



Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

O decolar de um avião: uma proposta didática sobre números e funções complexas

Roberta Paula Brandão de Novais



PROFMAT

Rio Claro
2020



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O decolar de um avião: uma proposta didática sobre números e funções complexas

Roberta Paula Brandão de Novais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Rio Claro
2020

N935d Novais, Roberta Paula Brandão de
O decolar de um avião: uma proposta didática sobre números e
funções complexas / Roberta Paula Brandão de Novais. -- Rio Claro,
2020
129 p. : il., fotos

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Números Complexos. 2. Funções Complexas. 3. Cálculo
Diferencial. 4. Aerofólio. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Roberta Paula Brandão de Novais

O DECOLAR DE UM AVIÃO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA SOBRE
NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo
FFCLRP/USP/Ribeirão Preto (SP)

Rio Claro, 01 de julho de 2020

*Ao meu avô Miguel Brandão (in memoriam)
que antes de decolar num voo com destino à Eternidade,
deu-me o mais belo sorriso, em um leito de hospital,
quando pedi-lhe permissão para ir à Rio Claro,
fazer meu mestrado.
Aos meus pais, Carlos e Vera,
pelo incentivo e auxílio financeiro,
que tornaram este sonho possível.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS pelo dom da vida e fortalecimento nesses dois anos morando sozinha.

A jornada do mestrado não foi nada fácil, mas o apoio de algumas pessoas fizeram toda a diferença para chegar até aqui. Este título também é de vocês.

Começo agradecendo aqueles que foram os primeiros a acreditarem no meu voo com destino a sabedoria, meus pais Carlos e Vera que não mediram esforços para me ajudarem tanto financeiramente como pelo incentivo a sempre continuar os meus estudos.

O voo para chegar até aqui começou em 2017 com a decisão de fazer mestrado fora de Brasília. Apesar dos desafios contei com o apoio do meu irmão William, minha cunhada Janaína e dos meus chefes e mentores Rogério e Elson. Obrigada por mesmo discordando em um primeiro momento sabiam o quanto esse passo e decisão seriam importantes para o meu crescimento. O incentivo de vocês sem dúvidas foi essencial.

Minha primeira escala então foi em São Paulo para fazer o exame de acesso, gostaria de agradecer ao meu tio Domilto, minha tia Lucy, minhas primas Cy e Déa e meu primo Adalberto que não mediram esforços em me acolher, me levar para Rio Claro, e por todo carinho e atenção que me deram especialmente nestes anos, a vocês o meu muito obrigada.

Não poderia deixar de reconhecer e agradecer aos meus amigos Athos Macedo, Marlon e ao meu tio Aldecir pelo esforço e ajuda com a mudança. Não é qualquer pessoa que encara rodar pelo menos 885km e dormir no chão no primeiro dia com uma geladeira improvisada de balde e gelo. Cada cantinho da minha casa, todas as comidas que pude fazer no meu fogão, as roupas que lavei eu devo a vocês que me ajudaram com as instalações. A vocês a minha eterna gratidão.

A todos os meus colegas de curso, ao grupo de estudos que foi essencial para chegar na etapa final do mestrado. Em especial gostaria de agradecer ao grupo da Luluzinha e aos agregados (Margarete e Família, Roseli e Família, Ana Paula, Andreza, Ana Paula Brandão, Lilian, Paola e claro o muso Tiago). Vocês foram o presente que o meu sonho e São Paulo me deram. Gratidão por cada acolhimento, pela hospedagem, conversas, conselhos, apoio, acompanhamento no hospital e consultas, enfim por cada sexta feira e final de semana diferenciado que tivemos. Sem dúvidas a minha conquista hoje é a de vocês também.

Aos meus queridos professores de curso, o meu muito obrigado. Em especial, ao professor Dr. Jamil Viana e a professora Dra. Eliris Rizziolli, pelo apoio e confiança em dividirem comigo as turmas de Cálculo III da Ciências da Computação. Experiência única que vou levar para sempre em minha carreira e foi um dos motivos de procurar uma aplicação interessante para este trabalho. E claro que não poderia de deixar de citar a minha querida orientadora Dra. Marta Gadotti, obrigada por toda paciência, carinho, atenção tanto nas aula de Fundamentos de Cálculo como nas orientações. Sua docência

é sem dúvidas um espelho o qual quero seguir, aprendi muito com você estes anos.

A minha Dra. Tacianna Grego Peruzzi por todo cuidado, zelo e carinho comigo nestes anos em Rio Claro. Como costumava dizer, eu a via mais do que os meus familiares. Agradeço também ao seu esposo Engenheiro Elétrico Raphael Peruzzi, um dos responsáveis pelo projeto Embraer- the laser cutting cell, por sua atenção, colaboração e disponibilidade em me auxiliar com a aplicação deste trabalho.

Por fim agradeço a todos os familiares e amigos, que direta ou indiretamente mandaram mensagens durante esses dois anos e me incentivaram a seguir firme e a não desistir. E claro, não poderia esquecer dos piás de Curitiba e a Andressa que me ensinaram que "o futebol é a coisa mais importante dentre as menos importantes". A vocês que tiraram o meu mais belo sorriso em tempos em que o sorriso era difícil de sair, minha eterna gratidão.

*Sê humilde para evitar o orgulho,
mas voa alto para alcançar a sabedoria.*
Santo Agostinho

Resumo

Neste trabalho apresentamos o conjunto dos números complexos, os três tipos de representações e introduzimos funções elementares tratando como transformações no plano. Apresentamos a parte básica do cálculo abordando limite, continuidade e derivada de funções de uma variável complexa. Por fim, apresentamos uma proposta de aula experimental, utilizando a geometria do aerofólio como motivação para introduzir os números complexos e suas operações.

Palavras-chave: Números Complexos, Funções Complexas, Cálculo Diferencial, Aerofólio.

Abstract

In this work, we present the set of complex numbers, the three types of representations and introduce elementary functions, treating them as transformations in a plane. We present the basic part of calculation, approaching limit, continuity and derivative from functions of a complex variable. Finally, we present a proposal for an experimental class, using the geometry of the airfoil as a motivation to introduce complex numbers and their operations.

Keywords: Complex Numbers, Complex Functions, Differential Calculation, Airfoil.

Lista de Figuras

2.1	Plano complexo.	27
2.2	Interpretação de um número complexo como um vetor.	28
2.3	Interpretação geométrica da adição de números complexos.	28
2.4	Módulo de z	29
2.5	Interpretação geométrica das coordenadas cartesianas e polares de um número complexo.	30
2.6	Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos.	32
2.7	Conjugado (\bar{z}) de z	33
2.8	Interpretação geométrica da subtração de números complexos.	37
2.9	Interpretação geométrica do quociente de números complexos.	39
2.10	Representação geométrica da raiz cúbica de um número complexo.	47
3.1	Reta vertical $z = x_0 + yi$ no $z - plano$	53
3.2	Circunferência centrada na origem de raio e^{x_0} no $w - plano$	53
3.3	Reta horizontal $z = x + y_0i$ no $z - plano$	54
3.4	Transformação da reta horizontal $z = x + y_0i$ pela função $f(z) = e^z$	54
3.5	Função injetora.	55
3.6	Função logarítmica principal de z	59
3.7	Função inversa do Log	59
4.1	$z \in P$, com $x > 0$	79
4.2	$z \in P$, com $y > 0$	79
4.3	$z \in P$, com $y < 0$	80
4.4	Representação de $f'(z_0)$	88
4.5	$\beta = \alpha + \psi_0$	89
4.6	Curvas C_1 e C_2 no $z - plano$	90
4.7	Curvas S_1 e S_2 no $w - plano$	90
4.8	Transformação z^2 da reta $y = x$	91
4.9	Transformação z^2 da reta $z = 1 + yi, y \in \mathbb{R}$	91
4.10	Transformação conforme $f(z) = z^2$	92
5.1	Forças	96
5.2	Aerofólio.	97
5.3	Transformação do semicírculo unitário $w = z + \frac{1}{z}$	99
5.4	Região de escoamento superior a fronteira.	100
5.5	Comando para gerar curvas no GeoGebra.	101
5.6	Transformação do círculo unitário (a) centrado em $z_0 = -0,2 + 0,6i$	102
5.7	Transformação do círculo unitário (c) centrado em $z_0 = -0,05 + 0,3i$	102

5.8	Imagem do fluxo de um fluido.	102
5.9	Passos 1 e 2.	104
5.10	Passos 3 e 4.	104
5.11	Experimento de aerodinâmica.	105
5.12	Formato da asa modificado para pouso.	106
5.13	Slats.	107
5.14	Flaps estendidos.	107
5.15	Flaps recolhidos.	107
5.16	Aerofólio invertido.	108
A.1	Um caminho simples e fechado por (x_0, y_0) contido em D	118
A.2	Representação gráfica de um escoamento em uma região planar irrotacional.	120
A.3	Direção da sustentação e cisalhamento.	125
A.4	Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio simétrico.	126
A.5	Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio não simétrico.	126
A.6	Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio não simétrico com sustentação (Ponto de estagnação traseiro localizado no bordo de fuga).	127
A.7	Corpo com bordo de fuga afilado e distribuição de pressão representada pelos sinais de mais e menos.	129

Sumário

Introdução	19
1 Números complexos- BNCC e PCN	21
2 Números complexos	23
2.1 O corpo \mathbb{C}	23
2.2 Extensão de \mathbb{R}	26
2.3 Representações	27
2.3.1 Cartesiana	27
2.3.2 Algébrica	32
2.3.3 Matricial	35
2.4 Operações	36
2.4.1 Subtração	36
2.4.2 Divisão	37
2.4.3 Potência	40
2.4.4 Radiciação	44
3 Funções de variáveis complexas	49
3.1 Definição de função complexa	49
3.2 Exponencial	50
3.3 Trigonométrica	55
3.4 Logarítmica	57
4 Cálculo para funções de uma variável complexa	61
4.1 Limite e continuidade	61
4.2 Derivada	66
4.3 Funções harmônica e conjugada harmônica	85
4.4 Transformações	88
4.4.1 Transformação conforme	88
4.4.2 Transformação de funções harmônicas	92
4.4.3 Transformações de condições de contorno	93
5 O decolar de um avião: uma aula experimental	95
5.1 Algumas preliminares	95
5.1.1 Forças aerodinâmicas	96
5.1.2 Escoamento potencial	97
5.2 Aerofólio: teoria e prática	98
5.2.1 Teoria: escoamento ao redor de um cilindro	99

5.2.2	Prática: proposta didática	103
5.3	Curiosidades: fatores que influenciam decolagem e o pouso de um avião . .	105
5.3.1	Aerofólios móveis	106
5.3.2	Winglets	108
5.3.3	Aerofólios dos carros de corrida	108
6	Considerações finais	109
	Referências	111
A	Apêndice	113
A.1	Conceitos e resultados importantes	113
A.1.1	Escoamento potencial	113
A.1.2	Fluxo com circulação	122
A.2	Sustentação	124

Introdução

O estudo dos números complexos, dentro da disciplina de Matemática, colabora para a compreensão e resolução de determinadas situações e problemas que vão além do conjunto dos números reais. Este conteúdo é explorado no terceiro ano do ensino médio, etapa final da educação básica e relaciona duas grandes bases da matemática: Álgebra e Geometria.

O estudo de tal conteúdo permite ao aluno, o aprimoramento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, bem como compreender fundamentos científicos-tecnológicos de alguns processos produtivos, como por exemplo, a compreensão sobre o formato da asa de um avião que será abordado neste trabalho.

Em termos de livros didáticos percebe-se que os números complexos são abordados de forma introdutória. O professor pode pesquisar outros materiais, por exemplo em [17], têm-se o banco das dissertações defendidas do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional que atualmente possui 89 dissertações que abordam números complexos, porém apenas duas tratam também de funções complexas, consulte [16, 24].

Portanto, um dos objetivos deste texto, é fornecer um material para professores sobre números e funções complexas: suas propriedades e especialmente sobre a parte geométrica (analisar funções complexas como transformações no plano). Além disso, introduzir os resultados básicos do Cálculo para funções de variáveis complexas (limite, continuidade e diferenciabilidade).

Ainda observa-se nas finalidades do ensino médio presentes na BNCC, a proposta de apresentar teoria com a prática no ensino de cada disciplina. Este trabalho vai de encontro com esta proposta, pois, apresenta uma aplicação interessante como motivação para os professores iniciarem uma aula sobre números complexos, além de uma proposta de atividade a ser realizada em sala de aula.

O professor do ensino médio, principalmente do terceiro ano, também pode dedicar um tempo para preparar seus alunos para o ingresso nas universidades e institutos. Para isso, é bom sempre analisar o processo seletivo destas universidades, além de observar os conteúdos cobrados e a forma como são exploradas em cada uma. Atualmente no Brasil, a maioria das universidades tem adotado ao ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) como forma de ingresso, que não exige números complexos. Porém muitas instituições de ensino superior como: UNESP (Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho); UNITAU (Universidade de Taubaté); UEL (Universidade Estadual de Londrina) e o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), que têm o seu próprio vestibular, exploram tal conteúdo. Além dessa preocupação voltada para os alunos, aqueles professores que desejam fazer concursos públicos deverão conhecer a teoria envolvendo números complexos e funções complexas, por exemplo os que forem prestar o concurso da ESFCEx (Escola de Formação Complementar do Exército).

Pensando nisso, este trabalho apresenta o tópico **◇ Caiu no Vestibular/ Concurso** com algumas questões resolvidas de universidades e do concurso da ESFCEX 2019, como sugestão aos professores para que utilizem exemplos de determinados assuntos exatamente como são exigidos nos vestibulares.

Este texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 é abordada de forma sucinta a importância dos números complexos no ensino básico, respaldados pela BNCC e PCN. O Capítulo 2 aborda a estrutura algébrica dos números complexos, o corpo \mathbb{C} , além de seus três tipos de representação. No Capítulo 3 são apresentadas funções elementares de uma variável complexa, dentre elas, a função exponencial, trigonométrica (seno e cosseno) e logarítmica, é analisado de maneira geral o comportamento dessas funções e suas diferenças com as funções reais. O Capítulo 4 introduz o estudo de cálculo diferencial, funções harmônicas, conjugada harmônica e transformação conforme. Por fim, no Capítulo 5 é apresentada uma proposta de aula experimental. Este capítulo demonstra a importância de outras áreas do conhecimento, o que promove a multidisciplinaridade na abordagem do problema da decolagem de um avião. Para os curiosos e apreciadores de carros de corrida é feita uma relação entre os aerofólios deste tipo de carro e da asa do avião.

Após Referências é apresentado o Apêndice, onde observa-se como certas funções de variável complexa dão suporte para o entendimento sobre a forma da asa de um avião e o escoamento do ar, de forma a gerar sustentação suficiente para mantê-lo em voo.

1 Números complexos- BNCC e PCN

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3], é um documento de caráter normativo que apresenta algumas competências e habilidades específicas (raciocinar, representar, comunicar e argumentar) que espera-se que os alunos desenvolvam ao longo de toda a Educação Básica, constituída pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

No que diz respeito ao Ensino Médio, etapa final da educação básica, segundo a *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (Lei nº 9.394/96) uma das finalidades de tal ensino é a consolidação e aprimoração de conhecimentos adquiridos no ensino fundamental de forma que os alunos possam prosseguir os estudos e compreender os fundamentos científicos-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria com prática no ensino de cada disciplina.

No Parâmetro Curricular Nacional(PCN) do Ensino Médio Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias(PCN₊) [20] destacam-se as competências de representação e comunicação como uma das metas a serem trabalhadas durante o Ensino Médio, de forma a complementar o ensino fundamental para todos os brasileiros. E para a articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia, espera-se que o aluno consiga

...ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações e selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas. (PCN₊, 2002, p. 114)

O ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e também à contextualização sociocultural, de acordo com os PCNEM(2002) e o PCN₊(2002).

Segundo Iezzi [10],

Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas clássicos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (IEZZI, 2016, p.267)

Segundo a PCN os números complexos entram como objeto de estudo do eixo estruturador Álgebra e tratam da ampliação do conjunto numérico. Assim, ao escolher ensinar o conteúdo de números complexos dentro da disciplina de Matemática, o professor colabora para a compreensão de determinadas situações e problemas que até o momento não eram possíveis de serem solucionadas, conhecendo apenas o conjunto dos números reais. Apesar de fazer parte da Álgebra, é possível estabelecer conexões com outro eixo ou tema estruturador da Matemática que é a Geometria. Vemos neste trabalho por exemplo, a interpretação geométrica de cada operação, e três maneiras distintas para representar os números complexos (cartesiana, algébrica e matricial), além da forma polar.

Para os alunos que continuarão os estudos, entender tal conteúdo auxilia na compreensão dos conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas para estudos posteriores. Por exemplo, a compreensão de cálculo diferencial para funções de uma variável complexa e escoamento potencial.

No que diz respeito a forma de trabalhar os conteúdos, para Iezzi [10],

...os professores devem colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático. Assim, o processo de ensino deve apresentar uma explicação de determinadas propriedades matemáticas, bem como a dedução das fórmulas.(IEZZI, 2016, p.267)

Concordamos com esse ponto de vista, e ressaltamos um dos objetivos deste trabalho que é a elaboração de um material para o professor, de forma que ele possa aprimorar os seus conhecimentos sobre os números complexos e ter um suporte em algumas demonstrações que poderão ser exploradas em sala de aula. Com base nisso, destacamos que as demonstrações presentes neste trabalho foram realizadas de forma minuciosa utilizando algumas vezes cores para destacar algumas correspondências, além de acreditarmos que o visual em algumas demonstrações é essencial para o entendimento de alguns argumentos buscamos então uma demonstração vertical, como verão neste trabalho.

Um processo de aprendizagem que possibilita o aluno desenvolver o raciocínio matemático é a aplicação de determinado conteúdo em seu cotidiano, pois o aluno consegue relacionar a teoria com a prática. Dentre as inúmeras aplicações que temos de tal conteúdo, apresentaremos, neste trabalho, como o estudo de números e funções complexas permitiram avanços na aerodinâmica. Com isso, o professor poderá basear-se neste trabalho para compreender tal aplicação e, a partir dos conhecimentos adquiridos pode estimular seus alunos a compreenderem na prática alguns dos fatores que contribuem para a sustentação do avião no ar mostrando para eles que a base de tal estudo parte da compreensão de números complexos. Esta aplicação permite também a discussão e a conexão com outras áreas do conhecimento, como Física.

Não abordamos neste trabalho as origens históricas dos números complexos, visto que, existem muitos trabalhos que exploram tal assunto de forma bem específica. Mas, sugerimos a leitura da referência [23].

Sendo assim, abordamos no próximo capítulo a definição de números complexos, o corpo \mathbb{C} , as três representações de um número complexo, suas operações e as interpretações geométricas das operações.

2 Números complexos

O objetivo deste capítulo, é introduzir e relembrar definições, propriedades e operações envolvendo números complexos, porém, com uma profundidade maior do que a presente em livros do Ensino Médio. Será utilizado o termo da álgebra, Corpo, que é um conjunto munido de duas operações que satisfazem as propriedades citadas na Proposição 2.2. As referências utilizadas foram [6, 12, 14, 15, 19, 21, 23, 25].

Para definir o conjunto dos números complexos e suas operações utilizamos as propriedades conhecidas do conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , com respeito às operações de adição, multiplicação, subtração e divisão, as quais garantem que \mathbb{R} tem estrutura de corpo, veja [12].

2.1 O corpo \mathbb{C}

Definição 2.1. Um **número complexo** z é um par ordenado de números reais $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, que satisfaz as regras abaixo, para $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ quaisquer:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
2. $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
3. $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.¹

Com respeito às operações, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 2.2. *Dados z, z_1, z_2 e z_3 números complexos quaisquer, valem:*

1. *Associatividade para a adição*
 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
2. *Associatividade para a multiplicação*
 $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
3. *Existência do elemento neutro aditivo* $(0, 0)$.
4. *Existência da identidade multiplicativa* $(1, 0)$.
5. *Existência do elemento inverso aditivo* $-z = (-x, -y)$, para todo $z = (x, y)$.

¹Padronizamos o produto $z_1 z_2$, porém em alguns casos utilizaremos (\cdot) para não gerar ambiguidade.

6. Existência do elemento inverso multiplicativo $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$, para todo $z = (x, y) \neq (0, 0)$.

7. Comutatividade para a adição

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

8. Comutatividade para a multiplicação

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

9. Distributividade do produto em relação à soma:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Demonstração. Sejam $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ números complexos, assim,

1.

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3) \\ &= (x_3(x_1 x_2 - y_1 y_2) - y_3(x_1 y_2 + x_2 y_1), y_3(x_1 x_2 - y_1 y_2) + x_3(x_1 y_2 + x_2 y_1)) \\ &= (x_3 x_1 x_2 - x_3 y_1 y_2 - y_3 x_1 y_2 - y_3 x_2 y_1, y_3 x_1 x_2 - y_3 y_1 y_2 + x_3 x_1 y_2 + x_3 x_2 y_1) \\ &= (x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_3 y_2 + x_2 y_3), x_1(x_2 y_3 + x_3 y_2) + y_1(x_2 x_3 - y_2 y_3)) \\ &= (x_1, y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ &= z_1(z_2 z_3). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z + (0, 0) &= (x, y) + (0, 0) \\ &= (x + 0, y + 0) \\ &= (x, y) \\ &= z. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z(1, 0) &= (x, y)(1, 0) \\ &= (x1 - y0, x0 + y1) \\ &= (x, y) \\ &= z. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} z + (-z) &= (x, y) + (-x, -y) \\ &= (x + (-x), y + (-y)) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} (x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{-y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + y_2 x_1) \\ &= (x_2, y_2)(x_1, y_1) \\ &= z_2 z_1. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 - y_1 y_2 - y_1 y_3, x_1 y_2 + x_1 y_3 + y_1 x_2 + y_1 x_3) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3), (x_1 y_2 + y_1 x_2) + (x_1 y_3 + y_1 x_3)) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3, x_1 y_3 + y_1 x_3) \\ &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3) \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3. \end{aligned}$$

□

Um conjunto munido de uma adição e uma multiplicação que satisfaz as propriedades acima é chamado de **corpo**, veja [12]. Assim, dizemos que os números complexos tem estrutura de corpo. Esse conjunto será denotado por \mathbb{C} ou $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2.2 Extensão de \mathbb{R}

Agora veremos que o conjunto \mathbb{C} é uma extensão de \mathbb{R} , ou seja, \mathbb{C} contém uma cópia de \mathbb{R} .

Seja $K = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. A aplicação $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, 0) \mapsto x$ é um homomorfismo². De fato, para quaisquer $(x, 0), (y, 0)$ em K , temos:

$$\begin{aligned}\varphi((x, 0) + (y, 0)) &= \varphi((x + y, 0)) = x + y \\ &= \varphi((x, 0)) + \varphi((y, 0)).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi((x, 0)(y, 0)) &= \varphi((xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y)) = \varphi((xy, 0)) \\ &= xy \\ &= \varphi((x, 0))\varphi((y, 0)).\end{aligned}$$

Além disso, φ é uma função bijetora. De fato, se $x \neq y$ então $(x, 0) \neq (y, 0)$, logo φ é injetora. E para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existe um par ordenado $(x, 0)$ tal que $\varphi((x, 0)) = x$, o que implica que φ é sobrejetora.

Neste caso $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de isomorfismo e os conjuntos K e \mathbb{R} são isomorfos, isto é, $K \simeq \mathbb{R}$. Portanto, \mathbb{C} é uma **extensão do corpo \mathbb{R}** .

Esse fato permite que se faça a identidade $(x, 0) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, todo número real x é um número complexo da forma $(x, 0)$.

Segue da definição de igualdade, adição e multiplicação que :

- $(x, 0) = (y, 0) \Leftrightarrow x = y$.
- $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$.
- $(x, 0)(y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (xy, 0)$.

Definição 2.3. O número complexo $(0, 1)$ é chamado de **unidade imaginária** e é representado pelo símbolo **i** .

Note que:

$$\begin{aligned}i^2 = ii &= (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) = -1.\end{aligned}$$

Observação 2.4. Vários matemáticos contribuíram para a construção do conceito de números complexos motivados pelas soluções de equações algébricas do terceiro grau, dentre eles, René Descartes(1596-1650) foi quem denominou o termo números imaginários as raízes quadradas de radicando negativo utilizados na resolução dessas equações. E Leonhard Euler(1707-1783) foi o responsável por introduzir o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$.

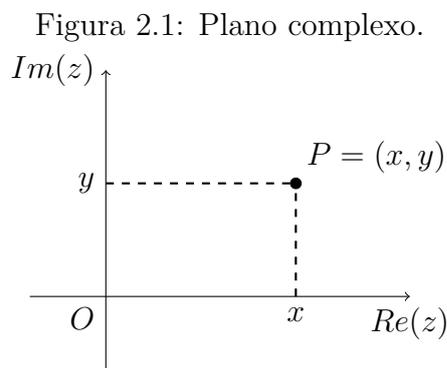
²Um homomorfismo é uma aplicação que preserva a estrutura entre duas estruturas algébricas.

2.3 Representações

Um número complexo $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ pode ser representado de três maneiras distintas: cartesiana, algébrica e matricial. Tendo cada uma delas suas particularidades com o desenvolvimento e estudo de alguma aplicação como veremos a seguir.

2.3.1 Cartesiana

Definimos um número complexo $z = (x, y)$ como um par ordenado de números reais x e y . Assim, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto \mathbb{C} e o conjunto dos pontos de um plano. Ou seja, cada número complexo $z = (x, y)$ corresponde a um único ponto \mathbf{P} , de coordenadas (x, y) , pertencente ao plano \mathbb{R}^2 , como na Figura 2.1.

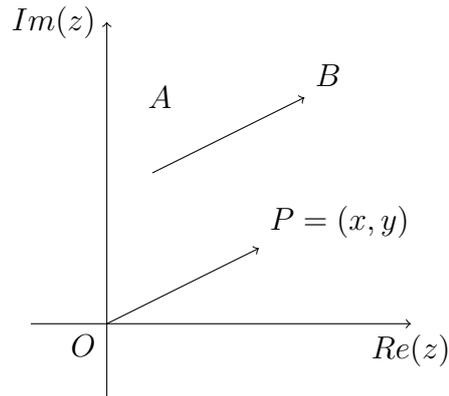


Fonte: Elaborada pela autora.

O plano ao qual \mathbf{P} pertence é chamado de *plano complexo* \mathbb{C} ou *Plano de Argand-Gauss*, cujo o eixo das abcissas é denominado eixo real e o eixo das ordenadas de eixo imaginário. Assim, se $z = (x, y)$ então x é chamado de **parte real** de z , denotado por $Re(z)$ e y é chamado de **parte imaginária** de z , denotado por $Im(z)$.

Além disso, o número complexo $z = (x, y)$ pode ser considerado como um vetor OP cujo o ponto inicial é a origem O e o ponto terminal é o ponto P . Dois vetores com o mesmo comprimento e direção, mas com pontos iniciais diferentes conforme OP e AB na Figura 2.2 são considerados iguais.

Figura 2.2: Interpretação de um número complexo como um vetor.

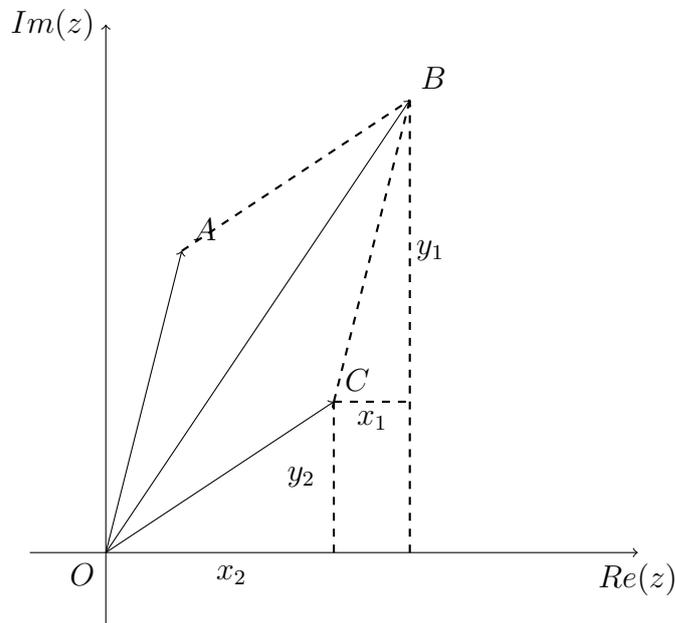


Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, o número complexo z é considerado como ponto z ou como vetor OP .

De acordo com a definição da adição de números complexos e a representação vetorial desses números, podemos interpretar geometricamente esta operação como a soma vetorial dos vetores z_1 e z_2 , o que corresponde a lei do paralelogramo para adição de vetores. Assim, para adicionar o número complexo z_1 e z_2 , completamos o paralelogramo $OABC$ cujos lados OA e OC correspondem a z_1 e z_2 . A diagonal OB deste paralelogramo corresponde a $z_1 + z_2$. Veja a Figura 2.3.

Figura 2.3: Interpretação geométrica da adição de números complexos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Já o produto $z_1 z_2$ de dois números complexos não é o produto escalar (número) nem o produto vetorial (vetor perpendicular aos vetores do produto vetorial) utilizados no cálculo vetorial, pois $z_1 z_2$ é um número complexo logo é um vetor e a sua representação

vetorial se encontra no mesmo plano que z_1 e z_2 . Desta forma, o corpo \mathbb{C} ($\mathbb{C}, +, \cdot$) não tem a mesma estrutura algébrica que o \mathbb{R}^2 .

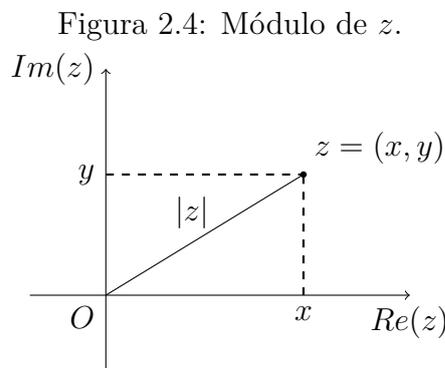
Apesar destes detalhes podemos interpretar geometricamente o produto de dois números complexos utilizando coordenadas polares, como veremos mais para frente.

Vimos que os números complexos podem ser representados como vetores num dado plano. Um dado bastante relevante deste vetor é o seu comprimento.

Definição 2.5. O **valor absoluto ou módulo** de um número complexo z , denotado por $|z|$, é a distância do ponto $z = (x, y)$ à origem $(0, 0)$ do plano complexo, ou seja, é o comprimento do vetor z :

$$|z| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Geometricamente (Figura 2.4):



Fonte: Elaborada pela autora.

Conseqüentemente, $|z_1 - z_2|$ é a distância entre os pontos z_1 e z_2 . Assim, para $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ segue:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Exemplo 2.6. Se $z = (5, 6)$ então $|z| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$.

Exemplo 2.7. Se $|z - (3, 2)| = 5$ para $z = (x, y)$ significa que z é um número complexo que está sob o círculo de raio 5 e centro $(3, 2)$; pois a distância de z ao número complexo $(3, 2)$ geometricamente é de 5 unidades.

Observação 2.8. Já vimos que \mathbb{C} é um corpo não ordenado, ou seja, tais tipos de desigualdades $z_1 > z_2$ ou $z_1 < z_2$ não tem significado, a menos que z_1 e z_2 sejam ambos reais. Porém, tal noção elementar de ordem (“maior do que” ou “menor do que”) se aplica a valores absolutos de números complexos (que são números reais); uma vez que $|z_1| > |z_2|$ significa que o ponto z_1 está a maior distância da origem que o ponto z_2 .

Proposição 2.9. Dados $z, z_1,$ e z_2 números complexos quaisquer, valem:

1. $|z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$.
2. $|z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$.
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Demonstração. Sejam $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ números complexos, e sabendo que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$ têm-se:

1. $|Re(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
2. Analogamente ao item anterior segue
 $|Im(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2 + x^2} = |z|$.
3. Como $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, logo

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + (y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + (x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2}. \end{aligned}$$

E $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Assim,

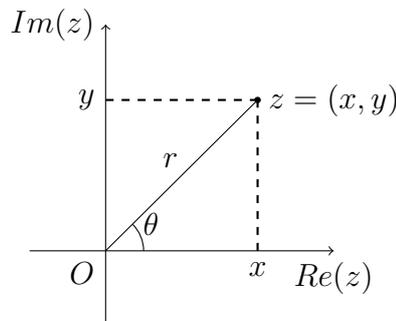
$$\begin{aligned} |z_1| |z_2| &= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right) \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right) \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. □

Observação 2.10. Embora não seja uma nova representação para os números complexos, podemos reescrevê-lo utilizando as **coordenadas polares** (r, θ) , uma vez que definimos tal número por um par ordenado de números reais.

Dado $z = (x, y) \neq (0, 0)$ um ponto do plano, a coordenada r desse ponto é a sua distância a origem, ou seja, $r = |z|$. E a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento de reta que une o ponto à origem e o semieixo positivo dos x , medindo no sentido anti-horário; θ é denominado **argumento de z** e denotado por $arg z$. Quando $\theta \in [0, 2\pi)$ (ou $(-\pi, \pi]$) $arg z$ é chamado de **argumento principal**.

Figura 2.5: Interpretação geométrica das coordenadas cartesianas e polares de um número complexo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme a Figura 2.5, podemos relacionar as coordenadas cartesianas e polares sendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sen \theta$. Assim, dado o número complexo $z = (x, y)$, $z \neq 0$, reescrevemos z em sua forma polar

$$z = r \cos \theta + i(r \sen \theta) = r(\cos \theta + i \sen \theta).$$

Observação 2.11. Como as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π , então vale

$$z = r(\cos \theta + i \sen \theta) = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sen(\theta + 2k\pi)], k \in \mathbb{Z}.$$

Então a igualdade de dois números complexos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sen \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sen \theta_2)$ é válida se $r_1 = r_2$ e $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$.³

Observação 2.12. A multiplicação de números complexos, em sua forma polar, $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sen \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sen \theta_2)$ não nulos, é obtida:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sen \theta_1)r_2(\cos \theta_2 + i \sen \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sen \theta_2 + i \sen \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sen \theta_1 \sen \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sen \theta_1 \sen \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sen \theta_2 + \sen \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sen(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Assim, a forma polar do produto se reduz a

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sen(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (2.1)$$

Logo, o argumento do produto é a soma $(\theta_1 + \theta_2)$ dos argumentos, ou seja, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ e o módulo do produto é o produto dos módulos.

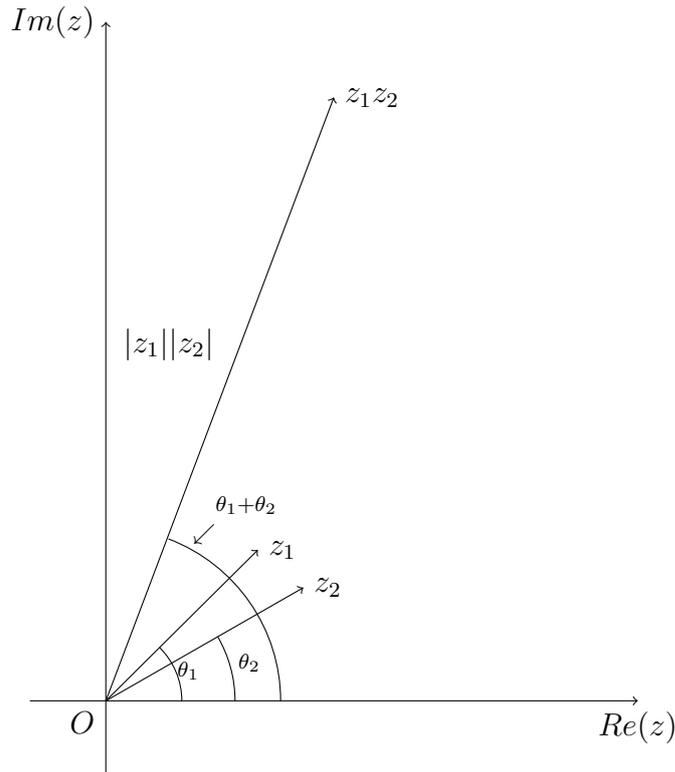
Daí, segue imediatamente de (2.1) que:

$$z_1 z_2 z_3 \dots z_n = r_1 r_2 r_3 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + i \sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n)]. \quad (2.2)$$

Geometricamente, temos a seguinte interpretação para o produto de dois números complexos (Figura 2.6):

³Dizemos que θ_1 é congruente a θ_2 módulo 2π quando 2π divide $\theta_1 - \theta_2$, ou seja, $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. [1]

Figura 2.6: Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos.



Fonte: Elaborada pela autora.

◇ Caiu no Vestibular/ Concurso

- (ESFCEX-2019) Sendo z_1 e z_2 dois números complexos, dados por $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 2 - 3i$, é correto afirmar que $|z_1 z_2|$ é igual a
 A) $5\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{13}$ C) $9\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{13}$ E) $7\sqrt{7}$.

Resolução: Relembrando o item 3 da proposição 2.9 temos $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, logo para responder tal questão basta fazer o produto dos módulos de z_1 e z_2 . Como $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ e $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, portanto

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\ &= 5\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Gabarito: D

2.3.2 Algébrica

Como vimos anteriormente, os números complexos $(x, 0)$, $(y, 0)$ e $(0, 1)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ podem ser escritos respectivamente como x , y e i .

Observe que $(y, 0)(0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y)$, ou seja, $yi = (0, y)$. Assim, dado $z = (x, y)$ um número complexo, temos:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x + yi, \quad \text{com } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

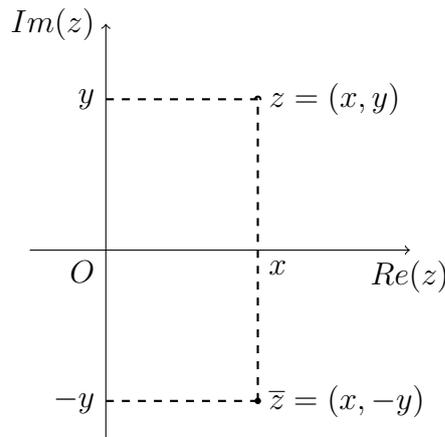
Dizemos que $z = x + yi$ é a representação algébrica do número complexo z , e uma de suas utilidades é a de simplificar as manipulações de operações básicas que envolvem números complexos.

Exemplo 2.13. A representação algébrica dos números complexos $(4, 5)$, $(3\sqrt{2}, -5)$ são respectivamente $4 + 5i$ e $3\sqrt{2} - 5i$.

Definição 2.14. Dado o número complexo $z = x + yi$ o **conjugado de z** é o número complexo $\bar{z} = x - yi$.

Note que \bar{z} significa, geometricamente, a reflexão de z em torno do eixo real, veja Figura 2.7.

Figura 2.7: Conjugado (\bar{z}) de z .



Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 2.15. Dado $z = \sqrt{3} - 5i$ então $\bar{z} = \sqrt{3} + 5i$.

Propriedades: Dados $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ números complexos quaisquer, têm-se:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. De fato,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= \underbrace{x_1 - y_1i}_{\bar{z}_1} + \underbrace{x_2 - y_2i}_{\bar{z}_2}. \end{aligned}$$

2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Observe que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 &= \overline{(x_1 + y_1i)} \cdot \overline{(x_2 + y_2i)} = (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) \\ &= x_1 x_2 - x_1 y_2 i - x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Observação 2.16. Apesar de z e \bar{z} serem números complexos distintos seus valores absolutos são iguais, ou seja, $|z| = |\bar{z}|$. Esta igualdade é fácil de ser verificada, pois para $z = x + yi$ temos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|$.

Observação 2.17. A soma de um número complexo com o seu conjugado é o dobro da parte real do número complexo. Ou seja, sendo $z = (x, y)$ logo $\bar{z} = (x, -y)$ e $z + \bar{z} = (x, y) + (x, -y) = (x + x, y - y) = (2x, 0) = 2x = 2Re(z)$.

Observação 2.18. O produto de um número complexo pelo seu conjugado é o quadrado do módulo do número complexo. Isto é, $z\bar{z} = |z|^2$. De fato, para $z = x + yi$ segue

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) \\ &= x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 \\ &= x^2 - y^2(-1) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

De acordo com as observações acima, podemos verificar a seguinte desigualdade triangular para z_1, z_2 números complexos quaisquer:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1z_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Como $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ e a função raiz quadrada é crescente conclui-se que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

E também vale a desigualdade:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Observe que $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$, ou seja,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \tag{2.3}$$

e $|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$, ou seja, $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$.

Como $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$ e $|z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$, temos

$$-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2|. \tag{2.4}$$

Portanto, segue de (2.3) e (2.4) que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Tais desigualdades nos dizem que nenhum lado de um triângulo é maior, em comprimento, do que a soma dos dois outros lados, veja a Figura 2.3, nem é menor do que a diferença dos comprimentos dos demais lados.

2.3.3 Matricial

Sendo I a matriz identidade 2×2 , associamos ao número real x a matriz $xI = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Observando que para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a adição $x_1 + x_2$ fica associada à soma de matrizes, isto é,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

e a multiplicação $x_1 x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 0 \\ 0 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

sendo $\psi : \mathbb{R} \rightarrow M \subset M_{2 \times 2}$ (conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas em \mathbb{R}), em que $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2} \mid a = d \text{ e } b = c = 0 \right\}$ e $\psi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ é também um isomorfismo, isto é, um homomorfismo bijetor.

Ou seja, a correspondência do número real x a tal matriz diagonal não introduz nenhuma modificação no que diz respeito a adição e multiplicação.

Para identificar o número complexo $x + yi$ com uma matriz 2×2 é preciso pensar qual seria a representação matricial da unidade imaginária.

Observa-se que se tomarmos $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$i^2 = ii = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ está associada ao número real -1 , então é natural identificar i por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observe que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x + yi. \end{aligned}$$

O que motiva a seguinte definição.

Definição 2.19. A matriz $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ representa o número complexo $x + yi$ em que $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4 Operações

Além das operações de adição e multiplicação definidas em \mathbb{C} definimos também as operações de subtração, divisão, potenciação e radiciação. Apresentamos também uma interpretação geométrica de cada operação. Nesta seção foram utilizadas as referências [14, 15, 21, 23].

2.4.1 Subtração

Sejam os números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ arbitrários, definimos a operação de subtração como sendo a inversa da adição, isto é, se a diferença $z_1 - z_2 = z_3$ então z_3 é o número complexo que deve ser somado a z_2 para produzir z_1 :

$$z_2 + z_3 = z_1 \quad \text{ou} \quad (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1).$$

Segue da definição de adição que

$$(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1)$$

e da igualdade de números complexos

$$x_2 + x_3 = x_1, \quad y_2 + y_3 = y_1.$$

Resolvendo-se em relação a x_3 e y_3 , temos $x_3 = x_1 - x_2$ e $y_3 = y_1 - y_2$. Assim, obtemos a lei da subtração para números complexos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

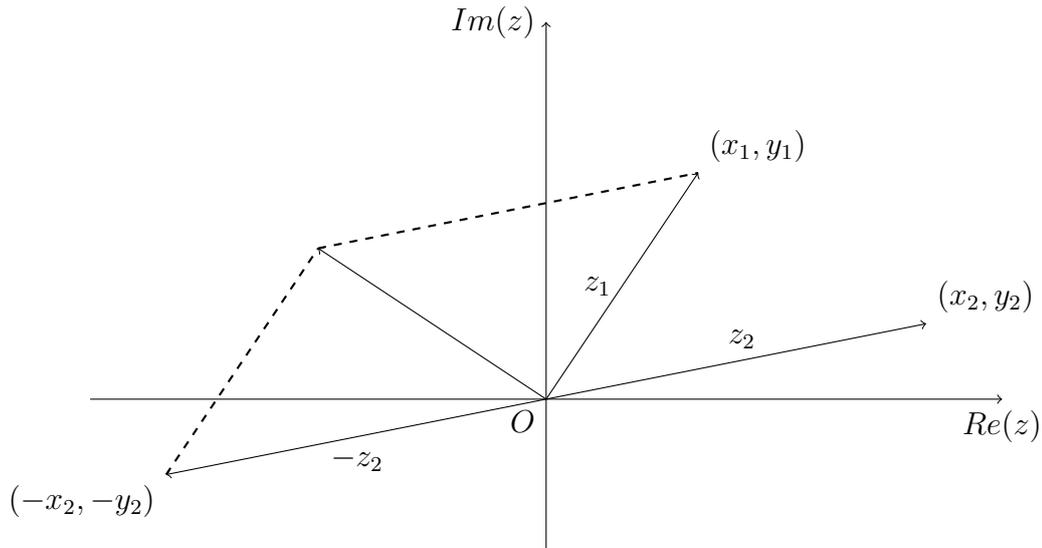
Note que a subtração pode ser tratada como uma adição, pois $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, onde $(-z_2)$ é o inverso aditivo do número z_2 .

Exemplo 2.20. Se $z_1 = (5, 14)$ e $z_2 = (10, 8)$ então $z_1 - z_2$ pode ser obtido em suas três formas como sendo:

- $z_1 - z_2 = (5, 14) - (10, 8) = (5 - 10, 14 - 8) = (-5, 6)$.
- $z_1 - z_2 = (5 + 14i) - (10 + 8i) = (5 - 10) + (14 - 8)i = -5 + 6i$.
- $z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} 5 & -14 \\ 14 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 10 & -14 - (-8) \\ 14 - 8 & 5 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Geometricamente a subtração $z_1 - z_2$ é o vetor associado a diagonal do paralelogramo formado pelos vetores z_1 e $-z_2$, veja a Figura 2.8.

Figura 2.8: Interpretação geométrica da subtração de números complexos.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.2 Divisão

Dados os números complexos $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ com $z_2 \neq 0$, desejamos obter o número complexo z tal que $z_2z = z_1$. Segue da definição de multiplicação de números complexos que:

$$\begin{aligned} z_2z &= (x_2 + y_2i)(x + yi) \\ &= (x_2x - y_2y) + (x_2y + y_2x)i. \end{aligned}$$

Como $z_2z = z_1$, temos da igualdade de números complexos que:

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ x_2y + y_2x = y_1 \end{cases}$$

Reorganizando o sistema temos:

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ y_2x + x_2y = y_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima por Cramer, definimos a matriz A dos coeficientes como $A = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ e observamos que o $\det A = x_2^2 + y_2^2$. Sabendo que o determinante das matrizes $\begin{pmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$ são respectivamente $x_1x_2 + y_1y_2$ e $x_2y_1 - x_1y_2$, e como

$$z_2 \neq 0 \text{ então } x = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}} \text{ e } y = \frac{\det \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}}, \text{ ou seja, } x = \frac{x_1x_2 + y_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \text{ e}$$

$$y = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Assim, o número complexo z que satisfaz a igualdade $z_2 \cdot z = z_1$ é

$$z = \left(\frac{x_1 x_2 + y_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left(\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \right) i.$$

O número complexo z obtido é chamado de **quociente** de z_1 por z_2 , ou seja, se $z_2 \cdot z = z_1$, com $z_2 \neq 0$, então $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Observe que, pelo fato do conjunto dos números complexos ter uma estrutura de corpo, se multiplicarmos o número complexo $z = \frac{z_1}{z_2}$ pela identidade $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$, o cálculo para determinar o quociente de dois números complexos se torna mais simples. De fato,

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} \\ &= \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left(\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \right) i. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos tratar a divisão como a seguinte multiplicação $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$, onde $\frac{1}{z_2}$ é o inverso multiplicativo do número z_2 denotado por $\frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Exemplo 2.21. O quociente dos números complexos $z_1 = 3 + 12i$ por $z_2 = 7 + 2i$ é

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 12i}{7 + 2i} \\ &= \frac{(3 + 12i)(7 - 2i)}{(7 + 2i)(7 - 2i)} \\ &= \frac{21 - 6i + 84i - 24i^2}{49 + 4} \\ &= \frac{(21 + 24) + (-6 + 84)i}{53} \\ &= \frac{45}{53} + \frac{72}{53}i \end{aligned}$$

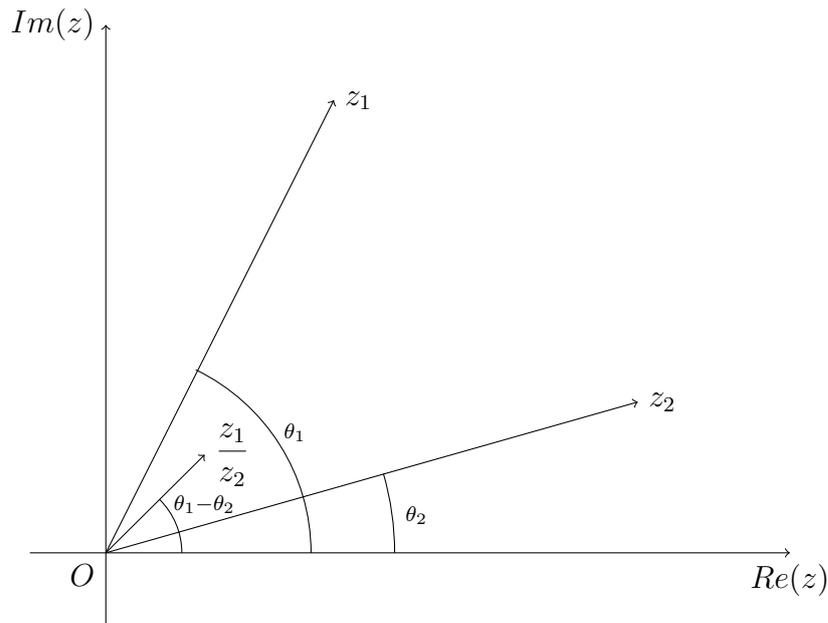
Observação 2.22. O quociente de dois números complexos na sua forma polar é dado

por:

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \\
 &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)r_2(\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2))}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)r_2(\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2))} \\
 &= \frac{r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos(-\theta_2) + i \cos \theta_1 \operatorname{sen}(-\theta_2) + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos(-\theta_2) + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen}(-\theta_2)]}{r_2^2 [\cos \theta_2 \cos(-\theta_2) + i \cos \theta_2 \operatorname{sen}(-\theta_2) + i \operatorname{sen} \theta_2 \cos(-\theta_2) + i^2 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}(-\theta_2)]} \\
 &= \frac{r_1 [(\cos \theta_1 \cos(-\theta_2) - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen}(-\theta_2)) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen}(-\theta_2) + \operatorname{sen} \theta_1 \cos(-\theta_2))]}{r_2^2 [(\cos \theta_2 \cos(-\theta_2) - \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen}(-\theta_2)) + i(\cos \theta_2 \operatorname{sen}(-\theta_2) + \operatorname{sen} \theta_2 \cos(-\theta_2))]} \\
 &= \frac{r_1 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}{r_2 [\cos(\theta_2 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_2)]} \\
 &= \frac{r_1 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}{r_2 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].
 \end{aligned}$$

Logo, o argumento do quociente é a diferença $(\theta_1 - \theta_2)$ dos argumentos dos números complexos, ou seja, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ e o módulo do quociente é o quociente dos módulos, veja a Figura 2.9.

Figura 2.9: Interpretação geométrica do quociente de números complexos.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.4.3 Potência

A potência de números complexos representa a multiplicação de fatores iguais, como acontece em \mathbb{R} . Por exemplo, calculemos as potências da unidade imaginária, ou seja,

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2i = -i$
- $i^4 = i^3i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1$
- $i^5 = i^4i = 1i = i$
- $i^6 = i^5i = ii = i^2 = -1$

Neste caso, as potências variam entre os valores $\{i, -1, -i, 1\}$, isso não ocorre geralmente para um número complexo arbitrário, mas essa informação será útil para descrevermos uma potência de um número complexo arbitrário em sua forma algébrica.

Observando o produto de números complexos em sua forma algébrica o cálculo não é tão prático quando para potência com expoentes muito grandes. De fato, dado $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ temos:

- $z^2 = zz = (x + yi)(x + yi) = x^2 + xyi + xyi + y^2i^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i.$
- $z^3 = z^2z = [(x^2 - y^2) + (2xy)i](x + yi)$
 $= (x^2 - y^2)x + (x^2 - y^2)yi + x(2xy)i + (2xy)yi^2$
 $= x^3 - xy^2 + x^2yi - y^3i + 2x^2yi + 2xy^2i^2$
 $= (x^3 - xy^2 - 2xy^2) + (x^2y - y^3 + 2x^2y)i$
 $= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i.$
- $z^4 = z^3z = [(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i](x + yi)$
 $= (x^3 - 3xy^2)x + (x^3 - 3xy^2)yi + (3x^2y - y^3)ix + (3x^2y - y^3)yi^2$
 $= x^4 - 3x^2y^2 + x^3yi - 3xy^3i + 3x^3yi - xy^3i - 3x^2y^2 + y^4$
 $= (x^4 - 3x^2y^2 - 3x^2y^2 + y^4) + (x^3y - 3xy^3 + 3x^3y - xy^3)i$
 $= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i.$

Se continuarmos desenvolvendo as potências o que observamos é que o Binômio de Newton, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, também é válido para números complexos. Isto é, dado

$z = x + yi$ um número complexo arbitrário, segue então que $(x + yi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (yi)^k$.

De fato, isso deveria acontecer pois \mathbb{C} é uma extensão de \mathbb{R} como já vimos, e no caso particular dos números complexos da forma $z = x + 0i$ que associamos ao número real x tal binômio deve ser verificado.

Agora, vamos observar o que acontece com as potências de um número complexo z dado em sua forma polar. Já vimos pela equação (2.2) que $z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) + i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)]$. Se tomarmos $z = z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ em (2.2) para $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n é um número inteiro positivo, temos:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \quad (2.5)$$

Observe também que o quociente de dois números complexos, dado na Observação 2.22 é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

Em particular, para $z_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ e $z_2 = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos(0 - \theta) + i \operatorname{sen}(0 - \theta)) \\ &= \frac{1}{r_2} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)). \end{aligned}$$

Assim, se z^{-n} designa $\frac{1}{z^n}$, onde $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ segue de (2.2)

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)] = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Portanto, é conveniente usar a forma polar para representar uma **potência** de número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e expoente n , $n \in \mathbb{Z}$ conforme a igualdade (2.5).

Exemplo 2.23. Dado $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$ a quarta potência de z é

$$\begin{aligned} z^4 &= 3^4 \left(\cos \frac{4 \cdot \pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4 \cdot \pi}{4} \right) \\ &= 81 \left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} \right) \\ &= 81(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\ &= 81(-1 + i0) = -81. \end{aligned}$$

Observação 2.24. A igualdade $z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ é conhecida como *Fórmula de De Moivre*.

Observação 2.25. A interpretação geométrica para a potência de um número complexo é a mesma que a da multiplicação, uma vez a própria definição é determinada via multiplicação.

◇ Caiu no Vestibular/ Concurso

- (ITA-SP 2012) Sejam $z = n^2(\cos 45 + i \operatorname{sen} 45)$ e $w = n(\cos 15 + i \operatorname{sen} 15)$ em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então $\frac{z}{w}$ é igual a:

A) $\sqrt{3} + i$ B) $2(\sqrt{3} + i)$ C) $2(\sqrt{2} + i)$ D) $2(\sqrt{2} - i)$ E) $2(\sqrt{3} - i)$.

Resolução:

Segue do quociente de números complexos

$$\frac{z}{w} = \frac{n^2}{n} [\cos(45^\circ - 15^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ - 15^\circ)] \quad (2.6)$$

$$= n(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \quad (2.7)$$

$$= n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right). \quad (2.8)$$

Para encontrar o resultado, basta determinar o valor de n lembrando que este deve ser o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ seja real. Isto é, a parte imaginária deste número deve ser nula.

Considere $p = 1+i$ segue da Fórmula de De Moivre que $p^n = |p|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$, onde θ é o argumento principal de p . Como $|p| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\theta = 45^\circ$.

Assim, para que $p^n = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n[\cos(n45^\circ) + i \operatorname{sen}(n45^\circ)]$ seja real devemos ter $\operatorname{sen}(n45^\circ) = 0$, ou seja, $n45^\circ = k(180^\circ)$, $k \in \mathbb{Z}$. Mas, n é o menor inteiro positivo, determinamos então que tal igualdade seja válida para $k = 1$. Logo

$$\begin{aligned} n45^\circ &= 180^\circ \\ n &= \frac{180^\circ}{45^\circ} \\ n &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{z}{w} = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2(\sqrt{3} + i)$.

Gabarito: B.

Observação 2.26. Pensando no vestibular em que o tempo conta bastante, podemos observar que pelo fato de n ser um número inteiro positivo, as alternativas C , D e E podem ser desconsideradas a partir do resultado em (2.8) uma vez que em C o valor de n não seria inteiro e em D e E , n não seria positivo. Restando assim somente as alternativas A e B em que n teria que ser igual a 2 ou 4.

Agora como temos também que $\operatorname{sen}(n45^\circ) = 0$, logo n só pode ser 4 uma vez que para $n = 2$ teríamos $\operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$.

- (UNESP- 2007) Sendo i a unidade imaginária e z_1, z_2 os números complexos $z_1 = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{22}$, $z_2 = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{78}$. O produto $z_1 z_2$ resulta em:

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $2i$ D) $-2i$ E) 2 .

Resolução: Relembrando que as potências de i variam entre $\{i, -1, -i, 1\}$ a cada sequência de quatro potências, observe que o somatório $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} z_1 &= i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \dots + i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20} + i^{21} + i^{22} \\ &= \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + \dots + \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + i^{21} + i^{22} \\ &= 0 \cdot 5 + i + (-1) = -1 + i. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} z_2 &= i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \dots + i^{73} + i^{74} + i^{75} + i^{76} + i^{77} + i^{78} \\ &= \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + \dots + \underbrace{i - 1 - i + 1}_0 + i^{77} + i^{78} \\ &= 0 \cdot 19 + i + (-1) = -1 + i. \end{aligned}$$

Como $z_1 = z_2$ então o produto $z_1 z_2 = z_1^2$. Logo, $z_1^2 = ((-1)^2 - 1^2) + 2(-1)1i = 0 - 2i = -2i$.

Gabarito: D.

- (ESFCEX-2019) Com base na expressão $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$, assinale a alternativa que possua corretamente a sua forma algébrica.

A) $-1 + \sqrt{3}i$ B) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resolução: Tome $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Para determinar z^{100} , vamos reescrever o número complexo z em sua forma polar. Para isso, precisamos determinar $|z|$ e $\arg z$.

i) Determinar $|z|$:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

ii) Determinar $\arg z$: Tomando $\theta = \arg z$, temos que $\cos \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$ e

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos \theta < 0$ e $\operatorname{sen} \theta > 0$, temos que θ pertence ao segundo quadrante e vale $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, reescrevendo z em sua forma polar ($z = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$) e aplicando a Fórmula de De Moivre, temos:

$$\begin{aligned} z^{100} &= 1^{100} \left(\cos \left(\frac{100 \cdot 2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{100 \cdot 2\pi}{3} \right) \right) \\ &= \cos \left(\frac{200\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{200\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(\frac{198\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{198\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(66\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(66\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(33 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(33 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Gabarito: E.

2.4.4 Radiciação

O problema de extrair as raízes n -ésimas $z^{\frac{1}{n}}$ de um número complexo z é o de resolver a equação

$$w^n = z \quad (2.9)$$

para w , quando z e o número inteiro positivo n são dados.

Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ a forma polar de z , $z \neq 0$, e escrevendo $w = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$. Assim, segue de (2.9)

$$\begin{aligned} [r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)]^n &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ r_0^n(\cos(n\theta_0) + i \operatorname{sen}(n\theta_0)) &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vimos que a igualdade de dois números complexos dados em sua forma polar é válida se $|w|^n = |z|$ e $n\theta_0$ deve ser congruente a θ módulo 2π , isto é,

$$r_0^n = r, \quad n\theta_0 = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como r e r_0 são números positivos então r_0 deve ser a raiz n -ésima real positiva de r , isto é, $r_0 = r^{\frac{1}{n}}$. Logo,

$$\theta_0 = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Assim, o conjunto de soluções é dado por:

$$\left\{ w = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right] \right\}. \quad (2.12)$$

A princípio podemos imaginar que esse conjunto é infinito, mas devido a periodicidade das funções seno e cosseno temos que esse conjunto é finito. De fato,

- $k = 0, w_0 = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} \right) \right]$
- $k = 1, w_1 = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right) \right]$
- $k = 2, w_2 = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 4\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 4\pi}{n} \right) \right]$
- \vdots
- $k = n - 1, w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) \right]$
- $k = n,$

$$\begin{aligned} w_n &= r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2n\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2n\pi}{n} \right) \right] \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) \right] \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} \right) \right] = w_0. \end{aligned}$$

Para os demais valores de k , obtemos como no caso $k = n$, raízes já descritas pelos provenientes dos valores de $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Portanto, as soluções distintas são w_0, w_1, \dots, w_{n-1} .

Observação 2.27. Quando $z = 0$ a equação (2.9) tem uma única solução $z_0 = 0$, portanto $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

Geometricamente, as raízes n -ésimas de um número complexo são vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio $|z|^{\frac{1}{n}}$ e centro na origem.

Note que se

$$z^n = w \Rightarrow z = \sqrt[n]{w}.$$

Como vimos:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + \text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), \theta = \text{arg}(w) \text{ e } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Assim, $|z_k| = \sqrt[n]{|w|}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, ou seja, todos os z'_k s estão na mesma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, estes valores de z_k são igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação entre seus argumentos,

$$\begin{aligned} \theta_k - \theta_{k-1} &= \frac{\theta + 2k\pi}{n} - \left[\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right] \\ &= \frac{2\pi}{n}(k - (k-1)) = \frac{2\pi}{n}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

onde $\theta_k = \text{arg}(z_k)$.

Exemplo 2.28. Vamos determinar a raiz cúbica do número complexo

$$z = 27 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Como vimos existem três números complexos distintos que são raízes cúbicas de z e podemos escrevê-los utilizando (2.12) da seguinte maneira:

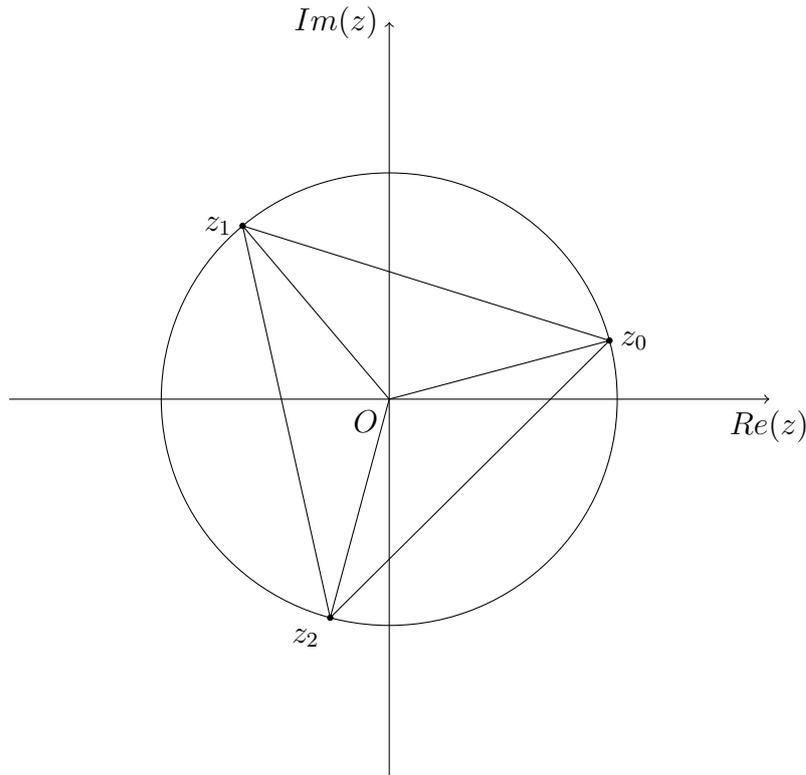
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) \right] \\ &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right) \right] \\ &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\pi}{12} \right) \right] \\ &= 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi + 8\pi}{4}}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi + 8\pi}{4}}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{9\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{4} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{9\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{9\pi}{12} \right) \right] \\
&= 3 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi + 16\pi}{4}}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi + 16\pi}{4}}{3} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{17\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{17\pi}{4} \right) \right] \\
&= \sqrt[3]{27} \left[\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right] \\
&= 3 \left[\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right].
\end{aligned}$$

Geometricamente (Figura 2.10), temos:

Figura 2.10: Representação geométrica da raiz cúbica de um número complexo.



Fonte: Elaborada pela autora.

◇ Caiu no Vestibular/ Concurso

- (UNESP- 2008) As raízes de $x^4 - a = 0$ são vértices de um quadrado no plano complexo. Se uma raiz é $1 + i$ e o centro do quadrado é $0 + 0i$, determine o valor de a .

Resolução: Como $1 + i$ é raiz da equação então $(1 + i)^4 - a = 0$. Assim, recordando da seção 2.4.3 para $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ temos $z^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i$. Tomando $z = 1 + i$ com $x = 1$ e $y = 1$, segue

$$\begin{aligned} z^4 - a &= 0 \\ [(1^4 - 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 1^4) + (4 \cdot 1^3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1^3)i] - a &= 0 \\ [(1 - 6 + 1) + (4 - 4)i] - a &= 0 \\ -4 + 0i - a &= 0 \\ -4 - a &= 0 \\ a &= -4. \end{aligned}$$

Gabarito: -4.

3 Funções de variáveis complexas

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas das funções elementares complexas que serão utilizadas nos Capítulos 4 e 5. Além disso, apresentar fatos e contrastes interessantes que essas funções possuem em comparação com as do caso real. Este capítulo foi baseado nas referências [14, 15, 21, 22, 23].

3.1 Definição de função complexa

Primeiramente definimos uma função de variável complexa e algumas características que o conjunto domínio pode assumir e em seguida apresentamos as funções exponencial, trigonométrica e logarítmica.

Definição 3.1. Sejam A, B dois subconjuntos de \mathbb{C} . Uma **função de variável complexa** f de A em B é uma correspondência que associa cada número complexo de $z \in A$ um único número complexo $w \in B$ indicado por $f(z) = w$.

Notação:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ z &\mapsto f(z) = w \end{aligned}$$

Assim como nas funções reais, denominamos o conjunto A de domínio da função f , B o contradomínio de f e $f(A) = \{f(z), \forall z \in A\}$ o conjunto imagem da função complexa f . Além disso, chamamos z de variável independente e w de variável dependente.

Antes de definir o domínio de uma função vamos relembrar a definição de conjunto aberto e conexo.

Definição 3.2. Dizemos que o ponto z é um **ponto interior** de um conjunto A quando existir um disco aberto D de centro em z e raio $r > 0$ contido em A , isto é,

$$D = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \subset A.$$

Se todos os pontos de um conjunto são pontos interiores, então dizemos que este **conjunto é aberto**.

Definição 3.3. Diz-se que um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ é **conexo** quando dados dois pontos quaisquer $z_1, z_2 \in D$ existir uma poligonal λ com extremos em z_1 e z_2 contida inteiramente em D .

Definição 3.4. Seja $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, dizemos que A é um **domínio**¹ se A for um conjunto aberto e conexo.

¹Não confundir com o domínio de uma função dado na Definição 3.1.

Como o número complexo $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ é representado por um par ordenado, podemos dizer também que uma função complexa associa cada par ordenado (x, y) a um par ordenado $w = (u(x, y), v(x, y))$. De fato, escrevendo $z = (x, y)$ e $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$, como $z \in \mathbb{C}$ e $w = f(z)$, segue então que $w = u(x, y) + v(x, y)i = (u(x, y), v(x, y))$.

Da definição de gráfico de uma função de uma variável real $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e A o domínio de f , temos

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), \text{ para todo } x \in A\}.$$

Isto é, $G(f)$ é o conjunto formado de todos os pares ordenados (x, y) no qual x pertence ao domínio de f e y é a imagem de x pela função f .

Sabe-se que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma curva no plano \mathbb{R}^2 formada pelos pontos $(x, f(x))$. E as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são representadas graficamente por uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 formada pelos pontos $(x, y, f(x, y))$ cuja f é uma função real de duas variáveis reais x e y .

Entretanto, a função complexa $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$, não dispõe de uma visualização geométrica uma vez que é necessário um ambiente quadridimensional para fazer tal representação.

Apesar desta impossibilidade, podemos obter graficamente algumas informações sobre as funções complexas fazendo um esboço do domínio da f no plano complexo e um esboço da imagem da f . Ou seja, analisamos dois planos complexos separadamente para as variáveis z e w e denominamos de z -plano e w -plano, respectivamente.

Assim, para cada ponto $z = (x, y)$ do z -plano no domínio de f , existe um único ponto (u, v) do w -plano dado por $w = f(z) = f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i = u + vi = (u, v)$.

A correspondência acima citada é chamada de *aplicação* ou *transformação* de pontos do z -plano em pontos do w -plano pela função f .

Observamos que existem trabalhos que exploram com mais detalhes as transformações complexas como lugares geométricos, veja [18, 23, 24]. Na sequência do texto optamos por abordar as funções exponencial, logarítmica e trigonométrica, em particular seno e cosseno, os quais serão utilizadas no Capítulo 4.

3.2 Exponencial

Antes de definir a função exponencial complexa, recordamos alguns pontos da função exponencial real definida por:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp x = e^x. \end{aligned}$$

Tal função é contínua, satisfaz a igualdade $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ (propriedade aditiva) e é derivável sendo $\exp'(x) = \exp(x)$, ou seja, a derivada da função exponencial real é a própria função.

Quando pensamos em uma definição para a função exponencial complexa é natural buscarmos uma definição a qual preserve todas essas características uma vez que \mathbb{C} é uma extensão de \mathbb{R} , e no caso para $z = x + yi$ um número complexo com $y = 0$ voltamos ao caso real. Assim, procuramos uma f que seja definida em todo plano complexo \mathbb{C} , contínua, diferenciável com derivada igual a própria função e que preserve a propriedade aditiva da exponencial real.

Motivados por estas considerações temos a seguinte definição para a função exponencial complexa:

Definição 3.5. Definimos a **função exponencial complexa** como:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi},$$

onde $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ (Fórmula de Euler).

Observação 3.6. Note que para $y = 0$, temos a função exponencial complexa se reduzindo a função exponencial real. De fato, $z = x + 0i = x$, logo $e^z = e^x$.

Observação 3.7. A justificativa para definir $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ passa pela compreensão de representar funções como série de potências.

No caso real, a série de Taylor da função exponencial $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ centralizada na origem (série de Maclaurin) é dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Substituindo $x = yi$, com $y \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária, têm-se:

$$e^{yi} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \frac{(yi)^6}{6!} + \frac{(yi)^7}{7!} + \dots$$

$$= 1 + yi + \frac{y^2 i^2}{2} + \frac{y^3 i^3}{3!} + \frac{y^4 i^4}{4!} + \frac{y^5 i^5}{5!} + \frac{y^6 i^6}{6!} + \frac{y^7 i^7}{7!} + \dots$$

Segue da seção 2.4.3,

$$e^{yi} = 1 + yi - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3 i}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5 i}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{y^7 i}{7!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right). \quad (3.1)$$

Lembrando que as séries $\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right)$ e $\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right)$ são as expansões das séries de Taylor na origem das funções $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$ respectivamente, segue da igualdade (3.1) que

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Para quaisquer $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades para a função exponencial complexa, e a prova de tais propriedades é facilmente encontrada em [21]:

1. $|e^z| = e^x$.
2. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
3. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
5. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

Notação: Também podemos agora representar um número complexo em sua forma polar $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ por uma função exponencial $z = re^{i\theta}$.

Observação 3.8. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo item 1, $|e^z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Isso significa que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, não temos a necessidade de exigir que e^{z^2} no item 3 seja diferente de zero uma vez que a função exponencial complexa nunca se anula. Outro fato que justifica isso é que pela definição de números complexos para $w = f(z) = e^z = (e^x \cos y) + (e^x \operatorname{sen} y)i$ ser nulo então sua parte real e imaginária tem que ser ambas nulas, ou seja, $e^x \cos y = 0$ e $e^x \operatorname{sen} y = 0$. Como $e^x > 0$ tais funções se anulariam quando $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$ forem nulas simultaneamente, o que não ocorre para tais funções.

As demonstrações de tais propriedades seguem imediatamente das definições de módulo e das operações de multiplicação e divisão de números complexos.

Além dessas propriedades, vale observar algumas diferenças que a função exponencial complexa apresenta em comparação com a exponencial real.

◆ **Diferenças entre a função exponencial complexa e real:**

1. A função exponencial complexa pode assumir valores negativos, como por exemplo, para $z = x + 3\pi i$, $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+3\pi i} = e^x e^{3\pi i} \\ &= e^x (\cos(3\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi)) \\ &= e^x (-1 + 0) = -e^x. \end{aligned}$$

Sabemos que e^x é a exponencial real e $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $-e^x < 0$.

2. A função exponencial complexa e^z é periódica em \mathbb{C} de período $2\pi i$. De fato, segundo a definição de função periódica dado uma constante $z_0 \neq 0$ chamada de período da função têm-se que uma função f é periódica se $f(z + z_0) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Note que

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+yi+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} \\ &= e^x [\cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi)] \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^x e^{yi} = e^{x+yi} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

3. Decorre da observação anterior que a função exponencial complexa não é injetora. Vale $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

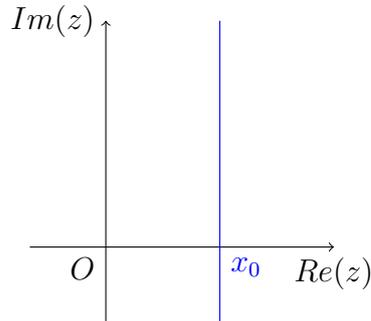
Portanto, $e^{z_1} = e^{z_2}$ com $z_1 \neq z_2$.

● **Análise de algumas regiões do z -plano no w -plano pela função $f(z) = e^z$.**

Seja $z = x + yi$ um número complexo. Vamos analisar a transformação $f(z) = e^z$ em dois casos específicos: a reta vertical $z = x_0 + yi$, com $y \in \mathbb{R}$ e a reta horizontal $z = x + y_0 i$, com $x \in \mathbb{R}$. Deixamos a cargo do leitor interpretar a transformação pela faixa retangular $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$.

1. Reta vertical $z = x_0 + yi, y \in \mathbb{R}$.(Figura 3.1)

Figura 3.1: Reta vertical $z = x_0 + yi$ no z -plano.



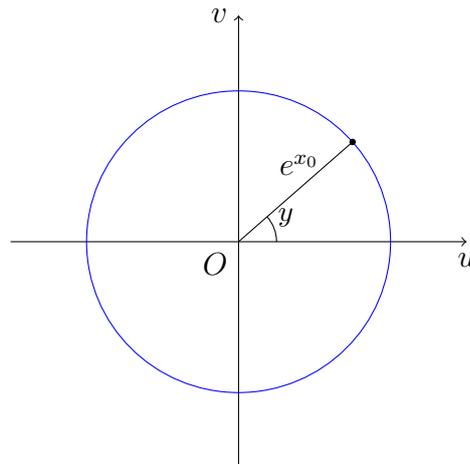
Fonte: Elaborada pela autora.

Para $k = f(z)$, temos $k = e^{x_0}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^{x_0} \cos y + ie^{x_0} \operatorname{sen} y$. Como

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{(e^{x_0} \cos y)^2 + (e^{x_0} \operatorname{sen} y)^2} = \sqrt{e^{2x_0} \cos^2 y + e^{2x_0} \operatorname{sen}^2 y} \\ &= \sqrt{e^{2x_0} (\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} \\ &= \sqrt{e^{2x_0}} = |e^{x_0}| = e^{x_0}. \end{aligned}$$

Assim, $|k|$ é fixo e como $y \in (-\infty, \infty)$, a reta vertical $z = x_0 + yi$ no z -plano é transformada na circunferência centrada na origem e de raio $|k| = e^{x_0}$ no w -plano, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2: Circunferência centrada na origem de raio e^{x_0} no w -plano.

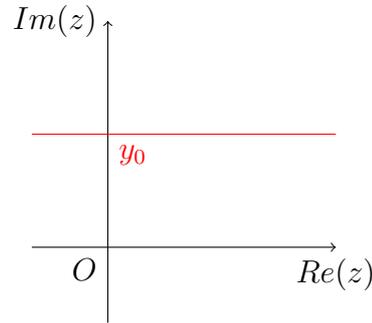


Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, concluímos que retas verticais no z -plano são transformadas em circunferências no w -plano.

2. Reta horizontal $z = x + y_0i, x \in \mathbb{R}$.(Figura 3.3)

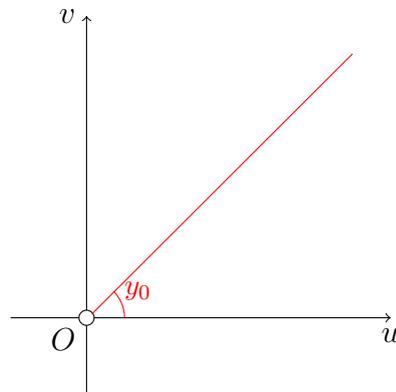
Figura 3.3: Reta horizontal $z = x + y_0i$ no z - plano.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para $p = f(z)$, temos $p = e^x e^{y_0i} = e^x (\cos y_0 + i \operatorname{sen} y_0)$. Ou seja, o ângulo referente ao número complexo p está fixado e é igual a y_0 . Como $x \in (-\infty, \infty)$, temos que $f(z) = e^z$ transforma a reta horizontal $z = x + y_0i$ em uma semirreta com origem em 0, mas não contendo O , de inclinação y_0 como mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4: Transformação da reta horizontal $z = x + y_0i$ pela função $f(z) = e^z$.



Fonte: Elaborada pela autora.

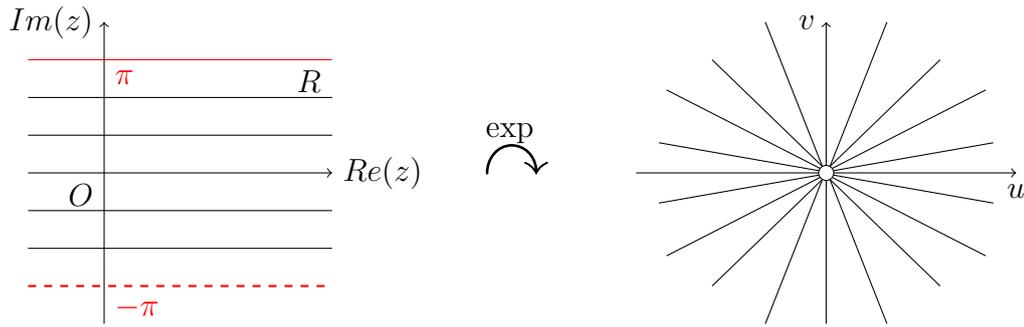
Observação 3.9. • A função exponencial restrita a faixa horizontal

$$R = \{x + yi \mid -\pi < y \leq \pi\}$$

define uma função injetora.

- A imagem da região R , através da função exponencial é o plano complexo exceto a origem, veja Figura 3.5.

Figura 3.5: Função injetora.



Fonte: Elaborada pela autora.

Estas observações serão úteis ao analisarmos a função logarítmica.

3.3 Trigonométrica

Observe que a propriedade 5 da função exponencial é $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$. Considerando $z = x + yi$ e $e^z = (e^x \cos y) + (e^x \sen y)i$ temos

$$\overline{e^z} = (e^x \cos y) - (e^x \sen y)i. \quad (3.2)$$

Segue da paridade das funções seno e cosseno, isto é, $-\sen y = \sen(-y)$ e $\cos y = \cos(-y)$, e pela igualdade (3.2) que

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= (e^x \cos y) - (e^x \sen y)i \\ &= e^x \cos(-y) + ie^x(-\sen y) \\ &= e^x \cos(-y) + ie^x \sen(-y) \\ &= e^x (\cos(-y) + i \sen(-y)) \\ &= e^x e^{-yi} = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}, \end{aligned}$$

o que prova a propriedade 5.

Em particular,

$$e^{-yi} = \cos(-y) + i \sen(-y) \quad (3.3)$$

$$= \cos y - i \sen y. \quad (3.4)$$

Segue da Fórmula de Euler para a função exponencial e por (3.4) que:

$$e^{yi} + e^{-yi} = 2 \cos y \Rightarrow \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}. \quad (3.5)$$

e

$$e^{yi} - e^{-yi} = 2i \sen y \Rightarrow \sen y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \quad (3.6)$$

Baseados nestas observações definimos então as funções trigonométricas seno e cosseno em \mathbb{C} , como funções complexas.

Definição 3.10. Definimos a **função seno complexa** por

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \text{sen}(z) = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \end{aligned}$$

Definição 3.11. Definimos a **função cosseno complexa** por

$$\begin{aligned} \text{cos}: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \text{cos}(z) = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}. \end{aligned}$$

A interpretação geométrica destas transformações do z -plano para o w -plano podem ser encontradas em [22].

Valem as seguintes propriedades que são análogas às do caso real.

1. $\text{sen}^2 z + \text{cos}^2 z = 1$.
2. A paridade das funções são preservadas, isto é,
 - Cosseno é uma função par: $\text{cos}(-z) = \text{cos} z, \forall z \in \mathbb{C}$.
 - Seno é uma função ímpar: $\text{sen}(-z) = -\text{sen} z, \forall z \in \mathbb{C}$.
3. Soma de arcos
 - $\text{cos}(z_1 + z_2) = \text{cos} z_1 \text{cos} z_2 - \text{sen} z_1 \text{sen} z_2$.
 - $\text{cos}(z_1 - z_2) = \text{cos} z_1 \text{cos} z_2 + \text{sen} z_1 \text{sen} z_2$.
 - $\text{sen}(z_1 + z_2) = \text{sen} z_1 \text{cos} z_2 + \text{sen} z_2 \text{cos} z_1$.
 - $\text{sen}(z_1 - z_2) = \text{sen} z_1 \text{cos} z_2 - \text{sen} z_2 \text{cos} z_1$.

As provas destas propriedades decorrem da definição da função exponencial.

Além dessas propriedades, vale observar a diferença entre as funções seno e cosseno complexas e reais.

◆ **Diferença entre as funções seno e cosseno complexas e reais:**

As funções seno e cosseno reais são limitadas, porém as complexas não são. Mostremos o caso do cosseno.

De fato, considere $z = yi$ então

$$\begin{aligned} \text{cos}(yi) &= \frac{e^{(yi)i} + e^{-(yi)i}}{2} = \frac{e^{yi^2} + e^{-yi^2}}{2} \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo $y \rightarrow \infty$ obtemos $\text{cos}(yi) \rightarrow \infty$, ou seja, ao longo desses números complexos a função não é limitada, portanto, em \mathbb{C} não é limitada.

O caso da função seno é análoga a função cosseno.

Observação 3.12. As demais funções trigonométricas complexas podem ser encontradas nas referências [14, 15, 21, 22].

3.4 Logarítmica

Para definir o logaritmo de um número complexo espera-se que as propriedades usuais do logaritmo natural de um número real tais como

$$\log e^x = x \quad \text{e} \quad \log a.b = \log a + \log b$$

continuem verdadeiras. Neste sentido, sendo $z \neq 0$ e $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|e^{i\theta}$ temos

$$\begin{aligned} \log z &= \log |z|e^{i\theta} = \log |z| + \log e^{i\theta} \\ &= \ln |z| + i\theta, \end{aligned}$$

onde $\ln |z|$ pode ser interpretado como $\log_e |z|$.

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.13. Se z é um número complexo não nulo e ainda, $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|e^{i\theta}$, definimos o **logaritmo de z** como

$$\log z = \ln |z| + i\theta.$$

Se $z \in \mathbb{R}_+$ então $\log z = \ln |z| = \underbrace{\ln z}_{\text{logaritmo natural}}$.

O logaritmo de um número complexo não é único. De fato, $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|[\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Olhando na segunda representação polar de z temos

$$\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $\log z$ pode assumir infinitos valores.

Exemplo 3.14. Seja $z = 1$, isto é, $z = 1[\cos(0 + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(0 + 2k\pi)]$ em que $|z| = 1$ e o argumento principal de z é zero. Assim,

$$\begin{aligned} \log 1 &= \log 1[\cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi)] = \log(1e^{2k\pi i}) \\ &= \ln 1 + i(2k\pi) = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.15. Seja $z = -i$, isto é, $z = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$ em que $|z| = 1$ e o argumento principal de z é $\frac{3\pi}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \log(-i) &= \log 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \log[1e^{(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)i}] \\ &= \ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, o logaritmo definido acima não é função quando pensamos função como uma função unívoca², pois para um valor z temos vários correspondentes. Neste caso, dizemos que $\log z$ é uma função multivalente, ou seja, para um elemento do domínio a função associa dois ou mais elementos do contradomínio.

Destacamos algumas propriedades do logaritmo:

²Uma função é unívoca (univalente) num conjunto D se ela tem um único valor correspondente a cada valor de z em D .

1. Se $z \neq 0$, então $e^{\log z} = z$.

De fato, $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ com $k \in \mathbb{Z}$, então $\log z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi)$. Da definição de exponencial temos:

$$\begin{aligned} e^{\log z} &= e^{\ln |z| + i(\theta+2k\pi)} = e^{\ln |z|} e^{i(\theta+2k\pi)} \\ &= |z| e^{i(\theta+2k\pi)} = z. \end{aligned}$$

2. $\log e^z = z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

De fato, para $z = x + yi$ e lembrando que $e^z = e^x e^{yi} = e^x e^{i(y+2k\pi)}$, onde $e^x = |e^z|$ e $y + 2k\pi = \arg e^z$ temos:

$$\begin{aligned} \log e^z &= \ln |e^x| + i \arg e^z \\ &= \ln e^x + i(y + 2k\pi) \\ &= \underbrace{x + yi}_z + 2k\pi i = z + 2k\pi i. \end{aligned}$$

3. Se z_1, z_2 são números complexos não nulos, então $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + (2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$. De fato, pela propriedade 1, temos:

$$e^{\log(z_1 z_2)} = z_1 z_2 = e^{\log z_1} e^{\log z_2} = e^{\log z_1 + \log z_2}. \quad (3.7)$$

Como $e^z = e^w$ se, e só se, $w = z + 2k\pi i$. Tomando $w = \log z_1 z_2$ e $z = \log z_1 + \log z_2$, segue de (3.7)

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + (2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, para estudarmos a função logarítmica complexa como uma função usualmente conhecida (unívoca), faz necessário restringir o seu domínio. Para isto, basta estabelecer um intervalo de escolha do argumento de z .

O intervalo escolhido para a variação do argumento de z é o intervalo $(-\pi, \pi]$ aberto à esquerda e fechado à direita, intervalo em que a função exponencial é injetora. Vimos na Observação 2.10 que o argumento do número complexo não nulo z escolhido neste intervalo é representado por $\arg z$ e é chamado de argumento principal do número complexo z .

Frisando bem, se escolhermos sempre o argumento de um número complexo $z \neq 0$, no intervalo $(-\pi, \pi]$ obtemos uma função que a cada número complexo não nulo z associa o número complexo $\ln |z| + i(\arg z)$.

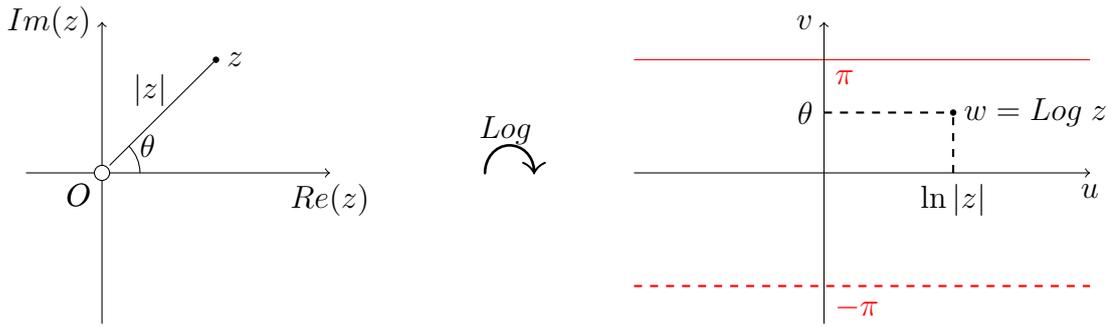
Definição 3.16. Definimos a **função logarítmica principal** de um número complexo como:

$$\begin{aligned} \text{Log}: \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \text{Log}(z) = \ln |z| + i(\arg z) ; \arg z \in (-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Por definição, a imagem da função logarítmica principal Log (Figura 3.6) é:

$$\begin{aligned} \text{Log}(\mathbb{C} - \{0\}) &= \{\text{Log } z \mid z \in \mathbb{C} - \{0\}\} \\ &= \{\underbrace{\ln |z|}_u + i \underbrace{(\arg z)}_v \mid z \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ e } -\pi < \arg z \leq \pi\} \\ &= \{u + iv \mid u \in \mathbb{R} \text{ e } -\pi < v \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Figura 3.6: Função logarítmica principal de z .



Fonte: Elaborada pela autora.

Sabemos também que

$$\exp(\text{Log } z) = \exp(\ln |z| + i(\arg z)) = e^{\ln |z|} e^{i(\arg z)} = |z| e^{i(\arg z)} = z, \quad (3.8)$$

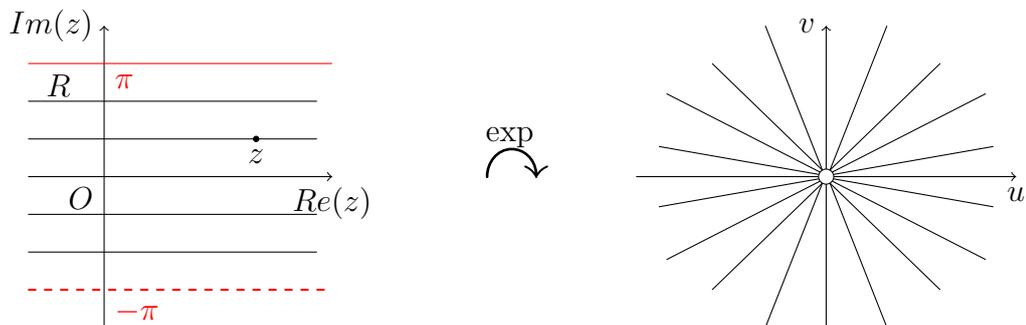
e considerando $z = x + yi$, lembrando que $e^z = e^x e^{yi}$ em que $|e^z| = e^x$ e $\arg e^z = y$, segue também

$$\text{Log}(\exp z) = \text{Log}(e^z) = \ln |e^z| + i(\arg e^z) = \ln e^x + iy = x + yi = z. \quad (3.9)$$

Atenção: Na igualdade (3.9) usamos a definição do logaritmo principal pois $y \in (-\pi, \pi]$ é o argumento principal do número complexo $e^x e^{yi}$.

As igualdades (3.8) e (3.9) expressam o fato de que o logaritmo principal Log e a exponencial \exp restrita a faixa $R = (-\pi, \pi]$ são inversas uma da outra, veja a Figura 3.7.

Figura 3.7: Função inversa do Log .



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim restringindo-se o domínio de $\log z$ temos que as propriedades são as mesmas do caso real, e suas demonstrações seguem diretamente da definição de logaritmo principal e das representações polares já vistas.

Propriedades: Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, não nulos, valem:

i) $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2.$

ii) $\text{Log} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2.$

iii) $\text{Log}(z^m) = m\text{Log } z, \forall m \in \mathbb{Z}^*$.

Tomando $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ números complexos quaisquer temos:

$$\begin{aligned} \text{Log}(z_1 z_2) &= \text{Log}(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}) = \text{Log}(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) \\ &= \ln |r_1 r_2| + i(\theta_1 + \theta_2) = \ln(r_1 r_2) + i\theta_1 + i\theta_2 \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + i\theta_1 + i\theta_2 \\ &= \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2). \end{aligned}$$

As demonstrações das demais propriedades segue o caso análogo ao demonstrado acima.

◆ **Diferença entre a função logarítmica complexa e real:**

- Como a função exponencial não é injetora em \mathbb{C} , logo não é bijetora e não possui inversa. Isto é, a função logarítmica complexa não é a função inversa da função exponencial em \mathbb{C} . Porém como vimos, se fizermos uma restrição na função exponencial a uma faixa $(-\pi, \pi]$ temos que a função inversa da exponencial coincide com a logarítmica principal definida nesta seção.
- Podemos definir Log de um número real negativo, o que não acontece para o caso real, uma vez que $\text{Log } z$ está definido para $\ln |z|$, onde $|z| > 0$. Por exemplo, para $z = -3$, temos $\text{Log}(-3) = \ln |-3| + i\pi = \ln 3 + i\pi$.

4 Cálculo para funções de uma variável complexa

Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos sobre o conjunto dos números complexos e as funções a valores complexos, uma sequência natural e importante por suas aplicações é a construção de resultados do Cálculo Diferencial. Assim, este capítulo possibilita ao leitor enveredar neste tema e aprofundá-lo se desejar através do estudo das referências utilizadas aqui [14, 15, 19, 21].

4.1 Limite e continuidade

Sejam A um subconjunto aberto de \mathbb{C} e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função.

Definição 4.1. Dado um número $z_0 \in A$, dizemos que o número $w_0 \in \mathbb{C}$ é o **limite de f** quando z tende a z_0 se, dado qualquer número $\epsilon > 0$ tem-se para $0 < |z - z_0| < \delta$, $z \in A$, $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

Notação: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Isso significa que a distância entre $f(z)$ e w_0 ($|f(z) - w_0|$) é tão pequena quanto se queira, desde que z esteja suficientemente próximo de z_0 .

Observação 4.2. Quando o limite de uma função f existe em z_0 , esse limite tem um único valor. De fato, suponhamos por contradição que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ com $w_0 \neq w_1$. Ou seja, $|w_0 - w_1| \neq 0$.

Por hipótese, dado $\epsilon = \frac{|w_0 - w_1|}{2} > 0$

- $\exists \delta_1 > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$.
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \epsilon$.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então para $|z - z_0| < \delta$ tem-se

$$\begin{aligned} |w_0 - w_1| &= |w_0 - f(z) + f(z) - w_1| \leq |w_0 - f(z)| + |f(z) - w_1| \\ &= |(f(z) - w_0)| + |f(z) - w_1| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2 \frac{|w_0 - w_1|}{2} = |w_0 - w_1|. \end{aligned}$$

O que implica que $|w_0 - w_1| < |w_0 - w_1|$ que é uma contradição. Portanto, $w_0 = w_1$.

Observação 4.3. Para provar que o limite não existe, uma analogia que a gente faz similar a funções de uma variável real via limites laterais, é mostrar que limites por caminhos distintos são diferentes. Como estamos no plano complexo existem infinitas maneiras de se aproximar do ponto z_0 . Assim, se tomarmos dois caminhos distintos contidos no domínio da função e obtermos valores distintos do limite concluímos que o limite não existe.

Podemos tratar problemas de limite estabelecendo a conexão entre o limite de uma função de uma variável complexa e os limites de funções reais de duas variáveis reais.

Teorema 4.4. *Escrevendo $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ onde u e v são funções de variáveis reais x e y , $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0i$ e $w_0 = u_0 + v_0i$. Então, o limite de f existe em z_0 e é igual a w_0 ($\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$) se, e somente se, os limites de u e v existem em (x_0, y_0) e são iguais a u_0 e v_0 , respectivamente. Isto é,*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Demonstração. Sabe-se que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$.

Como $f(z) - w_0 = u(x, y) + v(x, y)i - (u_0 + v_0i) = (u(x, y) - u_0) + (v(x, y) - v_0)i$ é um número complexo com parte real igual a $(u(x, y) - u_0)$ e parte imaginária igual a $(v(x, y) - v_0)$ e pela propriedade $|Re(z)| \leq |z|$ para z complexo, temos

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - w_0| < \epsilon,$$

desde que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Também $|Im(z)| \leq |z|$, logo

$$|v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - w_0| < \epsilon,$$

desde que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Portanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

Agora, dado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$, dado $\epsilon > 0$,

- $\exists \delta_1 > 0$ tal que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |u(x, y) - u_0| < \frac{\epsilon}{2}$.
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |v(x, y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, assim

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |u(x, y) + v(x, y)i - (u_0 + v_0i)| = |(u(x, y) - u_0) + (v(x, y) - v_0)i| \\ &\leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0||i| = |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

desde que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, ou seja, $0 < |z - z_0| < \delta$. Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$. \square

As propriedades de limite de uma função complexa são similares às do limite de uma função real de uma variável. Mas, de acordo com o teorema anterior estas propriedades decorrem das propriedades do limite de funções reais de duas variáveis.

Propriedades: Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f_1 : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções complexas. Dado um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, se $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_2$ então:

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} c f_1(z) = c w_1$, onde c é qualquer número complexo.

(ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = w_1 + w_2$.

(iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) f_2(z)) = w_1 w_2$.

(iv) Se $w_1 \neq 0$ então $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{w_1}$. O que implica $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_2(z)}{f_1(z)} = \frac{w_2}{w_1}$.

Basta então separar parte real e imaginária e a prova segue do caso de funções de variáveis reais.

Definição 4.5. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é **contínua** no ponto $z_0 \in A$ se as duas condições seguintes são satisfeitas:

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe;

(ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Se f satisfaz essas propriedades em todos os pontos de A , dizemos que f é **contínua em A** , ou simplesmente **f é contínua**.

Exemplo 4.6. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \bar{z}$ é contínua.

De fato, $f(z_0) = \bar{z}_0$ e

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \epsilon > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ tem -se

$$|f(z) - f(z_0)| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta = \epsilon.$$

Logo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe e é igual a $f(z_0)$. Portanto, a função $f(z) = \bar{z}$ é contínua.

Para o próximo exemplo precisamos utilizar um resultado envolvendo continuidade via estudo de seqüências em \mathbb{C} .

Definição 4.7. Uma seqüência (z_n) em \mathbb{C} é dada por $z_n = x_n + y_n i$, onde $(x_n), (y_n)$ são seqüências em \mathbb{R} .

Dizemos que uma seqüência (z_n) é **convergente** para $z_0 \in \mathbb{C}$ se dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$.

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [14].

Teorema 4.8. Dada $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ e $z_0 \in D(f)$, então f é contínua em z_0 se, e somente se, para todo (z_n) em $D(f)$ com $z_n \rightarrow z_0$ têm-se $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Exemplo 4.9. A função logarítmica principal (*Log*) não é contínua no semieixo $Re(z) < 0$.

De fato, seja $z_0 = r_0 e^{i\pi}$ um ponto de $Re(z) < 0$ com argumento igual a π . E considere a seqüência $(z_n)_n$ onde $z_n = r_0 e^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_0 e^{i(-\pi + \frac{1}{n})} = r_0 e^{i(-\pi)} = z_0$$

e $\text{Log } z_n = \text{Log } r_0 e^{i(-\pi + \frac{1}{n})} = \ln r_0 + i(-\pi + \frac{1}{n})$, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log } z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln r_0 + i \left(-\pi + \frac{1}{n} \right) \right] = \ln r_0 - i\pi.$$

Mas o $\text{Log } z_0 = \ln r_0 + i\pi \neq \ln r_0 - i\pi$. Portanto, temos (z_n) tendendo a z_0 quando n tende ao infinito, enquanto que $(\text{Log } z_n)$ não tende ao $\text{Log } z_0$ quando n tende ao infinito, caracterizando assim uma descontinuidade pelo Teorema 4.8.

Como consequência das propriedades de limites, obtém-se as seguintes propriedades para funções contínuas:

Propriedades: Sejam f, g funções contínuas em algum ponto z_0 em que $z_0 \in D(f)$ e $z_0 \in D(g)$, onde $D(f)$ é o domínio de f e $D(g)$ é o domínio de g . Então:

(i) a soma $f + g$ é uma função contínua em z_0 , onde $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$;

(ii) o produto fg é uma função contínua em z_0 , onde $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$;

(iii) o quociente $\frac{f}{g}$ é uma função contínua em z_0 , onde $D\left(\frac{f}{g}\right) = \{z \in D(f) \cap D(g) : g(z) \neq 0\}$.

Antes de demonstrar que a composição de funções contínuas é uma função contínua, vamos relembrar a definição de composição de funções.

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções tais que $B \subset G$ e A, B, G são subconjuntos de \mathbb{C} . A função $h: A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z))$ denomina-se *função composta de f com g* .

Proposição 4.10. *Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções tais que $B \subset G$ e A, B, G são subconjuntos de \mathbb{C} . Se f é contínua em z_0 e se g é contínua no ponto $f(z_0)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em z_0 .*

Demonstração. Sabemos que f, g são funções contínuas em z_0 e $f(z_0)$, respectivamente. Logo, dado $\epsilon > 0$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } w \in G, 0 < |w - w_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(w) - g(w_0)| < \epsilon.$$

Tomando agora $\delta_2 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ que satisfaz $|f(z) - f(z_0)| < \delta_2$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta_1$.

Como para todo z do domínio da f , $f(z)$ pertence ao domínio da g , tomemos $w = f(z)$, assim $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon$ sempre que $0 < |f(z) - f(z_0)| < \delta_2$.

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta_1$ têm-se $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon$, ou seja, a função composta $g \circ f$ é contínua em z_0 . \square

Proposição 4.11. *A função $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, com $z = x + yi$, é contínua em $z_0 = x_0 + y_0i$ se, e somente se, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) .*

Demonstração. De fato, f contínua em z_0 , tem-se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i$. Segue do Teorema 4.4 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, ou seja, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) . \square

Com este resultado para analisar a continuidade de uma função $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ em $z_0 = x_0 + y_0i$, basta analisar a continuidade da sua parte real e imaginária.

Exemplo 4.12. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cos(2x + y) + e^y i$, $z = x + yi$, é contínua em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.

De fato, a parte real e imaginária de f são dadas, respectivamente, por $u(x, y) = \cos(2x + y)$ e $v(x, y) = e^y$. Como as funções cosseno, exponencial e polinomial são contínuas, logo f têm suas partes real e imaginária contínuas. Portanto, segue da Proposição 4.11 que f é contínua.

Exemplo 4.13. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, onde

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e $v(x, y) = x - y$, não é contínua em $(0, 0)$.

De fato, a função $u(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ e a função $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada. Mas como $u(0, 0) = 1$ que é diferente

do $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ a função $f(z)$ não é contínua em $(0, 0)$.

Assim, ao se tratar de continuidade de funções complexas, temos como no caso real, funções que são contínuas e também funções que são descontínuas.

◇ Caiu no Vestibular/ Concurso

- (ESFCEX-2019/adaptada) Seja f uma função e z um número complexo, onde $f(z) = \frac{3iz + 8}{2z - i}$, aplicando-se as propriedades de limite para números complexos, é correto afirmar que $\lim_{z \rightarrow 2i} f(z)$ é igual a:

- A) $\frac{3i}{2}$ B) 0 C) ∞ D) $-\frac{3i}{2}$ E) $-\frac{2i}{3}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{3iz + 8}{2z - i} &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{3i(2i) + 8}{2(2i) - i} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{6i^2 + 8}{4i - i} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{-6 + 8}{3i} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2}{3i} = \frac{2}{3i}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2}{3i} = \frac{2}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} = \frac{-6i}{9} = -\frac{2i}{3}$. Logo

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{3iz + 8}{2z - i} = -\frac{2i}{3}.$$

Gabarito: E.

4.2 Derivada

A seguir veremos o conceito de derivada de funções complexas, o qual é similar ao caso de funções de variável real.

Definição 4.14. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, z_0 um ponto de A e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é derivável em z_0 quando existir o limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Esse limite é chamado de **derivada de f em z_0** , denotado por $f'(z_0)$. Quando a função é derivável em todos os pontos de A dizemos que ela é derivável nesse conjunto.

Exemplo 4.15. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^3$ é derivável em \mathbb{C} . De fato, se $z_0 \in \mathbb{C}$ é arbitrário, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z)^3 - (z_0)^3}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^2 + zz_0 + z_0^2)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + zz_0 + z_0^2) = z_0^2 + z_0z_0 + z_0^2 \\ &= 3z_0^2. \end{aligned}$$

Exemplo 4.16. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ para $z \in \mathbb{C}$. Seja $z_0 = x_0 + y_0i$ qualquer ponto de \mathbb{C} , então $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ não existe.

Pela Observação 4.3 basta escolher dois caminhos distintos passando por z_0 e mostrar que os limites são distintos.

- Fazendo $z \rightarrow z_0$, sendo z pertencente a reta $\operatorname{Re}(z) = x_0$, ou seja, $z = x_0 + yi$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x_0 - x_0}{(x_0 + yi) - (x_0 + y_0i)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{(x_0 - x_0) + (y - y_0)i} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{(y - y_0)i} = 0. \end{aligned}$$

- Fazendo $z \rightarrow z_0$, sendo z pertencente a reta $\operatorname{Im}(z) = y_0$, ou seja, $z = x + y_0i$ segue

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - x_0}{(x + y_0i) - (x_0 + y_0i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) + (y_0 - y_0)i} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1. \end{aligned}$$

Como os limites existem e são distintos, logo a função $f(z) = Re(z)$ não é derivável.

O resultado a seguir é análogo ao caso de funções de uma variável real.

Teorema 4.17. *Se uma função f é derivável em um ponto z_0 , então f é contínua em z_0 .*

Demonstração. Para demonstrar que f é contínua em z_0 devemos mostrar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$.

Observe que $f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}(z - z_0)$, logo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}(z - z_0). \quad (4.1)$$

Como f é derivável em z_0 , o $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} = f'(z_0)$ e segue de (4.1) que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0)(z_0 - z_0) = f'(z_0)0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em z_0 . □

A recíproca desse teorema não é verdadeira, pois como vimos, a função $f(z) = Re(z)$ é contínua em \mathbb{C} mas não é derivável em \mathbb{C} . Outro exemplo de uma função complexa que é contínua em \mathbb{C} , vista no Exemplo 4.6, mas não é derivável é a função $f(z) = \bar{z}$.

Exemplo 4.18. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$. Temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{(z - z_0)} \text{ não existe.}$$

- Fazendo $z \rightarrow z_0$, pela reta $Re(z) = x_0$, ou seja, $z = x_0 + yi$ sabendo que $\bar{z} = x_0 - yi$, $z_0 = x_0 + y_0i$ e $\bar{z}_0 = x_0 - y_0i$, segue

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(x_0 - yi) - (x_0 - y_0i)}{(x_0 + yi) - (x_0 + y_0i)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(x_0 - x_0) - (y - y_0)i}{(x_0 - x_0) + (y - y_0)i} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-(y - y_0)i}{(y - y_0)i} = -1. \end{aligned}$$

- Fazendo $z \rightarrow z_0$, pela reta $Im(z) = y_0$, ou seja, $z = x + y_0i$ sabendo que $\bar{z} = x - y_0i$, $z_0 = x_0 + y_0i$ e $\bar{z}_0 = x_0 - y_0i$, segue

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(x - y_0i) - (x_0 - y_0i)}{(x + y_0i) - (x_0 + y_0i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) + (-y_0 + y_0)i}{(x - x_0) + (y_0 - y_0)i} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $f(z) = \bar{z}$ não é derivável em \mathbb{C} .

Definição 4.19. Seja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Dizemos que f é **holomorfa em A**, quando f for derivável em cada z_0 de A . Quando $A = \mathbb{C}$, dizemos que f é uma **função inteira**.

Exemplo 4.20. Como vimos no exemplo 4.15 a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = z^3$ é uma função derivável em todo ponto $z \in \mathbb{C}$, logo f é uma função inteira.

Exemplo 4.21. A função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = |z|^2$ é um exemplo de uma função não holomorfa. Pois f é derivável em $z_0 = 0$, com $f'(0) = 0$, mas não é derivável em nenhum $z \neq 0$.

Para provar que f é derivável em $z_0 = 0$, usemos a Observação 2.18, $|z|^2 = z\bar{z}$. Assim, verificamos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - |0|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

Logo, f é derivável em $z_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

Agora, para z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} tal que $z_0 \neq 0$. Analisar $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ é equivalente a analisar o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ para $z = z_0 + h$, onde $h = z - z_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z_0 + h|^2 - |z_0|^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)(\overline{z_0 + h}) - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)(\bar{z}_0 + \bar{h}) - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0\bar{z}_0 + z_0\bar{h} + h\bar{z}_0 + h\bar{h} - z_0\bar{z}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{z_0\bar{h}}{h} + \frac{h\bar{z}_0}{h} + \frac{h\bar{h}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{z_0\bar{h}}{h} + \bar{z}_0 + \bar{h} \right]. \end{aligned}$$

Observe que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$ sobre o eixo real, ou seja, quando $h = x + 0i$ e, sobre o eixo imaginário ($h = 0 + yi$), são distintos, pois

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$, se $h = x$ para todo $x \neq 0$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-yi}{yi} = -1$, se $h = yi$ para todo $y \neq 0$.

Segue que a função $f(z) = |z|^2$ não possui limite no ponto $z_0 \neq 0$.

Portanto, f é derivável apenas em $O = (0, 0)$, logo não é holomorfa.

As regras de derivação para as funções holomorfas podem ser deduzidas da definição de derivada e das propriedades do limite assim como no caso de variáveis reais.

Propriedades: Sejam f, g funções holomorfas em um domínio A . Então as funções $f + g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{C}), fg, \frac{f}{g} (g(z) \neq 0)$ são holomorfas em A e valem :

$$(i) (f + g)'(z) = f'(z) + g'(z);$$

$$(ii) (\lambda f)'(z) = \lambda f'(z);$$

$$(iii) (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

$$(iv) \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

Também como no caso de variáveis reais temos a Regra da Cadeia para a derivada da composição de funções, mas antes de enunciarmos tal proposição, vejamos o seguinte lema:

Lema 4.22. *Uma função $g : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, é derivável em um ponto w_0 em A se, e só se, existir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que para $w = w_0 + h \in A$, têm-se:*

$$g(w) = g(w_0) + \alpha(w - w_0) + r(w)(w - w_0) \text{ onde } \lim_{w \rightarrow w_0} r(w) = 0 \text{ e neste caso } \alpha = g'(w_0).$$

Demonstração. Suponha que g é derivável em w_0 , isto é $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = g'(w_0) = \alpha$.

Defina para $w \neq w_0$, $r(w) = \frac{g(w) - g(w_0) - \alpha(w - w_0)}{w - w_0}$, ou seja,

$$r(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \frac{\alpha(w - w_0)}{w - w_0} \quad (4.2)$$

$$= \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \alpha \quad (4.3)$$

$$= \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0). \quad (4.4)$$

Basta mostrar que $\lim_{w \rightarrow w_0} r(w) = 0$. De fato, por (4.4), temos

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow w_0} r(w) &= \lim_{w \rightarrow w_0} \left[\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \right] \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \lim_{w \rightarrow w_0} g'(w_0) \\ &= g'(w_0) - g'(w_0) = 0. \end{aligned}$$

Suponha agora que

$$g(w) = g(w_0) + \alpha(w - w_0) + r(w)(w - w_0) \quad (4.5)$$

com o $\lim_{w \rightarrow w_0} r(w) = 0$. Devemos mostrar que $g'(w_0)$ existe. De fato, $g'(w_0)$ por definição é $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}$.

Segue de (4.5) que $g(w) - g(w_0) = \alpha(w - w_0) + r(w)(w - w_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} g'(w_0) &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\alpha(w - w_0) + r(w)(w - w_0)}{w - w_0} \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \left[\frac{\alpha(w - w_0)}{w - w_0} + \frac{r(w)(w - w_0)}{w - w_0} \right] \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \alpha + \lim_{w \rightarrow w_0} r(w) \\ &= \alpha + 0 = \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $g'(w_0) = \alpha$. □

Proposição 4.23. *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções de variáveis complexas, com $f(A) \subset B$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $f(z_0)$, então $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e sua derivada é $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.22 se g é derivável em um ponto w_0 , podemos definir a função g como

$$g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + r(w)(w - w_0), \quad (4.6)$$

onde $g'(w_0)$ é a derivada de g no ponto w_0 e $r(w) \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow w_0$.

Por hipótese, g é derivável em $f(z_0)$. Assim, tomando $w = f(z)$ e $w_0 = f(z_0)$ com $z, z_0 \in A$, obtemos de (4.6):

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))(f(z) - f(z_0)) + r(f(z))(f(z) - f(z_0)), \text{ ou seja,}$$

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = g'(f(z_0))(f(z) - f(z_0)) + r(f(z))(f(z) - f(z_0)). \quad (4.7)$$

Para $z \neq z_0$ dividindo (4.7) por $z - z_0$ temos:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g'(f(z_0))(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} + \frac{r(f(z))(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \quad (4.8)$$

$$= g'(f(z_0)) \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) + r(f(z)) \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right). \quad (4.9)$$

Como f é derivável em z_0 , logo $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$. Além disso, segue do Teorema 4.17 que f é contínua em z_0 , ou seja, $f(z) \rightarrow f(z_0)$ quando $z \rightarrow z_0$. Como observamos anteriormente $r(w) \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow w_0$, ou seja, $r(f(z)) \rightarrow 0$ quando $f(z) \rightarrow f(z_0)$. Logo, podemos concluir que $r(f(z)) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow z_0$, isto é, $\lim_{z \rightarrow z_0} r(f(z)) = 0$.

Assim, voltando em (4.9) temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g'(f(z_0))(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(f(z))(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \\ &= g'(f(z_0)) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} r(f(z)) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= g'(f(z_0))f'(z_0) + 0f'(z_0) \\ &= g'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

Portanto, a função composta $g \circ f$ é derivável em z_0 e vale a Regra da Cadeia:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

□

Sabemos que uma função $u : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se, e só se, as derivadas parciais de primeira ordem existem em A e são contínuas, veja o Apêndice A, e representamos a derivada num ponto (x_0, y_0) pelo vetor gradiente, isto é,

$$Du(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Veremos a seguir como podemos representar a derivada de uma função complexa utilizando as derivadas parciais das funções das partes real e imaginária.

Para facilitar a notação colocamos $u(x, y) = u$, $v(x, y) = v$, $u(x_0, y_0) = u_0$ e $v(x_0, y_0) = v_0$.

Teorema 4.24. *Se $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de variável complexa derivável em $z_0 = x_0 + y_0i$ e ainda $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, então existem as derivadas parciais:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

e valem as **Condições de Cauchy- Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (4.10)$$

Demonstração. Para $f(z) = u + vi$, $f(z_0) = u_0 + v_0i$, $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0i$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u + vi) - (u_0 + v_0i)}{(x + yi) - (x_0 + y_0i)} \\ &= \frac{(u - u_0) + (v - v_0)i}{(x - x_0) + (y - y_0)i} \\ &= \frac{(u - u_0) + (v - v_0)i}{(x - x_0) + (y - y_0)i} \left[\frac{(x - x_0) - (y - y_0)i}{(x - x_0) - (y - y_0)i} \right] \\ &= \frac{(u - u_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)i + (v - v_0)(x - x_0)i - (v - v_0)(y - y_0)i^2}{(x - x_0)^2 - (x - x_0)(y - y_0)i + (x - x_0)(y - y_0)i - (y - y_0)^2i^2} \\ &= \frac{(u - u_0)(x - x_0) + [(v - v_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)]i - (v - v_0)(y - y_0)(-1)}{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2(-1)} \\ &= \frac{(u - u_0)(x - x_0) + (v - v_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{[(v - v_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)]i}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(u - u_0)(x - x_0) + (v - v_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{[(v - v_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)]i}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (4.11)$$

Fazendo z tender a z_0 em tal quociente e sabendo que $f'(z_0)$ existe, logo devemos obter o mesmo resultado qualquer que seja a direção de aproximação. Em particular, consideremos as aproximações pelas retas $x = x_0$ e $y = y_0$.

- Aproximação ao longo da reta $x = x_0$, ou seja, $z = x_0 + yi$ e fazendo y tender a y_0 ,

segue de (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u - u_0)(x_0 - x_0) + (v - v_0)(y - y_0)}{(x_0 - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{[(v - v_0)(x_0 - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)]i}{(x_0 - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \frac{(v - v_0)(y - y_0)}{(y - y_0)^2} - \frac{(u - u_0)(y - y_0)i}{(y - y_0)^2} \\ &= \frac{(v - v_0)}{(y - y_0)} - \frac{(u - u_0)i}{(y - y_0)} \\ &= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)]i}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.12)$$

$$= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (4.13)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right). \quad (4.14)$$

- Aproximação ao longo da reta $y = y_0$, ou seja, $z = x + y_0i$ e fazendo x tender a x_0 , segue de (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u - u_0)(x - x_0) + (v - v_0)(y_0 - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} + \frac{[(v - v_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y_0 - y_0)]i}{(x - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} \\ &= \frac{(u - u_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} + \frac{(v - v_0)(x - x_0)i}{(x - x_0)^2} \\ &= \frac{(u - u_0)}{(x - x_0)} + \frac{(v - v_0)i}{(x - x_0)} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \frac{[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]i}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.15)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (4.16)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right). \quad (4.17)$$

Como f é diferenciável, esses limites existem e igualando (4.14) a (4.17) obtemos as Condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad \square$$

Exemplo 4.25. Provamos no Exemplo 4.15 que a derivada da função $f(z) = z^3$ existe em todos os pontos de \mathbb{C} e $f'(z) = 3z^2$. Logo, as condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas. Vimos também na Seção 2.4.3 que para $z = x + yi$ temos $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$. Assim, $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ e temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Segue de (4.17) que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ &= (3x^2 - 3y^2) + i(6xy) \\ &= 3[(x^2 - y^2) + i(2xy)] = 3z^2. \end{aligned}$$

As Condições de Cauchy-Riemann são condições necessárias para verificar se uma função é derivável. Porém, não são suficientes para garantir a existência da derivada, ou seja, se as componentes u e v de uma função complexa satisfazem as Condições de Cauchy-Riemann no ponto, não significa dizer que f seja derivável no ponto como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 4.26. Seja $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são definidas por:

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \text{ e } v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Note que as funções u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em $(0, 0)$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0 + h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, 0 + h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^3}{h^2} \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^3}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0 + h, 0) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, 0 + h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Mas f não é derivável em $z_0 = 0$, pois se tomarmos o limite quando $z \rightarrow 0$, para valores de z na reta horizontal $Im(z) = 0$, isto é, para $z = x$, temos:

$$f(z) = f(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^3}{x^2}i = \frac{x^2(x + xi)}{x^2} = x + xi,$$

e também

$$f(0, 0) = u(0, 0) + iv(0, 0) = 0 + 0i = 0,$$

o que implica

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + xi - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + i)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + i) = 1 + i.$$

E, fazendo $z \rightarrow 0$ pela reta $z = x + xi$, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x, x) = u(x, x) + iv(x, x) \\ &= \left(\frac{x^3 - x^3}{x^2 + x^2} \right) + i \left(\frac{x^3 + x^3}{x^2 + x^2} \right) \\ &= 0 + i \frac{2x^3}{2x^2} = xi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xi - 0}{x + xi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xi}{x(1 + i)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{i}{1 + i} \\ &= \frac{i}{1 + i} \frac{(1 - i)}{(1 - i)} = \frac{i - i^2}{1 + 1} = \frac{1 + i}{2}. \end{aligned}$$

Como os limites existem porém são distintos, concluímos que f não é derivável em $(0, 0)$.

Veremos agora o teorema que fornece condições suficientes para garantir a diferenciabilidade da f . Para isso utilizaremos um resultado conhecido do cálculo de funções de várias variáveis enunciado abaixo.

Definição 4.27. Uma função u de duas variáveis é **diferenciável em** (a, b) se existirem α, β reais tais que

$$u(a + h, b + k) = u(a, b) + \alpha h + \beta k + r_u(h, k) \text{ onde } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r_u(h, k)}{|(h, k)|} = 0.$$

Teorema 4.28. Uma função u de duas variáveis é diferenciável em (a, b) se, e somente se, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ existirem em uma vizinhança de (a, b) e forem contínuas em (a, b) .

Teorema 4.29. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ aberto, dada por $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, onde $z = x + yi \in A$ e seja $z_0 \in A$. Se as derivadas parciais de u e v existem em z_0 , são contínuas em uma vizinhança de z_0 e valem as condições de Cauchy-Riemann em z_0 , então f é derivável em z_0 e vale

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i. \quad (4.18)$$

Demonstração. Seja $z_0 = (x_0, y_0)$, $z_0 \in A$. Como u e v possui suas derivadas de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de z_0 , segue que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são diferenciáveis em (x_0, y_0) , veja o Teorema 4.28, então por definição temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + r_u(h, k) \\ \text{e } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_u(h, k)}{|(h, k)|} = 0. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + r_v(h, k) \\ \text{e } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_v(h, k)}{|(h, k)|} = 0. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Como $f(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0 + h, y_0 + k) + v(x_0 + h, y_0 + k)i$ e $f(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i$, logo

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= u(x_0 + h, y_0 + k) + v(x_0 + h, y_0 + k)i - [u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i] \\ &= [u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0)] + [v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0)]i. \end{aligned}$$

Substituindo (4.19) e (4.20) na expressão acima e denotando $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = v_x$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = v_y$ para simplificação dos cálculos, temos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + r_u(h, k) \right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + r_v(h, k) \right] i \\ &= [u_x(x_0, y_0)h + u_y(x_0, y_0)k + r_u(h, k)] + v_x(x_0, y_0)hi + v_y(x_0, y_0)ki + r_v(h, k)i \\ &= [u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i]h + [u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)i]k + r_u(h, k) + r_v(h, k)i. \end{aligned}$$

Como as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas, segue que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= [u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i]h + [u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)i]k \\ &\quad + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= u_x(x_0, y_0)h + v_x(x_0, y_0)hi - v_x(x_0, y_0)k + u_x(x_0, y_0)ki \\ &\quad + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= u_x(x_0, y_0)[h + ki] + v_x(x_0, y_0)i \left[h - \frac{k}{i} \right] + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= u_x(x_0, y_0)[h + ki] + v_x(x_0, y_0)i \left[h - \frac{k}{i} \frac{i}{i} \right] + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= u_x(x_0, y_0)[h + ki] + v_x(x_0, y_0)i \left[h - \frac{ki}{i^2} \right] + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= u_x(x_0, y_0)[h + ki] + v_x(x_0, y_0)i [h + ki] + r_u(h, k) + r_v(h, k)i \\ &= [h + ki][u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i] + r_u(h, k) + r_v(h, k)i. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h + ki} &= \frac{(h + ki)(u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i)}{h + ki} + \frac{r_u(h, k) + r_v(h, k)i}{h + ki} \\ &= u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i + \frac{r_u(h, k) + r_v(h, k)i}{h + ki}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_u(h, k) + r_v(h, k)i}{h + ki} \right| &\leq \left| \frac{r_u(h, k)}{h + ki} \right| + \left| \frac{r_v(h, k)i}{h + ki} \right| \\ &= \frac{|r_u(h, k)|}{|h + ki|} + |i| \frac{|r_v(h, k)|}{|h + ki|} = \frac{|r_u(h, k)|}{|(h, k)|} + \frac{|r_v(h, k)|}{|(h, k)|}. \end{aligned}$$

Logo, pelo fato de u e v serem diferenciáveis, temos $\frac{r_u(h, k) + r_v(h, k)i}{h + ki} \rightarrow 0$ quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Portanto, existe

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h + ki} = u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)i \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i. \end{aligned}$$

□

Este teorema garante que, para verificar se uma função complexa $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ é derivável, basta verificar se u e v possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas que satisfazem as Condições de Cauchy-Riemann.

Observação 4.30. Vimos no Capítulo 2 que um número complexo $z = x + yi$ pode ser identificado com a matriz $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Nesta notação, podemos observar que a matriz jacobiana no ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ da função $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ coincide com o número complexo $f'(z_0)$ na forma matricial. Lembremos que a matriz jacobiana tem a seguinte expressão:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

De fato, como $f'(z_0)$ é representado em função das derivadas parciais de u e v , segue de (4.14) e (4.17) a seguinte representação matricial:

$$1. \quad f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

$$2. f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Assim, segue da igualdade de matrizes que

1. $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$
2. $-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$
3. $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$
4. $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$

Portanto, a matriz jacobiana nada mais é que $f'(z_0)$ em sua forma matricial.

Exemplo 4.31. A função exponencial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ com $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$ tem suas componentes u e v contínuas em todos os pontos bem como suas derivadas parciais de primeira ordem. Analisando as Condições de Cauchy-Riemann temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Portanto, a derivada $f'(z)$ existe em todos os pontos, e segue da igualdade (4.18)

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

Exemplo 4.32. Utilizando o resultado de que a derivada da função exponencial é ela própria e a propriedade (iv) das regras de derivação, vamos mostrar que $\text{sen}'(z) = \cos(z)$ e que $\text{cos}'(z) = -\text{sen}(z)$.

- Como a função seno é definida por $\text{sen}(z) = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, tomando $f(z) = e^{zi} - e^{-zi}$ e $g(z) = 2i$, temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} = \frac{[ie^{zi} - (-ie^{-zi})](2i) - (e^{zi} - e^{-zi})0}{4i^2} \\ &= \frac{(ie^{zi} + ie^{-zi})(2i)}{-4} = \frac{2i^2e^{zi} + 2i^2e^{-zi}}{-4} \\ &= \frac{-2e^{zi} - 2e^{-zi}}{-4} = \frac{-2(e^{zi} + e^{-zi})}{-4} \\ &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos(z). \end{aligned}$$

- Como a função cosseno é definida por $\cos(z) = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$, tomando $f(z) = e^{zi} + e^{-zi}$ e $g(z) = 2$, temos:

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} = \frac{[ie^{zi} + (-ie^{-zi})](2) - (e^{zi} + e^{-zi})0}{4} \\ &= \frac{(ie^{zi} - ie^{-zi})(2)}{4} = \frac{2ie^{zi} - 2ie^{-zi}}{4} \\ &= \frac{2i(e^{zi} - e^{-zi})}{4} = \frac{i(e^{zi} - e^{-zi})}{2} \cdot \frac{i}{i} \\ &= \frac{i^2(e^{zi} - e^{-zi})}{2i} = (-1) \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \right) \\ &= -\operatorname{sen}(z). \end{aligned}$$

Exemplo 4.33. Vimos no exemplo 4.9 que a função logarítmica principal (Log) não é contínua nos pontos em que o argumento vale π , logo a função Log não é derivável neste conjunto.

Para o estudo da derivada do $\operatorname{Log}(z)$ devemos buscar por um subconjunto do em que a função seja contínua. Portanto, consideramos o conjunto aberto P

$$P = \mathbb{C} - \{x + yi \mid x \leq 0 \text{ e } y = 0\},$$

de agora em diante como domínio da função logarítmica principal (Log), isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} : P &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \operatorname{Log}(z) = \underbrace{\ln |z|}_u + i \underbrace{(\arg z)}_v. \end{aligned}$$

Para verificarmos que Log é holomorfa em P , segundo o Teorema 4.29, vamos verificar que as derivadas parciais das partes real e imaginária são contínuas e que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann.

Para isso, vamos expressar u e v em termos de x e y , que são partes real e imaginária de $z = x + yi$.

Assim, a parte real do Log é dada por:

$$u = u(x, y) = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2). \quad (4.21)$$

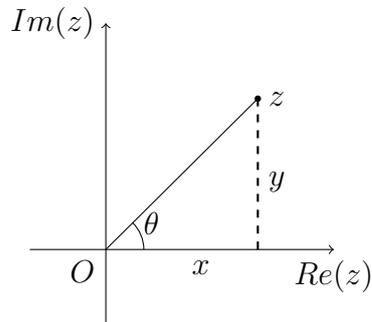
Já a parte imaginária $v = \arg z$ é um pouco mais delicada para expressarmos em termos de x e y , pois devemos considerar as seguintes situações para $z \in P$:

1. $x > 0$ (Figura 4.1) ou,
2. $y > 0$ (Figura 4.2) ou,
3. $y < 0$ (Figura 4.3).

Lembrando que, ao considerarmos $z = x + yi$ na forma polar $z = re^{i\theta}$, só nos interessa $-\pi < \theta \leq \pi$. Vamos então analisar cada caso acima:

1. Seja $z = x + yi$ e $x > 0$ temos:

Figura 4.1: $z \in P$, com $x > 0$.



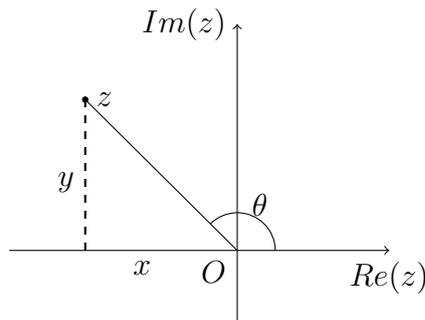
Fonte: Elaborada pela autora.

Segue que a $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, no semiplano $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Assim, $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$.

Portanto, para $z = x + yi$ e $x > 0$, $v = v(x, y) = \operatorname{arg} z = \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$.

2. Seja $z = x + yi$ e $y > 0$ temos:

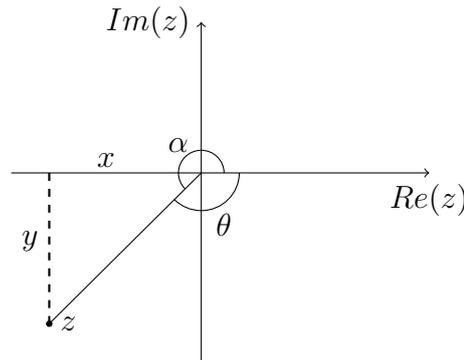
Figura 4.2: $z \in P$, com $y > 0$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Neste caso a $\operatorname{cotg} \theta = \left(\frac{x}{y} \right)$, no semiplano $0 < \theta < \pi$. Assim, $\theta = \operatorname{arccotg} \left(\frac{x}{y} \right)$.

3. Seja $z = x + yi$ e $y < 0$, ou seja, $-\pi < \theta < 0$ temos:

Figura 4.3: $z \in P$, com $y < 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Sabemos que a $\cotg \alpha = \left(\frac{x}{y}\right)$, desde que $\alpha + (-\theta) = 2\pi$, logo $\alpha = 2\pi + \theta$. Como

$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha} = \frac{\cos(2\pi + \theta)}{\sen(2\pi + \theta)} = \frac{\cos \theta}{\sen \theta} = \cotg \theta.$$

Logo, $\theta = \operatorname{arccotg} \left(\frac{x}{y}\right)$.

Note que, tanto no intervalo $0 < \theta < \pi$ como no intervalo $-\pi < \theta < 0$ a função cotangente é invertível. Considerando $\operatorname{arccotg}$ como a inversa da cotangente restrita a esses intervalos, para relacionar $\operatorname{arccotg} t$ com $\operatorname{arctg} t$ necessitamos um pouco de atenção. Defina,

$$f(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arccotg} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \left(-\frac{1}{1+t^2}\right) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Então $f(t) = c, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vamos determinar o valor de c . Para $t = 0$ temos

$$c = f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = \operatorname{arccotg} 0.$$

Para o intervalo $0 < \theta < \pi$, temos $c = \frac{\pi}{2}$, e para o intervalo $-\pi < \theta < 0$, $c = -\frac{\pi}{2}$. Voltando no caso 2, temos:

$$\operatorname{arctg} t + \operatorname{arccot} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arccot} t = -\operatorname{arctg} t + \frac{\pi}{2},$$

e para 3, segue

$$\operatorname{arctg} t + \operatorname{arccot} t = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arccot} t = -\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, para $z = x + yi$ e $y > 0$, $v = v(x, y) = \arg z = \theta = -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}$ e para $z = x + yi$ e $y < 0$, $v = v(x, y) = \arg z = \theta = -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Resumindo os três casos, temos a expressão para a parte imaginária do *Log*:

$$v(x, y) = \operatorname{arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right), & x > 0; \\ -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{\pi}{2}, & y > 0; \\ -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{\pi}{2}, & y < 0. \end{cases}$$

Lembremos ainda que $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ e utilizando a derivada da *arctg* dada por

$$\frac{\partial(\operatorname{arctg} k)}{\partial x} = (\operatorname{arctg} k)_x = \frac{1}{1+k^2} \frac{\partial k}{\partial x}(x, y),$$

vamos verificar que *Log* é holomorfa em *P* segundo o Teorema 4.29 e determinar sua derivada.

Observe que:

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2},$
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$

•

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right)_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{x0 - y1}{x^2} \right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) \left(-\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \right) \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \left(-\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{-x^2 y}{(x^2 + y^2)x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right)_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{x1 - y0}{x^2} \right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) \left(\frac{x}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \right) \left(\frac{1}{x} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}\right)_x &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(\frac{y1 - x0}{y^2}\right) + 0 = -\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}\right) \left(\frac{y}{y^2}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\right) \left(\frac{1}{y}\right) = -\left(\frac{y^2}{y^2 + x^2}\right) \left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{-y^2}{(x^2 + y^2)y} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}\right)_y &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(\frac{y0 - x1}{y^2}\right) + 0 = -\left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}\right) \left(\frac{-x}{y^2}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\right) \left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\left(\frac{y^2}{y^2 + x^2}\right) \left(\frac{-x}{y^2}\right) \\ &= \frac{(-y^2)(-x)}{(x^2 + y^2)y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Para o último caso de v , as derivadas são análogas aos dois últimos casos acima a menos da constante $-\frac{\pi}{2}$, cuja a derivada é zero. Assim, resumimos as derivadas parciais de v :

$$\bullet \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-y}{x^2 + y^2}, & x > 0; \\ \frac{-y}{x^2 + y^2}, & y > 0; \\ \frac{-y}{x^2 + y^2}, & y < 0. \end{cases} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & x > 0; \\ \frac{x}{x^2 + y^2}, & y > 0; \\ \frac{x}{x^2 + y^2}, & y < 0. \end{cases}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, para todos os valores de (x, y) em P , segue que $\operatorname{Log} z$ satisfaz as condições de Cauchy-Riemann e pelas expressões dessas derivadas parciais também temos a continuidade em P .

Portanto, a função logarítmica principal é uma função holomorfa no conjunto aberto P e sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}'z &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)i = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i \\ &= \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Proposição 4.34. *Seja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio A . Se $f'(z) = 0$ em A , então f é constante.*

Demonstração. Como $f'(z) = 0$ segue de (4.17) que $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$. Como f é derivável, temos das Condições de Cauchy-Riemann que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Portanto, u e v são funções constantes, logo f é constante. \square

Teorema 4.35. *Seja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função injetora, satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.29. Se $f'(z_0) \neq 0$ em A , $z_0 \in A$, então f^{-1} é diferenciável em $w_0 = f(z_0)$ e vale,*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad (4.22)$$

Demonstração. Seja $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$. Pela hipótese do Teorema 4.29,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Sabemos que

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

e pelas condições de Cauchy-Riemann segue

$$|f'(z_0)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0. \quad (4.23)$$

Consideremos agora a aplicação $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \mapsto (u, v)$ com

$$u = u(x, y) \text{ e } v = v(x, y), \quad (4.24)$$

onde Ω é uma vizinhança qualquer do ponto (x_0, y_0) .

Observamos que

$$JT(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det JT = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ no ponto (x_0, y_0) , o que garante que em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , que ainda denotaremos por Ω , $\exists T^{-1}$

$$\begin{aligned} T^{-1}: T(\Omega) &\rightarrow \Omega \\ (u, v) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

onde

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v), \quad (4.25)$$

sendo que essas funções possuem derivadas parciais e são contínuas. Portanto, existe f^{-1} nesta vizinhança de z_0 e para provarmos que $f^{-1}(w_0) = f^{-1}(u_0, v_0) = x(u, v) + y(u, v)i$ é derivável em w_0 ($w_0 = f(z_0)$), basta então mostrar que f^{-1} satisfaz as condições de Cauchy-Riemann.

Substituindo (4.25) em (4.24), temos:

$$\underbrace{u = u(x(u, v), y(u, v))}_{(I)} \text{ e } \underbrace{v = v(x(u, v), y(u, v))}_{(II)}. \quad (4.26)$$

Derivando (4.26) com respeito a u :

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} & (I) \\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} & (II) \end{cases} \quad (4.27)$$

Resolvendo o sistema 4.27 por Crammer, considerando as incógnitas como $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$, temos:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{|f'(z)|^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{|f'(z)|^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v_y}{f'(z)\overline{f'(z)}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v_x}{f'(z)\overline{f'(z)}}. \quad (4.28)$$

Analogamente, derivando (4.26) com respeito a v :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} & (I) \\ 1 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} & (II) \end{cases} \quad (4.29)$$

Resolvendo o sistema 4.29 por Crammer, considerando as incógnitas como $\frac{\partial x}{\partial v}$ e $\frac{\partial y}{\partial v}$, temos:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u_y}{f'(z)\overline{f'(z)}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{f'(z)\overline{f'(z)}}. \quad (4.30)$$

De (4.28) e (4.30) conclui-se que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ satisfazem as condições de

Cauchy-Riemann e segue do Teorema 4.29 que

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}(w)}{dw} &= \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f'(z)\overline{f'(z)}}[v_y - iv_x] = \frac{1}{f'(z)\overline{f'(z)}}[u_x - iv_x] \\ &= \frac{1}{f'(z)\overline{f'(z)}}\overline{f'(z)} = \frac{1}{f'(z)}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.36. Com a teoria de integração de funções de variáveis complexas, que não é objetivo deste trabalho, é possível mostrar que uma função holomorfa possui as derivadas de todas as ordens, veja [14, 21, 22].

4.3 Funções harmônica e conjugada harmônica

Para o estudo da aplicação que será mostrado no próximo capítulo, necessitamos compreender o que é uma função harmônica e função conjugada harmônica bem como suas aplicações.

Seja $f(z) = u + iv$ uma função holomorfa em um domínio do z - plano. Logo f é derivável e satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. Ou seja, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Assim,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (4.31)$$

e

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad (4.32)$$

desde que as derivadas parciais de segunda ordem existam.

Admitindo que as derivadas parciais de segunda ordem existam, conforme citado na Observação 4.36, e que as duas derivadas mistas são opostas por (4.31) e (4.32), logo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) = 0 \quad (4.33)$$

em todos os pontos do domínio.

A equação definida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.34)$$

é denominada de **equação diferencial parcial de Laplace** em duas variáveis independentes x e y .

Definição 4.37. Toda função $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto em \mathbb{R}^2 , com derivadas parciais de segunda ordem contínuas que satisfaz à equação de Laplace é chamada de **função harmônica**.

Exemplo 4.38. As partes real e imaginária da função exponencial $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, são exemplos de funções harmônicas.

Como $f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y)$, em que $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \cos y & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \cos y. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y + (-e^x \cos y) = 0$. De forma análoga concluímos que v também satisfaz a condição de Laplace. Portanto, u e v são harmônicas.

Observação 4.39. Toda função holomorfa tem parte real e imaginária como funções harmônicas.

De fato, já vimos por (4.33) que a parte real ($u(x, y)$) da função f holomorfa satisfaz a equação de Laplace, logo dizemos que $u(x, y)$ é uma função harmônica. Para verificar que a parte imaginária ($v(x, y)$) de f também é uma função harmônica invertamos a ordem de derivação em (4.31) e (4.32), isto é

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4.35)$$

e

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4.36)$$

Subtraindo (4.36) de (4.35) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que tanto a parte real como a parte imaginária de uma função holomorfa são funções harmônicas.

Definição 4.40. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z \in \mathbb{C}$, uma função holomorfa. Denominamos as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ como **funções harmônicas conjugadas**.

Observação 4.41. Para cada função harmônica u , existe uma função harmônica conjugada v .

Suponhamos $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfa em D , temos que u e v são funções harmônicas. Isto é, vale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e suas derivadas parciais até a segunda ordem são funções contínuas de x e y .

Assim, conhecida a função u é possível obter a função v pelas condições de Cauchy-Riemann. De fato,

$$(I) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad (II) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Integrando (I) com respeito a y obtemos:

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \phi(x). \quad (4.37)$$

Derivando (4.37) com respeito a x e considerando a igualdade (II), temos :

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{(II)} = \frac{d}{dx} \left[\int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \phi(x) \right] \quad (4.38)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + \phi'(x) \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \quad (4.40)$$

Integrando 4.40 em x , obtém-se $\phi(x)$ e substitue em (4.37) determinando assim $v(x, y)$.

Logo conclui-se que se $u(x, y)$ é uma função harmônica e $v(x, y)$ é uma conjugada harmônica de $u(x, y)$, então

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dy' \right] + c, c \in \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

Exemplo 4.42. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função holomorfa com $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, determinamos $v(x, y)$ tal que u e v sejam conjugadas harmônicas.

Pelas condições de Cauchy-Riemann:

$$(a) \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy \quad \text{e} \quad (b) \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(3y^2 - 3x^2) = -3y^2 + 3x^2.$$

Integre (a) com respeito a y (com x fixo):

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int -6xy dy \quad (4.42)$$

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x). \quad (4.43)$$

Derivando (4.43) com respeito a x e igualando a (b), temos:

$$\underbrace{-3y^2 + \phi'(x)}_{\frac{\partial v}{\partial x}} = \underbrace{-3y^2 + 3x^2}_{(b)} \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = 3x^2. \quad (4.45)$$

Integrando (4.45), segue que $\phi(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$.

Portanto, $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + c$ e $f(x, y) = (y^3 - 3x^2y) + (-3xy^2 + x^3 + c)i$.

A importância do estudo de tais funções é que para o caso de uma função holomorfa que tem suas partes real e imaginária funções harmônicas conjugadas, quando é dado uma dessas funções, as condições de Cauchy-Riemann permitem determinar a outra.

4.4 Transformações

Admitindo a continuidade das derivadas parciais de primeira e segunda ordem das partes real e imaginária, $u(x, y)$ e $v(x, y)$, de uma função holomorfa $f(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$ apresentamos nas próximas subseções algumas definições e teoremas importantes de serem observados na aplicação deste trabalho, pois muitos problemas da engenharia, quando formulados matematicamente, levam a equações diferenciais parciais e condições associadas chamadas condições de contorno. Esta seção é baseada nas referências [21, 22].

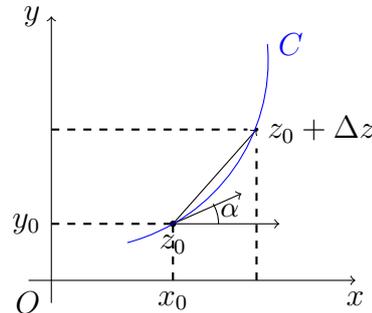
4.4.1 Transformação conforme

Antes de apresentar a transformação conforme precisamos compreender a mudança na direção de curvas em um ponto z_0 sob uma transformação $w = f(z)$, onde f é uma função holomorfa no ponto z_0 e $f'(z_0) \neq 0$.

Como f é derivável em z_0 dizemos que a imagem de uma curva em uma vizinhança de z_0 é também uma curva no w - plano.

A derivada $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ (Figura 4.4), onde $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ existe e é independente de como Δz tende a zero, como já vimos.

Figura 4.4: Representação de $f'(z_0)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Quando $f'(z_0) \neq 0$ existe uma certa inclinação no ponto z_0 com relação a imagem. Tomando ψ_0 um dos valores do argumento do número complexo $f'(z_0)$ e $R_0 = |f'(z_0)|$, podemos escrever $f'(z_0)$ em sua forma polar, isto é,

$$f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i \arg(f'(z_0))} = R_0 e^{i\psi_0}.$$

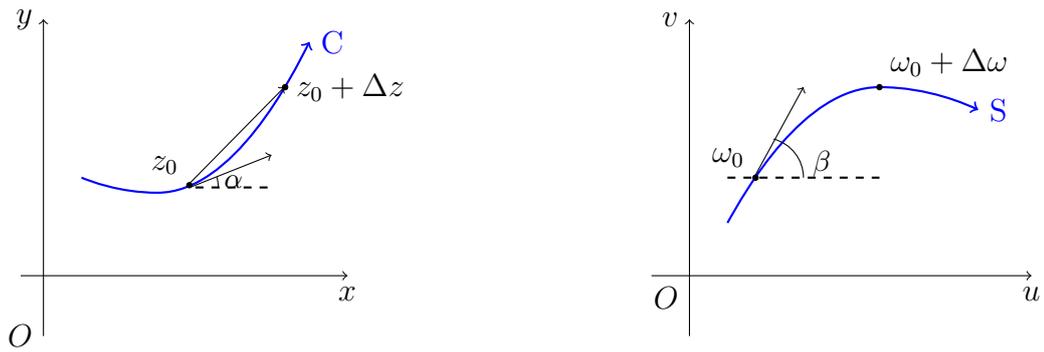
Portanto, dizemos que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = R_0$$

e

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) = \psi_0.$$

Figura 4.5: $\beta = \alpha + \psi_0$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja C uma curva suave em que $z_0 \in C$ e S sua imagem sob a transformação $w = f(z)$ (Figura 4.5). Prescrito um sentido positivo de percurso ao longo de C , o sentido positivo correspondente ao longo de S fica determinado pela função transformadora f . Isto é, quando $z_0 + \Delta z$ é um ponto sobre C no sentido positivo a partir de z_0 , o limite do argumento de Δz quando Δz tende a zero é o ângulo de inclinação α da reta tangente orientada a C em z_0 .

Se $w_0 = f(z_0)$ e $w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$ então o argumento de Δw tende para o ângulo de inclinação β da tangente orientada a S em w_0 .

Observe que podemos escrever $\Delta w = \Delta z \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)$, assim um valor para $\arg \Delta w$ seria

$$\arg \Delta w = \arg \left(\Delta z \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) = \arg(\Delta z) + \arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right).$$

Logo,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta w) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg(\Delta z) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)$$

$$\beta = \alpha + \psi_0,$$

onde $\psi_0 = \arg (f'(z_0))$. Ou seja, a tangente orientada à curva C em z_0 gira ψ_0 sob a transformação $w = f(z)$, desde que f seja holomorfa em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$.

Vimos que este ângulo ψ_0 é determinado pela função f e pelo ponto z_0 , onde f é holomorfa, logo ψ_0 deve ser o mesmo para todas as curvas que passam por z_0 .

Assim, para duas curvas C_1 e C_2 orientadas positivamente passando por z_0 e α_1, α_2 os ângulos de inclinação em z_0 , respectivamente, e S_1, S_2 as imagens de C_1, C_2 com β_1, β_2 seus ângulos correspondentes temos:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \psi_0$$

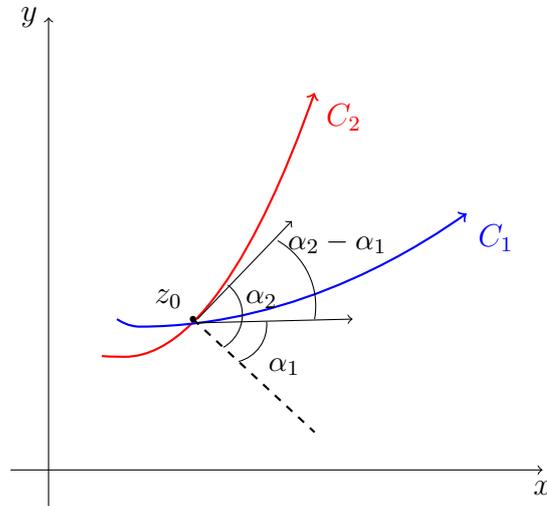
$$\beta_2 = \alpha_2 + \psi_0.$$

Subtraindo as igualdades, segue que

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

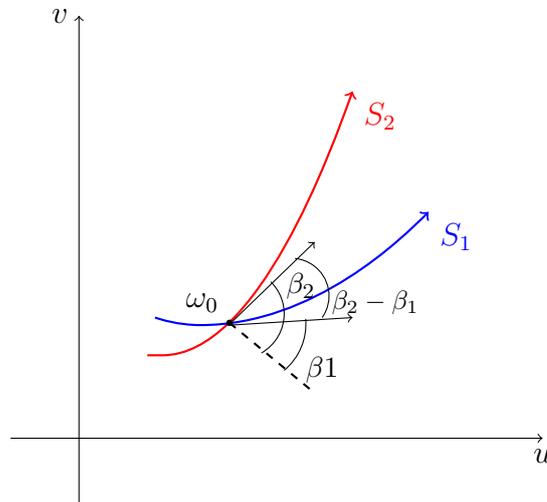
Isto quer dizer que o ângulo de inclinação de S_1 para S_2 é o mesmo, em módulo e sentido (lembrando que as possibilidades de sentido de um ângulo são horário e anti-horário), que o ângulo de C_1 para C_2 . Vejam as Figuras 4.6 e 4.7:

Figura 4.6: Curvas C_1 e C_2 no z – plano.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 4.7: Curvas S_1 e S_2 no w – plano.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma transformação que preserva ângulos em valor absoluto e sentido entre os pares de curvas em cada ponto de um domínio se diz **conforme** nesse domínio.

Pelo comentário anterior podemos enunciar o seguinte resultado.

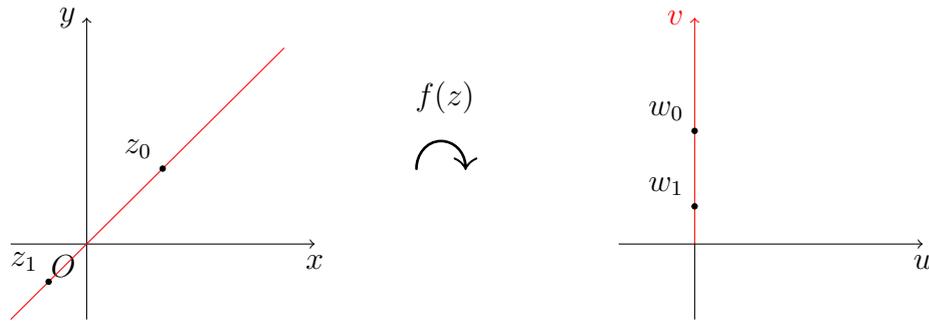
Teorema 4.43. *Se f for uma função holomorfa em um domínio D que contém z_0 e se $f'(z_0) \neq 0$, então $w = f(z)$ é uma transformação conforme em z_0 .*

Observação 4.44. Toda transformação conforme deve transformar curvas ortogonais em curvas ortogonais.

Exemplo 4.45. A função $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$ é um exemplo de uma transformação conforme.

Observe que tal função leva a reta $y = x$ no z - plano na reta $u = 0$ e $v > 0$ no w - plano, veja Figura 4.8 .

Figura 4.8: Transformação z^2 da reta $y = x$.



Fonte: Elaborada pela autora.

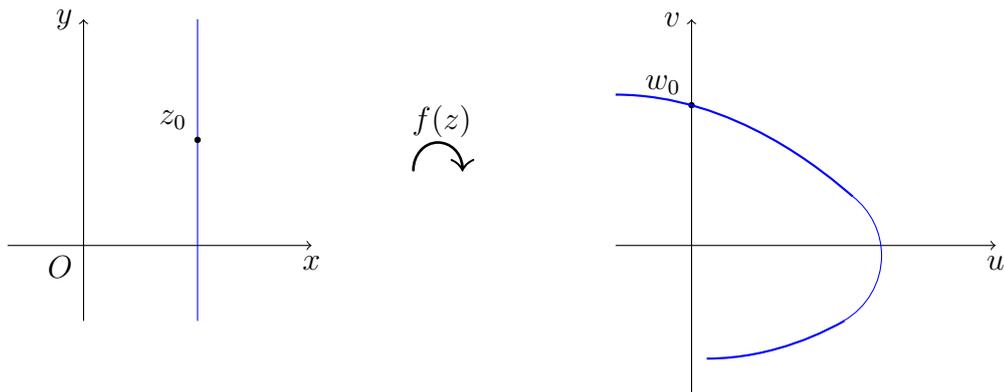
De fato, $w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$. Para $y = x$, temos

$$w = f(x, x) = (x^2 - x^2) + 2xxi = 0 + (2x^2)i.$$

Logo, $u(x, y) = 0$ e $v(x, y) = 2x^2$. Como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, segue que a função $f(z) = z^2$ leva a reta $y = x$ na semirreta $v \geq 0$.

Já a reta $z = 1 + yi, y \in \mathbb{R}$ é levada em uma parábola como veremos na Figura 4.9.

Figura 4.9: Transformação z^2 da reta $z = 1 + yi, y \in \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborada pela autora.

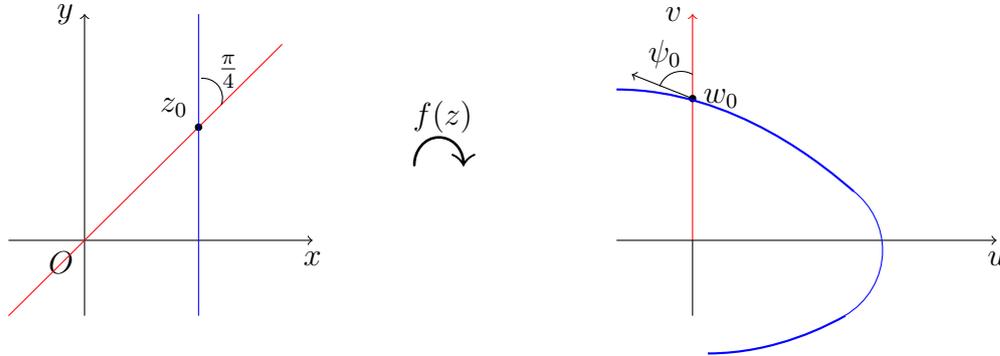
Para reta $z = 1 + yi, y \in \mathbb{R}$ segue da função $f(z) = z^2$ que

$$w = f(1, y) = (1^2 - y^2) + (2 \cdot 1 \cdot y)i = (1 - y^2) + 2yi,$$

onde $u = 1 - y^2$ e $v = 2y$ são as equações paramétricas da parábola $v^2 = -4(u - 1)$.

Tomando $z_0 = (1, 1)$ temos que z_0 pertence a ambas as retas acima mencionadas. E $w_0 = f(z_0) = (1^2 - 1^2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot i = 2i$, conforme a Figura 4.10.

Figura 4.10: Transformação conforme $f(z) = z^2$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sabemos que o ângulo entre as duas retas $y = x$ e $x = 1$ é $\frac{\pi}{4}$. Assim, devemos ter pela conformidade da transformação $f(z) = z^2$ que o ângulo da primeira imagem para a segunda no ponto $w_0 = 2i$ também deve ser de $\frac{\pi}{4}$.

De fato, para $f(z) = z^2$ temos $f'(z) = 2z$. Logo,

$$f'(1, 1) = f'(1 + i) = 2(1 + i) = 2 + 2i.$$

Assim, $|f'(z_0)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Como $\psi_0 = \arg f'(z_0)$ segue que $\cos \psi_0 = \frac{2}{2\sqrt{2}}$ e $\sin \psi_0 = \frac{2}{2\sqrt{2}}$, isto é, $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$. Isto significa que, $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$ determina o ângulo com que a tangente a cada curva neste ponto deve girar sob a transformação e, o coeficiente de acréscimo de distâncias nesse ponto é dado por $|f'(z_0)|$ que é $2\sqrt{2}$.

Exemplo 4.46. A função $f(z) = \bar{z}$ é uma transformação não conforme, pois tal função é a reflexão no eixo real do número complexo z que preserva o ângulo mas não o sentido.

4.4.2 Transformação de funções harmônicas

Alguns problemas de contorno nas equações diferenciais de derivadas parciais são o de determinar quando uma função é harmônica num domínio especificado e deve satisfazer condições prescritas sobre a fronteira.

Vimos que uma função holomorfa fornece um par de funções harmônicas, isto é, sua parte real e imaginária são funções harmônicas. Também essas funções podem satisfazer condições de contorno para um determinado domínio.

Muitas vezes determinamos a solução de um dado problema pelo método de funções conjugadas, mas nem sempre este caminho é o mais simples. Um outro caminho a se pensar na resolução de tais problemas é adicionar novas variáveis independentes e analisar a função inversa. Isto é, introduzir variáveis independentes u e v a uma função harmônica $\phi(x, y)$ qualquer de variáveis independentes x e y de modo que $z = x + yi$ seja uma função holomorfa de $w = u + vi$,

$$z = f(w).$$

Vimos também em funções harmônicas conjugadas que para uma função harmônica dada $\phi(x, y)$ existe uma função harmônica conjugada $\psi(x, y)$ tal que a função $\phi + \psi i$ é

uma função holomorfa de z . Como z é uma função holomorfa de w , logo a função $\phi + \psi i$ também é uma função holomorfa de w .

Portanto $\phi(x, y)$ é uma função harmônica de u e v . O que motiva o seguinte teorema:

Teorema 4.47. *Toda função harmônica de x e y se transforma em uma função harmônica de u e v por meio da mudança de variáveis*

$$x + yi = f(u + vi),$$

onde f é uma função holomorfa.

Como consequência, uma função que é harmônica em alguma vizinhança permanece harmônica sob uma mudança de variáveis provinda de uma transformação conforme

$$w = F(z),$$

onde $F(z)$ é holomorfa e $F'(z) \neq 0$ na vizinhança, uma vez que a função inversa $z = f(w)$ pelo Teorema 4.35 é holomorfa.

Exemplo 4.48. Vimos no exemplo 4.38 que a parte real ($\phi(x, y) = e^x \cos y$) da função exponencial é uma função harmônica em qualquer região do z -plano. Sob a transformação $z = w^2$, isto é, $z = (u + vi)^2 = (u^2 - v^2) + 2uvi$, temos $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$. Logo, a função $\phi(u, v) = e^{u^2-v^2} \cos(2uv)$ é harmônica na região do w -plano, ou seja, vale $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$.

4.4.3 Transformações de condições de contorno

Abordamos nesta subseção dois casos de condições de contorno que são as condições que prescrevem que uma função harmônica ϕ ou sua derivada normal sejam constantes sobre uma parte da fronteira de uma região. Essas condições permanecem inalteradas sob a mudança de variáveis por meio de transformações conformes.

- **Condição de contorno onde uma função harmônica é constante**

Relembrando que uma curva ao longo da qual uma função é constante é chamada de curva de nível da função. Pela mudança de variáveis uma curva de nível $\phi(x, y) = c$, c constante, no z -plano é transformada na curva de nível

$$\phi[x(u, v), y(u, v)] = c,$$

no w -plano. Isto quer dizer que uma condição de contorno $\phi = c$ no problema original é transferida ao problema transformado.

- **Condição de contorno onde a derivada normal de ϕ se anula**

Se a derivada normal de ϕ se anula ao longo de uma curva no z -plano, então a derivada normal de ϕ como função de u e v também se anula no w -plano.

Para observar este fato, recordamos que a direção do gradiente $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$ de uma função $\phi(x, y)$ é aquela em que a derivada direcional toma seu valor máximo no ponto considerado e é perpendicular a curva de nível $\phi(x, y) = c$ em cada ponto.

Suponhamos que a derivada normal de $\phi(x, y)$ se anule ao longo de uma curva C . Como a derivada normal $\left(\frac{d\phi}{dn}\right)$ é a projeção do gradiente sobre a normal, a normal a C deve ser perpendicular ao gradiente de ϕ em cada ponto. A tangente a C coincide, portanto, com o gradiente, e C é ortogonal às curvas de nível de $\phi(x, y) = c$. As imagens S de C por uma transformação conforme é ortogonal às curvas de nível

$$\phi[x(u, v), y(u, v)] = c,$$

que são as imagens de $\phi(x, y) = c$. Logo, a derivada normal de ϕ como função de u e v , ao longo da curva S deve também anular-se.

A invariância observada dos dois tipos de condições de contorno é enunciada pelo seguinte teorema:

Teorema 4.49. *Sob uma transformação conforme $z = f(w)$ permanecem inalteradas as condições de contorno de um dos dois tipos para uma função ϕ harmônica: $\phi = c$ ou $\frac{d\phi}{dn} = 0$.*

Observação 4.50. De maneira geral podemos dizer que dada uma função harmônica ϕ de x e y se tomarmos um curva de nível no z – plano, por uma mudança de variável, a função ϕ agora de variáveis independentes u e v também será uma função harmônica e sua curva de nível é transformada em uma curva de nível pela mesma constante no w – plano. É interessante notar também que sob uma transformação conforme a razão de uma derivada direcional de ϕ no z – plano para a derivada direcional de ϕ na direção correspondente no w – plano é $|dw/dz|$.

5 O decolar de um avião: uma aula experimental

Muitos de nós professores de matemática escutamos em sala de aula a seguinte frase: *Onde eu vou usar isso professor?* Quando o assunto é números complexos uma boa resposta para tal pergunta é: *Você saberia me dizer um motivo pelo o qual um avião voa?*

Mas para responder a última pergunta, precisamos decolar em um voo em que os passageiros não sejam apenas matemáticos, mas físicos e engenheiros. É claro que existe uma matemática complexa quando comparada ao nível do ensino médio que responde tal pergunta com a utilização do cálculo diferencial como veremos a seguir. Muitos destes cálculos não são viáveis apresentar para os alunos, talvez mais como uma curiosidade, mas é um fator interessante para o próprio professor compreender uma aplicação de derivadas parciais por exemplo. Além de estimular a sua criatividade juntamente com os seus conhecimentos e interesses da turma, também pode propor atividades extracurriculares incentivando-os ao uso da tecnologia, bem como associar aqueles conteúdos estudados em sala de aula a sua grande finalidade para o desenvolvimento das interações sociais.

Neste capítulo apresentamos alguns conhecimentos físicos necessários para introduzir o processo de decolagem de um avião, com o objetivo de relacionar a teoria com a prática envolvendo conceitos físicos e matemáticos.

Ao final deste capítulo sugerimos uma atividade experimental que poderá ser realizada com os alunos em um projeto de extensão da escola, em que o professor de matemática juntamente com o professor de física podem revisar em um primeiro momento conceitos estudados durante o ensino médio além de introduzir novos conceitos para os alunos e, em um segundo momento, os alunos poderão criar um modelo de asa de avião e analisar seu movimento quando tal objeto atinge uma velocidade desejada. Utilizamos no estudo deste capítulo as referências [2, 5, 7, 8, 9, 11, 19, 21].

5.1 Algumas preliminares

Antes de analisarmos os cálculos, vamos relembrar alguns conceitos que vão auxiliar na compreensão da aplicação.

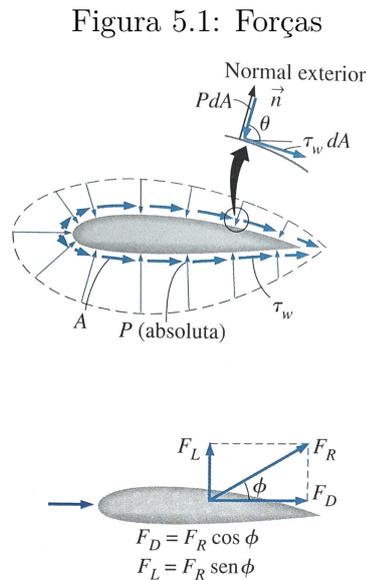
Recordamos que na física uma substância existe em três estados fundamentais: sólido, líquido e gasoso. Segundo Cimbala [5], uma substância em estado líquido ou gasoso é denominada **Fluido**.

A ciência que trata do comportamento dos fluidos em repouso (estática dos fluidos) ou em movimento (dinâmica dos fluidos) bem como da interação entre os fluidos e sólidos ou outros fluidos na fronteira é chamada de **mecânica dos fluidos**. Dentre as categorias que esta ciência está dividida temos a aerodinâmica que é responsável pelo estudo do

escoamento de gases (especialmente o ar) sobre corpos tais como aeronaves, foguetes e automóveis em velocidades altas ou baixas.

5.1.1 Forças aerodinâmicas

Um fluido em movimento exerce forças de pressão normais e forças tangenciais de cisalhamento a superfície do corpo imerso a ele. Isto é, existem várias forças agindo sobre uma aeronave quando a mesma está em voo, porém podemos expressar estas forças através de duas específicas que compõe uma força resultante: Força de Sustentação (F_L) e Força de Arrasto (F_D), veja a Figura 5.1.



Fonte: Cimballa [5].

A força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo na direção do escoamento é chamada de **arrasto**, e é dada por

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_D.$$

E a força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo na direção normal ao escoamento é chamada de **sustentação**, dada por

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_L,$$

onde

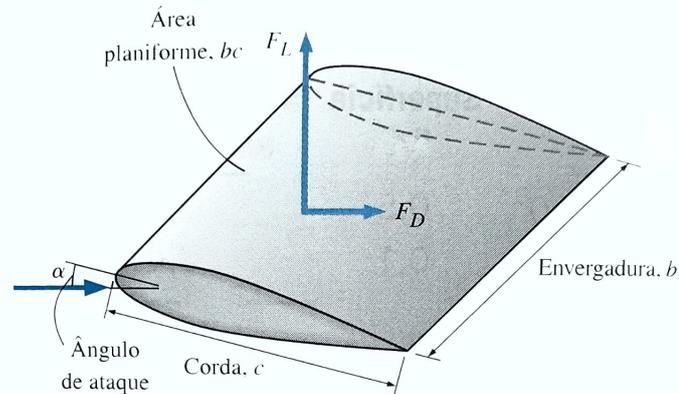
- ρ - Densidade do fluido;
- V - velocidade montante;
- A - área frontal ¹;
- C_D - Coeficiente de Arrasto;

¹Em aerofólios esta área é considerada como área planiforme.

- C_L - Coeficiente de Sustentação.

Segundo a ANAC (Agência Nacional de Aviação Civil) ² temos que um corpo de formato aerodinâmico capaz de gerar sustentação e não criar arrasto excessivo é chamado de **aerofólio**. Um exemplo de um aerofólio o qual vamos estudar é a asa de um avião(perfil).

Figura 5.2: Aerofólio.



Fonte: Cimballa [5].

Elementos geométricos associados a um aerofólio:

- A linha que conecta o bordo de ataque (extremidade dianteira do perfil) e o bordo de fuga (extremidade traseira do perfil) é chamada de **corda**.
- O **ângulo de ataque** (α) é o ângulo que a corrente de fluido forma com a corda.
- A distância entre as duas extremidades de uma asa ou aerofólio é chamada de **envergadura**.³
- A **área planiforme** é a área vista por uma pessoa que está olhando para o corpo a partir de cima em uma direção normal ao corpo.

5.1.2 Escoamento potencial

Para resolver analiticamente as complexas equações que regem um escoamento (ou fluxo do fluido), isto é, para calcular as características aerodinâmicas do aerofólio é necessário fazer algumas simplificações, dentre elas, analisamos um **escoamento bidimensional permanente incompressível irrotacional, ou escoamento potencial**.

1. O fluxo do fluido é bidimensional

- O movimento dos fluidos é o mesmo em qualquer plano.
- As figuras construídas neste plano são interpretadas como seções transversais.

2. O fluxo é estacionário ou permanente

²Disponível em: <https://www2.anac.gov.br/anacpedia/por_ing/tr428.htm> Acesso em: 20, janeiro de 2020.

³Em um avião considera-se envergadura como a distância total entre as pontas das duas asas incluindo a fuselagem entre elas.

- Não há mudança na velocidade ao longo do tempo.
 - A velocidade do fluido em qualquer ponto depende apenas da posição (x, y) .
3. O fluxo é irrotacional
- Não há rotação das partículas do fluido em qualquer eixo numa certa região.
4. O fluido é incompressível
- A densidade ou massa por unidade de volume do fluido é constante.
 - Ao modificar a pressão o volume de cada porção do fluido permanece inalterado durante o decorrer de seu movimento.
 - Em qualquer instante do tempo, o campo de escoamento incompressível se ajusta instantaneamente de forma a satisfazer a equação de Laplace e as condições de contorno existentes naquele instante.
5. O fluido é não viscoso
- O atrito é tão pequeno que pode ser desprezível quando comparado com as forças de inércia e pressão.
 - Se não houver viscosidade, as forças de pressão na superfície são perpendiculares à superfície.

Estes conceitos foram trabalhados de forma mais detalhada no Apêndice A, onde pode-se observar como os campos de velocidade e pressão interferem no escoamento, como eles estão relacionados e como determinar a velocidade.

5.2 Aerofólio: teoria e prática

Vimos no capítulo anterior a definição de transformação conforme. Segundo Churchill [21], “figuras grandes podem ser transformadas em figuras sem qualquer semelhança com as originais” (CHURCHILL, 1975, p.168). Também em mecânica de fluidos podemos dizer que esse tipo de transformação auxilia na solução de problemas de otimização de formas aerodinâmicas. Veremos a seguir uma importante transformação relacionada à seção de um aerofólio.

Nikolai Egorovich Joukowski foi um cientista russo responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no z – plano é mapeada dentro de uma curva de formato de um aerofólio no w – plano, semelhante a uma asa de avião, ao estudar a função $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = z + \frac{1}{z}. \quad (5.1)$$

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, caso particular de uma transformação conforme. Joukowski propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação e conclui que “se os fluxos aerodinâmicos⁴ para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento $w = f(z)$ será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio” ([8]).

⁴Fluxo aerodinâmico é equivalente a uma linha de corrente, Apêndice A.

Até a década de 1960 alguns autores formularam e aperfeiçoaram “as teorias e equações para obtenção de resultados do desempenho dos aerofólios” (KLIEWER, 2002, p.3), mas constataram a dificuldade para fazer a representação gráfica do aerofólio e analisaram sua distribuição de pressão. Após esta década a tecnologia permitiu “a análise de geometrias de construção matemática mais complexas” (KLIEWER, 2002, p.4) e os aerofólios Joukowski foram usados como parâmetros de comparação⁵.

5.2.1 Teoria: escoamento ao redor de um cilindro

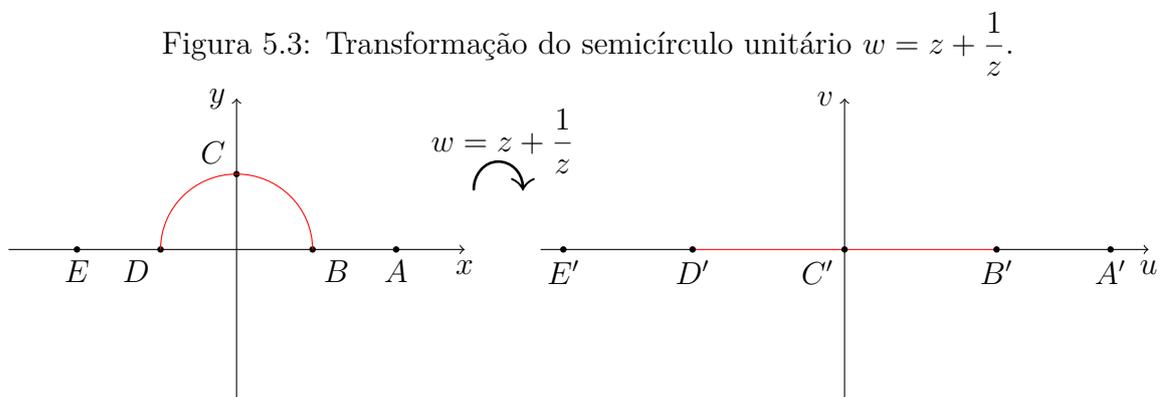
A função potencial com circulação do escoamento sobre o cilindro permite calcular as características aerodinâmicas do aerofólio como veremos a seguir.

Para isso vamos analisar a função potencial complexa para um caso específico, considerando a seguinte situação: dado um cilindro circular com raio unitário situado em um grande corpo de fluido escoando com uma velocidade uniforme, com eixo perpendicular à direção do escoamento.

Para determinar o escoamento estacionário ao redor desse cilindro vamos representar o cilindro com raio unitário pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$ e supor que o escoamento distante do círculo seja paralelo ao eixo x .

De acordo com a simetria do escoamento, vamos analisar somente a parte superior da figura como a região de escoamento e considerar as partes superiores ao círculo como fronteira.

Observe que a transformação $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$ leva o semicírculo superior e o eixo x em todo eixo u do w -plano, veja a Figura 5.3.



Fonte: Elaborada pela autora.

De fato, note que a semicircunferência de centro na origem e raio 1, isto é, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, é levada em:

$$f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = 2\cos\theta.$$

Ou seja, $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$ com imagem $[-2, 2]$. E para todo $z \in \mathbb{R}$ segue que $f(z) \in \mathbb{R}$.

⁵Curiosidade: Hoje em dia os modelos de aerofólios são padronizados e convencionados pela NACA(National Advisory Committee for Aeronautics). Esta comissão foi a entidade precursora da NASA(National Aeronautics and Space Administration). Para mais informações acesse <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbfta/article/view/4068/3227>>.

Além disso, a região de escoamento superior a fronteira é transformada no semiplano $v > 0$, veja a Figura 5.4, pois se $z = x + yi$

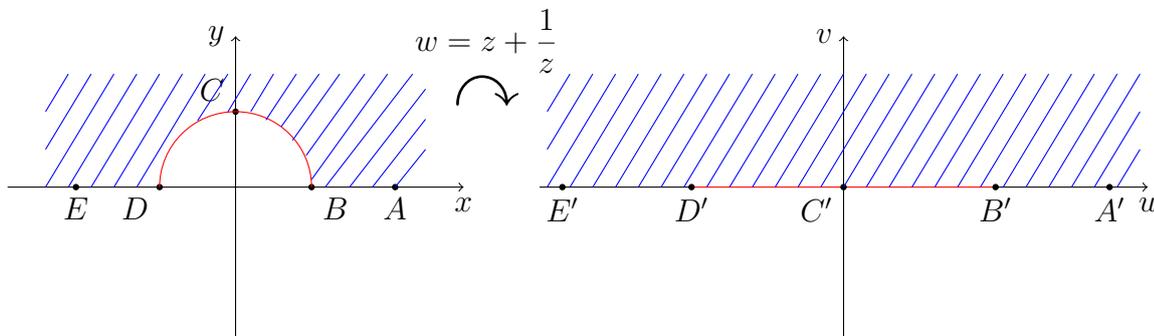
$$\begin{aligned} f(z) &= x + yi + \frac{1}{x + yi} \\ &= x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Observe que $Im(f(z)) = y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$. Como

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} &< 1 \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} &> 0. \end{aligned}$$

e $y > 0$, segue que $v > 0$.

Figura 5.4: Região de escoamento superior a fronteira.



Fonte: Elaborada pela autora.

Com isso concluímos que a transformação $w = z + \frac{1}{z}$ leva o círculo $|z| = 1$ no segmento entre os pontos $w = 2$ e $w = -2$ e o domínio exterior ao círculo no resto do $w - plano$.

Segundo Kliewer [7]:

Para que se possa obter as equações de desempenho do aerofólio, é necessário expandir a equação complexa da transformação para a obtenção dos pares coordenados para a sua representação gráfica, e também um ajuste no posicionamento do círculo para que seja considerada a configuração do escoamento. (KLIEWER, 2002, p.11)

Assim, deslocando o círculo unitário por $x_0 + y_0i$, temos para $z = x_0 + y_0i + e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
f(x_0 + y_0i + e^{i\theta}) &= x_0 + y_0i + e^{i\theta} + \frac{1}{x_0 + y_0i + e^{i\theta}} \\
&= x_0 + y_0i + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta + \frac{x_0 - y_0i + \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{|x_0 + y_0i + e^{i\theta}|^2} \\
&= (x_0 + \cos \theta) + i(y_0 + \operatorname{sen} \theta) + \frac{(x_0 + \cos \theta) - i(y_0 + \operatorname{sen} \theta)}{|x_0 + y_0i + e^{i\theta}|^2} \\
&= \underbrace{(x_0 + \cos \theta) \left[1 + \frac{1}{|x_0 + y_0i + e^{i\theta}|^2} \right]}_{\operatorname{Re}(f(x_0 + y_0i + e^{i\theta}))} + i \underbrace{(y_0 + \operatorname{sen} \theta) \left[1 - \frac{1}{|x_0 + y_0i + e^{i\theta}|^2} \right]}_{\operatorname{Im}(f(x_0 + y_0i + e^{i\theta}))},
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
|x_0 + y_0i + e^{i\theta}|^2 &= |(x_0 + \cos \theta) + i(y_0 + \operatorname{sen} \theta)|^2 \\
&= (x_0 + \cos \theta)^2 + (y_0 + \operatorname{sen} \theta)^2 \\
&= x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + \cos^2 \theta + y_0^2 + 2y_0 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(f(x_0 + y_0i + e^{i\theta})) &= (x_0 + \cos \theta) \left[\frac{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1 + 1}{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1} \right] \\
&= (x_0 + \cos \theta) \left[\frac{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 2}{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1} \right],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f(x_0 + y_0i + e^{i\theta})) &= (y_0 + \operatorname{sen} \theta) \left[\frac{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1 - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1} \right] \\
&= (y_0 + \operatorname{sen} \theta) \left[\frac{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta)}{x_0^2 + y_0^2 + 2(x_0 \cos \theta + y_0 \operatorname{sen} \theta) + 1} \right],
\end{aligned}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Na sequência fixamos valores específicos para o centro do círculo mantendo o valor do raio para visualizarmos qual a figura obtida pela transformação $f(z) = z + \frac{1}{z}$, colocamos o círculo e a figura transformada no mesmo plano.

Exemplo 5.1. Seja $z = -0,2 + 0,6i + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, o círculo de raio unitário centrado em $z_0 = -0,2 + 0,6i$. Segue na Figura 5.5 os comandos para gerar as curvas no GeoGebra [11] e, na Figura 5.6 a visualização geométrica de tal transformação.

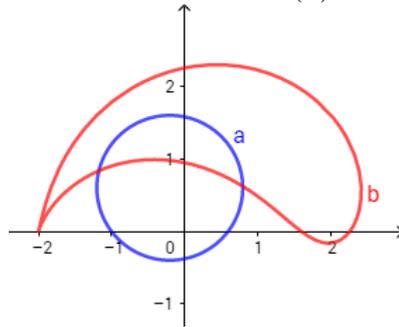
Figura 5.5: Comando para gerar curvas no GeoGebra.

a = Curva(-0.2 + cos(t), 0.6 + sen(t), t, 0, 2 pi)

b = Curva\left(\frac{(-0.2 + \cos(t)) \left((-0.2)^2 + 0.6^2 + 2(-0.2 \cos(t) + 0.6 \operatorname{sen}(t)) + 2\right)}{(-0.2)^2 + 0.6^2 + 2(-0.2 \cos(t) + 0.6 \operatorname{sen}(t)) + 1}, \frac{(0.6 + \operatorname{sen}(t)) \left((-0.2)^2 + 0.6^2 + 2(-0.2 \cos(t) + 0.6 \operatorname{sen}(t))\right)}{(-0.2)^2 + 0.6^2 + 2(-0.2 \cos(t) + 0.6 \operatorname{sen}(t)) + 1}, t, 0, 2 \pi\right)

Fonte: Elaborada pela autora utilizando o GeoGebra [11].

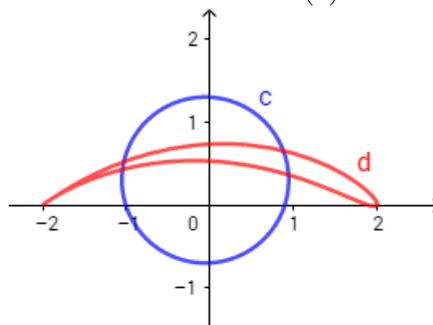
Figura 5.6: Transformação do círculo unitário (a) centrado em $z_0 = -0,2 + 0,6i$.



Fonte: Elaborada pela autora utilizando o GeoGebra [11].

Exemplo 5.2. Seja $z = -0,05 + 0,3i + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, o círculo de raio unitário centrado em $z_0 = -0,05 + 0,3i$. Segue na Figura 5.7 a visualização geométrica da transformação. O comando para gerar a curva é análogo ao da Figura 5.5.

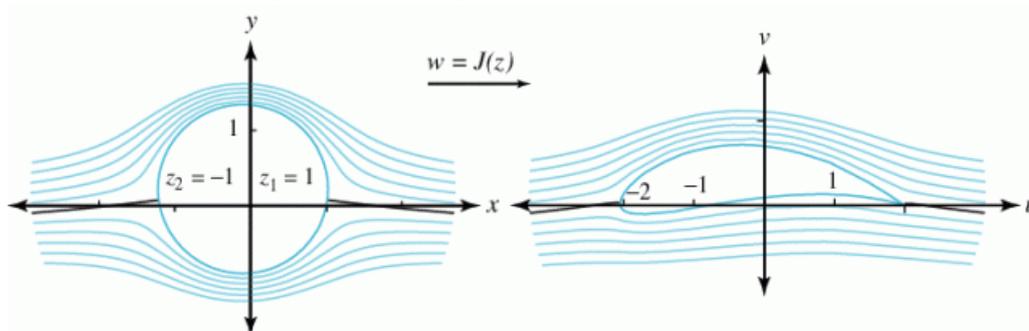
Figura 5.7: Transformação do círculo unitário (c) centrado em $z_0 = -0,05 + 0,3i$.



Fonte: Elaborada pela autora utilizando o GeoGebra [11].

Agora que já temos uma ideia geométrica dessa transformação, veremos uma imagem que mostra o comportamento do fluido ao se deparar com um obstáculo (um objeto sólido), neste caso, um escoamento ao redor de um cilindro. Na Figura 5.8, a função $w = J(z) = z + \frac{1}{z}$ e os cálculos para esta situação podem ser encontrados em Scio Scire Dominium [8].

Figura 5.8: Imagem do fluxo de um fluido.



Fonte: Scio Scire Dominium [8].

Observe que o fluxo do fluido no $z - plano$, representado pelas linhas azuis na Figura 5.8, tende a contornar o cilindro com seção transversal igual ao círculo unitário, saindo na mesma direção em que o fluido encontrou tal obstáculo. No caso do $w - plano$ o fluido percorre todo o aerofólio, desde o bordo de ataque até o bordo de fuga. Seu formato e posicionamento no avião, a um determinado ângulo de ataque, são responsáveis por gerarem sustentação, que nada mais é do que a diferença de pressão entre a parte superior e inferior de um objeto(asa) que sofre a ação de um fluido.

O Apêndice A contém um estudo introdutório e detalhado sobre tal escoamento, e mostra que as funções envolvidas satisfazem a equação de Laplace, isto é, são funções harmônicas. Como são necessários resultados físicos e de cálculo de várias variáveis para o entendimento desses resultados, optamos por reuní-los no apêndice, como sugestão de leitura aos que tiverem interesse em aprofundar os conhecimentos sobre a teoria que garante a sustentação do avião.

5.2.2 Prática: proposta didática

Com o apoio deste material o professor pode enfatizar que as asas dos aviões são modeladas de forma a gerar sustentação (força de reação do ar) com o mínimo de arrasto possível e o que está por trás desses avanços na aerodinâmica é o estudo de uma transformação no plano de funções de uma variável complexa.

Apesar de funções de variáveis complexas não ser um tema do ensino médio, a base para compreender tais funções é o conhecimento sobre números complexos, as operações que envolvem tal conjunto e as interpretações geométricas destas operações, temas que são abordados nesta etapa da educação básica. O professor pode sugerir o estudo da operação $z + \frac{1}{\bar{z}}$ para alguns valores de z e fazer sua interpretação geométrica utilizando conceito de adição de vetores como demonstrado no segundo capítulo.

Como motivação para o estudo dos números complexos, sugerimos ao professor construir com os alunos uma asa de um avião com o auxílio do experimento abaixo, baseado em CAMPOS [2].

Experiência de aerodinâmica

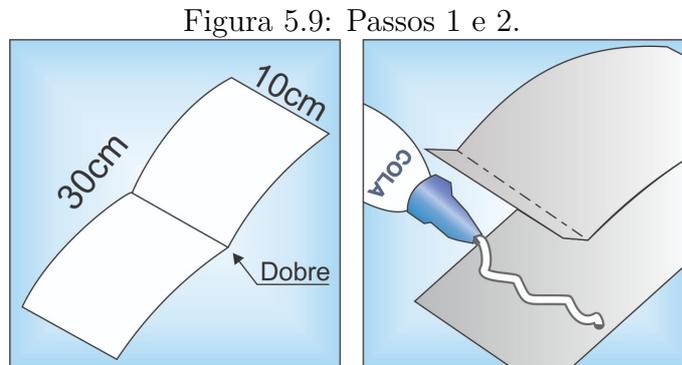
Para montar uma asa de um avião de papel, você vai precisar:

Material:

- Cartolina
- Tesoura
- Cola Branca
- Canudo
- Linha de pesca ou barbante fino

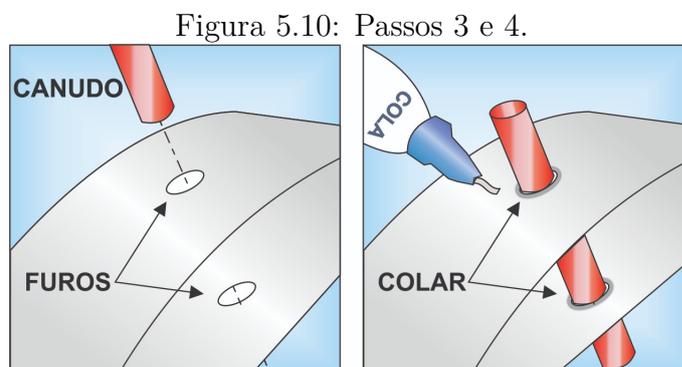
Como fazer:

1. Corte um retângulo de cartolina, de 10 por 30 *cm*. Dobre a tira pela metade, vincando bem, veja a Figura 5.9.



Fonte: Campos [2].

2. Passe cola ao longo de 1 *cm* de uma das pontas e cole a parte superior a 4 *cm* da outra extremidade. A tira deverá ficar curvada, veja a Figura 5.9.
3. Faça dois furos na cartolina, para passar o canudo bem justinho, veja a Figura 5.10.

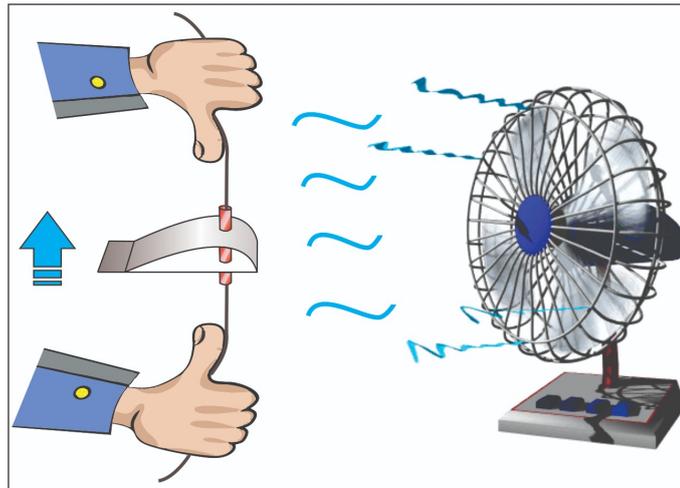


Fonte: Campos [2].

4. Cole o canudo na cartolina, mantendo a parte de cima curvada, veja a Figura 5.10.
5. Passe a linha pelo canudo e mantenha-a esticada. Vire a asa contra o vento e ela subirá.

Observação 5.3. Procure a inclinação adequada do fio em relação ao vento. Se preferir, utilize um ventilador, veja a Figura 5.11.

Figura 5.11: Experimento de aerodinâmica.



Fonte: Campos [2].

Este experimento também possibilita ao professor explorar outros conteúdos, como a proporcionalidade entre grandezas ao apresentar a fórmula da sustentação:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_L.$$

Por exemplo, pode-se explorar como o produto AC_L (área planiforme pelo coeficiente de sustentação) influencia na velocidade mínima de decolagem e pouso, como apresentado na Subseção 5.1.1. E também, estudar a relação entre velocidade mínima e densidade do fluido. Nesta relação, podemos explorar como o tamanho da pista influencia em tais processos de acordo com as altitudes em que se encontram os aeroportos. Analisando matematicamente, verificamos que a velocidade é inversamente proporcional a raiz quadrada da densidade. Isto quer dizer que em aeroportos situados a maiores altitudes, as pistas de decolagem e pouso devem ser mais longas para poderem atender às velocidades mínimas de decolagem e pouso que devem ser maiores nos aeroportos situados em baixas altitudes, veja [5]. Sugerimos para esta análise uma aula interdisciplinar com os professores de física e química.

Finalizamos este trabalho com algumas informações adicionais sobre os aerofólios.

5.3 Curiosidades: fatores que influenciam decolagem e o pouso de um avião

A decolagem e o pouso de um avião são realizadas em velocidades pequenas quando comparadas a velocidade do avião em voo.

A modelagem e posição do perfil (asa do avião) são extremamente importantes para gerarem a sustentação, veja Apêndice A. Esses perfis podem ter seu formato modificado em determinadas situações para garantir uma força de sustentação em situações rápidas de baixa velocidade (decolagem e pouso), veja a Figura 5.12.

Figura 5.12: Formato da asa modificado para pouso.



Fonte: Commons Wikimedia. Disponível em:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bmi_a319-100_g-dbca_closeup_arp.jpg> Acesso em: 05 jun. 2020.

5.3.1 Aerofólios móveis

Considerando que a fórmula que descreve a sustentação é um resumo da aerodinâmica do voo, podemos através dela determinar a velocidade mínima do voo pelo fato que o peso total do avião (W) deve ser igual à sustentação. Isto é,

$$W = F_L = C_L \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A \cdot V_{\min}^2. \quad (5.2)$$

Tanto a sustentação como o arrasto são funções que dependem diretamente da forma do corpo, pois seus coeficientes dependem do tipo do perfil (tipo de asa). Assim, qualquer efeito que altere seu formato tem consequência direta nessas duas forças. Comentamos que as asas dos aviões são modeladas e posicionadas para gerarem sustentação com o mínimo de arrasto. Geralmente, desconsideramos os efeitos de arrasto em trechos curtos de escoamento com grandes seções transversais especialmente em baixas velocidades do escoamento, como é visto por exemplo na decolagem e pouso de um avião.

Segundo a fórmula (5.2), temos para um dado peso que a velocidade de decolagem e pouso pode ser mínima aumentando o produto do coeficiente de sustentação e a área da asa ($C_L \cdot A$).

Como geralmente a curvatura e espessura são fixas devido às asas serem rígidas e estarem presas firmemente à fuselagem, o produto ($C_L \cdot A$) precisa ser modificado de outras maneiras, e uma delas é alterando o ângulo de ataque utilizando os comandos de subida e descida do avião, porém esses são utilizados para controlar a aproximação e a velocidade vertical das aeronaves. Uma outra maneira e mais eficiente é a utilização de aerofólios móveis no bordo de ataque chamados de *slats* (Figura 5.13) e no bordo de fuga chamados de *flaps* (Figura 5.14) que durante as decolagens e pousos são acionados para garantir uma menor velocidade com maior sustentação tornando os pousos e decolagens mais seguros e suaves.

Figura 5.13: Slats.



Fonte: Ww2aircraft. Disponível em: <<https://ww2aircraft.net/forum/threads/could-the-slats-be-the-landing-problem-on-the-109.44975/page-2>> Acesso em: 05 jun.2020.

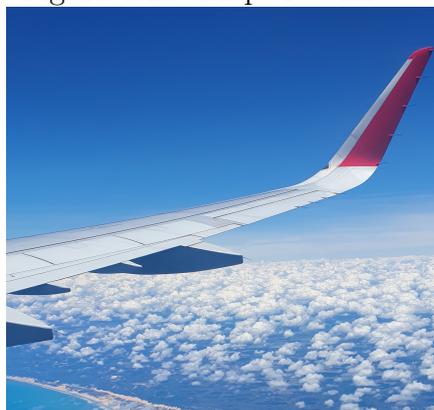
Figura 5.14: Flaps estendidos.



Fonte: Geekzilla. Disponível em: <<https://www.geekzilla.com.br/nasa-testa-com-sucesso-aviao-com-asas-que-mudam-de-forma/flaps/>>. Acesso em: 05 jun. 2020.

Em contra partida, a utilização desses aerofólios móveis também alteram a força de arrasto, pois como vimos esta força também depende da área planifome do perfil. Isso faz com que a aeronave consuma mais combustível; desta forma estes aerofólios são recolhidos durante o voo de cruzeiro (Figura 5.15) para melhorar o perfil da asa tornando-o mais aerodinâmico permitindo velocidades maiores com menores forças de arrasto e consequentemente menor consumo de combustível.

Figura 5.15: Flaps recolhidos.



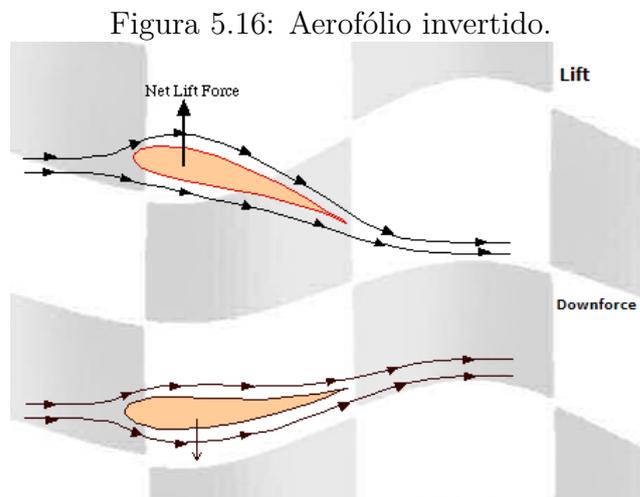
Fonte: Foto tirada pela autora de Maceió/São Paulo.(09 fev. 2020).

5.3.2 Winglets

Os Winglets (parte vermelha da Figura 5.15) são componentes aerodinâmicos colocados nas pontas das asas dos aviões com o objetivo de minimizarem os efeitos viscosos dessa região bloqueando parte do vazamento ao redor das pontas das asas fazendo com que a intensidade dos vórtices e o arrasto induzido sejam reduzidos de forma considerada e melhorando a sustentação nas extremidades da asa.

5.3.3 Aerofólios dos carros de corrida

Os aerofólios dos carros de corrida (aerofólios invertidos- veja Figura 5.16), por exemplo, são desenhados com finalidade oposta de um avião, isto é, produzem sustentação negativa ou "Downforce". Seu objetivo é aumentar a força que o carro exerce sobre o chão, com a consequência de gerar uma força normal elevada, que por sua vez irá melhorar a força de atrito fazendo com que o carro transfira o máximo de potência entre as rodas e o solo, além de melhorar a performance de velocidade nas curvas.⁶



Fonte: Disponível em: <<http://www.formula1-dictionary.net/downforce.html>>. Acesso em: 05 jun. 2020.

⁶Disponível em: <<http://www.formula1-dictionary.net/downforce.html>> . Acesso em: 05 jun. 2020.

6 Considerações finais

Esta dissertação de mestrado, permitiu compreender conceitos que vão além do conteúdo de números complexos, tema abordado no último ano da Educação Básica no Brasil. Abordamos nos primeiros capítulos toda a construção de números complexos, suas representações algébricas e geométricas e identificamos pontos principais da diferença de funções elementares de uma variável real para uma variável complexa.

A escolha pelo tema deste trabalho, veio logo após a inscrição da autora para o concurso da ESFCEX, em que funções de uma variável complexa fazia parte dos conteúdos cobrados no exame intelectual. Diante desta avaliação, percebemos que um professor precisa ter conhecimentos de determinado conteúdos, que vão além, do ensinado em sala de aula.

De modo geral, ao pesquisar materiais didáticos que demonstram alguma aplicação sobre números complexos, observamos que muitos fazem apenas citações. Uma possível justificativa para esses relatos, pode ser pelo fato de envolver conceitos que vão além do ensino médio, porém, fazem parte da sua formação. No Capítulo 5 deste trabalho, fornecemos os conhecimentos necessários, e uma proposta de experimento em sala de aula, que possibilita ao professor desenvolver uma aplicação concreta e real com os alunos, de uma forma multidisciplinar. Conseqüentemente, espera-se que o aluno desenvolva habilidades específicas, de modo a, compreender processos produtivos relacionando a teoria com a prática dentro da disciplina de Matemática.

Com a leitura do Apêndice, o leitor pode observar, que existe muita análise complexa e cálculos por trás do voo de um avião, que hoje é considerado um dos transportes mais seguros do mundo. E, que apesar de tal complexidade, constatamos que as funções complexas é uma, dentre outras, que podem ser utilizadas como base de um escoamento potencial (irrotacional), de forma que podemos analisar e modelar perfis de asas, que se alteram de acordo com o tipo e objetivo de cada avião.

A conexão com resultados matemáticos (equação de Laplace, condições de Cauchy-Riemann) e aplicação (interpretação) física, foi bastante relevante para ver tais resultados por outro ângulo que, na maioria das vezes, não é estudado na graduação, conseqüentemente, não é apresentado para os alunos em sala de aula. Relatamos aqui, uma dificuldade inicial desta pesquisa, pois, muito do entendimento em ambas as disciplinas, parte da compreensão da notação e dos símbolos para representar as funções, as constantes e todos os fatores relevantes para o entendimento e associação de cada objeto ou grandeza a ser estudado/analísado. Muitos dos símbolos em física, mas especificamente nos livros e artigos de mecânica de fluidos não são universais.

Consideramos este trabalho, como motivação para nós, docentes, repensarmos a nossa prática em sala de aula, como tem sido nossa abordagem sobre os conteúdos, as novidades e atualidades que trazemos, para que os alunos despertem o interesse pelos conceitos apresentamos em aula. Como sugestão ao professor, seria interessante levar aplicações do

cotidiano, para instigar e estimular o ensino de certos conteúdos. Ressaltamos que não precisa, necessariamente, aprofundar na aplicação, mas ao menos, citar algumas construções, de forma a estimular a curiosidade e, estimular os próprios alunos desde o ensino médio, a pesquisarem assuntos para além da sala de aula.

Referências

- [1] HEFEZ A. *Aritmética*. SBM, Rio de Janeiro, 2 edition, 2016.
- [2] CAMPOS A.C.V. de. *Conhecimento geral das aeronaves (asas fixas): livro didático*. UnisulVirtual, Palhoça, 2011.
- [3] Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 20, janeiro de 2020.
- [4] Bernoulli's Principle and the Coanda Effect. Disponível em: <<http://www.discoverhover.org/infoinstructors/guide8.htm>>. Acesso em: 25, maio de 2020.
- [5] CIMBALA J.M.; ÇENGEL, Y.A. *Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações*. AMGH Editora Ltda., Porto Alegre, 3 edition, 2015.
- [6] Concurso ESFCEX 2019. Disponível em: <http://www.esfcex.eb.mil.br/images/concurso/2019/CA_CFO/MATEMATICA-B.pdf>. Acesso em: 22, abril de 2020.
- [7] KLIEWER D. Análise de perfis aerodinâmicos joukowski. Trabalho de conclusão de graduação. *Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, 2002.
- [8] Deduções sobre o Aerofólio de Joukowsky. Disponível em: <<https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/>>. Acesso em: 22, novembro de 2019.
- [9] BRUNETTI F. *Mecânica dos fluidos*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2 edition, 2008.
- [10] IEZZI G. *Matemática: Ciência e Aplicações - Volume 3*. Saraiva, São Paulo, 9 edition, 2016.
- [11] GEOGEBRA-Dynamic Mathematics for Everyone. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>.
- [12] DOMINGUES H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. Editora Atual, São Paulo, 4 edition, 2003.
- [13] WELTNER K., SUNDBERG M.I., ESPERIDIÃO A. S., and MIRANDA P. A dinâmica dos fluidos complementada e a sustentação da asa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23(4):429–443, 2001.

-
- [14] MEDEIROS L.A.J. *Introdução as funções complexas*. McGRAW- HILL do Brasil, LTDA e Editora da Universidade de Brasília, São Paulo, 1972.
- [15] SOARES M. G. *Cálculo de uma variável complexa*. Coleção matemática universitária IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [16] KOTOVICZ M.A. Números e funções complexas. Dissertação (mestrado). *Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul*, 2019.
- [17] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Disponível em: <<http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>>. Acesso em: 22, abril de 2020.
- [18] SANTOS M.P.d. Uma Introdução ao Estudo de Funções Complexas. Dissertação (mestrado). *Universidade Estadual de Maringá*, 2017.
- [19] SPIEGEL M.R. *Theory and Problems of Complex Variables with an introduction to conformal mapping and its applications*. SCHAUM'S OUTLINE SERIES, New York, 1993.
- [20] Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>>. Acesso em: 22, novembro de 2019.
- [21] CHURCHILL R.V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGRAW- HILL do Brasil, LTDA e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1975.
- [22] ZILL D.G.; SHANAHAN, P.D. *Curso introdutório à análise complexa com aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 2011.
- [23] PIANOSCHI T.A. Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra. Dissertação (mestrado). *Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências Exatas*, page 91 f., 2013.
- [24] SILVA V. S. Uma proposta de ensino de funções complexas elementares para a 3ª série do ensino médio. Dissertação (mestrado). *Universidade Federal do Vale do São Francisco*, 2015.
- [25] Vestibulares ITA. Disponível em: <<http://www.vestibular.ita.br/>>. Acesso em: 22, abril de 2020.
- [26] GIORDANO F.R.; WEIR, M.D. HASS J. *Cálculo (George B. Thomas Jr.)*, volume 2. Addison Wesley, São Paulo, 11 edition, 2009.

A Apêndice

Este apêndice é um estudo a parte, porém aprofundado sobre um escoamento potencial. Contém a associação de resultados matemáticos e sua interpretação física das equações e funções que regem um escoamento. Este apêndice foi elaborado segundo as referências [4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 19, 21, 22, 23] .

Ele é voltado para aqueles professores que tiverem interesse em aprofundar um pouco sobre como as equações matemáticas, o modelo da asa e sua posição na aeronave, o estudo sobre o ângulo de ataque e, os demais elementos influenciam na sustentação do avião. Ressaltamos que o modelo e posicionamento da asa dependem do objetivo de cada avião: se é um avião de caça, comercial, carga, dentre outros objetivos.

A.1 Conceitos e resultados importantes

Em mecânica dos fluidos um elemento pode passar por alguns tipos fundamentais de movimento ou deformação. Dentre eles, destacamos a translação e rotação. Como os elementos de um fluido podem estar em movimento constante, descrevemos fisicamente estes movimentos e deformações em termos de taxas. Assim, consideramos a velocidade como a taxa de translação e a velocidade angular como a taxa de rotação. Segundo Cimbala (2015, p.151), “para que essas taxas de deformação sejam úteis no cálculo dos escoamentos de fluidos, devemos expressá-las em termos da velocidade e derivadas da velocidade”.

Vimos que a solução de problemas que envolvem o fluxo de fluidos, no caso deste trabalho aerodinâmica, é alcançada por métodos de variáveis complexas sob a simplificação de um **escoamento irrotacional incompressível permanente bidimensional, ou escoamento potencial**. Tal escoamento é representado por uma função potencial que depende de duas outras funções: Função Potencial de Velocidade (ϕ) e Função Corrente (ψ) que descrevem o comportamento do escoamento.

A.1.1 Escoamento potencial

Antes de analisar o escoamento potencial vamos definir algumas características gerais de um escoamento para então analisar o escoamento com dados específicos.

A primeira delas é que um fluido em movimento pára totalmente na superfície e assume velocidade nula em relação a superfície. Isto é, em contato direto com um sólido o fluido “gruda” na superfície e não há escorregamento.

A propriedade responsável pelo não escorregamento e desenvolvimento de uma camada limite é a viscosidade. Camada limite é a região de escoamento adjacente a parede na qual os efeitos viscosos (gradientes de velocidade) são significativos.

A **viscosidade dinâmica** permite equilibrar, dinamicamente, forças tangenciais externas quando os fluidos estão em movimento. Esta propriedade indica a maior ou menor dificuldade de um fluido escoar (escorrer).

Consequências da condição de não-escorregamento

1. Todos os perfis de velocidade (como altera o vetor velocidade ao longo de uma seção transversal) devem ter valor nulo em relação à superfície nos pontos de contato entre o fluido e a superfície sólida.
2. Tal condição é responsável pelo desenvolvimento do perfil de velocidade.

Denominamos o **processo separação de escoamento** quando um fluido é forçado a mover-se sobre uma superfície curva, como a face externa de um cilindro, a uma velocidade suficientemente alta então a camada limite não pode permanecer mais colada à superfície e em algum ponto separa-se dela.

Classificação de Escoamento

1. *Viscosidade*

A viscosidade está relacionada com os efeitos dos atritos. Em um escoamento de fluidos a viscosidade é não nula, porém classificamos um **Escoamento Viscoso** aqueles escoamentos cujos os efeitos dos atritos são bastante significativos. E o **Escoamento não viscoso** são aqueles em que em regiões afastadas das superfícies sólidas onde as forças viscosas são desprezivelmente pequenas quando comparadas as forças inerciais e de pressão.

2. *Compressibilidade*

A compressibilidade depende da variação da densidade do fluido durante o escoamento. Dizemos que o escoamento é **compressível** quando a densidade do fluido altera ao longo do tempo. E **incompressível** quando a densidade permanece constante ao longo do tempo. Ou seja, ao modificar a pressão o volume de cada porção do fluido permanece inalterado durante o decorrer de seu movimento.

3. *Permanente (Estacionário)*

Dizemos que um escoamento é **permanente/estacionário** quando não há mudanças de propriedades, velocidade, temperatura, etc. ao longo do tempo. E **não-estacionário** caso contrário.

4. *Dimensão (Uni, Bi e Tridimensional)*

Um campo de escoamento é melhor caracterizado pela sua distribuição de velocidade. Portanto, um escoamento é dito ser uni,bi ou tridimensional se a sua velocidade varia basicamente em uma, duas ou três dimensões respectivamente.

Primeiramente vamos considerar o *escoamento bidimensional no estado estacionário*, isto é, o movimento do fluido é suposto o mesmo em todos os planos paralelos ao *plano-xy*, sendo a velocidade paralela a esse plano e independente do tempo. Logo, é suficiente considerar o movimento do fluido no *plano - xy*.

Suponhamos que o vetor $q(x, y)$ representado pela variável complexa

$$q(x, y) = q_1(x, y) + iq_2(x, y) \quad (\text{A.1})$$

designe a **velocidade de uma partícula do fluido em um ponto qualquer** (x, y) , onde $q_1(x, y)$ e $q_2(x, y)$ são as componentes da velocidade.

Pontos interiores de um domínio de escoamento em que não existem fontes ou sorvedouros do fluido¹, as funções reais q_1, q_2 tem suas derivadas parciais de primeira ordem supostamente contínuas.

Definimos a seguir a condição fundamental para determinar a força de sustentação de um cilindro, conseqüentemente do aerofólio, que é a circulação.

Definição A.1. Seja C um caminho e q_t a componente da velocidade q tangente a C , onde q_t é uma função real. Se s é o comprimento de arco ao longo de C , então o valor da integral de linha

$$\int_C q_t(x, y) ds \quad (\text{A.2})$$

é chamado **circulação do fluido ao longo de C** , denotado por Γ , onde ds é o comprimento infinitesimal da linha corrente onde a partícula se move.

Fisicamente, dizemos que a circulação quando combinada com o escoamento no qual o corpo está imerso é responsável por modificar o campo de velocidade e pressão de escoamento ao redor do corpo, no caso deste trabalho, ao redor da asa o que gera assim uma força resultante.

Definição A.2. Definimos a **velocidade média** (v_0) do fluido ao longo de uma curva como o quociente entre a circulação e o comprimento da curva.

Suponhamos C um caminho fechado simples (C não possui interseções e o ponto inicial coincide com o ponto final) interior a um domínio simplesmente conexo² e ainda as derivadas de primeira ordem de q_1 e q_2 sejam contínuas.

Se $z = x + yi$, $z \in C$, o número complexo $dx + idy$ representa um vetor tangente a C cujo o comprimento é ds .

Observe que $q_t ds$ é o produto dos comprimentos dos vetores q e $dx + idy$ pelo cosseno do ângulo formado por estes dois vetores.

Definição A.3. Dado dois vetores $\vec{a} = (x_1, y_1)$ e $\vec{b} = (x_2, y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ definimos o **produto escalar** ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) como o produto dos comprimentos dos vetores pelo cosseno do ângulo (θ) formado por estes vetores. Isto é, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$. Podemos calcular também o produto escalar de dois vetores através de suas coordenadas cartesianas, ou seja, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Logo, $q_t ds$ é o produto escalar desses dois vetores e, reescrevemos tal vetor como $q_t(x, y) ds = q_1(x, y) dx + q_2(x, y) dy$.

Assim, segue que a circulação Γ em (A.2) é dada por:

$$\Gamma = \int_C q_t(x, y) ds = \int_C q_1(x, y) dx + q_2(x, y) dy. \quad (\text{A.3})$$

¹Pontos onde a quantidade do fluido se conserva.

²Um domínio simplesmente conexo D é uma região aberta e conexa (domínio) tal que todo caminho fechado contido em D envolve somente pontos de D .

Tomando $P = q_1(x, y)$ e $Q = q_2(x, y)$, segue do Teorema de Green ³ que

$$\Gamma = \int \int_R \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad (\text{A.4})$$

onde R é a região delimitada por C .

Fisicamente, interpretamos o integrando da última integral como a rotação do fluido mediante algumas configurações. Ou seja, para C um círculo centrado em z_0 de raio r , isto é, $|z - z_0| = r$ para todo $z \in C$, vimos que a velocidade média v_0 ao longo de C é igual a $\frac{\Gamma}{2\pi r}$, onde $2\pi r$ é o comprimento de C e Γ é a circulação. Além disso, temos também que a velocidade angular média ω_0 do fluido em torno do eixo do círculo é dada por $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$. Logo,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{v_0}{r} = \frac{\frac{\Gamma}{2\pi r}}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \frac{1}{2} \Gamma \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \frac{1}{2} \left[\int \int_R \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy \right] \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int \int_R \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Definição A.4. A função $\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right)$ é chamada de **rotação do fluido** e representa o limite da velocidade angular de um elemento circular de um fluido quando o círculo se contrai para o ponto (x, y) .

Antes de apresentarmos outra propriedade importante da análise de escoamentos de fluidos, o vetor vorticiadade, recordamos a definição de vetor rotacional, segundo Giordano [26].

Definição A.5. A densidade de circulação ou rotacional de um campo bidimensional $F = M \vec{i} + N \vec{j}$ em um ponto (x, y) é a quantidade escalar $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. Em três dimensões, a circulação em torno de um ponto P em um plano é descrita como um vetor normal ao plano de circulação e aponta no sentido da regra da mão direita em relação ao sentido de circulação. O comprimento do vetor dá a taxa de rotação do fluido, a qual geralmente varia à medida que o plano de circulação é inclinado ao redor de P . O vetor de maior circulação em um escoamento com campo de velocidade $F = M \vec{i} + N \vec{j} + P \vec{k}$ é **vetor rotacional**.

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (\text{A.5})$$

³Seja C uma curva fechada, simples e orientada positivamente. Se P e Q são funções reais de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre C e na região plana D limitada por C , então $\int_C P dx + Q dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

Definição A.6. O **vetor vorticidade**(ζ) é definido como o rotacional do vetor velocidade \vec{q} :

$$\zeta = \text{rot}(\vec{q}) = \vec{\nabla} \times \vec{q}. \quad (\text{A.6})$$

Como $\text{rot}(\vec{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y}$ segue da Definição A.4

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) = \frac{\zeta}{2}.$$

Isto é, a rotação do fluido é igual a metade da vorticidade. E podemos dizer também que a vorticidade é uma medida da rotação de uma partícula do fluido.

Com isso determinamos mais uma classificação de um escoamento que é o escoamento rotacional ou irrotacional.

Um escoamento é classificado como **rotacional(vorticoso)** quando a vorticidade em um ponto de um campo de escoamento for diferente de zero, ou seja, quando as partículas do fluido apresentam rotação em um eixo qualquer numa certa região.

Quando a vorticidade for nula ou tão pequena que possa ser desprezada, dizemos que o escoamento é **irrotacional**.

Em coordenadas cartesianas ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), (x, y, z) e (u, v, w) expandimos (A.6) por :

$$\zeta = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (\text{A.7})$$

No caso do escoamento bidimensional no plano- xy como a componente z da velocidade é nula e nem u nem v variam com z , segue de (A.7) que a vorticidade é dada por

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (\text{A.8})$$

Diante destes conceitos e definições estamos interessados em estudar os **escoamentos irrotacionais de um fluido que é incompressível e não viscoso**. Ou seja, estamos interessados no estudo de um fluido não viscoso cuja as partículas movem-se inicialmente sem rotação, a densidade e o peso específico são considerados constantes e todas as características e propriedades do escoamento independem do tempo e de uma das coordenadas espaciais, em outras palavras, estamos interessados em um escoamento bidimensional.

Sendo assim, seja D um domínio simplesmente conexo onde o escoamento é irrotacional. Se C é um caminho fechado qualquer de D , então a circulação Γ ao longo de C será nula, pois como vimos a circulação é a intensidade da rotação que o fluido atua sobre um corpo. Logo,

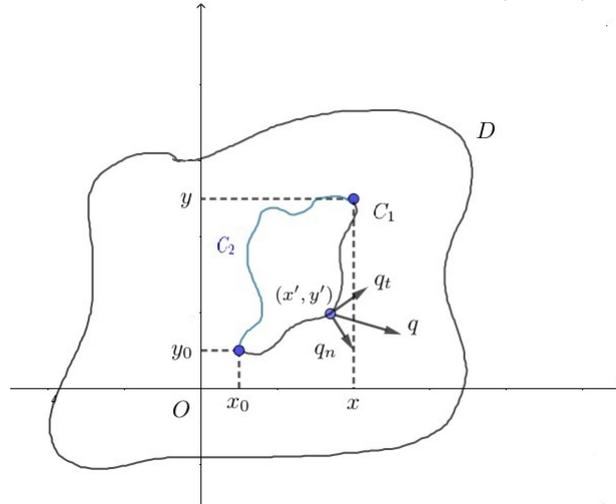
$$\int_C q_1 dx + q_2 dy = 0.$$

Conseqüentemente, se (x_0, y_0) é um ponto fixo de D , a expressão

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [q_1(x', y') dx' + q_2(x', y') dy'], \quad (\text{A.9})$$

define uma função do ponto (x, y) em D que é independente do caminho de integração entre os limites, desde que o caminho seja interior a D , veja a Figura A.1.

Figura A.1: Um caminho simples e fechado por (x_0, y_0) contido em D .



Fonte: Elaborada pela autora utilizando o GeoGebra [11].

Assim, dizemos que o integrando de $\phi(x, y)$, ou seja, $q_1(x', y')dx' + q_2(x', y')dy'$ é uma diferencial exata, diferencial da função $\phi(x, y)$. Logo, $q_1(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $q_2(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Isto é, o vetor $q(x, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$ nada mais é do que o gradiente de ϕ e a derivada direcional de ϕ em qualquer direção representa a velocidade do fluido nessa direção.

Definição A.7. A função escalar $\phi(x, y)$ é chamada de **função potencial de velocidade**. Em uma região irrotacional de escoamento expressamos o vetor velocidade pelo gradiente da função ϕ .

Definição A.8. As curvas de nível da função ϕ , $\phi(x, y) = c$, c constante, são chamadas de **curvas equipotenciais**.

Observação A.9. • Os vetores velocidade em todos os pontos são normais as curvas equipotenciais.

- Segundo Cimbala(2015) [5],

Em qualquer instante no tempo, o campo de escoamento incompressível se ajusta instantaneamente de forma a satisfazer a equação de Laplace e as condições de contorno existentes naquele instante...Em regiões irrotacionais do escoamento...obtemos a solução para o campo de velocidade nessas regiões resolvendo a equação de Laplace para a função potencial de velocidade ϕ . (CIMBALA,2015, p. 530 e 534)

Isto é, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ em um domínio que seja livre de fontes ou sorvedouros do fluido.

Assim, como q_1, q_2 são as derivadas parciais de ϕ que são contínuas, as derivadas parciais de ϕ até a segunda ordem também são contínuas em um domínio D . Portanto, dizemos que a função potencial de velocidade (ϕ) é uma função harmônica no domínio D .

A conservação da massa (**equação da continuidade**) é uma das equações que deduzem as equações diferenciais de movimento de fluido. São equações que fornecem soluções para o escoamento em qualquer ponto do domínio do escoamento.

Para o caso de um escoamento incompressível bidimensional no *plano* – xy a equação da continuidade em coordenadas cartesianas se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

onde u e v são as componentes da velocidade do escoamento nos eixos x e y respectivamente.

Podemos reescrever tal equação em função de uma única variável dependente ψ ao invés de termos duas variáveis u e v . Segue então a seguinte definição

Definição A.10. Definimos a **função corrente** $\psi(x, y)$ como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{A.10})$$

Embora o sinal seja arbitrário, definir a função corrente desta maneira leva o escoamento da esquerda para a direita à medida que ψ aumenta na direção de y , além da função sempre satisfazer a equação da continuidade independente da rotacionalidade.

Definir a função ψ desta maneira nos dá um significado físico bastante útil pois conseguimos relacionar a função corrente ψ e a função potencial de velocidade ϕ de modo que a combinação da circulação com o escoamento no qual o corpo está imerso modifica o campo de velocidade e pressão do escoamento ao redor do corpo gerando assim uma força resultante que veremos mais a frente que é a força de sustentação.

Vimos que em uma região irrotacional de escoamento a vorticidade (ζ) deve ser nula. Assim, segue de (A.8)

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo (A.10) em (A.11) temos:

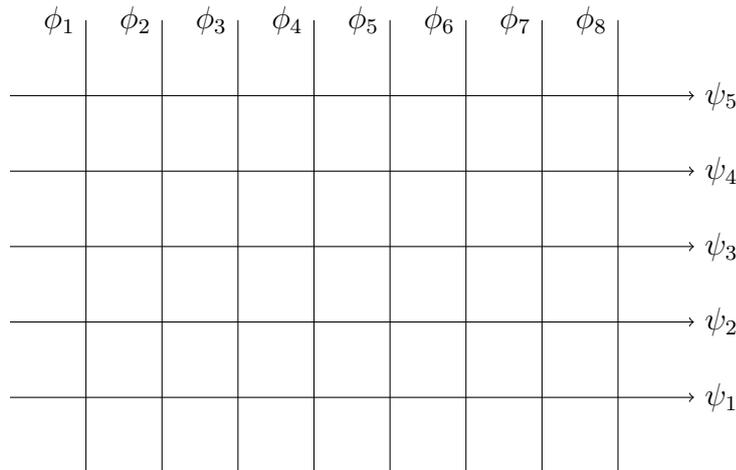
$$\frac{\partial \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Logo, $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$. Isto é, ψ também satisfaz a equação de Laplace.

Definição A.11. As curvas onde $\psi(x, y) = c$, c constante, são chamadas de **linhas de corrente** (ou fluxo aerodinâmico) do escoamento.

Em regiões planares irrotacionais do escoamento, ocorre que as linhas de corrente interceptam linhas equipotenciais em ângulos retos, uma condição conhecida como ortogonalidade mútua, veja Figura A.2.

Figura A.2: Representação gráfica de um escoamento em uma região planar irrotacional.



Fonte: Elaborada pela autora.

Dizemos que as linhas de corrente são tangentes aos vetores velocidades de uma partícula qualquer que se move em um escoamento, enquanto que as linhas equipotenciais representam linhas ortogonais ao vetor velocidade da partícula.

Assim, relacionamos a função corrente ψ e a função potencial de velocidade ϕ pelo fato de ambas satisfazerem a equação de Laplace e a partir de ψ ou ϕ conseguimos determinar o campo de velocidade.

Dizemos também que as soluções de ψ e ϕ são funções harmônicas como vimos no capítulo anterior e ψ e ϕ são chamadas conjugada harmônica uma da outra.

Apesar destas funções estarem relacionadas, os físicos classificam tais funções como complementares uma da outra, pelo fato de suas fontes serem opostas uma da outra. Pois, enquanto que a função corrente é definida pela continuidade (condições de bidimensionalidade e incompressibilidade) a equação de Laplace para ψ resulta da irrotacionalidade. Já a função potencial de velocidade é definida pela irrotacionalidade e a equação de Laplace para ϕ resulta da continuidade.

Uma vez que tais funções são conjugada harmônica uma da outra, e pela condição de irrotacionalidade ($\zeta = 0$), podemos relacionar ambas as funções pelas igualdades:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Em outras palavras, dizemos que as condições de irrotacionalidade nada mais são do que as condições de Cauchy-Riemann para funções de variáveis complexas, vistas no capítulo anterior. Essas condições permitem descrever vários tipos de escoamentos e sua combinação, como veremos a seguir, é o que faz chegar no formato de um aerofólio(asa) desejável.

Definição A.12. A função holomorfa

$$F(z) = \phi(x, y) + \psi(x, y)i \tag{A.12}$$

onde $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ são as funções potencial de velocidade e função corrente, respectivamente, é chamada de **função potencial do escoamento**.

Segue da definição de derivada de uma variável complexa que

$$F'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{A.13}$$

Como ϕ e ψ satisfazem às condições de Cauchy-Riemann (devido a irrotacionalidade), ou seja, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$, segue de (A.13)

$$F'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (\text{A.14})$$

Mas, observe que $\frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = \bar{q}$, isto é, a derivada da função potencial complexa do escoamento é o conjugado do vetor velocidade q . Reciprocamente, o conjugado da derivada do potencial complexo é a velocidade ($q = \overline{F'(z)}$).

Segue das propriedades de módulo vistas no Capítulo 2 que o módulo da velocidade é $|q| = |\overline{F'(z)}| = |F'(z)|$.

Agora sabemos da definição de conjugada harmônica que se $\phi(x, y)$ é uma função harmônica em um domínio conexo D , então para $\psi(x, y)$ a conjugada harmônica de ϕ é escrita como

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial\phi(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial\phi(x', y')}{\partial x'} dy' \right]. \quad (\text{A.15})$$

Como $q_1(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ e $q_2(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ reescrevemos a função corrente em (A.15)

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [-q_2(x', y') dx' + q_1(x', y') dy']. \quad (\text{A.16})$$

Lembrando que o caminho de integração é qualquer contorno interior a D ligando os dois pontos conforme a Figura A.1 .

Fisicamente, interpretamos a fórmula A.16 da função corrente com a densidade do fluido. Ou seja, como o fluido é incompressível, sua densidade é uniforme e o volume ocupado por qualquer parte tem uma relação constante com a massa nessa parte.

Observe que o integrando $-q_2(x', y') dx' + q_1(x', y') dy'$ da função corrente ψ é o produto escalar do vetores q e $-idz'$, onde $dz' = dx' + idy'$. Podemos dizer que $-idz$ é o vetor de comprimento ds obtido pela rotação do vetor tangente dz' do ângulo de $-\frac{\pi}{2}$.

De fato,

$$\begin{aligned} -idz' &= -i(dx' + idy') = -idx' - i^2 dy' \\ &= dy' - idx', \end{aligned}$$

onde $Re(-idz') = dy'$ e $Im(-idz') = -dx'$. Como $q(x, y) = q_1(x', y') + iq_2(x', y')$, logo $q \cdot (-idz') = q_1(x', y') dy' + q_2(x', y')(-dx') = -q_2(x', y') dx' + q_1(x', y') dy'$.

Assim, podemos reescrever o integrando da função corrente como o produto do comprimento dos vetores q e $-idz'$ pelo cosseno do ângulo formado entre eles. Isto é,

$$\begin{aligned} q \cdot (-idz') &= |q| | - idz'| \cos \theta \\ &= \underbrace{| - idz'|}_{ds} \underbrace{|q| \cos \theta}_{q_n}, \end{aligned}$$

onde q_n é a componente da q normal a C_1 .

Logo, (A.16) pode ser escrita como

$$\psi(x, y) = \int_{C_1} q_n(x', y') ds. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, dizemos que a função corrente $\psi(x, y)$ representa a taxa de escoamento do fluido através de uma curva C_1 de (x_0, y_0) a (x, y) . De forma mais específica, ψ é a taxa de escoamento por volume através de um cilindro de altura-idade situado perpendicular ao plano xy sobre a curva C_1 .

Como ϕ e ψ são funções harmônicas, pelos Teoremas 4.47 e 4.49, ϕ e ψ se transformam em funções harmônicas de u e v e podem ser interpretadas como potencial de velocidade e função corrente para um escoamento na nova região. Uma linha de corrente $\psi(x, y) = c$ num plano é transformada em uma linha de corrente $\psi(u, v) = c$ no outro plano.

Sob hipóteses de um escoamento estacionário e irrotacional de um fluido com densidade uniforme ρ (lembrando que a densidade uniforme está diretamente ligada com o fato do fluido ser incompressível), estabelecemos o campo velocidade através do gradiente da função potencial de velocidade ϕ . Uma vez conhecido o campo velocidade podemos determinar o campo de pressão através da forma simplificada da Equação de Navier-Stokes⁴, veja [5, 9].

Analisando as influências de cada fator das hipóteses deste escoamento nesta equação conseguimos determinar o campo de pressão, isto é, a **pressão do fluido** $P(x, y)$, através do caso particular da *equação de Bernoulli*:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{|q|^2}{2} + V = C, \quad C \text{ constante}, \quad (\text{A.18})$$

onde V é a função potencial para qualquer campo de força assim como a gravidade que atua sobre o fluido independe de seu escoamento. Em muito casos, consideramos V uma constante, assim substituindo $M = C - V$, constante, segue de (A.18):

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} + \frac{|q|^2}{2} + V &= C \\ P &= \rho \left(\underbrace{C - V}_M - \frac{|q|^2}{2} \right) \\ P &= \rho M - \rho \frac{|q|^2}{2}. \end{aligned}$$

Como ρM é constante e $|q|^2 \geq 0$ podemos concluir que a pressão P é máxima onde o módulo da velocidade $|q|$ é mínimo, confirmando o Princípio de Bernoulli: *"Um aumento na velocidade de qualquer fluido é sempre acompanhado por uma diminuição de pressão"*.

Teoricamente, qualquer potencial complexo pode ser associado ou interpretado como um fluxo de fluido bidimensional específico. Analisando todos esses fatores, as condições das transformações e observando o aerofólio transformado, Figura 5.8, apresentaremos agora a solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação.

A.1.2 Fluxo com circulação

A função potencial do escoamento para um fluxo horizontal uniforme passado pela unidade da circunferência $|z| = 1$, com força de circulação Γ e velocidade limite $V_\infty =$

⁴Equação diferencial de conservação do momento válida para escoamento incompressível de um fluido newtoniano com propriedades constantes: $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 V$. Nesta notação, V representa o vetor velocidade que neste trabalho estamos denotando pelo vetor q .

s ($s > 0$), é dada por:

$$F(z) = sz + \frac{s}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log } z. \quad (\text{A.19})$$

Considerando $s = 1$ e substituindo $-\frac{\Gamma}{2\pi}$ por k , para simplificação dos cálculos, segue então a fórmula para a potencial do escoamento:

$$\begin{aligned} F(z) &= z + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log } z = z + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma i}{2\pi i^2} \text{Log } z \\ &= z + \frac{1}{z} - \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}}_k i \text{Log } z \\ &= z + \frac{1}{z} + ki \text{Log } z. \end{aligned}$$

Observe que se reescrevemos a fórmula da função potencial complexa considerando z em sua forma polar, isto é, $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ e $0 < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} + ki \text{Log}(re^{i\theta}) \\ &= re^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} + ki (\ln r + i\theta) \\ &= r(\cos \theta + i \text{sen } \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \text{sen } \theta) + ki \ln r + k\theta i^2 \\ &= r \cos \theta + ri \text{sen } \theta + \frac{1}{r} \cos \theta - i \frac{1}{r} \text{sen } \theta + ki \ln r - k\theta \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta + ki \ln r - k\theta \\ &= \left[\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta - k\theta\right] + i \left[\left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta + k \ln r\right]. \end{aligned}$$

Como $k = -\frac{\Gamma}{2\pi}$, logo

$$F(re^{i\theta}) = \left[\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta - \left(-\frac{\Gamma}{2\pi}\right) \theta\right] + i \left[\left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta + \left(-\frac{\Gamma}{2\pi}\right) \ln r\right] \quad (\text{A.20})$$

$$= \left[\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta\right] + i \left[\left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\right]. \quad (\text{A.21})$$

Vimos também pela definição A.12 que a função potencial complexa pode ser determinada através da função velocidade potencial (ϕ) e função corrente (ψ) dada por

$$F(z) = \phi(z) + i\psi(z). \quad (\text{A.22})$$

Assim, igualando as funções (A.21) e (A.22), conseguimos uma expressão para a função velocidade potencial e função corrente para a variável complexa z dado em sua forma polar. Isto é,

$$\phi(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{A.23})$$

e

$$\psi(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (\text{A.24})$$

Pela expressão encontrada acima para a função corrente, e recordando que uma linha de corrente (ou fluxo aerodinâmico) é quando tal função assume um valor constante ($\psi(r, \theta) = c$), c constante, observamos que para $r = 1$ temos

$$\begin{aligned}\psi(1, \theta) &= \left(1 - \frac{1}{1}\right) \operatorname{sen} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln 1 \\ &= 0 \cdot \operatorname{sen} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

para todo θ . Isto quer dizer que para $r = 1$, $\psi(1, \theta)$ é uma curva limite natural para o fluxo aerodinâmico. Ou seja, quando $c = 0$ a linha de corrente consiste no círculo unitário e no próprio eixo $-x$.

Agora, quando pensamos em uma expressão para a função velocidade ($q(z)$) vimos que tal função é a conjugada da derivada da função potencial, isto é, $q(z) = \overline{F'(z)}$. Como

$$\begin{aligned}F'(z) &= 1 - \frac{1}{z^2} + ki \frac{1}{z} \\ &= 1 - (z)^{-2} + ki(z)^{-1}.\end{aligned}$$

e

$$\overline{F'(z)} = 1 - (\bar{z})^{-2} - ki(\bar{z})^{-1}.$$

Logo, a função velocidade é dada por:

$$q(z) = 1 - (\bar{z})^{-2} - ki(\bar{z})^{-1}. \quad (\text{A.25})$$

Observação A.13. Igualando (A.25) a zero e multiplicando a igualdade por z^2 obtemos a seguinte função quadrática em z : $z^2 - kiz - 1 = 0$. Observa-se que as raízes desta equação $z = \frac{ki \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ são determinadas em função de k , mas como $k = -\frac{\Gamma}{2\pi}$, temos que as raízes da função velocidade são determinadas através da circulação Γ . Dependendo deste valor Γ podemos obter um, dois ou nenhum ponto sobre o círculo em que a velocidade se anula. Apesar de não termos abordado funções quadráticas de variáveis complexas neste trabalho, este é um argumento adicional importante de ser observado, pois veremos que este valor nos dá uma excelente concordância entre a teoria e a prática e para a sustentação. Caso o leitor queiria estudar sobre funções quadráticas em z , recomendamos as referências [22, 23].

A.2 Sustentação

Existem vários fatores que contribuem para a sustentação de um avião, dentre eles temos a densidade do ar, temperatura, peso do avião, as forças que atuam no avião, velocidade e ângulo de ataque.

Nosso intuito com este trabalho, não é mostrar todos os fatores que influenciam o funcionamento de uma aeronave, visto que é algo muito complexo e envolve vários outros conceitos de física, química e engenharia. Mas, mostrar como alguns fatores interferem na decolagem e no pouso de um avião bem como onde os números complexos se encaixam em tal teoria.

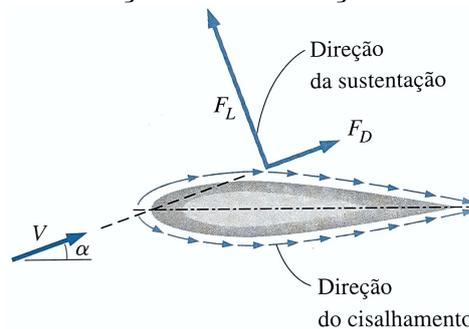
Vimos nas seções anteriores como que a teoria do escoamento potencial, o qual podemos chamar também de escoamento complexo, tem influência direta na aerodinâmica, por muitas vezes determinando o comportamento de um fluido em um escoamento ao redor de um cilindro, indicando características importantes a serem observadas, como por exemplo a corrente do fluido e a velocidade de um fluido. Através da derivada da função potencial, conseguimos determinar a velocidade de um fluido além de determinar o local ideal para os pontos de estagnação (pontos no contorno do aerofólio em que a velocidade do fluido é zero).

O quociente do módulo da componente tangencial da força e a área sobre a qual a força está aplicada é chamado de **Tensão de Cisalhamento**. Denotado por $\tau = \frac{F_t}{A}$, onde F_t é a componente tangencial da força aplicada em uma superfície e A é a área da superfície.

Cada escoamento envolve um certo atrito independente de quão pequeno seja. O escoamento ao redor de um cilindro apresenta padrões de escoamento complexo, e sua natureza afeta fortemente o coeficiente de arrasto total tornando significativo o arrasto de atrito e o arrasto de pressão.

As asas dos aviões são modeladas e posicionadas para gerarem maior sustentação com o mínimo de arrasto possível. Isto é, busca-se um desenho de um aerofólio cuja a contribuição dos efeitos viscosos para a sustentação seja praticamente desprezível. E isto se dá pelas características do corpo e pelo fato do cisalhamento na parede ser paralelo a superfície, ou seja, normal a direção de sustentação, veja a Figura A.3.

Figura A.3: Direção da sustentação e cisalhamento.



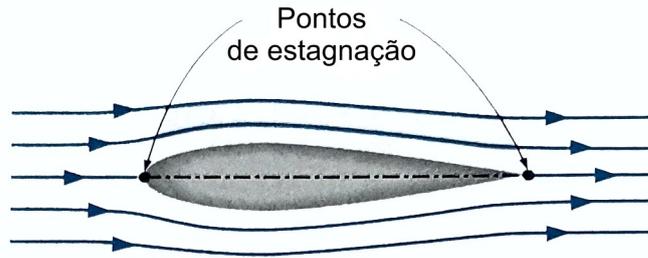
Fonte: Cimballa [5].

Assim, consideramos a sustentação como a distribuição de pressão na superfície do corpo.

Com o objetivo de manter o avião no ar, procurava-se então aerofólios cuja a pressão média na superfície superior seja mínima e ao mesmo tempo máxima na superfície inferior. A *equação de Bernoulli* pode ser um auxílio para encontrar tais regiões, pois como vimos Bernoulli conclui que *a pressão é baixa em localizações onde a velocidade de escoamento é alta e a pressão é alta em localizações onde a velocidade de escoamento é baixa*. Porém veremos que cometemos alguns equívocos ao explicar a sustentação do avião apenas pelo formato da asa. Isso de fato ocorre, ou seja, a velocidade do fluxo do ar acima é maior na parte superior da asa do que na parte inferior, mas isto é decorrente da baixa pressão e não a causa.

Como comentamos considerar somente a região ao redor é equivocado, pois para que um aerofólio gere sustentação é necessário que o ponto de estagnação traseiro esteja localizado no bordo de fuga. Mostramos este equívoco nas Figuras A.4 e A.5.

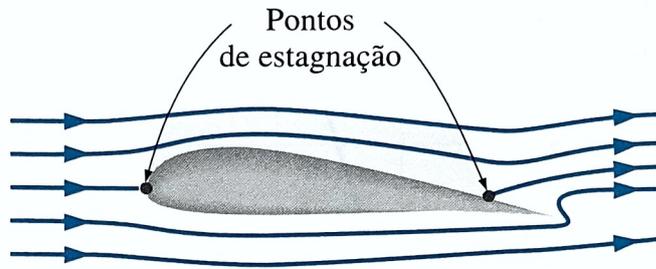
Figura A.4: Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio simétrico.



Fonte: Cimbala [5].

Apesar dos pontos de estagnação se encontrarem nos bordos de ataque e de fuga, observamos que o ângulo de ataque é nulo, logo a sustentação produzida por um aerofólio simétrico é nula. (A pressão nas duas regiões inferior e superior são iguais).

Figura A.5: Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio não simétrico.



Fonte: Cimbala [5].

No caso do aerofólio acima, também temos uma sustentação nula. Apesar do aerofólio não ser simétrico, o que por Bernoulli poderíamos pensar em uma sustentação, o ângulo de ataque é muito pequeno e moveu o ponto de estagnação para baixo do bordo de ataque e o ponto de estagnação traseiro para cima da superfície superior, próximo ao bordo de fuga.

Segundo Cimbala [5],

A fonte da inconsistência está no fato de que o ponto de estagnação de trás está na superfície superior em lugar de estar no bordo de fuga. Isso exige que o fluido do lado interior faça uma curva praticamente em U e escoe ao redor do bordo de fuga em direção ao ponto de estagnação permanecendo ao mesmo tempo ligado a superfície, o que é uma impossibilidade física, já que o fenômeno observado é a separação do escoamento em curvas fechadas. (CIMBALA, 2015, p. 635)

Resumindo, podemos dizer que não basta apenas ter um formato curvo na parte superior da asa e um formato mais plano na parte inferior e um ângulo de ataque pequeno tal que o ponto de estagnação traseiro não permaneça no bordo de fuga. É necessário ter um ângulo de ataque considerável para ocorrer tal “fenômeno”. Quando pensamos em um modelo de asa que gere sustentação, temos outro efeito que não podemos deixar de citar: o Efeito Coanda, descoberto pelo engenheiro Henri Coanda (1886 – 1972), veja

[4, 13], que contribuiu através de seus estudos para a compreensão da forma como as asas da aeronave produzem sustentação:

Efeito Coanda: Um fluxo de fluido em movimento em contato com uma superfície curva tenderá a seguir a curvatura da superfície, em vez de continuar viajando em linha reta.

O que acontece segundo este efeito é que quando um fluido se curva gera-se uma variação na pressão entre as regiões. Segundo Cimballa(2015, p.634) “a pressão muda na direção do escoamento ao longo da superfície, mas ela permanece constante através da camada limite em uma direção normal a superfície”.

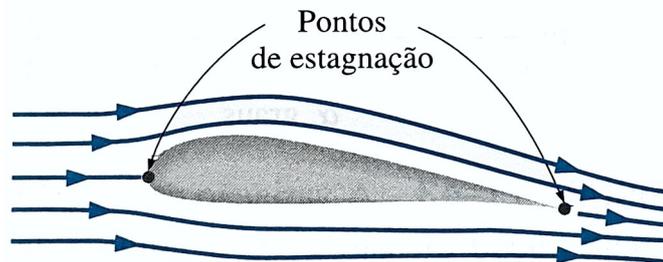
Podemos pensar em ignorar a camada limite no aerofólio e calcular apenas a distribuição de pressão ao seu redor a partir da teoria de escoamento potencial, cuja vorticidade é nula devido o escoamento ser irrotacional e as forças viscosas também serem nulas.

No caso da asa de um avião, o fluido de ar segue a curvatura da asa e a sustentação é gerada pelo ângulo de ataque, que como vimos é o ângulo entre a asa e o fluxo de ar. De forma mais detalhada [4],

O ângulo de ataque indica a inclinação da asa em relação ao ar que se aproxima. Para produzir sustentação ou uma força ascendente atuando na asa, a terceira lei de Newton diz que deve haver uma força igual atuando na direção oposta. Se pudermos exercer uma força no ar para que ele seja direcionado para baixo, o ar exercerá uma força para cima na asa. (DiscoverHover [4])

Analisando estes fatos, procuramos então um corpo com bordo de fuga afilado cujo o ponto de estagnação traseiro “se move para o bordo de fuga logo que o corpo tenha atingido uma velocidade estável e que estas condições se mantenham”(KLIEWER,2002, p.6), veja a Figura A.6. Logo, o valor da circulação deve ser fixado por esta condição que é conhecida como Condição de Kutta.

Figura A.6: Escoamento irrotacional ao redor de um aerofólio não simétrico com sustentação (Ponto de estagnação traseiro localizado no bordo de fuga).



Fonte: Cimballa [5].

Agora podemos compreender fisicamente o motivo de se fazer algumas alterações na posição do círculo para encontrar um aerofólio razoável. Como afirma KLIEWER(2002) [7],

Sabendo que se $d\zeta/dz$ (taxa de variação da variável complexa do aerofólio no plano ζ em relação a variável complexa do círculo no plano z) for igual a zero para um ponto do cilindro que será transformado em um ponto do aerofólio, a velocidade no plano transformado será infinita a não ser que a velocidade inicial seja zero. Torna-se então necessário fazer com que o ponto que será transformado no bordo de fuga seja um ponto de estagnação ($q = 0$). (...) os pontos do plano z situados no eixo x estarão no eixo ζ no plano ζ . Como o bordo de fuga do aerofólio estará situado no eixo ζ torna-se claro que para fazer com que o bordo de fuga corresponda a um ponto de estagnação no cilindro, este deverá ser movido para cima antes da transformação para que os pontos de estagnação, deslocados para baixo pela circulação, estejam sobre o eixo x . Sem este procedimento, o ponto de estagnação traseiro não se transformará no bordo de fuga do aerofólio. Outra condição para o círculo que será transformado é de que o seu centro esteja à esquerda da origem (esta condição controla a espessura) para que se obtenha um aerofólio razoável. (KLIEWER, 2002, p.12-13)^a

^aNeste trabalho consideramos ζ como w ; plano z corresponde ao $z - plano$; plano ζ corresponde ao $w - plano$ e eixo ζ ao eixo u .

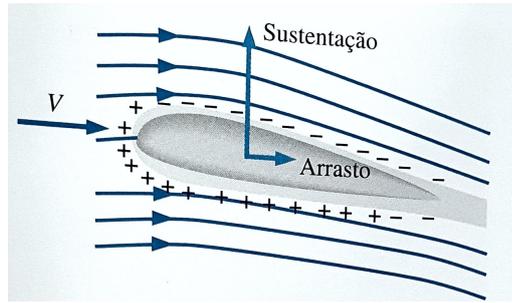
Assim, conciliamos a teoria do escoamento potencial com o fenômeno do deslocamento do ponto de estagnação traseiro até o bordo de fuga. Isto é, o escoamento inicia primeiramente sem sustentação, mas ao atingir uma certa velocidade temos que a corrente do fluido inferior separa-se do bordo de fuga o que força a corrente separada de fluido superior fechar no bordo de fuga, iniciando uma circulação (Γ) no sentido horário ao redor do aerofólio. Logo, a sustentação é gerada pela circulação no sentido horário fazendo com que a velocidade da corrente superior seja aumentada e a corrente inferior diminuída devido a diferença de pressão entre as regiões. Como afirma Weltner [13],

Ao entrar em uma região de menor pressão o ar é acelerado paralelamente ao deslocamento, ganhando maior velocidade. Vale Bernoulli. Mas desta vez é claro que a pressão menor é a causa da velocidade maior. Então a Lei de Bernoulli é válida mas a interpretação correta é diferente na usada nos livros-textos. As diferenças de pressão são causadas pelo desvio do escoamento. (WELTNER, 2001, p.436)

Com isso, observamos que para gerar a sustentação precisamos alinhar alguns fatores, dentre eles: o valor da circulação, o escoamento, a geometria e a configuração do aerofólio, os quais são observados através do estudo e análise de funções complexas. E tudo isto é destacado por Cimbala [5], que diz:

Quando a teoria do escoamento potencial é modificada pela adição de uma quantidade apropriada de circulação para mover o ponto de estagnação para o bordo de fuga, obtém-se uma excelente concordância entre a teoria e a experimentação para o campo de escoamento e para a sustentação. (CIMBALA, 2015, p. 635)

Figura A.7: Corpo com bordo de fuga afilado e distribuição de pressão representada pelos sinais de mais e menos.



Fonte: Cimballa [5].

Diante deste estudo e analisando como a teoria influencia na prática, conseguimos compreender o porquê o avião é considerado um dos transportes mais seguros do mundo. O avião é projetado para ser seguro e eficiente, um dos fatores que nos dá esta segurança é a sustentação de acordo com o formato de sua asa, onde busca-se uma geometria que possa ter o menor arrasto possível e uma maior sustentação como vemos na Figura A.7.