



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

MARCELO BRUNO GOMES PEDROZA

**UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS UTILIZANDO
PROBLEMAS DO COTIDIANO**

JUAZEIRO DO NORTE

2020

MARCELO BRUNO GOMES PEDROZA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS UTILIZANDO PROBLEMAS
DO COTIDIANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Erica Boizan Batista

JUAZEIRO DO NORTE

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

- P417i Pedroza, Marcelo Bruno Gomes.
Uma introdução à teoria dos grafos utilizando problemas do cotidiano/Marcelo Bruno Gomes Pedroza. – 2020.
102 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
(Inclui bibliografia p.85-87).
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2020.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
- Orientação: Prof^ª. Dra. Erica Boizan Batista.
1. Teoria de Grafos. 2. Problemas Clássicos. 3. Algoritmos em Grafos. 4. Problemas do Cotidiano. 5. Educação Básica. 6. Sequências Didáticas. I. Título.

CDD 511.2076

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MARCELO BRUNO GOMES PEDROZA

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS UTILIZANDO PROBLEMAS
DO COTIDIANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 16 de julho de 2020.

BANCA EXAMINADORA



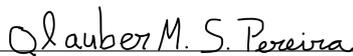
Prof.^a Dra. Erica Boizan Batista
CCT/UFCA



Prof. Dr. Vicente Helano Feitosa Batista Sobrinho
CCT/UFCA



Prof.^a Ph.D. Ingrid Sofia Meza Sarmiento



Prof. Dr. Glauber Marcio Silveira Pereira

Dedicatória

A todos os que ficam felizes com nossa felicidade.

*Aquele que trabalha duro pode
superar um gênio, mas, de nada
adianta trabalhar duro se você
não confia em você mesmo...*
Rock Lee (Naruto Shippuden)

Agradecimentos

A Universidade Federal do Cariri *campus* Juazeiro do Norte, todos os servidores e alunos que constroem a instituição.

Aos meus pais, Antonia e José, e a meus irmãos pelo incentivo e apoio incondicional. Que nos momentos dedicados ao estudo sempre me fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

Agradeço a todos os professores, por me proporcionar o conhecimento não apenas científico, mas, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra professor nunca fará justiça aos docentes dedicados com os quais, sem nomear, terão os meus eternos agradecimentos.

Meus agradecimentos aos meus amigos, companheiros e irmãos na amizade, que fizeram parte da minha formação e que, com certeza, vão continuar presentes em minha vida.

Aos meus amigos professores e servidores do IFPB *campus* Catolé do Rocha e meus ex-alunos dessa instituição, que sempre me apoiaram e foram minha segunda família durante esse período.

A minha orientadora, a professora Erica, por toda dedicação, paciência, pelas correções, incentivos e por não ter desistido de mim no momento que fraquejei.

Ao meu co-orientador, o professor Vicente Helano, por toda dedicação e correções desse trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos introdutórios sobre a Teoria dos Grafos, enfatizando os problemas clássicos e os algoritmos desenvolvidos a partir deles. Ademais, procuramos disponibilizar ao professor do Ensino Básico um material, envolvendo a Teoria dos Grafos, que proporcione ao aluno do Ensino Médio maior interesse pela Matemática. Livros, artigos e dissertações serviram de embasamento teórico para oferecer ao leitor, especialmente ao professor de Matemática do Ensino Básico, um material que permita uma aproximação com este tema. Para isso, propomos sequências didáticas desenvolvidas a partir da abordagem da resolução de problemas, de forma que em cada uma delas são apresentadas situações problema desafiadoras, envolvendo atividades presentes no cotidiano dos alunos e buscando despertar o interesse dos discentes. Com essas atividades, acreditamos que a inclusão da Teoria dos Grafos põem-se como mais uma alternativa de conteúdo a ser trabalhado com os alunos da Educação Básica, e sem grandes obstáculos, pois atende às expectativas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de aplicabilidade do conhecimento adquirido na resolução de situações problema encontradas no cotidiano, além de ser uma porta de entrada para a apresentação de novos conteúdos.

Palavras-chave: Teoria de Grafos. Problemas Clássicos. Algoritmos em Grafos. Problemas do Cotidiano. Educação Básica. Sequências Didáticas.

ABSTRACT

In this work, we present some introductory concepts about Graph Theory, emphasizing the classic problems and the algorithms developed from them. In addition, we try to make available to the Basic Education teacher a material, involving the Theory of Graphs, which gives the high school student a greater interest in Mathematics. Books, articles and dissertations served as a theoretical basis to offer the reader, especially the Basic Education Mathematics teacher, a material that allows an approximation with this theme. For this, we propose didactic sequences developed from the problem solving approach, so that in each of them challenging problem situations are presented, involving activities present in the students' daily lives and seeking to arouse the interest of the students. With these activities, we believe that the inclusion of the Theory of Graphs presents itself as another alternative of content to be worked with students of Basic Education, and without great obstacles, since it meets the expectations of the National Curriculum Parameters for High School (PCNEM) and the National Common Curricular Base (BNCC) for the applicability of the knowledge acquired in the resolution of problem situations encountered in daily life, in addition to being a gateway to the presentation of new content.

Keywords: Graph Theory. Classic Problems. Graph Algorithms. Everyday Problems. Basic Education. Didactic Sequences.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xvi
1 Introdução	1
2 Elementos da teoria dos grafos	3
2.1 Noções sobre grafos	4
2.2 Representação de grafos	10
2.3 Tipos de grafos	12
2.4 Árvores	18
2.5 Grafos eulerianos	20
2.6 Grafos hamiltonianos	23
3 Problemas clássicos e Algoritmos	25
3.1 Problemas clássicos	25
3.1.1 Problema das Pontes de Königsberg	25
3.1.2 Problema das Quatro Cores	26
3.1.3 Problema do Caixeiro Viajante	28
3.1.4 Problema do Carteiro Chinês	30
3.2 Algoritmos	31
3.2.1 Algoritmo dos Mínimos Sucessivos	31
3.2.2 Algoritmo de Kruskal	35
3.2.3 Algoritmo de Fleury	39
4 Atividades propostas	47
4.1 Atividade 1: O assassinato de Júlia Osesana	49
4.2 Atividade 2: Instalação de lojas na região do Cariri	52
4.3 Atividade 3: O representante comercial	55
4.4 Atividade 4: Desafio do Dominó	61
4.5 Atividade 5: O problema da coleta de lixo	64
4.6 Atividade 6: O turista	75

5	Considerações finais	84
	Referências	85

Lista de Figuras

2.1	Cidade de Königsberg	3
2.2	Representação gráfica de um grafo	5
2.3	Vértices adjacentes	5
2.4	Arestas adjacentes	6
2.5	Laços	6
2.6	Vértice incidente	7
2.7	Arestas incidentes	7
2.8	Arestas paralelas	8
2.9	Vértice isolado	8
2.10	Passeio entre vértices	9
2.11	Caminho em um grafo	9
2.12	Ciclo em um grafo	10
2.13	Exemplo de grafo trivial	12
2.14	Exemplo de grafo simples	12
2.15	Exemplo de grafo completo	13
2.16	Exemplo de grafo regular	13
2.17	Exemplo de grafo	14
2.18	Subgrafo do grafo da Figura 2.17	14
2.19	Exemplo de grafo bipartido	15
2.20	Exemplo de grafo conexo	15
2.21	Exemplo de grafo desconexo	16
2.22	Exemplo de grafo direcionado	16
2.23	Exemplo de grafo não direcionado	17
2.24	Exemplo de grafo rotulado	17
2.25	Exemplo de grafo valorado	18
2.26	Representação de uma árvore	18
2.27	Representação de grafo	19
2.28	Árvore geradora do grafo da Figura 2.27	19
2.29	Exemplo de um grafo com pesos nas arestas	20
2.30	Árvore geradora mínima do grafo da Figura 2.29	20

2.31	Grafo euleriano	21
2.32	Grafo hamiltoniano	24
3.1	Grafo da cidade de Königsberg	25
3.2	Mapa do Brasil colorido com quatro cores	27
3.3	Around the World	29
3.4	Representação em grafo associado ao jogo Around the World	29
3.5	Exemplo de solução para o Around the World	30
3.6	Grafo para aplicação do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	32
3.7	Primeira iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	32
3.8	Segunda iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	33
3.9	Terceira iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	34
3.10	Quarta iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	34
3.11	Quinta iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos	35
3.12	Grafo para aplicação do algoritmo de Kruskal	36
3.13	Primeira iteração do algoritmo de Kruskal	36
3.14	Segunda iteração do algoritmo de Kruskal	37
3.15	Terceira iteração do algoritmo de Kruskal	37
3.16	Quarta iteração do algoritmo de Kruskal	38
3.17	Quinta iteração do algoritmo de Kruskal	38
3.18	Árvore geradora mínima do grafo da Figura 3.12	39
3.19	Grafo para aplicação do algoritmo de Fleury	40
3.20	Primeira iteração do algoritmo de Fleury	41
3.21	Segunda iteração do algoritmo de Fleury	41
3.22	Terceira iteração do algoritmo de Fleury	42
3.23	Quarta iteração do algoritmo de Fleury	43
3.24	Quinta iteração do algoritmo de Fleury	44
3.25	Sexta iteração do algoritmo de Fleury	45
3.26	Sétima iteração do algoritmo de Fleury	46
4.1	Planta da casa	50
4.2	Grafo associado à planta da casa de Júlia Ocesana	51
4.3	Mapa da região do Cariri cearense	52
4.4	Grafo do mapa da região do Cariri cearense	53
4.5	Instalação das lojas com quatro produtos	54
4.6	Instalação das lojas com três produtos	54
4.7	Grafo com as distâncias entre as cidades da região do Cariri cearense	56
4.8	Ilustração das peças de um dominó.	62
4.9	Dominó representadas em um grafo	63
4.10	Dominó faltando a peça 1 – 2 representadas em um grafo	63

4.11	Ilustração das ruas	64
4.12	Grafo representando as ruas da Figura 4.11	65
4.13	Primeira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	66
4.14	Segunda iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	67
4.15	Terceira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	67
4.16	Quarta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	68
4.17	Quinta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	69
4.18	Sexta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	70
4.19	Sétima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	71
4.20	Oitava iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	72
4.21	Nona iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	73
4.22	Décima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	74
4.23	Trajeto do caminhão da coleta de lixo	75
4.24	Mapa da região Nordeste	76
4.25	Grafo das distâncias entres as capitais da região Nordeste	77
4.26	Primeira iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	78
4.27	Segunda iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	78
4.28	Terceira iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	79
4.29	Quarta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	79
4.30	Quinta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	80
4.31	Sexta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	80
4.32	Sétima iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	81
4.33	Oitava iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25	82

4.34	Árvore geradora mínima do grafo da Figura 4.25	82
------	----------------------------------------------------------	----

Lista de Tabelas

2.1	Relacionamento entre os vértices da Figura 2.10	11
2.2	Relacionamento entre os vértices e arestas da Figura 2.10	11
3.1	Primeira iteração do algoritmo de Fleury	40
3.2	Segunda iteração do algoritmo de Fleury	41
3.3	Terceira iteração do algoritmo de Fleury	42
3.4	Quarta iteração do algoritmo de Fleury	42
3.5	Quinta iteração do algoritmo de Fleury	43
3.6	Sexta iteração do algoritmo de Fleury	44
3.7	Sétima iteração do algoritmo de Fleury	45
3.8	Percurso do algoritmo de Fleury no grafo da Figura 3.19	46
4.1	Distâncias entre as cidades	55
4.2	Circuito com início em Nova Olinda	57
4.3	Circuito com início em Santana do Cariri	57
4.4	Circuito com início em Crato	58
4.5	Circuito com início em Barbalha	58
4.6	Circuito com início em Jardim	59
4.7	Circuito com início em Missão Velha	59
4.8	Circuito com início em Juazeiro do Norte	60
4.9	Circuito com início em Caririáçu	60
4.10	Circuito com início em Farias Brito	61
4.11	Primeira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	66
4.12	Segunda iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	66
4.13	Terceira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	67
4.14	Quarta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	68

4.15	Quinta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	68
4.16	Sexta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	69
4.17	Sétima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	70
4.18	Oitava iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	71
4.19	Nona iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	72
4.20	Décima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12	73
4.21	Percurso do algoritmo de Fleury no Grafo da Figura 4.12	74
4.22	Distâncias aéreas entre as capitais do Nordeste	77

Capítulo 1

Introdução

A chegada de uma sociedade cada vez mais tecnológica nos faz refletir sobre os caminhos da Educação Básica. A escola, principal agente transformador de uma sociedade, em concordância com o art. 1º §2º da LDB (LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996) que ressalta que “a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social” (BRASIL, 1996), precisa incluir em seus currículos (ou, pelo menos, em suas aulas) temas que abordem o cotidiano dos alunos de uma forma mais crítica e reflexiva. As exigências do mundo do trabalho estão cada vez mais relacionadas a decidir, escolher o melhor e menor caminho, minimizar gastos, enfim, otimizar tudo. Para atender a essa demanda, a Matemática deve também oferecer sua contribuição no sentido de desenvolver nos alunos novas competências e habilidades.

Percebemos essa necessidade, pois atualmente é frequente nas falas dos professores de Matemática do Ensino Básico o desinteresse dos alunos pela disciplina. Em contrapartida, durante as aulas, ouvimos dos alunos perguntas como: “Para que serve isso?”, “Onde irei usar esse conteúdo em minha vida?”. Esse comportamento dos alunos pode estar relacionado ao fato de pensarem em trabalho desassociado da matemática pois não a relacionam com o seu dia a dia ou ainda com seus planos para o futuro.

Desse modo, é preciso pensar em um ensino que evidencie os alunos a relação da Matemática com suas vidas. Para tanto, a formação escolar do indivíduo deve ser pautada na construção do pensamento, na formalização de ideias, na criação e intervenção de inúmeras situações problema, no desenvolvimento humano, cultural, social, pessoal, lúdico e profissional, visando atender às necessidades dessa nova sociedade, que exige senso crítico, criatividade e raciocínio lógico apurados.

A relevância de abordar essas questões, antes mencionadas, no ensino da Matemática, é estabelecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCNEM) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que apontam que essas atividades descritas anteriormente desenvolvem no aluno o espírito argumentativo,

o senso crítico e a interpretação. Sendo assim, o docente precisa ser capaz de relacionar o conteúdo com o cotidiano dos alunos, por meio de situações problemas que envolvam a Matemática.

Diante disso, visando atender a algumas dessas necessidades atuais do ensino da Matemática no Ensino Básico, propomos introduzir, nesse nível de ensino, atividades de matemática ligadas à Teoria dos Grafos. A escolha do tema se deve ao fato de que esse conteúdo possibilita a apresentação de problemas atuais envolvendo matemática discreta que são desafiadores, interessantes, e motivam discussões interdisciplinares, além de permitir uma abordagem computacional. Muitos desses problemas oportunizam o aluno a criar, tomar decisões, investigar, enfrentar situações novas e aperfeiçoar conhecimentos, atendendo ao que é proposto nos PCNEM e BNCC. Apesar disso, a Teoria dos Grafos tem sido pouco estudada nos cursos de Licenciatura em Matemática e no Ensino Básico das escolas brasileiras, o que torna ainda mais relevante o que propomos a realizar.

Neste trabalho, analisamos livros, artigos e dissertações, buscando oferecer ao leitor, especialmente ao professor de Matemática do Ensino Básico, um material que permita uma aproximação com a Teoria de Grafos. Nosso objetivo é apresentar alguns conceitos introdutórios sobre a Teoria dos Grafos, abordando problemas clássicos e algoritmos desenvolvidos a partir deles. Desse modo, procuramos disponibilizar ao professor do Ensino Básico um material, envolvendo a Teoria dos Grafos, e que proporcione ao aluno do Ensino Médio maior interesse pela Matemática, buscando formar cidadãos aptos a atender as novas exigências do mundo atual.

Para alcançar o objetivo proposto, o trabalho está dividido da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos um breve histórico da Teoria dos Grafos e os principais conceitos sobre esta teoria. No Capítulo 3, destacamos os problemas clássicos da Teoria dos Grafos e três algoritmos usados para resolução de problemas ligados a eles. No Capítulo 4, apresentamos seis sequências didáticas destinadas ao professor do ensino médio, que trazem uma abordagem da Teoria de Grafos para a sala de aula.

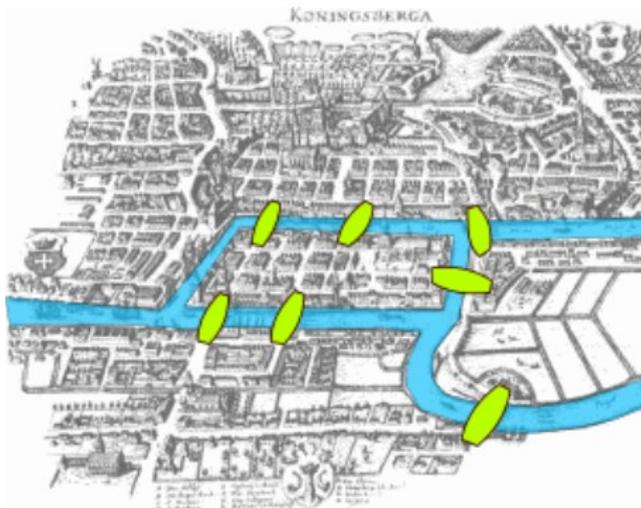
Capítulo 2

Elementos da teoria dos grafos

No século XIII, um enigma agitou a pequena Königsberg. Tratava-se do problema das sete pontes.

Königsberg era cidade da antiga Prússia, atual Kaliningrado (Rússia). Ela era cortada pelo Rio Pregel. Ele dividia a cidade e formava duas grandes ilhas que, juntas, formavam um complexo unido por sete pontes. Seis delas interligavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma fazia a ligação entre as duas ilhas, conforme exposto na Figura 2.1.

Figura 2.1: Cidade de Königsberg



Fonte: Universo Racionalista. ¹

No problema, discutia-se a possibilidade de atravessar todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto de partida. Em 1736, Leonhard Euler apresentou uma solução para o problema. Euler propôs transformar as partes de terra da cidade em pontos e as pontes que os unia em retas, criando assim, o primeiro grafo da história.

¹Disponível em: <https://www.universoracionalista.org/wp-content/uploads/2016/03/until ed-infographic_block_1.jpg>. Acesso em: 18 abr. 2020.

A Teoria dos Grafos ficou esquecida por um longo período. Conforme Lima (2014), em 1847, Gustav Robert Kirchhoff (1824 à 1887) ao estudar circuitos elétricos utilizou modelos de grafos, criando a chamada teoria das árvores. Anos mais tarde Arthur Cayley (1821 à 1895) utilizou a ideia de árvores para aplicações como a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

Ainda segundo Lima (2014), houveram muitas contribuições vindas apenas da abstração e curiosidade. Há exemplo, em 1852 Francis Guthrie (1831 à 1899), afirmou que qualquer mapa poderia ser colorido usando no máximo de quatro cores diferentes de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas. Tal conjectura é conhecida atualmente como Problema das Quatro Cores. Outro exemplo foi o jogo Icosian Game, criado em 1859 por William Rowan Hamilton (1805 à 1865), que tinha por objetivo encontrar um circuito envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular de forma que cada um deles fosse visitado apenas uma vez. Esse problema teve aplicações em otimização organizacional.

De acordo com Boaventura Netto (2003), a partir de 1970 a Teoria dos Grafos teve um grande salto com o desenvolvimento acelerado dos computadores. Foi então que surgiram publicações referentes a algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades para utilização aplicada da Teoria dos Grafos.

Ainda conforme Boaventura Netto (2003), no Brasil a Teoria dos Grafos chegou no ano de 1968 com a apresentação de trabalhos sobre este assunto no *I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Desde então, universidades como UFRJ, UFF, USP, UNESP e UNICAMP, começaram a realizar trabalhos de pesquisa sobre Teoria dos Grafos.

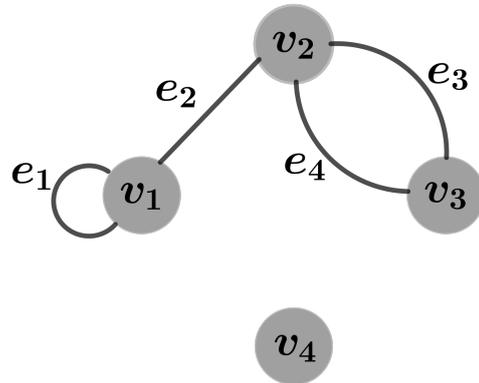
Nas próximas seções, apresentamos definições e exemplos referentes a Teoria dos Grafos, baseando-nos nos estudos de Boaventura Netto (2003), Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011), Diestel (2000), Bondy e Murty (1982), West (2001), Brito (2015), Boaventura e Uribe (2016), Pereira e Câmara (2008), Prestes (2012) e Santos (2016).

2.1 Noções sobre grafos

Definição 1 (Grafo). *Grafo é uma estrutura matemática composta de vértices (ou nós) e arestas (ou traços) representados por $G(V, A)$, onde V é o conjunto não vazio de vértices e A o conjunto de arestas que são pares não ordenados de V .*

Graficamente, um grafo pode ser representado por uma figura com pontos correspondendo aos nós unidos por traços associados as arestas. Um exemplo dessa representação pode ser visto na Figura 2.2.

Figura 2.2: Representação gráfica de um grafo



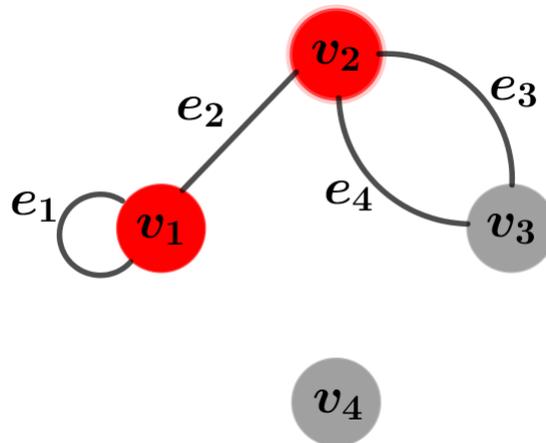
Fonte: O autor.

Na Figura 2.2, temos que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Definição 2 (Vértices adjacentes). *Dados dois vértices de um grafo, dizemos que eles são adjacentes (ou vizinhos) se existir uma aresta comum entre eles.*

Na Figura 2.3, tem-se que v_1 e v_2 são exemplos de vértices adjacentes uma vez que existe uma aresta, e_2 , comum entre eles.

Figura 2.3: Vértices adjacentes

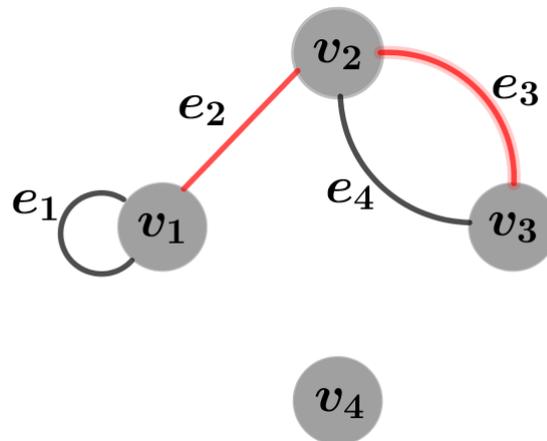


Fonte: O autor.

Definição 3 (Arestas adjacentes). *Dadas duas arestas de um grafo, dizemos que elas são adjacentes se tiverem ao menos um vértice em comum.*

Na Figura 2.4, temos que as arestas e_2 e e_3 são exemplos de arestas adjacentes, uma vez que elas tem o vértice v_2 em comum.

Figura 2.4: Arestas adjacentes

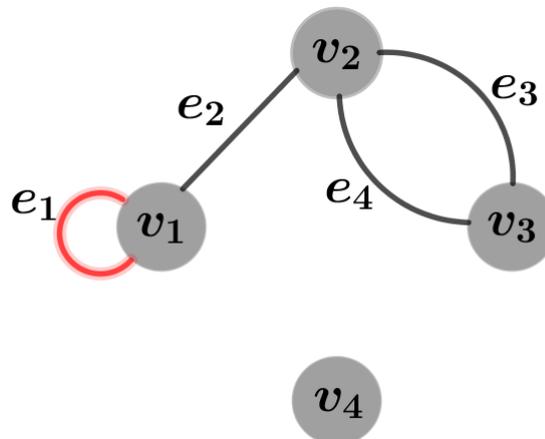


Fonte: O autor.

Definição 4 (Laços). *Um laço é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.*

Na Figura 2.5, a aresta e_1 é um exemplo de laço.

Figura 2.5: Laços

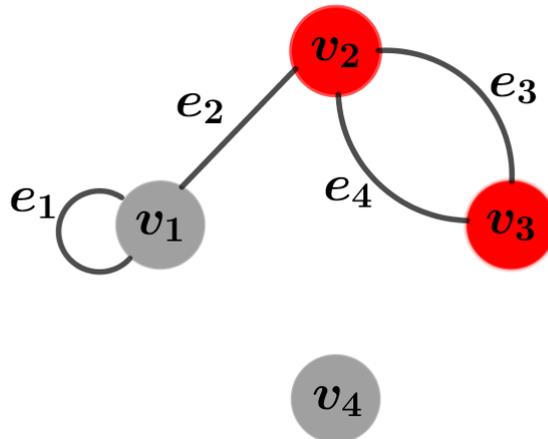


Fonte: O autor.

Definição 5 (Vértices incidentes). *Dados dois vértices de um grafo, dizemos que eles são incidentes em uma aresta se eles são extremos dela.*

Note que, na Figura 2.6, v_2 e v_3 são vértices incidentes da aresta e_3 (ou e_4).

Figura 2.6: Vértice incidente

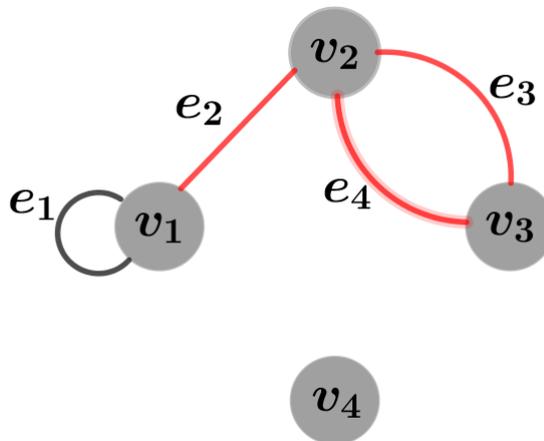


Fonte: O autor.

Definição 6 (Arestas incidentes). *Arestas incidentes são arestas que partem de um vértice.*

Na Figura 2.7, temos que e_2 , e_3 e e_4 são exemplos de arestas incidentes ao vértice v_2 .

Figura 2.7: Arestas incidentes

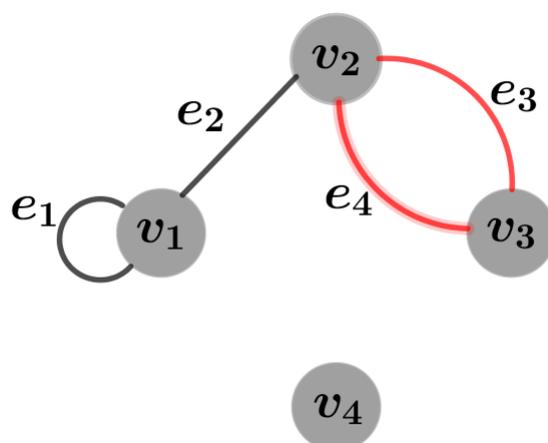


Fonte: O autor.

Definição 7 (Arestas paralelas). *Quando dois vértices de um grafo G têm mais de uma aresta ligando-os, dizemos que essas arestas são paralelas.*

Na Figura 2.8, temos que e_3 e e_4 são exemplos de arestas paralelas.

Figura 2.8: Arestas paralelas



Fonte: O autor.

Definição 8 (Grau de um vértice). *O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nesse vértice.*

Observação 1. *Usaremos a notação $g(v)$ para indicar o grau do vértice v .*

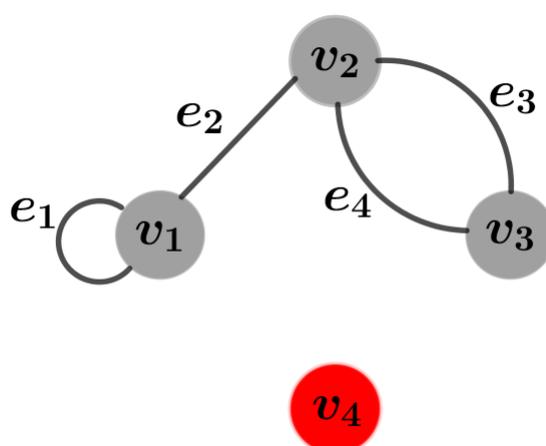
Observação 2. *Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice.*

Na Figura 2.8, temos que: $g(v_1) = 3$, $g(v_2) = 3$, $g(v_3) = 2$ e $g(v_4) = 0$.

Definição 9 (Vértices isolados). *Vértice isolado é todo vértice de grau zero.*

Na Figura 2.9, o vértice v_4 é um exemplo de vértice isolado.

Figura 2.9: Vértice isolado



Fonte: O autor.

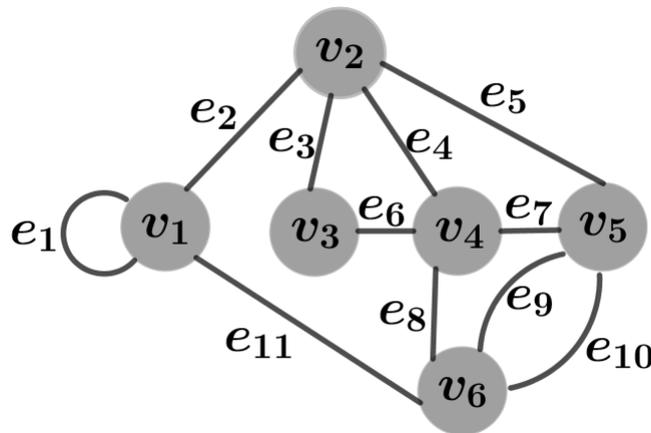
Definição 10 (Grau de um grafo). *O grau de um grafo $G(V, A)$, é o máximo entre os graus de seus vértices, ou seja, $g(G) = \max\{g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_k)\}$.*

Observe que o grau do grafo representado na Figura 2.2, é 3.

Definição 11 (Passeio entre vértices). *Um passeio entre os vértices v_i e v_j de um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas com início em v_i e fim em v_j .*

Vale ressaltar que tanto as arestas quanto os vértices podem ou não ser distintos. Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio é chamado de passeio fechado. Na Figura 2.10, temos que $\{v_1, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_4, e_6, v_3, e_3, v_2, e_5, v_5, e_7, v_4, e_8, v_6, e_9, v_5, e_{10}, v_6, e_{11}, v_1\}$ é um exemplo de passeio entre os vértices v_1 e v_6 .

Figura 2.10: Passeio entre vértices

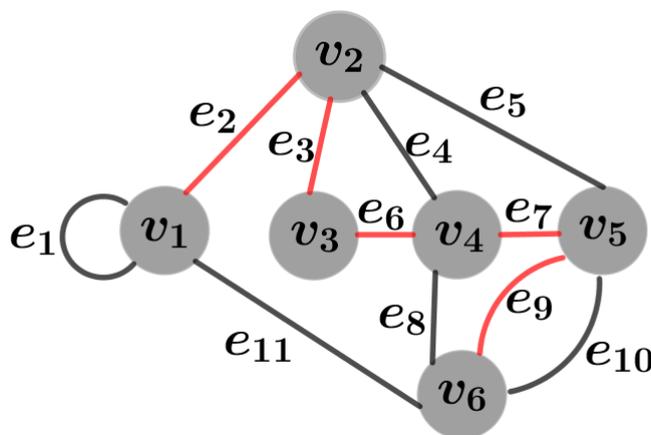


Fonte: O autor.

Definição 12 (Caminhos). *Um caminho é uma seqência em que tanto as arestas quanto os vértices são distintos.*

Na Figura 2.11, temos que $\{v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_9, v_6\}$ é um exemplo de caminho entre os vértices v_1 e v_6 .

Figura 2.11: Caminho em um grafo

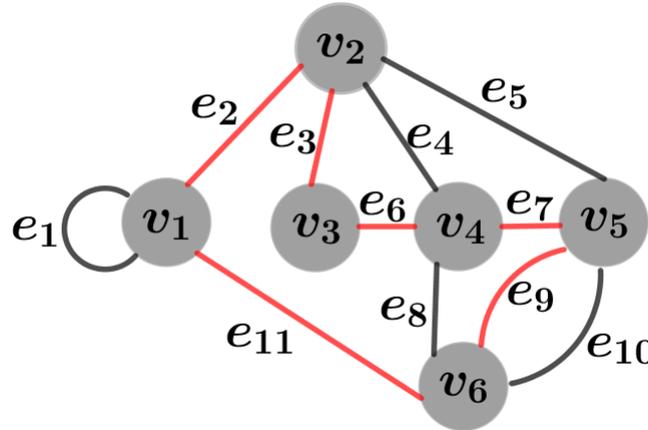


Fonte: O autor.

Definição 13 (Ciclos ou circuitos). *Ciclo é um caminho em que o vértice de origem e o de destino são o mesmo.*

Na Figura 2.12, temos que $\{v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5, e_9, v_6, e_{11}, v_1\}$ é um exemplo de ciclo.

Figura 2.12: Ciclo em um grafo



Fonte: O autor.

2.2 Representação de grafos

Seja $G(V, A)$ um grafo com n vértices e m arestas. Duas representações clássicas são: Matriz de adjacência e matriz de incidência.

Definição 14 (Matriz de adjacência). *A matriz de adjacência é uma matriz simétrica de ordem n , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, que acumula o relacionamento entre os vértices do grafo. Cada entrada a_{ij} é igual a:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } v_i \text{ não é adjacente a } v_j; \\ p, & \text{onde } p \text{ é a quantidade de arestas incidentes tanto em } v_i \text{ quanto em } v_j \\ & \text{(com } i \neq j); \\ q, & \text{onde } q \text{ é a quantidade de laços incidentes em } v_i = v_j. \end{cases}$$

Vamos contruir uma tabela que representa o relacionamento entre os vértices da Figura 2.10.

Portanto, a matriz de adjacência do grafo da Figura 2.10 é:

Tabela 2.1: Relacionamento entre os vértices da Figura 2.10

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1	1	0	0	0	1
v_2	1	0	1	1	1	0
v_3	0	1	0	1	0	0
v_4	0	1	1	0	1	1
v_5	0	1	0	1	0	2
v_6	1	0	0	1	2	0

Fonte: O autor.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

Definição 15 (Matriz de incidência). *A matriz de incidência, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, é aquela, na qual as linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. Cada entrada b_{ij} relaciona o vértice v_i à aresta e_j assumindo os seguintes valores:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_j \text{ não é incidente em } v_i; \\ 1, & \text{se } e_j \text{ é ou não um laço; e } v_i \text{ é uma das suas extremidades.} \end{cases}$$

A Tabela 2.2 representa o relacionamento entre os vértices e as arestas do grafo da Figura 2.10.

Tabela 2.2: Relacionamento entre os vértices e arestas da Figura 2.10

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Fonte: O autor.

Portanto, a matriz de incidência do grafo da Figura 2.10 é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 11}$$

2.3 Tipos de grafos

Definição 16 (Grafo trivial). *É um grafo com um único vértice e não tem arestas.*

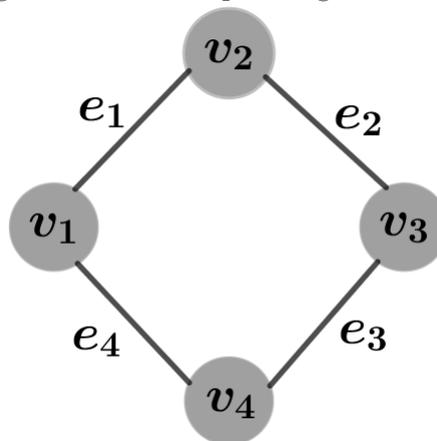
Figura 2.13: Exemplo de grafo trivial



Fonte: O autor.

Definição 17 (Grafo simples). *Um grafo é dito simples se ele não possui laços e nem arestas paralelas.*

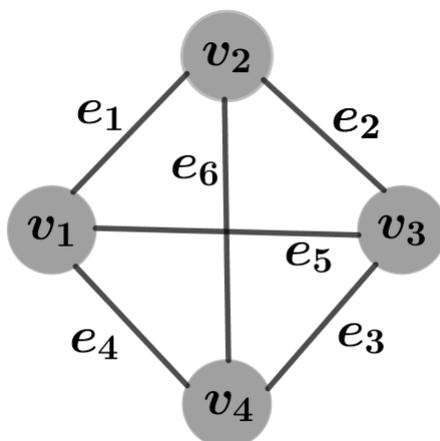
Figura 2.14: Exemplo de grafo simples



Fonte: O autor.

Definição 18 (Grafo completo). *Um grafo é completo se ele for um grafo simples onde todos os vértices conectam-se uns aos outros.*

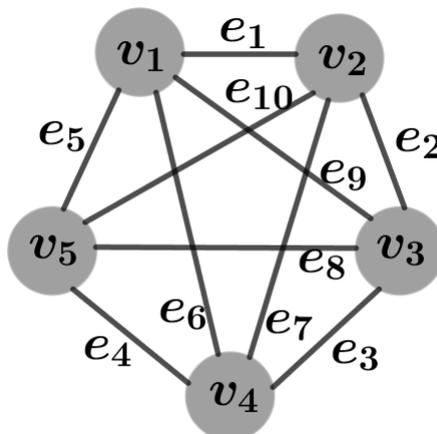
Figura 2.15: Exemplo de grafo completo



Fonte: O autor.

Definição 19 (Grafo regular). *Um grafo é regular quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau.*

Figura 2.16: Exemplo de grafo regular

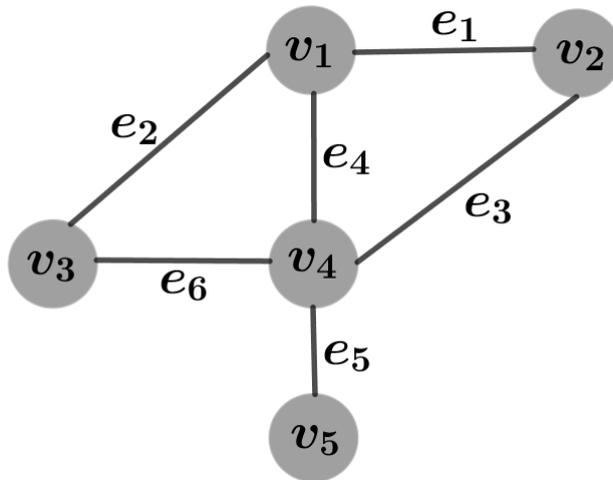


Fonte: O autor.

Definição 20 (Subgrafo). *Subgrafo é um grafo construído de tal forma que seus vértices e suas arestas estão contidos em outro grafo.*

Considere o grafo da Figura 2.17.

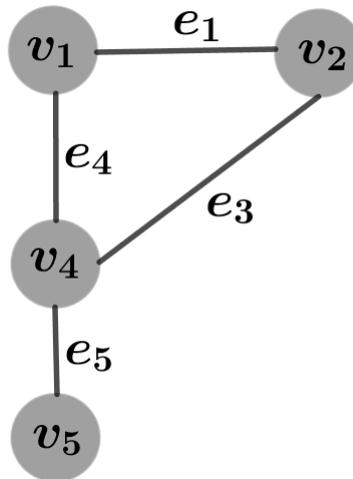
Figura 2.17: Exemplo de grafo



Fonte: O autor.

Note que o grafo da Figura 2.18 é um subgrafo do grafo apresentado na Figura 2.17.

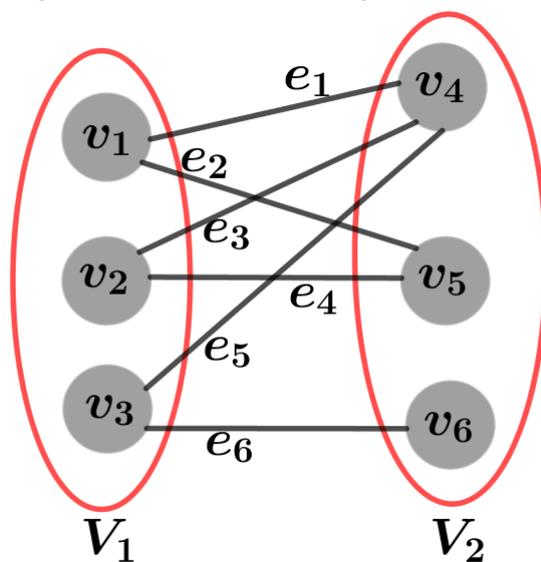
Figura 2.18: Subgrafo do grafo da Figura 2.17



Fonte: O autor.

Definição 21 (Grafo bipartido). *Um grafo é dito bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de $G(V, A)$ une um vértice de V_1 a outro de V_2 .*

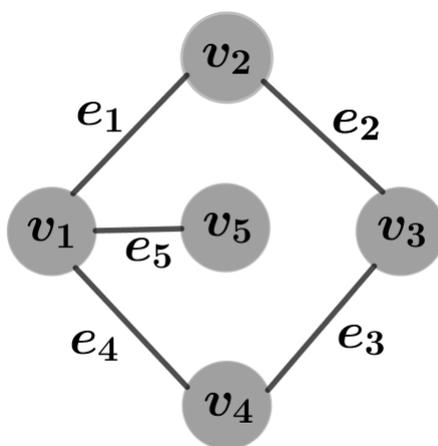
Figura 2.19: Exemplo de grafo bipartido



Fonte: O autor.

Definição 22 (Grafo conexo). *Grafo conexo é um grafo onde existe um ou mais caminhos que nos levam a qualquer vértice do grafo independente de qual seja o vértice de partida.*

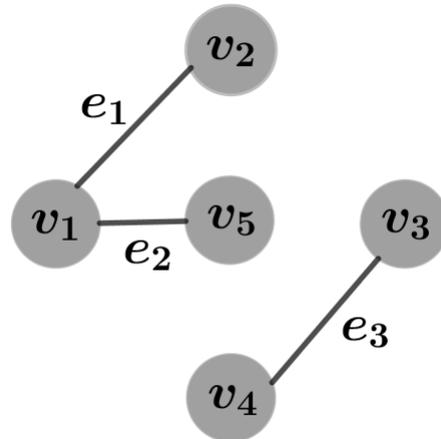
Figura 2.20: Exemplo de grafo conexo



Fonte: O autor.

Definição 23 (Grafo desconexo). *É um grafo onde existe pelo menos um vértice que não pode ser conectado a outro por um caminho.*

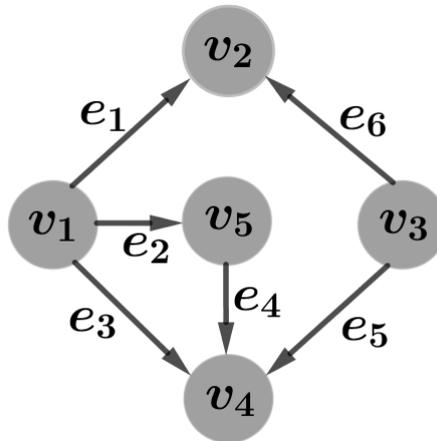
Figura 2.21: Exemplo de grafo desconexo



Fonte: O autor.

Definição 24 (Grafo direcionado ou Dígrafo). *Grafo direcionado é um grafo que contém um direcionamento quanto ao sentido das arestas.*

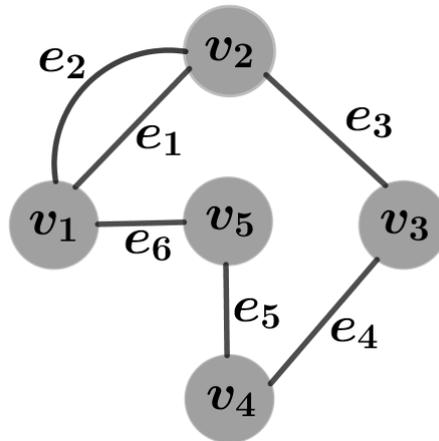
Figura 2.22: Exemplo de grafo direcionado



Fonte: O autor.

Definição 25 (Grafo não direcionado). *Grafo não direcionado é um grafo onde não existe nenhuma orientação quanto ao sentido da aresta*

Figura 2.23: Exemplo de grafo não direcionado

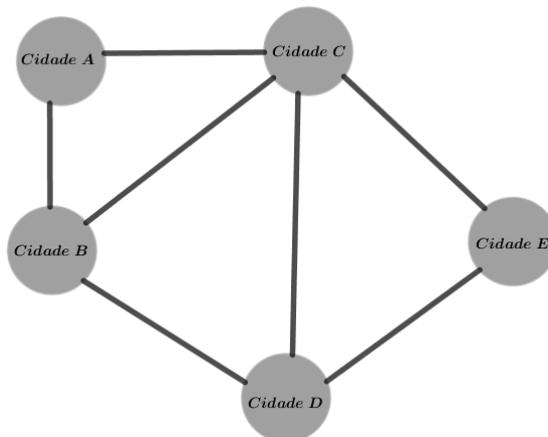


Fonte: O autor.

Definição 26 (Grafo rotulado). *Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.*

Na Figura 2.24, temos um exemplo de grafo rotulado em vértices.

Figura 2.24: Exemplo de grafo rotulado

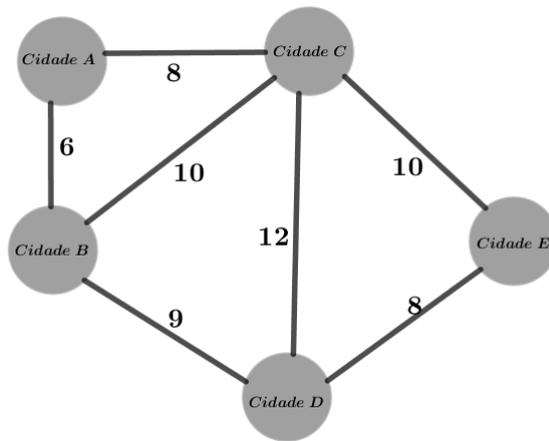


Fonte: O autor.

Definição 27 (Grafo valorado). *Um grafo é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções (peso) relacionando vértices e/ou arestas a um valor escalar.*

Na Figura 2.25, temos um exemplo de grafo valorado.

Figura 2.25: Exemplo de grafo valorado



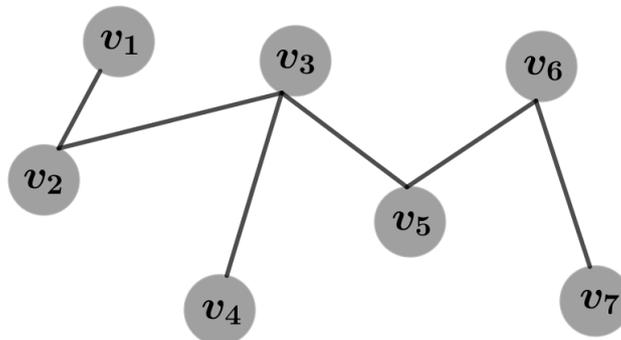
Fonte: O autor.

2.4 Árvores

Definição 28. Um grafo $G(V, A)$ é denominado árvore se ele for conexo, não contiver qualquer ciclo como subgrafo e a remoção de qualquer uma de suas arestas o torna desconexo.

Na Figura 2.26, temos um exemplo de árvore.

Figura 2.26: Representação de uma árvore



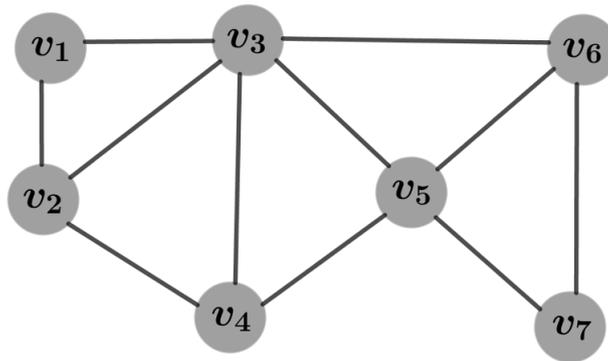
Fonte: O autor.

Observação 3. Seja $G(V, A)$ uma árvore que possui n vértices, então $G(V, A)$ possui $(n - 1)$ arestas.

Definição 29 (Árvore geradora). *Árvore geradora é uma árvore que interliga direta ou indiretamente todos os vértices do grafo.*

Para facilitar o entendimento, considere o grafo da Figura 2.27.

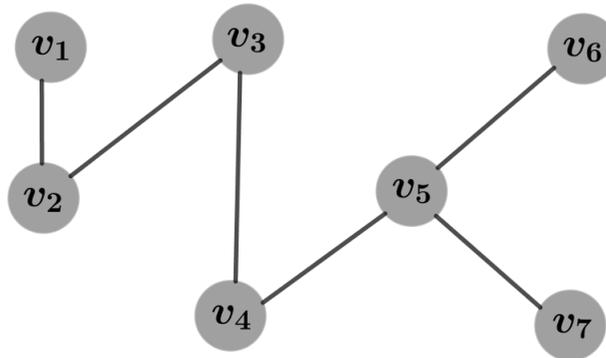
Figura 2.27: Representação de grafo



Fonte: O autor.

Na Figura 2.28, temos a Árvore Geradora do grafo da Figura 2.27.

Figura 2.28: Árvore geradora do grafo da Figura 2.27



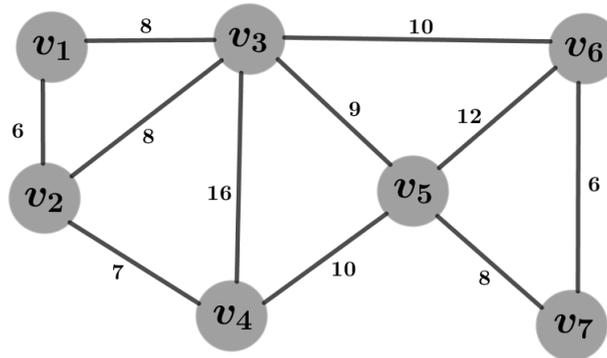
Fonte: O autor.

Definição 30 (Árvore geradora mínima). *Uma árvore gerada mínima de um grafo com pesos nas arestas (grafo valorado) é qualquer árvore geradora que tenha peso mínimo.*

A árvore geradora mínima pode ter um critério de otimização diferente do número de arestas quando o grafo for ponderado.

Na Figura 2.29, temos um exemplo de grafo com pesos nas arestas.

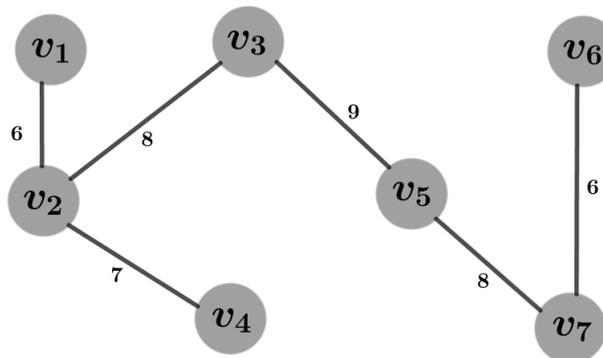
Figura 2.29: Exemplo de um grafo com pesos nas arestas



Fonte: O autor.

Na Figura 2.30, temos a árvore geradora mínima do grafo da Figura 2.29. Note que essa árvore tem peso mínimo.

Figura 2.30: Árvore geradora mínima do grafo da Figura 2.29



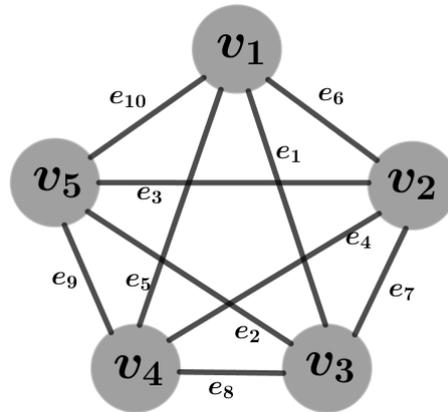
Fonte: O autor.

2.5 Grafos eulerianos

Definição 31 (Ciclo euleriano). Chamamos de ciclo euleriano um ciclo em $G(V, A)$ que passe por todas as arestas desse grafo uma única vez.

Na Figura 2.31, temos que $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ é um exemplo de ciclo euleriano.

Figura 2.31: Grafo euleriano



Fonte: O autor.

Definição 32 (Grafo euleriano). *Grafo euleriano é um grafo que contém um ciclo euleriano.*

Para as demonstrações dos Lemas 1, 2 e 3, a seguir, nos baseamos nos estudos de Vulcani (2015).

Lema 1. *Se $G(V, A)$ é um grafo euleriano, então todo vértice de $G(V, A)$ possui grau par.*

Demonstração: Seja $G(V, A)$ um grafo euleriano. Então $G(V, A)$ contém um ciclo euleriano. Se v é um vértice qualquer de T , então a cada ocorrência de v em T , o grau de v é acrescido de duas unidades.

Como T é um ciclo euleriano, toda aresta de $G(V, A)$ ocorre exatamente uma vez em T . Logo, a soma das contribuições de T ao grau de v é o grau de v . Portanto, $g(v)$ é par.

□

Lema 2. *Seja $G(V, A)$ um grafo conexo. Se o grau de cada vértice é pelo menos dois, então $G(V, A)$ contém um ciclo.*

Demonstração: Seja $G(V, A)$ um grafo tal que para todo $v \in V$, $g(v) \geq 2$. Caso $G(V, A)$ tenha algum laço ou arestas paralelas, o resultado segue.

Suponhamos então que $G(V, A)$ seja um grafo simples. Dado $v_0 \in V$, construiremos um circuito da seguinte forma: Escolhemos qualquer vértice v_1 adjacente a v_0 . Para cada $i \geq 1$, escolhemos v_{i+1} como sendo algum vértice diferente de v_{i-1} adjacente a v_i . Temos que a existência de tais vértices é garantida por hipótese, pois cada vértice é extremo de, no mínimo, duas arestas. Como $G(V, A)$ tem um número finito de vértices, em algum momento escolheremos um vértice v_k já selecionado anteriormente. Então o percurso entre as duas ocorrências de v_k é um circuito.

□

Lema 3. *Seja $G(V, A)$ um grafo conexo. Se todo vértice de $G(V, A)$ possui grau par, então $G(V, A)$ é euleriano.*

Demonstração: Seja $G(V, A)$ um grafo conexo onde todos os vértices possuem grau par. Usaremos indução matemática no número m de arestas de $G(V, A)$ para provarmos que $G(V, A)$ é euleriano.

Base de Indução:

Fazendo $m = 0$, tem-se que $G(V, A)$ é o grafo trivial. Portanto o ciclo degenerado que começa e termina no único vértice v de $G(V, A)$, é um ciclo euleriano.

Hipótese de Indução:

Todo grafo conexo com k arestas, $0 \leq k < m$, tal que todos os vértices tenham grau par é euleriano.

Passo de Indução:

Seja $G(V, A)$ um grafo conexo com m arestas e com todos os seus vértices de grau par. Como $m > 0$, então o grau de todos os vértices de $G(V, A)$ é pelo menos dois. Logo, pelo lema 2, $G(V, A)$ contém um ciclo. Seja $C = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p, v_1\}$ tal ciclo.

Considere $H(V, A)$ o grafo obtido a partir de $G(V, A)$ ao retirarmos todas as arestas de C . Observe que o número de arestas de H é menor que m . Além disso, todos os vértices de H possuem grau par, pois a paridade dos graus dos vértices de um grafo não é alterada pela retirada de um ciclo.

Denote por $A(H)$ o conjunto das aresta do grafo $H(V, A)$. Se $A(H) = \emptyset$, então $G \cong C$, isto é, $G(V, A)$ é euleriano.

Caso $A(H) \neq \emptyset$, o grafo $H(V, A)$ pode ser desconexo. Sejam H_i seus componentes conexos, com $1 \leq i \leq p$. Sabemos que os vértices de H_i possuem grau par, ou seja, $\forall v, v \in V(H_i), g(v)$ é par. Além disso, $|A(H_i)| < m$, então pela hipótese de indução, cada componente H_i contém um ciclo euleriano. Como $G(V, A)$ é conexo, $V(H_i) \cap V(C) \neq \emptyset$, com $1 \leq i \leq p$.

Construiremos um ciclo euleriano T em $G(V, A)$ através do seguinte procedimento:

1. Seja $T = C$.
2. Para cada componente não trivial H_i , $1 \leq i \leq p$; faça:
 - encontre um vértice $v_i \in V(T) \cap V(H_i)$;
 - sejam T_1 e T_2 ciclos, tais que $T = T_1 T_2$ e T_1 terminando em v_i ;
 - construa um ciclo euleriano P_i de H_i começando em v_i ;
 - faça $T = T_1 P_i T_2$.

Dessa forma, T é um ciclo euleriano, pois cada aresta de $G(V, A)$ foi considerada exatamente uma vez, e é fechado, pois retornou ao vértice inicial v . Logo, $G(V, A)$ é euleriano. □

Teorema 2.5.1 (Teorema de Euler). *Um grafo conexo $G(V, A)$ é euleriano se, e somente se, o grau de todos os vértices de $G(V, A)$ é par.*

Demonstração: Os lemas 1 e 3 provam o Teorema 2.5.1. □

Para a demonstração do corolário 2.5.1, nos baseamos nos estudos de Lima (2010).

Corolário 2.5.1. *Um grafo conexo $G(V, A)$ possui caminho euleriano se, e somente se, ele tem exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar.*

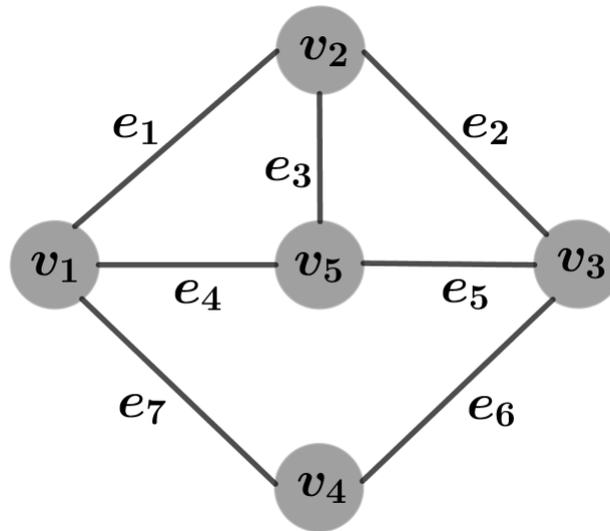
Demonstração: Seja $G(V, A)$ um grafo conexo, com 0 ou 2 vértices de grau ímpar. Seja C um ciclo euleriano em $G(V, A)$ começando num vértice de ordem ímpar, se tal vértice houver, ou em qualquer vértice no caso contrário. Tomemos C com o maior número possível de vértices entre todos os caminhos que têm o mesmo início que C . Evidentemente, o vértice final de C coincidirá com o inicial, se não houver vértices de ordem ímpar, ou com o outro vértice de ordem ímpar, no caso contrário.

Se C não percorrer todo o grafo $G(V, A)$, tomemos um vértice v fora de C e, a partir dele, um caminho que o ligue a um vértice w em C e que não tenha arestas em comum com C . O vértice v tem ordem par. Logo, percorrendo, a partir de w , este segundo caminho, podemos prolongá-lo além de v e, continuando sempre a partir dele, sem percorrer nenhuma aresta de C , poderemos sempre seguir em frente e só pararemos quando retornarmos ao vértice w . Aí prosseguiremos na antiga rota C e teremos um ciclo euleriano começando no mesmo vértice que C , porém com um número maior de arestas que C . Uma contradição, que demonstra o teorema. □

2.6 Grafos hamiltonianos

Definição 33 (Grafo hamiltoniano). *Grafo hamiltoniano é um grafo que contém um ciclo que passa por todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma única vez no ciclo.*

Figura 2.32: Grafo hamiltoniano



Fonte: O autor.

Definição 34 (Ciclo hamiltoniano). Chamamos de ciclo hamiltoniano um ciclo em $G(V, A)$ que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo, com exceção do vértice de início.

Na Figura 2.32, temos que $\{v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_1\}$ é um exemplo de ciclo hamiltoniano.

Conforme Pereira e Câmara (2008), o problema do cálculo do ciclo hamiltoniano, ainda parecido com o problema do cálculo do euleriano, é muito mais complicado, pois não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um grafo qualquer tenha um ciclo hamiltoniano muito menos métodos eficientes para construir tal ciclo. Há vários teoremas específicos para determinados tipos de grafos, que fornecem condições que são, na maioria dos casos, suficientes. No entanto, não necessárias. Este problema está relacionado ao Problema do Caixeiro Viajante que apresentaremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Problemas clássicos e Algoritmos

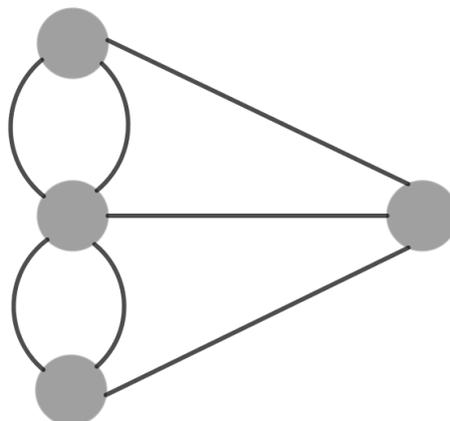
Nesse capítulo apresentaremos problemas clássicos da Teoria de Grafos e alguns algoritmos comumente usados para resolver situações cotidianas.

3.1 Problemas clássicos

3.1.1 Problema das Pontes de Königsberg

Como vimos no início do Capítulo 1, o Problema das Pontes de Königsberg consiste em uma pessoa atravessar todas as pontes de Königsberg uma única vez e retornar ao ponto de partida. Por vários anos esse problema não teve solução até que em 1736, Leonhard Euler solucionou esse enigma. Como vimos, ele propôs transformar as partes de terra da cidade em pontos (vértices) e as pontes que os unia em linhas (arestas). Conforme ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Grafo da cidade de Königsberg



Fonte: O autor.

Euler notou que só seria possível percorrer todo o caminho, passando uma única vez em cada ponte, se houvessem exatamente zero ou dois vértices de onde saísse um

número ímpar de arestas. A razão de tal pensamento é que de cada vértice deve sair um número par de arestas, pois seria necessário um “caminho de entrada” e outro “caminho de saída”. Os dois vértices com número de arestas ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um caminho para entrar e outro caminho para sair, respectivamente. Caso não houvesse vértices com número ímpar de arestas, pode-se iniciar e terminar o trajeto no mesmo vértice, sendo esse um vértice escolhido aleatoriamente. Note que isso não é possível quando temos dois vértices com números ímpares de arestas, pois obrigatoriamente um estará no início e outro o final do trajeto. Portanto, Euler provou que não existia caminho que atendesse às restrições do problema.

A solução desse problema resultou no Teorema de Euler (Teorema 2.5.1), que vimos no capítulo anterior.

3.1.2 Problema das Quatro Cores

O Problema das Quatro Cores trata-se de determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de regiões reais ou imaginárias, de forma a que locais com fronteira comum recebam cores diferentes.

Conforme Bondy e Murty (1982) e Sousa (2001), a história do problema das quatro cores teve início em 1852, quando Francis Guthrie, que foi advogado, botânico e matemático, tentava colorir os vários distritos do mapa da Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Após ter refletido sobre o problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie era irmão mais velho de Frederick Guthrie, este por sua vez era aluno de Augustus De Morgan. Ainda em 1852, Frederick Guthrie apresentou a conjectura do seu irmão mais velho ao professor De Morgan. Este ficou muito animado com o problema e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton na qual explicava a conjectura. No entanto, Hamilton não achou o problema interessante e respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não planejava debruçar-se sobre a questão. Com o passar do tempo, De Morgan escreveu algumas cartas para outros matemáticos conhecidos, o problema foi discutido e teve alguns desenvolvimentos. Ele foi um dos que mais contribuiu para que a comunidade científica tomasse conhecimento da Conjectura das Quatro Cores. Na Figura 3.2, temos o mapa do Brasil colorido com quatro cores, em que estados com fronteira comum possuem cores diferentes.

Figura 3.2: Mapa do Brasil colorido com quatro cores



Fonte: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo. ¹

Com o decorrer do tempo o interesse dos matemáticos pelo Problema das Quatro Cores esmoreceu. De acordo com Sousa (2001), somente em 1878, Arthur Cayley (que era um advogado e matemático nas horas vagas) indagava na seção de Matemática da Royal Society se porventura alguém já submetera uma solução da Conjectura das Quatro Cores. No ano seguinte, Cayley publicou uma pequena análise do problema nos *Proceedings of the Royal Geographical Society*.

Segundo Bondy e Murty (1982) e Sousa (2001), em 1879 Alfred Bray Kempe, um advogado e ex-aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no *American Journal of Mathematics*. Tal demonstração foi analisada por vários matemáticos de renome, em que alguns deles deram sugestões para melhorá-la. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores.

A história não parou por aí. Segundo Lima (2016), em 1890, Percy John Heawood, provou que a demonstração de Kempe tinha um erro. Heawood, infelizmente, não conseguiu provar o Teorema das Quatro Cores, mas enunciou e demonstrou o Teorema das Cinco Cores que diz que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa plano onde países de fronteira comum têm cores diferentes.

De acordo com Sousa (2001), em 1976, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. No entanto, a demonstração incluía mais de mil horas de uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiadamente longa

¹Disponível em: <<https://www.cos.ufrj.br/~celina/ftp/celina-im.pdf>>. Acesso em: 18 jul. 2020.

para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia a validade da demonstração é aceita pela comunidade matemática, mas continua sendo alvo de polêmica.

A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Appel e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Conforme Sousa (2001), em agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Também eles não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo, foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível mais tolerável. Aqueles que tenham os programas ao seu dispor e que tenham compreendido os fundamentos teóricos, poderão em menos de um dia reproduzir a demonstração dependendo do número de vértices do grafo escolhido.

A questão de construir uma demonstração que não necessite o auxílio de computadores continua em aberto!

3.1.3 Problema do Caixeiro Viajante

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é o seguinte: Um caixeiro viajante quer visitar um número finito de cidades, conhecendo o custo de viagem entre elas. Determinar a trajetória mais barata de modo que ele possa visitar todas as cidades uma única vez e retornar à cidade inicial.

Conforme Rodrigues (1996), o Problema do Caixeiro Viajante é um dos problemas mais conhecidos e estudados da área de Otimização Combinatória. O problema é de otimização, pois tenta determinar a menor distância total, e é combinatório, uma vez que a escolha da trajetória se dá sobre o conjunto finito de todas as trajetórias válidas para o problema.

Ainda segundo Rodrigues (1996), o primeiro registro do Problema do Caixeiro Viajante, é o encontrado em um livro publicado na Alemanha em 1832 e intitulado “*O Caixeiro Viajante, como ele deve ser e o que ele deve fazer para conseguir comissões e sucesso nos negócios. Por um veterano Caixeiro Viajante*”.

Mais tarde, em 1857 o matemático William Rowan Hamilton propôs o jogo, *Around the World* (ao redor do mundo). O jogo era realizado sobre um dodecaedro, em que cada vértice estava associado a uma cidade importante na época. O desafio consistia em encontrar uma rota através dos vértices do dodecaedro que iniciasse e terminasse na mesma cidade, sem repetir uma cidade sequer. Na Figura 3.3, temos uma foto do jogo *Around the World*.

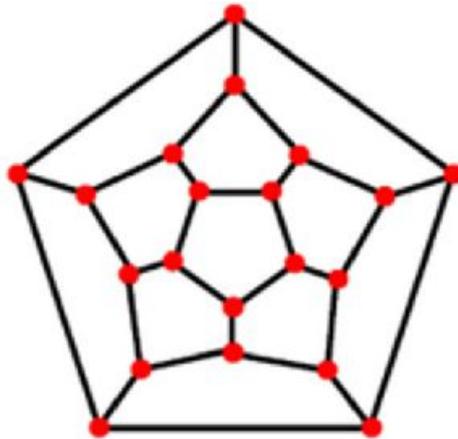
Figura 3.3: Around the World



Fonte: Geogebra. ²

Desse modo, podemos visualizar o *Around the World* como um grafo (Figura 3.4).

Figura 3.4: Representação em grafo associado ao jogo Around the World



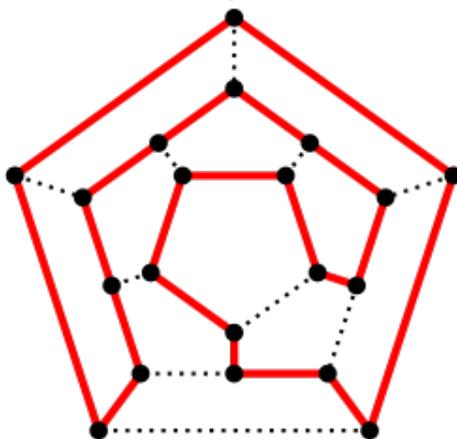
Fonte: Matemateca IMEUSP. ³

A soluções para o *Around the World* recebem o nome de ciclo hamiltoniano em homenagem ao seu criador. Na Figura 3.5, temos um exemplo desse ciclo. Perceba que temos um ciclo que passa por todos os vértices do grafo uma única vez.

²Disponível em: <<https://www.geogebra.org/resource/gb4kx73y/ZqR24zZ8Nu3eHUyx/material-gb4kx73y.png>>. Acesso em: 08 jun. 2020.

³Disponível em: <<https://matemateca.ime.usp.br/images/icosiano/icosiano2.jpg>> . Acesso em: 18 abr. 2020.

Figura 3.5: Exemplo de solução para o Around the World



Fonte: Wikipedia. ⁴

Somente a partir de século XX que o PCV tornou-se público. De acordo com Farias (2008), a partir da década de 1940 o PCV foi caracterizado como um problema difícil da área de otimização combinatória, tendo em vista a inviabilidade de examinar rapidamente todas as soluções. Ainda conforme Farias (2008), em 1954 foi publicado um artigo com um método para solucionar o PCV com autoria de Dantzig, Fulkerson e Johnson. Para mostrar o quão poderoso era seu método, os autores resolveram esse problema consistindo de 49 cidades, o que na época era considerada uma instância de grande porte. Atualmente, o melhor resultado para o Problema do Caixeiro Viajante conta com uma instância de 85900 cidades que foi obtido William Cook, Daniel Espinoza e Marcos Goycoolea em abril de 2006 (FARIAS, 2008).

3.1.4 Problema do Carteiro Chinês

Conforme Paes (2004) e Viana Jr. (2010), o Problema do Carteiro Chinês (PCC) foi proposto por um matemático chinês chamado Meigu Guan em 1962. O problema é o seguinte: Um carteiro tem de cobrir sua rota e depois retornar ao Posto de Correio. Qual a menor rota que o carteiro deve percorrer para cumprir seu trabalho?

Observe que para se determinar a menor rota o carteiro deve passar uma única vez por cada rua, entregando suas cartas, e voltar ao ponto origem.

Olhando esse problema sob a ótica da teoria dos grafos podemos interpretar as ruas da cidade como sendo as arestas de um grafo e as intersecções entre as ruas seriam seus vértices. Desse modo a solução do problema seria encontrar um caminho que passasse por todas as arestas uma única vez, ou seja, determinar um ciclo euleriano. Além de ser um problema de otimização, pois deve-se determinar a menor distância.

⁴Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Caminho_hamiltoniano#/media/Ficheiro:Hamiltonian_path.svg>. Acesso em: 18 abr. 2020.

De acordo com Carvalho e Maldonado (2018), o PCC pode ser usado em situações práticas tais como: na coleta de lixo; no transporte de ônibus; inspeção de redes elétricas e remoção de neve das vias.

3.2 Algoritmos

Nessa seção, apresentaremos três algoritmos importantes na Teoria dos Grafos: Algoritmo dos Mínimos Sucessivos, Algoritmo de Kruskal e Algoritmo de Fleury. Baseando-nos em Boaventura Netto (2003), Amasifen, Romero e Mantovani (2005) e Brito (2015), mostraremos como funciona cada um desses algoritmos. Não iremos apresentar seus códigos de implementação, pois esses fogem do objetivo desse trabalho. Para facilitar o entendimento, faremos a aplicação, em um exemplo, de cada um dos algoritmos.

3.2.1 Algoritmo dos Mínimos Sucessivos

O Algoritmo dos Mínimos Sucessivos foi desenvolvido com o intuito de resolver o Problema do Caixeiro Viajante em que escolhe-se a cidade mais próxima sempre que o caixeiro se desloque até que todas as cidades sejam visitadas.

Seja $G(V, A)$ um grafo hamiltoniano com n vértices que contém k ciclos hamiltonianos.

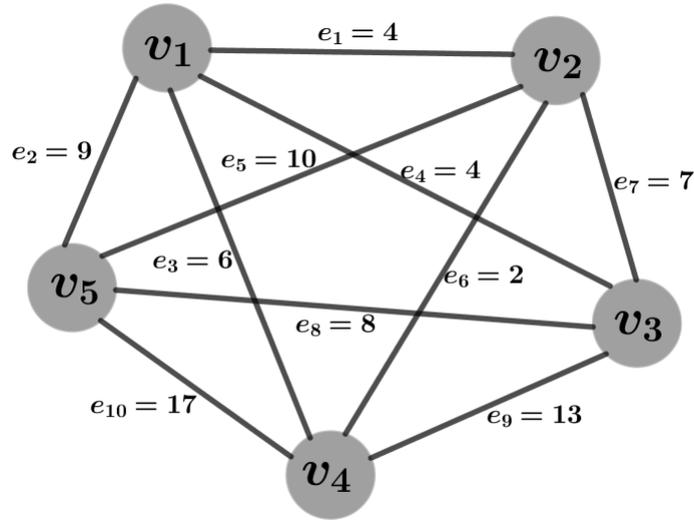
- Dentre todos os vértices, escolha um aleatoriamente para ser o ponto de partida;
- Selecione outro vértice que seja adjacente ao anterior e que a aresta que os une seja a de menor peso. Caso haja dois ou mais cujas arestas tenham o mesmo peso, escolhe-se um deles aleatoriamente;
- Deve-se passar por todos os vértices sem repetir nenhum deles. Salvo o primeiro vértice, que após todos terem sido visitados, voltamos ao ponto de partida;
- Repetir sucessivamente até formar um ciclo hamiltoniano.

A aplicação desse passo a passo será a mesma quantidade que o número de vértices, pois todos os vértices terão que ser ponto de partida para um ciclo hamiltoniano.

A solução será o ciclo que apresentar o menor peso.

Vamos demonstrar o funcionamento do Algoritmo dos mínimos sucessivos para encontrar o ciclo de menor peso do grafo ilustrado na Figura 3.6, cujos pesos das respectivas arestas estão indicados.

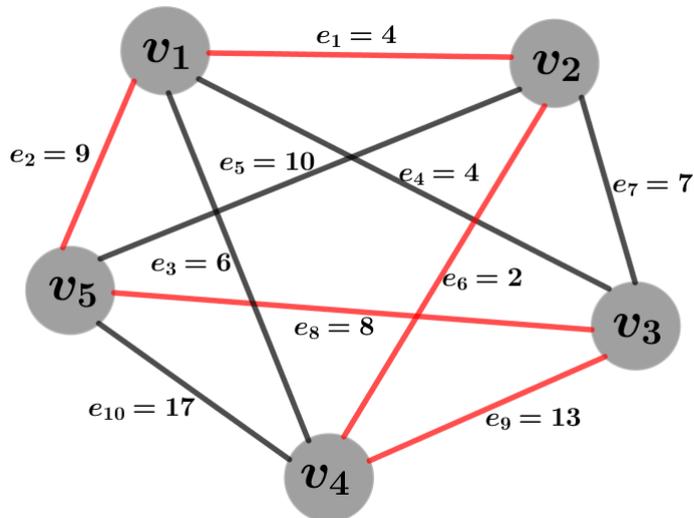
Figura 3.6: Grafo para aplicação do algoritmo dos Mínimos Sucessivos



Fonte: O autor.

Começamos escolhendo o vértice v_1 , como vértice de partida. Em seguida, escolhemos o vértice adjacente ao vértice v_1 cuja aresta que os una seja a de menor peso. Note que v_2 e v_3 são vértices adjacentes a v_1 , cujas arestas $e_1 = 4$ e $e_4 = 4$ têm o mesmo peso, logo podemos escolher um deles aleatoriamente. Escolhemos a aresta $e_1 = 4$ que leva ao vértice v_2 . Escolhendo novamente a aresta de menor peso, nesse caso $e_6 = 2$, chegamos à v_4 . De v_4 podemos ir para o vértice v_3 ou v_5 , como devemos seguir pela de menor peso, nessa caso $e_9 = 13$, chegamos ao vértice v_3 . De v_3 só podemos seguir para o vértice v_5 , pela aresta $e_8 = 8$. Agora que passamos por todos os vértices devemos retornar ao vértice de partida, v_1 , usando para isso a aresta $e_2 = 9$. Desse modo, formamos o ciclo ilustrado na Figura 3.7:

Figura 3.7: Primeira iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos

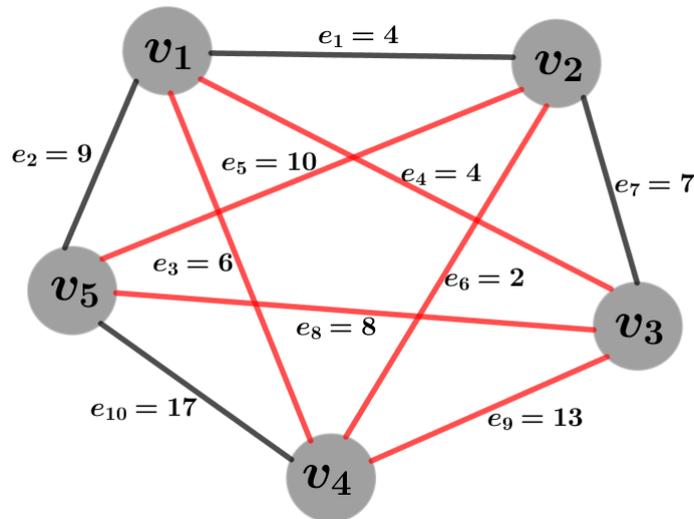


Fonte: O autor.

Ou seja, $\{v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1\}$. Somando os pesos das arestas do ciclo formado temos: $4 + 2 + 13 + 8 + 9 = 36$.

Usaremos como agora v_2 como nosso vértice de partida. Escolhendo a aresta de menor peso, que em nosso grafo é aresta $e_6 = 2$, chegamos em v_4 . De v_4 percorremos por $e_3 = 6$, chegando em v_1 . De v_1 para v_3 usando $e_4 = 4$. De v_3 seguimos por $e_8 = 8$ para v_5 . Como passamos por todos os vértices, devemos retornar a v_2 usando a aresta de menor peso que é $e_5 = 10$. Desse modo, formamos o ciclo ilustrado na Figura 3.8:

Figura 3.8: Segunda iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos

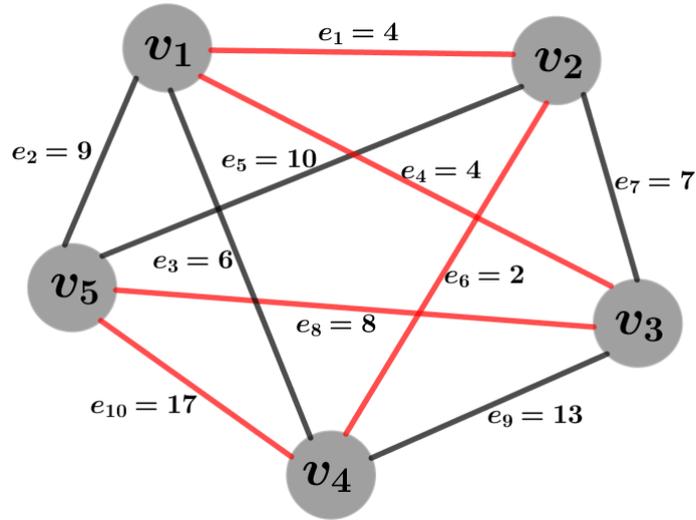


Fonte: O autor.

Ou seja, $\{v_2, v_4, v_1, v_3, v_5, v_2\}$. Somando os pesos das arestas do ciclo formado temos: $2 + 6 + 4 + 8 + 10 = 30$.

Tomando v_3 como vértice de partida e aplicando os passos do algoritmo, temos o ciclo ilustrado na Figura 3.9:

Figura 3.9: Terceira iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos

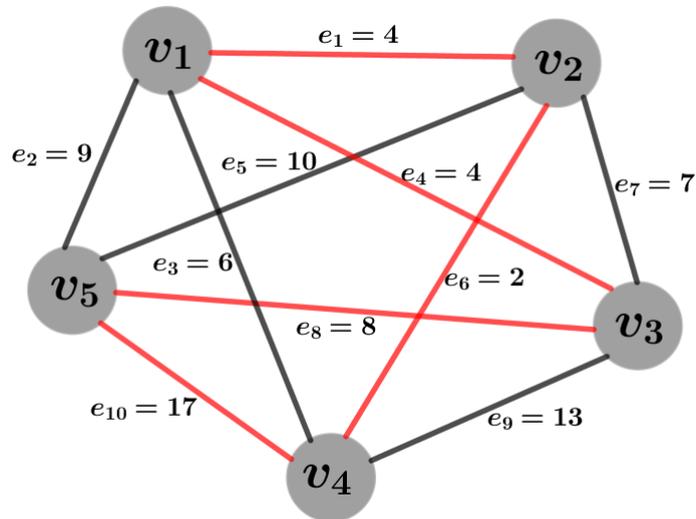


Fonte: O autor.

Ou seja, $\{v_3, v_1, v_2, v_4, v_5, v_3\}$. Somando os pesos das arestas do ciclo formado temos: $4 + 4 + 2 + 17 + 8 = 35$.

Tomando v_4 como vértice de partida e usando repetindo os passos do algoritmo, temos o ciclo ilustrado na Figura 3.10:

Figura 3.10: Quarta iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos

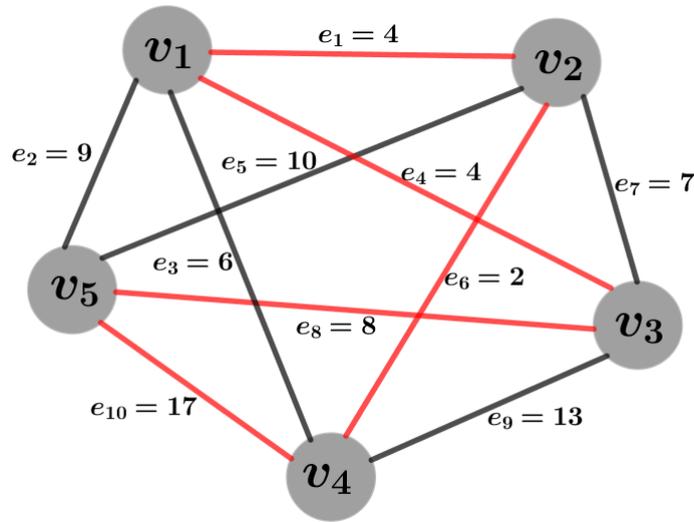


Fonte: O autor.

Ou seja, $\{v_4, v_2, v_1, v_3, v_5, v_4\}$. Somando os pesos das arestas do ciclo formado temos: $2 + 4 + 4 + 8 + 17 = 35$.

Tomando v_5 como vértice de partida e usando repetindo os passos do algoritmo, temos o ciclo ilustrado na Figura 3.11:

Figura 3.11: Quinta iteração do algoritmo dos Mínimos Sucessivos



Fonte: O autor.

Ou seja, $\{v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Somando os pesos das arestas do ciclo formado temos: $8 + 4 + 4 + 2 + 17 = 35$.

Note que os ciclos formados com início em v_3 , v_4 , e v_5 representa o mesmo percurso, apenas com início diferente. Isso pode ser confirmado quando observamos as somas dos pesos de cada um desses ciclos e quando observamos as Figuras 3.9, 3.10 e 3.11. Como solução, escolhemos o ciclo de menor peso, ou seja, o ciclo $\{v_2, v_4, v_1, v_3, v_5, v_2\}$ ilustrado na Figura 3.8.

3.2.2 Algoritmo de Kruskal

O Algoritmo de Kruskal foi proposto em 1956 pelo matemático Joseph Bernard Kruskal Junior (1928 à 2010). Esse algoritmo busca uma árvore geradora mínima para um grafo conexo com pesos. Ou seja, ele encontra um subconjunto das arestas que formam uma árvore que inclui todos os vértices do grafo, onde o peso total (dado pela soma dos pesos das arestas da árvore) é o mínimo possível.

O Algoritmo de Kruskal executado em um grafo $G(V, A)$ com n vértices e cujas arestas são ponderadas, funcionará da seguinte forma:

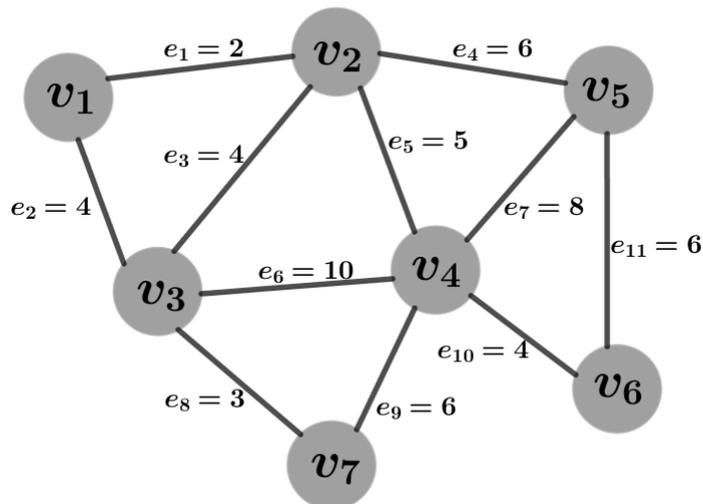
- Seja e_i uma aresta de A de menor peso. Se e_i não criar ciclo em $G(V, A)$, então é adicionada a Árvore Geradora Mínima de $G(V, A)$. Caso contrário, é descartada de A ;
- O processo é repetido até que A seja vazio.

Em outras palavras, o algoritmo construirá a Árvore Geradora Mínima de $G(V, A)$ em que a primeira aresta a ser adicionada será aquela de menor peso. Feito isso,

a próxima aresta a ser adicionada será novamente a de menor peso e que conecte quaisquer dois vértices ainda não conectados por nenhum caminho em $G(V, A)$. Este processo será repetido até que as $(n - 1)$ arestas da árvore sejam construídas.

Vamos demonstrar o funcionamento do Algoritmo de Kruskal para encontrar a Árvore Geradora Mínima do grafo ilustrado na Figura 3.12, cujos pesos das respectivas arestas estão indicados.

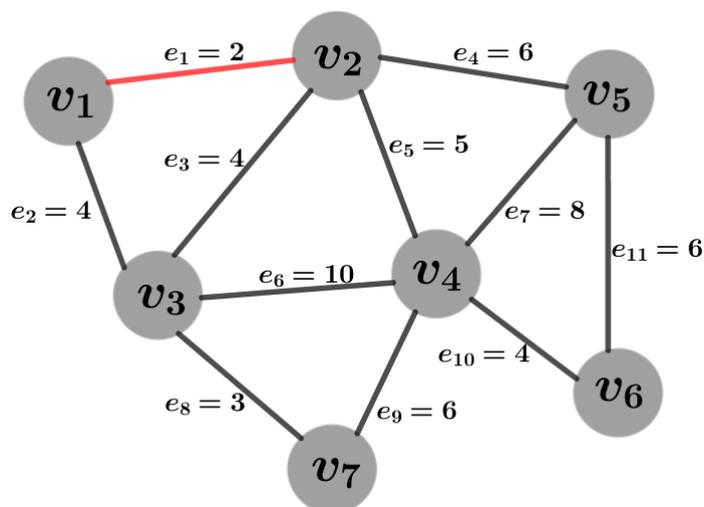
Figura 3.12: Grafo para aplicação do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

Escolhemos a aresta de menor peso, que nesse caso é $e_1 = 2$. Assim, ela será incluída na árvore, conforme mostra a Figura 3.13.

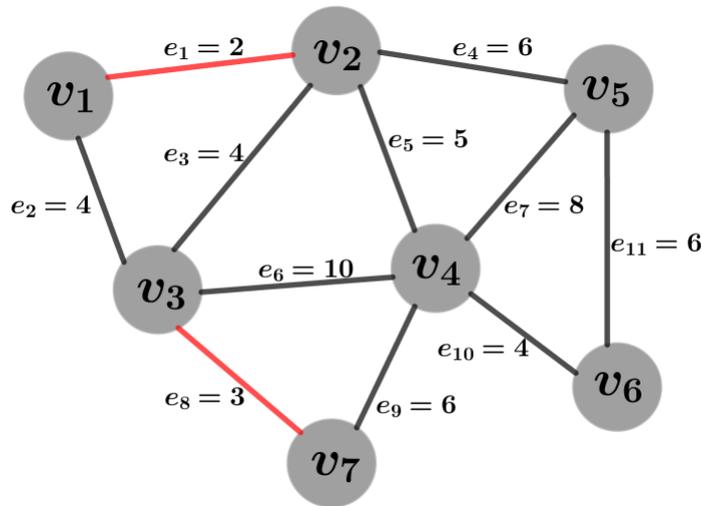
Figura 3.13: Primeira iteração do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

A próxima aresta de menor peso a ser incluída na árvore será $e_8 = 3$, conforme ilustra a Figura 3.14.

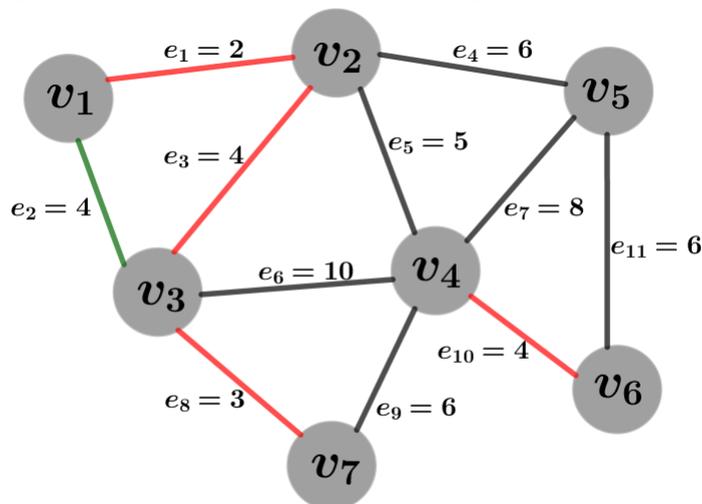
Figura 3.14: Segunda iteração do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

Na próxima iteração do algoritmo notamos a existência de três arestas com o mesmo peso: $e_2 = 4$, $e_3 = 4$ e $e_{10} = 4$. Caso nenhuma delas forme um ciclo na árvore geradora, todas poderão ser incluídas. Na inclusão das arestas $e_2 = 4$, $e_3 = 4$ será formado o ciclo, logo só poderá ser incluída uma delas aleatoriamente. Optamos por incluir as arestas $e_3 = 4$, e $e_{10} = 4$ e pela exclusão da aresta $e_2 = 4$. (Figura 3.15).

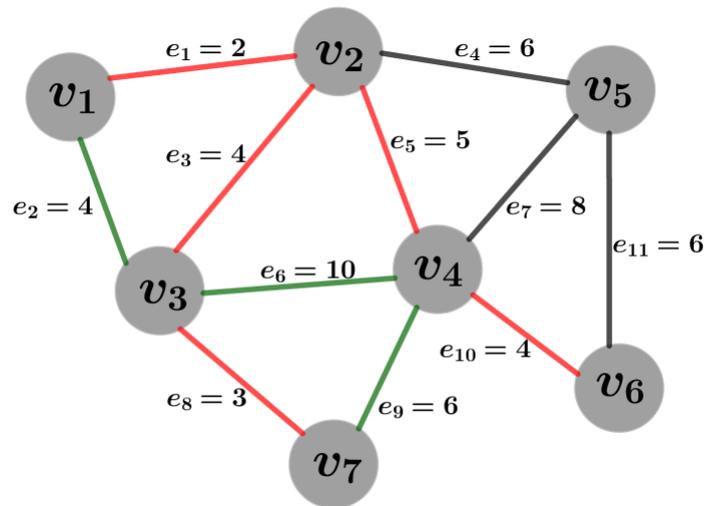
Figura 3.15: Terceira iteração do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

Seguindo com o algoritmo, a próxima aresta de menor peso será $e_5 = 5$. Note que ao incluir essa aresta é observado que se as arestas $e_6 = 10$ e $e_9 = 6$ forem incluídas na árvore será formado um ciclo, logo devemos excluí-las. Conforme a Figura 3.16.

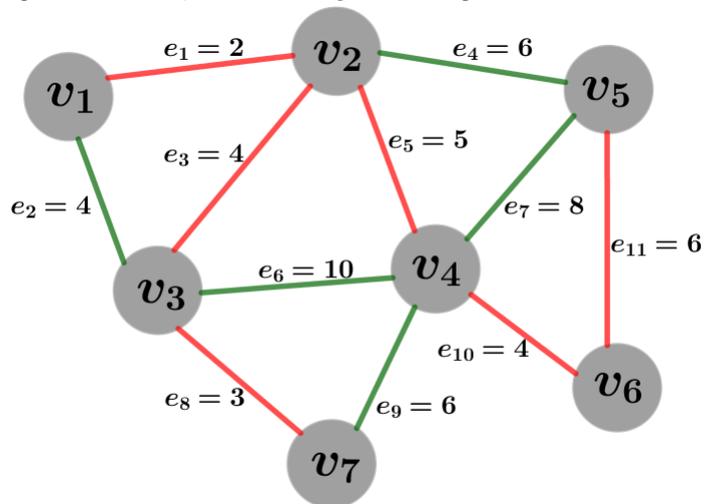
Figura 3.16: Quarta iteração do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

No grafo restaram apenas as arestas $e_4 = 6$ e $e_{11} = 6$, logo poderá ser incluída a aresta $e_4 = 6$ ou $e_{11} = 6$. Optamos por incluir a aresta $e_{11} = 6$ e excluir as arestas $e_4 = 6$ e $e_7 = 8$, pois com a inclusão da aresta $e_{11} = 6$ ao tentar incluir uma das outras duas restantes formaria um ciclo. Portanto, elas terão que ser excluídas.

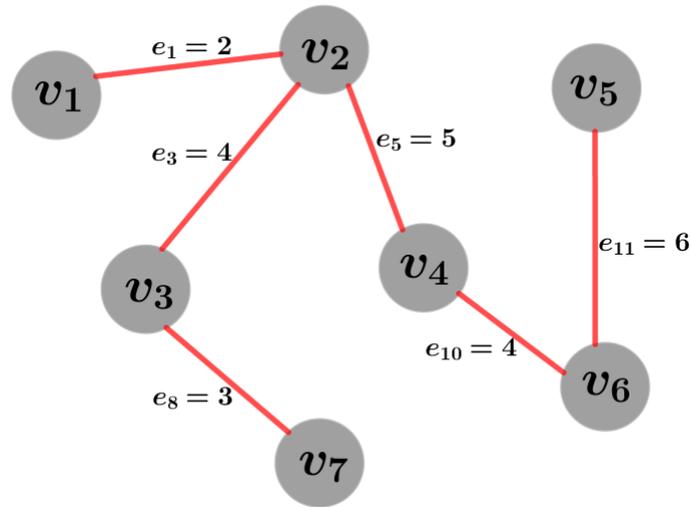
Figura 3.17: Quinta iteração do algoritmo de Kruskal



Fonte: O autor.

Notamos que no grafo da Figura 3.17 é visto que todos os vértices estão conectados. Portanto, é formada a árvore geradora mínima do grafo, conforme Figura 3.18.

Figura 3.18: Árvore geradora mínima do grafo da Figura 3.12



Fonte: O autor.

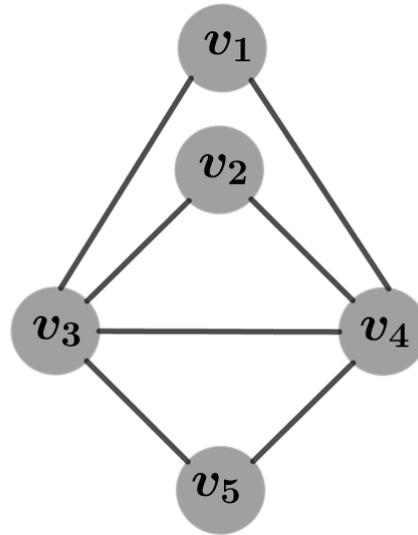
3.2.3 Algoritmo de Fleury

Segundo Carvalho (2019), o Algoritmo de Fleury foi proposto em 1883 e é usado para construção e identificação de um ciclo euleriano. Para utilizar o algoritmo comece em um vértice arbitrário do grafo e percorra as arestas de forma aleatória, seguindo as seguintes regras:

- Selecione arbitrariamente uma aresta incidente ao vértice escolhido. Escolha uma ponte se, e somente se, não houver alternativa. Uma aresta é dita ser uma ponte se a sua remoção torna o grafo desconexo;
- Exclua as arestas depois de passar por elas;
- Exclua os vértices isolados, caso ocorram;
- Quando todos os vértices estiverem isolados, encontramos um circuito de Euler.

Vamos verificar o funcionamento do Algoritmo de Fleury para identificação de um ciclo euleriano no grafo da Figura 3.19.

Figura 3.19: Grafo para aplicação do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

Inicialmente, verificaremos se o grafo da Figura 3.19 satisfaz as condições do Teorema de Euler. Note que $g(v_1) = g(v_2) = g(v_5) = 2$ e $g(v_3) = g(v_4) = 4$, logo pelo teorema de Euler, temos que o grafo possui um ciclo Euleriano. Vamos aplicar o Algoritmo de Fleury para construir esse ciclo. A cada iteração vamos mostrando a ilustração do grafo e uma tabela (não nessa ordem) com duas colunas: Rota e Aresta. Na coluna rota ficaram os vértices que escolhemos e na coluna aresta as arestas que foram excluídas do grafo.

Vale ressaltar que usaremos a notação v_i, v_j para indicar a aresta que une o vértice v_i ao vértice v_j . Optamos por essa escolha de notação pois acreditamos facilitar o entendimento do leitor, tendo em vista que minimizamos as informações nas figuras.

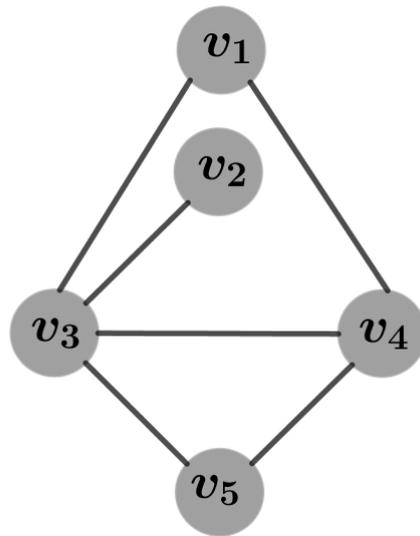
Inicialmente, escolhemos um vértice aleatório do grafo da Figura 3.19. Vamos escolher v_2 . De v_2 , podemos ir para v_3 ou v_4 , pois nenhum deles forma uma ponte. Escolhemos v_4 , conforme mostra a Figura 3.20.

Tabela 3.1: Primeira iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4

Fonte: O autor.

Figura 3.20: Primeira iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

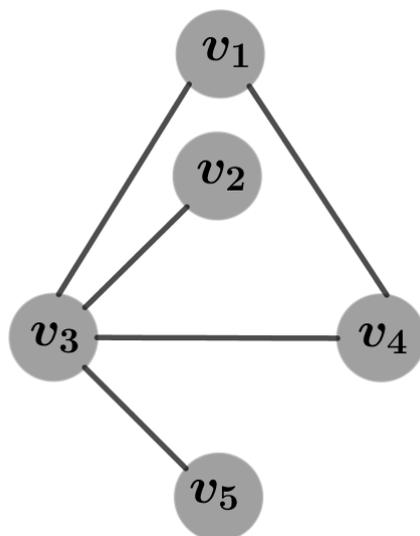
De v_4 , podemos ir para v_1 , v_3 ou v_5 pois nenhum deles forma uma ponte. Escolhemos v_5 , conforme Figura 3.21.

Tabela 3.2: Segunda iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5

Fonte: O autor.

Figura 3.21: Segunda iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

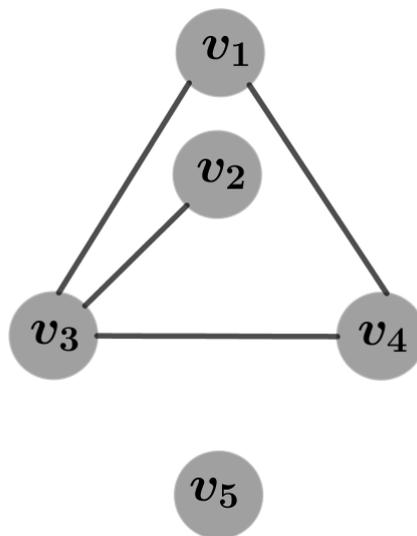
De v_5 , só nos resta seguir para v_3 .

Tabela 3.3: Terceira iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3

Fonte: O autor.

Figura 3.22: Terceira iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

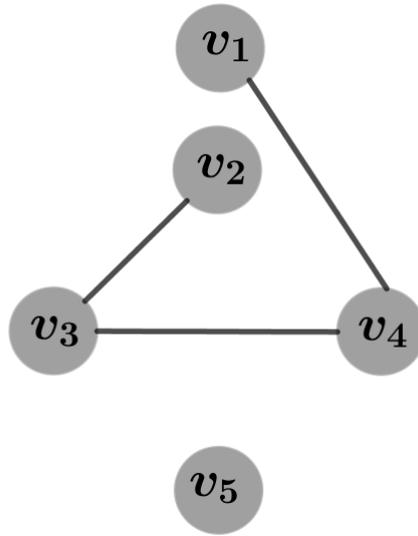
De v_3 , podemos seguir para v_1 , v_2 ou v_4 , no entanto, v_2 forma uma ponte. Logo devemos escolher entre v_1 ou v_4 . Escolhemos ir para v_1 . A Figura 3.23. mostra essa situação.

Tabela 3.4: Quarta iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3
v_2, v_4, v_5, v_3	v_3, v_1

Fonte: O autor.

Figura 3.23: Quarta iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

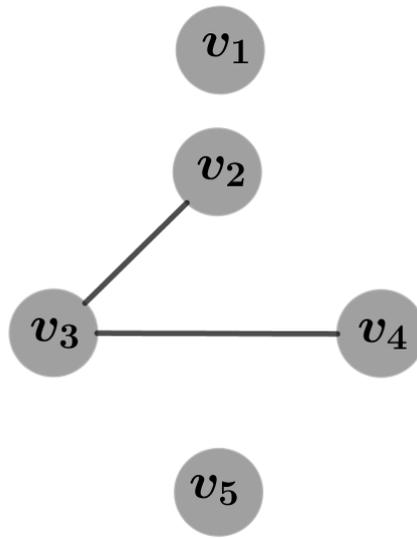
De v_1 , só nos resta seguir para v_4 .

Tabela 3.5: Quinta iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3
v_2, v_4, v_5, v_3	v_3, v_1
v_2, v_4, v_5, v_3, v_1	v_1, v_4

Fonte: O autor.

Figura 3.24: Quinta iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

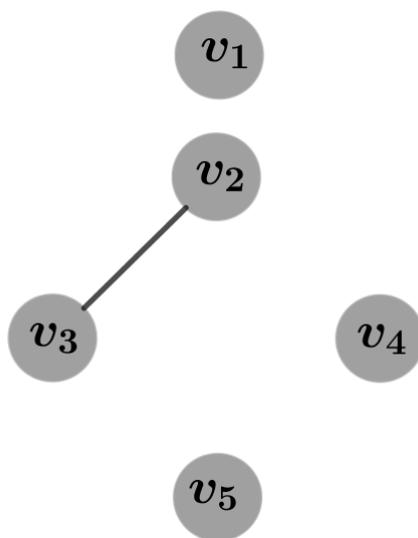
De v_4 , só nos resta ir para v_3 .

Tabela 3.6: Sexta iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3
v_2, v_4, v_5, v_3	v_3, v_1
v_2, v_4, v_5, v_3, v_1	v_1, v_4
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4$	v_4, v_3

Fonte: O autor.

Figura 3.25: Sexta iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

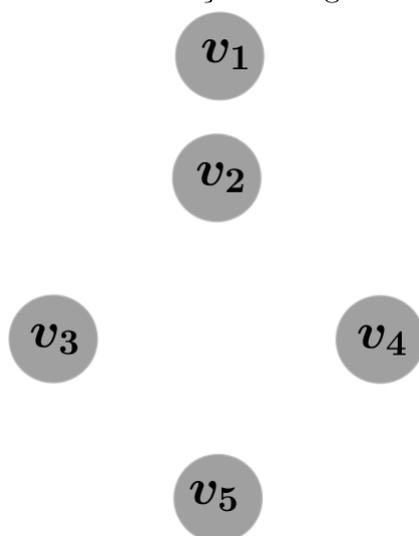
De v_3 , só nos resta ir para v_2 .

Tabela 3.7: Sétima iteração do algoritmo de Fleury

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3
v_2, v_4, v_5, v_3	v_3, v_1
v_2, v_4, v_5, v_3, v_1	v_1, v_4
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4$	v_4, v_3
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4, v_3$	v_3, v_2

Fonte: O autor.

Figura 3.26: Sétima iteração do algoritmo de Fleury



Fonte: O autor.

Note que todos os vértices do grafo da Figura 3.26 estão desconectados. Portanto, encontramos um circuito euleriano.

Tabela 3.8: Percurso do algoritmo de Fleury no grafo da Figura 3.19

Rota	Aresta
v_2	v_2, v_4
v_2, v_4	v_4, v_5
v_2, v_4, v_5	v_5, v_3
v_2, v_4, v_5, v_3	v_3, v_1
v_2, v_4, v_5, v_3, v_1	v_1, v_4
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4$	v_4, v_3
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4, v_3$	v_3, v_2
$v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4, v_3, v_2$	

Fonte: O autor.

Observe ainda que na última linha da Tabela 3.8 chegamos à rota: $v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4, v_3, v_2$, ela indica o percurso do nosso circuito euleriano.

Capítulo 4

Atividades propostas

Agora que sabemos um pouco sobre a Teoria dos Grafos e suas Aplicações, neste capítulo propomos um recurso metodológico que possibilita o trabalho do professor com a Teoria dos Grafos no ensino médio.

Tendo em vista que toda prática pedagógica exige uma organização metodológica, para elaboração desse produto tivemos como suporte os estudos de Zabala (1998) sobre Sequências Didáticas.

Antoni Zabala define sequência didática como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” (ZABALA, 1998, p. 18).

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) ressaltam que os alunos de nível médio

saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (ORIENTAÇÕES..., 2006, p. 69).

Temos ainda que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) salienta que “no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos.”(BASE. . . , 2018, p. 528). Destaca ainda que

os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BASE. . . , 2018, p. 529).

Com base nisso, propomos seis sequências didáticas desenvolvidas a partir da abordagem da Resolução de Problemas. A escolha de se trabalhar com essa metodologia de ensino de Matemática se deve ao fato de que

na resolução de problemas, os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc. (ROMANATTO, 2012, p. 303).

As atividades são descritas passo a passo e estão estruturadas da seguinte forma.

- Público-alvo: Série que se destina a sequência didática.
- Conteúdo abordado: O conteúdo abordado pela sequência didática.
- Duração: O tempo necessário para aplicação da sequência didática.
- Situação problema: O problema inicial da sequência didática.
- Motivação para a situação problema: Contexto histórico que originou problemas parecidos com o presente na situação problema inicial.
- Procurando soluções: Momento em que o professor será mediador das discussões em sala e norteará os alunos em direção a solução da situação problema.
- Exposição do conceito e Formalização das ideias: Explicação do conteúdo necessário para resolução da situação problema e modelagem da situação problema de acordo com o conteúdo.
- Retomando o problema inicial: Resolução da situação problema inicial.
- Exercícios propostos: Outros exercícios para que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos em novas situações.

- **Avaliação:** Momento em que o professor avaliará a aula, os alunos e servirá como momento de reflexão para atividades futuras. Nesse trabalho apresentamos avaliações qualitativas, mas o professor pode mudar a avaliação conforme seu objetivo.

Em cada uma das sequências didáticas procuramos fazer uma abordagem ao ensino da teoria de grafos com situações problema desafiadoras, envolvendo atividades presentes no cotidiano dos alunos e buscando despertar o interesse dos discentes. Além disso, são atividades fáceis de aplicar em sala de aula, uma vez que as situações problemas exigem poucas habilidades de cálculo.

4.1 Atividade 1: O assassinato de Júlia Osesana

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

Conteúdo abordado: Construção de grafos eulerianos.

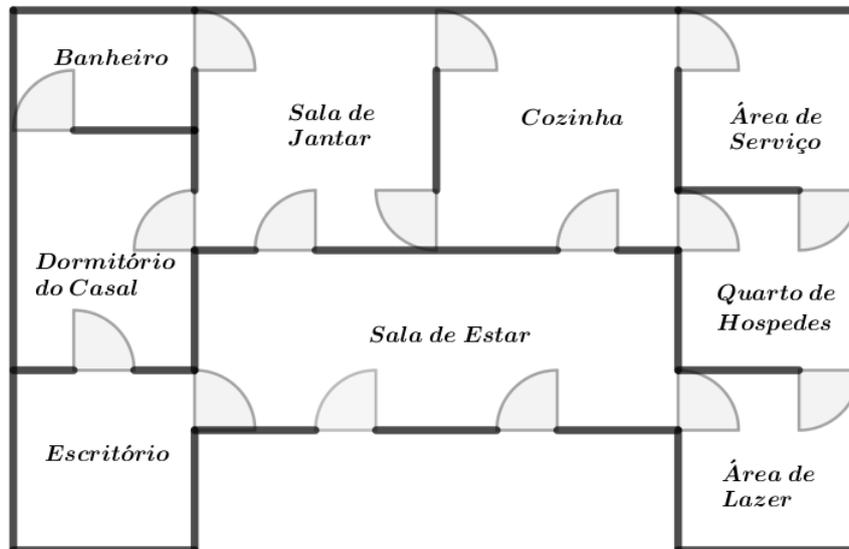
Duração: 2 horas.

Situação problema:

O problema a seguir é uma adaptação do problema intitulado “O caso de Count Van Diamond”.

A Figura 4.1 representa a casa da milionária Júlia Osesana, que acaba de ser assassinada. Charlotte Gomez, uma detetive conhecida internacionalmente por solucionar casos usando seu amplo conhecimento em Teoria dos Grafos, foi chamada para investigar o caso. A empregada alega ter visto a governanta usar a mesma porta para entrar e sair da sala de estar, onde ocorreu o crime. A governanta, contudo, afirma que não poderia ser a pessoa vista pela empregada, pois havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. Charlotte Gomez avaliou a planta da propriedade e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Quem matou a milionária?

Figura 4.1: Planta da casa



Fonte: O autor.

Motivação para a situação problema:

Nessa etapa o professor apresentará o Problema das Pontes de Königsberg e todo o contexto histórico em que foi desenvolvida a teoria dos grafos.

Procurando soluções:

Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O docente deve ficar atento as ideias dos alunos, sendo mediador dessas discussões e conduzindo-os ao caminho desejado.

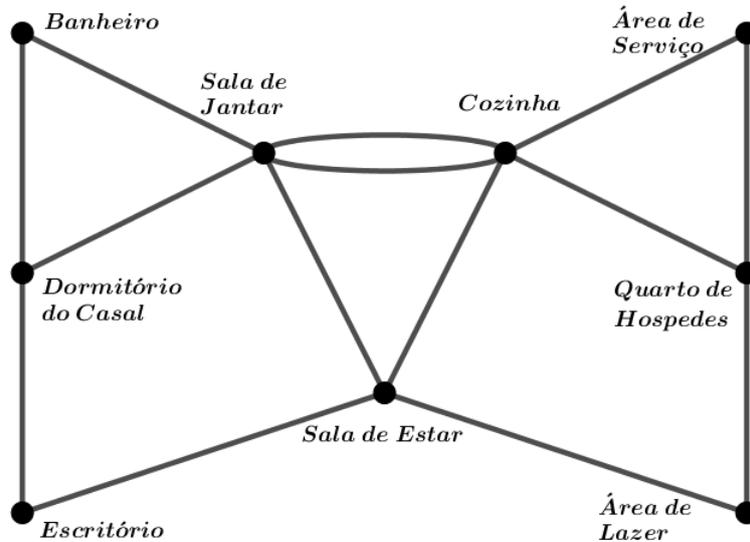
Exposição do conceito e Formalização das ideias:

O professor deve explicar o que é um grafo, as partes que o compõe, grau, alguns de seus tipos e mostrará o Teorema de Euler (explicando os conceitos requeridos para o entendimento do Teorema). Em seguida, apresentará a resolução do Problema das Pontes de Königsberg proposta por Euler.

Retomando o problema inicial:

Após explicar, aos discentes, a teoria e a resolução do problema proposta por Euler, o docente retoma a situação problema inicial. Comenta que o problema inicial pode ser resolvido usando a teoria de Grafos da seguinte forma. A planta da casa será transformada em grafo em que os vértices estarão associados aos cômodos e as portas entre os cômodos serão as arestas, conforme a Figura 4.2.

Figura 4.2: Grafo associado à planta da casa de Júlia Ocesana



Fonte: O autor.

Agora verificar a possibilidade de atravessar todas as portas da residência uma única vez consiste em passar por todas as arestas do grafo uma única vez.

Note que temos quatro vértices de grau dois, dois vértices de grau três, um de grau quatro e dois de grau cinco. Logo, pelo Teorema de Euler, o grafo da Figura 4.2 não admite um ciclo euleriano, pois, apesar de ser conexo, apresenta quatro vértices de grau ímpar. Logo, não é possível passar por todas as portas da casa uma única vez. Sendo assim, constata-se que a governanta mentiu em seu depoimento, o que a torna a principal suspeita.

Exercícios propostos:

Nessa etapa, o professor propõe que os alunos elaborem outros grafos representando situações cotidianas, como por exemplo, o grafo representando os contatos dos colegas de sala salvos na agenda do celular, em que cada aluno será representado por um vértice no grafo e se dois alunos possuem o número do celular do colega, então ele possuem uma ligação, ou seja, uma aresta ligando esses vértices. Além disso, o professor pode fazer perguntas como: Quem é o aluno mais “popular” (baseado no grau)? Há alunos ou grupos isolados (o grafo é conexo)?

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante a exposição do conteúdo, dificuldades encontradas, resolução da situação problema inicial e do exercício proposto.

4.2 Atividade 2: Instalação de lojas na região do Cariri

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

Conteúdo abordado: Construção de grafos, coloração de grafos.

Duração: 2 horas.

Situação problema:

Você é dono de uma determinada rede de lojas de departamentos e deseja instalar uma loja em cada cidade da região do Cariri. No entanto, as instalações das lojas estão sujeitas a seguinte restrição: não pode haver o mesmo produto (vestuário, mobiliário, decoração, produtos eletrônicos, cosméticos, brinquedos, entre outros) em lojas de cidades vizinhas. Supondo ainda que a ideia é atender à maior quantidade de cidades usando a menor variedade de produtos possíveis. Determine uma solução para esse problema.

Figura 4.3: Mapa da região do Cariri cearense



Fonte: Secretaria das Cidades. ¹

Motivação para a situação problema:

Nessa etapa o professor fala um pouco sobre o surgimento do Problema das Quatro Cores e as contribuições de cada matemático nesse teorema.

Procurando soluções:

Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O professor nessa etapa será apenas um mediador, deixando os alunos exporem suas

¹Disponível em: <<https://www.cidades.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/12/2018/03/cariri.png>>. Acesso em: 18 abr. 2020.

ideias e os direcionará para o caminho desejado.

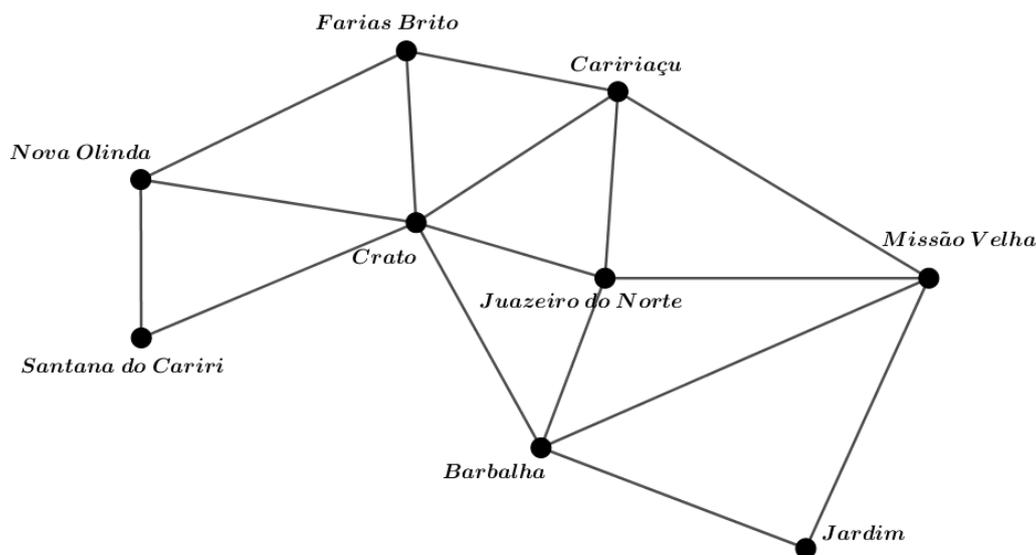
Exposição do conceito e Formalização das ideias:

O professor mostrará como é possível transformar mapas em grafos. Em que cada localidade representa um vértice. As arestas são usadas entre vértices que representam locais de fronteira comum. Também deve ressaltar que os alunos podem encontrar soluções para esse tipo de problema usando até no máximo quatro produtos distintos, ou seja, que podem solucioná-los com dois ou três produtos distintos. Caso seja necessário, relembrar o conceito de grafo.

Retomando o problema inicial:

Nessa etapa o professor irá retomar o problema inicial e responde-lo com a participação da turma. O professor explica que o problema pode ser abordado usando a teoria de grafos, mais precisamente o teorema das quatro cores em que as cores representam produtos das lojas. A seguir, temos a representação em diagrama de grafos do mapa da região do Cariri cearense.

Figura 4.4: Grafo do mapa da região do Cariri cearense

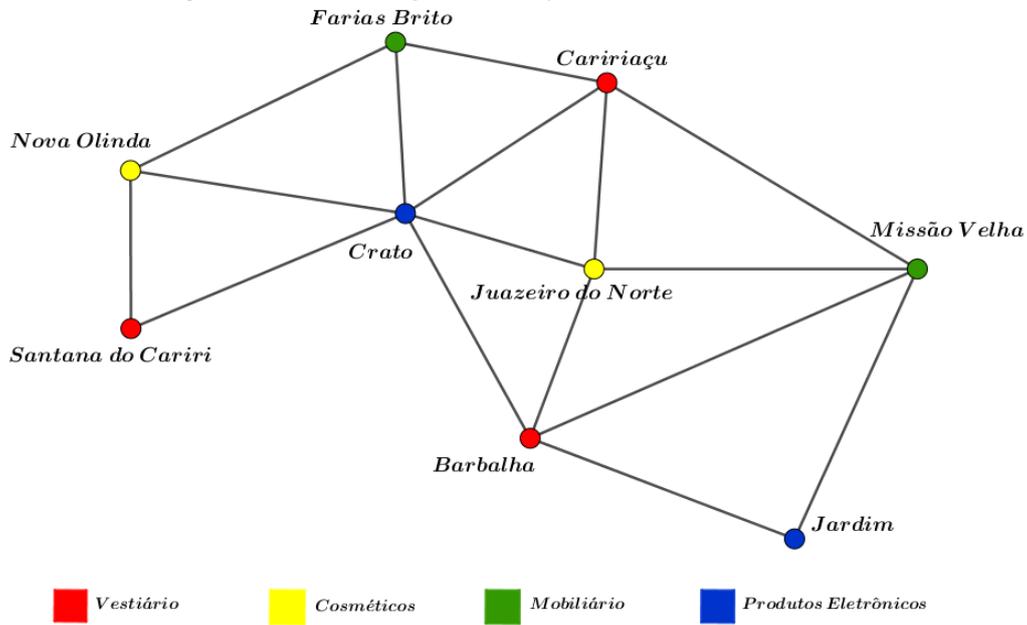


Fonte: O autor.

Note que o vértice que representa a cidade de Nova Olinda está ligado, por meio de uma aresta, com o vértice que representa a cidade de Farias Brito, uma vez que essas cidades possuem fronteiras comuns. Observe ainda que o vértice que representa a cidade de Nova Olinda não está ligado, por meio de uma aresta, com o vértice que representa a cidade de Caririaçu, uma vez que essas cidades não possuem fronteiras comuns. E assim por diante.

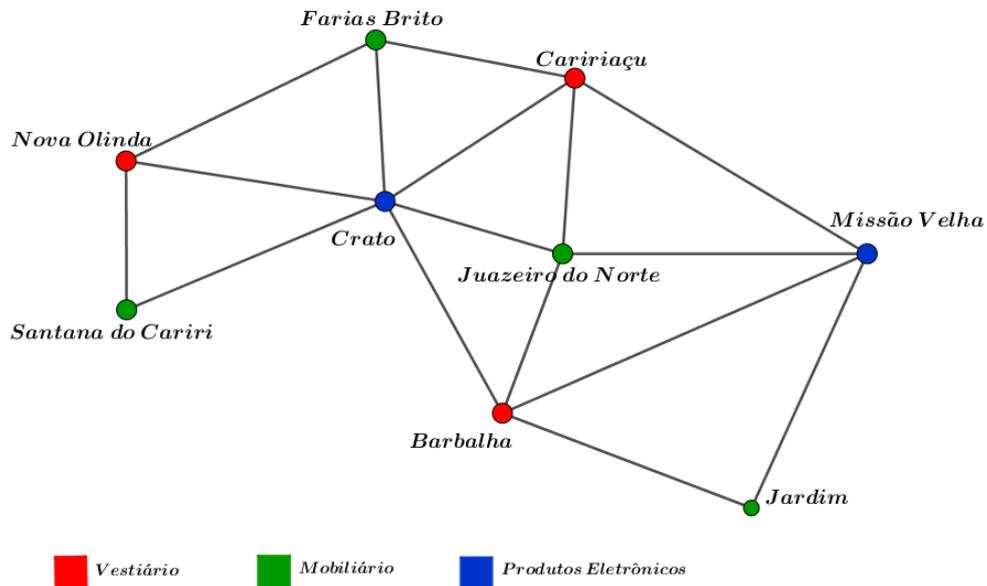
Considere que a cor azul representa produtos eletrônicos, a cor verde representa mobiliário, vermelho o vestiário e amarelo são os cosméticos. Logo para responder o problema bastaria escolher o menor número de vértices com a mesma cor. Nas Figuras 4.6 e 4.5 são possíveis soluções para o problema.

Figura 4.5: Instalação das lojas com quatro produtos



Fonte: O autor.

Figura 4.6: Instalação das lojas com três produtos



Fonte: O autor.

Exercícios propostos:

Nessa etapa, o professor propõem outros mapas para os que os alunos possam fazer o mesmo processo. O docente pode propor o mapa da América do Sul, de cada uma das cinco regiões do país ou dos bairros da sua cidade. Também podem variações com pesos nos vértices. Basta dizer que agora seria importante que as cidades escolhidas tivessem a maior população possível.

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante a exposição do conteúdo e na resolução dos exercícios propostos.

4.3 Atividade 3: O representante comercial

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

Conteúdo abordado: Grafos Hamiltonianos.

Duração: 2 horas.

Situação problema:

Um representante comercial deve visitar clientes instalados nas nove cidades da região do Cariri cearense. Determine qual o menor percurso que o representante deve fazer.

Motivação para a situação problema:

Nessa etapa o professor fala que esse exercício é baseado no Problema do Caixeiro Viajante. Em seguida mostra tal problema na íntegra e ressalta que esse é decorrente do jogo *Around the World* proposto por Hamilton. Feito isso, o docente explica o que são os Grafos Hamiltonianos.

O docente deve fornecer aos alunos o mapa da região do Cariri cearense (Figura:4.3) e as distâncias, em quilômetros, entre as cidades conforme a Tabela 4.1.

Na Tabela 4.1, usamos abreviações para os nomes das cidades. Nova Olinda (NOL); Santana do Cariri (SCA); Crato (CRA); Barbabalha (BAR); Jardim (JAR); Missão Velha (MVE); Juazeiro do Norte (JNO); Caririagu (CAR) e Farias Brito (FBR).

Tabela 4.1: Distâncias entre as cidades

	NOL	SCA	CRA	BAR	JAR	MVE	JNO	CAR	FBR
NOL	0	13	43	62	97	84	52	77	28
SCA	13	0	52	73	109	95	63	88	41
CRA	43	52	0	22	58	44	12	37	46
BAR	62	73	22	0	39	23	11	42	67
JAR	97	109	58	39	0	61	49	78	104
MVE	84	95	44	23	61	0	34	46	89
JNO	52	63	12	11	49	34	0	28	57
CAR	77	88	37	42	78	46	28	0	47
FBR	28	41	46	67	104	89	57	47	0

Fonte: O autor.

Procurando soluções:

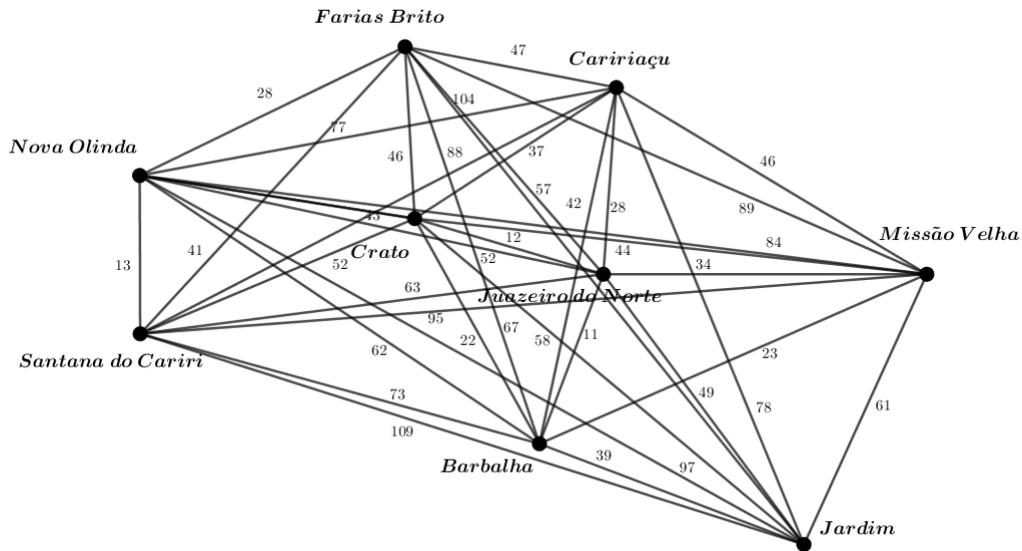
Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O professor nessa etapa será apenas um mediador, deixando os alunos explorarem suas

ideias e os direcionará para o caminho desejado.

Exposição do conceito e Formalização das ideias:

O professor, com a ajuda dos alunos, representa os dados fornecidos na tabela em um grafo. Uma ilustração desse grafo pode ser vista na Figura 4.7.

Figura 4.7: Grafo com as distâncias entre as cidades da região do Cariri cearense



Fonte: O autor.

Feito isso, questiona os alunos sobre o número de caminhos possíveis nesse grafo. Note que temos nove possibilidades de escolha para a primeira cidade. Para a segunda cidade, temos oito possibilidades de escolha e assim por diante. Ao todo temos $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9! = 362880$ possibilidades de caminhos distintos. O professor explica que seria inviável verificar todas essas possibilidades e propõem que utilizem o Algoritmo dos Mínimos Sucessivos para a solução do problema proposto. O algoritmo funciona da seguinte maneira: Primeiramente escolhe-se uma cidade para início do circuito. A partir dessa cidade, escolhe-se a mais próxima e assim sucessivamente, até completar o circuito. Não se deve escolher uma cidade mais de uma vez e deve-se escolher todas as cidades. Terminado o circuito somam-se os quilômetros percorridos. Repete-se este procedimento de forma a obter nove circuitos hamiltonianos, cada um dos quais com início numa das cidades.

Os quadros obtidos encontram-se representados a seguir.

Tabela 4.2: Circuito com início em Nova Olinda

Nova Olinda	
Santana do Cariri	13
Farias Brito	41
Crato	46
Juazeiro do Norte	12
Barbalha	11
Missão Velha	23
Caririagu	46
Jardim	78
Nova Olinda	97
	367

Fonte: O autor.

Tabela 4.3: Circuito com início em Santana do Cariri

Santana do Cariri	
Nova Olinda	13
Farias Brito	28
Crato	46
Juazeiro do Norte	12
Barbalha	11
Missão Velha	23
Caririagu	46
Jardim	78
Santana do Cariri	109
	366

Fonte: O autor.

Tabela 4.4: Circuito com início em Crato

Crato	
Juazeiro do Norte	12
Barbalha	11
Missão Velha	23
Caririagu	46
Farias Brito	47
Nova Olinda	28
Santana do Cariri	13
Jardim	109
Crato	58
	347

Fonte: O autor.

Tabela 4.5: Circuito com início em Barbalha

Barbalha	
Juazeiro do Norte	11
Crato	12
Caririagu	37
Missão Velha	46
Jardim	61
Nova Olinda	97
Santana do Cariri	13
Farias Brito	41
Barbalha	67
	385

Fonte: O autor.

Tabela 4.6: Circuito com início em Jardim

Jardim	
Barbalha	39
Juazeiro do Norte	11
Crato	12
Caririaçu	37
Missão Velha	46
Nova Olinda	84
Santana do Cariri	13
Farias Brito	41
Jardim	104
	387

Fonte: O autor.

Tabela 4.7: Circuito com início em Missão Velha

Missão Velha	
Barbalha	23
Juazeiro do Norte	11
Crato	12
Caririaçu	37
Farias Brito	47
Nova Olinda	28
Santana do Cariri	13
Jardim	109
Missão Velha	61
	341

Fonte: O autor.

Tabela 4.8: Circuito com início em Juazeiro do Norte

Juazeiro do Norte	
Barbalha	11
Crato	22
Caririaçu	37
Missão Velha	46
Jardim	61
Nova Olinda	97
Santana do Cariri	13
Farias Brito	41
Juazeiro do Norte	11
	385

Fonte: O autor.

Tabela 4.9: Circuito com início em Caririaçu

Caririaçu	
Juazeiro do Norte	28
Barbalha	11
Crato	22
Nova Olinda	43
Santana do Cariri	13
Farias Brito	41
Missão Velha	89
Jardim	61
Caririaçu	78
	386

Fonte: O autor.

Tabela 4.10: Circuito com início em Farias Brito

Farias Brito	
Nova Olinda	28
Santana do Cariri	13
Crato	52
Juazeiro do Norte	12
Barbalha	11
Missão Velha	23
Caririagu	46
Jardim	78
Farias Brito	104
	367

Fonte: O autor.

Retomando o problema inicial:

Para a solução do nosso problema escolhemos o percurso de menor distância. Vale ressaltar aos alunos que essa escolha de percurso está baseado no critério distância, o que não significa ser a melhor solução global.

A análise dos quadros nos leva a concluir que existe o melhor circuito (mais econômico). Note que no quadro 4.7, temos o circuito mais econômico.

Note que o circuito iniciado em Missão Velha e segue para Barbalha, Juazeiro do Norte, Crato, Caririagu, Farias Brito, Nova Olinda, Santana do Cariri e Jardim, voltando à Missão Velha, temos um total de 341 km.

Exercícios propostos:

Nessa etapa, o professor propõe que os alunos elaborem e resolvam um problema parecido com o inicial, usando para isso cidades da sua região ou bairros de sua cidade.

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante a exposição do conteúdo, na resolução da situação problema e dos exercícios propostos.

4.4 Atividade 4: Desafio do Dominó

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

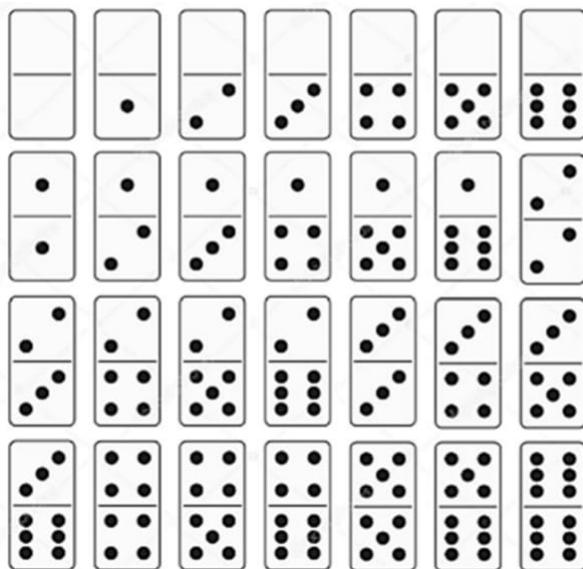
Conteúdo abordado: Teorema de Euler.

Duração: 2 horas.

Situação problema:

Considere o dominó da Figura 4.8. É possível, respeitando as regras do jogo, construir uma linha reta usando todas as peças do dominó? E construir um círculo?

Figura 4.8: Ilustração das peças de um dominó.



Fonte: Indagação. ²

Motivação para a situação problema:

Nessa etapa o professor explica as regras do dominó de 28 peças aos alunos.

Procurando soluções:

Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O professor, caso queira, pode levar esse jogo para a sala de aula, uma vez que facilitará o entendimento dos alunos.

Exposição do conceito e Formalização das ideias:

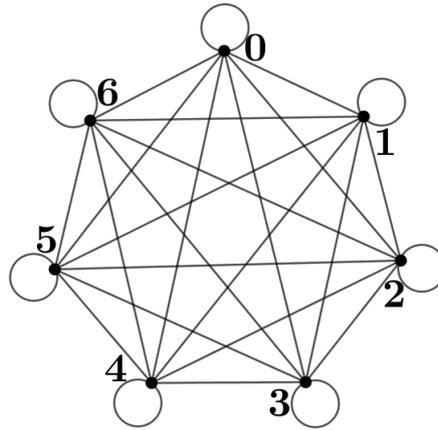
O professor explica aos alunos que esse problema pode ser solucionado sem precisar das peças do jogo, apenas usando a teoria de Grafos. Feito isso, explicará aos discentes o que são caminhos, ciclos e grafos eulerianos. Posteriormente, apresentará teorema de Euler e explicará as condições necessárias e suficientes para que um grafo apresente um caminho euleriano.

Retomando o problema inicial:

Nessa etapa o professor irá retomar o problema inicial e respondê-lo com a participação da turma. Inicialmente, o professor mostrará aos alunos como representar o dominó em um grafos. Cada valor das peças serão os vértices e a peça será a aresta do grafo. Por exemplo, a peça 0 – 1 será representada por uma aresta ligando o vértice do número 0 ao vértice do número 1. A representação desse grafo está ilustrada na Figura 4.9.

²Disponível em: <<https://www.indagacao.com.br/2018/08/ucb-2018-imagem-mostra-as-28-pecas-do-dominio-chamado-duplo-seis.html>>. Acesso em: 18 abr. 2020.

Figura 4.9: Dominó representadas em um grafo



Fonte: O autor.

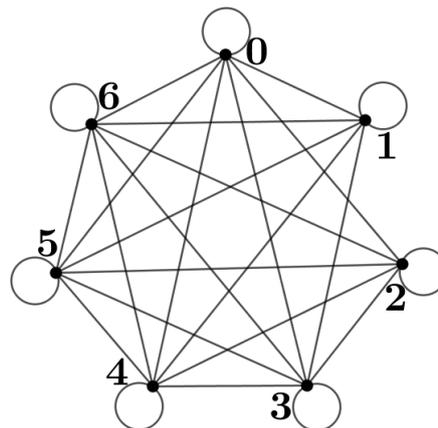
Note que todos os vértices do grafo da Figura 4.9 apresentam grau par (de cada vértice partem 6 arestas e mais um laço, totalizando grau 8), logo pelo teorema de Euler, temos que o grafo é Euleriano. Sendo assim, ele possui um ciclo euleriano (ou seja, podemos formar um círculo com as peças) e conseqüentemente uma reta.

Exercícios propostos:

O professor propõem um novo problema aos alunos: Seria possível construir um círculo faltando uma das peças do dominó?

Sem perda de generalidade, considere que está faltando a peça 1 – 2 do jogo. Logo, sua representação em diagrama de grafos pode ser observada na Figura 4.10.

Figura 4.10: Dominó faltando a peça 1 – 2 representadas em um grafo



Fonte: O autor.

Note que agora os vértices 1 e 2 apresentam grau ímpar, sendo assim pelo Corolário 2.5.1, existirá uma caminho que começará pelo vértice 1 (ou 2) e terminará em 2 (ou 1). No entanto, não conseguiremos fechar o círculo.

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante a exposição do conteúdo e na resolução dos exercícios propostos.

4.5 Atividade 5: O problema da coleta de lixo

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

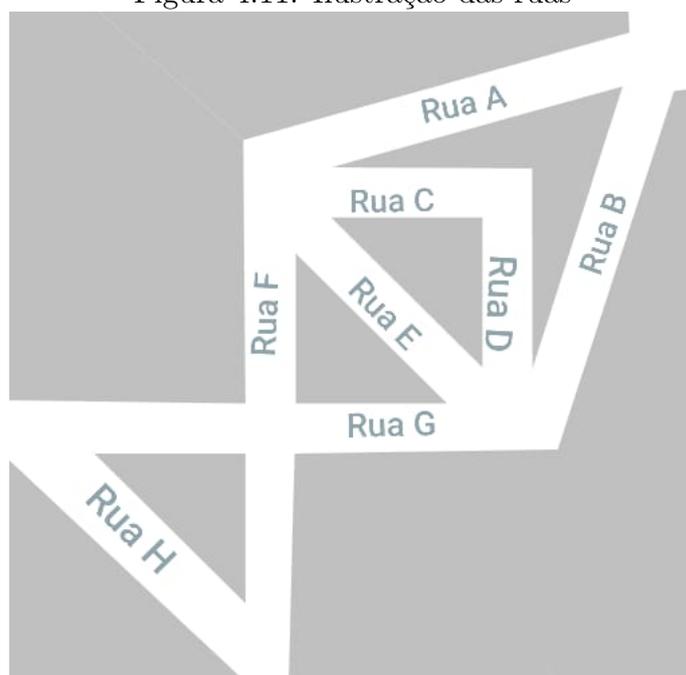
Conteúdo abordado: Ciclo Euleriano.

Duração: 2 horas.

Situação problema:

Um caminhão de uma determinada empresa, responsável pela coleta de lixo de a cidade, percorre diariamente as ruas ilustradas na Figura 4.11. Determine o trajeto que minimiza a distância percorrida pelo caminhão sem comprometer a eficácia do seu trabalho, ou seja, que o caminhão não deixa de passar em nenhuma rua.

Figura 4.11: Ilustração das ruas



Fonte: O autor.

Motivação para a situação problema:

Nesta fase o professor explica o que o problema que deu origem a essas questões de otimização foi o Problema do Carteiro Chinês e apresenta o problema aos alunos.

Procurando soluções:

Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O professor irá apenas mediar as discussões, deixando os alunos apresentarem suas soluções (ou ideias) e os direcionará, por meio de questionamentos, para o caminho desejado.

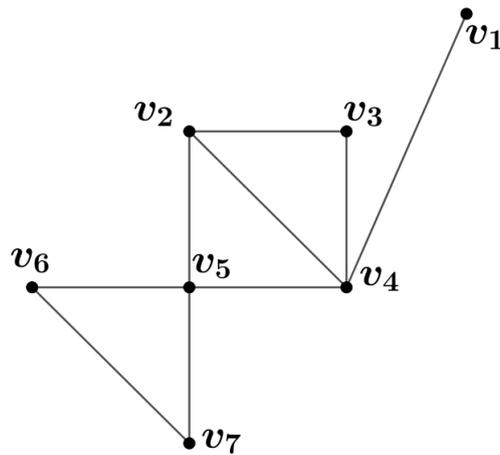
podemos ir para v_2 ou v_4 , pois nenhum deles forma ponte. Escolhemos v_2 , conforme Figura 4.13.

Tabela 4.11: Primeira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2

Fonte: O autor.

Figura 4.13: Primeira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

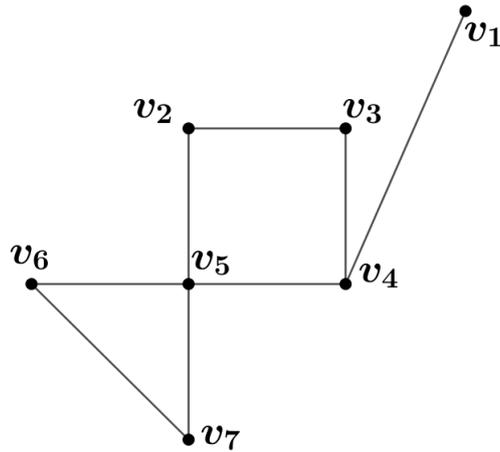
De v_2 , podemos ir para v_3 , v_4 ou v_5 pois nenhum deles forma ponte. Escolhemos v_4 , conforme Figura 4.14.

Tabela 4.12: Segunda iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4

Fonte: O autor.

Figura 4.14: Segunda iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

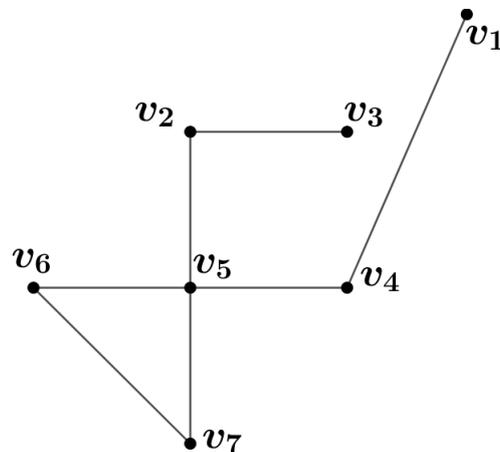
De v_4 , podemos seguir para v_1 , v_3 ou v_5 , no entanto, v_1 forma uma ponte. Logo devemos escolher entre v_3 ou v_5 . Escolhemos ir para v_3 . A Figura 4.15 mostra essa situação.

Tabela 4.13: Terceira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3

Fonte: O autor.

Figura 4.15: Terceira iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

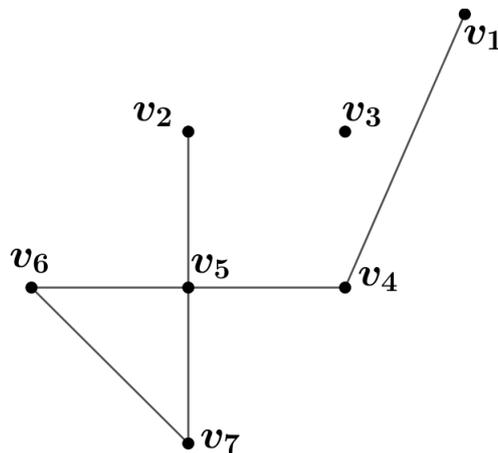
De v_3 , só nos resta seguir para v_2 .

Tabela 4.14: Quarta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2

Fonte: O autor.

Figura 4.16: Quarta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

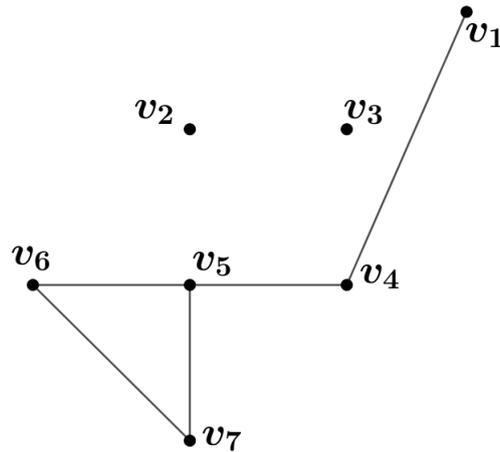
De v_2 , só nos resta ir para v_5 .

Tabela 4.15: Quinta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5

Fonte: O autor.

Figura 4.17: Quinta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

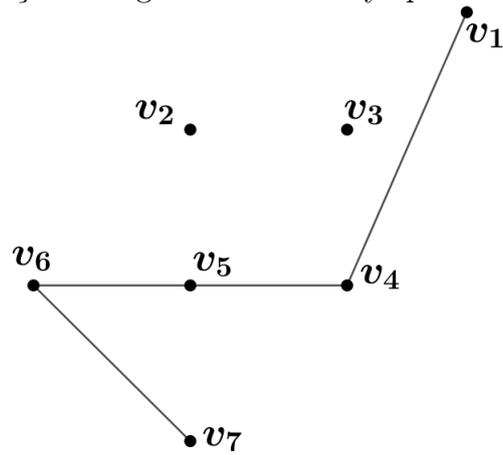
De v_5 , podemos seguir para v_4 , v_6 ou v_7 , no entanto, v_4 forma uma ponte. Logo devemos escolher entre v_6 ou v_7 . Escolhemos ir para v_7 . A Figura 4.18 mostra essa situação.

Tabela 4.16: Sexta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7

Fonte: O autor.

Figura 4.18: Sexta iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

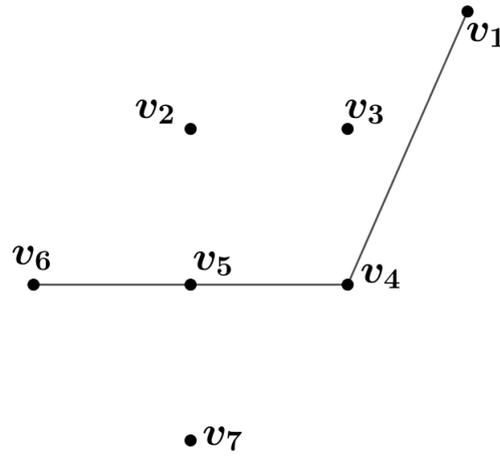
De v_7 , só nos resta ir para v_6 .

Tabela 4.17: Sétima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7$	v_7, v_6

Fonte: O autor.

Figura 4.19: Sétima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

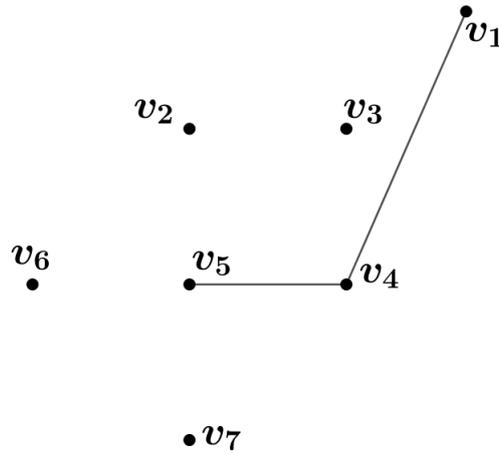
De v_6 , só nos resta ir para v_5 .

Tabela 4.18: Oitava iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7$	v_7, v_6
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6$	v_6, v_5

Fonte: O autor.

Figura 4.20: Oitava iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

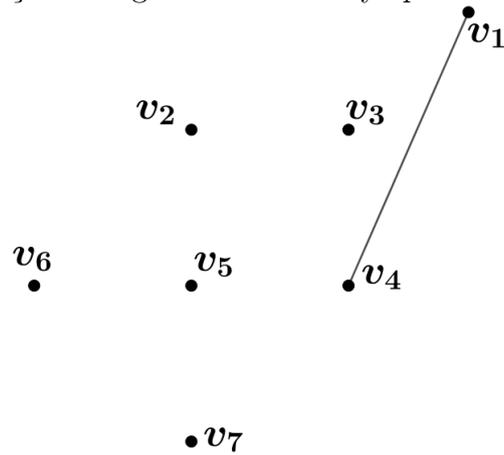
De v_5 , só nos resta ir para v_4 .

Tabela 4.19: Nona iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7$	v_7, v_6
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6$	v_6, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5$	v_5, v_4

Fonte: O autor.

Figura 4.21: Nona iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

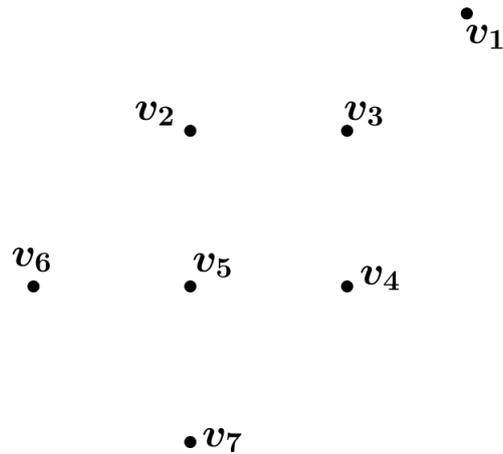
De v_4 , só nos resta ir para v_1 .

Tabela 4.20: Décima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7$	v_7, v_6
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6$	v_6, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5$	v_5, v_4
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$	v_4, v_1

Fonte: O autor.

Figura 4.22: Décima iteração do algoritmo de Fleury aplicado no grafo da Figura 4.12



Fonte: O autor.

Note que todos os vértices do grafo da Figura 4.22 estão desconectados. Portanto, encontramos um circuito euleriano e finalizamos assim, o Algoritmo de Fleury.

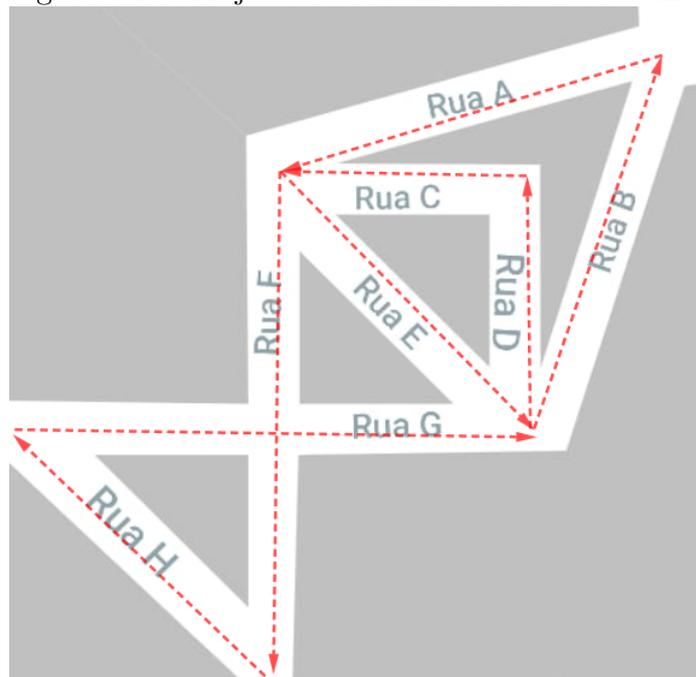
Tabela 4.21: Percurso do algoritmo de Fleury no Grafo da Figura 4.12

Rota	Aresta
v_1	v_1, v_2
v_1, v_2	v_2, v_4
v_1, v_2, v_4	v_4, v_3
v_1, v_2, v_4, v_3	v_3, v_2
v_1, v_2, v_4, v_3, v_2	v_2, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5$	v_5, v_7
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7$	v_7, v_6
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6$	v_6, v_5
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5$	v_5, v_4
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$	v_4, v_1
$v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$	

Fonte: O autor.

Note que na última linha da tabela 4.21 chegamos à rota: $v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$, ou seja, o caminhão da coleta de lixo deve iniciar seu trajeto percorrendo a Rua A, em seguida as ruas E, D, C, F, H, G e B. Dessa forma, o caminhão passará uma única vez por cada uma das ruas. Esse trajeto está ilustrado na Figura 4.23.

Figura 4.23: Trajeto do caminhão da coleta de lixo



Fonte: O autor.

Exercícios propostos:

Nessa etapa, o professor propõe que os alunos formem grupos e pesquisem os mapas dos bairros da sua cidade e tentem formar trajetos semelhantes ao do problema proposto.

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante apresentação do conteúdo e no trabalho em grupo dos exercícios propostos.

4.6 Atividade 6: O turista

Público-alvo: 2º ano do ensino médio.

Conteúdo abordado: Construção de árvores geradoras mínimas.

Duração: 2 horas.

Situação problema:

A Figura 4.24 ilustra os estados da região nordeste com suas respectivas capitais. Um turista deseja fazer uma viagem passando uma única vez por todas elas. Como ele pode fazer isso de modo que percorra a menor distância possível?

Figura 4.24: Mapa da região Nordeste



Fonte: Desenhos para colorir. ³(adaptada pelo autor)

Motivação para a situação problema:

Nessa etapa o professor apresenta o problema de fazer o mínimo de buracos em tanques vizinhos para esvaziá-los e sua solução. Esse problema está presente em Almeida (2018, p. 11).

Procurando soluções:

Nessa fase os alunos discutem formas para solucionar a atividade proposta. O docente deve fornecer a Tabela 4.22 com as distâncias aéreas entre as capitais. Também deve mediar discussões entre os alunos, guiando-os para o caminho desejado.

Na Tabela 4.22, usamos abreviações para os nomes das capitais. São Luís (SLU); Teresina (TER); Fortaleza (FOR); Natal (NAT); João Pessoa (JPE); Recife (REC); Maceió (MAC); Aracaju (ARA) e Salvador (SAL).

Exposição do conceito e Formalização das ideias:

O professor dirá que é possível transformar a situação problema em um grafo e que para resolvê-la será necessário encontrar sua árvore geradora mínima. Feito isso, o professor explicará o que é uma árvore de um grafo, árvore geradora e árvore

³Disponível em: <<https://www.colorir-desenho.com/mapa-do-brasil-regiao-nordeste?cn-reloaded=1>>. Acesso em: 18 abr. 2020.

⁴Disponível em: <<http://www.itatrans.com.br/distancia.html>>. Acesso em: 26 mar. 2020.

Tabela 4.22: Distâncias aéreas entre as capitais do Nordeste

	SLU	TER	FOR	NAT	JPE	REC	MAC	ARA	SAL
SLU	0	329	652	1071	1162	1209	1234	1226	1323
TER	329	0	495	843	905	934	929	903	994
FOR	652	495	0	435	555	629	730	815	1028
NAT	1071	843	435	0	151	253	434	604	875
JPE	1162	905	555	151	0	104	299	486	763
REC	1209	934	629	253	104	0	202	398	675
MAC	1234	929	730	434	299	202	0	201	475
ARA	1226	903	815	604	486	398	201	0	277
SAL	1323	994	1028	875	763	675	475	277	0

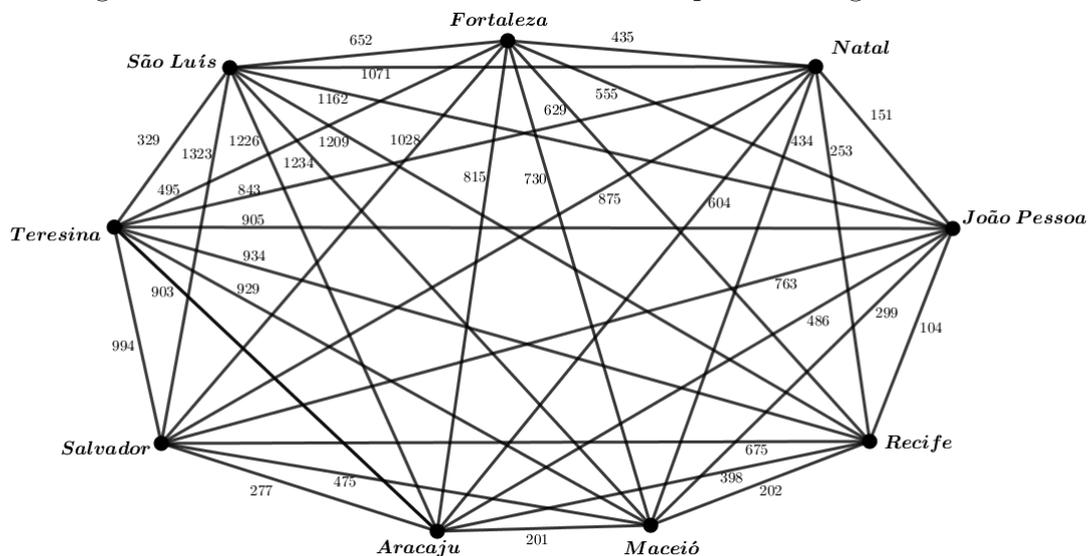
Fonte: Distância entre as Capitais Brasileiras.⁴

geradora mínima. Em seguida, apresentará o Algoritmo de Kruskal que será usado para encontrar árvores geradoras mínimas em grafos conexos valorados (com pesos).

Retomando o problema inicial:

Após explicar a teoria aos discentes, o professor construirá um grafo com os dados da Tabela 4.22 com a ajuda dos mesmos em que os vértices serão as capitais e as arestas serão as rotas entre essas cidades cujos respectivos pesos serão as distâncias entre elas. O grafo com essas informações se encontra na Figura 4.25.

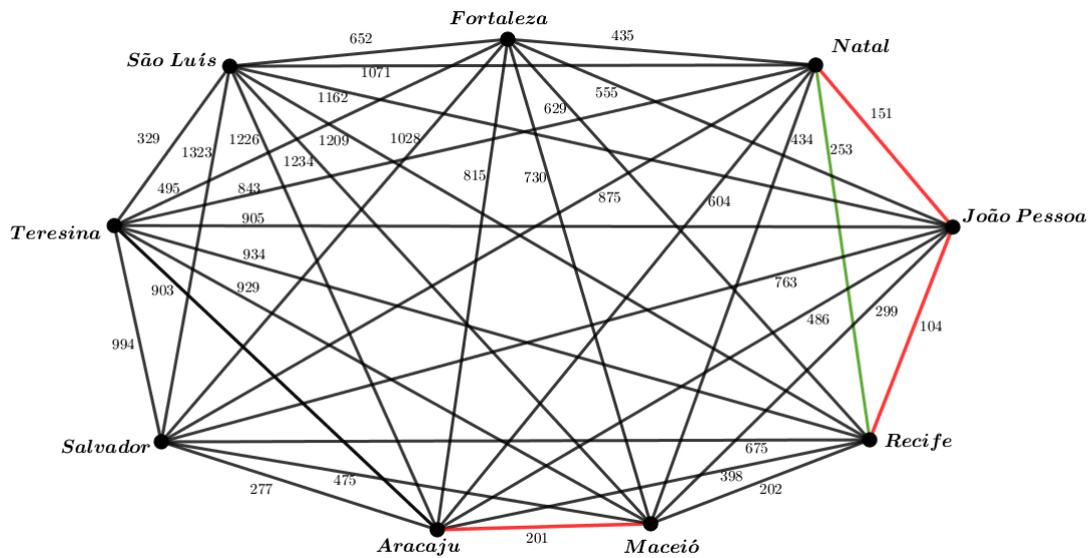
Figura 4.25: Grafo das distâncias entre as capitais da região Nordeste



Fonte: O autor.

Seguindo, dirá aos alunos que o problema inicial pode ser visto como encontrar a árvore geradora mínima do grafo da Figura 4.25 e que usarão o Algoritmo de Kruskal para isso. Mostraremos a seguir como ficará a utilização do algoritmo na resolução do problema. Inicialmente, faremos a inclusão da aresta de menor peso.

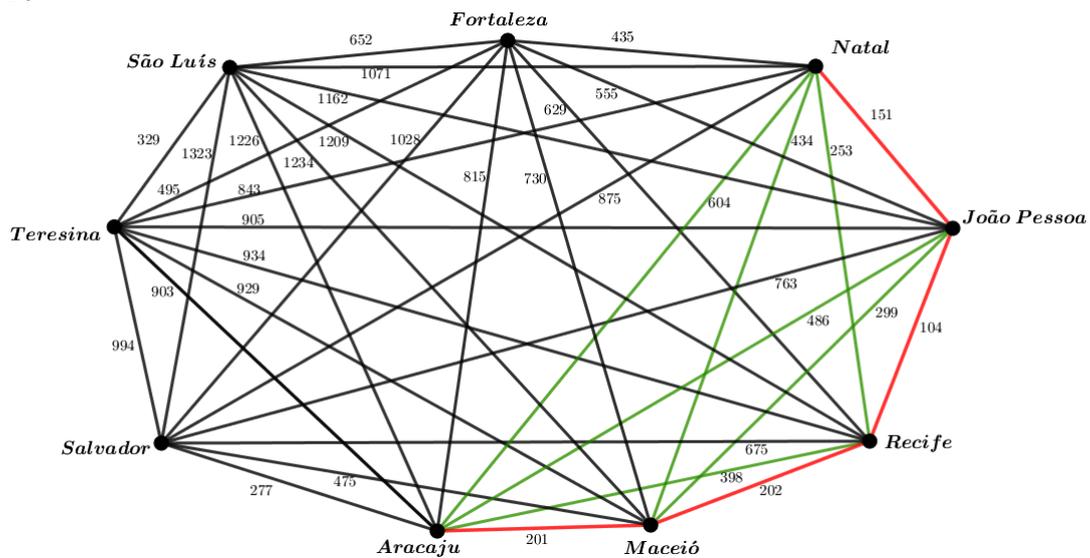
Figura 4.28: Terceira iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25



Fonte: O autor.

Seguindo com a inclusão da aresta de menor peso, temos agora a que liga as cidades de Recife e Maceió de peso 202. Com a inclusão dessa aresta, temos a exclusão das que formam ciclos. São elas: a aresta ligando as cidades de Natal e Aracaju (peso 604), Natal e Maceió (peso 434), João Pessoa e Aracaju (peso 486), João Pessoa e Maceió (peso 299) e entre as cidades de Recife e Aracaju (peso 398).

Figura 4.29: Quarta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25

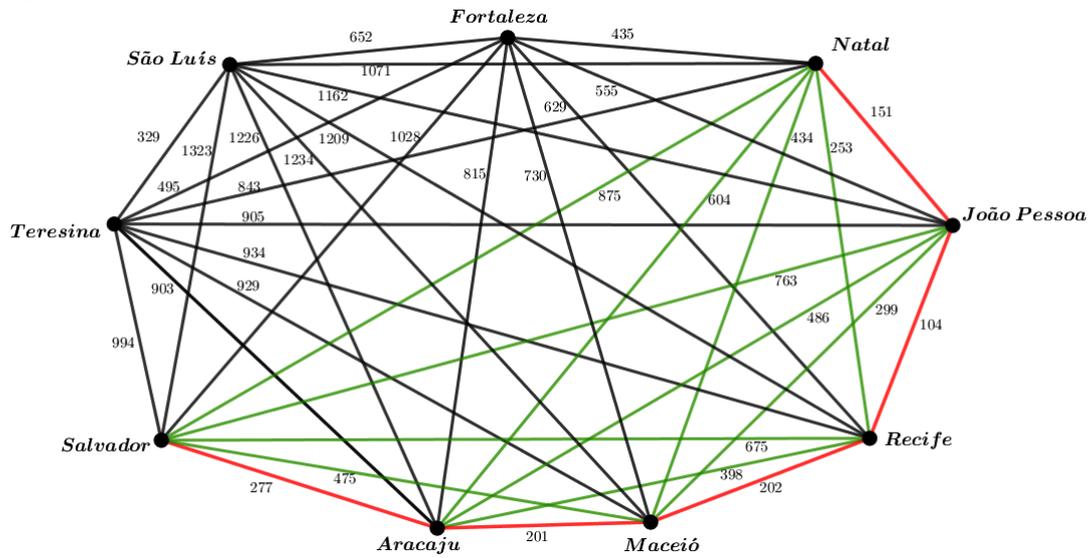


Fonte: O autor.

A próxima aresta de menor peso é a que liga as cidades de Aracaju e Salvador (de peso 277). Observe que essa aresta não forma ciclo com as adicionadas ante-

riormente. Com a inclusão dessa aresta, temos a exclusão das que formam ciclos. São elas: a aresta ligando as cidades de Natal e Salvador (peso 875), João Pessoa e Salvador (peso 763), Recife e Salvador (peso 675) e entre as cidades de Maceió e Salvador (peso 475). Conforme a Figura 4.30.

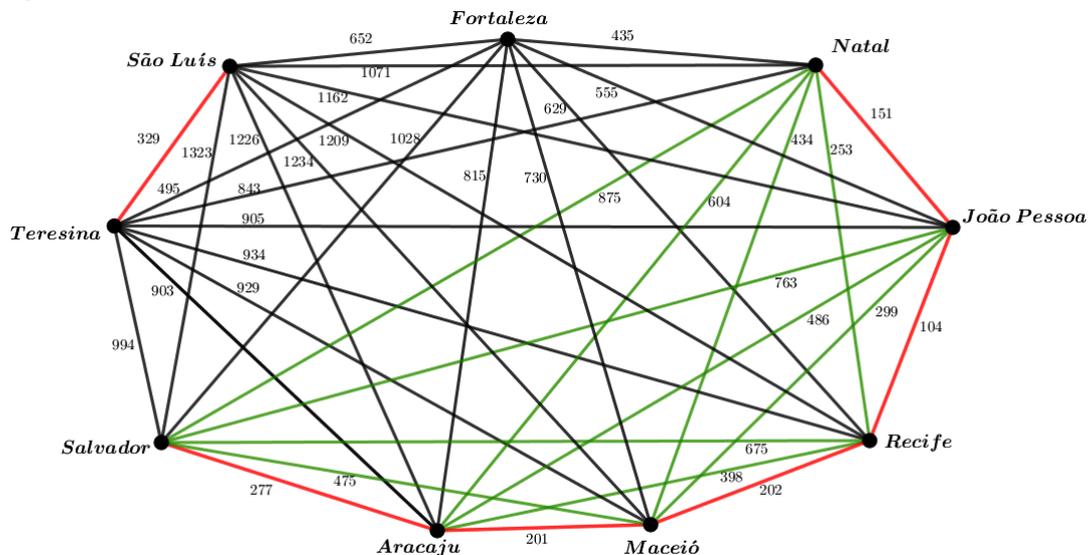
Figura 4.30: Quinta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25



Fonte: O autor.

A próxima aresta de menor peso é a que liga as cidades de São Luís e Teresina, que tem peso 329 e pode ser adicionada sem a formação de ciclos. Temos agora, a situação da Figura 4.31.

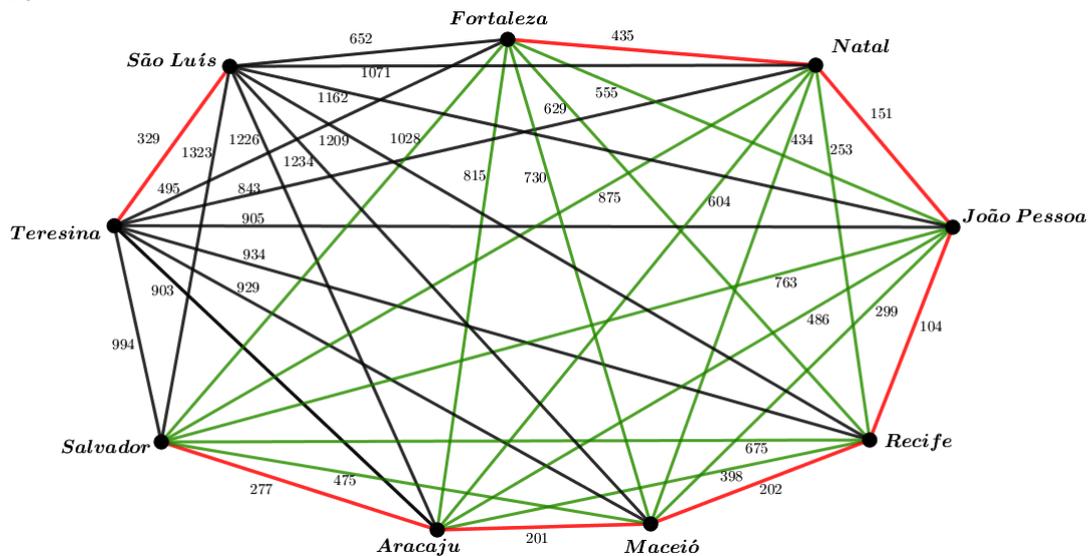
Figura 4.31: Sexta iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25



Fonte: O autor.

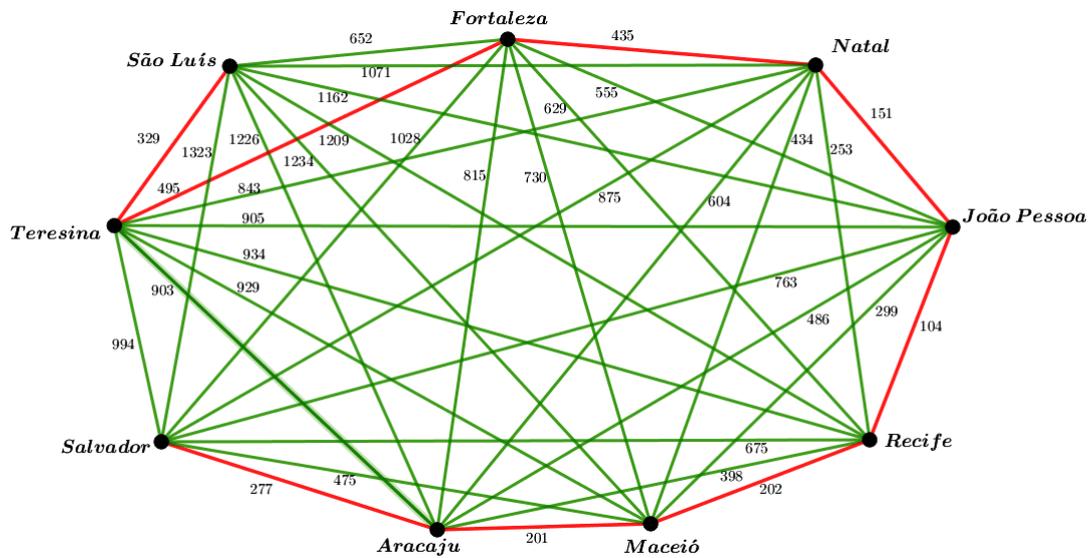
Temos que a próxima aresta à ser adicionada a árvore é a que liga as cidades de Fortaleza e Natal (de peso 435). Com a inclusão dessa aresta, temos a exclusão das que formam ciclos. São elas: a aresta ligando as cidades de Fortaleza e João Pessoa (peso 555), Fortaleza e Recife (peso 629), Fortaleza e Maceió (peso 730), Fortaleza e Aracaju (peso 815) e entre as cidades de Fortaleza e Salvador (peso 1028). Conforme ilustrado na Figura 4.32.

Figura 4.32: Sétima iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25



Continuando com a aplicação do algoritmo de Kruskal, temos próxima aresta a ser adicionada a árvore será a aresta que liga as cidades de Teresina e Fortaleza (peso 495), pois essa não forma ciclos. Note ainda que, a inclusão de qualquer outra aresta implicará na formação de um ciclo. Logo excluiremos as demais aresta do grafo, conforme ilustrado na Figura 4.33.

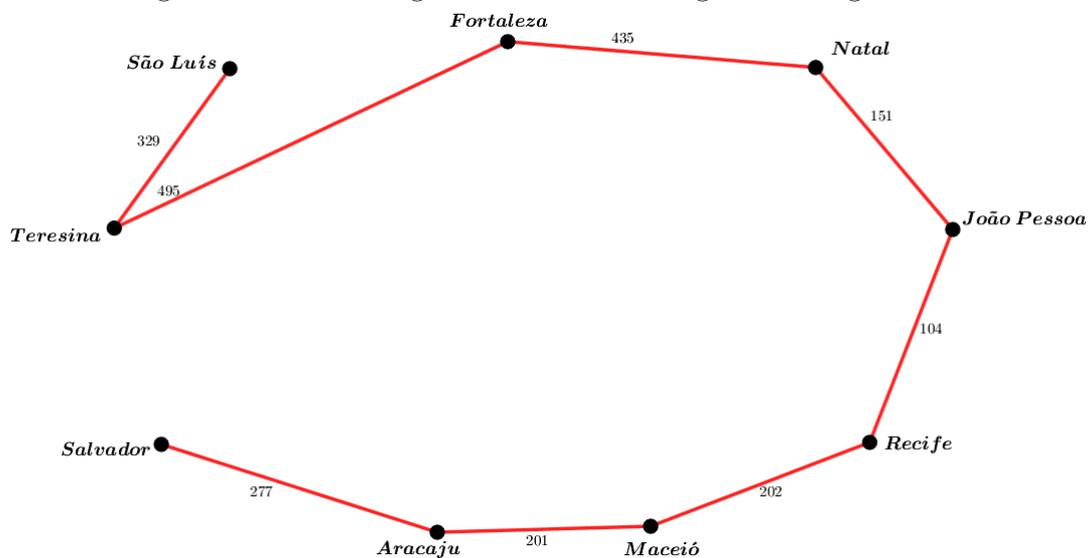
Figura 4.33: Oitava iteração do algoritmo de Kruskal aplicado no grafo da Figura 4.25



Fonte: O autor.

Note na Figura 4.33 que todos os vértices estão conectados e o Algoritmo de Kruskal é encerrado. Assim, construímos a árvore geradora mínima do grafo que representa as distâncias aéreas entre as capitais dos estados do nordeste. Essa árvore é ilustrada na Figura 4.34.

Figura 4.34: Árvore geradora mínima do grafo da Figura 4.25



Fonte: O autor.

Portanto, uma forma desse turista visitar todas essas capitais uma única vez com a menor distância é seguir o trajeto iniciado em São Luís e seguindo por Teresina, Fortaleza, Natal, João Pessoa, Recife, Maceió, Aracaju e Finalizando em Salvador. Pode iniciar o trajeto em Salvador e finalizar em São Luís.

Exercícios propostos:

Nessa etapa, o professor propõem outros mapas para os que os alunos possam fazer o mesmo processo usando o Algoritmo de Kruskal. Ele pode dividir a turma em grupo e cada um dele ficar com uma das outras quatro regiões do país.

Avaliação:

A aula será avaliada conforme participação dos alunos durante a resolução da situação problema inicial e o exercício em grupo.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos introdutórios sobre a Teoria de Grafos, enfatizando problemas clássicos e os algoritmos desenvolvidos a partir deles. Ademais, procuramos disponibilizar ao professor do Ensino Básico um material, envolvendo a Teoria de Grafos, que proporcione ao aluno do ensino médio maior interesse pela matemática.

Acreditamos que o Ensino Básico necessita enfatizar um pouco mais tópicos de matemática discreta, especialmente, Teoria dos Grafos, tendo em vista que o trabalho com esse conteúdo possibilita contextualizar situações, formar modelos, resolver problemas, além de exigir poucas habilidades de cálculo.

Procuramos assim escolher problemas atraentes, que abrangessem o conteúdo proposto através de atividades nas quais fossem desenvolvidos conceitos e habilidades sugeridos nos PCNEM e na BNCC, como indução, dedução, organização lógica, demonstração, raciocinar, representar, comunicar, argumentar, dentre outras.

Concluimos que a inclusão da Teoria dos Grafos seria uma alternativa de conteúdo a ser trabalhado com os alunos da Educação Básica, e sem grandes obstáculos, pois atende às expectativas de aplicabilidade do conhecimento adquirido na resolução de situações problema encontradas no cotidiano, além de ser uma porta de entrada para a apresentação de novos conteúdos. Esperamos que o professor do Ensino Básico conheça um pouco mais deste tema e utilize, em sala de aula, parte das atividades envolvendo Teoria de Grafos aqui sugeridos. Desta forma, acreditamos contribuir para que o aluno neste nível de educação tenha maior interesse pela Matemática ao receber um ensino compatível com as novas exigências do mundo atual. Sugerimos ainda que, motivados pelo conteúdo abordado neste trabalho, os professores, alunos e demais leitores sigam estudando e pesquisando outras aplicações da Teoria dos Grafos, tanto na própria Matemática como em outras áreas do conhecimento.

Referências

- ALMEIDA, L. de Avellar e. *Árvores: Algoritmos e Aplicações*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2018.
- AMASIFEN, J. C. C.; ROMERO, R.; MANTOVANI, J. R. S. Algoritmos evolutivos dedicados à reconfiguração de redes radiais de distribuição sob demandas fixas e variáveis - estudo dos operadores genéticos e parâmetros de controle. *Revista Controle & Automação*, v. 16, n. 3, p. 303–317, Aug, Sep, Oct 2005.
- BASE Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Ministério da Educação.
- BOAVENTURA, E. de O.; URIBE, E. B. O. Estudo sobre grafos e algumas aplicações. *Colloquium Exactarum*, v. 08, n. Especial, p. 26–33, jul–dez 2016.
- BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 2003.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS*. 5. ed. Nova York: Elsevier Science Publishing Co., Inc. Empresas 52 Vanderbilt Avenue, 1982.
- BRASIL. *LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996*. Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm>. Acesso em: 18 jul. 2020.
- BRITO, L. V. *Teoria dos Grafos e uma Aplicação*. Vitória da Conquista, 2015. 48 f.
- CARVALHO, D. A. de; MALDONADO, M. O problema do carteiro chinês: Modelagem e métodos de solução. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, p. 010162–1–010162–2, 2018.
- CARVALHO, M. A. M. *BCC204 - Teoria dos Grafos*. [S.l.], 2019. 40 slides. Disponível em: http://www.decom.ufop.br/marco/site_media/uploads/bcc204/19_aula_19.pdf. Acesso em: 23 jul. 2020.

- DIESTEL, R. *GRAPH THEORY*. 2. ed. Nova York: Springer book, 2000.
- FARIAS, M. S. R. *Algoritmos Evolucionários Aplicados ao Problema do Caixeiro Viajante Multiobjetivo*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Maceió, Alagoas, Brasil, 2008.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. 1. ed. São Paulo: USP/SBM, 2011.
- LIMA, C. L. G. de. *Um estudo sobre Teoria dos Grafos e o Teorema das Quatro Cores*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade de São Paulo - USP, São Carlo, São Paulo, Brasil, 2016.
- LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 12, p. 1–7, Jan 2010.
- LIMA, J. F. de A. *Modelagem e Resolução de Problemas por meio de Grafos: Aplicações no Ensino Básico*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Bahia, Brasil, 2014.
- ORIENTAÇÕES Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.
- PAES, F. G. *Otimização de Rotas para a Coleta do Lixo Doméstico: Um Tratamento GRASP do Problema do Carteiro Chinês Misto (PCCM)*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- PEREIRA, G. M. R.; CÂMARA, M. A. da. Algumas aplicações da teoria dos grafos. *FAMAT em Revista Controle & Automação*, v. 11, p. 67–80, Oct 2008.
- PRESTES, E. Introdução à teoria dos grafos. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Informática - Departamento de Informática Teórica (2016). 2012.
- RODRIGUES, R. de F. *Times Assíncronos para a Resolução de Problemas de Otimização Combinatória com Múltiplas Funções Objetivo*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil, 1996.
- ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 1, p. 299–311, Mai 2012.

- SANTOS, M. de S. *Ciclos Hamiltonianos em Grafos*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.
- SOUSA, L. O teorema das quatro cores. *Millenium*, v. 24, p. 125–151, out. 2001.
- VIANA JR., J. *Uma heurística baseada em colônia de formigas para o Problema do Carteiro Chinês Misto*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Ciência da Computação., Belo Horizonte, 2010.
- VULCANI, R. de L. M. *Grafos Eulerianos e Aplicações*. Dissertação (Ph.D. dissertation) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2015.
- WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory*. 2. ed. Delhi: Pearson Education, 2001.
- ZABALA, A. *A Prática Educativa: Como ensinar*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. Tradução: Ernani F. da F. Rosa.