UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ÁGDA TALITA GALVÃO

SOMAS, SOMATÓRIOS E TERMOS NÃO INTEIROS

PONTA GROSSA
2020

ÁGDA TALITA GALVÃO

SOMAS, SOMATÓRIOS E TERMOS NÃO INTEIROS

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas

PONTA GROSSA
2020

G182

Galvão, Ágda Talita

Somas, somatórios e termos não inteiros / Ágda Talita Galvão. Ponta Grossa, 2020.

100 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas.

1. Somas. 2. Somatórios. 3. Séries. 4. Somatórios fracionários. 5. Formação inicial do professor de matemática. I. Chagas, Jocemar de Quadros. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

ÁGDA TALITA GALVÃO

"SOMAS, SOMATÓRIOS E TERMOS NÃO INTEIROS"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 23 de Maio de 2020.

Membros da Banca:

Dr. Jocemar de Quadros Chagas - (UEPG) – Presidente

Dr. Marcos Teixeira Alves - (UEPG)

Dra. Nara Bobko - (UTFPR)

AGRADECIMENTOS

Agradecer é reconhecer que esse trabalho, que por muitas vezes pareceu tão solitário, só se tornou possível pela força coletiva de apoio, incentivo, amizade e amor. Infelizmente não há espaço para agradecer nominalmente a todos pelas contribuições diretas ou indiretas, mas com certeza estão em meu coração.

Primeiramente, agradeço a Deus, pela minha vida, por iluminar meus caminhos e por ter me dado forças, determinação, sabedoria e tudo aquilo de que precisei para prosseguir na caminhada, permitido realizar mais este sonho.

Aos meus pais João Nelvir e Carmelita pelo dom da vida, pelo amor, pelo cuidado, pelo acreditar, pelo incentivo e pela dedicação em suas vidas para eu estudar.

A todos os meus familiares, que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade, comemorando a cada conquista minha, apoiando nos momentos de dificuldade, pois suportaram meus momentos de angústias, ansiedades e nervosismos, tiveram tanta paciência e compreensão e sempre buscaram uma maneira de aliviar minhas tensões e trazerem um sorriso ao meu rosto. Em especial à tia Alaiz por todo cuidado que tem comigo, pelo apoio que sempre deu em meus estudos.

Aos meus queridos avós (*in memoriam*) que sempre trouxeram tanto carinho e doçura à minha vida, que incentivavam os meus estudos e sempre se orgulhavam ao falar que tinham uma neta professora.

Aos meus nobres e admirados professores que contribuíram de maneira grandiosa para o enriquecimento da minha formação ao longo dessa jornada de aprendizagem, que me incentivaram e que me fizeram buscar cada vez mais o conhecimento, e que principalmente me fizeram amar a Matemática e ser apaixonada pela minha profissão, buscando sempre me inovar e aperfeiçoar minhas metodologias, pois tive os melhores exemplos de dedicação ao ensinar. Toda a minha gratidão pelo apoio e encorajamento em toda a minha caminhada pessoal, educacional e profissional.

Ao professor Marciano Pereira e à professora Joseli Almeida Camargo pelas orientações durante os projetos de Iniciação Científica e Extensão, respectivamente, por todo incentivo em viver a vida acadêmica de forma mais efetiva, por compartilharem parte de seus conhecimentos com muito afinco e dedicação com grandes e preciosas intervenções ao longo da minha formação, por toda a paciência e compreensão em dificuldades e pelo encorajamento para vencer os desafios da busca do saber.

Em especial agradeço ao professor Jocemar de Quadros Chagas por me orientar nessa jornada, pela confiança conferida a mim, pelo incentivo ao meu crescimento pessoal e acadêmico, pela dedicação, compreensão, entusiasmo e grande desprendimento em ajudar, por todo suporte, conhecimento, tempo, material, e disposição que, não só a este trabalho, mas também a mim, foram despendidos, por oferecer apoio em todas as etapas de execução desta dissertação, desde aceitar este desafio comigo, as reformulações de ideias, até a presente redação.

Aos amigos que Deus colocou em meu caminho e me acompanharam durante esses anos de estudo, que me apoiaram e incentivaram durante a busca das minhas realizações, me fazendo acreditar que era capaz, em especial aos meus colegas do PROFMAT, pelos momentos de descontração, alegria e aprendizado, pelo excelente relacionamento que proporcionou enriquecimento nos estudos em grupos e por conseguinte muitas conquistas juntos, com certeza sem eles esse caminho seria muito mais difícil.

À minha grande amiga e irmã do coração Daiane, quis o destino que entrássemos juntas no mestrado mesmo que em áreas diferentes, assim pudemos compartilhar experiências, anseios e conquistas. Obrigada por toda a cumplicidade, por me ouvir, motivar, confortar e torcer por mim.

À uma das melhores surpresas que ocorreu na reta final do curso, que trouxe mais leveza e alegria aos meus dias, meu amado namorado Solano, obrigada por todo apoio e compreensão nas horas de minha dedicação aos estudos.

Finalmente aos meus alunos e antigos alunos, que são alguns dos grandes motivos da minha constante busca pelo conhecimento, pela compreensão, pela preocupação pelo cansaço, pelas minhas olheiras causadas por poucas horas de sono, e pela professora sempre ter muita "tarefa" nesses últimos tempos; que rezaram, torceram e acreditaram em mim, que sempre tinham uma palavra de incentivo para me dizer. Por me impulsionarem, me fazerem evoluir e validarem meu trabalho como professora de matemática deixo o registro da minha gratidão.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), pela oportunidade na Graduação e agora no Mestrado; à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por contribuírem ao possibilitar este programa de mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, cujo tema central é o conceito de Somatório, incluindo sua representação, interpretação e propriedades, partindo da premissa de que os estudantes se sentem desconfortáveis em realizar manipulações algébricas e resolver problemas onde a notação Sigma para Somatório é utilizada, realizamos inicialmente um levantamento de "quando" e "como" o conceito de Somatório é inserido no Ensino Médio e, no Ensino Superior, especificamente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Apresentamos de forma estruturada e concisa a parte básica das teorias que tratam dos diversos tipos de Somatório: Somatório Clássico com uma quantidade finita de termos, Somatório Clássico com uma quantidade infinita de termos (Séries), e Somatórios Fracionários, que é o nome dado a um Somatório com uma quantidade não inteira de termos. Em particular, neste texto se encontra a primeira divulgação em língua portuguesa da teoria desenvolvida para Somatórios Fracionários. Concluímos com a sugestão de que o professor de Matemática deva realizar estudos detalhados do conceito de Somatório em sua formação inicial ou continuada, visando melhorar sua própria compreensão dos conceitos, de modo que possa mediar com mais propriedade o aprendizado de seus alunos referentes ao tema e a suas aplicações.

Palavras-chave: Somas. Somatórios. Séries. Somatórios Fracionários. Formação inicial do professor de Matemática.

ABSTRACT

In this work, whose central theme is the concept of Summation, including its representation, interpretation and properties, based on the premise that students feels uncomfortable in performing algebraic manipulations and solving problems where is used the Sigma notation for Summation, we initially conduct a survey of “when” and “how” the idea of Summation is inserted in Brazilian High School and in courses of Degree in Mathematics. We present, in a structured and concise form, the basic part of the theories that deal with the different types of Summation: Classic Summation with a finite quantity of terms, Classic Summation with an infinite quantity of terms (Series), and Fractional Summations, which is the name given to a sum with a non-integer number of terms. In particular, this text contains the first disclosure in Portuguese of the theory developed to Fractional Sums. We conclude with the suggestion that the math teachers should carry out detailed studies over the concept of Summations in his initial or continuing training, aiming to improve his own understanding of the concepts, so that he can more appropriately mediate the learning of his students regarding the theme and yours applications.

Keywords: Sums. Summations. Series. Fractional Summations. Mathematics Initial Teacher Education.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

"*Read Euler, read Euler, he is the master of us all.*"
Pierre-Simon Laplace

Ao longo da história o conceito de "número" foi desenvolvido gradualmente, sempre sendo agregados novos conhecimentos. Inicialmente eram conhecidos apenas números naturais, depois números racionais, negativos, reais e complexos, introduzidos em alguma ordem conforme o decorrer da evolução da humanidade, quando surgiam necessidades, por exemplo, de contar animais, particionar objetos, registrar dívidas, etc. Uma vez criadas as primeiras comunidades, era necessário fazer operações comerciais, bem como medições diversas. É provável que a primeira operação matemática a surgir tenha sido a adição, através do processo natural de contagem.

O modo como a contagem foi abstraída, junto com alguns dos sistemas usados para representar quantidades por meio de símbolos, os números, permitiram que algumas propriedades das quantidades fossem observadas, como por exemplo a possibilidade de efetuar de uma vez só a adição de dois ou mais objetos a um grupo, em vez de somar um objeto de cada vez. Partindo da ideia inicial da contagem, a operação aditiva foi sendo constantemente aprofundada, por exemplo, com o descobrimento das propriedades comutativa e associativa:

i) A adição é comutativa: $a + b = b + a$;

ii) A adição é associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

até criarmos, recentemente, sua representação através de somatórios, uma forma de representar de forma sintética qualquer soma, quer o número de parcelas seja finito ou infinito.

Segundo Graham [15], a expressão $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$, onde n é um número inteiro positivo ou $+\infty$, é chamada de notação Sigma para somatórios, pois usa a letra grega $\sum$ (sigma maiúscula). Esta expressão nos diz para incluir na soma precisamente aqueles termos $f(k)$ cujo índice k é um inteiro que se encontra entre o menor e o maior limites 1 e n, inclusive, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n).$$

Os somatórios podem ter um número finito ou infinito de parcelas, e neste último caso, para calcular seus valores, caso isso seja possível (se for, dizemos que o somatório é convergente), é preciso conhecer o comportamento das sequências envolvidas. Estes conceitos estão bem claros para os matemáticos da atualidade, e encontram-se inseridos em livros didáticos dos mais variados níveis de estudo, na maioria das vezes usando a notação Sigma para somatório diretamente, indicando que ela é considerada pelos autores como de conhecimento pleno por todos.

Mas que significado podemos atribuir a um somatório do tipo $\sum_{\nu=1}^{x} f(\nu)$, onde $x \in \mathbb{R}$? Temos aqui um somatório onde os índices são de ordens não-inteiras, chamados índices de ordens arbitrárias, que abrangem índices racionais, reais e até mesmo complexos, aos quais convencionou-se chamar índices fracionários. Por exemplo, quais seriam as somas dos primeiros -7 números de uma sequência, ou dos π primeiros termos da Série Harmônica? Este tipo de somatório vem sendo tratado, recentemente, com o nome de Somatório de Índices Fracionários, ou Somatório Fracionário.

Ainda sobre o questionamento apontado no parágrafo anterior, Müller e Schleicher [27] comentam que poderíamos pensar que um método para calcular este tipo de somas deveria ter sido descoberto há pelo menos duzentos anos, mas para surpresa desses autores (e nossa), uma tal teoria não parece ter sido investigada na literatura ou ser conhecida pelos especialistas, além de breves observações esporádicas, mesmo no trabalho de Euler ([9], [10]) onde uma soma com um número não inteiro de termos é apresentada como um dos métodos para introduzir funções: Euler nos brinda com um belo exemplo de uma soma com um número racional de termos.

De fato, Euler apresentou o primeiro exemplo de Somatório Fracionário:

$$\sum_{\nu=1}^{-1/2} \frac{1}{\nu} = -2\ln(2)\,.$$

No entanto, uma formulação adequada a este problema e sua solução foram apresentadas apenas a partir de 2005 por Müller e Schleicher ([25], [26], [27]). Entre vários outros exemplos encontrados por estes autores, destacamos o interessante caso onde somatórios fracionários podem ser utilizados para obter a função Gama, denotada por Γ, que em certo sentido estende a noção de fatorial de um número para os números reais (e complexos).

Pretendemos, nesta dissertação, expor nossa pesquisa sobre a conjuntura na qual os conceitos de soma e somatório são atualmente utilizados no Brasil no Ensino Básico e no Ensino Superior (neste caso, especificamente nos cursos de Licenciatura em Matemática); propor uma abordagem estruturada para o ensino do conceito de somatório de ordem inteira aos alunos do Ensino Médio, destinada a ser apresentada também aos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e, a seguir, usando como base os trabalhos de Muller e Schleicher ([25], [26], [27]) e de Euler ([9], [10]), partiremos de um pequeno número de axiomas bem motivados, e apresentaremos uma definição única para somatórios com um número não inteiro de termos, que chamaremos de “Somatórios Fracionários”. Utilizando a definição, mostraremos que os somatórios fracionários têm propriedades que generalizam identidades de somatórios clássicos bem conhecidos de forma natural. Além disso, pretendemos ilustrar como os somatórios fracionários podem ser usados para obter novas identidades.

A passagem do estudo de somatórios clássicos (somatórios de ordem inteira) para somatórios fracionários (somatórios de ordem real ou mesmo complexa) encontra motivação no contínuo avanço do conhecimento Matemático, em específico o desenvolvimento nas últimas décadas do chamado Cálculo Fracionário (que busca generalizar os conceitos do Cálculo tradicional, ou Cálculo de Ordem Inteira). Como afirma Tenreiro Machado et al. [22] os conceitos de "fracionário" embutidos nos conceitos de Diferencial e de Integral de funções permitem uma notável e frutífera generalização do sistema de operadores do Cálculo clássico, e acreditamos que o mesmo ocorrerá com o conceito de somatório; o sucesso destas "novas" ferramentas em aplicações às ciências de alguma forma podem superar outras possíveis generalizações matemáticas e ajustar-se melhor à modelagem de fenômenos físicos, contribuindo assim para o desenvolvimento da fronteira da Ciência. Tamanha extensão de significado com a inserção adequada de ordens fracionárias nos operadores clássicos da Matemática é comparável ao avanço que ocorreu na antiguidade quando surgiu a necessidade do conceito de números racionais, e na sequência e em momentos posteriores, dos irracionais e dos reais.

Este tema de pesquisa tomou por justificativa uma preocupação com a dificuldade encontrada por estudantes dos mais diversos níveis de Ensino quando precisam manipular somatórios (que não passa de uma notação sintética de uma ferramenta matemática extremamente simples destinada a somar parcelas). Tentaremos identificar nas abordagens e usos atuais da notação de somatório possíveis motivos que tornam o uso desta simples notação um "pesadelo" para os estudantes, e procuraremos propor abordagens de ensino que desmistifiquem seu uso.

Acreditamos que o estudo de uma estruturação mais aprofundada do conceito de somatório, incluindo o conceito de somatório fracionário, permitirá aos futuros docentes de Matemática melhor inserir o conceito de somatório de ordem inteira no Ensino Básico, dando a ele o devido destaque e explicitando sua simplicidade e enorme aplicabilidade, evitando assim que esta ferramenta simples seja encarada como um "monstro de sete cabeças" pelos estudantes.

Com o objetivo de apresentar um estudo detalhado do conceito clássico de somatório, bem como as generalizações recentemente obtidas, e contribuir para a desmistificação desta ferramenta matemática junto aos estudantes brasileiros, buscamos:

- Mapear os conteúdos que utilizam somatório presentes nas diretrizes do Ensino Básico e do Ensino Superior;

- Estudar de forma detalhada a estruturação do conceito de somatório;

- Analisar as evoluções e generalizações do conceito de somatório;

- Propor abordagens que facilitem o aprendizado de somatório no Ensino Superior e no Ensino Básico.

Esta dissertação está organizada como segue: no Capítulo 1, apresentamos o mapeamento que realizamos da utilização de somatórios no Ensino Básico e no Ensino Superior, dando prioridade à observação de como o conceito de somatório é apresentado aos estudantes; no Capítulo 2 apresentamos de forma bem estruturada a teoria para os Somatórios Clássicos com uma quantidade finita de termos; no Capítulo 3 apresentamos de forma estruturada os principais pontos da teoria de Somatórios Clássicos com uma quantidade infinita de termos, normalmente apresentados aos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática dentro das disciplinas da área de Cálculo; no Capítulo 4 listamos os axiomas que permitem obter uma definição única para os Somatórios Fracionários, no contexto dos números Reais, apresentamos tal definição e uma fórmula fundamental para o cálculo de somatórios fracionários para uma ampla classe de funções, e mostramos alguns exemplos. O texto do Capítulo 4 é complementado no Apêndice A, onde são feitos os ajustes necessários para considerar o contexto dos números Complexos. Para finalizar, no Apêndice B apresentamos uma proposta de ensino do conteúdo Somatório Clássico para facilitar o aprendizado dos estudantes ao desmistificar a notação Sigma para somatórios, apresentando seu potencial como uma ferramenta matemática de representação econômica e adequada à manipulação algébrica.

2 SOMAS, SOMATÓRIOS E ONDE APARECEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste primeiro Capítulo, optamos por expor nossa pesquisa sobre a forma que os conceitos e a simbologia de Somatório estão inseridos no Ensino Básico e no Ensino Superior (especificamente nos cursos de Licenciatura em Matemática), e sobre o momento em que são inseridos, para tentarmos entender o que motiva a conhecida dificuldade encontrada por estudantes dos mais diversos níveis de Ensino quando precisam manipular um simples Somatório.

A conjuntura exposta neste Capítulo 2 será enriquecida com a exposição, nos capítulos seguintes, cada vez com um acréscimo no nível de dificuldade em relação ao contexto anterior, da teoria criada para nos ajudar a calcular Somatórios, mas só se tornará completa com a proposição de um módulo didático, que apresentamos no Apêndice B com o intuito de balizar professore(a)s de Matemática a apresentar a notação Sigma para Somatórios de maneira minimamente estruturada, contribuindo para desmistificar seu uso.

Um estudo sobre Somatórios, mais aprofundado em relação ao grau de dificuldade que terá que ensinar, é recomendável a todo(a) professor(a) de Matemática, em atuação ou em formação. Apresentamos neste texto, a partir de agora, nossa contribuição à busca do atendimento a este objetivo, e esperamos que com o passar do tempo esta contribuição possa alcançar um grande número de professores e estudantes de Matemática.

Iniciamos, na Seção 2.1, do ponto mais básico que conseguimos pensar: falando de quantidades, de contagem e de soma.

2.1 SOMAS

Desde pequenos, as primeiras noções de Matemática com as quais nos deparamos são as de quantidades e de números, e logo em seguida (ou até imediatamente) somos apresentados às ideias de juntar e de acrescentar quantidades, que estão na base do conceito de *soma* ou *adição*. Também na escola o sinal usado para "soma" é um dos primeiros com que tomamos contato; da mesma forma, o sinal conhecido como "mais" (+) foi um dos primeiros sinais matemáticos a aparecer registrado na escrita. Entretanto, a notação com a qual uma soma é representada nem sempre foi escrita com o símbolo que usamos hoje. O sinal de adição ("+" e os símbolos que os precederam) não foi utilizado inicialmente em operações algébricas, mas em Matemática Financeira. Os primeiros registros mostram que era inicialmente usado para simbolizar excesso em operações comerciais.

Como comenta Tahan [36],

> ...o sinal "mais" era denotado pela letra p que era a primeira letra da palavra em latim "plus" que tem como significado "está em excesso". Com o passar dos anos e com as transformações da escrita na Matemática a letra p tomou a forma de cruz, e ingressou, em caráter permanente, nos setores da Matemática.

Assim como a maior parte dos demais símbolos matemáticos, o sinal de adição usado hoje é o resultado de um processo histórico de evolução construído por inúmeras pessoas. De acordo com Garbi [13]:

> Os sinais de soma e subtração $+$ e $-$ surgiram na Alemanha, por volta de 1480. Manuscritos da época, ainda existentes, produzidos por autores alemães desconhecidos, já os contêm. Apareceram impressos pela primeira vez em 1489, em uma aritmética comercial de Johann Widmann (1460 -1526). Michael Stifel (1487 – 1567) é considerado seu grande popularizador. É provável que $+$ seja uma abreviação do Latim "et" e $-$ uma forma da letra "m", de "minus".

Ainda sobre a origem dos símbolos, "é possível que Widmann tenha colhido as ideias de $+$ e $-$ dos homens que trabalhavam no comércio, pois o fato de ter usado esses símbolos como se fossem amplamente conhecidos aponta para a possibilidade" (TAHAN, [36]). Certamente demorou algum tempo antes desses símbolos serem universalmente adotados, contudo é notável que esses símbolos, que surgiram há menos de 5 séculos, se tornaram tão importantes para linguagem matemática, que hoje são amplamente usados.

A partir da compreensão básica da operação de adição, podemos ser levados ao entendimento de inúmeros outros conceitos matemáticos, e podemos descobrir resultados decorrentes das mais complexas operações matemáticas. Porém quanto mais complexas forem as situações estudadas, mais elas levarão a somas maiores e mais demoradas, que podem ter um número muito grande (e até infinito) de parcelas. Por isso se fez necessário introduzir uma forma abreviada para expressar somas de muitos números, de forma que ainda as possamos manipulá-las. Atualmente, podemos recorrer ao conceito de Somatório para representar de forma condensada uma soma que inclua uma quantidade especificada qualquer de termos.

A notação que usamos para representar um Somatório, usando o símbolo $\sum$, nos permite escrever uma soma longa em uma expressão curta. Nos referimos a esta forma de denotar um Somatório como *notação Sigma*, pois "Euler estabeleceu a notação de somatório que usamos hoje, usando Sigma, uma letra grega maiúscula, para simbolizar a soma." (ROSA, [31]). Esse fato é melhor explanado por Cajori [7]:

> O sinal de somatório é devido a Euler (1755), que diz: "*summam indicabimus signo* Σ", ou seja, Σ indica o sinal de soma. Este símbolo foi utilizado por Lagrange, mas, de resto, recebeu pouca atenção durante o século décimo oitavo. O Σ para expressar a soma ocorre novamente em 1829 na Teoria do Calor de Fourier, publicada em 1822, e em funções elípticas de Jacobi de 1829. Cauchy utilizou três índices m, n, r, como em $\sum\limits_{m}^{n} rfr$. Alfred Pringsheim denota por $\sum\limits_{0}^{\infty} r\, a_\nu$ a soma de uma série infinita.

Por ser uma notação compacta, elegante, e por ter propriedades que facilitam operações algébricas, a notação Sigma para Somatórios é muito importante em vários campos da Matemática, bem como em outras áreas como Estatística, Física, Química, etc. Algumas destas propriedades serão explanadas com detalhes nos próximos Capítulos.

2.2 SOMATÓRIOS NO ENSINO BÁSICO

O cálculo de somas permeia o Ensino de Matemática em toda a Educação Básica. A partir da ideia inicial da operação de adição, o conceito de soma vai sendo aprofundado para adição de várias parcelas, propriedades da soma e suas aplicações, antes de se chegar aos Somatórios. Nos anos do Ensino Fundamental, até encontramos algumas situações onde aparecem somas finitas longas ou até somas infinitas, mas estas situações aparecem mais frequentemente no Ensino Médio. Devido a esse fato, nesta seção vamos nos restringir a relatar o que encontramos no contexto do Ensino Médio.

Para nos orientarmos por onde procurar os conteúdos de Matemática destinados ao Ensino Médio que envolvessem a ideia e a simbologia de Somatórios, iniciamos por examinar os documentos que orientam a execução deste nível de ensino em nosso estado e no nosso país. O apanhado geral dos conteúdos que são indicados em tais documentos pode ser encontrado nos quadros que expomos à frente.

Considerando a Diretrizes Curriculares do Paraná (DCE's) [28], que são as orientações propostas para a Educação Básica da Rede Pública Estadual do Paraná, apresentamos no Quadro 2.1 as perspectivas que encontramos para inserir o uso de Somatórios no Ensino Médio.

Quadro 2.1: *Conteúdos sugeridos nas Diretrizes Curriculares do Paraná*

CONTEÚDOS	CONTEÚDOS BÁSICOS	AVALIAÇÃO
Funções	Progressão Aritmética; Progressão Geométrica.	Reconheça, nas sequências numéricas, particularidades que remetam ao conceito das progressões aritméticas e geométricas; Generalize cálculos para a determinação de termos de uma sequência numérica.
Tratamento da Informação	Estatística	Realize estimativas, conjecturas a respeito de dados e informações estatísticas; média aritmética.
Tratamento da Informação	Binômio de Newton	Realize cálculos utilizando Binômio de Newton.

Considerando as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) para Ensino Médio da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias [4], apresentamos no Quadro 2.2 as unidades temáticas e conteúdos básicos onde se pode utilizar somatórios.

Quadro 2.2: *Conteúdos sugeridos nas Orientações Educacionais Compl. aos PCN's*

EIXO ESTRUTURADOR	UNIDADE TEMÁTICA	CONTEÚDOS BÁSICOS
Álgebra	Números e Funções	Sequências numéricas: progressões e noção de infinito
Análise de dados	Estatística	Análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão. Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.

Recentemente, foi divulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [6] para o Ensino Médio, que teve sua homologação no ano de 2018, é um documento que pretende nortear o que é ensinado nas escolas de todo país, mas ainda está em processo de implantação nas escolas do Estado do Paraná.

A Base Nacional Comum Curricular é um instrumento que busca orientar a elaboração do currículo específico de cada escola, e também estabelece os objetivos de aprendizagem que se quer alcançar, por meio da definição de competências e habilidades essenciais, enquanto o currículo irá determinar como esses objetivos serão alcançados, traçando as estratégias pedagógicas mais adequadas.

Dentro da área do conhecimento Matemática e suas Tecnologias, são propostas unidades temáticas, e dentro dessas constam as competências específicas de área que devem ser desenvolvidas e as habilidades que devem ser alcançadas em cada etapa do Ensino Médio. Destacamos, no Quadro 2.3, quais dessas competências envolvem a ideia ou notação de Somatório.

Ao analisarmos as propostas curriculares dos documentos [4], [6] e [28], conseguimos observar que é comum encontrarmos conteúdos da Matemática onde podem ser aplicados Somatórios, seja com somas finitas ou infinitas, como por exemplo em assuntos relacionados à Álgebra, especialmente o estudo de sequências. Muitas sequências numéricas que são apresentadas aos estudantes costumam ser apenas curiosidades matemáticas, mas existem aquelas que surgem naturalmente durante o processo de resolução de problemas, e por isso tem potencial de ser mais interessantes aos estudantes. Em qualquer caso, a manipulação destas sequências requer o conhecimento de uma variedade de tópicos de Matemática que fazem parte do currículo escolar básico. Além disso, os Somatórios também são usados no estudo de Estatística, que está dentro do escopo do que um professor de Matemática precisa lecionar.

Quadro 2.3: *Competências encontradas na Base Nacional Comum Curricular*

UNIDADE TEMÁTICA	COMPETENCIA ESPECÍFICA	HABILIDADES
Probabilidade e Estatística	2) Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
Probabilidade e Estatística	3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Probabilidade e Estatística	5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas

Ainda com relação ao estudo de sequências numéricas no Ensino Médio, podemos evidenciar um trecho das Orientações Curriculares aos PCN's (BRASIL, [4]), onde pode ser lido:

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas,

> ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades.

Os tipos de somas que envolvem Progressões Geométricas infinitas requerem do aluno um estudo mais profundo do assunto, pois é necessário a análise de convergência da soma. Quando se trabalha com estes tipos de sequência, é necessário o desenvolvimento de um estudo que contemple as propriedades dos somatórios finitos, incluindo critérios de convergência.

Este aprofundamento nos estudos aparece como característica do Ensino Médio, como é possível observar ao estudar os documentos que trazem as diretrizes para esse nível de ensino. Podemos salientar que tais documentos evidenciam que é de grande importância que "os conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos[...]" (BRASIL, [6]). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio [6] ressalta que:

> Para tanto, eles (os estudantes) devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] Assim, as aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa.

Além disso, as Orientações Curriculares complementares aos PCN's [4] frisam que no Ensino Médio:

> A Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber.

As orientações disponíveis evidenciam que a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento essencial para a formação do ser humano, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

A utilização de livros didáticos em aulas de Matemática é uma prática comum entre professores da área de Matemática. Por esse motivo, pensando em aumentar a abrangência deste trabalho, realizamos uma varredura em livros didáticos de Matemática para o Ensino

Médio, especificamente buscando nos livros escolhidos por conteúdos que envolvessem a ideia e/ou a notação de Somatório.

Escolhemos 6 coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, das quais 5 coleções são participantes do plano nacional do livro didático (PNLD) do Ministério da Educação, editados no período de 2013 a 2016. O critério para a escolha das coleções foi a disponibilidade das coleções nos colégios estaduais a que tivemos acesso. As coleções de livros escolhidas foram:

(1) *Matemática: ciência e aplicações* - Ensino Médio; de Gelson Iezzi, [16];

(2) *Matemática: contexto & aplicações*; de Luiz Roberto Dante, [8];

(3) *Contato Matemática*; de Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia, [34];

(4) *Matemática: interação e tecnologia*; de Rodrigo Balestri, [1];

(5) *Matemática: padrões e relações*; de Adilson Longen, [21]; e

(6) *Conexões com a Matemática*; de Fabio Martins de Leonardo, [19].

Os conteúdos examinados foram "Progressões Aritmética e Geométrica", "Binômio de Newton" e "Estatística". Depois da busca pelo uso da ideia e/ou simbologia de Somatórios nos conteúdos presentes nos livros didáticos escolhidos, identificamos os seguintes aspectos:

- Os conteúdos de Progressões Aritmética e Geométrica são encontrados nos livros do 1° ano, em todas as coleções. Pudemos observar que todos apresentam a definição de Sequências Numéricas finitas e infinitas. Porém, quando se tratam das somas dos termos das sequências, a ideia de Somatório é utilizada, mas usa-se nas fórmulas o símbolo S_n no lugar de $\sum$. A fórmula para o cálculo das somas parciais é mostrada em todos os livros do 1º ano, exceto na coleção (2).

- Notamos que em todas as coleções, para calcular a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, é introduzida a ideia de limites no infinito e de convergência de limite. Em dois livros, (4) e (5), encontramos ainda a denominação série convergente ou divergente para as somas de termos de uma progressão geométrica do tipo série geométrica, de acordo com a razão da progressão.

- Encontramos o conteúdo Binômio de Newton nos livros de 2º ano de quatro coleções: (2), (3), (4), e (5). Estas coleções trazem a ideia de soma de termos de uma sequência, ou seja, de Somatório, entretanto sem a utilização do símbolo $\sum$.

- Em Estatística analisamos especificamente os conteúdos “Medidas de Tendência Central” e “Dispersão”, que se encontravam nos livros de 2º e 3º anos. Percebemos que em todas as coleções os autores utilizam a ideia de Somatório e a notação Sigma em suas definições.

Concluímos que existem vários momentos no Ensino Médio onde ideia e/ou notação de Somatórios são utilizados. Entretanto, percebemos com preocupação que em nenhum livro das coleções analisadas há uma seção prévia especifíca para se introduzir o conceito de Somatório e esclarecer sua interpretação, sua notação e suas propriedades. O máximo que identificamos foram pequenas observações em notas de rodapé, para exemplificar o que seria um Somatório, em 4 das coleções observadas: (2), (3), (5), e (6). As outras duas coleções nem isso possuem. Essa percepção corrobora com o sentimento de que as dificuldades que os alunos sentem ao visualizar, compreender e manipular Somatórios são negligenciadas.

2.3 SOMATÓRIOS NO ENSINO SUPERIOR

Iniciamos esta seção destacando alguns princípios que, num contexto de discussão para a formação inicial do professor de Matemática, foram considerados como prioritários na condução da discussão sobre uma proposta curricular norteadora para os cursos de Licenciatura em Matemática no país, elaborada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) [33]:

> i. Um princípio básico para um ensino efetivo de Matemática é que o professor conheça profundamente o conteúdo que ensina. Claro que a formação de um professor de Matemática não se encerra na própria Matemática, pois ainda há que dominar a conexão entre o conhecimento e sua prática de sala de aula.
>
> ii. O Ensino da Matemática na Educação Básica não pode prescindir da abordagem de conteúdos elementares para a Matemática como Ciência e como linguagem para outras áreas do conhecimento, como a Física, a Química, a Computação, etc. Portanto, a formação do professor deve contemplar esses conteúdos como tal e garantir que sejam aprofundados e articulados no contexto da própria Matemática, visando oferecer ao professor uma visão ampla e abrangente do edifício da Matemática.

Temos que as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática [5] enfatizam que:

> As habilidades e competências adquiridas ao longo da formação do matemático tais como o raciocínio lógico, a postura crítica e a capacidade de resolver problemas, fazem do mesmo um profissional capaz de ocupar posições no mercado de trabalho também fora do ambiente acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável.

Como explanado nas diretrizes da SBM [33], o reconhecimento de que a formação do professor exige um conhecimento de Matemática próprio para a sua prática não sugere o entendimento de uma separação rigorosa entre a Matemática escolar e a Matemática como Ciência, mas evidencia que estas precisam ser observadas a partir de suas especificidades. Tanto o bacharel em Matemática como o professor de Matemática da Escola Básica deve conhecer a definição formal de uma operação, como por exemplo de divisão envolvendo números naturais (Divisão Euclidiana); deve saber que o algoritmo usual dessa operação se baseia na estrutura posicional do sistema de numeração decimal, e deve ser capaz de demonstrar detalhadamente esse algoritmo, justificando cada uma das etapas que o compõe. No entanto, para um professor, é necessário também identificar as diferentes situações que são resolvidas por meio de tal operação, pois para um aluno não é tão clara a relação entre as ideias de repartição e de comparação ou medida para que sejam modeladas por uma mesma operação.

As diretrizes da SBM [33] ainda sugerem que:

> Não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior - são partes que se fundem e se articulam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência. Nesse sentido, cabe à escola não só a tarefa de difundir o conhecimento elementar, como também contribuir para a elementarização e para o desenvolvimento da própria Matemática.

Dentre as disciplinas constantes na proposta curricular da SBM [33] que apresentam em suas ementas conteúdos que podem envolver aplicações de Somatórios, destacamos as elencadas no Quadro 2.4.

Também sobre a grade curricular para um curso de Licenciatura em Matemática, um estudo conduzido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) identifica os conteúdos de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Análise Matemática, Álgebra, Geometria, Estatística, Combinatória, Probabilidade, entre outros, como conhecimentos substantivos do futuro professor, que "devem ser selecionados e abordados de forma a possibilitar ao professor em formação, conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática" (SBEM, [32]).

Há assuntos na grade curricular proposta pela SBM [33] tratados como linhas norteadoras para a composição de um currículo para um curso de licenciatura em Matemática, que são entendidos como elementares na formação do professor de Matemática, a saber:

> Fundamentos de Funções Reais, de Cálculo Diferencial e Integral, de Análise Real e de Equações Diferenciais: O Cálculo Diferencial e Integral (de uma e de várias variáveis) sustenta grande parte da Matemática e da Física e ilustra de várias maneiras processos infinitos da Matemática. De fato, vários conceitos fundamentais para a Matemática só poderão ser completamente entendidos com o uso do Cálculo Diferencial e Integral e até mesmo conceitos de Física usualmente abordados no Ensino Médio só poderão ser entendidos plenamente com o uso de limites e derivadas. [...] Também outras representações para os números reais aparecem, agora podendo ser tratadas de forma precisa: como limite de uma sequência

> convergente, como uma série, como uma fração contínua. [...] Por um lado, não cabe a formalização dos conceitos de limite, derivada e integral, que envolvem processos infinitos no modelo atual de ensino médio brasileiro, mas, por outro lado, os processos infinitos estão presentes em vários tópicos próprios do ensino básico, como, por exemplo, números reais e soma dos infinitos termos de progressões geométricas. Assim, para um futuro professor, é necessário que a discussão sobre os processos infinitos vá além da formalização de conceitos, mas que se estabeleça de forma crítica e sedimentada, visando a sua abordagem no ensino básico.

Quadro 2.4: *Conteúdos com aplicação de Somatórios em disciplinas da proposta curricular da SBM para cursos de Licenciatura em Matemática*

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBSERVADOS
Cálculo de uma Variável A	- Séries de Taylor das funções elementares.
Cálculo de uma Variável B	- Integrais definidas - Equações diferenciais lineares de 1ª ordem. - Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes.
Cálculo II	- Caminhos e equações paramétricas de curvas Integrais duplas sobre retângulos.
Combinatória	- Sequências recorrentes lineares
Introdução à Análise	- Definições de e via sequências e séries.
Cálculo com Variável Complexa	- Séries de potências.
Equações Diferenciais	- Aplicações de séries na resolução de equações diferenciais ordinárias. Soluções de equações diferenciais em Séries de Potências - Séries de Fourier e equações diferenciais parciais clássicas.
Probabilidade e Estatística A	- Medidas de posição: moda, média e mediana,
Probabilidade e Estatística B	- Média e desvio padrão, modelos e aplicações de variáveis discretas e contínuas.
Matemática Discreta	- Triângulo de Pascal, identidades diversas envolvendo números binomiais: demonstrações algébricas e combinatórias.
Geometria Analítica	- Operações com vetores: adição, multiplicação por escalar e produto interno.

Quando consideramos pesquisar os usos e aplicações de ideias e/ou conceitos de Somatórios nas disciplinas dos cursos de graduação de Licenciatura em Matemática, sabíamos que a dificuldade em fazer um mapeamento adequado seria maior que no Ensino Médio, em parte por não haver tantos documentos norteadores, em parte por cada Universidade contar com liberdade acadêmica para construir sua grade curricular de forma autônoma.

Ao buscar responder ao questionamento "Onde e como são utilizadas a ideia e/ou a simbologia de Somatórios em um curso de Licenciatura em Matemática", optamos por focar em fazer uma varredura em dois currículos de curso de graduação em Licenciatura em Matemática mais à mão: o curso de Licenciatura em Matemática ofertado pela UEPG nas modalidades presencial e a distância.

Das disciplinas do currículo pleno do curso superior de graduação em Licenciatura em Matemática da UEPG (modalidade presencial), Currículo 7 (vigente desde 2009), consideramos as disciplinas de formação básica geral e as disciplinas de formação específica profissional (não consideramos disciplinas de diversificação ou aprofundamento). As disciplinas que possuem em suas ementas conteúdos onde a ideia e/ou simbologia de Somatórios é utilizada estão apresentadas no Quadro 2.5.

Quadro 2.5: *Disciplinas do Currículo 7 do Curso de Licenciatura em Matemática (presencial) da UEPG*

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBSERVADOS
101159 Cálculo Diferencial e Integral I	- Integrais definidas.
101078 Cálculo Diferencial e Integral II	- Integrais múltiplas: duplas, triplas; - Cálculo vetorial: integrais de linha.
101160 Álgebra	- Somatórios - Sistemas numéricos.
101161 Álgebra Linear	- Matrizes; - Sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos. - Combinação linear
101162 Análise Real	- Integral de Riemann.
101163 Fundamentos da Matemática	- Análise combinatória: princípio aditivo e multiplicativo, fatorial, permutação e combinação. - Triângulo de Pascal. Binômio de Newton.
101164 Geometria Analítica	- Produtos de vetores: escalar, vetorial e misto.
101172 Cálculo Numérico	- Sistemas Lineares: métodos diretos e métodos iterativos. - Sistemas de equações não-lineares: métodos de resolução - Soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias. - Introdução à solução numérica de equações diferencias parciais: método das diferenças finitas.
101173 Estatística e Probabilidade	- Estatística Descritiva. - Distribuições de probabilidade.
101174 Séries e Equações Diferenciais	- Séries: testes de convergência e divergência. - Séries de Potências. - Solução das equações por séries. - Introdução às Séries de Fourier.
101179 Matemática Financeira	Juros compostos.

Das disciplinas do currículo pleno do curso superior de graduação em Licenciatura em Matemática da UEPG (EaD), Currículo 1 (vigente desde 2009), foram consideradas disciplinas de formação básica geral e disciplinas de formação específica profissional (não foram consideradas as disciplinas de diversificação ou aprofundamento). Entre as disciplinas, algumas apresentam em sua ementa conteúdos que permitem aplicar as ideias e/ou simbologia de Somários, estas disciplinas estão apresentadas no Quadro 2.6.

Dentre as disciplinas dos currículos da UEPG, escolhemos uma das disciplinas ofertadas no primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática presencial, para apresentar brevemente pelo menos um contexto onde aparecem as ideias e/ou simbologia de Somató-

Quadro 2.6: *Disciplinas do Currículo 1 do Curso de Licenciatura em Matemática (EaD) da UEPG*

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBERVADOS
101501 Álgebra Linear I	- Matrizes. - Sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos. - Combinação linear.
101502 Álgebra Linear II	- Espaços com produto interno.
101503 Análise Real	- Integral de Riemann.
101505 Cálculo Diferencial e Integral II	- Integrais: indefinida e definida e propriedades. - Teorema Fundamental do Cálculo.
101506 Cálculo Diferencial e Integral III	- Séries: testes de convergência e divergência. - Séries de Potências. Polinômio de Taylor.
101507 Cálculo Diferencial e Integral IV	- Integrais múltiplas: duplas, triplas - Cálculo vetorial: integrais de linha
101508 Fundamentos de Álgebra	- Somatórios
101511 Fundamentos da Matemática III	- Análise combinatória: princípio aditivo e multiplicativo, fatorial, permutação e combinação. - Triângulo de Pascal. Binômio de Newton
101513 Geometria Analítica II	- Produtos de vetores: escalar, vetorial e misto.
101525 Cálculo Numérico	- Sistemas Lineares: métodos diretos e métodos iterativos. - Soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias.
101526 Estatística e Probabilidade I	- Estatística Descritiva
101527 Estatística e Probabilidade II	- Distribuições de Probabilidade
101528 Equações Diferenciais	- Solução das equações por séries. - Introdução às Séries de Fourier.
102501 Física Geral I	Cinemática vetorial.
102502 Física Geral II	Eletromagnetismo

rio. Na disciplina "Cálculo Diferencial e Integral I" deve ser apresentada a definição formal da Integral Definida, que envolve a soma de muitos termos, sendo necessário utilizar o conceito e a notação de Somatório, pois a integral definida de uma função $f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ é equivalente à soma de todos os elementos de área sob a curva $f(x)$, como define Stewart [35]:

> Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = (b-a)/n$ e seja x_j um número pertencente ao j-ésimo intervalo, para $j = 1, 2, ..., n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Big]\Delta x\,,$$
>
> se este limite existir.

No entanto, ao observarmos atentamente a grade curricular e o ementário do curso, percebemos que a definição de Somatório e suas propriedades só é apresentada formalmente na disciplina "Álgebra", a qual é oferecida no segundo ano. Mais uma vez, temos a percepção de que os alunos apresentam certa dificuldade ao necessitarem lidar com Somatórios por não receberem de forma estruturada uma breve introdução ao tema.

3 SOMATÓRIOS CLÁSSICOS COM $n \in \mathbb{N}$

> "*- Sabe somar? - perguntou a Rainha Branca. - Quanto é um mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um e mais um?*
> *- Não sei - respondeu Alice. - Perdi a conta.*
> *- Não sabe somar! - interrompeu a Rainha Vermelha.*"
>
> Lewis Carrol, em "Alice através do espelho".

Somas estão presentes em toda parte na matemática, e apesar da simplicidade dessa operação, é recomendável conhecermos ferramentas básicas para bem lidar com elas. Neste capítulo vamos apresentar uma estruturação para a teoria básica dos Somatórios Clássicos (somatórios com uma quantidade finita de termos), baseada no Capítulo 2 de Graham [15].

3.1 TEORIA BÁSICA PARA SOMATÓRIOS CLÁSSICOS

Começamos introduzindo uma notação comum através de um exemplo: costumamos escrever a soma dos n primeiros números inteiros como

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n\,, \tag{3.1}$$

onde os símbolos "$\cdots$" (três pontos) são usados como uma forma de lembrar que, ao efetuar a soma, precisamos completar o padrão estabelecido pelos termos vizinhos. É claro que, quando usamos a *notação três pontos*, precisamos ter cuidado ao expressar somas como $1 + 7 + \cdots + 41 + 85$, que não têm um sentido imediato sem um contexto atenuante. Por outro lado, a inclusão de termos como 4 e $(n-1)$ na Expressão (3.1) foi um pouco exagerada, pois o padrão já ficaria claro ao escrevermos simplesmente $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (se devidamente contextualizado, escrever apenas $1 + \cdots + n$ já bastaria).

A notação três pontos também pode ser aplicada em somas com a forma geral

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_n\,, \tag{3.2}$$

onde cada a_k na Expressão (3.2) deve ser um número bem determinado pela descrição dada. Cada elemento a_k de uma soma é chamado de *termo*. Os termos são frequentemente especificados implicitamente com fórmulas que seguem um padrão que até pode ser prontamente percebido, mas em alguns casos será necessário escrever os termos em uma forma equivalente para que o significado do padrão fique claro, como no seguinte exemplo: se a expresssão $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$ é usada para denotar uma soma de n termos, será mais fácil identificar o padrão do *termo geral* a_k se escrevermos $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$.

A notação de três pontos é muito utilizada, mas pode ser um pouco demorada ou mesmo ambígua (por exemplo: a soma $1+2+\cdots$ representa a soma de todos os números naturais positivos ou a soma de todas as potências não negativas de 2?).

Existem outras alternativas disponíveis para indicar uma soma de termos, e uma delas é a expressão

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{3.3}$$

(forma delimitada), chamada de *notação Sigma* por usar a letra grega Σ (sigma maiúscula). Usando a notação Sigma podemos escrever, por exemplo:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}.$$

A quantidade a_k inserida após o símbolo $\sum$ na expressão $\sum a_k$ é chamada de *somando*.

Na Expressão (3.3) o índice variável k está estritamente vinculado ao símbolo $\sum$, porque o índice k em a_k não está relacionado com o valor numérico de k fora da notação Sigma. Qualquer outra letra poderia ser usada no lugar de k sem alterar o significado da Expressão (3.3). A letra i é frequentemente usada (talvez por ser a letra inicial da palavra "índice"), mas consideramos mais razoável usar a letra k, reservando a letra i para representar o número complexo $\sqrt[2]{-1}$.

A notação Sigma nos diz para incluir na soma precisamente aqueles termos a_k cujo índice k é um inteiro que se encontra entre o menor e o maior limites 1 e n, inclusive. Em outras palavras, devemos somar os termos variando o índice k de 1 a n. A notação Sigma foi introduzida por Euler em 1755 [9], e passou a ganhar destaque quando usada em 1822 por Joseph Fourier: "O signo $\sum_{i=1}^{i=\infty}$ indica que devemos colocar no lugar do número inteiro i todos os seus valores 1, 2, 3, ..., e então tomar a soma dos termos." (FOURIER, [12], pg. 585), se tornando comum no mundo matemático.

Em uma notação Sigma generalizada (ainda mais útil do que a forma delimitada da notação Sigma), simplesmente escrevemos uma ou mais condições sob o símbolo $\sum$ para especificar o conjunto de índices sobre os quais a soma deve ocorrer. Por exemplo, as somas nas Expressões (3.1) e (3.2) também podem ser escritas na forma

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k\,. \tag{3.4}$$

Nestes exemplos em particular não há muita diferença entre a Expressão (3.4) e a Expressão (3.2), mas a forma geralizada nos permite tomar somas sobre conjuntos de índices que não estão restritos a inteiros consecutivos. Por exemplo, com ela podemos expressar a soma dos quadrados de todos os números inteiros positivos ímpares inferiores a 100, como segue:

$$\sum_{\substack{1 \leq k < 100, \\ k \text{ ímpar}}} k^2\,;$$

o equivalente a essa soma, usando a forma delimitada, seria a expressão mais complicada e menos clara

$$\sum_{k=0}^{49}(2k+1)^2 \,.$$

A maior vantagem da notação Sigma geralizada é que podemos manipulá-la mais facilmente do que a notação Sigma na forma delimitada. Por exemplo, suponha que queremos alterar o índice variável de k para $k+1$. Com a forma geral, simplesmente fazemos

$$\sum_{1\leq k\leq n} a_k = \sum_{1\leq k+1\leq n} a_{k+1} \,,$$

é fácil ver o que se passa, e podemos fazer a substituição quase sem pensar. Mas com a notação Sigma na forma delimitada, a mesma mudança é descrita por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \,,$$

é mais difícil ver o que acontece, e ficamos mais propensos a cometer um erro.

Por outro lado, a notação Sigma na forma delimitada é visualmente agradável e arrumada, e normalmente podemos escrevê-la mais rapidamente que a forma generalizada (a Expressão (3.3) tem sete símbolos e a Expressão (3.4) tem oito). Em geral se usa a notação Sigma na forma delimitada, com o símbolo $\sum$ acompanhado dos delimitadores inferior e superior quando se propõe um problema ou se apresenta um resultado, mas é vantajoso trabalhar com as relações sob o símbolo $\sum$ quando necessita-se manipular uma soma cujo índice variável k precisa ser transformado.

Formalmente, escrevemos

$$\sum_{P(k)} a_k \tag{3.5}$$

para denotar de forma abreviada a soma de todos os termos a_k tais que o índice k é um número inteiro satisfazendo a uma determinada propriedade $P(k)$ (a "propriedade $P(k)$" é qualquer proposição sobre k, podendo ser verdadeira ou falsa).

Neste capítulo, vamos assumir que apenas um número finito de inteiros k satisfazem a propriedade $P(k)$ e tornam $a_k \neq 0$; caso contrário, infinitos números não-nulos estarão incluídos na soma, e as coisas podem ficar um pouco mais complicadas (tal situação será abordada no Capítulo 4). Por outro lado, se a propriedade $P(k)$ for falsa para todos os inteiros k, teremos uma soma vazia (ou seja, uma soma onde não há termos a ser somados) - e convencionamos que uma soma vazia tem valor numérico zero.

Uma forma ligeiramente modificada da Expressão (3.5) pode ser usada quando um somatório deve aparecer do texto de um parágrafo em vez de em uma equação exibida em destaque. Neste caso, podemos escrever $\sum_{P(k)} a_k$, onde anexamos a propriedade $P(k)$ como um subscrito do símbolo $\sum$. Da mesma forma, a expressão $\sum_{k=1}^{n} a_k$ é uma alternativa conveniente à Expressão (3.3) quando o somatório deve aparecer em uma linha de texto.

Em situações onde uma quantidade pequena de termos (iniciais e/ou finais) são nulos, como são o termos de índice $k = 0, 1, n$ na soma

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k)\,,$$

é tentador escrever apenas

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k)$$

pois parece mais eficiente somar $n-2$ termos em vez de $n+1$. Porém, sempre será vantajoso manter os limites inferior e superior de um somatório em vez de eliminar termos nulos, porque os somatórios podem ser manipulados mais facilmente quando seus limites são simples. Além disso, a expressão $\sum_{k=2}^{n-1}$ pode até ser ambígua, porque não está claro se a expressão no somando assume o valor 0 quando $k = 0$ ou $k = 1$, ou se tais termos não estão definidos. Já termos com valor numérico zero não causam danos, e muitas vezes até poupam trabalho.

Os símbolos e notações que apresentamos até aqui são bastante difundidos e padronizados, mas uma vez compreendido o conceito básico de somatório, podemos apresentar notações de somatório que fazem uso de outras ideias. Um exemplo de outra notação, aplicável em linguagem de programação, foi apresentado por Kenneth E. Iverson ([17], p. 11). A ideia é simplesmente incluir no somando, entre colchetes, uma proposição $P(k)$ que pode ser ou verdadeira ou falsa, sendo que a expressão $P(k)$ assume o valor 1 se a proposição for verdadeira, e assume o valor 0 se a proposição for falsa. Tal convenção permite expressar somatórios sem restrições no índice da soma, ao permitir reescrever a Expressão (3.5) na forma

$$\sum_{k} a_k[P(k)]\,. \tag{3.6}$$

Na expressão (3.6), se para um determinado valor k a proposição $P(k)$ é falsa, p termo $a_k[P(k)]$ vale zero, e por isso podemos incluí-lo com segurança entre os termos que estão sendo somados (ao passo que, se $P(k)$ é verdadeiro, a proposição $P(k)$ assume o valor 1 e, com isso, acrescentamos à soma o valor numérico de a_k). Isto facilita a manipulação do índice do somatório, porque não precisamos nos ocupar com valores extremos.

A notação de somatório dada na Expressão (3.6) pode ser aplicada, em um exemplo simples, para somar os números primos menores que 100. Neste caso, a proposição $P(p)$ seria:

$$P(p):\ \big[p \text{ primo}\,; p < 100\big] = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é um número primo } \textbf{e } p < 100; \\ 0, & \text{se } p \text{ não é um número primo } \textbf{ou } p \geq 100, \end{cases}$$

e a expressão para efetuar a soma seria escrita como

$$\sum_{p} p\,\big[p \text{ primo}\,; p < 100\big].$$

Ainda sobre a notação de somatório dada na Expressão (3.6), é preciso mencionar um pequeno detalhe técnico: às vezes a expressão a_k não está bem definida para todos os inteiros k. Contorna-se esta confusão assumindo que quando a proposição $P(k)$ é falsa, a expressão $[P(k)]$ é "tão fortemente zero", que torna $a_k[P(k)]$ igual a zero mesmo quando a_k não está definido.

Vamos sintetizar o que discutimos até agora sobre somas de uma quantidade finita de termos. Há duas boas maneiras de expressar graficamente uma soma de termos: uma maneira usa a notação três pontos (símbolos "$\cdots$"), e a outra usa a notação Sigma (símbolo $\sum$). A notação de três pontos é bastante usada e apresenta aplicações úteis, particularmente ao permitir a visualização de termos adjacentes e a detecção de padrões sem precisar olharmos para toda a soma, mas tem uma apresentação demasiado extensa. A notação Sigma é compacta, e muitas vezes permite visualizar manipulações que não são óbvias usando a notação três pontos. Quando usamos a notação Sigma para expressar uma soma, as parcelas nulas (quando existem) não são prejudiciais, na verdade as parcelas nulas muitas vezes facilitam a manipulação do somatório.

3.2 MANIPULAÇÃO DE SOMATÓRIOS

A chave para o sucesso ao lidar com somas de uma quantidade finita de termos é a capacidade de transformar um somatório em outro que seja mais simples ou mais próximo de algum objetivo. E se torna mais fácil fazer as necessárias manipulações algébricas conhecendo algumas regras básicas, bem como com a prática de seu uso. Vamos, a seguir, apresentar as principais regras.

Seja K qualquer conjunto de números inteiros. Somas sobre os elementos de K podem ser transformadas pela aplicação de três regras simples:

Lei distributiva:

$$\sum_{k\in K} c\, a_k = c\sum_{k\in K} a_k; \tag{3.7}$$

Lei associativa:

$$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k; \tag{3.8}$$

Lei comutativa:

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}. \tag{3.9}$$

A lei distributiva permite-nos mover constantes dentro e fora de um somatório. A lei associativa permite-nos partir um somatório em duas partes, ou combinar dois somatórios em um. A lei comutativa diz que podemos reordenar as parcelas da forma que quisermos (aqui, $p(k)$ é uma permutação qualquer do conjunto dos inteiros).

Por exemplo, se $K = \{-1; 0; +1\}$ e $p(k) = -k$ temos, respectivamente:

$$ca_{-1} + ca_0 + ca_1 = c(a_{-1} + a_0 + a_1) \quad \text{(lei distributiva);}$$

$$(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1) \quad \text{(associativa);}$$

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_0 + a_{-1} \quad \text{(lei comutativa).}$$

Supostamente, quando tinha apenas 9 anos, em 1786, Carl F. Gauss encontrou a seguinte fórmula para a soma dos primeiros n números naturais ([15]):

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O "truque" de Gauss pode ser visto como uma aplicação das três leis básicas da soma, que expomos a seguir: suponhamos que desejamos calcular a soma geral de uma progressão aritmética,

$$S = \sum_{0 \le k \le n} (a + bk)\,.$$

Pela lei comutativa, podemos substituir k por $n - k$, obtendo

$$S = \sum_{0 \le n-k \le n} \big(a + b(n-k)\big) = \sum_{0 \le k \le n} (a + bn - bk)\,.$$

Estas duas equações podem ser adicionadas usando a lei associativa:

$$2S = \sum_{0 \le k \le n} \big((a + bk) + (a + bn - bk)\big) = \sum_{0 \le k \le n} (2a + bn)\,,$$

e agora podemos aplicar a lei distributiva e encontrar uma soma trivial para efetuar:

$$2S = (2a + bn) \sum_{0 \le k \le n} 1 = (2a + bn)(n + 1)\,.$$

Agora, simplesmente dividindo por 2, provamos que

$$\sum_{k=0}^{n} (a + bk) = \Big(a + \frac{1}{2}bn\Big)(n + 1). \tag{3.10}$$

onde o lado direito pode ser visto como a média do primeiro e último termos, isto é, $\frac{1}{2}\big(a + (a + bn)\big)$, multiplicada pelo número de termos, $(n + 1)$.

É importante considerar que a função $p(k)$ na lei comutativa (3.9) é suposta ser uma permutação de todos os números inteiros. Em outras palavras, para cada número inteiro n deve haver exatamente um número inteiro k tal que $p(k) = n$, caso contrário a lei comutativa pode falhar. Transformações como $p(k) = k + c$ ou $p(k) = c - k$, onde c é uma constante inteira, são sempre permutações, por isso podem ser sempre usadas.

Podemos relaxar um pouco a restrição da permutação na lei comutativa (3.9), apenas exigindo que exista exatamente um número inteiro k com $p(k) = n$ quando n é um elemento do conjunto de índices K. Se $n \notin K$ (isto é, se n não estiver em K), não importa com que frequência $p(k) = n$ ocorre, porque tais k não participam na soma. Assim, por exemplo, podemos argumentar que

$$\sum_{\substack{k\in K,\\ k \text{ par}}} a_k = \sum_{\substack{n\in K,\\ n \text{ par}}} a_n = \sum_{\substack{2k\in K,\\ 2k \text{ par}}} a_{2k} = \sum_{2k\in K} a_{2k}\,, \tag{3.11}$$

pois há exatamente um k tal que $2k = n$ quando $n \in K$ e n é par.

A notação de somatório dada em (3.6), que nos permite inserir nos somandos os valores 0 ou 1 para as proposições lógicas $P(k)$, pode ser usada em conjunto com as leis distributivas, associativas e comutativas para deduzir propriedades adicionais de somas. Por exemplo, temos a seguinte regra para combinar diferentes conjuntos de índices: se K e K' são quaisquer conjuntos de inteiros, então

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in(K\cap K')} a_k + \sum_{k\in(K\cup K')} a_k\,. \tag{3.12}$$

Isto decorre das fórmulas gerais

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k} a_k[k\in K] \tag{3.13}$$

e

$$[k\in K] + [k\in K'] = [k\in K\cap K'] + [k\in K\cup K']\,. \tag{3.14}$$

Podemos usar a regra (3.12) para combinar somas sobre dois conjuntos de índices quase-disjuntos, como em

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{para } 1\le m\le n\,;$$

ou para separar um termo de um somatório, como em

$$\sum_{0\le k\le n} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n} a_k, \quad \text{para } n\ge 0\,. \tag{3.15}$$

A operação de separação de um termo de um somatório, como exposta na Eq. (3.15), é a base de um *método de perturbação* que muitas vezes nos permite efetuar uma soma de uma forma fechada: a ideia é começar com uma soma desconhecida S_n,

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k \,,$$

e escrever S_{n+1} de duas maneiras: separando seu último e seu primeiro termos:

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n+1} a_k \; &= \; a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n+1} a_k \\ &= a_0 + \sum_{1 \leq k+1 \leq n+1} a_{k+1} \\ &= a_0 + \sum_{0 \leq k \leq n} a_{k+1} \,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

e a seguir expressar o somatório em termos de S_n. Se isso for possível, tal artifício nos permite obter uma equação cuja solução é a soma que procuramos.

Como exemplo, vamos usar esta técnica para obter a soma S_n dos primeiros $n+1$ termos de uma Progressão Geométrica com termo geral ax^k. Iniciamos com

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k \,,$$

e usamos o método de perturbação descrito na Eq. (3.16) para obter

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \leq k \leq n} ax^{k+1} \,,$$

onde, pela lei distributiva, a soma no termo à direita é igual a $x\,.\sum_{0 \leq k \leq n} ax^k = x\,S_n$, de forma que obtemos

$$S_n + ax^{n+1} = a + xS_n \,,$$

equação que podemos reescrever em termos de S_n, obtendo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1-x}, \quad \text{para } x \neq 1\,. \tag{3.17}$$

(Observe que, quando $x = 1$, a soma é dada simplesmente $(n+1)a$.) O lado direito da Eq. (3.17) é formado exatamente pelo primeiro termo da soma subtraído do último termo isolado (o termo após o último no somatório original), dividido por 1 menos a razão do termo geral.

Vamos agora tentar aplicar a técnica da perturbação para obter uma soma um pouco mais difícil:

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} k2^k \,.$$

Neste caso, temos $S_0 = 0$; $S_1 = 2$; $S_2 = 10$; $S_3 = 34$; $S_4 = 98$; $\cdots$. Qual será a expressão numérica para esta soma?

De acordo com o esquema descrito na Eq. (3.16), temos

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0\le k\le n} (k+1)2^{k+1} \,,$$

e buscamos expressar a soma que aparece no lado direito em termos de S_n. Com a ajuda da lei associativa, podemos dividí-la em duas somas:

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= \sum_{0\le k\le n} k2^{k+1} + \sum_{0\le k\le n} 2^{k+1} \\ &= 2\,S_n + \sum_{0\le k\le n} 2^{k+1} \,. \end{aligned}$$

A soma restante é uma progressão geométrica, cujo valor é dado por

$$\frac{(2-2^{n+2})}{(1-2)} = 2^{n+2} - 2$$

(expressão obtida também com o uso o método da perturbação). Temos então

$$S_n + (n+1)\ 2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2,$$

de onde concluímos que

$$\sum_{0\le k\le n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2\,.$$

Agora podemos visualizar claramente, por exemplo, que na exposição dos termos iniciais obtivemos $S_3 = 34$ proveniente de $32 + 2$, e não de 2×17 ou outra decomposição de 34.

Um cálculo semelhante a esse, mas com x no lugar de 2, resulta na equação

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + \frac{(x - x^{n+2})}{(1-x)} \,,$$

de onde podemos deduzir que

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}, \quad \text{para } x \neq 1 \,. \tag{3.18}$$

É interessante notar que poderíamos ter obtido a soma apresentada na Eq. (3.18) de uma forma completamente diferente, usando técnicas elementares de Cálculo Diferencial, iniciando por tomar $a = 1$ na Eq. (3.17), isto é, considerando a equação

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{para } x \neq 1\,,$$

e tomando a derivada com relação a x em ambos os lados da equação, obtendo

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + x^{n+1}}{(1-x)^2}\,,$$

pois a derivada de uma soma finita é a soma das derivadas de seus termos (no lado direito, simplesmente aplicamos a regra para derivar o quociente entre duas funções). Existem muitas outras conexões entre o Cálculo Diferencial e Integral e a Matemática Discreta, das quais veremos algumas em capítulos posteriores.

3.3 SOMATÓRIOS MÚLTIPLOS

Os termos de uma soma podem ser especificados por dois ou mais índices, e não apenas por um. Como exemplo, considere a seguinte soma dupla com nove termos, governada por dois índices j e k:

$$\sum_{1\leq j,k\leq 3} a_j b_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3. \tag{3.19}$$

Em casos como este do exemplo, podem ser utilizadas as mesmas notações e métodos que são válidas para as somas com um único índice variável.

Se a proposição $P(j,k)$ descreve uma propriedade dependente simultaneamente dos índices j e k, a soma de todos os termos $a_{j,k}$ tais que a proposição $P(j,k)$ é verdadeira pode ser escrita de duas maneiras: uma usando somas sobre todos os pares de inteiros j e k, e a outra a notação de Iverson dada na Eq. (3.6):

$$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k}[P(j,k)]\,.$$

Em ambas as maneiras, apenas um sinal $\sum$ é necessário, embora haja mais de um índice de soma. O símbolo $\sum$ denota uma soma sobre todas as combinações de índices que se aplicam.

Dois símbolos $\sum$ são necessários quando precisamos descrever uma soma de somas. Por exemplo, a expressão

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}[P(j,k)]$$

pode ser usada como abreviatura da expressão

$$\sum_j \Big(\sum_k a_{j,k}[P(j,k)] \Big)\,,$$

que descreve a soma sobre todos os números inteiros j, onde o somando é o somatório $\sum_k a_{j,k}[P(j,k)]$, que por sua vez descreve a soma sobre todos os números inteiros k dos somandos com a forma $a_{j,k}$ para o qual a proposição $P(j,k)$ é verdade. Dizemos que essa *soma dupla* é somada primeiro em k, e depois em j.

Uma soma que depende de mais de um índice pode ser somada primeiro em qualquer um de seus índices. A este respeito, apresentamos a propriedade chamada de *independência da ordem de soma*, que generaliza a lei associativa dada na Eq. (3.8):

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}[P(j,k)]\,. \tag{3.20}$$

A expressão no centro da Eq. (3.20) é uma soma em dois índices. A expressão à esquerda, $\sum_j \sum_k$, representa uma soma efetuada primeiro em k e depois em j. A expressão à direita, $\sum_k \sum_j$, indica que a soma em j é efetuada primeiro, para depois ser efetuada a soma em k. Na prática, quando queremos avaliar uma soma dupla, geralmente é mais fácil somá-la primeiro em um índice do que no outro, e podemos escolher o que for mais conveniente.

As somas de somas não são motivo para pânico, mas podem parecer confusas para um estudante, por isso vamos apresentar mais alguns exemplos.

A soma de nove termos apresentada na Eq. (3.19) fornece uma boa ilustração da manipulação de somas duplas, porque essa soma pode ser simplificada, e o processo que apresentaremos a seguir é o típico processo que podemos fazer com somatórios duplos.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j,k\le 3} a_j b_k &= \sum_{j,k} a_j b_k\,[1 \le j,k \le 3] \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k [1 \le j \le 3][1 \le k \le 3] \\
&= \sum_j \sum_k a_j b_k [1 \le j \le 3][1 \le k \le 3] \\
&= \sum_j a_j [1 \le j \le 3] \sum_k b_k [1 \le k \le 3] \\
&= \sum_j a_j [1 \le j \le 3] \Big(\sum_k b_k [1 \le k \le 3] \Big) \\
&= \Big(\sum_j a_j [1 \le j \le 3] \Big) \Big(\sum_k b_k [1 \le k \le 3] \Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{3} a_j \Big) \Big(\sum_{k=1}^{3} b_k \Big).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

A primeira e a segunda linhas da Eq. (3.21) apresentam uma soma de nove termos sem ordem específica de efetuação. Na terceira linha os termos originais agrupam-se em três termos:

$$(a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3) + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3).$$

Na quarta linha da Eq. (3.21) é utilizada a lei distributiva para os fatores a's, já que os termos a_j e a proposição $[1 \leq j \leq 3]$ não dependem de k: isto retorna

$$a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + b_3).$$

A quinta linha da Eq. (3.21) mostra o mesmo que a quarta, mas com um par de parênteses inseridos de forma a organizar a soma, de forma que a leitura da expressão não pareça tão misteriosa. Na quinta linha da Eq. (3.21) são colocados em evidência os fatores $(b_1+b_2+b_3)$ que ocorrem para cada valor de j, e ficamos com

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)\,.$$

A última linha da Eq. (3.21) traz apenas outra forma de escrever a linha anterior, um pouco mais amena de se ler.

O método usado para obter a da Eq. (3.21) pode ser usada para provar a lei distributiva mais geral dada por

$$\sum_{j\in J, k\in K} a_j b_k = \Big(\sum_{j\in J} a_j\Big)\Big(\sum_{k\in K} b_k\Big) \tag{3.22}$$

válida para todos os conjuntos de índices J e K.

A propriedade (3.20), que permite a troca da ordem da soma, tem muitas variações, que surgem quando se quer restringir os intervalos dos índices em vez de somar todos os inteiros j e k. Estas variações podem assumir duas formas, jocosamente chamadas de "baunilha" e de "estrada rochosa".

A versão "baunilha" da propriedade da troca da ordem da soma é dada por

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} = \sum_{j\in J, k\in K} a_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{j,k}\,, \tag{3.23}$$

que é apenas uma forma mais amigável de escrever a Eq. (3.20), já que os fatores $[j \in J; k \in K]$ podem ser convertidos em $[j \in J][k \in K]$. A propriedade "da baunilha" aplica-se sempre que os intervalos de variação j e k são independentes um do outro.

A versão "estrada rochosa" da propriedade da troca da ordem da soma é um pouco mais complicada, e aplica-se quando o intervalo de variação do índice da soma interior depende do intervalo de variação do índice da soma exterior:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}. \tag{3.24}$$

Aqui os conjuntos J, $K(j)$, K', e $J'(k)$ devem estar relacionados de tal forma que as proposições $[j \in J]$, $[k \in K(j)]$, $[k \in K']$ e $[j \in J'(k)]$ atendam à restrição:

$$[j \in J][k \in K(j)] = [k \in K'][j \in J'(k)].$$

Uma fatoração como esta é sempre possível, pois sempre podemos tomar $J = K'$ como o conjunto de todos os números inteiros e $K(j) = J'(k)$ sendo a propriedade básica $P(j;k)$ que governa a soma dupla.

Há casos especiais (e importantes) em que os conjuntos J, $K(j)$, K', e $J'(k)$ têm uma forma simples, e surgem frequentemente em aplicações. Por exemplo, considere a fatoração a seguir:

$$[1 \leq j \leq n][j \leq k \leq n] = [1 \leq j \leq k \leq n] = [1 \leq k \leq n][1 \leq j \leq k]. \tag{3.25}$$

Esta equação permite-nos escrever

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}. \tag{3.26}$$

Uma das duas somas na Eq. (3.26) é geralmente mais fácil de avaliar do que a outra, assim podemos usar a Eq. (3.26) para mudar da soma mais difícil para a soma mais fácil.

Vamos aplicar estas ideias a um exemplo útil. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \ldots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & \ldots & a_3a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \ldots & a_na_n \end{bmatrix}$$

composta por n^2 produtos do tipo a_ja_k. O objetivo será obter uma fórmula simples para a soma de todos os elementos na matriz triangular superior (incluindo sua diagonal principal), que denotamos por

$$S_{\urcorner} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k\,,$$

onde inserimos o símbolo $\urcorner$ como índice em S pela lembrança gráfica da localização dos elementos da matriz triangular superior, que desejamos somar.

A matriz A é simétrica em relação a sua diagonal principal, pois $a_ja_k = a_ka_j$, portanto $S_{\urcorner}$ será aproximadamente metade da soma de todos os elementos (exceto para um fator de correção relacionado à diagonal principal). Estas considerações motivam as manipulações a seguir:

$$S_{\urcorner} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_k a_j = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_j a_k = S_{\llcorner}$$

porque podemos renomear $(j;k)$ como $(k;j)$. Além disso, como

$$[1 \leq j \leq k \leq n] + [1 \leq k \leq j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] + [1 \leq j = k \leq n]\,,$$

podemos escrever

$$2S_{\urcorner} = S_{\urcorner} + S_{\llcorner} = \sum_{1\le j,k\le n} a_j a_k + \sum_{1\le j=k\le n} a_j a_k\,. \tag{3.27}$$

onde o primeiro somatório pode ser substituído por

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2,$$

pela propriedade distributiva generalizada (3.22). O segundo somatório na Eq. (3.27) pode ser reescrito como $\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2$. Portanto, encontramos

$$S_{\urcorner} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_j a_k = \frac{1}{2}\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} a_k\big)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\Big) \tag{3.28}$$

que é uma expressão que permite encontrar soma dos elementos da matriz triangular superior em A em termos de somas individuais mais simples.

Como um último exemplo deste capítulo, vamos tentar calcular outra soma dupla:

$$S = \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

Novamente temos um somatório simétrico (caracterizado quando os índices j e k podem ser intercambiados):

$$S = \sum_{1\le j<k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) = \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)\,.$$

Para que possamos somar S a si mesmo, fazemos uso da identidade

$$[1 \le j < k \le n] + [1 \le k < j \le n] = [1 \le j, k \le n] - [1 \le j = k \le n]$$

para concluir que

$$2S = \sum_{1\le j,k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1\le j=k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)\,, \tag{3.29}$$

onde o segundo somatório é nulo; e o primeiro somatório pode ser expandido em quatro somas separadas, cada uma das quais apresenta uma troca na ordem da soma do tipo “baunilha”:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) &= \sum_{1\le j,k\le n} a_j b_j \;-\; \sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k \;-\; \sum_{1\le j,k\le n} a_k a_j \;+\; \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k \\ &= 2\sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k \;-\; 2\sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k\end{aligned}$$

$$= 2\,n \sum_{1\le k\le n} a_k b_k \,-\, 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)\,, \tag{3.30}$$

onde os somatórios na última etapa da obtenção da Eq. (3.30) foram simplificados de acordo com a propriedade distributiva geralizada (3.22).

A seguir, apresentamos o passo-a-passo da manipulação que resultou no primeiro somatório na última linha da Eq. (3.30):

$$\begin{aligned} 2 \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k &= 2 \sum_{1\le k\le n} \Big(\sum_{1\le j\le n} a_k b_k\Big) \\ &= 2 \sum_{1\le k\le n} a_k b_k \Big(\sum_{1\le j\le n} 1\Big) \\ &= 2 \sum_{1\le k\le n} a_k b_k\, n = 2\,n \sum_{1\le k\le n} a_k b_k \end{aligned}$$

para motivar uma observação: se um índice variável não aparece no somando de um somatório duplo (no caso do exemplo, o índice j), ele pode simplesmente ser eliminado se multiplicarmos o que resta no somando pelo tamanho do conjunto de índices dessa variável (no exemplo, n termos).

Voltando à Eq. (3.30), dividimos toda a expressão por 2, e reordenamos os termos para obter a seguinte (e interessante) fórmula:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \,-\, \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)\,. \tag{3.31}$$

A identidade na Eq. (3.31) produz, como casos especiais, as identidades:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,,$$

se $a_1 \le \cdots \le a_n$ e $b_1 \le \cdots \le b_n$, e

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \ge n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,,$$

se $a_1 \le \cdots \le a_n$ e $b_1 \ge \cdots \ge b_n$.

Neste capítulo, apresentamos as notações mais comuns para representar somas, incluindo a trivial notação três pontos e a notação Sigma, introduzida por L. Euler [9] e difundida por J. Fourier [12], bem como as primeiras propriedades e cuidados básicos para operar com somatórios. Além disso, apresentamos, na expressão (3.6), uma forma alternativa de representar somatórios, onde a restrição sobre os índices variáveis (que governam a soma) aparece dentro do somando. As principais propriedades de somatório, a saber: lei distributiva, lei associativa e lei comutativa, foram apresentadas, e com elas realizamos algumas manipulações de somatórios para encontrar algumas identidades interessantes e úteis, seguindo o roteiro traçado por Graham em [15], incluindo a exposição de uma rápida conexão entre Matemática Discreta com Cálculo Diferencial. Ao longo de todo o texto, incluímos vários exemplos. Por fim, contemplamos também somatórios sobre múltiplos índices e somatórios duplos, em uma tentativa de desmistificar a suposta dificuldade intrínseca a estes tipos de somatórios.

4 SOMATÓRIOS CLÁSSICOS COM $n = \infty$

"*Infinitos matemáticos entram num bar. O primeiro pede ao garçom que lhe traga uma cerveja. O segundo pede meia cerveja. O terceiro pede um quarto de cerveja, e assim por diante...*
O garçom, conhecedor do paradoxo da dicotomia, traz duas cervejas e vai atender outros clientes mais interessantes."

Anedota sobre o conceito de infinito. Autor desconhecido.

Neste capítulo, dando continuidade à apresentação das teorias relacionadas a somatórios, visitamos de forma breve alguns dos conceitos concernentes à teoria de somatórios clássicos com uma quantidade infinita de termos, conhecidos por "Séries". Geralmente indexadas no conjunto dos números inteiros positivos, as Séries vem sendo apresentadas de forma satisfatória a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática (e estudantes de graduação de outros cursos da área de Exatas), normalmente no contexto das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Deixamos claro, desde já, que o objetivo neste capítulo não é esgotar toda a teoria de Sequências e de Séries Numéricas (que é extensa). Na intenção de apresentar um objetivo claro para este Capítulo, citamos que desejamos apresentar conceitos e resultados necessários para compreender Séries de MacLaurin - que utilizaremos brevemente no Capítulo 5.

Muito do que está contemplado neste Capítulo pode ser encontrado em livros clássicos de Cálculo, mas indicamos para consulta o livro [23], pois utilizamos aqui a mesma ordem de exposição lá apresentada, além de enriquecer o texto deste capítulo acrescentando alguns detalhes daquilo que estudamos no PROFMAT nas disciplinas MA11 - Números e Funções Reais, e MA12 - Matemática Discreta. As provas de quaisquer resultados que incluiremos neste capítulo, omitindo as demonstrações, podem ser vistas em [23].

Na Seção 4.1 abordaremos Sequências Numéricas, das quais é necessário entender o comportamento para estudar Séries Numéricas (Seção 4.2) e tentar responder a duas perguntas básicas. A primeira é: "Dada uma Série, ela converge?". A segunda pergunta (que depende da resposta dada à primeira) é: "Qual o valor numérico para o qual a Série converge?" ou, equivalentemente, "Qual o valor numérico da soma destes infinitos termos?". Na Seção 4.3, introduziremos as Séries de Potências, um tipo especial de Séries que, sob certas condições, podem ser utilizadas para expressar funções.

4.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Dedicamos esta seção a listar alguns conceitos e resultados fundamentais sobre Sequências Numéricas. Como em [23], consideramos aqui a notação $\mathbb{N}$ para representar o conjunto dos números inteiros positivos (também conhecido como o conjunto dos Números

Naturais), isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$. No contexto das sequências numéricas, cada número natural é geralmente usado para representar um índice (ou ordem) de um termo da sequência.

Definimos uma *sequência de números reais* como uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural n associa um único número real $a(n)$. O valor que a função a assume quando avaliada no número natural n é denominado *enésimo termo* ou *termo geral* da sequência a, e, ainda usando a notação de funções, é representado genericamente por $a(n)$. Por convenção (e simplicidade) costumamos denotar o termo geral da sequência $a(n)$ pelo símbolo a_n (lê-se "a índice n"), bem como representar toda a sequência a pela notação $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente $\{a_n\}$, quando a omissão do índice $n \in \mathbb{N}$ não gerar ambiguidade.

Uma sequência pode ser entendida simplesmente como uma lista ordenada infinita de números reais, com a forma

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

onde a_n representa o enésimo termo da lista, e cada termo a_n tem seu sucessor a_{n+1}. As formas mais comuns de representar uma sequência são:

(i) Escrevendo seu termo geral, na notação $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

(ii) Listando seus primeiros termos, na forma $a_1, a_2, a_3, \cdots$; ou

(iii) Usando recursão, quando se apresenta uma equação de recorrência que expressa o termo genérico a_n em termo de seu(s) antecessor(es), e o(s) primeiro(s) termo(s) da sequência (tantos quanto for a ordem da recorrência).

Em muitas situações, é útil olharmos não para toda uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mas apenas para uma *subsequência* dela, que é definida como sendo a restrição da sequência a a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Um dos conceitos mais importantes relacionados às sequências é o de *limitação*: dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada superiormente* quando existe algum número real M, chamado *cota superior* da sequência, tal que

$$a_n \leq M\,, \quad \forall\, n\,; \tag{4.1}$$

que uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada inferiormente* quando existe algum número real m, *cota inferior* da sequência, tal que

$$m \leq a_n\,, \quad \forall\, n\,; \tag{4.2}$$

e que uma sequência $\{a_n\}$ é *limitada* quando for limitada superior e inferiormente, isto é, quando existe uma constante positiva C tal que:

$$|a_n| \leq C\,, \quad \forall\, n\,. \tag{4.3}$$

Para que uma sequência $\{a_n\}$ seja limitada é suficiente que a desigualdade (4.3) ocorra a partir de algum determinado índice n_0, isto é, basta que exista alguma constante $C > 0$ para a qual $|a_n| \leq C$, para todo $n \geq n_0$. De fato, se este for o caso, poderão existir no máximo $n_0 - 1$ termos a_n maiores que C em módulo, porém todos finitos. Quando para uma sequência $\{a_n\}$ valem as desigualdades (4.1) e (4.2), também vale a desigualdade (4.3), bastando tomar $C = \max\{|m|, |M|\}$.

Se uma sequência $\{a_n\}$ admite uma cota superior M, então qualquer número real $\widetilde{M}$ maior do que M também será cota superior de $\{a_n\}$, pois $|a_n| \leq M < \widetilde{M}$ (isso significa que, se uma sequência $\{a_n\}$ admite uma cota superior, então ela admite infinitas cotas superiores). A menor das cotas superiores de uma sequência $\{a_n\}$ é chamada de *supremo* e é denotada por $\sup\{a_n\}$. Da forma análoga define-se o *ínfimo* de uma sequência $\{a_n\}$ limitada inferiormente, que é denotado por $\inf\{a_n\}$.

Outro aspecto importante no estudo das Sequências Numéricas refere-se ao comportamento de seus termos, se destacando a ideia de *monotonia*: uma sequência $\{a_n\}$ é *monótona não decrescente* quando

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n\,, \tag{4.4}$$

isto é, quando $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$; e é *monótona não crescente* quando

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n\,. \tag{4.5}$$

Quando nas desigualdades (4.4) e (4.5) os sinais são estritos (ou seja, $<$ e $>$ no lugar de $\leq$ e $\geq$, respectivamente), a sequência $\{a_n\}$ é chamada *monótona crescente* ou *monótona decrescente*, conforme o caso.

O principal conceito referente às Sequências Numéricas é, sem dúvida, o de *convergência*, onde se busca saber se o comportamento do termo geral da sequência se aproxima cada vez mais de um número real bem definido à medida que n cresce indefinidamente. Este conceito é formalizado na seguinte definição:

Definição 4.1 *Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ converge para um número real L (ou que o número real L é o limite da sequência $\{a_n\}$) quando, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, a distância entre L e o valor numérico do termo a_n é menor que ε. Em símbolos:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - L| < \varepsilon\,. \tag{4.6}$$

Quando uma sequência $\{a_n\}$ tem limite, dizemos que ela é convergente.

Alguns comentários sobre a Definição 4.1:

(a) O número natural n_0 depende, em geral, do valor $\varepsilon > 0$ dado $\big($i.e., $n_0 = n_0(\varepsilon)\big)$.

(b) Se a Proposição (4.6) é verdadeira para uma sequência $\{a_n\}$, então fora do intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ existe no máximo uma quantidade finita de termos a_n da sequência.

(c) Se uma sequência $\{a_n\}$ converge para um valor L, a convergência e o valor do limite não são alterados quando se acrescenta, se retira, ou se muda o valor de uma quantidade finita de termos da sequência.

(d) Se, a partir de uma determinada ordem n_0, os termos de uma sequência $\{a_n\}$ estão todos entre os números a e b (i.e., $a \leq a_n \leq b, \forall\ n \geq n_0$), então o limite de a_n, caso exista, está entre a e b.

(e) Se uma sequência $\{a_n\}$ é convergente, então seu limite L é único.

Apresentamos a seguir as propriedades algébricas básicas relacionadas a limites de sequências, que são extremamente úteis pois permitem realizar o cálculo de limites de uma forma prática. Tais propriedades são análogas às propriedades algébricas aplicáveis a funções reais de valores reais.

Proposição 4.1 *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes com limites L e R, respectivamente. Então:*

(a) A sequência $\{a_n \pm b_n\}$ converge para $L \pm R$;

(b) A sequência $\{c \cdot a_n\}$ converge para $c \cdot L$, onde c é uma constante;

(c) A sequência $\{|a_n|\}$ converge para $|L|$;

(d) A sequência $\{a_n \cdot b_n\}$ converge para $L \cdot R$;

(e) A sequência $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$ converge para $\dfrac{L}{R}$, desde que $R \neq 0$ e $b_n \neq 0$, para todo n.

Demonstração: (Apenas para o item (a), como exemplo).
Considere $\varepsilon > 0$. Pela Definição 4.1 (limite de uma sequência), existem índices n_1 e n_2 tais que:

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall\ n \geq n_1 \quad \text{e} \tag{4.7}$$

$$|b_n - R| < \varepsilon, \quad \forall\ n \geq n_2 \tag{4.8}$$

e então, quando consideramos algum número n_0 maior que n_1 e que n_2 (bastaria tomar $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$), as desigualdades (4.7) e (4.8) ocorrem simultaneamente. Portanto, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\big|(a_n \pm b_n) - (L \pm R)\big| = \big|(a_n - L) \pm (b_n - R)\big|$$

$$\leq |a_n - L| + |b_n - R|$$
$$< \epsilon + \epsilon \ = \ 2\epsilon.$$

□

Os resultados apresentados a seguir, entre a Proposição 4.2 e a Proposição 4.5, são utilizados como critérios de convergência de limites de sequências (embora a utilização do primeiro deles, o critério da limitação, ser exatamente o oposto: é usada para concluir que uma sequência diverge).

Proposição 4.2 (Critério da Limitação) *Se $\{a_n\}$ é uma sequência convergente, então $\{a_n\}$ é limitada, isto é, existe uma constante positiva C tal que $|a_n| < C$, para todo n.*

Demonstração: Tome uma sequência $\{a_n\}$ que converge para um limite L. De acordo com a definição de limite apresentada na Proposição (4.5), uma vez fixado $\varepsilon = 1$, existe um índice n_0 a partir do qual ocorre $|a_n - L| < 1$. Calculamos então

$$|a_n| = |a_n - L + L| < |a_n - L| + |L| < 1 + |L|, \quad \forall\, n \geq n_0\,, \tag{4.9}$$

e concluímos que $|a_n|$ é limitado por $1 + |L|$ para todos os termos com $n \geq n_0$. Os termos da sequência $\{a_n\}$ que não necessitam atender à condição na Expressão (4.9) são apenas os termos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n_0 - 1}$. Portanto, ao fazer

$$C = \max\{1 + |L|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_{n_0-1}|\}\,,$$

encontramos a limitação $|a_n| \leq C$, válida para todo n. □

Proposição 4.3 (Critério da Convergência Monótona) *Toda sequência limitada e monótona é convergente.*

Demonstração: Faremos a demonstração para uma sequência limitada crescente (a demonstração pode ser facilmente adaptada para uma sequência com outro tipo monotonia).

Com $\varepsilon > 0$ fixado, considere $\{a_n\}$ uma sequência crescente, limitada superiormente, e $L = \sup\{a_n\}$. Existe então um índice n_0 tal que $L - \varepsilon < a_{n_0}$, e, como a sequência $\{a_n\}$ é crescente, segue que

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n, \quad \forall\, n \geq n_0\,. \tag{4.10}$$

Por outro lado, como L é o supremo da sequência $\{a_n\}$, vale

$$a_n \leq L, \quad \forall\, n\,. \tag{4.11}$$

Ao combinarmos as desigualdades descritas em (4.10) e em (4.11), obtemos

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0\,,$$

isto é, $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Com isso provamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. □

Proposição 4.4 (Critério do Confronto) *Considere três sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ satisfazendo à condição $a_n \leq b_n \leq c_n$, para todo n. Se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L\,,$$

então a sequência $\{b_n\}$ é convergente, e seu limite é L.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0 um índice a partir do qual vale

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon < c_n - L < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Notando que para todo n vale $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L$, e usando as desigualdades dadas em (4.12), obtemos:

$$-\varepsilon < b_n - L < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0\,,$$

ou, de modo equivalente, $|b_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n \leq n_0$. □

Proposição 4.5 (Critério da Razão) *Se para uma sequência $\{a_n\}$ vale $a_n \neq 0$, para todo n, e a razão $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tem limite $L < 1$, então a sequência $\{a_n\}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidades, que $a_n > 0$ para todo n. Consideramos então um número real r tal que $L < r < 1$ e que a partir de uma certa ordem n_0 vale $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ (tal índice n_0 corresponde à escolha de $\varepsilon = r - L$ na Definição 4.1). Como $r < 1$, a desigualdade $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ implica em $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \geq n_0$ e, portanto, a sequência $\{a_n\}$ se torna decrescente a partir da ordem n_0. Sendo assim, vale

$$0 < a_n \leq a_{n_0}, \quad \forall\, n \geq n_0\,, \tag{4.13}$$

e esta Desigualdade (4.13) garante a limitação da sequência $\{a_n\}$, colocando-a nas condições da Proposição 4.3. A sequência $\{a_n\}$ é, portanto, convergente. Para provar que $\{a_n\}$ converge para zero, podemos supor por absurdo que seu limite é um número $s \neq 0$.

Como a sequência $\{a_{n+1}\}$ também converge para s (por ser uma subsequência de $\{a_n\}$), resulta que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{s}{s} = 1\,,$$

contradizendo a hipótese de que L é um número estritamente menor que 1. □

Após introduzirmos brevemente o conceito de sequências numéricas, e apresentar suas principais propriedades e critérios usados para testar a convergência, estamos aptos a iniciar o estudo de somatórios com uma quantidade infinita (do tipo enumerável) de termos, mais conhecidos como *Séries Numéricas.*

4.2 SÉRIES NUMÉRICAS

Uma soma infinita é um processo intrigante em sua essência, porque literalmente não podemos somar, um a um, uma infinidade de termos. O fundamento teórico para o cálculo de somas infinitas foi desenvolvido por Cauchy, mas mesmo antes de sua contribuição, outros matemáticos, como Gauss, Laplace e Euler usaram com sucesso somas infinitas, obtendo resultados surpreendentes.

Ao supormos que uma soma infinita do tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

tem um valor numérico S, estamos aplicando a seguinte ideia: o valor da *soma parcial* $S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ torna-se arbitrariamente próximo de S, à medida que o número n de termos aumenta.

Em alguns casos uma soma infinita resulta em um número, como no caso da soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

(que pode ser deduzida a partir da soma de áreas), como pode ser visto em [23]. Em outros casos, uma soma infinita pode tornar-se arbitrariamente grande à medida que se aumenta o número de termos. É o que acontece, por exemplo, com a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty\,.$$

Existem também somas infinitas cujo resultado é indefinido, como é o caso da soma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$, cujo valor poderia ser 1 ou 0, dependendo de como agrupamos seus termos:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0 \quad \text{ou} \quad 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\,,$$

mas como uma soma não pode ser, ao mesmo tempo, igual a dois números distintos, classificamos (por enquanto) tais somas como indefinidas.

Definição 4.2 *Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots\,,$$

denominada Série Numérica ou simplesmente Série, é representada simbolicamente por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

O termo a_n recebe o nome de termo geral ou enésimo termo da série.

A Definição 4.2 apresenta uma extensão natural da notação Sigma do Somatório Clássico (para uma soma com uma quantidade finita de termos, que estudamos no Capítulo 3): o símbolo ∞ que aparece no limite superior do somatório indica que a soma considera infinitos termos. A seguir, apresentamos as definições de soma parcial e de convergência de uma série numérica.

Definição 4.3 *Dada uma série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, chamamos de soma parcial de tamanho n à soma dos primeiros n termos da série, e denotamos por S_n, isto é:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_n.$$

Definição 4.4 *Uma série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente se a sequência $\{S_n\}$ de suas somas parciais é convergente. Neste caso, a soma da série é o limite da sequência $\{S_n\}$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{4.14}$$

Interessa saber quando uma soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ resulta um número real (quando uma série é *convergente*); o principal objetivo na teoria de Séries Numéricas é estabelecer condições sobre a sequência $\{a_n\}$ que garantam que a soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convirja.

Quando uma série não for convergente ela é dita *divergente*. Há duas espécies de divergência: uma delas é quando a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ cresce sem limite (em módulo), isto é, quando a sequência de somas parciais não tem limite finito (ou seja, $S_n \to \pm\infty$). A outra espécie de divergência ocorre quando a sequência de somas parciais $\{S_n\}$ oscila (como no exemplo $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, que anteriormente afirmamos ter soma indeterminada).

Apresentamos a seguir o primeiro critério a ser testado quando se deseja decidir sobre a convergência de uma determinada série em análise.

Proposição 4.6 (Critério do enésimo Termo) *Se uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, seu termo geral a_n tem limite zero.*

Demonstração: Denotando a sequência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ por $\{S_n\}$, facilmente podemos concluir que $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Como supomos que a série é convergente, a sequência das somas parciais $\{S_n\}$ converge para um certo número L ao $n \to \infty$, e o mesmo ocorre com a sequência $\{S_{n-1}\}$. Então, podemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0\,.$$

□

O critério apresentado na Proposição 4.6 é, na verdade, um critério de divergência para séries: se é conhecido que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Por outro lado, a condição $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ não dá informação suficiente sobre a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sendo necessário aplicar alguma outra técnica para determinar a natureza (convergente ou divergente) da série.

Na próxima Proposição listamos as propriedades que permitem realizar operações algébricas com séries:

Proposição 4.7 *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas, e seja λ um número real.*

(a) Se as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ também são convergentes, e valem as relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,; \; e \tag{4.15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,. \tag{4.16}$$

(b) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ é divergente.

(c) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente e $\lambda \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ também diverge.

Listamos a seguir, entre as Proposições 4.8 e 4.11 (também com as demonstrações omitidas), os principais critérios que permitem decidir sobre a convergência de uma série. Vamos considerar apenas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos, cujas somas parciais S_n formam sequências monótonas crescentes (neste caso, a limitação das sequências das somas parciais é condição para a convergência destas séries), e usaremos o conceito de *série dominada*: dadas duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, quando ocorre $a_n \leq b_n$ para todo n, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *dominada* pela série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é a série dominada e que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é a série dominante.

Proposição 4.8 (Critério da Comparação Direta) *Sejam* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries de termos positivos. Então:*

(a) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge e vale* $a_n \leq b_n$, $\forall\, n$, *então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

(b) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge e vale* $a_n \geq b_n$, $\forall\, n$, *então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também diverge.*

Proposição 4.9 (Critério da Comparação no Limite) *Sejam* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos, e seja* $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

(a) Se $L > 0$, *então as séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

(b) Se $L = 0$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

(c) Se $L = \infty$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também diverge.*

Antes de seguir listando os critérios de convergência, faremos um comentário sobre importantes propriedades das Séries Numéricas, que optamos por introduzir com um exemplo: a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, mas a série obtida a partir desta quando se considera o valor absoluto de cada termo é a Série Harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente. Já o processo inverso preserva a convergência, isto é, se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Este comentário motiva as definições de convergência absoluta e de convergência condicional: quando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será *absolutamente convergente*. Quando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for divergente, mas a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será *condicionalmente convergente*.

A importância do tipo de convergência (se absoluta ou condicional) está no fato de permitir tratar somatórios infinitos como tratamos somatórios finitos, no que diz respeito a reagrupar seus termos. Em um somatório finito os termos podem ser reagrupados (ou rearranjados) sem que o valor da soma seja alterado. Uma série absolutamente convergente também tem esta propriedade, estabelecida no critério a seguir.

Proposição 4.10 (Critério do Reagrupamento) *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente e tem soma* S*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, obtida de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *por meio de algum reagrupamento de seus termos, é também absolutamente convergente e tem soma* S*.*

O critério de convergência que apresentaremos a seguir, embora em muitos casos não permita concluir sobre a convergência ou divergência de uma série, é um dos mais importantes critérios de convergência para séries numéricas, principalmente por sua aplicabilidade às Séries de Potências, que estudaremos na próxima Seção.

Proposição 4.11 (Critério da Razão) *Para uma dada série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, com* $a_n \neq 0$*, para todo* n*, considere*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

(a) Se $L < 1$*, então a série converge absolutamente; e*

(b) Se $L > 1$ *ou se* $L = \infty$*, então a série diverge.*

4.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Iniciamos esta seção relatando uma breve conexão entre séries infinitas e o Cálculo: as funções elementares do Cálculo podem ser representadas como séries de potências (séries cujos termos contêm potências de uma variável x). São chamadas de *séries de potências* as séries do tipo:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots, \tag{4.17}$$

que podem ser representadas sinteticamente por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n. \tag{4.18}$$

Por simplicidade, convencionamos que $(x-a)^0 = 1$ quando $x = a$. Se na Expressão (4.18) considerarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se reduz a uma série geométrica de razão $x - a$, que é convergente quando $|x - a| < 1$.

Na série representada na Expressão (4.18), o número real a é chamado de *centro* da série, e os números c_n são os *coeficientes*.

Um caso particular da série de potências na Expressão (4.18) ocorre quando $a = 0$, quando se obtém a série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n \tag{4.19}$$

sinteticamente representada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \, . \tag{4.20}$$

Uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ sempre admite convergência, mesmo que seja apenas no ponto $x = a$. Pode existir um número real $R > 0$, chamado de *raio do intervalo de convergência* da série (e um intervalo chamado de *intervalo de convergência* da série). O intervalo de convergência de uma série de potências pode assumir qualquer uma das seguintes formas:

$$(a-R, a+R), \quad [a-R, a+R), \quad (a-R, a+R] \ \text{ ou } \ [a-R, a+R] \, ,$$

dependendo da convergência ou não da série nos extremos do intervalo (que deve ser avaliada isoladamente em cada caso).

Os principais critérios de convergência para uma série de potências estão elencados a seguir, entre os Teoremas 4.1 e 4.3:

Teorema 4.1 *Se uma série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *convergir em* $x_0 \neq a$*, então ela convergirá absolutamente em qualquer ponto no intervalo* $|x-a| < |x_0 - a|$*. Se a série divergir em* $x = x_1$*, então ela será divergente para todo* x *satisfazendo a* $|x-a| > |x_1 - a|$*.*

Teorema 4.2 *Para uma dada série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$*, ocorre apenas uma das seguintes situações:*

(a) A série converge apenas quando $x = a$*;*

(b) A série converge absolutamente para qualquer valor que se atribua a x*; ou*

(c) Existe um número real $R > 0$*, denominado raio de convergência, tal que a série converge absolutamente quando* $|x-a| < R$ *e diverge quando* $|x-a| > R$*.*

Uma maneira prática de calcular o raio de convergência de uma série de potências é estabelecida no Teorema a seguir.

Teorema 4.3 *Se* $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ *e* R *é o raio de convergência da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^{kn+p}$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, então:*

(a) $L = 0 \Rightarrow R = \infty$*;*

(b) $L = \infty \Rightarrow R = 0$*; ou*

(c) $L \neq 0 \Rightarrow R = (1/L)^{1/k}$*.*

Como observamos no início desta seção, uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ define uma função real cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

A série derivada $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$, que é obtida da série de potências original por derivação termo a termo, tem o mesmo raio de convergência da série original, pois

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

quando o último limite existir. O mesmo vale para a série integral

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

e, neste caso, quando temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

onde, mais uma vez, admitimos a existência do último limite.

Para introduzirmos os conceitos de Série de Taylor e de Série de McLaurin, é necessário considerar derivação e integração termo a termo para séries de potências. Sob certas hipóteses, a derivação e a integração termo a termo para séries de potência são permitidas, como descrito nos Teoremas 4.4 e 4.5 (cujas demonstrações omitiremos).

Teorema 4.4 (Derivação Termo a Termo) *Se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_0-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x_0-a)^{n-1}$*, obtida da série original por derivação termo a termo, tem raio de convergência* R*; a função*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é derivável no intervalo $(a-R, a+R)$*; e neste intervalo vale*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

Teorema 4.5 (Integração Termo a Termo) *Se a série* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então para* $a - R < \xi < \eta < a + R$*, a série*

$$\int_{\xi}^{\eta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\xi}^{\eta} (x-a)^n dx,$$

obtida da série original por integração termo a termo, também tem raio de convergência R*. Em particular, vale*

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}, \text{ para } |x-a| < R. \tag{4.21}$$

Os exemplos mais simples de funções que podem ser representadas como série de funções são e^x e $(1-x)^{-1}$. No primeiro caso, usa-se derivação termo a termo, e no segundo, uma série geométrica.

Muitas funções, embora infinitamente diferenciáveis em um ponto a, não podem ser representadas nas proximidades de a por uma série de potências de $(x-a)$. As funções que podem ser representadas por séries de potências de $(x-a)$ são apenas aquelas infinitamente diferenciáveis em algum intervalo aberto contendo a, e que neste intervalo estão arbitrariamente próximas de seu *Polinômio de Taylor*, definido a seguir:

Definição 4.5 *Se* $f(x)$ *é uma função derivável até a ordem* n *em um intervalo contendo* a *no seu interior, o Polinômio de Taylor de ordem* n*, gerado por* f *ao redor de* $x = a$*, é, por definição, o polinômio* $P_n(x; a)$ *dado por*

$$P_n(x; a) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{4.22}$$

Na Eq. (4.22), se considerarmos $a = 0$*, obtemos o Polinômio de MacLaurin de ordem* n *da função* f*, que é dado por*

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4.23}$$

Para a $f(x) = e^x$, o Polinômio de Maclaurin de ordem n é

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{4.24}$$

Para esta função, ao usarmos o fato que $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$, para todo r, deduzimos que para todo $0 < \xi < x$, valerá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{4.25}$$

Isto motiva a introdução do resultado principal desta seção, conhecido como *Fórmula de Taylor com Resto*, que apresentamos no Teorema 4.6 e estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma função infinitamente diferenciável possa ser aproximada pelo seu Polinômio de Taylor.

Teorema 4.6 (Fórmula de Taylor com Resto) *Seja $f(x)$ uma função diferenciável até a ordem $n+1$ em um intervalo I contendo a no seu interior. Dado qualquer x nesse intervalo, existe um número ξ entre a e x tal que*

$$f(x) = P_n(x;a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.26}$$

Além disso, se f é infinitamente diferenciável, a sequência $\{P_n(x;a)\}$ converge para $f(x)$ se, e somente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0\,. \tag{4.27}$$

Na Eq. (4.26), o termo $R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ é chamado de *resto* da aproximação da função f pelo seu Polinômio de Taylor.

Se denotarmos por $\{S_n(x)\}$ a sequência das somas parciais da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

e se existirem constantes M e r tais que $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq Mr^{n+1}$, para todo n e todo ξ entre a e x, então

$$|R_n(x,a)| \leq \frac{Mr^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

e como consequência da Proposição 4.4 (Critério do Confronto), deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0\,.$$

Assim, segue da Eq. (4.26) que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x;a) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

e, portanto, a série converge para $f(x)$ em cada x do intervalo de convergência. Assim, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \tag{4.28}$$

Em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), a série na Eq. (4.28) recebe o nome de *Série de Taylor* de f em torno de $x = a$.

Quando restrita $a = 0$, a série de Taylor recebe o nome de *Série de MacLaurin* de f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\,, \tag{4.29}$$

em homenagem ao matemático escocês Colin MacLaurin (1698-1746) que a popularizou em suas publicações.

Neste Capítulo 4, ao tratarmos de somatórios clássicos com uma quantidade infinita (do tipo enumerável) de termos, embora tenhamos omitido a demonstração de muitos resultados, elencamos os principais resultados de Sequências e de Séries Numéricas que nos permitem estabelecer a expressão geral da Série de MacLaurin (4.29) de uma dada função f. Ao final do Capítulo 5, iremos utilizar a Série de MacLaurin para a função $f(x) = \ln(x)$, quando avaliada em $x = 2$, cuja expressão é

$$\ln(2) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots\right), \tag{4.30}$$

para finalizar os cálculos necessários à obtenção do exemplo final daquele Capítulo.

5 SOMATÓRIOS FRACIONÁRIOS

> "*...that there are two kinds of generalizations. One is cheap and the other is valuable. It is easy to generalize by diluting; it is important to generalize by condensing. To dilute a little wine with a lot of water is cheap and easy. To prepare a refined and condensed extract from several good ingredients is much more difficult, but valuable.*"
>
> George Polya

Somas com a forma

$$\sum_{\nu=1}^{x} f(\nu)$$

são definidas tradicionalmente apenas para os casos onde a quantidade x de termos é ou um número inteiro positivo ou ∞ (a teoria clássica para este tipo de somas pode ser vista no Capítulo 3, quando x é um número inteiro positivo, e no Capítulo 4, quando $x = \infty$).

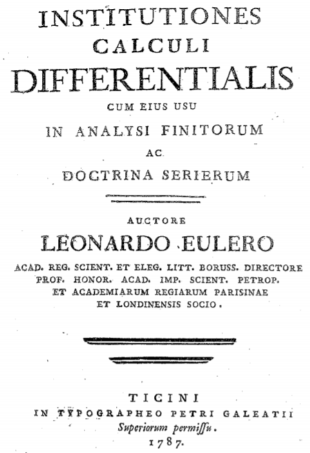
Como introdução a uma situação alternativa para somar termos, considere a seguinte pergunta:

"Qual a soma dos primeiros π termos da série harmônica?"

Embora esta pergunta possa soar estranha, no contexto que será discutido a seguir, ela tem sentido. E embora relativamente desconhecido - o que pode em uma primeira olhada indicar novidade - este sentido foi introduzido por um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos, Leonhard Euler, em um suplemento de seu livro de Cálculo Diferencial [9] publicado em 1755 - Figura 5.1a (e republicado individualmente [10] em 1813 - Figura 5.1b).

Figura 5.1: Páginas de rosto das publicações [E212] (1755) e [E613] (1813)

(a) Página de rosto de [9]

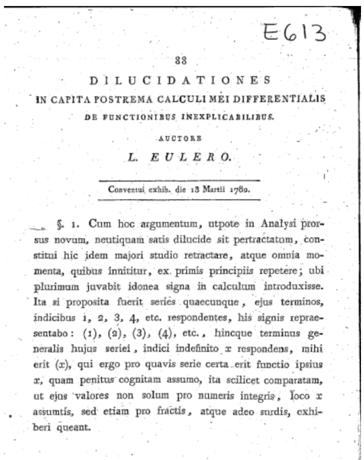


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS USU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

(b) Página de rosto de [10]



E613

88

DILUCIDATIONES
IN CAPITA POSTREMA CALCULI MEI DIFFERENTIALIS
DE FUNCTIONIBUS INEXPLICABILIBUS.

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhib. die 13 Martii 1780.

§. 1. Cum hoc argumentum, utpote in Analysi prorsus novum, neutiquam satis dilucide sit pertractatum, constitui hic idem majori studio retractare, atque omnia momenta, quibus innititur, ex primis principiis repetere; ubi plurimum juvabit idonea signa in calculum introduxisse. Ita si proposita fuerit series quaecunque, ejus terminos, indicibus 1, 2, 3, 4, etc. respondentes, his signis repraesentabo: (1), (2), (3), (4), etc., hincque terminus generalis hujus seriei, indici indefinito x respondens, mihi erit (x), qui ergo pro quavis serie certa erit functio ipsius x, quam penitus cognitam assumo, ita scilicet comparatam, ut ejus valores non solum pro numeris integris, loco x assumtis, sed etiam pro fractis, atque adeo surdis, exhiberi queant.

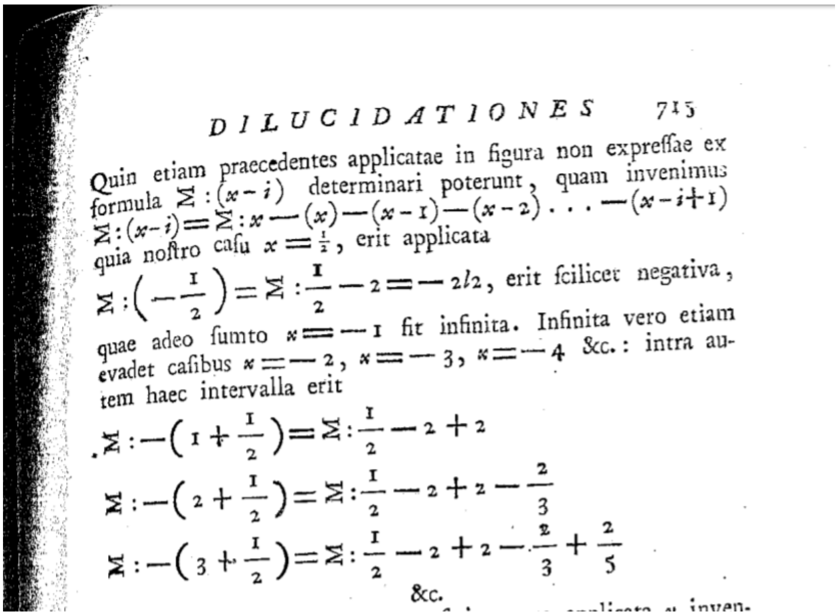
Fonte: [9] e [10].

Em tal suplemento, [10], usando sua notação que pode ser vista na Figura 5.2, Euler apresenta o seguinte resultado para uma soma não usual (no sentido de considerar um número não inteiro de termos):

$$\sum_{\nu=1}^{-1/2} \frac{1}{\nu} = -2\,ln(2). \tag{5.1}$$

Convém notar que o símbolo $\sum$, utilizado para representar um somatório, foi introduzido pelo próprio L. Euler (ver [7]). Apesar de o primeiro resultado com somatórios fracionários datar de 1755, não são conhecidos registros na literatura de outro estudo ou nota sobre o tema, até Markus Müller e Dierk Schleicher publicarem o trabalho [25], em 2005.

Figura 5.2: Recorte de [9]: somatório com um número não inteiro de termos.



DILUCIDATIONES 715

Quin etiam praecedentes applicatae in figura non expreſſae ex formula $\Sigma:(x-i)$ determinari poterunt, quam invenimus $\Sigma:(x-i) = \Sigma:x - (x) - (x-1) - (x-2) \ldots - (x-i+1)$ quia noſtro caſu $x = \frac{1}{2}$, erit applicata

$\Sigma:\left(-\frac{1}{2}\right) = \Sigma:\frac{1}{2} - 2 = -2l2$, erit ſcilicet negativa, quae adeo ſumto $x = -1$ fit infinita. Infinita vero etiam evadet caſibus $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ &c.: intra autem haec intervalla erit

$$\Sigma:-\left(1+\frac{1}{2}\right) = \Sigma:\frac{1}{2} - 2 + 2$$

$$\Sigma:-\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Sigma:\frac{1}{2} - 2 + 2 - \frac{2}{3}$$

$$\Sigma:-\left(3+\frac{1}{2}\right) = \Sigma:\frac{1}{2} - 2 + 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$$

&c.

Fonte: [9].

Neste capítulo, trazemos boa parte do que é apresentado no estudo [27], publicado em 2011 também por Markus Müller e Dierk Schleicher: "*How to add a noninteger number of Terms: From axioms to new identities*", porém consideramos apenas o contexto onde as funções que aparecem nos termos dos somatórios são definidas em $\mathbb{R}$ e tem imagens reais (o caso geral tratado em [27], onde as funções somadas são definidas em $\mathbb{C}$ e tem imagem complexas, será tratado no Apêndice A, onde apresentaremos os ajustes necessários ao texto apresentado neste Capítulo).

O objetivo com este Capítulo é introduzir, em língua portuguesa, uma forma de calcular uma soma (ou produto) de uma quantidade não usual de termos, onde em vez de uma quantidade inteira de termos (como ocorre no que chamamos de somatório clássico), podemos considerar uma quantidade racional, real, ou mesmo complexa, de termos.

5.1 OS AXIOMAS

Consideraremos funções reais de uma variável real, isto é,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

e pretendemos somar quantidades não inteiras de termos deste tipo. Neste texto, x, y, z e s são usados para representar números reais, enquanto f e g representam funções reais definidas em $\mathbb{R}$ ou seus subconjuntos, sujeitos a condições que serão especificadas adiante.

Inicialmente, apresentamos algumas condições naturais para somas com um número arbitrário (não inteiro) de termos: *os axiomas*, que estão listados a seguir.

Axioma (S1) - Continuidade da Soma:

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) \; + \sum_{\nu=y+1}^{z} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu).$$

Axioma (S2) - Invariância por Translação:

$$\sum_{\nu=x+s}^{y+s} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+s).$$

Axioma (S3) - Linearidade para Constantes Arbitrarias $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\nu=x}^{y} \big(\lambda f(\nu) + \mu\, g(\nu)\big) = \lambda \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \mu \sum_{\nu=x}^{y} g(\nu).$$

Axioma - (S4) - Consistência com a Definição Clássica:

$$\sum_{\nu=1}^{1} f(\nu) = f(1).$$

Axioma (S5) - Somas de Monômios: A aplicação

$$y \mapsto \sum_{\nu=1}^{y} \nu^{d}$$

é contínua em $\mathbb{R}$, para cada $y \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{N}$.

Axioma (S6) - Continuidade no deslocamento à direita: Se $\lim_{n\to\infty} f(z+n) = 0$ para cada ponto $z \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) = 0. \tag{5.2}$$

Mais geralmente, se existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de grau fixo, tal que $|f(z+n) - p_n(z+n)| \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{R}$, então exigiremos que

$$\left|\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)\right| \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

Os primeiros quatro axiomas, (S1) a (S4), são tão óbvios e necessários, que é difícil imaginar a possibilidade de construir uma teoria para somatórios que os violem. Com esses quatro axiomas facilmente pode-se verificar que vale

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

de forma que a proposição desses quatro axiomas é consistente com a definição clássica de soma.

O Axioma (S5) é motivado pelas conhecidas fórmulas

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

e fórmulas similares para potências superiores (os Axiomas (S1) a (S5) implicam que todas essas fórmulas permanecem válidas ao se considerar valores $n \in \mathbb{R}$ arbitrários).

Finalmente, o Axioma (S6) também é uma condição natural. O caso apresentado em (5.2) simplesmente expressa o fato que, se a função f se aproxima de zero quando $n \to \infty$, então o somatório de f sobre o "domínio limitado" $[x, y]$ também se aproxima de zero quando $n \to \infty$. No caso da expressão (5.3) vale o mesmo, apenas é acrescentada uma aproximação polinomial para f (compare essas afirmações com a discussão que será feita após a Proposição 5.1).

Veremos na Seção 5.2 que, para uma grande classe de funções f, há uma maneira única de definir um somatório $\displaystyle\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, respeitando os Axiomas (S1) a (S6).

5.2 DEFINIÇÃO DE SOMATÓRIO FRACIONÁRIO

Para entender como os seis Axiomas determinam de forma única um método para somar uma quantidade finita e não necessariamente inteira de termos, vamos começar com um exemplo: agrupando polinômios semelhantes.

O caso mais simples é uma soma de termos $c \in \mathbb{R}$ constantes, como em $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{1/2} c$. Se o Axioma (S1) é aceito, podemos escrever

$$\sum_{\nu=1}^{1/2} c \; + \sum_{\nu=3/2}^{1} c = \sum_{\nu=1}^{1} c. \tag{5.4}$$

Aplicando o Axioma (S2) no lado esquerdo e o Axioma (S4) no lado direito da Eq. (5.4), obtemos

$$\sum_{\nu=1}^{1/2} c \; + \sum_{\nu=1}^{1/2} c = c\,,$$

de onde segue que

$$\sum_{\nu=1}^{1/2} c = \frac{c}{2}.$$

Este procedimento simples pode ser estendido para cobrir qualquer soma de polinômios com um número racional de termos.

Proposição 5.1 *Para qualquer polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o único polinômio tal que $P(0) = 0$ e $P(x) - P(x-1) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então:*

- *A definição possível*
$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) := P(y) - P(x-1) \tag{5.5}$$
satisfaz os Axiomas (S1) a (S6) para o caso em que f é uma função polinomial.

- *Inversamente, toda definição de somatório que satisfizer os Axiomas (S1), (S2), (S3) e (S4) também deve satisfazer a Eq. (5.5) para todo polinômio p e para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com diferença racional, i.e., com $y - x \in \mathbb{Q}$.*

- *Toda definição de somatório que satisfaça os axiomas (S1), (S2), (S3), (S4) e (S5) também satisfaz a Eq. (5.5) para todo polinômio p e para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Para provar a primeira afirmação, vamos considerar a Eq. (5.5) como definição, e a seguir, verificamos que a forma de somar definida em (5.5) satisfaz aos Axiomas (S1), (S3), (S4) e (S5), um a um.

Para verificar que o Axioma (S1) é satisfeito pela Eq. (5.5), calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{z} p(\nu) + \sum_{\nu=z+1}^{y} p(\nu) &= P(z) - P(x-1) + P(y) - P\big((z+1)-1\big) \\
&= P(y) - P(x-1) \\
&= \sum_{\nu=x}^{y} p(\nu).
\end{aligned}$$

Para verificar que a forma de somar definida na Eq. (5.5) satisfaz o Axioma (S2), consideramos um polinômio p e o único polinômio correspondente P tal que $P(0) = 0$ e

$P(x) - P(x-1) = p(x)$. Definimos então $\widetilde{p}(x) := p(x+s)$ e $\widetilde{P}(x) := P(x+s) - P(s)$. Assim, temos

$$\widetilde{P}(0) = P(0+s) - P(s) = 0; \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x) - \widetilde{P}(x-1) &= P(x+s) - P(s) - [P(x-1+s) - P(s)] \\
&= P(x+s) - P(x+s-1) \\
&= p(x+s) \\
&= \widetilde{p}(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{p}(x) = \widetilde{P}(x) - \widetilde{P}(x-1)$.

Segue, portanto, que

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu+s) &= \sum_{\nu=x}^{y} \widetilde{p}(\nu) \\
&= \widetilde{P}(y) - \widetilde{P}(x-1) \\
&= P(y+s) - P(s) - \big[P(x+s-1) - P(s)\big] \\
&= P(y+s) - P(x+s-1) \\
&= \sum_{\nu=x+s}^{y+s} p(\nu),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu+s) = \sum_{\nu=x+s}^{y+s} p(\nu).$$

Para verificar que o Axioma (S3) é satisfeito pela Eq. (5.5), consideramos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, o polinômio p, e um polinômio $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o único polinômio que satisfaz a $Q(0) = 0$ e $Q(z) - Q(z-1) = q(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Definindo o polinômio $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $r(z) := \lambda p(z) + \mu q(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$, o polinômio $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $R(z) := \lambda P(z) + \mu Q(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$ satisfará $R(z) - R(z-1) = r(z)$ e $R(0) = 0$.

De fato:

$$R(0) = \lambda P(0) - \lambda Q(0) = \lambda.0 - \mu.0 = 0 - 0 = 0\,; \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
R(z) - R(z-1) &= \big(\lambda P(z) + \mu Q(z)\big) - \big(\lambda P(z-1) + \mu Q(z-1)\big) \\
&= \big(\lambda P(z) - \lambda P(z-1)\big) + \big(\mu Q(z) - \mu Q(z-1)\big) \\
&= \lambda\big(P(z) - P(z-1)\big) + \mu\big(Q(z) - Q(z-1)\big) \\
&= \lambda\, p(z) + \mu\, q(z) \;=\; r(z).
\end{aligned}$$

Então, calculamos:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=x}^{y}\big(\lambda\, p(\nu)+\mu\, q(\nu)\big) &= \sum_{\nu=x}^{y} r(\nu)\\ &= R(y)-R(x-1)\\ &= \big(\lambda P(y)+\mu Q(y)\big)-\big(\lambda P(x-1)+\mu Q(x-1)\big)\\ &= \big(\lambda P(y)-\lambda P(x-1)\big)+\big(\mu Q(y)-\mu Q(x-1)\big)\\ &= \lambda\big(P(y)-P(x-1)\big)+\mu\big(Q(y)-Q(x-1)\big)\\ &= \lambda\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu)+\mu\sum_{\nu=x}^{y} q(\nu)\,.\end{aligned}$$

Para verificar que o Axioma (S4) é satisfeito pela Eq. (5.5), calculamos:

$$\sum_{\nu=1}^{1} p(\nu) = P(1)-P(1-1) = p(1).$$

Para o Axioma (S5) (somas de monômios): para cada $d \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$z \mapsto \sum_{\nu=x}^{z} \nu^{d}$$

é contínua em $\mathbb{N}$, pois ν^d são polinômios.

Para mostrar que a forma de somar definida em (5.5) satisfaz o Axioma (S6), consideramos V_σ o espaço linear de polinômios de grau menor ou igual a $\sigma \in \mathbb{N}$. A definição

$$||p|| := \sum_{i=0}^{\sigma} |p(i)| \quad \forall\, p \in V_\sigma$$

introduz uma norma em V_σ. Se definirmos um operador linear $\sum_x^y : V_\sigma \to \mathbb{R}$ por

$$\sum_{x}^{y} p := \sum_{\nu=x}^{y} p(\nu)\,,$$

este operador será limitado desde que $dim(V_\sigma) = \sigma + 1 < \infty$. Assim, se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_\sigma$ for uma sequência de polinômios com $\lim\limits_{n\to\infty} ||q_n|| = 0$, teremos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=x}^{y} q_n(\nu) = 0.$$

O Axioma (S6) então segue ao considerarmos a sequência de polinômios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$q_n(x) := p(x+n) - p_n(x+n)$$

e notarmos que a convergência pontual de q_n para zero implica na convergência de q_n para zero na norma $||\cdot||$ e, por seguinte, na convergência para zero da soma $\sum_x^y q_n$.

Obs.: Para a verificação do Axioma (S6) foram necessários conceitos de Análise Funcional, que podem ser consultados em [2].

Para provarmos a segunda afirmação da proposição, supomos que existe alguma definição que permite obter a soma fracionária $\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu)$ que respeite os Axiomas (S1) - (S4), e buscamos estender a ideia usada anteriormente para mostrar que $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{1/2} c = \frac{c}{2}$.

Usando os Axiomas (S1), (S2) e (S4) podemos escrever, para algum inteiro $r \geq 1$ (e para algum inteiro $s \geq 1$):

$$\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d = \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{r}{s}+1}^{\frac{2r}{s}} \nu^d + \ldots + \sum_{\nu=\frac{(s-2)r}{s}+1}^{\frac{(s-1)r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{(s-1)r}{s}+1}^{r} \nu^d,$$

onde o lado esquerdo é um somatório clássico. Ao reescrevermos o lado direito de acordo com o Axioma (S2), e usando o Axioma (S3), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d &= \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{2r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{2r}{s}} \nu^d + \cdots + \sum_{\nu=\frac{(s-1)r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{(s-1)r}{s}} \nu^d \\
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} (\nu+0)^d + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left(\nu + \frac{r}{s}\right)^d + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left(\nu + \frac{2r}{s}\right)^d + \cdots + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left(\nu + \frac{(s-1)r}{s}\right)^d \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left[\left(\nu + \frac{kr}{s}\right)^d\right] \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left[\left(\nu + \frac{kr}{s}\right)^d + \nu^d - \nu^d\right] \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \left[\left(\nu + \frac{kr}{s}\right)^d - \nu^d\right] \\
&= s \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} q_{d-1,k}(\nu)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $q_{d-1,k}(\nu) = (\nu + \frac{kr}{s})^d - \nu^d$ são polinômios de grau $d-1$ (e tais que $q_{-1,k} \equiv 0$).

Agora, argumentamos por indução. Se $d = 0$, a Eq. (5.6) determina claramente o valor da soma $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r/s} 1$, e, por linearidade, fica também determinada a soma correspondente de constantes (arbitrárias) $c \in \mathbb{R}$ de 1 até r. Supondo que o valor da soma de qualquer polinômio de grau $d-1$ está bem determinado, a igualdade na Eq. (5.6) também determina o valor de $\sum_{\nu=1}^{r/s} \nu^d$ e assim, por linearidade, fica determinada a soma de cada polinomio de grau d.

Usando o Axioma (S2) novamente, vemos que os Axiomas (S1) a (S4) determinam (unicamente) a soma

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) = \sum_{\nu=x-(x-1)+(x-1)}^{y-(x-1)+(x-1)} p(\nu) = \sum_{\nu=1+(x-1)}^{y-x+1+(x-1)} p(\nu) = \sum_{\nu=1}^{y-x+1} p(\nu + x - 1)\,,$$

se $y - x \in \mathbb{Q}$ (até aqui, o limite superior do somatório é racional). Já havíamos visto que a Eq. (5.5) é uma possível definição que satisfaz os Axiomas (S1) a (S4); concluímos agora que a Eq. (5.5) é a única definição possível para um somatório fracionário, quando $y - x \in \mathbb{Q}$.

Finalmente, a restrição $y - x \in \mathbb{Q}$ pode ser retirada se assumirmos adicionalmente o Axioma (S5) (no contexto deste capítulo, basta exigirmos continuidade). $\square$

Consideremos agora uma função arbitrária $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se estamos interessados na soma $\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)$, para $x, y \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{y+n} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é um número natural arbitrário. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) &= \sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu) \; - \sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu) \; + \sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1+(x-1)}^{n+(x-1)} f(\nu) - \sum_{\nu=1+(y)}^{n+(y)} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \big(f(\nu + x - 1) - f(\nu + y) \big) + \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu + n). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Com esta reorganização de termos, na última linha da Eq. (5.7) obtivemos o primeiro somatório envolvendo um número inteiro de termos, que pode ser avaliado classicamente.

O problema a resolver fica então restrito à última soma do lado direito da Eq. (5.7), onde o domínio da função f aparece deslocado n unidades para a direita. Como a Eq. (5.7) vale para cada inteiro n, podemos usar o Axioma (S6) para avaliar o limite quando $n \to \infty$: se $f(n + z) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{R}$, então o Axioma (S6) implica que o limite na última soma, quando $n \to \infty$, deve desaparecer, e ficaremos então apenas com

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(f(\nu + x - 1) - f(\nu + y)\big), \tag{5.8}$$

que chamamos de **Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário**.

É claro que o Axioma (S6) traz uma condição especial imposta sobre a função f, mas a mesma ideia pode ser generalizada. Por exemplo, se $f(\nu) = \ln(\nu)$, então para $\nu \in [x, y] \subset \mathbb{R}^+$, os valores $f(\nu + n)$ são bem aproximados pela função constante $f(n)$, com um erro que tende a 0 quando $n \to \infty$; dizemos que $f = \ln$ é "aproximadamente constante". Usando o Axioma (S3), obtemos

$$\sum_{\nu=x}^{y} \ln(\nu + n) = \sum_{\nu=x}^{y} \ln n + \sum_{\nu=x}^{y} \big[\ln(\nu + n) - \ln(n)\big]$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas pelo Axioma (S6), o último somatório se anula quando $n \to \infty$, enquanto a primeira soma do lado direito tem um somando constante e pode ser avaliada através da Proposição 5.1. Ao usar a Eq. (5.7) e tomar o limite com $n \to \infty$, segue que

$$\sum_{\nu=x}^{y} \ln(\nu) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \big(\ln(\nu + x - 1) - \ln(\nu + y)\big) + (y - x + 1) \ln n\Big). \tag{5.9}$$

Antes de generalizar a definição de somatório fracionário apresentada na Eq. (5.8), vamos a mais um exemplo: afirmamos que a Eq. (5.9) pode ser usada para extrapolar a função fatorial clássica para todo $y \in \mathbb{R}$, exceto $y \in \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$. Para mostrar esse fato, começamos definindo um "produtório fracionário":

$$\prod_{\nu=x}^{y} f(\nu) := \exp\Big(\sum_{\nu=x}^{y} \ln f(\nu)\Big), \tag{5.10}$$

e então, tomando $f(\nu) = \nu$ e usando (5.9), calculamos:

$$\exp\Big(\sum_{\nu=1}^{y} \ln \nu\Big) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \Big(\ln(\nu) - \ln(\nu + y)\Big) + y \ln n\right),$$

assim, tomando a libertade de escrever $y\,!$ para $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} y\,! \equiv \prod_{\nu=1}^{y} \nu \; &= \; \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{y} \nu\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} \Big(\ln(\nu) - \ln(\nu + y)\Big) + y \ln n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(n^y \exp \sum_{\nu=1}^{n} \ln\Big(\frac{\nu}{\nu + y}\Big)\right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n^y.\prod_{\nu=1}^{n}\Big(\frac{\nu}{\nu+y}\Big)\right) \;=\; \Gamma(\,y+1)\,, \tag{5.11}$$

obtendo assim a *Função Gama*, que, para $y \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,-3,\cdots\}$, é definida por

$$\Gamma(y) := \int_0^\infty e^{-t}\,t^{y-1}\,dt\,,$$

e tem a seguinte representação na forma de limite (ver, e.g., [18] ou [29]):

$$\Gamma(y) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^y}{y(y+1)\cdots(y+n)}\,,$$

utilizada na última passagem, junto com a propriedade $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, para obter a Eq. (5.11).

Agora, usaremos os cálculos heurísticos que resultaram na Eq. (5.7) junto com Proposição 5.1 e o Axioma (S6) para apresentar uma definição geral de uma forma simples: tudo o que necessitamos é que o valor de $f(n+z)$ possa ser aproximado por alguma sequência de polinômios $p_n(n+z)$, de grau fixo, quando $n \to \infty$.

Para estipular os domínios de definição U para as funções nos termos do somatório fracionário, alguns cuidados são necessários. Por exemplo, quando consideramos a função logaritmo no lugar dos termos a somar, não foi possível considerar funções definidas em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Restrições são necessárias, mas tudo o que precisamos para o domínio de definição U, é que ele tenha a seguinte propriedade:

$$z \in U \quad \Rightarrow \quad z+1 \in U\,.$$

Assim (usando a convenção que o polinômio zero é o único polinômio de grau $-\infty$), apresentamos a seguinte definição:

Definição 5.1 (Funções Fracionário-Somáveis) *Sejam $U \subset \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{N}\cup\{-\infty\}$. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ será chamada Fracionário-Somável de grau σ se forem satisfeitas as seguintes condições:*

- *$x+1 \in U$ para todo $x \in U$;*
- *Existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de grau σ fixo tal que, para todo $x \in U$, ocorre*
$$\big|f(n+x) - p_n(n+x)\big| \to 0 \qquad \text{quando } n \to +\infty;$$
- *Para cada $x, y+1 \in U$, existe o limite*
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=n+x}^{n+y} p_n(\nu) + \sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1) - f(\nu+y)\big)\right),$$

onde $\sum p_n$ *é definido como em (5.5).*

Neste caso, usaremos a notação

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) \quad \text{ou, brevemente,} \quad \sum_{x}^{y} f$$

para tal limite, e vale a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8). Além disso, podemos definir Produtórios Fracionários por

$$\prod_{\nu=x}^{y} f(\nu) := \exp\Big(\sum_{\nu=x}^{y} \ln f(\nu)\Big),$$

sempre que ln(f) for uma função Fracionário-Somável.

Note que a Definição 5.1 não depende da escolha dos polinômios aproximados $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, se $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é outra escolha de polinômios de aproximação para f, então vale

$$\lim_{n\to\infty} (p_n(n+x) - \widetilde{p}_n(n+x)) = 0 \quad \forall\, x \in U,$$

(e portanto para todo $x \in \mathbb{R}$), pois o conjunto de polinômios de grau máximo σ é um espaço linear de dimensão finita. Como mostrado na Proposição 5.1, somas de polinômios satisfazem o Axioma (S6), então, substituindo f por 0 e p_n por $\widetilde{p}_n - p_n$ no Axioma (S6), conclui-se facilmente que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=n+x}^{n+y} p_n(\nu) \; - \sum_{\nu=n+x}^{n+y} \widetilde{p}_n(\nu) \Big) = 0.$$

Além disso, a Definição 5.1 é a única que satisfaz os Axiomas (S1) a (S6), como mostra o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *A Definição 5.1 (de funções Fracionário-Somáveis) satisfaz todos os Axiomas (S1) a (S6) (para domínios de definição adequados), e a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8) é a única que atende todos os Axiomas (S1) a (S6) (para a classe de funções considerada).*

Demonstração: A demonstração da unicidade já foi feita, quando usamos os Axiomas (S1) a (S6) para derivar a Definição 5.1. Resta então provar que a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8) realmente satisfaz todos os seis Axiomas.

Claramente, os Axiomas (S3) e (S5) são automaticamente satisfeitos.

Para provar que os Axiomas (S1), (S2) e (S4) são satisfeitos, basta substituir a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8) para $\sum_x^y f(\nu)$ no respectivo axioma e fazer alguns poucos cálculos diretos. Por exemplo, substituindo a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário no lado esquerdo do Axioma (S1), obtemos o lado direito:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \sum_{\nu=y+1}^{z} f(\nu) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\big(f(\nu+y+1-1)-f(\nu+z)\big)\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)+\big(f(\nu+y)-f(\nu+z)\big)\Big)\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+z)\big)\\
&= \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu).
\end{aligned}
$$

Para provar que o Axioma (S6) é satisfeito, utilizamos a Definição 5.1 de Função Fracionária-Somável e a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.7), junto com os outros axiomas (em particular o Axioma (S1) - a continuidade da soma) e buscamos avaliar

$$
\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)\Big)
$$

da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)\Big) =\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n)-\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)+\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1)-f(\nu+y)\big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu+x-1)-\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu+y)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)+\sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu)-\sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu)+\sum_{\nu=x+n}^{y+n} f(\nu)-\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu)-\sum_{\nu=y+1}^{y+n} f(\nu)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=x}^{y+n} f(\nu)-\sum_{\nu=x}^{y+n} f(\nu)\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Isso completa a demonstração de que a fórmula fundamental para o somatório (5.8), para f atendendo as condições da definição 5.1, satisfaz a todos os Axiomas (S1)-(S6).

□

5.3 PROPRIEDADES E EXEMPLOS DE SOMAS FRACIONÁRIAS

Agora que conhecemos uma definição adequada para a soma de uma quantidade não inteira de termos (Definição 5.1 e Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8)), é interessante buscar conhecer quais das propriedades dos Somatórios Clássicos (finitos) permanecem válidos com essa abordagem mais geral de Somatórios Fracionários, e quais outras propriedades aparecem que não eram visíveis no caso clássico.

Uma das mais básicas propriedades para Somatórios Clássicos finitos, que pode ser generalizado para Somatórios Fracionários, é a soma da Série Geométrica. Por simplicidade, consideremos $0 \leq q < 1$. Então, a função $\nu \mapsto q^\nu$ é "aproximadamente zero" para valores grandes de ν, e vale $\lim_{n\to\infty} q^{x+n} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando a definição 5.1 e a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{x} q^\nu &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(q^{\nu-1} - q^{\nu+x}\right) \\ &= \left(1 - q^{x+1}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu-1} \\ &= \frac{1-q^{x+1}}{1-q}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

ou seja, a conhecida fórmula para a soma da Série Geométrica permanece válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Algebrismos similares mostram que a soma da Série Binomial permanece válida no caso fracionário. Inicialmente, lembramos que se α e j são naturais vale

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!},$$

mas se α e $j \in \mathbb{R}$, então vale (ver [18] ou [29]):

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

Consideramos então $x \in \mathbb{R}$, com $|x| < 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1, -2, -3, ...\}$ e, usando a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8) para a função

$$f(\nu) = \binom{\alpha}{\nu} y^\nu,$$

obtemos

$$\sum_{\nu=0}^{x}\binom{\alpha}{\nu}y^{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{\nu-1}y^{\nu-1}-\binom{\alpha}{\nu+x}y^{\nu+x}\right). \tag{5.13}$$

Para seguir, tomamos $\alpha = x$. Assim, temos

$$\binom{\alpha}{\nu+\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(-\nu+1)},$$

e note que ocorre $\Gamma(1-\nu)=\pm\infty$ para todo $\nu\in\mathbb{N}^*$, e é exatamente esse caso que temos no somatório na Eq. (5.13), de forma que todos os termos no último somatório do lado direito da Eq. (5.13) será "algo" do tipo $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\pm\infty}$, e, portanto, deve ser considerado nulo, de forma que na Eq. (5.13) ficamos apenas com

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\nu}y^{\nu} &= \sum_{\nu+1}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu-1}y^{\nu-1}\\ &= (1+y)^{\alpha}\,,\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde aparece exatamente a expressão expandida da Série Binomial (ver [11], [20]).

Um exemplo de identidade com somatório fracionário e com uma estrutura um pouco mais complicada que os exemplos anteriores é dado pela fórmula de multiplicação de séries:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{x} f(v)\right)\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{x} g(\nu)\right)=\sum_{\nu=1}^{x}\left(f(\nu)g(\nu)+f(\nu)\sum_{k=1}^{\nu-1}g(k)+g(\nu)\sum_{k=1}^{\nu-1}f(k)\right) \tag{5.15}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$, desde que as três somas existam (ver [26]). Isto generaliza a fórmula

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)=a_1b_1+a_2b_2+a_1b_2+a_2b_1$$

e outras similares, conhecidas para todo x inteiro positivo.

Existem generalizações da Eq. (5.12) para o caso $q>1$, e da Eq. (5.14) para o caso $|x|>1$, que envolvem uma variação do Axioma (S6) - que é chamado, mais brevemente, de "soma direita" e passa a ser denotado por ($\overrightarrow{S6}$); esta variação do Axioma (S6), que recebe o nome de "soma esquerda", é dada por:

($\overleftarrow{S6}$) Continuidade no deslocamento à esquerda: Se $\lim_{n\to\infty} f(z-n)=0$ para cada ponto $z\in\mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{x}^{y} f(z-n)=0\,;$$

mais geralmente, se existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de grau fixo, tal que

$|f(z-n) - p_n(z-n)| \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{R}$, então exigiremos que

$$\left| \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu - n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu - n) \right| \longrightarrow 0. \tag{5.16}$$

Não discutiremos tais generalizações neste texto; elas podem ser vistas (assim como mais aplicações) em [25], [26], [27], [37].

A seguir, mostraremos dois novos exemplos, satisfeitos por Somatórios Fracionários, que não encontram equivalentes quando olhamos apenas para Somatórios Clássicos.

Como mostrado na Eq. (5.11) (seção 5.2), a Fórmula Fundamental do Fomatório Fracionário interpola o fatorial pela função Γ, isto é:

$$y\,! \equiv \prod_{\nu=1}^{y} \nu = \Gamma(y+1) \tag{5.17}$$

(mantemos a liberdade de escrever $y\,!$ para $y \in \mathbb{R}$). Uma consequêcia divertida disso é a seguinte forma de usar Somatórios Fracionários para expressar o número $\tanh(\pi)$:

$$\tanh(\pi) = \prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu^2 + 1)\,, \tag{5.18}$$

cujo cálculo mostraremos a seguir, usando as identidades (ver [29]):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{i\pi}{\sinh(\pi i z)}.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu^2+1) &= \prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu+i) \cdot \prod_{\nu=1}^{-1/2} (\nu-i) \\
&= \exp\left(\sum_{\nu=1}^{-1/2} \ln(\nu+i) \right) \cdot \exp\left(\sum_{\nu=1}^{-1/2} \ln(\nu-i) \right) \\
&= \exp\left(\sum_{\nu=1+i}^{-(1/2)+i} \ln(\nu) \right) \cdot \exp\left(\sum_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \ln(\nu) \right) \\
&= \prod_{\nu=1+i}^{-(1/2)+i} \nu \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \\
&= \prod_{\nu=1+i}^{-(1/2)+i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\sum_{\nu=1+i}^{-(1/2)+i} \ln(\nu)\right) \cdot \frac{\exp\left(\sum_{\nu=1}^{i} \ln(\nu)\right)}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu} \\
&= \frac{\exp\left(\sum_{\nu=1+i}^{-(1/2)+i} \ln(\nu) + \sum_{\nu=1}^{i} \ln(\nu)\right)}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu} \\
&= \frac{\exp\left(\sum_{\nu=1}^{-(1/2)+i} \ln(\nu)\right)}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu} \\
&= \frac{\prod_{\nu=1}^{-(1/2)+i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \prod_{\nu=1-i}^{-(1/2)-i} \nu \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu} \\
&= \frac{\prod_{\nu=1}^{-(1/2)+i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{i} \nu} \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{-(1/2)-i} \nu}{\prod_{\nu=1}^{-i} \nu} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\right)}{\Gamma(i+1) \cdot \Gamma(1-i)} \;=\; \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\right)}{i\,\Gamma(i) \cdot \Gamma(1-i)} \\
&== \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right) \cdot \Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}-i\right)\right)}{i\,\Gamma(i) \cdot \Gamma(1-i)} \;=\; \frac{\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\pi(\frac{1}{2}+i)\right)}}{i \cdot \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi i)}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\pi i)}{i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\pi i\right)} \;=\; \frac{\operatorname{sen}(\pi i)}{i \cdot \cos(\pi i)} \\
&= \frac{-\operatorname{senh}(\pi)}{i \cdot i \cdot \cosh(\pi)} \;=\; \frac{-\operatorname{senh}(\pi)}{i^2 \cdot \cosh(\pi)} \;=\; \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\cosh(\pi)} \;=\; \tanh(\pi).
\end{aligned}
$$

Muitas somas fracionárias básicas estão relacionadas com algumas funções especiais. Como um exemplo final deste capítulo, considere a Série Harmônica.

Como a aplicação

$$\nu \to \nu^{-1}$$

é "aproximadamente zero" para ν grande, ao aplicar a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (5.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\nu+1-1} - \frac{1}{\nu+x}\Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+x}\Big) \end{aligned} \tag{5.19}$$

e, em particular:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{-1/2} \frac{1}{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu-\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\nu} - \frac{2}{2\nu-1}\Big) \\ &= (1-2) + \Big(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\Big) + \Big(\frac{1}{4}-\frac{2}{7}\Big) + \Big(\frac{1}{5}-\frac{2}{9}\Big) + \cdots \\ &= (-2+1) + \Big(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\Big) + \Big(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\Big) + \Big(-\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\Big) + \Big(-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\Big) + \cdots \\ &= (-2+1) + \Big(-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\Big) + \Big(-\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\Big) + \Big(-\frac{2}{7}+\frac{2}{8}\Big) + \Big(-\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\Big) + \cdots \\ &= -2\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots\Big) \\ &= -2\ln 2, \end{aligned} \tag{5.20}$$

ou seja, recuperamos o resultado

$$\sum_{\nu=1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\nu} = -2\ln 2,$$

obtido e anunciado por Euler em 1755 [10], e que citamos na Introdução desta dissertação e na abertura deste Capítulo 5 na Eq. (5.1). Para finalizar, gostaríamos de apontar o fato de na última passagem da Eq. (5.20) ter sido utilizado o resultado apresentado na Eq. (4.30), ao final do Capítulo 4, a saber, a expansão como Série de MacLaurin para a função $\ln(x)$, avaliada em $x = 2$.

Tanto a recuperação do exemplo de Somatório Fracionário apresentado por Euler quanto a utilização de um exemplo de expansão em Série de MacLaurin (que encerra o Capítulo 4 e se mostrou necessária para encerrar o Capítulo 5) foram cuidadosamente escolhidos para finalizar este texto, onde iniciamos estudando "soma", a primeira e mais básica das operações matemáticas, fizemos um levantamento dos momentos onde os estudantes tem contato com a notação Sigma de Somatório no Ensino Básico e em cursos de Licenciatura em Matemática, dissertamos sobre os conceitos de Somatório Clássico com uma quantidade finita de termos e com uma quantidade infinita de termos, e finalizamos introduzindo em língua portuguesa uma teoria não usual para somatórios (consistente com a teoria para Somatórios Clássicos) onde é permitido somar sobre uma quantidade racional, real e mesmo complexa de termos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização do estudo apresentado nesta dissertação, que teve como justificativa inicial uma preocupação com a dificuldade encontrada por estudantes dos mais diversos níveis de Ensino quando precisam manipular somatórios, pudemos observar que existem vários momentos no Ensino Médio onde ideia e/ou notação de Somatórios são utilizadas. Entretanto, percebemos que nas diretrizes para este nível de ensino o conceito de Somatório não é citado especificamente. Esta percepção transformou-se em preocupação quando, na amostra de livros didáticos consultada, não encontramos ao menos uma seção específica para se introduzir o conceito de Somatório e esclarecer sua interpretação, sua notação e suas propriedades, previamente à sua utilização no tratamento de outros assuntos abordados nos livros, parecendo haver um entendimento de que a compreensão dos significados embutidos na notação Sigma se dá de forma automática pelos estudantes, o que consideramos uma postura insuficiente para que os estudantes desenvolvam um domínio completo da leitura, escrita e manipulação desta notação.

Dentre todas as operações matemáticas, a soma é a mais básica de todas, estando presente por toda parte na Matemática. É, portanto, recomendável conhecermos e dominarmos as ferramentas básicas que permitem bem lidar com elas. Nesse sentido, se faz necessário que no Ensino Médio a abordagem às ferramentas relacionadas à operação de somar seja bem fundamentada, especialmente o conceito de Somatório e a notação Sigma. Defendemos que é necessário dar ao conceito de Somatório o devido destaque, explicitando aos estudantes sua simplicidade e enorme aplicabilidade.

Como forma de ação objetivando permitir que o professor de Matemática esteja apto a ofertar a seus estudantes de Ensino Médio uma mediação adequada para que os mesmos compreendam completamente as ideias sintetizadas na notação Sigma e consigam desenvolver habilidades de manipulação algébrica com esta notação, acreditamos ser necessário que o professor de Matemática, em seu período de formação inicial enquanto estudante em um curso de Licenciatura em Matemática (ou mesmo em formação continuada), realize um estudo aprofundado (mas não necessariamente longo) do conceito de Somatório, em suas várias nuances, incluindo propriedades relativas a somas com uma quantidade finita de termos, estudo de sequências numéricas e de convergência de séries e até mesmo o conceito básico de Somatórios Fracionários (atualmente fora do que é ensinado nos cursos de Graduação em Matemática). Um tal estudo, aprofundado e detalhado, serviria para a expansão de sua própria compreensão das ideias envolvidas, o que frutificaria ao permitir aos docentes de Matemática melhor explanar o conceito de Somatório no Ensino Básico, facilitando a compreensão dos estudantes a respeito da notação utilizada, e por conseguinte aumentando o rendimento dos estudantes no aprendizado dos conteúdos que fazem uso de tal notação.

Por fim, destacamos a relevância daquilo que incluímos no Capítulo 5, iniciando a divulgação em língua portuguesa do conceito de Somatório Fracionário, que já conta com o desenvolvimento de uma teoria para a compreensão e manipulação de um tipo não usual de Somatórios: os Somatórios Fracionários - ou Somatórios de ordem não inteira - ou Somatórios com uma quantidade não inteira de termos. Salientamos que essa teoria é consistente com a teoria para Somatórios Clássicos, a estendendo para uma situação mais geral onde é permitido somar sobre uma quantidade racional, real e mesmo complexa de termos.

REFERÊNCIAS

[1] BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed.. São Paulo: Ed. Leya, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

[2] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed.. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015. (Textos Universitários).

[3] BRASIL, Ministério da Educação. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Lei de Diretrizes e Bases. Brasília, 1996.

[4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

[5] BRASIL, Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Parecer CNE/CES n. 1.302/2001. Brasília, 2001.

[6] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

[7] CAJORI, F. **A History of Mathematical Notations** Two Volumes Bound As One. New York: Dover Publications, 1993.

[8] DANTE, L. R. **Matemática** Contexto e Aplicações. 2. ed.. São Paulo: Ed. Ática, 2014.

[9] EULER, L. **Institutiones Calculi Differentialis** cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum [E212]. Petropolitanae Academiae Sumptibus, 1755; Republicado em Opera Omnia, series 1, v. 10; Parte I republicada em Euler, L.; Blanton, J. D. **Fondations of Differential Calculus**. New York: Springer, 2000. Disponível em http://eulerarchive.maa.org/backup/E212.html. Acesso em: 18 abr. 2020.

[10] EULER, L. **Dilucitationes in capita postrema calculi mei differentialis de funcionibus inexplicabilibus** [E613]. Supplementum in [E212], 1755; republicado em Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg 4, p. 88-119, 1813; republicado em Opera Omnia, series 1, v. 16, p. 1-33. Disponível em http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E613.pdf. Acesso em: 18 abr. 2020.

[11] EULER, L. **Nova demonstratio qvod potestatvm Binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat** [E637]. Nova Acta Academiae Scientiarvm Imperialis Petropolitanae, Tomvs V, p. 52-58 (Mathematica), 1787. Disponível em http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E637.pdf. Acesso em: 01 mai. 2020.

[12] FOURIER, J.-B. J. **La théorie analytique de la chaleur**. Chez Firmin Didot. Paris: Père ed Fils, 1822.

[13] GARBI, G. G. **A Rainha das ciências – um passeio pelo maravilhoso mundo da Matemática**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.

[14] GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed.. São Paulo: Atlas, 2002.

[15] GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. **Concrete mathematics**: a foundation for computer science. 2nd ed.. New York: Addison-Wesley Publishing, 1994.

[16] IEZZI, G. et al.. **Matemática**: ciência e aplicações - Ensino Médio. 9. ed.. São Paulo: Saraiva, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

[17] IVERSON, K. E. **A Programming Language**. New York: John Wiley, 1962.

[18] KOBUCHEI, A.; LUCHKO, Y. (Eds.) **Handbook of Fractional Calculus with Applications**, vol. 1: Basic Theory. Berlin: De Gruyter, 2019.

[19] LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 3. ed.. São Paulo: Moderna, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

[20] LEACHENSKI, A. A. **Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

[21] LONGEN, A.. **Matemática**: padrões e relações. São Paulo: Editora do Brasil, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

[22] TENREIRO MACHADO, J.; LOPES, A. M.; DUARTE, F. B.; ORTIGUEIRA, M. D.; RATO, R. T. Rhapsody in Fractional. **An International Journal for Theory and Applications**, V. 17, n. 4, p. 1188-1214, 2014.

[23] MATOS, M. P. **Séries e Equações Diferenciais**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2017.

[24] MORGADO, A. C.; Carvalho, A. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[25] MÜLLER, M.; SCHLEICHER, D. How to Add a Non-Integer Number of Terms, and How to Produce Unusual Infinite Summations. **Journal of Computational and Applied Mathematics** V. 178 n. 1–2, p. 347-360, 2005.

[26] MÜLLER, M.; SCHLEICHER, D. Fractional sums and Euler-like identities. **Ramanujan Journal**, v. 21, p. 123-143, 2010.

[27] MÜLLER, M.; SCHLEICHER, D. How to add a noninteger number of Terms: From axioms to new identities. **The American Mathematical Monthly**. Vol. 118, n. 2, p. 136-152, 2011.

[28] PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** Matemática. Curitiba, 2008.

[29] PODLUBNY, I. **Fractional differential equations**: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. London: Academic Press, 1999. (Mathematics in Science and Engineering, v. 198).

[30] POLYA, G. **Induction and Analogy in Mathematics** Volume I of mathematics and plausible reasoning. New Jersey: Princeton University Press, 1954.

[31] ROSA, C. A. P. **História da ciência**: a ciência moderna. 2. ed.. Brasília: Editora FUNAG, 2012.

[32] SBEM, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática**: Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: Editora SBEM, 2003.

[33] SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. **Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática** Proposta da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015.

[34] SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Contato Matemática**. São Paulo: FDT, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

[35] STEWART, J. **Cálculo**. V. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[36] TAHAN, M. **As Maravilhas da Matemática**. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.

[37] UZUN, B. On the Fractional Sums of Some Special Functions. **Results in Mathematics**. v. 74, n. 1, 2019.

APÊNDICE A

SOMATÓRIOS FRACIONÁRIOS EM $\mathbb{C}$

Nossa intenção a partir do Capítulo 5 foi introduzir, em língua portuguesa, uma forma de calcular uma soma (ou produto) de uma quantidade não usual de termos, onde em vez de uma quantidade inteira de termos, podemos considerar uma quantidade racional, real, ou mesmo complexa, de termos; porém no Capítulo 5 apenas consideramos o contexto de somas com uma quantidade real de termos reais.

Neste Apêndice apresentamos os ajustes necessários para a teoria de Somatórios Fracionários quando, no texto que apresentamos no capítulo 5, em vez de funções reais de uma variável real, são consideradas funções complexas de uma variável complexa (conforme é apresentado em [25], [26] e [27]). Nas próximas páginas, apresentamos partes do Capítulo 5 com as alterações no texto; as partes do Capítulo 5 que não transcrevemos neste Apêndice podem ser lidas exatamente como apresentadas no texto do Capítulo 5.

Consideramos agora o contexto de funções complexas definidas em $\mathbb{C}$, isto é,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Aqui, x, y, z e s são usados para representar números complexos, enquanto f e g representam funções complexas definidas em $\mathbb{C}$ ou em seus subconjuntos.

A.1 OS AXIOMAS

(S1) Continuidade da Soma:

$$\sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) \; + \sum_{\nu=y+1}^{z} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu).$$

(S2) Invariância por Translação:

$$\sum_{\nu=x+s}^{y+s} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+s).$$

(S3) Linearidade para constantes arbitrarias $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{\nu=x}^{y} \big(\lambda f(\nu) + \mu\, g(\nu)\big) = \lambda \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu) + \mu \sum_{\nu=x}^{y} g(\nu).$$

(S4) Consistência com a Definição Clássica:

$$\sum_{\nu=1}^{1} f(\nu) = f(1).$$

(S5) Somas de Monômios: para cada $d \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$z \mapsto \sum_{\nu=1}^{z} \nu^d$$

é holomórfica em $\mathbb{C}$ (funções holomorfas são funções definidas sobre um subconjunto aberto do plano complexo $\mathbb{C}$ com valores em $\mathbb{C}$ e que são diferenciáveis em cada ponto).

(S6) Continuidade no deslocamento à direita: Se $\lim_{n\to\infty} f(z+n) = 0$ para cada ponto $z \in \mathbb{C}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x}^{y} f(z+n) = 0. \tag{A.1}$$

Mais geralmente, se existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de grau fixo, tal que $|f(z+n) - p_n(z+n)| \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então exigiremos que

$$\left| \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu+n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu+n) \right| \longrightarrow 0. \tag{A.2}$$

Para uma grande classe de funções f, há uma maneira única de definir um somatório $\sum_{\nu=1}^{z} f(\nu)$ com $z \in \mathbb{C}$ respeitando aos seis axiomas. É o que veremos a seguir.

A.2 DEFINIÇÃO DE SOMATÓRIO FRACIONÁRIO

A Proposição A.1 apresenta a única forma de somar uma quantidade não inteira de termos, respeitando os Axiomas (S1) - (S6), para polinômios complexos.

Proposição A.1 *Para qualquer polinômio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o único polinômio tal que $P(0) = 0$ e $P(z) - P(z-1) = p(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então:*

- *A definição possível*

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) := P(y) - P(x-1) \tag{A.3}$$

  satisfaz os Axiomas (S1) a (S6) para o caso em que f é uma função polinomial.

- *Inversamente, toda definição de somatório que satisfizer os Axiomas (S1), (S2), (S3), e (S4) também deve satisfazer a Eq. (A.3) para todo polinômio p e para todo $x, y \in \mathbb{C}$ com diferença racional, i.e., com $y - x \in \mathbb{Q}$.*

- *Toda definição de somatório que satisfaça os Axiomas (S1), (S2), (S3), (S4) e (S5) também satisfaz a Eq. (A.3) para todo polinômio p e para todo $x, y \in \mathbb{C}$.*

Demonstração:

Para provar a primeira afirmação, vamos supor Eq. (A.3) como definição. Para verificar que a forma de somar definida em Eq. (A.3) satisfaz os Axiomas (S1) - (S6), calculamos:

Para o Axioma (S1):

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{z} p(\nu) \ + \sum_{\nu=z+1}^{y} p(\nu) &= P(z) - P(x-1) + P(y) - P((z+1)-1) \\
&= P(y) - P(x-1) \\
&= \sum_{\nu=x}^{y} p(\nu).
\end{aligned}$$

Para mostrar que a forma de somar definida em Eq. (A.3) satisfaz o Axioma (S2), consideramos um polinômio p e o seu único polinômio correspondente P tal que $P(0) = 0$ e $P(x) - P(x-1) = p(x)$.

Definimos então $\widetilde{p}(x) := p(x+s)$ e $\widetilde{P}(x) := P(x+s) - P(s)$. Assim, temos

$$\widetilde{P}(0) = P(0+s) - P(s) = 0; \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x) - \widetilde{P}(x-1) &= P(x+s) - P(s) - \big[P(x-1+s) - P(s)\big] \\
&= P(x+s) - P(x+s-1) \\
&= p(x+s) \\
&= \widetilde{p}(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{p}(x) = \widetilde{P}(x) - \widetilde{P}(x-1)$. Segue, portanto, que

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu+s) &= \sum_{\nu=x}^{y} \widetilde{p}(x) \\
&= \widetilde{P}(y) - \widetilde{P}(x-1) \\
&= P(y+s) - P(s) - \big[P(x+s-1) - P(s)\big] \\
&= P(y+s) - P(x+s-1) \\
&= \sum_{\nu=x+s}^{y+s} p(\nu),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\nu=x}^{y} p(\nu+s) = \sum_{\nu=x+s}^{y+s} p(\nu).$$

Para verificar que o Axioma (S3) é satisfeito pela Eq. (A.3), consideramos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, o polinômio p, e um polinômio $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é o único polinômio que satisfaz a $Q(0) = 0$ e $Q(z) - Q(z-1) = q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definindo o polinômio $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $r(z) := \lambda p(z) + \mu q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, o polinômio $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definido por $R(z) := \lambda P(z) + \mu Q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ satisfará $R(z) - R(z-1) = r(z)$ e $R(0) = 0$. De fato:

$$R(0) = \lambda P(0) - \lambda Q(0) = \lambda.0 - \mu.0 = 0 - 0 = 0\,;\ \text{e}$$

$$\begin{aligned}
R(z) - R(z-1) &= \big(\lambda P(z) + \mu Q(z)\big) - \big(\lambda P(z-1) + \mu Q(z-1)\big) \\
&= \big(\lambda P(z) - \lambda P(z-1)\big) + \big(\mu Q(z) - \mu Q(z-1)\big) \\
&= \lambda\big(P(z) - P(z-1)\big) + \mu\big(Q(z) - Q(z-1)\big) \\
&= \lambda\, p(z) + \mu\, q(z) \;=\; r(z).
\end{aligned}$$

Então, calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=x}^{y} \big(\lambda\, p(\nu) + \mu\, q(\nu)\big) &= \sum_{\nu=x}^{y} r(\nu) \\
&= R(y) - R(x-1) \\
&= \big(\lambda P(y) + \mu Q(y)\big) - \big(\lambda P(x-1) + \mu Q(x-1)\big) \\
&= \big(\lambda P(y) - \lambda P(x-1)\big) + \big(\mu Q(y) - \mu Q(x-1)\big) \\
&= \lambda\big(P(y) - P(x-1)\big) + \mu\big(Q(y) - Q(x-1)\big) \\
&= \lambda \sum_{\nu=x}^{y} p(\nu) + \mu \sum_{\nu=x}^{y} q(\nu)\,.
\end{aligned}$$

Para o Axioma (S4), calculamos:

$$\sum_{\nu=1}^{1} p(\nu) = P(1) - P(1-1) = p(1).$$

Para o Axioma (S5) (somas de monômios): para cada $d \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$z \mapsto \sum_{\nu=x}^{z} \nu^d$$

é holomórfica em $\mathbb{N}$, pois ν^d são polinômios.

Para mostrar que a forma de somar definida em (A.3) satisfaz o Axioma (S6), consideramos V_σ o espaço linear de polinômios complexos de grau menor ou igual a $\sigma \in \mathbb{N}$. A definição

$$||p|| := \sum_{i=0}^{\sigma} |p(i)|$$

para $p \in V_\sigma$ introduz uma norma em V_σ. Se definirmos um operador linear $\sum_x^z : V_\sigma \to \mathbb{C}$ através de

$$\sum_{\nu=x}^{z} p := \sum_{\nu=x}^{z} p(\nu),$$

este operador será limitado desde que $dim(V_\sigma) = \sigma + 1 < \infty$. Assim, se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_\sigma$ é uma sequência de polinômios com $\lim\limits_{n\to\infty} ||q_n|| = 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=x}^{z} q_n(\nu) = 0.$$

O Axioma (S6) então segue ao considerarmos a sequência de polinômios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$q_n(z) := p(z+n) - p_n(z+n)$$

e observarmos que a convergência pontual para zero implica na convergência para zero na norma $||\cdot||$ de q_n e, por seguinte de $\sum_x^z q_n$.

Obs.: Para a verificação do Axioma (S6) foram necessários conceitos de Análise Funcional, que podem ser consultados em [2].

Para provarmos a segunda afirmação da proposição, supomos que existe alguma definição que permite obter a soma fracionária $\sum_{\nu=x}^{z} p(\nu)$ que respeite os Axiomas (S1) - (S4). Então, consideramos um inteiro $r \geq 1$ e, usando o Axioma (S1), podemos escrever

$$\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d = \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{r}{s}+1}^{\frac{2r}{s}} \nu^d + ... + \sum_{\nu=\frac{(s-2)r}{s}+1}^{\frac{(s-1)r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{(s-1)r}{s}+1}^{r} \nu^d,$$

onde o lado esquerdo é interpretado como o somatório clássico, usando os Axiomas (S1), (S2) e (S4). Ao reescrevermos o lado direito de acordo com o Axioma (S2), e usando o Axioma (S3), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{r} \nu^d &= \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{\nu=\frac{2r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{2r}{s}} \nu^d + \cdots + \sum_{\nu=\frac{(s-1)r}{s}+1}^{\frac{r}{s}+\frac{(s-1)r}{s}} \nu^d \\
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} (\nu+0)^d + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big(\nu + \frac{r}{s}\Big)^d + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big(\nu + \frac{2r}{s}\Big)^d + \cdots + \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big(\nu + \frac{(s-1)r}{s}\Big)^d \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big[(\nu + \frac{kr}{s})^d\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big[(\nu + \frac{kr}{s})^d + \nu^d - \nu^d\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \Big[(\nu + \frac{kr}{s})^d - \nu^d\Big]
\end{aligned}$$

$$= s\sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} \nu^d + \sum_{k=0}^{s-1}\sum_{\nu=1}^{\frac{r}{s}} q_{d-1,k}(\nu)$$

onde $q_{d-1,k}(\nu) = (\nu + \frac{kr}{s})^d - \nu^d$ são polinômios de grau $d-1$ (com todo $q_{-1,k} \equiv 0$).

Agora, argumentamos por indução. Se $d = 0$, a equação anterior determina claramente o valor de $\sum_{\nu=1}^{r/s} 1$. Por linearidade, fica também determinada a soma de constantes arbitrárias $c \in \mathbb{C}$ de 1 até r. Supondo que o valor da soma de qualquer polinômio de grau $d-1$ é determinado, a igualdade anterior também determina o valor de $\sum_{\nu=1}^{r/s} \nu^d$ e, por linearidade, fica determinada a soma de cada polinomio de grau d.

Usando o Axioma (S2) novamente, vemos que os Axiomas (S1) a (S4) determinam exclusivamente a soma

$$\sum_{\nu=x}^{z} p(\nu) = \sum_{\nu=x-(x-1)+(x-1)}^{z-(x-1)+(x-1)} p(\nu) = \sum_{\nu=1+(x-1)}^{z-x+1+(x-1)} p(\nu) = \sum_{\nu=1}^{(z-x+1)} p(\nu + x - 1)$$

se $z-x \in \mathbb{Q}$. Como já vimos, a Eq. (A.3) é uma possível definição que satisfaz os axiomas (S1) a (S4); concluímos agora que Eq. (A.3) é a única definição possível para $z - x \in \mathbb{Q}$. Finalmente, a restrição $z - x \in \mathbb{Q}$ pode ser retirada se assumirmos adicionalmente o Axioma (S5). Para $z-x \in \mathbb{R}$, a Eq. (A.3) já é satisfeita ao exigirmos apenas continuidade no Axioma (S5); porém para $z - x \in \mathbb{C}$, é necessário exigirmos holomorfia no Axioma (S5). □

Consideremos agora uma função arbitrária $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se estamos interessados na soma $\sum_{\nu=x}^{z} f(\nu)$ para $x, z \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$\sum_{\nu=x}^{z} f(\nu) + \sum_{\nu=z+1}^{z+n} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z+n} f(\nu) = \sum_{\nu=x}^{z+n-1} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{z+n} f(\nu),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é um número natural arbitrário. Daí,

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=x}^{z} f(\nu) &= \sum_{\nu=x}^{x+n-1} f(\nu) - \sum_{\nu=z+1}^{z+n} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{z+n} f(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1+(x-1)}^{n+(x-1)} f(\nu) - \sum_{\nu=1+z}^{n+z} f(\nu) + \sum_{\nu=x+n}^{z+n} f(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu + x - 1) - f(\nu + z)\big) + \sum_{\nu=x}^{z} f(\nu + n). \qquad \text{(A.4)}\end{aligned}$$

Com esta reorganização de termos obtivemos, na última linha de (A.4), o primeiro somatório envolvendo um número inteiro de termos, que pode ser avaliado classicamente.

O problema fica agora restrito à última soma do lado direito, onde temos o domínio da soma deslocado n unidades para a direita. Como a Eq. (A.4) vale para cada inteiro n, podemos usar o Axioma (S6) para avaliar o limite quando $n \to \infty$: se $f(n+z) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então o Axioma (S6) implica que o limite quando $n \to \infty$ na última soma deve desaparecer, e ficaremos então apenas com

$$\sum_{\nu=x}^{z} f(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(f(\nu+x-1) - f(\nu+z)\big), \tag{A.5}$$

que chamamos de **Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário**.

É claro que o Axioma (S6) é uma condição especial imposta sobre a função f, mas a mesma ideia pode ser generalizada.

Por exemplo, se $f(\nu) = \ln \nu$, então para $\nu \in [x, y] \subset \mathbb{R}^+$, os valores $f(\nu+n)$ são bem aproximados pela função constante $f(n)$ quando $n \to \infty$, com um erro que tende a 0; dizemos que $f = \ln$ é “aproximadamente constante”. Usando o Axioma (S3), obtemos

$$\sum_{\nu=x}^{z} \ln(\nu+n) = \sum_{\nu=x}^{z} \ln n + \sum_{x}^{z} \big[\ln(\nu+x) - \ln(n)\big]$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas pelo Axioma (S6), o último somatório se anula quando $n \to \infty$:, enquanto a primeira soma do lado direito tem um somando constante e é avaliada através da Proposição A.1. Ao usar a Eq. (A.4) e tomar o limite com $n \to \infty$, segue que

$$\sum_{\nu=x}^{z} \ln(\nu) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \big(\ln(\nu+x-1) - \ln(\nu+z)\big) + (z-x+1)\ln n\Big). \tag{A.6}$$

Antes de generalizar ainda mais a definição de Somatório Fracionário apresentada na Eq. (A.5), observamos que a Eq. (A.6) pode ser usada para extrapolar a função fatorial clássica para todo $z \in \mathbb{C}$, exceto $z \in \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$. Para isso, começamos definindo um “produtório fracionário”:

$$\prod_{\nu=x}^{z} f(\nu) := \exp\Big(\sum_{\nu=x}^{z} \ln f(\nu)\Big),$$

e então, tomando $f(\nu) = \nu$, e usando (A.6), calculamos:

$$\exp\Big(\sum_{\nu=1}^{z} \ln \nu\Big) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \Big(\ln(\nu) - \ln(\nu+z)\Big) + z \ln n\right),$$

assim, tomando a libertade de escrever $z\,!$ para $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$z\,! \;=\; \prod_{\nu=1}^{z} \nu \;=\; \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{z} \nu\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\ln(\nu) - \ln(\nu+z)\Big) + z\ln n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n^z.\prod_{\nu=1}^{n}\Big(\frac{\nu}{\nu+z}\Big)\right) \;=\; \Gamma(z+1)\,,
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

obtendo assim a *Função Gama*, que, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,\cdots\}$, é definida por

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt\,,$$

e tem a seguinte representação na forma de limite (ver, e.g., [18] ou [29]):

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,,$$

utilizada na última passagem, junto com a propriedade $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, para obter a Eq. (A.7).

Agora, usaremos os cálculos heurísticos que resultaram na Eq. (A.4) junto com Proposição A.1 e o Axioma (S6) para apresentar uma definição geral de uma forma simples: tudo o que necessitamos é que o valor de $f(n+z)$ possa ser aproximado por alguma sequência de polinômios $p_n(n+z)$, de grau fixo, quando $n \to \infty$.

Para estipular os domínios de definição U para o somatório fracionário, alguns cuidados são necessários. Por exemplo, quando consideramos a função logaritmo no lugar dos termos a somar, não foi possível considerar funções definidas em todo o conjunto $\mathbb{C}$. Restrições são necessárias, mas tudo o que precisamos para o domínio de definição U, é que ele tenha a seguinte propriedade:

$$z \in U \quad \Rightarrow \quad z+1 \in U.$$

Assim (usando a convenção que o polinômio zero é o único polinômio de grau $-\infty$), apresentamos a seguinte definição:

Definição A.1 (Funções Fracionário-Somáveis) *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ e $\sigma \in \mathbb{N}\cup\{-\infty\}$. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ será chamada Fracionário-Somável de grau σ se forem satisfeitas as seguintes condições:*

- *$z+1 \in U$ para todo $z \in U$;*
- *Existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de grau σ fixo tal que, para todo $z \in U$, ocorre*

$$\big|f(n+z) - p_n(n+z)\big| \to 0 \qquad \textit{quando } n \to +\infty;$$

- *Para cada $x, z+1 \in U$, existe o limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=n+x}^{n+z} p_n(\nu) + \sum_{\nu=1}^{n}\big(f(\nu+x-1) - f(\nu+z)\big)\right),$$

  onde $\sum p_n$ é definido como na Eq. (A.3).

Neste caso, usaremos a notação $\displaystyle\mathop{\sum\!\!\!\!\!\!\to}_{\nu=x}^{z} f(\nu)$ ou, brevemente, $\displaystyle\mathop{\sum\!\!\!\!\!\!\to}_{x}^{z} f$ para tal limite, e vale a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (A.5). Além disso, sempre que $ln(f)$ for uma função Fracionário-Somável, podemos definir Produtórios Fracionários por

$$\mathop{\prod\!\!\!\!\!\!\to}_{\nu=x}^{z} f(\nu) := \exp\Big(\mathop{\sum\!\!\!\!\!\!\to}_{\nu=x}^{z} f(\nu)\Big).$$

A Definição A.1 é a única que satisfaz os Axiomas (S1) a (S6), como mostra o seguinte Teorema:

Teorema A.1 *A Definição A.1 (de funções fracionário-somáveis) satisfaz todos os Axiomas (S1) a (S6) (para domínios de definição adequados), e a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (A.5) é a única que atende todos os Axiomas (S1) a (S6) (para a classe de funções considerada).*

Demonstração: (Não são necessárias alterações significativas na demonstração do Teorema 5.1)

A.3 PROPRIEDADES E EXEMPLOS DE SOMAS FRACIONÁRIAS

Uma das mais básicas propriedades para somas finitas é a Série Geométrica. Por simplicidade, consideremos $0 \le q < 1$. Então, a função $\nu \mapsto q^\nu$ é "aproximadamente zero" para ν grande (e sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^{z+n} = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Usando a Definição A.1 e a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (A.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{x} q^\nu &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\big(q^{\nu-1} - q^{\nu+x}\big)\\ &= \big(1-q^{x+1}\big)\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu-1}\\ &= \frac{1-q^{x+1}}{1-q},\end{aligned} \tag{A.8}$$

e a fórmula para a soma da Série Geométrica permanece válida para todo $x \in \mathbb{C}$.

Para a Série Binomial, no caso fracionário: inicialmente, lembramos que se α e j são naturais, vale $\displaystyle\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}$, mas se α e $j \in \mathbb{C}$, então vale (ver [18] ou [29]):

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}\,.$$

Consideramos então $x \in \mathbb{C}$, com $|x| < 1$, e $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,...\}$ e, usando a Fórmula Fundamental do Somatório Fracionário (A.5) para a função $f(\nu) = \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu}$, obtemos

$$\sum_{\nu=0}^{x} \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha}{\nu-1} z^{\nu-1} - \binom{\alpha}{\nu+x} z^{\nu+x} \right). \tag{A.9}$$

Para seguir, vamos tomar $\alpha = x$. Assim, temos

$$\binom{\alpha}{\nu+\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(-\nu+1)},$$

e note que ocorre $\Gamma(1-\nu) = \pm\infty$ para todo $\nu \in \mathbb{N}^*$, e é exatamente esse caso que temos no somatório na Eq. (A.9), de forma que todos os termos no último somatório do lado direito da Eq. (A.9) será "algo" do tipo $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\pm\infty}$, e, portanto, deve ser considerado nulo. Assim, na Eq. (A.9) ficamos apenas com

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu+1}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu-1} z^{\nu-1} = (1+z)^{\alpha}\,, \tag{A.10}$$

onde aparece exatamente a expressão expandida da Série Binomial (ver [11], [20]).

Existem generalizações da Eq. (A.8) para o caso $q > 1$, e da Eq. (A.10) para o caso $|x| > 1$, entre outras aplicações (que não serão discutidas neste texto - pode-se consultar [25], [26], [27], [37]), e que envolvem uma variação do Axioma (S6), que passa a ser denotado por ($\overrightarrow{S6}$); esta variação do Axioma (S6) é dada por:

($\overleftarrow{S6}$) Continuidade no deslocamento à esquerda: Se $\lim_{n\to\infty} f(z-n) = 0$ para cada ponto $z \in \mathbb{C}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x}^{y} f(z-n) = 0\,;$$

mais geralmente, se existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de grau fixo, tal que $|f(z-n) - p_n(z-n)| \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então exige-se que

$$\left| \sum_{\nu=x}^{y} f(\nu-n) - \sum_{\nu=x}^{y} p_n(\nu-n) \right| \longrightarrow 0.$$

APÊNDICE B

MÓDULO DIDÁTICO

> "... *Até que cinco homens entraram na torre. Após o quarto homem sair, o corvo voltou a seu ninho, e foi capturado. O corvo havia perdido a conta!.*"
>
> Final de uma conhecida história sobre contagem. Autor desconhecido.

Neste Apêndice, em consonância com os objetivos que apresentamos na Introdução, apresentamos uma proposta de módulo didático, razoavelmente simples, que propomos ser aplicado a estudantes tanto do Ensino Médio quanto de cursos de graduação, utilizando uma ou no máximo duas aulas, imediatamente antes de o(a) professor(a) abordar um conteúdo que faça uso da notação Sigma para o Somatório Clássico (obviamente, isso precisa ser feito apenas uma vez em cada turma de estudantes).

Acreditamos que uma pequena pausa no cumprimento da sequência indicada nas ementas, destinada a bem permitir aos alunos construir um bom entendimento dos significados atribuídos aos símbolos usados na notação Sigma, pode representar uma contribuição significativa para a apreensão dos conteúdos que fazem uso de tal notação em suas expressões, cálculos e manipulações algébricas, ao proporcionar um momento de dedicação à interpretação do significado destes símbolos que, quando simplesmente vistos em um texto escrito no livro, quadro ou caderno, causam tanta ansiedade e sentimento de impotência nos alunos.

——— × ———

B.1 SOMATÓRIOS

O conceito que estudaremos é o mais simples na Matemática: "adição" ou "soma". Todos sabem somar dois números; o que às vezes complica é somar muitas parcelas de uma vez só...

Quando alguém precisa escrever uma expressão onde são somados muitos termos, ou onde os termos obedecem a uma certa lei de formação, pode usar a *notação* de Somatório $\left(\text{e o símbolo } \sum\right)$, que é uma expressão matemática com a forma

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)\,.$$

Esta notação é apenas uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem a algum padrão que pode ser identificado (e que representamos através do *termo geral* a_n), tanto faz se a quantidade de parcelas que devem ser somadas seja finita ou infinita. Se estiver difícil de entender o que diz a expressão onde o símbolo de Somatório aparece, sempre é possível "abrir" a soma, ou seja, escrever as parcelas uma a uma (ou todas elas, ou pelo menos as primeiras, até conseguir entender o que está acontecendo). como em

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \,.$$

Por exemplo, olhe a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 \,.$$

Como essa expressão está escrita, é fácil entender o que é necessário fazer para calcular a soma de todas as parcelas. Mas agora estamos preocupados em como reescrever esta soma de uma forma abreviada (e entender claramente o que significam os símbolos usados na escrita da forma abreviada), para que quando for necessário fazer o caminho inverso, ou seja, quando você olhar para um Somatório dado e precisar calcular o valor numérico da soma, você consiga fazer o raciocínio inverso e encontrar o valor correto que está procurando.

Para que possamos reescrever a expressão $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ de forma abreviada, usamos o símbolo de somatório $\sum$ (este símbolo é inspirado em uma letra grega: a letra Sigma maiúscula: "Σ", que é equivalente à nossa letra "S").

Como o padrão que existe na soma é "elevar ao quadrado um número que varia entre 1 e 10", podemos escrever genericamente a *k-ésima* parcela da soma como k^2. Assim, quando trocamos k por 1 obtemos a primeira parcela 1^2; quando trocamos k por 2 encontramos a segunda parcela 2^2, e assim por diante, até trocarmos k por 10, pois a soma vai até 10^2. Uma vez que compreendemos o sentido do termo geral e conseguimos identificar quais são o primeiro termo e o último termo da soma (que neste caso são 1 e 10, respectivamente), podemos escrever a soma na forma abreviada, usando a expressão:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 \,,$$

que se lê: "somatório de k elevado ao quadrado, com k variando desde $k = 1$ até 10".

A letra k faz o papel de *índice* da soma (ou do Somatório) e pode ser trocada por qualquer outra (que não atrapalhe na soma), como por exemplo: i, j, l, m, n, etc.

A notação genérica

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)$$

representa "a soma das parcelas a_k, com o índice k variando, de um em um, todos os números inteiros entre o *índice inferior* (ou *limite inferior*) do Somatório, que é 1; e o *índice superior* (ou *limite superior*) do Somatório, que é n". O índice inferior de um Somatório não precisa ser sempre 1. Podemos tranquilamente escrever

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k)$$

desde que o número inteiro m seja menor que o número inteiro n.

B.2 EXEMPLOS

1) Como poderia ser escrita abreviadamente a soma dos 100 primeiros números naturais?

   Na forma expandida, esta soma é $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$. O número 1 é o limite inferior, pois é o primeiro número a ser somado, e o número 100 é o limite superior, pois é o último número a ser somado. A letra k, que pode fazer o papel de *índice* do Somatório, pode ser usada para representar todos os números que variam de parcela para parcela, que neste caso vão de 1 até 100. Então a expressão buscada é

$$1 + 2 + ... + 100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

2) Como poderia ser a soma dos primeiros n números naturais?

   Na forma expandida, esta soma é $1+2+3+...+n$. O número 1 é o limite inferior, pois é o primeiro número a ser somado e o número n é o limite superior, pois é o último número a ser somado. A letra k pode ser usada como índice do Somatório, que irá assumir os valores de 1 a n (essa informação vai abaixo e acima do símbolo $\sum$). Assim:

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

3) Como podemos escrever brevemente a soma

$$2 + 4 + 6 + ... + (2n)\,?$$

   Esta é a soma dos n primeiros números pares, então o número 1 será o limite inferior do Somatório, pois $2 = 2 \times 1$ é o primeiro número a ser somado, e o número n é o limite superior do somatório, pois $2n = 2 \times n$ é o último número a ser somado. O índice k pode ser usada como índice do Somatório, e irá variar entre 1 e n. Assim, podemos escrever

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = \sum_{k=1}^{n}(2k)$$

Obs.: O *termo geral* $(2k)$ do Somatório é também chamado de *argumento* do Somatório. Ao efetuarmos a soma, o índice k deve ser substituido no argumento do Somatório por todos os valores desde o limite inferior 1 até o limite superior n.

4) Como podemos usar a notação de Somatório para reescrever a soma

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n \ ?$$

Nesta soma, as parcelas são potências de 2 consecutivas. Como a primeira parcela é 2^0, o número 0 é o limite inferior do Somatório. O limite superior do Somatório é n, pois a última parcela a ser somada é 2^n. Assim, o argumento do Somatório é 2^j, e o índice j irá assumir todos os valores desde 1 até n:

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j.$$

5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$

6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100.$

B.3 CASOS ESPECIAIS

Existem casos especiais de Somatórios, que é bom conhecer. Veja alguns deles a seguir.

1) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} 0 = 0.$

Neste caso, o argumento do somatório é a constante 0, que tem o valor 0 independentemente do valor do índice do somatório, e a soma de qualquer número de parcelas nulas é sempre zero.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n \times 1 = n.$

Novamente o argumento do Somatório é uma constante, 1, e agora se deve somar n parcelas iguais a 1, o que resulta na soma n. Por exemplo: $\sum_{k=1}^{100} 2 = 100 \times 2 = 200$.

3) Os somatórios podem também ter um número infinito de parcelas, caso onde serão denotados na forma $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$ (veja o símbolo ∞ no lugar do limite superior do Somatório). Em casos como este, caso seja possível calcular as somas, é preciso conhecer o comportamento das *sequências* incluídas no argumento do Somatório

(saber o que acontece aos valores dos termos a_n à medida que o índice n vai aumentando). Por exemplo, se quisermos calcular a soma de todas as potências naturais de base 1, podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1^k) = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty.$$

Outro exemplo de fácil compreensão é

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

B.4 PROPRIEDADES DOS SOMATÓRIOS

Quando você precisar fazer operações algébricas (manipulação de contas) com Somatórios, pode usar as chamadas *propriedades operatórias* dos Somatórios. Usar as propriedades simplificará muito os cálculos a fazer. As principais propriedades são dadas a seguir.

Considere que a_k e b_k são os termos gerais de duas sequências, que podem assumir valores no conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$; e que m e n são números no conjunto dos Naturais $\mathbb{N}$, com $m < n$; e que c é uma constante real; e que o índice k varia assumindo todos os números no conjunto $\{m, m+1, \cdots, n\}$.

Então, valem as seguintes propriedades:

a) O Somatório de uma soma é igual à soma dos Somatórios:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(2^k + 2k) = \sum_{k=1}^{3} 2^k + \sum_{k=1}^{3} 2k = (2^1 + 2^2 + 2^3) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 14 + 12 = 26.$$

b) O Somatório de produtos de uma constante por um termo geral é igual ao produto da constante pelo Somatório do termo geral:

$$\sum_{k=m}^{n} c(a_k) = c\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right).$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(5k^2) = 5\sum_{k=1}^{3} k^2 = 5\,(1^2 + 2^2 + 3^2) = 5 \cdot 14 = 70.$$

c) O Somatório de um argumento constante é igual ao produto dessa constante pela quantidade de parcelas da soma: :

$$\sum_{k=m}^{n}(c) = c \cdot (n - m + 1).$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(10) = 10 \cdot (3 - 1 + 1) = 10 \cdot 3 = 30.$$

d) O Somatório de um argumento que não depende do índice do Somatório é igual ao produto desse argumento pelo número de parcelas da soma:

$$\sum_{k=m}^{n}(x_i) = x_i \cdot (n - m + 1).$$

Exemplo:

$$\sum_{k=0}^{3}(x^2) = x^2 \cdot (3 - 0 + 1) = 4x^2.$$

B.5 SOMATÓRIOS DUPLOS

É muito comum, quando estudamos matrizes ou tabelas de dupla entrada (ou seja, tabelas onde os elementos dependem de dois índices variáveis independentes), encontrarmos Somatórios tomados em relação as suas linhas e/ou colunas.

Como um elemento geral de uma matriz tem a forma $a_{i,j}$ (com dois índices independentes), é natural que quando estudamos estes casos apareçam Somatórios com dois índices independentes: um índice para indicar a linha (normalmente, o índice i), e outro índice para indicar a coluna (normalmente, o índice j). São os chamados *Somatórios duplos*, cuja representação na forma geral é

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}).$$

O fato de aparecerem dois símbolos Σ juntos não implica que a soma ficará mais difícil ou impossível: é apenas uma forma de indicarmos que estamos fazendo uma soma de somas; que podemos reescrever de uma maneira mais fácil de compreender:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}(a_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im}\right).$$

Aqui, o segundo Somatório duplo indica claramente que o argumento do Somatório sobre o índice i é uma soma sobre o índice j. À direita aparece uma expressão escrita de uma forma mais clara, onde a notação do Somatório aparece apenas sobre o índice i, enquanto as somas sobre o índice j para j variando desde 1 até m já foram efetuadas.

Exemplo:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(i \cdot j) = \sum_{i=1}^{n}(i \cdot 2 + i \cdot 3 + i \cdot 4) = \sum_{i=1}^{n}(9 \cdot i) = 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 + 18 + 27 = 54$$

Por fim, alertamos que mesmo se tratando de um Somatório duplo, muitas vezes apenas um sinal $\sum$ é utilizado. Quando isso acontece, o símbolo $\sum$ denota uma soma sobre os argumentos indexados com todas as combinações possíveis entre os índices. Normalmente, é usada uma notação dupla, como em

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}} (x_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}(x_{ij})\Big).$$

B.6 EXERCÍCIOS

1) Escreva as seguintes somas explicitamente, e a seguir determine seus valores numéricos.

   a) $\sum_{k=1}^{7} k^2$
   b) $\sum_{k=1}^{4} 2^k$
   c) $\sum_{k=4}^{9}(2k+1)$
   d) $\sum_{k=0}^{3}(2k-1)^2$
   e) $\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k^2+3}$
   f) $\sum_{i=1}^{3}\big(\sum_{j=1}^{4}(j-i)\big) =$
   g) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(i+2j) =$

2) Utilizando a notação de Somatório, represente as seguintes somas:

   a) $3^3 + 4^3 + \cdots + 10^3$
   b) $z^1 + z^2 + \cdots + z^n$
   c) $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_{15} - b_{15})$
   d) $1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + 25^{25}$
   e) $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{10}y_{10}$
   f) $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$

3) Calcule utilizando as propriedades operatórias dos Somatórios:

a) $\sum_{k=1}^{25} 5$

b) $\sum_{k=5}^{13} 4$

c) $\sum_{k=1}^{3} 4k$

d) $\sum_{i=0}^{5}(3+i)$

e) $\sum_{k=0}^{10}(5+4k)$

4) Calcule o valor de x na expressão

$$x = \sum_{k=3}^{25} 4 - \sum_{k=1}^{3} 7 + \sum_{k=2}^{9} 5\,.$$

B.7 RESPOSTAS

1) a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$

b) $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

c) $(2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 5 + 1) + (2 \cdot 6 + 1) + (2 \cdot 7 + 1) + (2 \cdot 8 + 1) + (2 \cdot 9 + 1) = 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 84$

d) $(2 \cdot 0 - 1)^2 + (2 \cdot 1 - 1)^2 + (2 \cdot 2 - 1)^2 + (2 \cdot 3 - 1)^2 = 1 + 1 + 9 + 25 = 36$

e) $\frac{1}{0^2+3} + \frac{1}{1^2+3} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{3^2+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} = \frac{28}{84} + \frac{21}{84} + \frac{12}{84} + \frac{7}{84} = \frac{68}{84} = \frac{17}{21}$

f) $\sum_{i=1}^{3}(1-i) + (2-i) + (3-i) + (4-i) = \sum_{i=1}^{3}(10 - 4 \cdot i) = (10 - 4 \cdot 1) + (10 - 4 \cdot 2) + (10 - 4 \cdot 3) = 6 + 2 - 2 = 6$

g) $\sum_{i=1}^{3}(i + 2 \cdot 2) + (i + 2 \cdot 3) + (i + 2 \cdot 4) + (i + 2 \cdot 5) = \sum_{i=1}^{3}(4 \cdot i + 28) = (4 \cdot 1 + 28) + (4 \cdot 2 + 28) + (4 \cdot 3 + 28) = 32 + 36 + 40 = 108$

2) a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} k^3$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{15}(a_k - b_k)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} k^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} x_k y_k$

f) $\sum_{k=0}^{4} b_k x^k$

3) a) $(25-1+1)\cdot 5 = 25\cdot 5 = 125$

b) $(13-5+1)\cdot 4 = 9\cdot 4 = 36$

c) $4\cdot(1+2+3) = 4\cdot 6 = 24$

d) $\sum_{k=0}^{5} 3 + \sum_{k=0}^{5} i = (5-0+1)\cdot 3 + (0+1+2+3+4+5) = 18+15 = 33$

e) $\sum_{k=0}^{10} 5 + \sum_{k=0}^{10} 4k = (10-0+1)\cdot 5 + 4(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) =$
$55 + 4\cdot 55 = 275$

4)

$$x = (25-3+1)\cdot 4 - (3-1+1)\cdot 7 + (9-2+1)\cdot 5$$

$$x = 23\cdot 4 - 3\cdot 7 + 8\cdot 5 = 111$$