



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

ROBERTO VAGNER DA SILVA

***TRIÂNGULO RETÂNGULO JUSTIFICANDO A
TRIGONOMETRIA***

Orientadora: Miriam del Milagro Abdón



**NITERÓI
JULHO/2020**

ROBERTO VAGNER DA SILVA

TRIÂNGULO RETÂNGULO JUSTIFICANDO A TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada por **Roberto Vagner da Silva** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Miriam del Milagro Abdón

Niterói
2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586 Silva, ROBERTO VAGNER DA
t TRIÂNGULO RETÂNGULO JUSTIFICANDO A TRIGONOMETRIA /
ROBERTO VAGNER DA Silva ; MIRIAM DEL MILAGRO ABDON,
orientador.
Niterói, 2020.
63 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2020.

DOI:
<http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.7535232078>
2

1. TRIGONOMETRIA. 2. GEOMETRIA. 3. Produção
intelectual. I. ABDON, MIRIAM DEL MILAGRO,
orientador. II. Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Matemática e Estatística.
III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

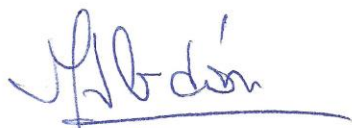
ROBERTO VAGNER DA SILVA

TRIÂNGULO RETÂNGULO JUSTIFICANDO A TRIGONOMETRIA

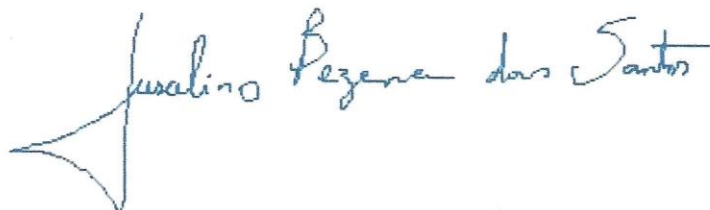
Dissertação apresentada por **ROBERTO VAGNER DA SILVA** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 17/07/2020

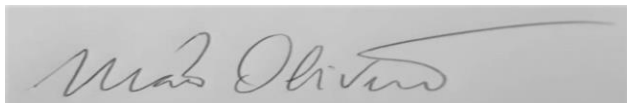
Banca Examinadora



Prof. Miriam del Milagro Abdón - Orientadora
Doutor – Universidade Federal Fluminense



Prof. Juscelino Bezerra dos Santos- Membro
Doutor – Escola Nacional de Ciências Estatísticas



Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Membro
Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre comigo nas alegrias, incertezas e conquistas.

Aos meus pais Nilton e Arite que sempre me apoiaram em todas as decisões que tomei sem questioná-las.

A minha esposa Catherine, companheira, amiga, incentivadora de toda minha trajetória desde que a conheci.

Aos meus filhos Christopher, Sabrina, Stephanie e Lucas, que seguem em suas vidas acadêmicas reconhecendo a importância da busca de novos conhecimentos.

Ao meu neto Cauã, que nasceu prematuro nesse momento turbulento de pandemia e com muita garra resistiu a um mês de internação, demonstrando que não devemos desistir.

Aos professores do PROFMAT sempre atenciosos e despertando nossa curiosidade para novas habilidades.

À professora Miriam Abdón, minha orientadora, sempre disposta a ajudar, motivando nos momentos que pensei em desistir, valorizando os pontos positivos, atenciosa nos momentos de dúvidas, e sempre com um entusiasmo contagiante.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Neste trabalho vamos demonstrar algumas fórmulas básicas da Trigonometria com o auxílio da geometria, mais diretamente dos triângulos retângulos, da semelhança de triângulos, do teorema de Tales e do teorema de Pitágoras. Considerando o grande número de fórmulas usadas na Trigonometria e que algumas são apenas memorizadas por boa parte dos alunos, demonstraremos essas fórmulas a partir de construções geométricas simples. Partindo de construções adequadas de triângulos retângulos, sem perda de generalidade, justificaremos geometricamente essas fórmulas. Buscando com isso uma dedução mais próxima de um exemplo prático, considerando o uso da geometria como um fator menos abstrato uma vez que temos as figuras geométricas como orientação e confirmação desses processos dedutivos. Dando assim um sentido prático para essas fórmulas, levando o aluno a aplicá-las com mais segurança na resolução de problemas e até mesmo na compreensão das fórmulas que derivam ou são justificadas por elas.

Palavras Chaves: Trigonometria, Funções Trigonométricas, Triângulos.

ABSTRACT

In this work, we will demonstrate some basic trigonometric formulas with the aid of geometry, by using similarities of triangles and Pythagorean theorems. There is a large number of trigonometric formulas that students end up memorizing without understanding where they comes from.

We seeking a deduction closer to the practical example, considering the use of geometry as a less abstract factor once we have geometric figures as orientation and verification of these deductive processes. Thus giving a practical sense to these formulas, leading the student to apply himself more confidently in solving problems and even in understanding the formulas that derive from or are justified by them.

Keywords: Trigonometry, Trigonometric Formulas, Triangles.

Lista de figuras

Figura 1: Triângulos semelhantes.....	19
Figura 2: Triângulos semelhantes.....	19
Figura 3: Elementos do triângulo retângulo	20
Figura 4: Lados do triângulo retângulo	22
Figura 5: Trecho de uma tabela trigonométrica	23
Figura 6: Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis.....	24
Figura 7: Altura do triângulo equilátero	24
Figura 8: Triângulo retângulo usando lado e altura triângulo equilátero	24
Figura 9: Quadrado.....	25
Figura 10: Triângulo retângulo usando lados e diagonal do quadrado.....	26
Figura 11: Círculo trigonométrico – seno e cosseno	27
Figura 12: Círculo trigonométrico – tangente e cotangente	28
Figura 13: Círculo trigonométrico – secante e cossecante	30
Figura 14: Círculo trigonométrico e teorema de Pitágoras	32
Figura 15: Triângulos retângulos – soma de ângulos	33
Figura 16: Tangente da soma.....	34
Figura 17: Triângulos retângulos, diferença de ângulos	36
Figura 18: Tangente da diferença de dois ângulos	38
Figura 19: Triângulo qualquer e altura	40
Figura 20: Triângulo inscrito na circunferência	41
Figura 21: Triângulos inscritos – arco capaz 90°	42
Figura 22: Triângulo ABC e sua altura (AH).....	42
Figura 23: Plano Argand – Gauss.....	47
Figura 24: Plano Argand – Gauss - argumento	47
Figura 25: Triângulo qualquer – altura e ângulo formado por dois de seus lados	50
Figura 26: Inclinação da reta	51
Figura 27: Paradoxo de Curry	59

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. NOÇÕES BÁSICAS	18
2.1. TRIÂNGULOS SEMELHANTES.....	18
2.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA	19
2.2.1. <i>Casos de Semelhança de Triângulos</i>	20
2.3. TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	20
2.3.1. <i>Relações trigonométricas no triângulo retângulo</i>	21
2.4. TABELAS DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	23
2.5. ÂNGULOS NOTÁVEIS.....	23
2.6. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIANGULO EQUILÁTERO.....	24
2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO QUADRADO.....	25
3. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	27
3.1. SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.....	27
3.2. TANGENTE E COTANGENTE NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	28
3.3. SECANTE E COSSECANTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO.....	29
4. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E O TEOREMA DE PITÁGORAS	32
4.1. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DA SOMA DOIS ÂNGULOS	32
4.1.1. <i>Seno da soma de dois ângulos $\text{sen}(\alpha + \beta)$</i>	33
4.1.2. <i>Cosseno da soma de dois ângulos $\text{cos}(\alpha + \beta)$</i>	34
4.1.3. <i>Tangente da soma de dois ângulos $\text{tg}(\alpha + \beta)$</i>	34
4.1.4. <i>Dobro de ângulo</i>	35
4.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DA DIFERENÇA DE DOIS ÂNGULOS	36
4.2.1. <i>Seno da diferença de dois ângulos $\text{sen}(\alpha - \beta)$</i>	37
4.2.2. <i>Cosseno da diferença de dois ângulos $\text{cos}(\alpha - \beta)$</i>	38
4.2.3. <i>Tangente da diferença de dois ângulos $\text{tg}(\alpha - \beta)$</i>	38
5. LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENNOS	40
5.1. LEI DOS SENOS	40
5.1.1. <i>Triângulo inscrito em uma circunferência</i>	41
5.2. LEI DOS COSSENNOS	42
6. APLICAÇÕES	44
6.1. NÚMEROS COMPLEXOS.....	44
6.1.1. <i>Operações com números complexos</i>	44
6.1.2. <i>Representação dos números complexos</i>	46
6.1.3. <i>Forma trigonométrica de um número complexo</i>	48
6.1.4. <i>Fórmulas de Moivre</i>	48
6.2. ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER	49
6.3. COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA	50
7. ATIVIDADES.....	52
7.1. ATIVIDADE 1.....	52
7.2. ATIVIDADE 2.....	53
7.3. ATIVIDADE 3.....	54

7.4. ATIVIDADE 4.....	56
7.5. ATIVIDADE 5.....	58
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	60
9. BIBLIOGRAFIA	62

1. INTRODUÇÃO

Segundo o portal do Ministério da Educação (MEC), A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A BNCC foi elaborada a partir das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). As DCNs são normas da Educação Básica que embasam o planejamento curricular das escolas e direcionam as atividades para a Educação Infantil e Ensinos Fundamental e Médio, com objetivo de assegurar a autonomia da escola e da proposta pedagógica. Já os PCNs são diretrizes separadas por disciplinas elaboradas pelo governo federal e não obrigatórias por lei. Os PCNs foram criados com a função de ser um referencial escolar para o Brasil com a capacidade de uniformizar a formação escolar respeitando e valorizando os aspectos culturais e regionais. Eles dão apoio e sugestões na construção ou alterações nos currículos; na formação dos professores; nas discussões pedagógicas internas às escolas; na produção de livros e outros materiais didáticos e na avaliação do sistema de Educação.

Podemos, sem lugar a dúvida, afirmar que a BNCC foi um ganho para a sociedade já que acaba com discrepâncias que existiam entre as diferentes regiões do país e entre as diferentes escolas, unificando assim os conteúdos obrigatórios a serem abrangidos em cada um dos níveis da Educação Básica.

A BNCC possui 10 Competências Gerais que orientam o desenvolvimento dos alunos durante toda a Educação Básica em cada uma das componentes curriculares e devem ser tratadas de forma transdisciplinar abrangendo todas as áreas de conhecimento e etapas da educação. As competências são:

1. Construção do conhecimento
2. Conhecimento crítico, científico e criativo
3. Repertório cultural
4. Comunicação
5. Cultura Digital
6. Valorização da diversidade
7. Argumentação.

8. Autoconhecimento e autocuidado
9. Resolução dos conflitos do cotidiano
10. Autonomia e independência

A BNCC trouxe alterações para o ensino/aprendizagem da Matemática dando maior destaque para o desenvolvimento de projetos, resolução de problemas e investigação. Para atingir estes objetivos são propostas aulas práticas nas quais os alunos poderão testar o que aprenderam nas aulas teóricas. A ideia é levá-los a cumprirem um desafio, construindo um conceito próprio para solucioná-lo.

Em relação não só ao ensino da Trigonometria, mas de toda a Matemática, a BNCC propõe mudanças que grande parte dos professores desta área já aplica em seu dia a dia. Há algum tempo percebe-se que o ensino da Matemática através de memorização de fórmulas sem aplicações práticas ou que não sejam vinculadas a uma situação problema, resulta no desinteresse da maioria dos estudantes. Para sanar esta situação os professores devem apresentar situações simples do cotidiano que demonstrem a importância da Matemática.

Os PCNs asseguram que

A aprendizagem significativa depende de uma motivação intrínseca, isto é, aluno precisa tomar para si a necessidade e a vontade de aprender [...]. A disposição para aprendizagem não depende exclusivamente do aluno, demanda que a prática didática garanta condições para que essa atitude favorável se manifeste e prevaleça. [...]. Se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, deve propor prioritariamente atividades que exijam essa postura e não a passividade. (PCNs p.64 e 65).

A BNCC ressalta que ao completar o Ensino Fundamental o aluno deverá ser capaz de identificar e reconhecer as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. E com a ampliação do aprendizado das razões trigonométricas no círculo trigonométrico, com suas relações fundamentais, somas e subtrações de ângulos, lei dos senos, lei dos cossenos e as funções trigonométricas, este aluno possa entender a importância da Trigonometria na resolução de problemas.

Na Trigonometria, Álgebra e Geometria trabalham juntas o que pode ainda mais dificultar o entendimento do aluno já que este precisa ter um bom domínio da abstração algébrica e uma boa interpretação dos objetos geométricos.

Não só no Brasil, mas no mundo, as pesquisas sobre as dificuldades que os alunos enfrentam ao estudar Trigonometria não são muito abundantes, como indicam os trabalhos de Weber (2005), Moore (2010), Demir (2012, 2013) entre outros. Afortunadamente temos visto nos últimos anos o interesse pelo tratamento da Trigonometria em sala de aula aumentar nas dissertações de Mestrado. Em [Reis et al.] os autores realizaram um levantamento da produção acadêmica sobre o ensino de Trigonometria no Ensino Médio no banco de dissertações da Capes entre os anos de 1987 e 2009.

Observamos que houve um total de 22 dissertações. A primeira dissertação sobre o tema foi escrita apenas em 1994. Nos anos de 2000 e 2003, obtivemos o maior número de dissertações, 03. Referente às teses, percebemos que foram apenas 3, igualmente distribuídas nos anos de 1998, 2001 e 2007.

Os autores também perceberam que a abordagem via resolução de problemas foi a que teve um número maior de trabalhos, como mostra a tabela a seguir:

Categoria	Dissertações	Teses	Total
Novas Tecnologias	5	1	6
Abordagem Histórica	5	1	6
Modelagem Matemática	5	0	2
Resolução de Problemas	7	0	7
Reflexão sobre a prática docente	3	1	4
Total	22	3	25

Cabe destacar que os PCNs fazem uma referência explícita a metodologia de Resolução de Problemas, o que talvez justifique o alto número de dissertações que abordam esta metodologia:

Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Outro ponto relevante levantado pelos parâmetros curriculares é a importância de que os alunos sejam construtores dos próprios conhecimentos. Podemos ler por exemplo

Quando, noutro exemplo, se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade (PCNs p 54).

Ao mesmo tempo que incentivam uma participação maior dos alunos em sala de aula, os parâmetros alertam sobre o excesso de memorização de regras já que pode ser prejudicial ao aprendizado

[...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um fazer Matemática e de um saber pensar matemático (p.41).

Mas será que o excesso de fórmulas para memorizar é o único culpado pela grande dificuldade que os alunos sentem ao estudar Trigonometria na escola?

A resposta é NÃO! Existe outra vilã nessa história: a Geometria. Na sua dissertação de Mestrado [Feijó] observa que

[...] houve um descaso com a Geometria por parte do currículo escolar, dos livros didáticos e também dos professores de Matemática por diversas razões, entre elas a deficiência na sua formação, dão mais importância à Álgebra (p 52).

Ela também destaca que existe, por parte dos alunos, uma dissociação da relação fundamental da Trigonometria com o Teorema de Pitágoras.

Essa deficiência nos conhecimentos de Geometria não se manifesta só nos alunos da Educação Básica. Weber [Weber 2005, apud Feijó] em um estudo com estudantes universitários dos Estados Unidos observou que a falta de conhecimentos geométricos é um problema

A primeira limitação no entendimento dos alunos [sobre funções trigonométricas] diz respeito ao papel que as figuras geométricas desempenham na compreensão dessas funções (p 18).

No artigo Trigonometria, Cálculo, Ensino e Aprendizagem [Miranda et als], as autoras (estudantes de Licenciatura em Matemática) concluem que grande parte das dificuldades dos alunos em Cálculo vêm do conhecimento superficial de Trigonometria que os alunos trazem do Ensino Médio. Para elas

As demonstrações também são de suma importância, pois elas nos ajudaram na compreensão de relações e propriedades na Trigonometria, e deveriam ser aderidas pelos professores do Ensino Fundamental e Médio, pois os alunos assam a compreender a lógica da construção do conhecimento matemático e percebem que aquilo não veio pronto (p 5).

Essas dificuldades são sentidas também pelos próprios professores que atuam no Ensino Básico. Em [Brito et al, 2004] as autoras observam que isso se deve em parte as características do ensino de matemática dominante, na época em que esses mesmos professores estudaram e se formaram.

Analisando as dificuldades encontradas pelos professores podemos afirmar que tais dificuldades estão intimamente relacionadas à formação escolar das décadas de 70 e 80 caracterizadas, entre outros aspectos, pelo

descaso para com a Geometria e a Trigonometria, pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos – quando esses eram estudados - e pela memorização de procedimentos sem a compreensão deles (p.31).

No curso de Formação Continuada para professores que elas ministravam, observaram que as dificuldades se concentravam nos conceitos geométricos de altura e de semelhança de triângulos.

Outros autores [Freitas et als] concordam que a dificuldade dos docentes tem um contexto histórico já que surgiram durante sua própria formação.

Talvez a frase que melhor resume a situação toda foi dada por Borges [Borges] na sua dissertação de Mestrado:

De maneira geral, o que percebemos sobre o ensino-aprendizagem de Trigonometria é a percepção por parte dos alunos, de que se trata de uma área extremamente abstrata e repleta de fórmulas e identidades a serem decoradas; e por parte do professor, algo que não lhe foi agradável no passado, não é cobrado em número expressivo nas avaliações externas e, portanto, pode ser visto da forma mais breve e superficial possível (p 32).

Depois de tudo o que acabamos de pontuar, chegou o momento de explicar o porquê da escolha do tema.

Vou falar em primeira pessoa, durante o período que frequentei os bancos escolares no ginásio, hoje Ensino Fundamental e Ensino Médio, me senti atraído pelos conteúdos matemáticos, não só pelos conceitos, mas também pela forma que os professores os transmitiam, alguns mostrando a importância das regras outros a beleza dos enunciados e formas não tão ortodoxas para resolve-los; mas todos deixavam bem claro a importância e a necessidade do aprendizado da Matemática para nossas vidas. Isso era de fácil percepção pois estudava em uma escola com ensino profissionalizante nas áreas eletricidade,

eletrônica, mecânica, edificações e construção naval, onde os conceitos teóricos eram aplicados na prática.

Sabemos que a Matemática tem inúmeras fórmulas e regras que devemos dominar ao máximo para obtermos melhor aproveitamento. Contudo, percebemos que muitas pessoas não atingem um nível desejado de domínio dessas fórmulas e regras.

Quando estudei Trigonometria percebi que havia um número bem elevado de fórmulas que deveriam ser memorizadas em curto espaço de tempo e apesar de terem semelhanças possuíam detalhes difíceis de diferenciar entre elas. Em um primeiro momento não pareciam fazer muito sentido e não tinham uma aplicação imediata. Isto é o que percebo hoje nos meus alunos sempre que apresento um conteúdo não contextualizado ou sem aplicação imediata mesmo que em um desafio matemático. Essa proposta de dar significado aos conteúdos nem sempre é possível.

Quando fui apresentado ao círculo trigonométrico percebi, na época, que com auxílio do teorema de Pitágoras e da semelhança de triângulos aplicados ao círculo trigonométrico eu conseguiria deduzir grande parte das fórmulas sem memorizá-las, e da mesma forma as relações entre os ângulos complementares, suplementares, redução ao primeiro quadrante, etc. Tudo isso facilitou muito meu aprendizado em Trigonometria e procuro sempre levar esta experiência para meus alunos.

Diante da minha experiência procuro apresentar os conceitos teóricos com aplicações do cotidiano ou buscando uma justificativa geométrica, sempre que possível.

Temos hoje elementos facilitadores para uma boa aprendizagem seja ela de cunho acadêmico ou de forma geral. Encontramos na internet e nos programas de matemática dinâmica dois desses elementos, que sempre atraem muito a atenção dos alunos quando devidamente utilizados. No entanto esbarramos na falta de disponibilização desses recursos no âmbito das escolas públicas. Muitos alunos não têm acesso a internet de boa qualidade ou não tem acesso. Esta barreira impede uma equidade do aprendizado de uma forma geral.

Percebo nos alunos que, se não houver um desafio ou uma relação dos conteúdos com a realidade não conseguimos a motivação necessária para o desenvolvimento do aprendizado. São poucos os alunos, mesmo no Ensino Médio, que tem a percepção da importância dos conteúdos trabalhados na escola em suas vidas profissionais ou para continuação de sua vida acadêmica. Procuo, sempre que possível, falar das grandes descobertas de matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da humanidade e dar exemplos que possam instigar a curiosidade para que haja interesse na busca de soluções.

Podemos então afirmar que a escolha do tema desta dissertação nos brinda a oportunidade única de trabalhar com os conceitos trigonométricos via Geometria, servindo assim para um segundo objetivo que é o de rever e consolidar os conceitos geométricos de semelhança de triângulos, pois, como vimos anteriormente, a falta de conhecimentos de Geometria, pode ser apontada como uma das causas das dificuldades de alunos e até mesmo de professores ao tratar da Trigonometria.

2. NOÇÕES BÁSICAS

Trigonometria é uma palavra de origem grega que remete à medida de três ângulos. Os estudos dessa área da Matemática voltam-se para os **triângulos**, que são polígonos que possuem três lados e, conseqüentemente, três ângulos. Em um primeiro momento, a **Trigonometria** ocupa-se de estudar algumas propriedades e relações dos triângulos retângulos para posteriormente relacionar as medidas dos lados dos triângulos com as medidas dos ângulos.

Essas propriedades e relações são expandidas para triângulos quaisquer por meio dos teoremas conhecidos como *lei dos senos* e *lei dos cossenos*. Posteriormente, alguns desses resultados são observados em triângulos cujos lados são segmentos notáveis de um círculo, que fica conhecido como “círculo trigonométrico”.

Encontrar caminhos matemáticos para a resolução de problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção sempre esteve na pauta dos interesses humanos. Desse tipo de especulação, nasceu a Trigonometria, a parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), considerado o primeiro grande astrônomo da história, fez uso das ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra e Sol e Terra e Lua.

A **Trigonometria** propõe uma grande novidade. Antes dela só era possível considerar cálculos e propriedades que envolvessem exclusivamente lados ou exclusivamente ângulos de um triângulo ou relações básicas entre esses elementos. Com a sua chegada, é possível relacionar diretamente as medidas de lados de um triângulo com a medida de um de seus ângulos. Vale ressaltar que as relações entre os lados e segmentos notáveis dentro de um triângulo também compõem a **Trigonometria**.

2.1. Triângulos Semelhantes

Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes (mesma medida) e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

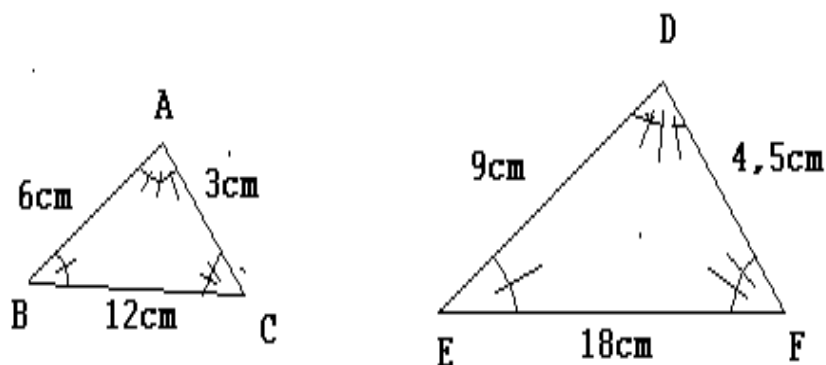


Figura 1: Triângulos semelhantes

Como $\hat{A} \cong \hat{D}$
 $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$
 $\hat{C} \cong \hat{F}$

Dizemos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

2.2. Teorema Fundamental da Semelhança

Considere o triângulo ABC e uma reta r paralela a \overline{BC} , que corta os lados \overline{AB} e \overline{AC} nos pontos D e E, respectivamente, obtemos os triângulos ABC e ADE semelhantes.

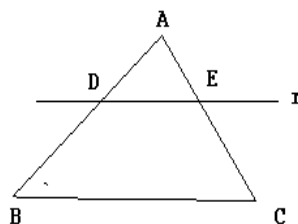


Figura 2: Triângulos semelhantes

O ângulo \hat{A} é comum, os ângulos \hat{B} e \hat{D} são correspondentes, sendo assim $\hat{B} \cong \hat{D}$, analogamente temos que $\hat{C} \cong \hat{E}$.

Aplicando o teorema de Tales nos triângulos obtemos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Demonstrando assim a semelhança entre estes triângulos.

2.2.1. Casos de Semelhança de Triângulos

Existem três casos em que podemos verificar a semelhança entre triângulos conhecendo apenas alguns de seus elementos.

1º caso: Ângulo – Ângulo

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

2º caso: Lado – Ângulo – Lado

Se dois triângulos possuem as medidas de dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados forem congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

3º caso: Lado – Lado – Lado

Se dois triângulos possuem os três pares de lados correspondentes com medidas proporcionais, esses triângulos são semelhantes;

2.3. Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo possui um ângulo reto e os outros dois agudos, para tanto basta que se tenha um ângulo reto (90°), pois a soma dos três ângulos internos é igual a 180° .

Todo triângulo retângulo pode ser subdividido em outros dois triângulos retângulos, conforme a figura 3, traçando a altura “h” relativa à base “a”.

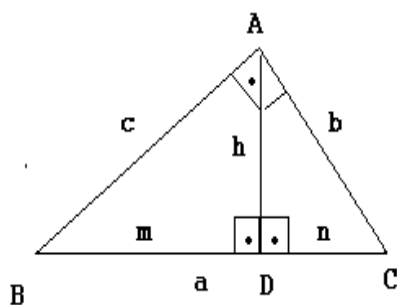


Figura 3: Elementos do triângulo retângulo

A altura desse triângulo retângulo forma dois ângulos de 90° com sua base

Considerando o triângulo ABC, retângulo em A, é possível observar os seguintes elementos:

- 1 – Os lados \overline{AB} e \overline{AC} são chamados de catetos e suas medidas são c e b, respectivamente;
- 2 – O lado \overline{BC} é chamado de hipotenusa e sua medida é a. Esse lado sempre será oposto ao ângulo de 90° ;
- 3 – \overline{AD} é a altura do triângulo ABC relativa à base \overline{BC} e sua medida é h. (lembrando que a altura sempre forma ângulo de 90° com a base relativa a ela);
- 4 – \overline{BD} é a projeção ortogonal do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa. Sua medida é m;
- 5 – \overline{CD} é a projeção ortogonal do cateto \overline{AC} sobre a hipotenusa. Sua medida é n.

Aplicando a semelhança de triângulos obtemos as seguintes relações métricas no triângulo retângulo que são igualdades que relacionam lados, altura e projeções ortogonais de um triângulo retângulo:

- a) $c^2 = m \cdot a$
- b) $b \cdot c = a \cdot h$
- c) $h^2 = m \cdot n$
- d) $b^2 = n \cdot a$
- e) $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)

Vamos dar ênfase ao teorema de Pitágoras por ser utilizado com maior frequência na resolução de exercícios.

2.3.1. Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, definimos as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, como razões entre seus lados, relacionando-as a um de seus ângulos agudos. Para tanto, é necessário fixar um dos dois ângulos agudos e observar, no triângulo retângulo, as definições de cateto oposto e cateto adjacente:

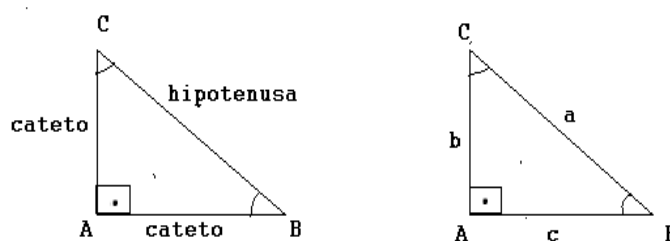


Figura 4: Lados do triângulo retângulo

Em relação ao ângulo B, por definição, temos:

$$\text{Seno } \widehat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cosseno } \widehat{B} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{cos } \widehat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \text{cos } \widehat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Tangente } \widehat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \rightarrow \text{tg } \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \text{tg } \widehat{B} = \frac{b}{c}$$

Em relação ao ângulo C temos:

$$\text{Seno } \widehat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Cosseno } \widehat{C} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{cos } \widehat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \text{cos } \widehat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Tangente } \widehat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \rightarrow \text{tg } \widehat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \rightarrow \text{tg } \widehat{C} = \frac{c}{b}$$

Note que em um triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares (suas medidas somam 90°) e considerando as definições das razões trigonométricas e sendo B e C ângulos agudos concluímos que:

$$\text{sen } \widehat{B} = \text{cos } \widehat{C}$$

$$\text{sen } \widehat{C} = \text{cos } \widehat{B}$$

$$\text{tg } \widehat{B} = \frac{1}{\text{tg } \widehat{C}}$$

2.4. Tabelas de razões trigonométricas

Para resolvermos vários problemas que envolvam razões trigonométricas, se faz necessário o conhecimento dos valores do seno, do cosseno e da tangente de alguns ângulos.

Há alguns séculos, matemáticos calcularam e organizaram os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos agudos cujas medidas variam de 1° a 89° .

Ângulo	sen	cos	tg
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306

Figura 5: Trecho de uma tabela trigonométrica

As primeiras tabelas trigonométricas foram construídas com instrumentos de precisão, da época, considerando erros percentuais e usando o teorema de Pitágoras. Nos dias atuais esses valores são facilmente acessados em dispositivos eletrônicos.

Para os ângulos de 0° e 90° são definidas as razões trigonométricas da seguinte forma:

$\text{sen } 0^\circ = 0$	$\text{sen } 90^\circ = 1$
$\text{cos } 0^\circ = 1$	$\text{cos } 90^\circ = 0$
$\text{tg } 0^\circ = 0$	$\text{tg } 90^\circ = \text{não existe}$

2.5. Ângulos notáveis

Os ângulos que medem 30° , 45° e 60° são considerados notáveis por aparecerem com frequência em exercícios. Suas razões trigonométricas podem ser representadas através de frações de fácil memorização.

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Figura 6: Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

Utilizando um triângulo equilátero, um quadrado e o teorema de Pitágoras conseguimos demonstrar estas igualdades.

2.6. Razões trigonométricas no triangulo equilátero

Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é igual a l .

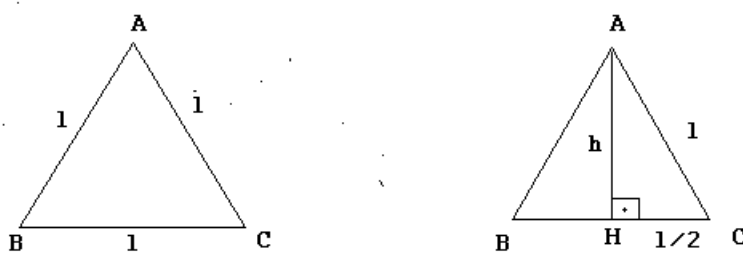


Figura 7: Altura do triângulo equilátero

Considerando que no triângulo equilátero cada um dos ângulos internos mede 60° e a altura também é bissetriz e mediana, determinamos o triângulo AHC retângulo em H.

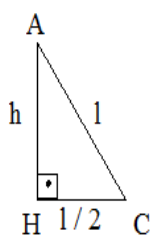


Figura 8: Triângulo retângulo usando lado e altura triângulo equilátero

Temos assim que $\hat{A} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$

Aplicando o teorema de Pitágoras temos $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$ e representando h em função de l encontramos $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Com essas informações podemos determinar as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60° .

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{\frac{l}{2}}{l} \rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } \hat{A} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \rightarrow \text{cos } 30^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg } 30^\circ = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} \rightarrow \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } \hat{C} = \frac{\frac{l}{2}}{l} \rightarrow \text{cos } 60^\circ = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} \rightarrow \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

2.7. Razões trigonométricas no quadrado

Considere um quadrado cujo lado mede l.

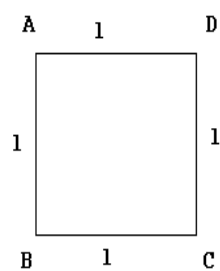


Figura 9: Quadrado

Traçando uma das diagonais obtemos um triângulo retângulo isósceles. Desta forma cada um dos ângulos agudos mede 45° .

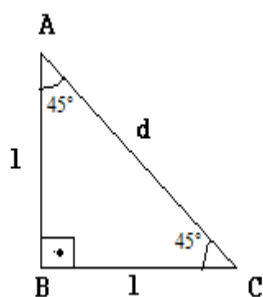


Figura 10: Triângulo retângulo usando lados e diagonal do quadrado

Aplicando o teorema de Pitágoras podemos escrever a medida da diagonal d em função do lado l .

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Com essas informações podemos determinar as razões trigonométricas do ângulo de 45°

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{l}{l\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } \hat{A} = \frac{l}{l\sqrt{2}} \rightarrow \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \text{tg } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1$$

3. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Também chamado de ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica (nomes mais corretos, mas menos usuais), trata-se de uma circunferência orientada no sentido anti-horário de raio 1 (um), na qual sobrepomos um sistema de eixos cartesianos com a origem coincidindo com centro dessa circunferência. Nesse sistema de eixos, é construído um **triângulo retângulo**, cujo vértice do ângulo agudo α coincide com a origem, um dos catetos está sobre o semieixo positivo das abscissas e o outro, que podemos considerar altura desse triângulo, une o eixo das abscissas e a circunferência, a hipotenusa é o raio unitário (figura 11).

Essa altura coincide com o valor de **seno**, por ser o cateto oposto ao ângulo α . Já a medida que vai do ponto de encontro da altura com o eixo das abscissas até a origem coincide com o cateto adjacente ao ângulo α , isto é, com o valor do **coseno**.

Essas coincidências ocorrem porque a hipotenusa é sempre 1, pois ela é o raio do círculo.

3.1. Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Qualquer que seja o triângulo retângulo construído nesse círculo, o cateto que coincide com uma parte do eixo das abscissas mede exatamente o valor do cosseno de α e o outro cateto mede exatamente seno de α .

Observe essas propriedades na imagem abaixo:

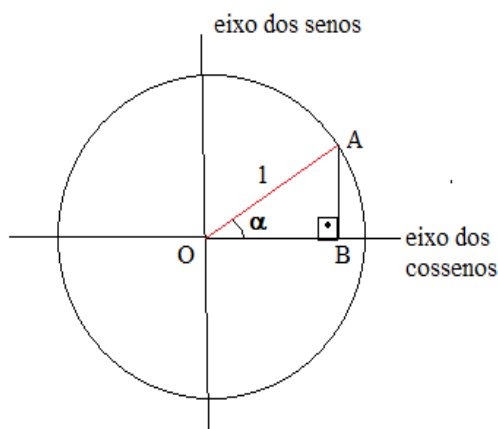


Figura 11: Círculo trigonométrico – seno e cosseno

$$\overline{AB} = \text{sen } \alpha$$

$$\overline{OB} = \text{cos } \alpha$$

Quando construímos os eixos cartesianos, dividimos o círculo trigonométrico em quatro partes chamadas de quadrantes. Esses quadrantes são ordenados no sentido anti-horário. Considerando as definições e construções, temos as seguintes conclusões:

a) $-1 \leq \text{sen} \leq 1$

b) $-1 \leq \text{cos} \leq 1$

c) Quadrante I Quadrante II Quadrante III Quadrante IV

Seno	+	+	-	-
Cosseno	+	-	-	+

3.2. Tangente e cotangente no círculo trigonométrico

As razões tangente e cotangente são indicadas no círculo trigonométrico através de eixos orientados paralelos aos eixos cosseno e seno, respectivamente, e tangentes ao círculo como ilustra a seguinte figura:

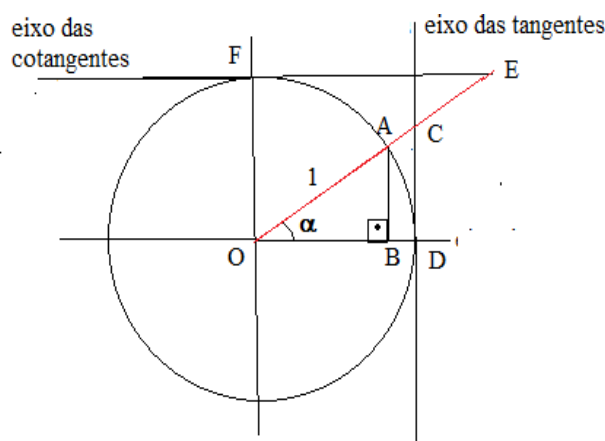


Figura 12: Círculo trigonométrico – tangente e cotangente

Prolongando o raio do círculo interceptamos o ponto C no eixo das tangentes e o ponto E no eixo das cotangentes.

Os triângulos AOB e COD são semelhantes pelo caso ângulo – ângulo, α é comum e os dois triângulos são retângulos. Usando a definição de tangente de α no triângulo AOB temos:

$$tg \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

Da semelhança dos triângulos temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$$

Como \overline{OD} é o raio do círculo e mede 1, concluímos que $tg \alpha = \overline{CD}$

Os triângulos AOB e OEF são semelhantes pelo caso ângulo – ângulo, α é comum e os dois triângulos são retângulos. Usando a definição de cotangente de α no triângulo AOB temos:

$$cotg \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

Da semelhança dos triângulos temos:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FO}}$$

Como \overline{FO} é o raio do círculo e mede 1, concluímos que $cotg \alpha = \overline{FE}$

Considerando que $tg \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ e $cotg \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$ observamos que

$$tg \alpha = \frac{1}{cotg \alpha} \text{ logo } \overline{CD} = \frac{1}{\overline{FE}}.$$

3.3. Secante e cossecante no ciclo trigonométrico

As razões secante e cossecante são definidas como:

$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{coseno}}$$

$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{seno}}$$

E podem ser representadas de duas formas no círculo trigonométrico.

I – Usando a figura 12 e as definições, temos:

$$a) \sec \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} \rightarrow \sec \alpha = \frac{1}{\frac{\overline{OB}}{\overline{AO}}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}$$

Da semelhança dos triângulos AOB e COD obtemos que $\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OD}}$

Como \overline{AO} e \overline{OD} são raios do círculo e medem 1, concluímos que $\sec \alpha = \overline{CO}$.

$$b) \text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \rightarrow \text{cossec } \alpha = \frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

Da semelhança dos triângulos AOB e EOF obtemos que $\frac{AO}{AB} = \frac{EO}{FO}$

Como \overline{AO} e \overline{FO} são raios do círculo e medem 1, concluímos que $\text{cossec } \alpha = \overline{EO}$.

II – Outra forma de determinarmos a secante e cossecante no círculo trigonométrico é utilizar os eixos dos senos e dos cossenos como referência e traçar um segmento de reta tangente ao raio que determina o ângulo e intercepta estes eixos (figura 13).

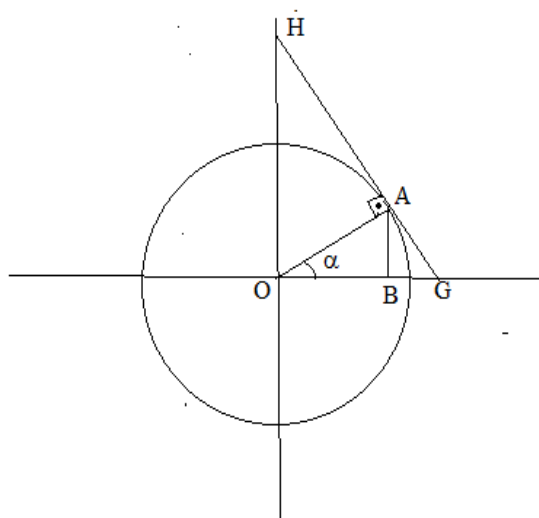


Figura 13: Círculo trigonométrico – secante e cossecante

Secante

Usando a definição $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ e considerando o triângulo AOB temos $\text{sec } \alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$. Os triângulos AOB e GOA são semelhantes (caso Ângulo – Ângulo), assim identificamos a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{AO}}$$

Sendo \overline{AO} o raio unitário concluímos que $\text{sec } \alpha = \overline{GO}$

Cossecante

Usando a definição $\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ e considerando o triângulo AOB temos $\text{cossec } \alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$.

Os triângulos AOB e OHA são semelhantes (caso Ângulo – Ângulo), assim identificamos a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HO}}{\overline{AO}}$$

Sendo \overline{AO} o raio unitário concluímos que **$\operatorname{cosec} \alpha = \overline{HO}$**

4. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Observando o círculo trigonométrico, as razões trigonométricas representadas por segmentos de reta e os triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e obter as seguintes relações trigonométricas:

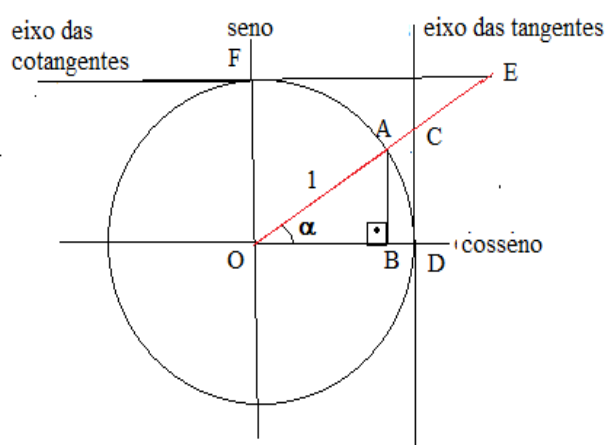


Figura 14: Círculo trigonométrico e teorema de Pitágoras

a) Triângulo AOB

$$1^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 \quad \rightarrow \quad 1 = \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha$$

b) Triângulo COD

$$\overline{CO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{CD}^2 \quad \rightarrow \quad \text{sec}^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha$$

c) Triângulo EOF

$$\overline{EO}^2 = \overline{FO}^2 + \overline{EF}^2 \quad \rightarrow \quad \text{cosec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha$$

4.1. Razões trigonométricas da soma dois ângulos

Podemos utilizar semelhança de triângulos para determinar as razões trigonométricas da soma e da diferença de ângulos.

Na figura a seguir identificamos alguns triângulos retângulos nos quais podemos usar as definições de seno e cosseno.

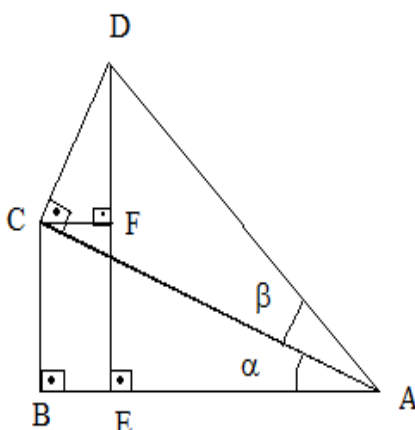


Figura 15: Triângulos retângulos – soma de ângulos

Triângulo ABC

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Triângulo ACD

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

4.1.1. Seno da soma de dois ângulos **sen** ($\alpha + \beta$)

No triângulo AED temos:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}$$

O triângulo ABC é semelhante ao triângulo CFD, retângulo em F, que define:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$$

Considerando essas definições e a figura, temos:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF} + \overline{FD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}}$$

$$\overline{EF} = \overline{CB} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha \quad \text{e} \quad \overline{FD} = \overline{CD} \cdot \text{cos } \alpha$$

Substituindo essas igualdades obtemos:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CD} \cdot \text{cos } \alpha}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \text{sen } \alpha + \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \cdot \text{cos } \alpha$$

Então

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{cos } \beta \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cdot \text{cos } \alpha$$

4.1.2. Cosseno da soma de dois ângulos $\text{cos}(\alpha + \beta)$

Observando a figura 15 as relações trigonométricas nela identificadas e o triângulo AED, temos:

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

Temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB} - \overline{BE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{BE}}{\overline{AD}}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \text{cos } \alpha \quad \text{e} \quad \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{CD} \cdot \text{sen } \alpha$$

Substituindo essas igualdades obtemos:

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AC} \cdot \text{cos } \alpha}{\overline{AD}} - \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \alpha}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \text{cos } \alpha - \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \cdot \text{sen } \alpha$$

Então $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$

4.1.3. Tangente da soma de dois ângulos $\text{tg}(\alpha + \beta)$

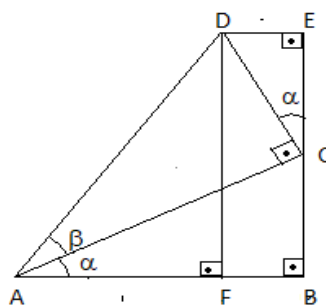


Figura 16: Tangente da soma

Considerando o triângulo AFB e a definição de tangente, temos:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}$$

Considerando o triângulo ABC e as definições de razões trigonométricas, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$tg \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = tg \alpha \cdot \overline{AB}$$

Considerando o triângulo ACD e as definições de razões trigonométricas, temos:

$$\cos \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$$

$$tg \beta = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = tg \beta \cdot \overline{AC} \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = tg \beta \cdot \frac{\overline{AB}}{\cos \alpha}$$

Considerando o triângulo CED e as definições de razões trigonométricas, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{DC}} \quad \rightarrow \quad \overline{CE} = \cos \alpha \cdot \overline{DC} \quad \rightarrow \quad \overline{CE} = \cos \alpha \cdot tg \beta \cdot \frac{\overline{AB}}{\cos \alpha} \quad \rightarrow \quad \overline{CE} = tg \beta \cdot \overline{AB}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}}$$

$$tg \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \quad \rightarrow \quad \overline{DE} = tg \alpha \cdot \overline{CE} \quad \rightarrow \quad \overline{DE} = tg \alpha \cdot tg \beta \cdot \overline{AB}$$

Observando a figura nº e estas relações concluímos:

$$\overline{DF} = \overline{BC} + \overline{CE} \quad \rightarrow \quad \overline{DF} = tg \alpha \cdot \overline{AB} + tg \beta \cdot \overline{AB} \quad \rightarrow \quad \overline{DF} = \overline{AB} \cdot (tg \alpha + tg \beta)$$

$$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{DE} \quad \rightarrow \quad \overline{AF} = \overline{AB} - tg \alpha \cdot tg \beta \cdot \overline{AB} \quad \rightarrow \quad \overline{AF} = \overline{AB} \cdot (1 - tg \alpha \cdot tg \beta)$$

Como $tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}$, temos:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB} \cdot (tg \alpha + tg \beta)}{\overline{AB} \cdot (1 - tg \alpha \cdot tg \beta)} \quad \rightarrow \quad tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}$$

4.1.4. Dobro de ângulo

Seno do dobro de um ângulo

Se considerarmos $\sin(2 \cdot \alpha)$ como $\sin(\alpha + \alpha)$ e substituirmos na figura anterior β por α obtemos, sem perda de generalidade, que:

$$\text{sen}(2.\alpha) = \text{sen}(\alpha + \alpha)$$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}$$

E com as definições e igualdades já identificadas temos:

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \frac{\overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CD} \cdot \text{cos } \alpha}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \text{sen } \alpha + \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\text{sen}(2.\alpha) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$$

Cosseno do dobro de um ângulo

Da mesma forma podemos considerar $\text{cos}(2.\alpha)$ como $\text{cos}(\alpha + \alpha)$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AC} \cdot \text{cos } \alpha}{\overline{AD}} - \frac{\overline{CD} \cdot \text{sen } \alpha}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \text{cos } \alpha - \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos}(2.\alpha) = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

Tangente do dobro de um ângulo

Se considerarmos $\text{tg}(2.\alpha)$ como $\text{tg}(\alpha + \alpha)$ podemos substituir β por α obtendo:

$$\text{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \alpha} \rightarrow \text{tg}(2.\alpha) = \frac{2 \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

4.2. Razões trigonométricas da diferença de dois ângulos

Considerando a figura a seguir, onde destacamos triângulos retângulos, podemos aplicar as definições de seno e cosseno.

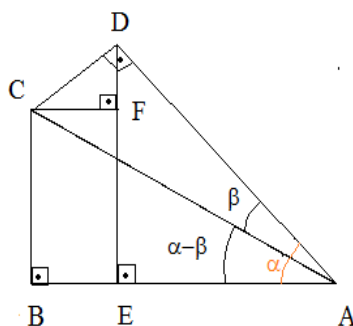


Figura 17: Triângulos retângulos, diferença de ângulos

No triângulo AED temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

No triângulo ADC temos:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

No triângulo DFC temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$$

4.2.1. Seno da diferença de dois ângulos ***sen*** ($\alpha - \beta$)

No triângulo ABC temos:

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\operatorname{cos} (\alpha - \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Considerando essas definições e a figura, temos:

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE} - \overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \overline{AD} - \operatorname{cos} \alpha \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} - \frac{\operatorname{cos} \alpha \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}}$$

Assim temos:

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} - \operatorname{cos} \alpha \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Concluimos que:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

4.2.2. Cosseno da diferença de dois ângulos $\cos(\alpha - \beta)$

Considerando essas definições e a figura, temos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

E como $\overline{EB} = \overline{FC}$, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE} + \overline{EB}}{\overline{AC}} = \frac{\cos \alpha \cdot \overline{AD} + \text{sen} \alpha \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}} = \cos \alpha \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} + \text{sen} \alpha \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

Assim concluímos que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$$

4.2.3. Tangente da diferença de dois ângulos $\text{tg}(\alpha - \beta)$

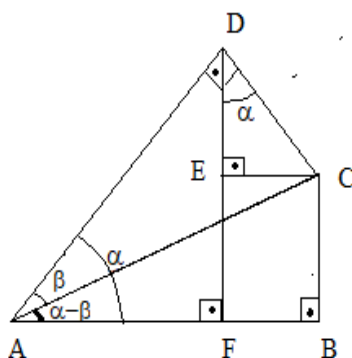


Figura 18: Tangente da diferença de dois ângulos

Considerando a figura 18 e as definições de razões trigonométricas, temos:

No triângulo ABC

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Observamos ainda que $\overline{BC} = \overline{EF} = \overline{DF} - \overline{DE}$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} \quad \text{e} \quad \overline{FB} = \overline{CE}$$

No triângulo AFD

$$\text{tg} \alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} \rightarrow \overline{DF} = \text{tg} \alpha \cdot \overline{AF}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AF}}{\cos \alpha}$$

No triângulo ACD

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{CD} = \operatorname{tg} \beta \cdot \overline{AD}$$

Substituindo \overline{AD} temos: $\overline{CD} = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{\overline{AF}}{\cos \alpha}$

No triângulo CED

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{EC}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{EC} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \overline{DE}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \rightarrow \overline{DE} = \cos \alpha \cdot \overline{DC} \rightarrow \overline{DE} = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{\overline{AF}}{\cos \alpha}$$

Logo $\overline{DE} = \operatorname{tg} \beta \cdot \overline{AF}$

Assim podemos dizer que $\overline{EC} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \overline{AF}$

Retomando o triângulo ABC

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{DF} - \overline{DE}}{\overline{AF} + \overline{EC}} \rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \overline{AF} - \operatorname{tg} \beta \cdot \overline{AF}}{\overline{AF} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \overline{AF}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{AF} \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}{\overline{AF} \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)}, \text{ concluímos que:}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

5. LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são aplicadas no triângulo retângulo para relacionar as medidas de seus lados e ângulos. Para triângulos quaisquer utilizamos as leis dos senos e dos cossenos.

Podemos demonstrar essas leis, que na verdade são teoremas, através da semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.

5.1. Lei dos senos

Considere o triângulo ABC e a altura AH em relação ao lado BC.

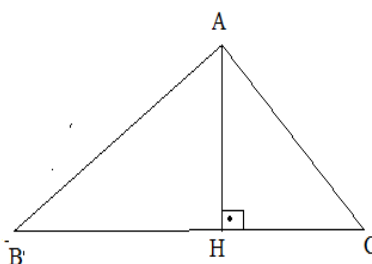


Figura 19: Triângulo qualquer e altura

Os triângulos ABH e ACH são retângulos, desta forma podemos aplicar a definição de seno.

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \text{sen } \hat{B}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \hat{C}$$

Assim temos:

$$\overline{AB} \cdot \text{sen } \hat{B} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \hat{C}$$

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}}$$

Notemos que se traçarmos a altura em relação ao lado AC teremos de forma análoga que

$$\frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{\overline{BC}}$$

Concluimos desta forma que

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}}$$

Supondo um caso particular com $\hat{A} = 90^\circ$ e aplicando na fórmula da lei dos senos

$$\frac{\text{sen } 90^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{1}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}}$$

Concluimos desta forma que $\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ e $\text{sen } \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ que são as definições dos senos dos ângulos agudos em um triângulo retângulo.

5.1.1. Triângulo inscrito em uma circunferência

Sabemos que por três pontos coplanares não colineares podemos traçar uma circunferência. Desta forma todo triângulo pode ser inscrito em uma circunferência.

Considere o triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e raio r.

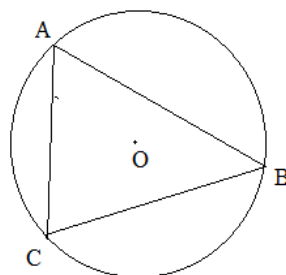


Figura 20: Triângulo inscrito na circunferência

Traçando o diâmetro \overline{AD} e o segmento de reta \overline{BD} , obtemos o triângulo ABD retângulo em B por definição do arco capaz de 90° .

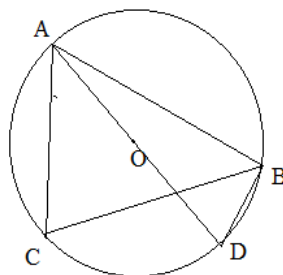


Figura 21: Triângulos inscritos – arco capaz 90°

Como o triângulo ABD é retângulo temos, por definição que $\text{sen } \hat{D} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ e como os ângulos C e D estão associados ao mesmo arco AB, e por construção, $\overline{AD} = \text{diâmetro} = 2 \cdot r$, concluímos

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{2 \cdot r} \rightarrow \frac{\text{sen } \hat{C}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2 \cdot r} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot r$$

De forma análoga teremos:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \hat{B}} = 2 \cdot r \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} = 2 \cdot r$$

Assim obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} = 2 \cdot r$$

5.2. Lei dos cossenos

Vamos utilizar o triângulo ABC e o teorema de Pitágoras

Considere o triângulo ABC e a altura AH em relação ao lado BC.

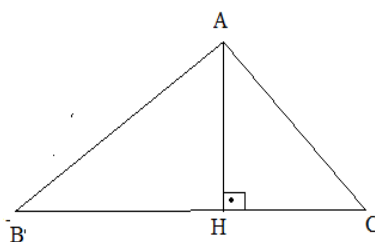


Figura 22: Triângulo ABC e sua altura (AH)

Sendo os triângulos ABH e ACH retângulos, sabemos que

Do triângulo ABH

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \quad \rightarrow \quad \overline{BH} = \overline{AB} \cdot \cos \hat{B}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \sin \hat{B}$$

$$\text{Notamos que } \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ACH temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$$

Substituindo as igualdades anteriores nesta fórmula encontramos:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (\overline{AB} \cdot \sin \hat{B})^2 + (\overline{BC} - \overline{BH})^2 \\ &\rightarrow \overline{AC}^2 = (\overline{AB} \cdot \sin \hat{B})^2 + (\overline{BC} - \overline{AB} \cdot \cos \hat{B})^2 \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades da potenciação e produtos notáveis, obtemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \sin^2 \hat{B} + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \hat{B} + \overline{AB}^2 \cdot \cos^2 \hat{B}$$

Organizando esta equação

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \sin^2 \hat{B} + \overline{AB}^2 \cdot \cos^2 \hat{B} + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \hat{B}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \cdot (\overbrace{\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B}}^1) + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \hat{B}$$

Desta forma temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \hat{B}$$

De forma análoga obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{C}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \hat{A}$$

Cabe ressaltar que em um triângulo qualquer se conhecermos três de seus elementos, onde pelo menos um deles é um lado, podemos calcular os outros elementos utilizando a lei dos senos ou lei dos cossenos.

6. APLICAÇÕES

6.1. Números complexos

Quando resolvemos uma equação do 2º grau e o discriminante é negativo dizemos que esta equação não possui raízes reais.

$$x^2 + 9 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9}.$$

Para resolver tal impossibilidade e podermos resolver todas as equações do 2º, dentre outras situações, o sistema de números foi ampliado com a criação dos **números complexos**.

Inicialmente foi definido um novo número: $i = \sqrt{-1}$, chamado de **unidade imaginária**. Assim, um número complexo z é indicado pela expressão algébrica $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. No número complexo $z = a + bi$, a é chamado de parte real e será denotado por $\text{Re}(z) = a$, e b é a parte imaginária de z e denotaremos por $\text{Im}(z) = b$. Dessa forma na equação $x^2 + 9 = 0$, por exemplo, determinamos o valor de x fazendo:

$$x = \pm\sqrt{-9} \rightarrow x = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x = \pm 3 \cdot i, \text{ onde } \text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) = \pm 3.$$

Com a impossibilidade de encontrar na reta dos números reais a solução para a raiz quadrada de -1 (de onde obtemos todas as outras raízes quadradas de números negativos) surgiu a hipótese de que $\sqrt{-1}$ se encontrava no plano, sobre o eixo vertical, no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

6.1.1. Operações com números complexos

a) Adição e subtração

Para adicionarmos ou subtraírmos dois números complexos, adicionamos ou subtraímos as partes reais e as partes imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

b) Multiplicação

Multiplicamos números complexos como multiplicamos binômios (distributividade), usando : $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

c) Divisão

Para dividir dois números complexos multiplicamos o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor.

O *conjugado* de um número complexo $(a + bi)$ é o número complexo $(a - bi)$ e de forma análoga o **conjugado** de $(a - bi)$ é $(a + bi)$. A representação do conjugado de z é \bar{z} . Se $z = 2 - 3i$, então $\bar{z} = 2 + 3i$. Não confundir conjugado com simétrico. O simétrico de $z = a + bi$ é $(-z) = -a - bi$.

Sempre que multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado obtemos um número real.

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 - b^2i^2) = a^2 + b^2$$

Considere z_1 e z_2 números complexos tais que $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e $\bar{z}_2 = c - di$, o conjugado de z_2 . A divisão entre z_1 e z_2 pode ser indicada por $\frac{z_1}{z_2}$ e calculada da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2}$$

Propriedades:

i) $\overline{\overline{z}} = z$;

ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

iii) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$;

iv) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

v) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

vi) $z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$

d) Potências de i :

Observe a sequência de potências da unidade imaginária e suas regularidades.

$i^0 = 1$		$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$i^1 = i$		$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ $= -1$		$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1)$
$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$		$i^7 = i^6 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$

Figura 23 – Potências de i

As quatro potências de i na coluna da esquerda repetem-se nos quatro casos seguintes na coluna da direita. Este ciclo $1, i, -1, -i$ repete-se indefinidamente. Então, para simplificar i^x para $x > 4$, buscamos o maior múltiplo de 4 contido em x .

$$i^{15} = i^{12} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i)$$

$$i^{15} = -i$$

6.1.2. Representação dos números complexos

Podemos representar um número complexo em sistema de coordenadas chamado plano de Argand-Gauss. Este sistema, semelhante ao sistema cartesiano, é formado por

dois eixos perpendiculares. No eixo vertical relacionamos a parte imaginária do número complexo e no eixo horizontal a parte real deste número. Desta forma o número complexo $z = a + bi$ é representado no sistema de eixos da seguinte forma:

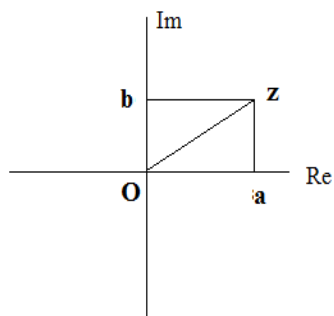


Figura 23: Plano Argand – Gauss

O comprimento do segmento de reta \overline{OZ} é chamado de **módulo** do número complexo z e representado por $|z|$. O ângulo entre o eixo horizontal e o segmento \overline{OZ} é chamado de **argumento** do número complexo z .

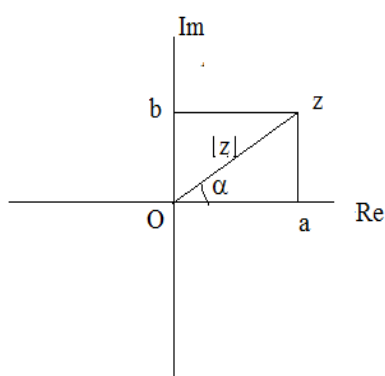


Figura 24: Plano Argand – Gauss - argumento

Na figura anterior verificamos um o triângulo retângulo com vértices z a O . Aplicando as razões trigonométricas obtemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{|z|}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{a}{|z|}$$

E também podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obter:

$$(|z|)^2 = a^2 + b^2$$

Então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

6.1.3. Forma trigonométrica de um número complexo

Todo número complexo pode ser expresso em função do seu módulo e do seu argumento. Dizemos que esta representação é a forma trigonométrica ou polar do número complexo. Veremos que escrever os números complexos usando a forma trigonométrica tornará mais simples as fórmulas do produto, potenciação e radiciação dos números complexos.

Seja $z = a + bi$, em $z \neq 0$ e considerando as razões trigonométricas, podemos escrever

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z| \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Substituindo os valores de a e b em $z = a + bi$, obtemos:

$$z = |z| \cdot \operatorname{cos} \alpha + |z| \cdot \operatorname{sen} \alpha i$$

$$z = |z| \cdot (\operatorname{cos} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$$

6.1.4. Fórmulas de Moivre

As fórmulas de Moivre referem-se a potenciação e radiciação de números complexos escritos na forma trigonométrica.

Sabemos que para calcularmos uma potência devemos fazer um produto de fatores iguais.

Para facilitar o entendimento vejamos o exemplo da multiplicação entre dois números complexos z e w .

Considerado $z = |z| \cdot (\operatorname{cos} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$ e $w = |w| \cdot (\operatorname{cos} \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta)$, o produto $z \cdot w$ é obtido fazendo:

$$|z| \cdot (\operatorname{cos} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot |w| \cdot (\operatorname{cos} \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

$$|z| \cdot |w| \cdot (\operatorname{cos} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\operatorname{cos} \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

Expandindo esse produto chegamos a

$$|z| \cdot |w| \cdot [\operatorname{cos}(\alpha + \beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

De onde concluímos que houve um produto entre os módulos e uma rotação entre os argumentos.

1ª Lei de Moivre: Potenciação de números complexos

Sendo o número complexo $z = (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$, indicamos o valor de z elevado ao quadrado por:

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$$

$$z^2 = |z| \cdot |z| \cdot [\cos(\alpha + \alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \alpha)]$$

$$z^2 = |z|^2 \cdot [\cos(2 \cdot \alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \alpha)]$$

Desta forma para z elevado ao cubo temos:

$$z^3 = |z|^3 \cdot [\cos(3 \cdot \alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(3 \cdot \alpha)]$$

Seguindo esse raciocínio concluímos que:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \alpha)]$$

2ª Lei de Moivre: Radiciação de números complexos

Considerando o número complexo $z = (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$ e $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$, quando a é um número real, m é um número inteiro, n é um número natural diferente de zero, podemos escrever que :

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

Aplicando essa igualdade na 1ª lei de Moivre, obtemos:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{n} \cdot \alpha\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n} \cdot \alpha\right) \right]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n} \right)$$

6.2. Área de um triângulo qualquer

Conhecendo um dos lados do triângulo, que chamaremos de base, e a altura relativa a esse lado, dizemos que sua área é dada por:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

No entanto, se tivermos a medida de dois lados do triângulo e a medida de um do ângulo, formado por esses lados, podemos determinar sua área.

Considere o triângulo ABC, qualquer, a altura \overline{CH} em relação ao lado \overline{AB} e o ângulo α formado pelos lados \overline{AB} e \overline{AC} .

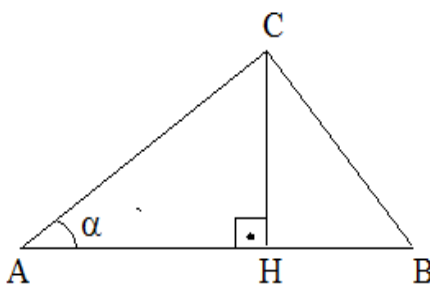


Figura 25: Triângulo qualquer – altura e ângulo formado por dois de seus lados

Dessa forma temos o triângulo ACH, retângulo em H, no qual podemos aplicar a definição de seno.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \text{ ou } \overline{CH} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha$$

Substituindo esta relação na fórmula do cálculo da área do triângulo, temos:

$$\text{Área} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha}{2}$$

6.3. Coeficiente angular de uma reta

A representação geométrica de uma função do 1º grau é uma reta, também chamada de gráfico da função do 1º grau.

A fórmula geral de uma função do 1º grau é dada por $f(x) = ax + b$, onde a é o **coeficiente angular**, valor que determina a inclinação da reta e b é o **coeficiente linear**, ponto em que a reta intercepta o eixo y, ou seja, $x = 0$ e $y = b$ ou o ponto de coordenadas $(0, b)$.

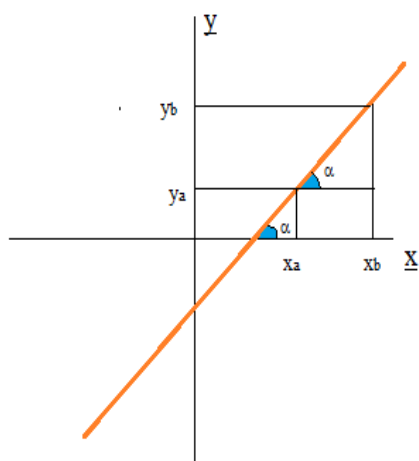


Figura 26: Inclinação da reta

A inclinação da reta é definida pela tangente do ângulo α que a reta forma com o eixo x . Assim temos que $a = \text{tg}\alpha$. Observando a figura 28 e considerando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Casos particulares:

- $\alpha = 0^\circ \rightarrow \text{tg}\alpha = 0$, reta paralela ao eixo x .
- $0^\circ < \alpha < 90^\circ \rightarrow \text{tg}\alpha > 0$, reta crescente.
- $\alpha = 90^\circ \rightarrow \text{tg}\alpha$ não existe, a reta é vertical (paralela ao eixo y), não representa uma função definida de x para y .
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \text{tg}\alpha < 0$, reta decrescente.

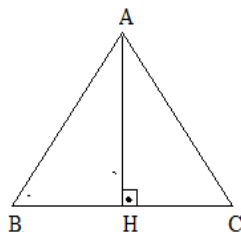
7. ATIVIDADES

7.1. Atividade 1

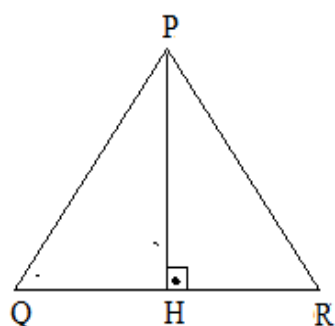
Nessa atividade queremos que o aluno utilize os conhecimentos sobre medidas de ângulos internos do triângulo equilátero, altura, mediana e bissetriz de um triângulo e com auxílio do teorema de Pitágoras possa determinar a medida da altura do triângulo equilátero e calcular as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60° . E, após fazer os cálculos dos itens a) e b), possa concluir que os valores do seno, cosseno e tangente dependem da medida do ângulo e se dois triângulos retângulos possuem mais um ângulo congruente, esses triângulos são semelhantes logo a razão entre seus lados é a mesma.

Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60° nos triângulos equiláteros a seguir:

- a) Cada um dos lados mede 5 cm e \overline{AH} é a altura desse triângulo em relação ao lado \overline{BC} (lembre-se que, no triângulo equilátero, a altura, a mediana e a bissetriz coincidem).



- b) Cada um dos lados mede 10cm e o segmento \overline{PH} é a altura desse triângulo em relação ao lado \overline{QR} .



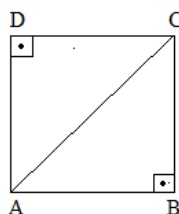
- c) Compare e comente os resultados obtidos nos itens a) e b).

7.2. Atividade 2

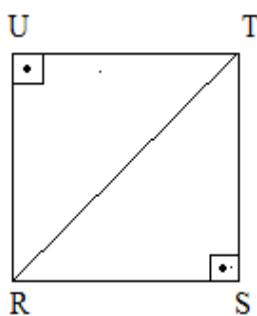
Nessa atividade usaremos um quadrado para determinar as razões trigonométricas do ângulo de 45° . Para isso o aluno deverá utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a medida da diagonal do quadrado e os conhecimentos sobre quadriláteros para calcular as razões trigonométricas do ângulo de 45° . E, após fazer os cálculos dos itens a) e b), possa concluir que os valores do seno, cosseno e tangente dependem da medida do ângulo e se dois triângulos retângulos possuem mais um ângulo congruente, esses triângulos são semelhantes logo a razão entre seus lados é a mesma.

Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 45° nos quadrados a seguir:

- a) Cada um dos lados mede 5 cm e \overline{AC} é a diagonal desse quadrado.



- b) Cada um dos lados mede 10 cm e \overline{RT} é a diagonal desse quadrado.



c) Compare e comente os resultados obtidos nos itens a) e b).

7.3. Atividade 3

Essa atividade deve funcionar como uma oficina. Nela queremos que o aluno preencha uma tabela trigonométrica com valores aproximados das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, partindo da construção de triângulos retângulos nos quais um dos ângulos agudos tem seu valor registrado na tabela previamente confeccionada.

Começamos com a construção de um triângulo retângulo, tomando como base um dos catetos com medida sugerida de 10 cm. Em uma das extremidades devemos construir um ângulo de 90° com auxílio do transferidor ou esquadros, e na outra extremidade vamos construir o ângulo para o qual vamos determinar as razões trigonométricas. Concluída a construção do triângulo vamos medir a hipotenusa e o outro cateto com auxílio de uma régua e aproximação em milímetros. De posse dessas medidas podemos calcular as razões trigonométricas do ângulo indicado e anotá-las devidamente na tabela. Para os cálculos poderá ser utilizada uma calculadora. Depois de completada a tabela podemos comparar os valores obtidos com os encontrados em uma tabela trigonométrica ou usando uma calculadora científica.

Construção de uma tabela trigonométrica com valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos com medidas de 20° , 30° , 40° , 45° , 60° , 70° e 80° .

Serão necessários os seguintes materiais:

- Papel
- Calculadora

- Lápis
- Borracha
- Régua
- Compasso
- Esquadros
- Transferidor
- Tabelas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°			
30°			
40°			
45°			
50°			
60°			
70°			
80°			

Para cada uma dessas medidas deverá ser construído um triângulo retângulo no qual um dos ângulos agudos terá esta medida.

Sugestões:

- Para facilitar devemos construir um segmento de reta medindo 10cm (este valor não é obrigatório) que será um dos lados do triângulo.
- Em seguida construir, em uma das extremidades do segmento de reta, o ângulo agudo indicado na tabela, com o auxílio do transferidor.

- Na outra extremidade do segmento de reta, construir um ângulo de 90° com o auxílio dos esquadros ou compasso e régua. Construindo assim um triângulo retângulo.
- Medir, com a régua, os comprimentos da hipotenusa e dos catetos desse triângulo.
- Utilizar esses valores e as relações trigonométricas para calcular o seno, o cosseno e da tangente do ângulo em questão.
- Anotar os valores calculados na tabela.

Opcional - Após completar a tabela compare os resultados utilizando uma calculadora científica ou uma tabela trigonométrica

7.4. Atividade 4

Essa atividade funcionará como uma oficina onde construiremos um teodolito caseiro com alguns materiais reaproveitados.

Inicialmente teremos uma explicação do funcionamento de um teodolito e suas aplicações.

Partiremos então para a construção de um modelo deste instrumento com os materiais solicitados, previamente, aos alunos. Concluída a montagem vamos utilizar o teodolito para medir distâncias inacessíveis, no caso altura de uma parede, uma árvore ou uma construção.

Serão dadas orientações de como posicionar o teodolito em relação ao solo e como focalizar o ponto mais alto do objeto a ser medida a altura. De posse das medidas do solo ao teodolito e deste ao objeto e a medida do ângulo pelo qual foi observado o ponto mais alto do objeto, será construído um triângulo retângulo com essas medidas indicadas. Para obtermos a altura do objeto devemos calcular a tangente do ângulo utilizado para focá-lo, não esquecendo de adicionar a distância do teodolito ao solo.

Construção de um teodolito¹ caseiro

Para construir o teodolito serão necessários os seguintes materiais:

- Pote plástico com tampa (tipo de margarina ou de requeijão)
- Canudo plástico
- Dois pedaços de isopor ou madeira 20cm x 20cm

- Pedaco de arame cujo comprimento é o dobro do diâmetro da boca do pote
- Cola de isopor ou pregos no caso de usar madeira
- Fita crepe
- Fotocópias de um transferidor de 360° e de uma tabela trigonométrica de 1° a 89°

Montagem

- + Colar os pedaços de isopor (ou pregar as madeiras) em L
- + Recortar e colar a cópia do transferidor no isopor (ou na madeira)
- + Atravessar a boca do pote com o arame no sentido de seu diâmetro, deixando sobras iguais para os lados de fora do pote
- + Colar o canudo no fundo do pote, paralelo ao arame
- + Colar a tampa do pote no centro da cópia do transferidor e encaixar o pote



Foto teodolito caseiro

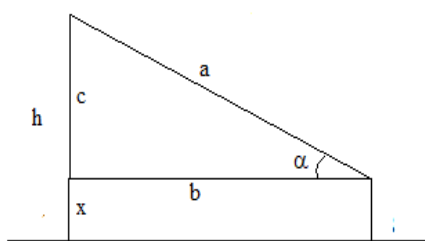
Como se usa o Teodolito:

Posicione o teodolito caseiro de modo que a sua base fique perpendicular ao objeto que vai observar, por exemplo, um ponto da intersecção entre uma das paredes da sala e o seu teto. Verifique as distâncias que podem ser medidas utilizando apenas uma trena e as que requerem o auxílio de uma escada. As medidas que requerem uma escada são consideradas inacessíveis. Através do canudo mire o pico do objeto (o ponto mais alto) e ser medida a altura, assim o arame marcará um ângulo no transferidor e a leitura será realizada. Com esse ângulo e os conhecimentos de Trigonometria pode-se medir a altura inacessível.

¹ Um teodolito é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais, aplicado em diversos setores como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

A situação pode ser representada com a figura a seguir:

- a altura inacessível, representada pela letra h , sem desprezar a altura x do suporte (base) do teodolito.
- a distância do observador até a linha vertical que passa pelo ponto mais alto, representada por b .
- a hipotenusa (a) do triângulo retângulo.
- o ângulo α obtido no Teodolito



Esboço para calcular altura com teodolito

7.5. Atividade 5

Essa atividade é baseada em um enigma conhecido como “paradoxo de Curry” ou paradoxo da área do triângulo. Na verdade a figura não é um triângulo e sim um quadrilátero, resultado de uma ilusão de ótica.

Inicialmente são apresentadas as duas figuras onde falta um quadradinho em uma delas. Uma situação que deve levar a curiosidade dos alunos para buscar uma explicação. Com a sugestão de serem calculadas as tangentes dos ângulos $\widehat{B\hat{A}C}$, $\widehat{F\hat{A}D}$ e $\widehat{E\hat{D}C}$, vamos verificar que esses valores são diferentes e como a tangente de um ângulo indica a inclinação de uma reta, poderemos concluir que as inclinações dos segmentos \overline{AD} , \overline{CD} e \overline{AD} são diferentes logo os pontos A, C e D não estão alinhados

Observe as figuras que foram desenhadas sobre uma malha quadriculada.

Como podemos explicar o quadradinho a menos na segunda figura?

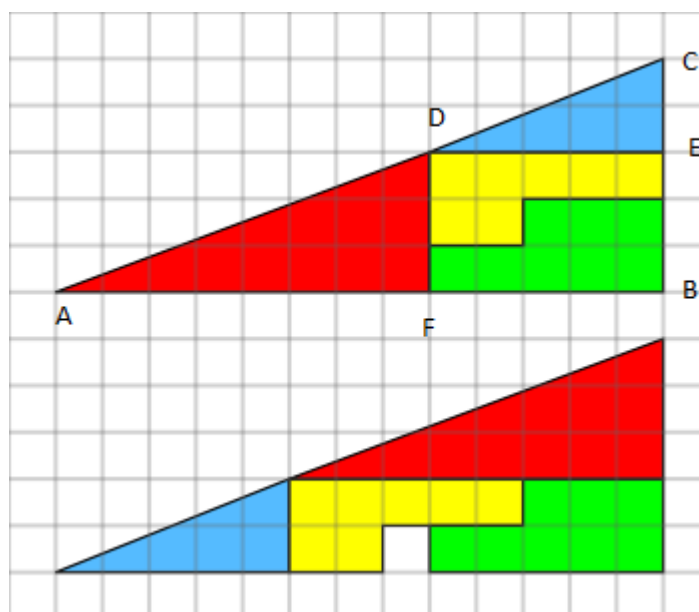


Figura 27: Paradoxo de Curry

Sugestão: Calcule as tangentes dos ângulos \widehat{BAC} , \widehat{FAD} e \widehat{EDC} , e verifique se os pontos A, D e C estão alinhados.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta deste trabalho é levar aos alunos opções de comprovação das razões e relações trigonométricas através de experimentos práticos, análise de figuras geométricas, nas quais destaca-se o triângulo retângulo, e desafios matemáticos.

De modo geral é necessário que haja uma significação dos conteúdos acadêmicos, principalmente na área de Matemática, para obtermos a atenção e a participação dos alunos nas propostas que nós professores levamos para sala de aula.

Devemos também estar conectados com as expectativas dos alunos e novidades que o mundo globalizado proporciona, para que a interação na comunicação professor-aluno-professor traga mais dinamismo, proximidade e mostrar ao aluno que ele pode contribuir no desenvolvimento das atividades e conteúdos propostos.

As atividades que serão propostas aos alunos, têm como objetivos: determinar os valores das razões trigonométricas independente das medidas dos lados do triângulo desde que sejam proporcionais; calcular valores aproximados dessas razões usando materiais simples e de fácil acesso; aplicar as definições das razões trigonométricas na solução de problemas práticos (distâncias inacessíveis) e na solução do paradoxo de Curry.

Vale ressaltar que nas atividades de aprendizagem será incentivada a formação de grupos de alunos para que haja uma troca de experiências, uma ajuda mútua e seja mostrada a importância da convivência em equipe. Experiências que deverão ser levadas para vida profissional.

Precisamos ter bem claro que diante de toda tecnologia disponível é mais prazeroso, para a maioria das pessoas, buscarem diversão em detrimento do conhecimento acadêmico. Para resgatarmos esse interesse é necessário um planejamento criterioso não só das atividades, mas também da forma que serão propostas. O aluno deverá perceber sua importância no processo ensino-aprendizagem e que é capaz de estabelecer e aplicar os

conceitos nas soluções dos problemas propostos. Esse planejamento nem sempre é tão simples e algumas vezes não traz o retorno esperado devido a uma série de fatores. Entretanto, se conseguirmos despertar o interesse ou a curiosidade dos alunos nas atividades, estaremos dando um grande passo para que eles percebam a necessidade de novos conhecimentos, inclusive com auxílio da tecnologia, para sua formação como indivíduo de uma sociedade.

9. BIBLIOGRAFIA

BORGES, L. B. **Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria**. Dissertação de Mestrado UnG 2020.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**, 3ª. ED São Paulo: Blucher 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio: Matemática**. Brasília: MEC, 1999.

_____. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**.

Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Acesso em 01/06/2020.

_____. Ministério da Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**.

Disponível em:

http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192

Acesso em 01/06/2020.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B. **Geometria e Trigonometria: dificuldades dos Professores de Matemática do Ensino Fundamental**. In: John A. Fossa (org). *Presenças Matemáticas*. Natal: Edufrn, 2004. p. 9 - 33.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje, 9o. ano: na medida certa**, 1a. ed. São Paulo: Leya, 2015.

DANTE, L. R. **Matemática**, volume único, 1a. ed. São Paulo: Atica, 2005.

DEMIR, Ö. **Students' Concept development and understanding of sine and cosine functions: A New Theoretical and Educational Approach**. Dissertação de Mestrado, 2012. Univesiteit van Amsterdam.

DEMIR, Ö; HECK, A. **A new learning trajectory for trigonometric functions**. Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 2013, p 119-124.

FEIJÓ, R.S.A.A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de Trigonometria. Um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal**. Dissertação de Mestrado UNB 2018.

FREITAS, R. S. de; . FARIAS, M. C. de A.; GALDINO da Silva, J. L.; BARREIRO, J. L. P. **As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da Trigonometria.** In: III Congresso Nacional de Educação. Natal-RN: [s.n.], 2016.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria**, v. 3. 8a. ed. São Paulo: Atual Editora 2004.

KENNEDY, E. S., **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**, volume 5: Trigonometria, ed. Atual, São Paulo, 1992.

MIRANDA, S.M.C; PADILHA, S.L.; CIANI, A.B. **Trigonometria, Cálculo, Ensino e Aprendizagem.** Encontro Nacional de Educação Matemática SBEM, 2013.

MOORE, K. C. **The Role of quantitative and Covariational Reasoning in Developing Precalculus Students' Images of Angle Measure and Central Concepts of Trigonometry.** Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, 2010.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**, 3a. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

REIS, L. A. C. R; ALLEVATO, N. S. G. **O Ensino da Trigonometria no Ensino Médio: um levantamento sobre a produção acadêmica no banco de teses da CAPES (1987-2009).** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA. 1, 2011, Anais. São Paulo: SINPRO/SP, 2011. p.1-14

SILVEIRA, E. **Matemática Compreensão e prática**, 5^a. ed. São Paulo: Moderna 2018

WEBER, K. **Students' Understanding of Trigonometric Functions.** Mathematics Education Research Journal, Springer, 2005, 17, 91-112.