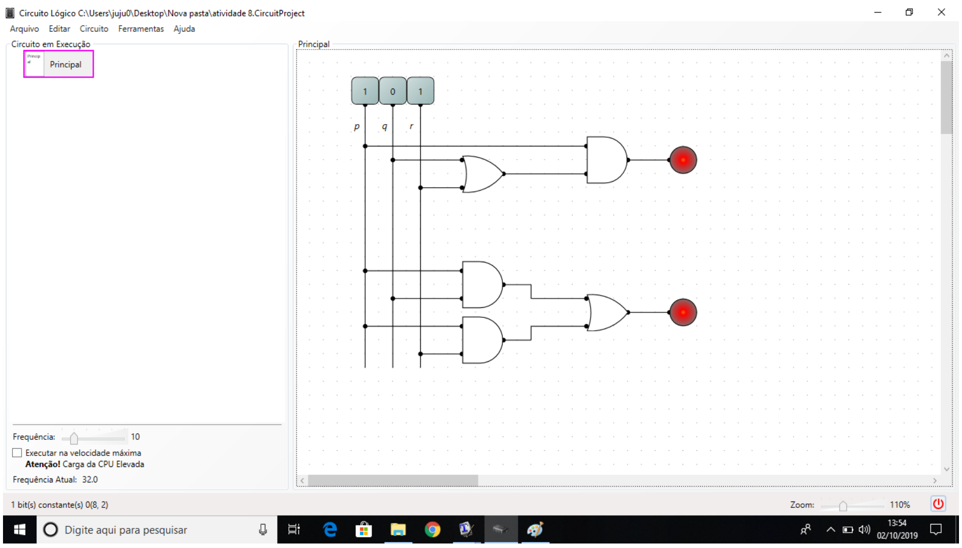
Figura 106 – Resultado simulação atividade 8: linha 5



Fonte – O autor, 2019.

(f) Linha 6: 1 . (0 + 1) = 1 e (1 . 0) + (1 . 1) = 1

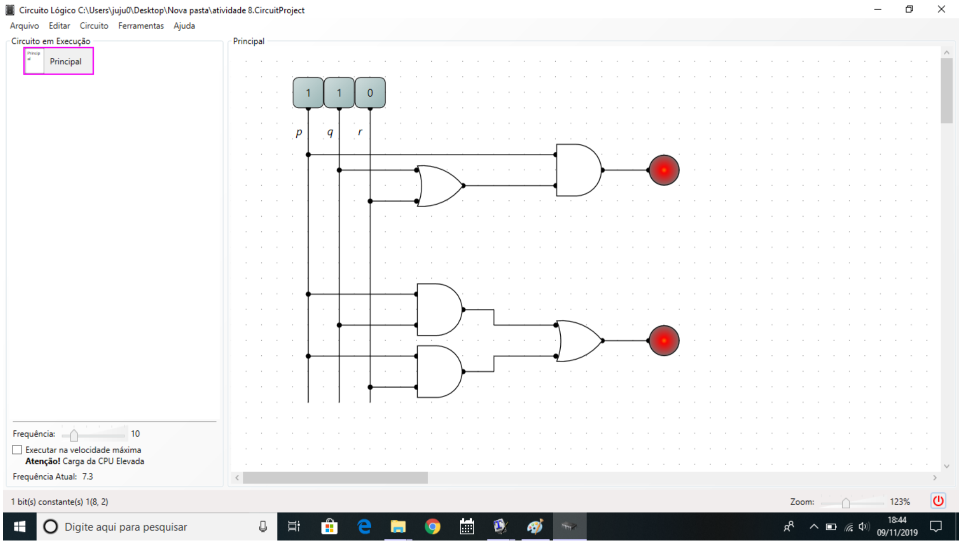
Figura 107 – Resultado simulação atividade 8: linha 6



Fonte – O autor, 2019.

(g) Linha 7: 1 . (1 + 0) = 1 e (1 . 1) + (1 . 0) = 1

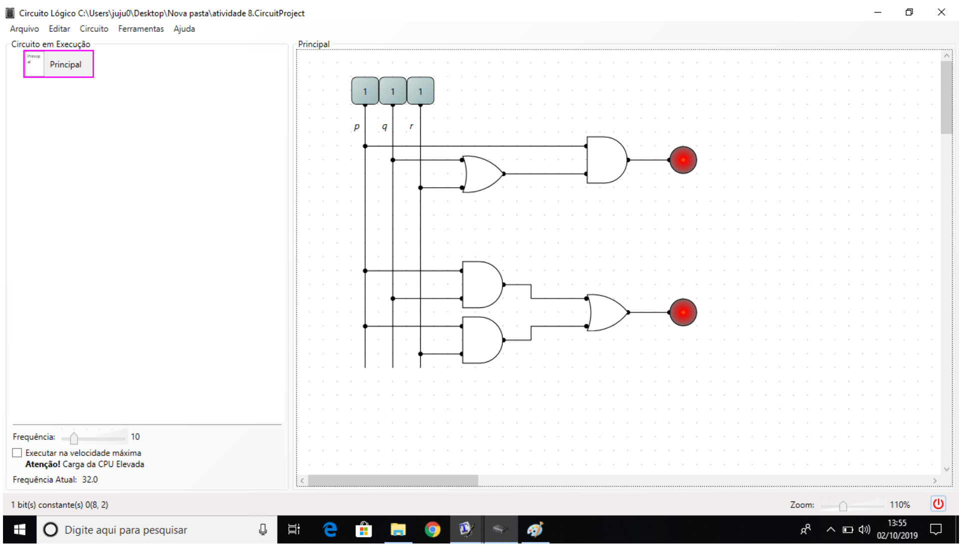
Figura 108 – Resultado simulação atividade 8: linha 7



Fonte – O autor, 2019.

(h) Linha 8: 1 . (1 + 1) = 1 e (1 . 1) + (1 . 1) = 1

Figura 109 – Resultado simulação atividade 8: linha 8

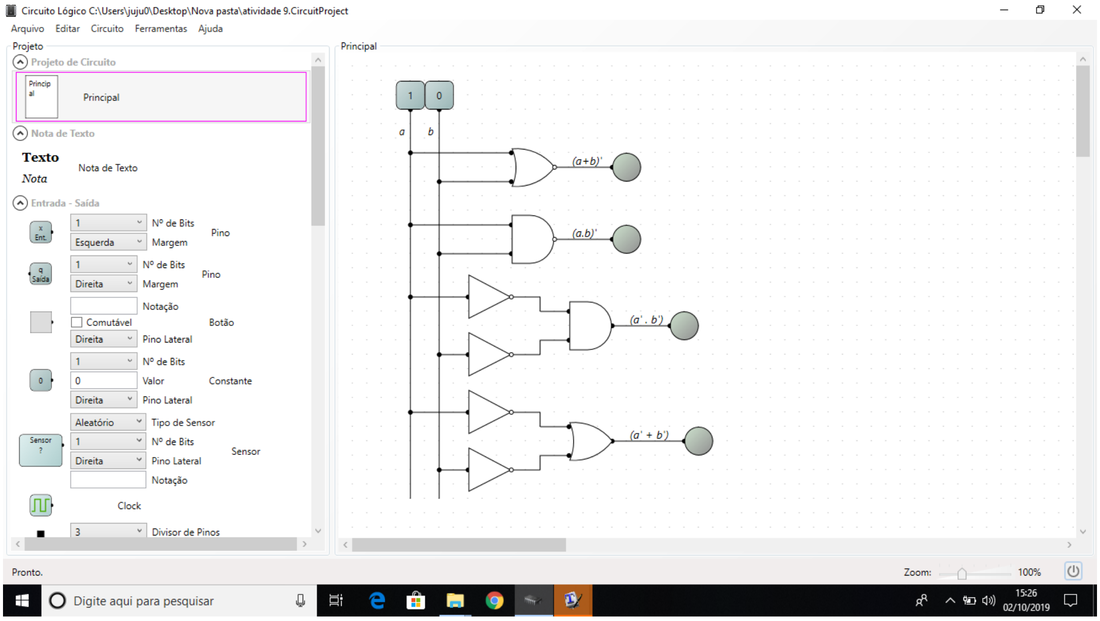


Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE I – GABARITO DA ATIVIDADE 9

1. Circuitos paras expressões $(a+b)'$, $(a.b)'$, $a'b'$ e $a'+b'$.

Figura 110 – Construção do circuito executado pela expressão $(a+b)'$, $(a.b)'$, $a'b'$ e $a'+b'$.



Fonte – O autor, 2019.

2. Tabelas-verdade para as expressões:

   (a) $(a+b)'$

Tabela 90 – $(a+b)'$

a	b	$(a+b)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

   (b) $(a.b)'$

Tabela 91 – $(a.b)'$

a	b	$(ab)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

(c) $a'b'$

Tabela 92 – $a'b'$

a	b	$(a' \cdot b')$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

(d) $a' + b'$

Tabela 93 – $a' + b'$

a	b	$(a' + b')$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Fonte – O autor, 2019.

APÊNDICE J – GABARITO DA ATIVIDADE 10

1.

a: portas estiverem abertas.

b: ignição ligada.

c: farois acesos.

$\sim b$: ignição desligada.

$(a \wedge b) \vee (c \wedge \sim b)$

2.

Tabela 94 – $(a \wedge b) \vee (c \wedge \sim b)$

a	b	c	$\sim b$	$a \wedge b$	$c \wedge \sim b$	$(a \wedge b) \vee (c \wedge \sim b)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

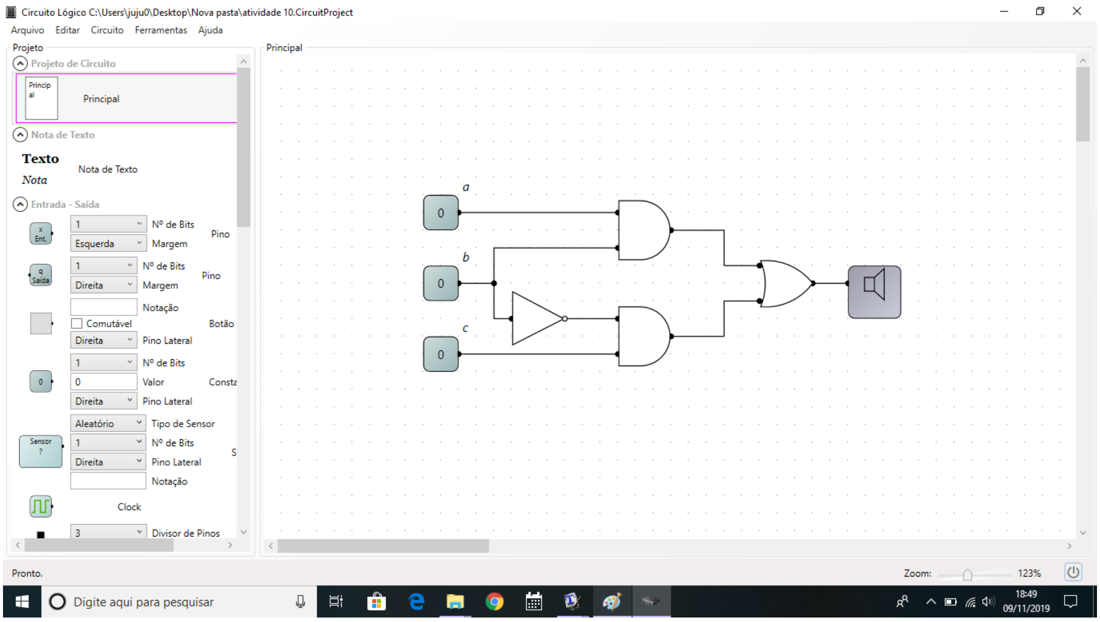
Fonte – O autor, 2019.

3.

$a.b + c. \sim b$

4.

Figura 111 – Construção do circuito no LogicCircuit



Fonte – O autor, 2019.