UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ÉRICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

A MATEMÁTICA BÁSICA EM PROVAS DO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2020

ÉRICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

A MATEMÁTICA BÁSICA EM PROVAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

A318m Alcântara, Érica Ferreira de.

A matemática básica em provas do ENEM/Érica Ferreira de Alcântara. – 2020.

225 f.: il.; color.

(Inclui bibliografia p.215-219).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2020.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. ENEM. 2. Aritmética elementar. 3. Razão e proporção. 4. Métodos de contagem. I. Título.

CDD 512.31

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Matemática Básica em Provas do Enem

ÉRICA FERREIRA DE ALCÂNTARA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 10 de julho de 2020.

Banca Examinadora

Maria Silvana A. Costa

Prof.ª Dr.ª Maria Silvana Alcântara Costa
Orientadora

Placido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
UFCA

Cícero Pedro de Aquino

Prof. Dr. Cicero Pedro de Aquino
UFPI

Aos meus pais, que me ensinaram que a educação é a maior herança deixada a um filho, e a minha irmã que me inspira na busca pelos meus sonhos, dedico este trabalho com todo meu amor.

AGRADECIMENTOS

Antes de qualquer coisa, agradeço a Deus por simplesmente tudo. Pela graça de mais esse sonho realizado, pela família que sempre me incentiva e pelas pessoas que ele colocou nessa caminhada para me ajudar.

Agradeço aos meus pais por terem, não só aceitado a missão de serem pais, mas de serem os melhores. Por todo amor e sacrifícios dedicados para que eu pudesse estudar. E por me dá a melhor irmã do mundo, que é minha melhor amiga, companheira e inspiração, a quem também agradeço, por não me deixar desistir de acreditar nos meus sonhos.

Aos meus tios Joana e Galdino pelo carinho e pela imensa contribuição que deram na minha caminhada acadêmica. E aos meus primos Huana e Hudday.

Agradeço a Helano Leom por toda ajuda ao longo do curso, especialmente pelas aulas particulares.

Agradeço a todos os colegas da minha turma. Cada um contribuiu de maneira ímpar na minha jornada, ajudando a estudar para as provas e trabalhos ou tornando os obstáculos do curso mais leves compartilhando as dificuldades e encarando-as com bom humor. Meu agradecimento especialmente para Matheus por toda a ajuda para estudar para as provas, principalmente para o ENQ, a Arquimedes pela amizade e incentivo durante todo o curso, a Marcelo Bruno pela parceria nas resoluções de listas e trabalhos e a Jorge pelas palavras de encorajamento que me ajudaram a escrever esta dissertação.

Aos meus colegas de trabalho, amigos que me apoiaram, me incentivaram e apostaram em mim, principalmente os da área de natureza. Em especial, agradeço a Josefa Maria (Jô), Aílton e Sílvio por toda ajuda, por todas as vezes que dividirem meu trabalho entre si para que eu tivesse condições de estudar e até pelas broncas necessárias. A Adriano por todas as horas discutindo questões e me encorajando. A Edilson pelo apoio e disponibilidade em me ajudar com as normas técnicas. A Verônica pelas orações e conversas que fortaleceram minha fé.

A todo o comando do 2^0 CPMCHMJ por organizar e flexibilizar meus horários de trabalho. Especialmente a coordenação pedagógica nas pessoas do Capitão Rosendo e Solange.

Agradeço a professora Dr^a Maria Silvana Alcântara Costa, por quem tenho grande admiração. Obrigada pela oportunidade de trabalhar com esse tema, pela valorosa orientação nesse trabalho e pela paciência.

Aos professores do PROFMAT da UFCA, especialmente aos doutores Francisco Pereira Chaves, Francisco de Assis Benjamim Filho, Steve da Silva Vicentim, Érica Boizan Batista, Valdinês Leite de Sousa Júnior, Vicente Heleno Feitosa Batista Sobrinho e Leandro da Silva Tavares pela paciência, pela enorme contribuição para o meu crescimento profissional. E também ao professor Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade, pelas valorosas correções nesse trabalho.

A professora Dr^a. Clarice Dias de Albuquerque agradeço, não apenas pela qualidade das aulas, mas principalmente por apostar em nossa turma quando nós mesmos duvidamos.

Aos amigos que não foram citados aqui, mas que torceram por mim, apoiaram e compreenderam minhas ausências para estudar.

Por fim, agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada pela preocupação em capacitar os profissionais da educação básica e a CAPES pelo suporte financeiro.

"Ora, a fé é a certeza de coisas que se esperam, a convicção de fatos que se não veem." (Hebreus 11:1)

RESUMO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é atualmente o principal meio de acesso às universidades públicas e privadas do Brasil e um quarto dessa prova é constituída de questões de matemática que abordam boa parte dos conteúdos que devem ser ensinados no ensino básico. Dados do governo e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) revelam, no entanto, que boa parte dos estudantes brasileiros terminam essa etapa do ensino com baixo domínio dessa disciplina e, portanto, despreparados para enfrentar a prova. Diante dessa realidade este trabalho apresenta três conteúdos de matemática que foram abordados em pelo menos 30% das questões de 11 das últimas provas do ENEM, aplicadas entre os anos de 2009 e 2019, conceitos de Aritmética Básica, Razões e Proporções e Métodos de Contagem. A proposta presente aqui é fornecer a estudantes que desejam se preparar para a prova e professores que trabalham com a preparação destes, um material didático e prático que possa contribuir na consolidação desses conteúdos a fim de auxiliar no bom desempenho destes estudantes ao prestarem esse exame. Em cada capítulo são apresentados a parte teórica com aplicação em exemplos diretos e também contextualizados. Além disso, cada um encerra-se com uma seção onde são apresentadas questões do ENEM com uma proposta de solução comentada.

Palavras-chave: ENEM. Aritmética elementar. Razão e proporção. Métodos de contagem.

ABSTRACT

Currently in Brazil the Exame Nacional do Ensino Médio (National High School Examination), known by its Portuguese acronym ENEM, is the major college entrance exam for both private and tuition-free public universities. A quarter of the exam is dedicated to math and its content taught in primary and secondary education. The data collected from the Program for International Student Assessment (PISA) and the federal government revealed however that a majority of students graduate high school with a limited knowledge of the subject, thus unprepared for the exam. Based on this scenario, this paper addresses three math objectives (basic arithmetic, proportions and ratios, and counting methods) that were assessed in at least 30% of the questions in the last 11 exams administered between 2009 and 2019. The aim is to provide practical instructional content for educators and help increase performance for students. Each chapter contains a theoretical section with application followed by direct examples and contextualization. Additionally, each chapter ends with sample questions from previous ENEMs and suggested solutions.

Keywords: ENEM. Basic arithmetic. Proportion and Ratio. Counting Methods.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Não é novidade que a educação no Brasil tem grandes desafios a superar. Segundo dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), o país ocupa uma das últimas posições no ranking das nações participantes da prova, desde a sua primeira participação.

Mas principalmente após a constituição de 1988, algumas estratégias vem sendo implementadas para tentar melhorar a educação. Uma delas é a implementação de um sistema de avaliações nacionais de larga escala que visam investigar a qualidade da educação brasileira.

Entre essas avaliações estão o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este último surgiu na década de 90 inspirado na primeira Conferência Mundial sobre Educação para Todos em Jomtien, Tailândia. No entanto, desde a sua primeira aplicação em 1998, essa avaliação destacava-se das demais em um aspecto, ela tinha a pretenção de se tornar um meio de acesso para estudantes de todo o país ao ensino superior, visando unificar o sistema de acesso as universidades.

Já em 1999 duas instituições de ensino superior usaram a nota do ENEM como critério de acesso aos seus cursos de graduação, PUC-RJ e a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). E em 2009 a avaliação passa por uma reformulação na sua matriz de referência e estilo de prova, começando a se solidificar como principal sistema de acesso as universidades. Em seu livro [32], Luckesi (2017, p.432) afirma que

> Os objetivos do ENEM, ao longo dos anos, praticamente se repetiram de portaria em portaria ministerial. Desde o seu início, ele apontou a possibilidade de apresentar-se como um meio de acesso ao ensino superior, o que, na edição de 2009, se explicitou com maior vigor.

Hoje o ENEM é a principal "porta" de entrada da maioria das universidades públicas e privadas do país. O exame consiste em uma prova com 180 questões objetivas e uma redação aplicada em dois dias. Sendo que um quarto da prova é constituida de questões de matemática. O que pode se tornar um grande entrave para grande parte dos estudantes, uma vez que esta é uma das disciplinas que apresenta alguns dos maiores índices de reprovação na educação básica. Segundo dados do Saeb de 2017, apenas 7% dos estudantes do terceiro ano do ensino médio que fizeram esta prova apresentaram aprendizagem adequada nessa disciplina.

Embora a prova de matemática do ENEM abranja a maioria dos conteúdos que devem ser ensinados no ensino básico, segundo a base comum da educação brasileira, grande maioria das questões aborda elementos básicos de matemática. Um levantamento feito das provas realizadas entre os anos de 2009 a 2019, revelaram que 32% das questões exigiram domínio sobre Conhecimentos geométricos, 18% Conhecimentos de estatística e probabilidade, 14% Conhecimentos algébricos, 2% Conhecimentos algébricos geométricos e 34% Conhecimentos numéricos.

Entre as questões que avaliaram os Conhecimentos numéricos dos estudantes, cerca de 30% exigiu que tivessem noções de Aritmética básica, Razão e Proporção e Métodos de Contagem.

Baseando-se nesse levantamento, este trabalho se propôs a tratar esses conteúdos de forma simples e detalhada afim de apresentar um material didático que possa ser usado por estudantes que pretendam se preparar para esta prova.

No capítulo 2 são abordados tópicos de Aritmética Básica, onde apresentamos o sistema de numeração decimal, os conjuntos numéricos e as operações realizadas com esses números. Tratamos ainda de algumas técnicas de cálculo mental visando o rápido desenvolvimento do raciocínio matemático do leitor e encerramos o capítulo com uma coletânea de questões do ENEM abordando tais conteúdos.

No capítulo 3 tratamos do tópico de Razão e proporção, ecerrando-o também com uma seção dedicada a questões do ENEM que abordaram esse conteúdo.

E por fim, no capítulo 4, apresentamos os métodos de contagem da análise combinatória que são normalmente trabalhados no ensino médio, Princípio Fundamental da Contagem, algumas Permutações, Arranjos e Combinações. Finalizamos o capítulo com uma coletânea de questões do ENEM.

2 ARITMÉTICA ELEMENTAR

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de aritmética, tais como o sistema de númeração decimal posicional, operações e propriedades dos cojuntos numéricos.

O texto a seguir é baseado nas referências [1], [2], [4], [12], [13], [15], [18], [21], [27], [31], [34], [38], [39], [40], [42], [43], [44], [46], [47], [48] e [50].

2.1 Sistema de numeração decimal

Não se sabe ao certo quando foram inventados os primeiros registros numéricos, mas evidências arquelógicas apontam que o homem já era capaz de contar há cerca de 50.000 anos, provavelmente antes mesmo de desenvolver uma linguagem escrita.

A invenção do número surgiu da necessidade da humanidade contar coisas e ao longo da história isso foi fazendo com que as técnicas de registro de contagem fossem se desenvolvendo até chegarmos ao sistema de numeração mais utilizado hoje: o sistema de numeração decimal.

É chamado de decimal porque usa apenas 10 algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, nele o valor de cada algarismo em um dado número depende de sua posição. Por exemplo, no numeral 949, o algarismo 9 à direita representa 9 unidades e o mesmo algarismo 9, agora à esquerda, representa 900 unidades. Ou seja:

$$949 = 900 + 40 + 9,$$

ou ainda:

$$949 : \text{ 9 centenas, 4 dezenas e 9 unidades.}$$

Uma outra maneira de escrever o numeral 949 é:

$$949 = 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 = 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9.$$

Numerais grandes são divididos em classes de três algarismos que, da direita para esquerda, são denominados de classes das unidades, milhares, milhões, bilhões, trilhões, etc. E cada classe é dividida em três ordens, a saber, unidades, dezenas e centenas. Assim, o numeral 105.321.145 corresponde a uma centena de milhão, cinco unidades de milhão, três centenas de milhar, duas dezenas de milhar, uma unidade de milhar, uma centena, quatro dezenas e cinco unidades.

Veja como fica a distribuição das quatro primeiras classes:

Figura 1: Quadro de classes

Classe dos Bilhões			Classe dos Milhões			Classe dos Milhares			Classe das Unidades Simples		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas De Bilhão	Dezenas De Bilhão	Unidades De Bilhão	Centenas De Milhão	Dezenas De Milhão	Unidades De Milhão	Centenas De Milhar	Dezenas De Milhar	Unidades De Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Fonte:Rosimar Gouveia. Disponível em:https://www.todamateria.com.br/sistema-de-numeracao-decimal/. Acesso em 07 jun. 2020

Saber operacionar com o sistema decimal é uma das primeiras lições ensinadas à criança quando entra para escola e um dos tópicos avaliados na Primeira Habilidade da Competência um da matriz de referência do ENEM.

Vejamos alguns exemplos de como esse tópico pode ser avaliado.

Exemplo 1 *O valor posicional do algarismo 2 no número 42490 é:*

a) 2

b) 20

c) 200

d) 2000

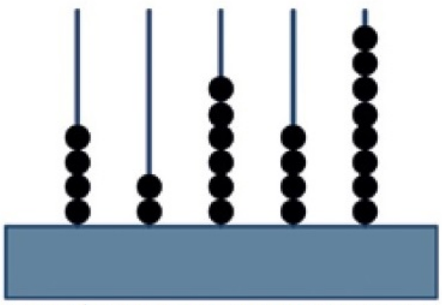
e) 20000

Solução:

Note que o algarismo 2 encontra-se na ordem das unidades de milhar e na classe de milhares. Logo, corresponde a 2000 unidades. $\diamond$

Exemplo 2 *O homem antigo inventou um instrumento para contar e fazer cálculos chamado ábaco. Dentre vários tipos de ábaco, um deles é composto de hastes verticais em que são encaixados pequenos anéis. O valor de cada anel muda de acordo com a posição da haste na qual será colocado. A haste na 1ª posição à direita representa a casa das unidades; na 2ª, a das dezenas; na 3ª, a das centenas, e assim por diante.*

Figura 2: Ábaco



Fonte: Disponível em: http://maniadecalcular.blogspot.com/2015/10/atividade-de-matematica-5-ano-numeros-e.html. Acesso em 07 jun. 2020

O número representado no ábaco da figura anterior é:

a) 42648.

b) 46482.

c) 84624.

d) 86424.

Solução:

O ábaco da figura tem 5 hastes, então contanto da direita para esquerda temos: unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar. Para determinar qual número está representado, devemos contar os anéis em cada haste, considerando o valor posicional.

Daí:

- 1ª haste (Unidades) $\longrightarrow$ 8 anéis $\longrightarrow$ 8 unidades;
- 2ª haste (Dezenas) $\longrightarrow$ 4 anéis $\longrightarrow$ 4 dezenas $= 4 \cdot 10 = 40$;
- 3ª haste (Centenas) $\longrightarrow$ 6 anéis $\longrightarrow$ 6 centenas $= 6 \cdot 100 = 600$;
- 4ª haste (Unidades de milhar) $\longrightarrow$ 2 anéis $\longrightarrow$ 2 unidades de milhar $= 2 \cdot 1000 = 2000$;
- 5ª haste (Dezenas de milhar) $\longrightarrow$ 4 anéis $\longrightarrow$ 4 dezenas de milhar $= 4 \cdot 10000 = 40000$.

Portanto, o número representado no ábaco é:

$$40000 + 2000 + 600 + 40 + 8 = 42648.$$

$\diamond$

Exemplo 3 *(OLIMP. DE MAT.: SP - ADAPTADA) No sistema decimal de numeração, um número tem 3 classes e 7 ordens. Então esse número tem:*

a) 3 algarismos

b) 7 algarismos

c) 9 algarismos

d) 10 algarismos

Solução:

Cada classe é formada por 3 algarismos, então como o número é formado por 3 classes e 7 ordens, tem-se:

- 3 alagrismos na classe das unidades;
- 3 alagrismos na classe de milhar;
- 1 alagrismo na classe de milhões.

Portanto, o número possui 3+3+1=7 algarismos. ◇

Exemplo 4 *Observe o anúncio de um jornal:*

Vendo - Carro usado - R$ 14070,00 - Único dono; Mecânica OK; Verde, Nunca foi batido; Ano 1995; Fone: 3325-0560.

Pode-se afirmar que a ordem dos algarismos 7 e 4 mostrados no valor do carro são respectivamente:

a) 1ª Ordem; 2ª ordem

b) 2ª Ordem; 4ª ordem

c) 3ª Ordem; 5ª ordem

d) 3ª Ordem; 6ª ordem

Solução:

Lembre-se que a ordem deve ser observada da direita para esquerda. Assim, no valor do carro (14070), tem-se:

$$\begin{array}{ccccc} 5^{\underline{a}} \text{ ordem} & 4^{\underline{a}} \text{ ordem} & 3^{\underline{a}} \text{ ordem} & 2^{\underline{a}} \text{ ordem} & 1^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$

Portanto, a ordem dos algarismos 7 e 4 são, respectivamente 2ª ordem e 4ª ordem. ◇

Exemplo 5 *A biblioteca de uma escola tem 1 milhar de livros didáticos, 4 centenas de livros de literatura, 2 dezenas de livros de arte e 4 dicionários. Quantos livros há na biblioteca da escola?*

a) 1242 livros

b) 1244 livros

c) 1404 livros

d) 1424 livros

Solução:

Tem-se que:

- 1 milhar de livros didáticos $\rightarrow 1 \times 1000 = 1000$;
- 4 centenas de livros de literatura $\rightarrow 4 \times 100 = 400$;
- 2 dezenas de livros de arte $\rightarrow 2 \times 10 = 20$;
- 4 unidades de dicionários $\rightarrow 4$.

Juntando todos os livros, concluímos que há $1000 + 400 + 20 + 4 = 1424$ livros na biblioteca. $\diamond$

2.2 Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos são agrupamentos de números que apresentam características comuns. Esta seção irá tratar destes conjuntos, abordando representação, algumas operações e propriedades relativas aos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

2.2.1 Conjunto dos Naturais

A necessidade de contar coisas, levou ao surgimento dos números naturais, cujo conjunto é representado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$. Graças ao Sistema de numeração decimal, apresentado na seção anterior, podemos representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A essência desse conjunto reside na idéia de "sucessor", que consiste em passar de um número para o seguinte juntando-lhe uma unidade. Assim, passamos do 0 para o 1, do 1 para o 2, e, dessa maneira, podemos ir tão longe quanto quisermos, isto é, dado um número n qualquer, por maior que ele seja, podemos sempre obter um número $n + 1$, maior do que ele.

Por volta do século XX o matemático italiano Giuseppe Peano, caracterizou o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais a partir de quatro axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano, que afirmam:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural;
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 0 e chamado de "número zero";

4. Se um conjunto de números naturais contém o número 0 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

Neste conjunto estão definidas duas operações fundamentais, a adição que a cada a *e* $b \in \mathbb{N}$ associa $a + b \in \mathbb{N}$ e a multiplicação que a cada a *e* $b \in \mathbb{N}$ associa $a \cdot b \in \mathbb{N}$. A estas operações estão associadas as propriedades que apresentaremos a seguir.

Dados os números naturais a, b e c, tem-se.

Propriedade 1 (Associativa) .

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Exemplo 6 .

- $(5 + 8) + 10 = 5 + (8 + 10)$
- $(2 \cdot 4) \cdot 5 = 2 \cdot (4 \cdot 5)$

Propriedade 2 (Comutativa) .

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

Exemplo 7 .

- $3 + 5 = 5 + 3$
- $2 \cdot 10 = 10 \cdot 2$

Propriedade 3 (Elemento Neutro) .

$a + 0 = 0 + a = a$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Exemplo 8 .

- $5 + 0 = 0 + 5 = 5$
- $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$

Propriedade 4 (Distributiva da multiplicação relativa à adição) .

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Exemplo 9 .

- $3 \cdot (5 + 6) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6$

A seguir apresentamos algoritmos para efetuar essas operações baseados no sistema de numeração decimal e nas propriedades apresentadas anteriormente.

Um algoritmo é uma sequência finita de regras, operações, que permitem a solução de um problema. Então, o que descrevermos aqui é um conjunto de instruções para descrever a adição e a multiplicação desses números e foi baseado em [46] .

ALGORITMO DA ADIÇÃO

Iniciaremos com a soma: $45 + 38$, para a qual temos:

$$\begin{aligned}
45 + 38 &= (4 \cdot 10 + 5) + (3 \cdot 10 + 8) && (2.1)\\
&= (4 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (5 + 8) && (2.2)\\
&= (4 + 3) \cdot 10 + (5 + 8) && (2.3)\\
&= 7 \cdot 10 + 13 && (2.4)\\
&= 7 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 3 && (2.5)\\
&= 8 \cdot 10 + 3 && (2.6)\\
&= 80 + 3 && (2.7)\\
&= 83. && (2.8)
\end{aligned}$$

A adição acima foi efetuada do seguinte modo. Na igualdade 2.1, decompomos os números 45 e 38 em 4 dezenas e 5 unidades e 3 dezenas e 8 unidades, respectivamente. Na igualdade 2.2 usamos a Propriedade 1 para associar as dezenas. Na igualdade 2.3 usamos a Propriedade 4. Na igualdade 2.4 somamos as dezenas e as unidades dos números 45 e 38, obtendo 7 dezenas e 13 unidades. Na igualdade 2.5, decompomos o 13 em 1 dezena e 3 unidades. Na igualdade 2.6 usamos implicitamente a Propriedade 4 novamente e somamos as dezenas. Por fim, na igualdade 2.8 escrevemos a representação decimal do resultado da adição.

Esta operação também pode ser efetuada utilizando um dispositivo prático, que consiste em posicionar os números um sobre o outro, de modo que as unidades, dezenas, centenas, etc., dos números fiquem em uma mesma coluna. E então, são somadas unidades com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas, etc. Veja o exemplo a seguir:

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 3 \\ + & 3 & 6 \\ \hline & 5 & 9 \end{array}.$$

Caso a soma das unidades resulte em dezenas, ou a soma das dezenas resulte em centenas e assim sucessivamente, essa deve ir para a coluna correspondente, por exemplo:

$$\begin{array}{rrr} & \overset{1}{4} & 6 \\ + & 3 & 9 \\ \hline & 8 & 5 \end{array}.$$

Como a soma de 6 e 9, na coluna das unidades, resulta em 15, que é $1 \cdot 10 + 5$, então posicionamos o algarismo 1, que representa a dezena, na coluna da esquerda (das dezenas) e somamos 1 com 4 e com 3, obtendo 8.

Assim, o dispositivo prático é simplesmente uma forma reduzida de efetuar a adição utilizando a representação decimal posicional que realizamos anteriormente.

ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

Começaremos calculando o produto dos números 35 e 5, representando-os na forma decimal posicional. Veja:

$$\begin{aligned}
35 \times 5 &= (3 \times 10 + 5) \times 5 && (2.9)\\
&= 3 \times 10 \times 5 + 5 \times 5 && (2.10)\\
&= 3 \times 5 \times 10 + 5 \times 5 && (2.11)\\
&= 15 \times 10 + 25 && (2.12)\\
&= 15 \times 10 + 2 \times 10 + 5 && (2.13)\\
&= 17 \times 10 + 5 && (2.14)\\
&= 170 + 5 && (2.15)\\
&= 175. && (2.16)
\end{aligned}$$

Na igualdade 2.9 o número 35 é decomposto em 3 dezenas e 5 unidades. Na igualdade 2.10, usamos a Propriedade 4 para separar a multiplicação da igualdade anterior numa soma de dois produtos: $3 \times 10 \times 5$ e 5×5. Na igualdade 2.11 usamos a Propriedade 2 e na igualdade 2.12 efetuamos o produto 3×5. Os passos seguintes seguem como no algoritmo da adição.

Assim como na adição, também podemos descrever um dispositivo prático para a multiplicação. O produto de 35 e 5, por exemplo, será realizada, do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{2}{3} & 5 \\ & \times & 5 \\ \hline 1 & 7 & 5 \end{array}.$$

Quando multiplicamos 5 por 5 na coluna da direita, obtemos 25, então deixamos o 5 na ordem das unidades e deslocamos o 2 que representa as dezenas para a coluna da esquerda e efetuamos a multiplicação de 5 por 3 que está na coluna da esquerda (representando, portanto 3 dezenas) obtendo, assim 15 dezenas que será somado agora com as duas dezenas que deslocamos anteriormente, totalizando 17 dezenas.

Compreender a representação dos naturais no sistema decimal e as propriedades da adição e multiplicação nesse conjunto, facilitam o cálculo rápido e mental dessas operações. E o exercício de manipular números mentalmente pode ajudar na aprendizagem desenvolvendo a memória e a concentração. Baseando-se nisso, apresentaremos a seguir uma técnica para esse tipo de cálculo.

Técnicas de Cálculo Mental para Adição

Inicialmente apresentaremos alguns exemplos, onde descreveremos uma sequência de passos que devem ser seguidos mentalmente.

Exemplo 10 *Efetue a adição* $365 + 128$.

Solução:

Passo 1: Escreva 365 como $300 + 60 + 5$ e 128 como $100 + 20 + 8$;

Passo 2: Faça $300 + 100 = 400$;

Passo 3: Faça $60 + 20 = 80$;

Passo 4: Faça $5 + 8 = 13$;

Passo 5: Faça $400 + 80 + 13 = 493$.

Então o resultado da adição é 493. ◇

Exemplo 11 *Efetue a adição* $45 + 65$.

Solução:

Passo 1: Escreva 65 como $60 + 5$;

Passo 2: Faça $45 + 60 = 105$;

Passo 3: Faça $105 + 5 = 110$.

Então o resultado da adição é 110. $\diamond$

Exemplo 12 *Efetue a adição* $321 + 4254$.

Solução:

Passo 1: Escreva 321 como $300 + 20 + 1$;

Passo 2: Faça $4254 + 300 = 4554$;

Passo 3: Faça $4554 + 20 = 4574$;

Passo 4: Faça $4574 + 1 = 4575$.

Então o resultado da adição é 4575. $\diamond$

Note que os passos descritos em cada exemplo são apenas a aplicação das propriedades aliadas a representação dos números no sistema decimal posicional. No primeiro passo do Exemplo 11, escrevemos 65 na sua representação decimal. Nos passos seguintes, utilizamos a propriedade Associativa e Comutativa para realizar as adições. Em resumo, o que deve ser feito mentalmente é:

$$45 + 65 = 45 + (60 + 5) = (45 + 60) + 5 = 105 + 5 = 110.$$

Em outras palavras, isso pode ser colocado do seguinte modo:

45 mais 60 é 105, mais 5 é 110.

Perceba também, que pode se escolher "convenientemente", qual ou quais parcelas quer-se escrever na representação decimal. No Exemplo 10 escolhemos escrever as duas parcelas, no Exemplo 11 apenas a segunda e no Exemplo 12 apenas a primeira.

Técnicas de Cálculo Mental para Multiplicação

A técnica para a multiplicação é semelhante a da adição, então faremos alguns exemplos para apresentá-la:

Exemplo 13 *Efetue a multiplicação* 75×6*:*

Solução:

Passo 1: Escreva 75 como $70 + 5$;

Passo 2: Faça $70 \times 6 = 420$ e $5 \times 6 = 30$;

Passo 3: Faça $420 + 30 = 450$.

Então o resultado da multiplicação é 450. $\diamond$

Exemplo 14 *Efetue a multiplicação* 89×32.

Solução:

Passo 1: Escreva 89 como $80 + 9$ e 32 como $30 + 2$;

Passo 2: Faça $80 \times 30 = 2400$ e $80 \times 2 = 160$;

Passo 3: Faça $9 \times 30 = 270$ e $9 \times 2 = 18$;

Passo 4: Faça $2400 + 160 + 270 + 18 = 2848$.

Então o resultado da multiplicação é 2848. $\diamond$

Exemplo 15 *Efetue a multiplicação* 3215×8.

Solução:

Passo 1: Escreva 3215 como $3000 + 200 + 10 + 5$;

Passo 2: Faça $3000 \times 8 = 24000$, $200 \times 8 = 1600$,$10 \times 8 = 80$ e $5 \times 8 = 40$;

Passo 3: Faça $24000 + 1600 + 80 + 40 = 25720$.

Então o resultado da multiplicação é 25720. $\diamond$

Utilizamos apenas as propriedades e a representação decimal para efetuar as operações. O Exemplo 14, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
89 \times 32 &= (80 + 9) \times (30 + 2) \\
&= (80 \times 30) + (80 \times 2) + (9 \times 30) + (9 \times 2) \\
&= (8 \times 3) \times 100 + (8 \times 2) \times 10 + (9 \times 3) \times 10 + (9 \times 2) \\
&= 24 \times 100 + 16 \times 10 + 27 \times 10 + 18 \\
&= 24 \times 100 + (16 + 27) \times 10 + 18 \\
&= 2400 + 430 + 18 \\
&= 2848.
\end{aligned}$$

Assim como na adição, pode-se decidir qual ou quais fatores iremos colocar na representação decimal.

2.2.2 Conjunto dos Inteiros

Dizer que as operações de adição e multiplicação estão bem definidas no conjunto dos Naturais, quer dizer que a adição ou a multiplicação de dois destes números resulta sempre em um único número natural. Isso, no entanto, nem sempre é verdade para a subtração, pois $73 - 78$, por exemplo, resulta em -5 que não pertence a tal conjunto. Isso nos remete então, a um outro conjunto numérico, que chamaremos de conjunto dos números inteiros.

Vimos que os números naturais são rotineiramente associados a contagem, já os números negativos são associados a ideia de dívida. O matemático e astrônomo indiano Brahmagupta (598 - 670) chamava números positivos de "fortuna" e números negativos de "dívidas" e já tinha o conhecimento do número 0 (Zero).

O conjunto dos números inteiros então, que é representado pela letra $\mathbb{Z}$ (vem da palavra alemã Zahl, que significa número) é formado pelos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, etc (também chamados inteiros positivos), pelo número 0 e pelos números inteiros negativos $-1, -2, -3, -4, -5$, etc., ou seja, $\mathbb{Z} = \{... - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$.

É importante destacar alguns subconjuntos notáveis de $\mathbb{Z}$:

- Conjunto dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\} = \mathbb{N}$;
- Conjunto dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{... - 5, -4, -3, -2, -1, 0\}$;
- Conjunto dos inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{... - 5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5...\}$;
- Conjunto dos inteiros negativos: $\mathbb{Z}^*_- = \{... - 5, -4, -3, -2, -1\}$;
- Conjunto dos inteiros positivos: $\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$.

No conjunto $\mathbb{Z}$ também estão definidas as operações de adição e multiplicação e além das Propriedades 1, 2, 3, e 4 dos números $\mathbb{N}$, já mencionadas anteriormente, também vale a seguinte propriedade:

Propriedade 5 (Simétrico ou oposto para a adição) .

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Exemplo 16 .

- $5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$.

De posse da Propriedade 5, definimos a operação de subtração do seguinte modo:

$$\textit{para todos } a,\ b \in \mathbb{Z} \textit{ tem-se, } a - b = a + (-b).$$

Exemplo 17 *Veja as subtrações a seguir:*

(I) $8 - 6 = 2$ *(II)*$5 - 9 = -4$

A seguir apresentaremos um algoritmo para efetuar essa operação.

ALGORITMO DA SUBTRAÇÃO

Na subtração, uma parte b é subtraída ou retirada do número a para se obter um valor $a - b$. Assim para efetuar uma subtração teremos três números envolvidos, sendo que chamamos o termo a de minuendo, b de subtraendo e $a - b$ de resto ou diferença.

A seguir apresentaremos alguns exemplos para efetuar essa operação com um algoritmo que usará a decomposição decimal posicional e um dispositivo prático.

Exemplo 18 *Efetue as subtrações a seguir usando a decomposição decimal:*

(A) $523 - 123$.

Solução:

$$\begin{aligned} 523 - 123 &= 5 \times 100 + 2 \times 10 + 3 - (1 \times 100 + 2 \times 10 + 3) \\ &= 5 \times 100 + 2 \times 10 + 3 - 1 \times 100 - 2 \times 10 - 3 \\ &= 5 \times 100 - 1 \times 100 + 2 \times 10 - 2 \times 10 + 3 - 3 \\ &= 4 \times 100 + 0 + 0 \\ &= 400. \end{aligned}$$

◇

(B) $456 - 28$.

Solução:

$$\begin{aligned} 456 - 28 &= 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 - (2 \times 10 + 8) \\ &= 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 - 2 \times 10 - 8 \\ &= 4 \times 100 + 5 \times 10 - 2 \times 10 + 6 - 8 \\ &= 4 \times 100 + 3 \times 10 - 2 \\ &= 4 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 10 - 2 \\ &= 4 \times 100 + 2 \times 10 + 10 - 2 \\ &= 4 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \\ &= 428. \end{aligned}$$

◇

Note que nesse segundo caso, ao efetuarmos a subtração das unidades, obtivemos um número inteiro negativo, então tivemos que decompor as dezenas do minuendo e redistribuir para as unidades. Ou seja, escrevemos 3 dezenas como 2 dezenas mais 1 dezena, ou 2 dezenas e 10 unidades e assim efetuamos a subtração $10 - 2$ obtendo as 8 unidades.

Nos primeiros anos do ensino fundamental é ensinado um dispositivo prático para calcular subtrações. Neste, quando algumas entradas (ordem) do minuendo são menores que as do subtraendo é ensinado a "tomar emprestado" da ordem anterior, o que significa que um reagrupamento, baseado no sistema de decomposição decimal posicional, deve ser feito, como fizemos no item B.

Este dispositivo, funciona muito parecido com o da adição. Colocaremos os números um abaixo do outro, de modo que as unidades fiquem na mesma coluna, assim como as dezenas, centenas, etc. Em seguida, efetuamos a subtração por coluna, fazendo um reagrupamento, sempre que a ordem do subtraendo for menor que a do minuendo. Veja no exemplo a seguir:

Exemplo 19 : *Efetue as subtrações a seguir:*

(A) $625 - 213$.

Solução:

Pelo algoritmo da subtração temos

$$\begin{aligned}
625 - 213 &= 6 \times 100 + 2 \times 10 + 5 - (2 \times 100 + 1 \times 10 + 3) \\
&= 6 \times 100 + 2 \times 10 + 5 - 2 \times 100 - 1 \times 10 - 3 \\
&= 6 \times 100 - 2 \times 100 + 2 \times 10 - 1 \times 10 + 5 - 3 \\
&= (6 - 2) \times 100 + (2 - 1) \times 10 + (5 - 3) \\
&= 4 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \\
&= 412.
\end{aligned}$$

Note que não foi necessário reagrupar as dezenas, centenas e unidades, assim usando o dispositivo descrito anteriomente, teremos:

$$\begin{array}{cccc}
 & 6 & 2 & 5 \\
- & 2 & 1 & 3 \\
\hline
 & 4 & 1 & 2
\end{array}$$

$\diamond$

(B) $325 - 136$.

Solução:

Pelo algoritmo da subtração, teremos

$$\begin{aligned}
325 - 136 &= 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 - (1 \times 100 + 3 \times 10 + 6)\\
&= 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 - 1 \times 100 - 3 \times 10 - 6\\
&= 2 \times 100 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 1 \times 10 + 5 - 1 \times 100 - 3 \times 10 - 6\\
&= 2 \times 100 + 10 \times 10 + 1 \times 10 + 1 \times 10 + 5 - 1 \times 100 - 3 \times 10 - 6\\
&= 2 \times 100 + 11 \times 10 + 15 - 1 \times 100 - 3 \times 10 - 6\\
&= (2 - 1) \times 100 + (11 - 3) \times 10 + (15 - 6)\\
&= 1 \times 100 + 8 \times 10 + 9\\
&= 189
\end{aligned}$$

Observe que foi necessário fazer um reagrupamento de dezenas e unidades, assim usando o disposito ficamos com o seguinte

$$\begin{array}{cccc}
 & \overset{2}{\cancel{3}} & \overset{11}{\cancel{2}} & \overset{15}{\cancel{5}}\\
- & 1 & 3 & 6\\
\hline
 & 1 & 8 & 9
\end{array}$$

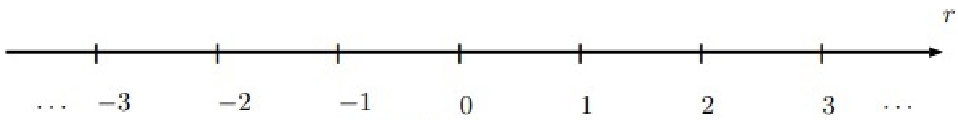
◇

No item B, os algarismos das unidades e das dezenas do minuendo são menores que os algarismos das unidades e das dezenas do subtraendo. Desta forma, para melhor compreensão do cálculo, escrevemos os números 325 como $300 + 20 + 5 = 200 + 110 + 15$. Esta escrita justifica a substituição do número 3, equivalente às centenas, por 2 centenas, o algarismo das dezenas que também é 2, substituído por 11 dezenas e o algarismo das unidades substituído por 15 unidades.

REPRESENTAÇÃO DOS INTEIROS NA RETA

Podemos assinalar os números inteiros em uma reta r, orientada da esquerda para a direita, chamada reta numérica. Esta pode ser construída do seguinte modo. Primeiro, escolhemos dois pontos da reta r, um ponto que representa o número 0 (zero), que chamaremos de origem da reta, e outro ponto que representa o número 1. A seta na extremidade direita da reta r indica que a escolha do ponto que representa o número 1 a direita do ponto que representa o número 0 determina, sobre r uma orientação, que é o sentido a ser percorrido para que os números apareçam em ordem crescente. A escolha dos pontos que representam 0 e 1 também determina uma unidade de medida, que é a distância entre esses pontos. Os pontos sobre a reta r que representam os demais números naturais, 2, 3, 4, 5, etc., devem ser escolhidos de modo que a distância entre cada um deles e seus vizinhos, ou seja, os pontos mais próximos que também representam números naturais, seja sempre igual a distância entre os pontos que representam 0 e 1. Cada número negativo $-n$ é representado pelo ponto que está situado à esquerda do ponto que representa 0, cuja distância à origem é igual aquela do ponto que representa o seu simétrico n.

Figura 3: Reta numérica



Fonte: Autor

Veja a seguir, uma aplicação da representação dos números inteiros na reta numérica.

Exemplo 20 *Na cidade Termaticândia, em determinada noite, foram registradas as seguintes temperaturas: -1°C; -3°C; 0°C; 3°C; 7°C e 13°C. A variação de temperatura nessa cidade, nessa noite, foi de:*

a) 13°C, pois a temperatura variou entre 0°C e 13°C.

b) 14°C, pois a temperatura variou entre -1°C e 13°C.

c) 15°C, pois a temperatura variou entre -1°C e 13°C.

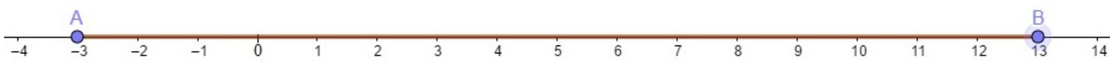
d) 16°C, pois a temperatura variou entre -3°C e 13°C.

e) 17°C, pois a temperatura variou entre -3°C e 13°C.

Solução:

Localizando os valores -1, -3, 0, 3, 7 e 13 na reta numérica, temos:

Figura 4: Representação de inteiros na reta numérica



Fonte: Autor

Observe que o ponto A (-3) representa a menor temperatura registrada e o ponto B (13) a maior. Como o espaçamento entre cada número representa uma unidade de medida, então de A até B contamos 16 unidades de medida.

Portanto, a variação de temperatura foi de 16°C, pois variou entre -3°C e 13°C. $\diamond$

ALGORITMO DA DIVISÃO INTEIRA

O Algoritmo da Divisão Inteira, que também pode ser denominado de Divisão Euclidiana, ou Divisão com resto, é enunciado do seguinte modo.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = b \cdot q + r$ e $0 \leq r < |b|$.

O número a é o *dividendo*, b é o *divisor*, q é o *quociente*, r é o *resto* e $|b|$ significa um inteiro não negativo.

Essa divisão, é comumente realizada por meio de um algoritmo que funciona seguindo os seguintes passos:

- Passo 1 - Coloque o dividendo e o divisor lado a lado (Dividendo a esquerda);
- Passo 2 - Tome a menor quantidade de algarismo do dividendo que seja possível dividir pelo divisor;
- Passo 3 - O número encontrado no Passo 2, deve ser dividido pelo divisor. Para tanto, encontre o maior natural que multiplicado pelo divisor não ultrapassa esse número e escreva-o na primeira posição abaixo do divisor;
- Passo 4 - Multiplique o divisor pelo número colocado abaixo dele no passo 4 e escreva o resultado abaixo do(s) algarismo(s) tomados do dividendo no passo 2;
- Passo 5 - Faça a subtração desses dois números;
- Passo 6 - Baixe o primeiro algarismo não utilizado ainda, do dividendo, junte ao resultado obtido no passo 5 e divida esse novo número pelo divisor;
- Passo 7 - Repetir o processo até que o resultado da subtração seja menor que o divisor e não restem mais algarismos no dividendo para baixar.

Veja alguns exemplos.

Exemplo 21 *Efetue as divisões a seguir:*

(A) $563 \div 3$.

Solução:

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
 & 5 & 6 & 3 & 3 & & \\ \cline{5-7}
- & 3 & & & 1 & 8 & 7 \\ \cline{1-2}
 & 2 & 6 & & & & \\
- & 2 & 4 & & & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & 2 & 3 & & & \\
 & - & 2 & 1 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 2 & & &
\end{array}
$$

A divisão acima foi realizada do seguinte modo:

- após posicionar dividendo (563) e divisor (3) na mesma linha, tomamos o algarismo das centenas (5) do dividendo para dividir por 3;
- procuramos mentalmente o maior número natural que multiplicado por 3 não passa de 5. Tal número é 1, pois 1×3 é menor que 5 e 2×3 é maior que 5. Então escrevemos 1 na primeira posição sob a barra do divisor;
- efetuamos o produto 1×3 e escrevemos o resultado da operação (ou seja, 3) sob o algarismo 5 do dividendo;
- efetuamos a subtração $5 - 3$, cujo resultado é 2, e "baixamos"o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (no caso, 6), posicionando-o ao lado do 2 e formando o número 26, que será agora dividido por 3;
- procuramos mentalmente o maior natural que multiplicado por 3 não ultrapassa 26, obtendo 8;
- posicionamos o 8 ao lado do 1, sob a barra do divisor, efetuamos o produto 8×3 e escrevemos o resultado da operação (Ou seja, 24) sob o 26;
- efetuamos a subtração $26 - 24$ obtendo 2 e baixamos o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (agora, 3) ao lado do 2 formando 23, que será dividido por 3;
- procuramos mentalmente o maior natural que multiplicado por 3 não ultrapassa 23, obtendo 7;
- posicionamos o 7 ao lado do 8, sob a barra do divisor, efetuamos o produto 7×3 e escrevemos o resultado da operação (ou seja, 21) sob o 23;
- efetuamos a subtração $23 - 21$ obtendo 2;
- como não há mais algarismos no dividendo para baixar e 2 é menor que 3, a divisão está efetuada.

Então dizemos que $563 \div 3$ é igual a 187 e deixa resto 2. Ou seja, $563 = 3 \cdot 187 + 2$.

$\diamond$

(B) $3125 \div 23$.

Solução:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 3 & 1 & 2 & 5 & 2 & 3 & \\ \cline{6-8}
- & 2 & 3 & & & 1 & 3 & 5 \\ \cline{1-3}
 & 0 & 8 & 2 & & & & \\
 & - & 6 & 9 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 3 & 5 & & & \\
 & - & 1 & 1 & 5 & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 2 & 0 & & &
\end{array}$$

A divisão acima foi realizada do seguinte modo:

- após posicionar dividendo (3125) e divisor (23) na mesma linha, tomamos a menor quantidade de algarismo de 3125 que pode ser dividido por 23. Neste caso deve ser 31, pois 3 é menor que 23;

- arocuramos mentalmente o maior número natural que multiplicado por 23 não passa de 31. Tal número é 1, pois 1×23 é menor que 31 e 2×23 é maior que 31. Então escrevemos 1 na primeira posição sob a barra do divisor;

- efetuamos o produto 1×23 e escrevemos o resultado da operação (ou seja, 23) sob os algarismos 3 e 1 do dividendo;

- efetuamos a subtração $31-23$, cujo resultado é 8, e "baixamos" o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (no caso, 2), posicionando-o ao lado do 8 e formando o número 82, que será agora dividido por 23;

- procuramos mentalmente o maior natural que multiplicado por 23 não ultrapassa 82, obtendo 3;

- posicionamos o 3 ao lado do 1, sob a barra do divisor, efetuamos o produto 3×23 e escremos o resultado da operação (ou seja, 69) sob 82;

- efetuamos a subtração $82 - 69$ obtendo 13 e baixamos o primeiro algarismo não utilizado do dividendo (agora, 5) ao lado do 13 formando 135, que será dividido por 23;

- procuramos mentalmente o maior natural que multiplicado por 23 não ultrapassa 135, obtendo 5;

- posicionamos o 5 ao lado do 3, sob a barra do divisor, efetuamos o produto 5×23 e escrevemos o resultado da operação (ou seja, 115) sob 135;
- efetuamos a subtração $135 - 115$ obtendo 20;
- como não há mais algarismos no dividendo para baixar e 20 é menor que 23, a divisão está efetuada.

Então dizemos que $3125 \div 23$ é igual a 135 e deixa resto 20. Ou seja,

$$3125 = 23 \cdot 135 + 20.$$

$\diamond$

O Dispositivo da divisão é apenas uma automatização de manipulações e aplicações de propriedades da multiplicação e do sistema decimal. Por exemplo, a divisão feita no item A é equivalente a:

$$\begin{aligned} 563 &= 500 + 60 + 3 \\ &= 300 + 200 + 60 + 3 \\ &= 3 \times 100 + 240 + 20 + 3 \\ &= 3 \times 100 + 3 \times 80 + 21 + 2 \\ &= 3 \times 100 + 3 \times 80 + 3 \times 7 + 2 \\ &= 3 \times (100 + 80 + 7) + 2 \\ &= 3 \times 187 + 2. \end{aligned}$$

MÚLTIPLOS, DIVISORES E PRIMOS

No algoritmo apresentado anteriormente, quando $r = 0$ dizemos que a divisão é exata ou ainda que ocorre uma divisibilidade, o que significa que os números são múltiplos ou divisores um do outro. Estes são conceitos muito importantes na resolução de vários problemas da matemática, que serão abordados a seguir.

Definição 1 (Múltiplos) *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é múltiplo de b, se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot b$.*

Temos, por exemplo, que 15 é múltiplo de 3 e 16 é múltiplo de 8, pois $15 = 5 \cdot 3$ e $16 = 2 \cdot 8$.

O conjunto dos múltiplos de um inteiro a qualquer é infinito e indicaremos por M(a). Por exemplo:

- M(4)=$\{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, ...\}$;
- M(6)=$\{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, ...\}$;
- M(7)=$\{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, ...\}$;
- M(11)=$\{0, \pm 11, \pm 22, \pm 33, ...\}$;
- M(0)=$\{0\}$.

Quando listamos os múltiplos de dois ou mais números pode ocorrer intersecção entre os conjuntos, por exemplo, nos conjuntos $M(5) = \{0, -5, 5, -10, 10, -15, 15, \ldots\}$ e $M(10) = \{0, -10, 10, \ldots\}$ temos $0, -10$ e 10, ocorrendo nos dois conjuntos. Então dizemos que são múltiplos comuns de 5 e 10.

Definição 2 (Divisores) *Sejam c e $d \in \mathbb{Z}$ e $d \neq 0$. Dizemos que d é divisor de c, se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que: $c = k \cdot d$.*

Temos, por exemplo, que 3 é divisor de 12 e 9 é divisor de 18, pois $12 = 4 \cdot 3$ e $18 = 2 \cdot 9$.

Para um inteiro c qualquer indicamos por D(c) o conjunto de seus divisores, o qual é finito. Por exemplo:

- D(4)=$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$;
- D(6)=$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$;
- D(7)=$\{\pm 1, \pm 7\}$;
- D(11)=$\{\pm 1, \pm 11\}$;
- D(0)=$\mathbb{Z}$.

Assim como podemos identificar múltiplos comuns entre conjuntos de múltiplos, também podemos ter divisores comuns em conjuntos de divisores. Por exemplo, , se considerarmos $D(4) = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$ e $D(6) = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$ teremos -2 e 2, ocorrendo nos dois conjuntos. Então, dizemos que são divisores comuns de 4 e 6.

Definição 3 (Números Primos) *Quando um número inteiro $p > 1$, possui como divisores apenas ± 1 e $\pm p$, dizemos que ele é um número primo.*

Por exemplo, 2, 3, 7 e 17 são primos, pois:

- D(2)=$\{\pm 1, \pm 2\}$;
- D(3)=$\{\pm 1, \pm 3\}$;

- D(7)=$\{\pm 1, \pm 7\}$;
- D(17)=$\{\pm 1, \pm 17\}$.

O conjunto dos números primos é um subconjunto de $\mathbb{N}$ muito interessante. O seu estudo sempre despertou o interesse de muitos matemáticos ao longo da história. Alguns historiadores acreditam que sua descoberta remontam a escola pitagórica por volta de 300 a.c, mas foi com o grego Euclides que eles tomaram a forma que aparecem nos livros didáticos hoje.

Em seu livro *Os Elementos* ele trata da infinidade desses números e apresenta uma demostração bem simples e direta a respeito disso, a qual demonstraremos a seguir. Mas antes, o leitor deve ter em mente que *todo número inteiro maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como produto de números primos.* Essa afirmação é conhecida como Teorema Fundamental da Aritmética e também será utilizada na seção seguinte.

Teorema 2.2.1 (Euclides) *Existem infinitos números primos.*

Demonstração: Suponhamos que exista somente um número finito de primos. Sejam $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k$ esses números.

Consideremos então o número

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

que é um inteiro maior do que 1, portanto um primo ou divisível por um primo. Note que $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k$ não dividem N, pois caso contrário dividiria 1, então N é primo. O que contradiz nossa hipótese já que $N \neq p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, k$. ∎

Hoje o estudo destes números tem ganhado grande destaque no campo da Criptografia. Com a crescente utilização da rede mundial de computadores para transações, está sempre se buscando formas de garantir uma rede mais segura e nesse aspecto os números primos tem se tornado grandes aliados dos programadores.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Um critério de divisibilidade é uma regra que permite avaliarmos se um número inteiro é ou não divisível por outro número inteiro, sem efetuarmos a divisão. Apresentaremos a seguir, alguns dos principais critérios de divisibilidade.

- **Divisibilidade por 2** Um número é divísivel por 2, quando for par.

Exemplo 22 *Os números 124, 14789632 e 45000 são pares, logo são divisíveis por 2.*

- **Divisibilidade por 3** Um número é divísivel por 3, quando a soma dos algarismos que o formam for múltiplo de 3.

  Exemplo 23 *O número 5472 é divisível por 3, pois* $5 + 4 + 7 + 2 = 18$ *é múltiplo de 3 (*$18 = 3 \times 6$*).*

- **Divisibilidade por 4** Um número é divísivel por 4, quando o número formado pelos seus algarismos das dezenas e das unidades é divisível por 4.

  Exemplo 24 *O número 262516 é divisível por 4, pois seus algarismos das dezenas e unidades formam 16 que é divisível por 4.*

- **Divisibilidade por 5** Um número é divísivel por 5, se seu algarismo das unidades é igual a 0 ou 5.

  Exemplo 25 *Os números 87690 e 3695 são divisíveis por 5, pois seus algarismos das unidades são, respectivamente, 0 e 5.*

- **Divisibilidade por 6** Um número é divísivel por 6, quando for divisível simultaneamente por 2 e por 3.

  Exemplo 26 *O número 5922 é par, pois é divisível por 2 e como* $5+9+2+2 = 18$ *é múltiplo de 3, então 5922 é divisível por 3. Portanto 5922 é divisível por 6.*

- **Divisibilidade por 7** Um número é divisível por 7 se ao multiplicarmos o algarismo das unidades por 2 e subtrairmos o resultado pelos números que restaram, o número resultante for divisível por 7.

  Exemplo 27 *O número 392 é divisível por 7, pois:*

  $$392 \to 39 - 2 \cdot 2 = 35.$$

  Como 35 é divisível por 7, então 392 também o é.

  Exemplo 28 *Para decidir se o número 15232 é divisível por 7, devemos aplicar o critério várias vezes. Vejamos:*

  1. $15232 \to 1523 - 2 \cdot 2 = 1519$

2. $1519 \to 151 - 2 \cdot 9 = 133$

3. $133 \to 13 - 2 \cdot 3 = 7$.

Pelo critério acima, tem-se:

1. 7 é divisível por 7, logo 133 é divisível por 7;

2. 133 é divisível por 7, logo 1519 é divisível por 7;

3. 1519 é divisível por 7, portanto 15232 é divisível por 7.

- **Divisibilidade por 8** Um número é divísivel por 8 quando seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8, ou seja, quando o número formado pelos algarismos das centenas, dezenas e unidades é divisível por 8.

  Exemplo 29 *O número 270144 é divisível por 8, pois 144 é divisível por 8 (*$144 = 8 \times 18$*).*

- **Divisibilidade por 9** Um número é divísivel por 9 se a soma dos algarismos que o formam for divisível por 9.

  Exemplo 30 *O número 64638 é divisível por 9, pois* $6+4+6+3+8 = 27$ *é divisível por 9.*

- **Divisibilidade por 10** Um número é divísivel por 10 quando seu algarismo das unidades for 0.

  Exemplo 31 *Os números 1250,145000, 987560 e 360120320 são divisíveis por 10, pois seus algarismos das unidades são iguais a 0.*

- **Divisibilidade por 11** Um número é divísivel por 11 quando o módulo da diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar (S_I) e a soma dos algarismos de ordem par (S_P) for um número divisível por 11.

  Exemplo 32 *O número 7678 é divisível por 11, pois:*

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Ordem:} & 4^a & 3^a & 2^a & 1^a \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 7 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Daí, $S_I = 8 + 6 = 14$, $S_P = 7 + 7 = 14$ *e* $S_I - S_P = 0$ *que é divisível por 11.*

Omitimos aqui a justificativa destes critérios por não ser o objetivo deste trabalho, mas o leitor interessado em mais detalhes pode consultar a referência [38].

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Todo número inteiro positivo não primo é chamado de composto, e pode ser escrito como um produto de dois ou mais fatores diferentes de 1. Quando todos estes fatores são números primos, dizemos que esse número está "decomposto em fatores primos".

O processo de *"fatorar"* um número composto n, ou seja escrevê-lo como um produto de fatores primos, pode ser feito do seguinte modo. Inicialmente encontraramos seu menor fator primo p_0 e efetuamos a divisão para obter $n = n_0 \cdot p_0$. Em seguida, encontramos o menor fator p_1 que divide n_0 e efetuamos a divisão para obter $n_0 = n_1 \cdot p_1$ e substituimos em n, obtendo $n = n_1 \cdot p_1 \cdot p_0$. Continuamos com esse processo até obter $n_k = n_{k+1} \cdot p_{k+1}$, onde n_{k+1} e p_{k+1} são ambos primos. Então escrevemos $n = n_{k+1} \cdot p_{k+1} \cdot p_k \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot p_0$.

Isto é consequência do Teorema Fundamental da Aritmética, como falado antes.

Exemplo 33 *Para escrever 3150 como um produto de fatores primos, fazemos:*

$$\begin{aligned} 3150 &= 2 \cdot 1575 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 525 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Para encontrar esses fatores pode-se usar também um dispositivo que consiste em realizar sucessivas divisões por números primos. Inicialmente dividimos o número n pelo menor fator primo possível e posicionamos o quociente q_0 dessa divisão abaixo de n. Depois dividimos q_0 pelo menor fator primo possível e posicionamos o quociente q_1 abaixo de q_0. O processo deve se repetir até que o quociente fique igual a um. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Então a decomposição de 324 em fatores primos é:

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^4.$$

Quando dois ou mais números não possuem primos em comum na sua fatoração dizemos que são primos entre si ou relativamente primos, assim definimos:

Definição 4 (Números primos entre si) *Quando 1 é o único divisor comum de dois ou mais números inteiros, não todos nulos, dizemos que estes números são primos entre si, ou relativamente primos*

Exemplo 34 *Os números* $30 = 2 \times 3 \times 5$ *e* $77 = 7 \times 77$ *são primos entre si, pois o único divisor comum entre eles é 1, uma vez que suas decomposições em fatores primos não apresentam nenhum primo em comum.*

MÁXIMO DIVISOR COMUM - MDC

Muitas vezes, para resolver alguns problemas, é necessário considerar o maior divisor comum de dois ou mais números, ao qual chamamos de Máximo Divisor Comum (MDC), cuja definição apresentamos a seguir. E a partir daqui consideraremos apenas os divisores inteiros positivos.

Definição 5 (Máximo Divisor Comum - MDC) *Dados dois números inteiros* a *e* b *não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de* a *e* b *será chamado de Máximo Divisor Comum de* a *e* b *e denotado por* $mdc(a, b)$.

Exemplo 35 .

- $mdc(4, 6) = 2$
- $mdc(15, 9) = 3$
- $mdc(45, 75) = 15$
- $mdc(8, 11) = 1$

Para calcular o mdc de dois ou mais inteiros, listamos os divisores de cada um, selecionamos os divisores comuns, e identificamos o mdc como o maior entre estes. Mas apesar de ser um método geral, este pode ser um cálculo muito trabalhoso se precisarmos trabalhar com números muito grandes. Então apresentaremos aqui um procedimento baseado na fatoração em números primos, mais especificamente faremos uma fatoração "simultânea" para determinar o mdc.

Na fatoração simultânea, iremos proceder basicamente como a fatoração já apresentada anteriormente. Dividide-se os números cujo *mdc* quer se determinar por todos os números primos que os dividem simultaneamente. Esses cálculos podem ser organizados da seguinte maneira: do lado direito de uma barra vertical são colocados os números primos que os dividem ao mesmo tempo, e do lado esquerdo dessa barra são colocados os resultados dessas divisões sucessivas. O processo deve ser repetido até que os números do lado esquerdo sejam primos entre si, ou seja, até que eles não possuam divisores primos em comum. O *mdc* entre eles então, será o produto dos fatores primos que aparecem do lado direito. Garantimos que este é o *mdc*, pois do modo como esse foi construído, ele é um divisor comum e é o maior possível, pois testamos todas as possibilidades de divisores comuns.

Exemplo 36 *Calcule* $mdc(240, 360)$.

Solução:

Aplicando o processo da fatoração simultânea descrito anteriormente, devemos dividir 240 e 360 por todos os divisores primos comuns até obter dois números relativamente primos, isto é, dois números sem fator primo algum em comum.

$$\begin{array}{ccc|c}
240 & , & 360 & 2 \\
120 & , & 180 & 2 \\
60 & , & 90 & 2 \\
30 & , & 45 & 3 \\
10 & , & 15 & 5 \\
2 & , & 3 &
\end{array}$$

Como os números 2 e 3 são primos entre si, paramos o processo. Assim $mdc(240, 360) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$. $\diamond$

Exemplo 37 *Calcule* $mdc(17325, 7875)$.

Solução:

Devemos dividir 17325 e 7875 por todos os divisores primos comuns até obter dois números relativamente primos.

$$\begin{array}{ccc|c}
17325 & , & 7875 & 3 \\
5775 & , & 2625 & 3 \\
1925 & , & 875 & 5 \\
385 & , & 175 & 5 \\
77 & , & 35 & 7 \\
11 & , & 5 &
\end{array}$$

Como os números 11 e 7 são primos entre si, paramos o processo. Logo o $mdc(17325, 7875) = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 1575$. ◇

Exemplo 38 *Calcule* $mdc(450, 630, 2250)$.

Solução:

Devemos dividir 450, 630 e 2250 por todos os divisores primos comuns até obter números relativamente primos.

$$\begin{array}{ccccc|c} 450 & , & 630 & , & 2250 & 2 \\ 225 & , & 315 & , & 1125 & 3 \\ 75 & , & 105 & , & 375 & 3 \\ 25 & , & 35 & , & 125 & 5 \\ 5 & , & 7 & , & 25 & \end{array}$$

Note que 5 e 25 não são primos entre si, mas tanto 5 e 7 como 7 e 25 são primos entre si, então não há nenhum outro primo que seja divisor de 5, 7 e 25 simultaneamente. Então paramos a fotoração e dizemos que $mdc(450, 630, 2250) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

◇

A seguir apresentamos aplicações do MDC em algumas situações problema.

Exemplo 39 *Dois rolos de arame, um de 210 metros e outro de 330 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?*

Solução:

Primeiro observe que queremos cortar os dois rolos em pedaços de mesmo tamanho sem deixar sobras, ou seja, devemos dividir 210 e 330 pelo mesmo número de modo que a divisão seja exata. Então este número deve ser um divisor comum de 210 e 330.

Agora, note que o pedaço deve ser o maior possível, então o divisor comum deve ser máximo. Logo, o problema consiste em determinarmos o $mdc(210, 330)$.

Pelo processo da fatoração simultânea, temos:

$$\begin{array}{ccc|c} 210 & , & 330 & 2 \\ 105 & , & 165 & 3 \\ 35 & , & 55 & 5 \\ 7 & , & 11 & \end{array}$$

Como 7 e 11 são primos entre si, então $mdc(210, 330) = 2 \times 3 \times 5 = 30$. Portanto, os rolos devem ser cortados em pedaços de 30m, obtendo 7 pedaços do rolo de 210m e 11 pedaços do rolo de 330m

◇

Exemplo 40 *(EPCAR-2001)Uma abelha rainha dividiu as abelhas de sua colméia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possível, então você redistribuiria suas abelhas em:*

a) 8 equipes de 81 abelhas.

b) 9 equipes de 72 abelhas.

c) 24 equipes de 27 abelhas.

d) 2 equipes de 324 abelhas.

Solução:

Como cada equipe das batedoras e engenheiras devem ter exatamente o mesmo número de abelhas, então devemos dividir 288 e 360 pelo mesmo número. Além disso, como esse número deve ser o maior possível, então devemos determinar o $mdc(288, 360)$.

Pelo processo da fatoração simultânea, temos:

$$\begin{array}{ccc|c} 288 & , & 360 & 2 \\ 144 & , & 180 & 2 \\ 72 & , & 90 & 2 \\ 36 & , & 45 & 3 \\ 12 & , & 15 & 3 \\ 4 & , & 5 & \end{array}$$

Como 4 e 5 são primos entre si, então o $mdc(288, 360) = 2^3 \times 3^2 = 72$. Portanto, cada equipe deve ser composta por 72 abelhas e nesse caso, as batedoras ficaram compostas por $288 \div 72 = 4$ equipes e as engenheiras por $360 \div 72 = 5$ equipes.

Logo, você deve redistribuir suas abelhas em 9 equipes de 72 abelhas. ◇

Exemplo 41 *(Concurso Correios, 2011 - ADAPTADA) O piso de uma sala retangular, medindo $352cm \times 416cm$, será revestido com ladrilhos quadrados, de mesma dimensão, inteiros, de forma que não fique espaço vazio entre ladrilhos vizinhos. Os ladrilhos serão escolhidos de modo que tenham a maior dimensão possível. Na situação apresentada, o lado do ladrilho deverá medir:*

a) mais de 30 cm.

b) menos de 15 cm.

c) mais de 15 cm e menos de 20 cm.

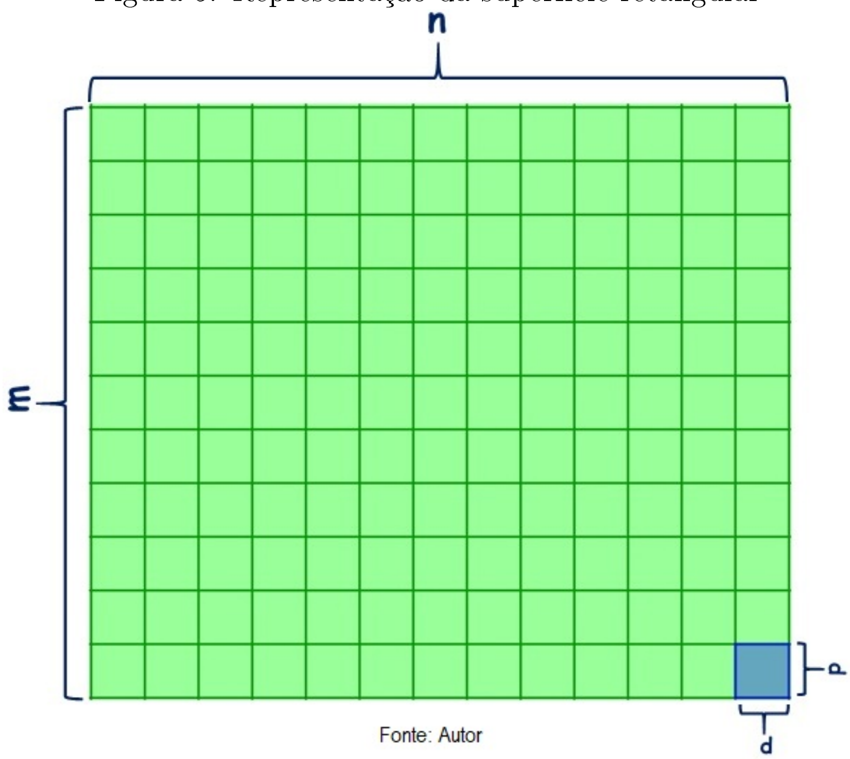
d) mais de 20 cm e menos de 25 cm.

e) mais de 25 cm e menos de 30 cm.

Solução:

Suponhamos que a superfície retangular seja coberta por $m \times n$ placas quadradas, sendo m faixas horizontais (no sentido do comprimento) e n faixas verticais (no sentido da largura da superfície retangular). Deste modo, se d é o comprimento do lado de cada placa quadrada, temos que $m \times d = 352$ e $n \times d = 416$, de modo que d é um divisor comum de 352 e 416.

Figura 5: Representação da superfície retangular



Fonte: Autor

Note que, para conseguir cobrir a superfície retangular com a menor quantidade de placas é necessário considerar as placas de maior tamanho possível, logo d é o $mdc(352, 416)$. E pelo processo da fatoração simultânea, temos:

$$\begin{array}{ccc|c}
352 & , & 416 & 2 \\
176 & , & 208 & 2 \\
88 & , & 104 & 2 \\
44 & , & 52 & 2 \\
22 & , & 26 & 2 \\
11 & , & 13 &
\end{array}$$

Como 11 e 13 são primos entre si, então $mdc(352, 416) = 2 \times 5 = 32$. Portanto, o ladrilho quadrado que irá revestir a sala deverá ter 32cm de lado, ou seja, maior que 30cm. $\diamond$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM - MMC

Como vimos anteriormente, o conjunto dos múltiplos de um inteiro é infinito, logo não é possível determinar um maior múltiplo comum, mas se considerarmos apenas os múltiplos inteiros positivos, podemos apresentar o menor deles, que chamaremos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC), o qual definimos a seguir.

Definição 6 (Mínimo Múltiplo Comum - MMC) *Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o menor múltiplo comum de a e b será chamado de mínimo múltiplo comum de a e b e denotado por $mmc(a, b)$.*

Exemplo 42 *Veja que*

- $mmc(6, 9) = 18$;
- $mmc(3, 7) = 21$;
- $mmc(14, 4) = 28$;
- $mmc(5, 15) = 15$.

Esses números, semelhantemente ao mdc, podem ser encontrados, fazendo uma listagem dos seus múltiplos e comparando-os. Mas apresentaremos também um processo com a fatoração simultânea já apresentada anteriormente.

Para o cálculo do $mmc(a, b)$, usando a fatoração simultânea, devemos ter todos os fatores primos que aparecem nas fatorações de a e de b, uma vez que se trata de um múltiplo de a e b. Então fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo de modo que, do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou a ou b. Para achar o Menor Múltiplo Comum, sempre que for possível, dividimos os dois números colocados do lado esquerdo de uma barra vertical pelo respectivo número que aparece do lado direito, quando não for possível dividimos um deles pelo menor primo e repetimos o outro. O processo continua até que os números do lado esquerdo fiquem ambos iguais a 1.

Exemplo 43 *Calcule o $mmc(45, 54)$.*

Solução:

Fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 45 ou 54, dividindo, sempre que possível pelo mesmo primo.

$$\begin{array}{ccc|c} 45 & , & 54 & 2 \\ 45 & , & 27 & 3 \\ 15 & , & 9 & 3 \\ 5 & , & 3 & 3 \\ 5 & , & 1 & 5 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Multiplicando todos os números primos do lado direito da barra vertical obtemos o mmc desejado. Portanto, $mmc(45, 54) = 2 \times 3^3 \times 5 = 270$. $\diamond$

Exemplo 44 *Calcule o* $mmc(90, 140)$.

Solução:

Fatoramos ao mesmo tempo estes dois números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 90 ou 140, dividindo, sempre que possível pelo mesmo primo.

$$\begin{array}{ccc|c} 90 & , & 140 & 2 \\ 45 & , & 70 & 2 \\ 45 & , & 35 & 5 \\ 9 & , & 7 & 3 \\ 3 & , & 7 & 3 \\ 1 & , & 7 & 7 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Portanto, $mmc(90, 140) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$. $\diamond$

Exemplo 45 *Calcule o* $mmc(126, 252, 441)$.

Solução:

Fatoramos ao mesmo tempo estes três números, organizando o cálculo como está indicado a seguir, em que do lado direito da barra vertical colocamos os primos que dividem ou 126 ou 252 ou 441, dividindo, sempre que possível pelo mesmo primo.

$$\begin{array}{ccccc|c} 126 & , & 252 & , & 441 & 2 \\ 63 & , & 126 & , & 441 & 2 \\ 63 & , & 63 & , & 441 & 3 \\ 21 & , & 21 & , & 147 & 3 \\ 7 & , & 7 & , & 49 & 7 \\ 1 & , & 1 & , & 7 & 7 \\ 1 & , & 1 & , & 1 & \end{array}$$

Portanto, $mmc(126, 252, 315) = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = 1764$. ◇

Os próximos exemplos são aplicações do mmc em situações problemas.

Exemplo 46 *(VUNESP-2020) A secretária de uma escola realiza, rigorosamente, uma tarefa A, a cada 6 dias trabalhados, e uma tarefa B, a cada 4 dias trabalhados. Sabendo-se que ela trabalha de segunda à sexta-feira, que em uma quinta-feira ela realizou ambas as tarefas, e que durante o mês seguinte a essa quinta-feira não houve interrupção dos dias trabalhados por ela, é correto afirmar que a vez imediatamente posterior em que ela realizou, no mesmo dia, ambas as tarefas foi uma:*

a) Segunda-feira.

b) Terça-feira.

c) Quarta-feira.

d) Quinta-feira.

e) Sexta-feira.

Solução:

Se a secretária realizou ambas as tarefas na quinta-feira, então a tarefa A será realizada novamente daqui a 6, 12, 18, 24 dias e assim por diante, ou seja, os dias em que ela realiza a tarefa A formam uma sequência de múltiplos de 6. Do mesmo modo os dias em que realizará a tarefa B formam uma sequência dos múltiplos de 4. Assim, as tarefas serão realizadas simultaneamente nos múltiplos comuns de 4 e 6.

Além disso, como queremos determinar o dia imediatamente posterior a essa quinta-feira, devemos determinar o mmc entre 4 e 6. Pelo processo da fatoração simultânea, temos:

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & , & 6 & 2 \\ 2 & , & 3 & 2 \\ 1 & , & 3 & 3 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Então o $mmc(4, 6) = 2^2 \times 3 = 12$. Isso significa que a próxima vez em que as duas tarefas serão realizadas simultaneamente será daqui a 12 dias trabalhados. Como a secretária só trabalha de segunda-feira a sexta-feira temos:

1ºdia	2ºdia	3ºdia	4ºdia	5ºdia	6ºdia	7ºdia	8ºdia	9ºdia	10ºdia	11ºdia	12ºdia
Sex.	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex	Seg.

Portanto a próxima vez que as tarefas serão realizadas simultaneamente será em uma Segunda-Feira. ◇

Exemplo 47 *(FCC 2003 - TRT/RN) Três funcionários fazem plantões nas seções em que trabalham: um a cada 10 dias, outro a cada 15 dias, e o terceiro a cada 20 dias, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se no dia 18/05/02 os três estiveram de plantão, a próxima data em que houve coincidência no dia de seus plantões foi:*

a) 18/11/02

b) 17/09/02

c) 18/08/02

d) 17/07/02

e) 18/06/02

Solução:

Se no dia 18/05/02 os três estavam de plantão, então o primeiro funcionário estará de plantão pela primeira após essa data, em 10 dias, pela segunda vez em 20 dias e assim por diante. Ou seja, ele estará de plantão nos dias múltiplos de 10. Pelo mesmo raciocínio os outros dois funcionários estarão de plantão nos múltiplos de 15 e 20. Logo para saber quando será o próximo plantão simultâneo dos três funcionários devemos determinar o $mmc(10, 15, 20)$.

Daí:

$$\begin{array}{ccccc|c} 10 & , & 15 & , & 20 & 2 \\ 5 & , & 15 & , & 10 & 2 \\ 5 & , & 15 & , & 5 & 3 \\ 5 & , & 5 & , & 5 & 5 \\ 1 & , & 1 & , & 1 & \end{array}$$

Então o $mmc(10, 15, 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$. Logo o próximo plantão simultâneo será daqui a 60 dias. Contando a partir do dia 18/05/02, terermos:

- 13 dias em maio (de 19 à 31/05/02);
- 30 dias em junho;
- 17 dias em julho (de 01 à 17/07/02).

Portanto, o próximo plantão simultâneo dos três ocorreu em 17/07/02. $\diamond$

Exemplo 48 *Um corredor dá uma volta em torno de um percurso em 12 minutos. Já outro corredor completa o mesmo percurso em 14 minutos. Se ambos saem juntos do ponto inicial de quantos em quantos minutos se encontrarão no mesmo ponto de partida?*

a) 12.

b) 14.

c) 60.

d) 80.

e) 84.

Solução:

O primeiro corredor passará pela ponto inicial pela primeira vez após 12 minutos, pela segunda vez após 24 minutos, pela terceira vez após 36 minutos, e assim por diante. Ou seja, este atleta passará pelo ponto inicial nos instantes que são múltiplos de 12. De modo análogo vemos que o outro corredor passará pelo ponto inicial nos instantes que são múltiplos de 14.

Portanto, eles estarão juntos no ponto inicial em todos os instantes que são múltiplos comuns de 12 e de 14. Como queremos o primeiro instante que isto vai ocorrer, identificamos este instante como o menor múltiplo comum de 12 e 14.

Daí:

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & , & 14 & 2 \\ 6 & , & 7 & 2 \\ 3 & , & 7 & 3 \\ 1 & , & 7 & 7 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

Como o $mmc(12, 14) = 2^2 \times 3 \times 5 = 84$, concluímos que de 84 em 84 minutos os corredores se encontrarão no mesmo ponto de partida. ◇

2.2.3 Conjunto dos Racionais

Acredita-se que já há cerca de 3000 a.C surgiu no antigo Egito, a necessidade de se representar partes de um inteiro para demarcar as terras próximas ao rio Nilo depois das enchentes e foi a partir de então que surgiu a necessidade dos números racionais.

O conjunto dos números Racionais é formado pelas frações $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, o qual indicamos por

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}.$$

Na fração $\dfrac{a}{b}$, a é chamado de numerador e b de denominador. Se $mdc(a, b) = 1$, dizemos que a fração é irredutível. Por exemplo, $\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{4}{11}$ são frações irredutíveis, mas $\dfrac{2}{6}$ não é. Quando a fração não é irredutível, sempre podemos escrever uma fração irredutível igual ou equivalente a ela. Por exemplo, as frações $\dfrac{3}{9}$ e $\dfrac{1}{3}$ são iguais. Abordaremos esse tópico mais detalhadamente um pouco mais adiante.

Considerando $\mathbb{Q}'$ o subconjunto de $\mathbb{Q}$, formado por todas as frações de denominador igual a 1, teremos $\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}$, portanto, tem-se

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

As operações de adição e multiplicação no conjunto dos racionais são realizadas da seguinte forma.

Dados a, b, c e d inteiros, com b e d diferentes de zero, então:

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$;
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Exemplo 49 .

- $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \dfrac{14 + 15}{35} = \dfrac{29}{35}$;
- $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \dfrac{15}{28}$.

Para os racionais são válidas as mesmas propriedades vistas para os inteiros. Além dessas, acrescentamos ainda a seguinte propriedade.

Propriedade 6 (Simétrico ou inverso para a multiplicação) .

Para todo racional $p \neq 0$, o racional $q = \dfrac{1}{p}$ é tal que

$$p \cdot q = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

De posse dessa propriedade podemos definir a operação de divisão nos racionais não nulos, estabelecendo que dados racionais $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ quaisquer, não nulos, então

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Em outras palavras, para dividir dois números racionais, basta multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo.

A operação de subtração é definida de modo semelhante a adição, já que a Propriedade 5 dos inteiros continua válida aqui.

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Agora que as operações adição, subtração, multiplicação e divisão para os racionais foram definidas, abordaremos algumas situações problemas.

Exemplo 50 *(VUNESP 2016 - ODAC) Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram* $\frac{1}{4}$ *do percurso na primeira hora,* $\frac{2}{5}$ *do percurso na segunda hora e 14 quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?*

a) 14.

b) 16.

c) 40.

d) 36.

Solução:

Para resolver o problema devemos determinar que fração do percurso corresponde a distância percorrida na última hora, já que conhecemos o valor em quilômetros percorrido nesse tempo. Para calcular essa fração vamos somar as frações correspondentes a primeira e segunda hora e subtrair de 1 inteiro que corresponde ao percurso total.

Então teremos:

- $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{5+8}{20} = \frac{13}{20}$;
- $1 - \frac{13}{20} = \frac{1}{1} - \frac{13}{20} = \frac{1 \cdot 20 - 13 \cdot 1}{1 \cdot 20} = \frac{20-13}{20} = \frac{7}{20}$.

Logo 14 quilômetros corresponde a $\frac{7}{20}$ do percurso total. Nesse caso, $\frac{1}{20}$ corresponde a 2 quilômetros, pois

$$\frac{7}{20} = 14 \Rightarrow 7 \times \frac{1}{20} = 14.$$

Assim, como a primeira e a segunda hora somaram $\frac{13}{20}$ do percurso, então correspondem a $13 \times \frac{1}{20} = 13 \times 2 = 26$ quilômetros.

Portanto o percurso total tem $26 + 14 = 40$ quilômetros. ◇

Exemplo 51 *(SARESP)Na casa de Mariana o gasto diário de água com descargas correspondia a* $\frac{2}{5}$ *da capacidade da caixa d'água. Com a troca por descargas mais econômicas, esse consumo passou a ser de* $\frac{1}{4}$ *da capacidade da mesma caixa d'água. Logo, a fração da caixa d'água economizada com essa troca foi de:*

a) $\frac{1}{20}$.

b) $\frac{3}{20}$.

c) $\frac{2}{4}$.

d) $\frac{1}{5}$.

Solução:

Como a caixa d'água permanece a mesma então a economia corresponde a diferença entre a fração que era gasta anteriormente e a fração atual, ou seja, a fração economizada é

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}.$$

◇

Exemplo 52 *Maurício fez um suco misto de laranja e acerola. Ele misturou metade de um copo de suco de acerola com* $\frac{1}{3}$ *do mesmo copo de suco de laranja. Calcule a fração que falta para ter o copo cheio.*

a) $\frac{5}{6}$.

b) $\frac{1}{6}$.

c) $\frac{2}{5}$.

d) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{2}{3}$.

Solução:

Somando as frações de suco de acerola com a de laranja, tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Agora para saber qual fração falta para ter o copo cheio, devemos subtrair $\frac{5}{6}$ de 1 inteiro. Daí:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{1} - \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 6 - 5 \cdot 1}{1 \cdot 6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Portanto, a fração que falta é $\frac{1}{6}$. ◇

Exemplo 53 *(OBMEP) Elisa tem 46 livros de Ciências e outros de Matemática e Literatura. Sabendo que um nono dos seus livros são de Matemática e um quarto são de Literatura, quantos livros de Matemática ela possui?*

a) *23*

b) *18*

c) 8

d) 9

d) 36

Solução:

Inicialmente vamos determinar que fração do total de livros corresponde os livros de Ciências, uma vez que conhecemos o total deles (46 livros). Para tanto, vamos somar as frações correspondentes aos livros de Matemática e Literatura e subtrair de 1 inteiro que corresponde ao total de livros.

Então teremos:

- $\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4+1\cdot 9}{9\cdot 4}=\frac{4+9}{36}=\frac{13}{36}$;
- $1-\frac{13}{36}=\frac{1}{1}-\frac{13}{36}=\frac{1\cdot 36-13\cdot 1}{1\cdot 36}=\frac{36-13}{36}=\frac{23}{36}$.

Logo os livros de Ciências correspondem a $\frac{23}{36}$ do total. Neste caso, $\frac{1}{36}$ corresponde a 2 livros, pois

$$\frac{23}{36}=46\Rightarrow 23\times\frac{1}{36}=46.$$

Assim, como os livros de Matemática e Literatura somaram $\frac{13}{36}$ do total de livros, então correspondem a $13\times\frac{1}{36}=13\times 2=26$ livros.

Logo a coleção de Elisa conta com $26+46=72$ livros.

Agora, para saber quantos destes são de Matemática, basta multiplicarmos 72 pela fração $\frac{1}{9}$. Portanto, Elisa possui $72\times\frac{1}{9}=\frac{72}{1}\times\frac{1}{9}=\frac{72\times 1}{1\times 9}=\frac{72}{9}=8$ livros de Matemática.

◇

Exemplo 54 *(UFMG - 2009) Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; e o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Então é CORRETO afirmar que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade de sorvete do sabor chocolate foi:*

a) $\frac{2}{5}$.

b) $\frac{3}{5}$.

c) $\frac{5}{12}$.

d) $\frac{5}{6}$.

Solução:

No primeiro pote há três sabores em quantidades iguais, portanto há um terço de cada sabor. Da mesma forma, há chocolate também no outro pote, contudo, há somente dois sabores: chocolate e baunilha, logo um meio de cada.

Sendo assim, o primeiro pote tem $\frac{1}{3}$ de sorvete de chocolate e o segundo tem $\frac{1}{2}$. Somando essas frações temos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Agora, note que essa fração corresponde a dois potes de sorvete, então para saber a quantidade exata de sorvete de chocolate devemos dividi-la por 2, assim teremos

$$\frac{5}{6}\div 2=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 1}{6\cdot 2}=\frac{5}{12}.$$

Portanto, a fração que corresponde a quantidade de sorvete de chocolate é $\frac{5}{12}$. ◇

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Uma mesma fração pode ser representada de várias formas diferentes. Por exemplo, as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$ quantificam a mesma porção de um todo. Quando isso ocorre, dizemos que são frações equivalentes.

Para obter frações equivalentes a uma fração $\frac{a}{b}$ dada, basta multiplicar ou dividir numerador e denominador desta pelo mesmo inteiro diferente de 1. Por exemplo:

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times 2}{7\times 2}=\frac{10}{14};$$

$$\frac{15}{45}=\frac{15\div 5}{45\div 5}=\frac{3}{9}.$$

Entre as formas de se escrever frações equivalentes uma é especialmente importante, as que apresentam no denominador potências de 10. Por exemplo, as seguintes frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{50}{100}$ e $\frac{500}{1000}$. Estas recebem o nome de frações decimais.

Toda fração decimal pode ser representada por um número decimal, isto é, um número que tem uma parte inteira e uma parte decimal separados por vírgulas.

Exemplo 55 *A fração* $\frac{5}{10}$*, pode ser representada como* $0,5$*, onde 0 representa a parte inteira e 5 a parte decimal.*

As frações $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ e $\frac{1}{100000}$ são chamadas respectivamente, de um décimo, um centésimo, um milésimo, um décimo de milésimo e um centésimo de milésimo. Seguindo nesse raciocínio a medida que a potência de 10 aumenta. E podemos ainda representá-las do seguinte modo:

- $\dfrac{1}{10} = 0,1;$
- $\dfrac{1}{100} = 0,01;$
- $\dfrac{1}{1000} = 0,001;$
- $\dfrac{1}{10000} = 0,0001;$
- $\dfrac{1}{100000} = 0,00001.$

À esta maneira de representá-las chamamos de *Representação decimal.* Assim, todo número racional, pode ser representado na forma decimal. E a seguir apresentaremos alguns exemplos para explicar como proceder para escrever um racional nessa maneira.

Exemplo 56 *Escreva a fração* $\dfrac{326}{10}$ *em sua representação decimal.*

Solução:

Iniciaremos, escrevendo 326 em sua representação decimal posicional:

$$326 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 6.$$

Agora, escrevemos a fração trocando 326 por sua representação decimal posicional e efetuamos algumas manipulações, apoiadas nas definições de adição e multiplicação para racionais e suas propriedades, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\frac{326}{10} &= \frac{3 \times 100 + 2 \times 10 + 6}{10} \\
&= \frac{3 \times 100}{10} + \frac{2 \times 10}{10} + \frac{6}{10} \\
&= \frac{3 \times 100}{10} + \frac{2 \times 10}{10} + \frac{6 \times 1}{10} \\
&= 3 \times 10 + 2 \times 1 + 6 \times \frac{1}{10} \\
&= 30 + 2 + 6 \times \frac{1}{10} \\
&= 32 + 0,6.
\end{aligned}$$

Por fim, escrevemos que $\dfrac{326}{10} = 32,6$. E esta é sua representação decimal. $\diamond$

Na penúltima linha da equação a operação $6 \times \dfrac{1}{10}$ deve ser realizada de modo semelhante a realizada com números naturais.

- Primeiro escreva, $\dfrac{1}{10}$ como 0,1 e disponha os números no dispositivo prático apresentado na Subseção 2.2.1 para efetuar multiplicações:

$$\begin{array}{ccc} 0 & , & 1 \\ \times & & 6 \\ \hline \end{array}$$

- Efetue o produto ignorando a vírgula:

$$\begin{array}{ccc} 0 & , & 1 \\ \times & & 6 \\ \hline 0 & & 6 \end{array}$$

- Agora a vírgula deve ser localizada no reultudo final do produto de modo que o número de algarismos localizados a direita dela seja igual ao número de algarismos a direita do decimal multiplicado, ficando então

$$\begin{array}{ccc} 0 & , & 1 \\ \times & & 6 \\ \hline 0 & , & 6 \end{array}$$

Já para fazer $32 + 0,6 = 36,6$, usamos o dispositivo para adição, também apresentado na subseção 2.2.1., mas nesse caso, as percelas devem ser organizadas de modo que as vírgulas fiquem posicionadas sempre na mesma coluna, inclusive no resultado da adição. Veja:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & , & 0 \\ + & 0 & , & 6 \\ \hline 3 & 2 & , & 6 \end{array}$$

Outra maneira de escrever um número racional qualquer em sua forma decimal é efetuando a divisão do numerador pelo denominador usando o dispositivo prático apresentado na subseção 2.2.2. Assim, dado um número racional $\frac{a}{b}$, este pode ser representado na forma de número decimal, bastando para isso, que se divida a por b.

Ao realizar tal operação, podem ocorrer dois casos.

Caso 1 : O resultado é um decimal exato, ou seja, o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos diferentes de zero.

Exemplo 57 *Veja as representações a seguir.*

- $\dfrac{1}{2} = 0,5$;

- $\frac{1}{20} = 0,05$;
- $\frac{7}{2} = 3,5$.

Caso 2 : O resultado é uma dízima periódica, ou seja, o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente.

Exemplo 58 *Veja as representações a seguir.*

- $\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,\bar{3}$;
- $\frac{3}{7} = 0,4285714285714... = 0,\overline{428571}$;
- $\frac{11}{6} = 1,833333... = 0,\bar{3}$.

PORCENTAGEM

É muito comum encontrarmos no nosso cotidiano expressões que falam em porcentagem, e não raro é exigido que façamos cálculos envolvendo esse assunto. Acredita-se que ela passou a ser utilizada no final do século XV em questões comerciais, como o cálculo de juros, prejuízos e impostos. A ideia, porém, teve origem muito antes. Quando o imperador romano César Augusto estabeleceu um imposto sobre todas as mercadorias a serem negociadas, chamado centésima, a taxa era de $\frac{1}{100}$.

Já vimos aqui, que esta é uma fração decimal que pode ser representada como o decimal 0,01. Faremos ainda, uso do símbolo %, o qual é denominado *Símbolo de Porcentagem* ou simplesmente, *Porcentagem*, para representá-las. Assim, ao escrevermos 50%, por exemplo, estamos nos referindo a fração $\frac{50}{100}$ pois,

$$\frac{50}{100} = 50 \times \frac{1}{100} = 50\%.$$

A seguir apresentaremos algumas aplicações do cálculo de porcentagem.

Exemplo 59 *(CPMCFSM - 2013) Uma passagem de ônibus intermunicipal sofreu um aumento de 16%. Sabendo que a passagem custava R\$15,00 antes do aumento, o preço da passagem passou a ser de:*

a) R\$17,00.

b) R\$17,20.

c) R\$17,30.

d) R\$17,40.

e) R\$17,50.

Solução:

Calculemos primeiro o aumento sofrido, fazendo o cálculo de 16% de 15. Temos:

$$16\% \text{ de } 15 \longrightarrow 15 \times \frac{16}{100} = \frac{15 \times 16}{100} = \frac{240}{100} = \frac{200+40}{100} = \frac{200}{100} + 4 \times \frac{1}{10} = 2 + 0,4 = 2,4.$$

Concluímos que o aumento foi de R\$ 2,40, assim o preço da passagem passou a ser R\$ $15,00$ + R\$ $2,40$ = R\$ $17,40$. ◇

Exemplo 60 *(SARESP) Luís comprou uma bicicleta por R\$180,00 e deseja vendê-la com um lucro de 5% para compensar alguns gastos que teve com a manutenção da bicicleta. O preço de venda será:*

a) R\$171,00.

b) R\$185,00.

c) R\$189,00.

d) R\$270,00.

Solução: Calculando o lucro, temos:

$$5\% \text{ de } 180 \longrightarrow 180 \times \frac{5}{100} = \frac{180 \times 5}{100} = \frac{900}{100} = 9.$$

O lucro deve corresponder a R\$9,00. Então a bicicleta deve ser vendida por $R\$180 + R\$9,00 = R\$189,00$. ◇

Exemplo 61 *(UFU-MG) Um produtor de milho vendeu 60% de sua produção para a distribuidora X e 40% para a distribuidora Y. Cada distribuidora tem um programa social e doou 4% e 2%, respectivamente, de sua compra, para instituições de caridade. A porcentagem do milho doado pelas distribuidoras, em relação ao total do milho vendido pelo produtor, foi:*

a) 4,2%.

b) 3,0%.

c) 3,2%.

d) 6,0%.

Solução:

Para calcular a porcentagem total, precisamos saber quanto corresponde 4% de 60% e 2% de 40%. Então iniciemos, calculando esses valores:

- 4% de 60% $\longrightarrow \dfrac{4}{100} \times \dfrac{60}{100} = \dfrac{4 \times 60}{100 \times 100} = \dfrac{240}{10000}$;
- 2% de 40% $\longrightarrow \dfrac{2}{100} \times \dfrac{40}{100} = \dfrac{2 \times 40}{100 \times 100} = \dfrac{80}{10000}$.

Agora, somamos as duas frações resultante, para obter a porcentagem do total que foi doado:

$$\frac{240}{10000} + \frac{80}{10000} = \frac{240+80}{10000} = \frac{320}{10000} = \frac{32}{1000} = \frac{32}{10} \times \frac{1}{100} = 3,2\%.$$

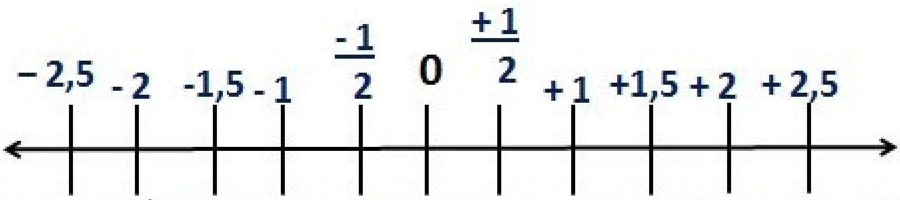
O total doado, portanto foi de 3,2% da produção total. ◇

Nos exemplos apresentados aqui, ficou claro que porcentagem representa uma fração de um dado número e para calcular quanto é isso, basta multiplicar pela fração centesimal. É importante destacar, que o inteiro 1 corresponde a fração centesimal de numerador 100, ou seja, $1 = \dfrac{100}{100} = 100\%$.

REPRESENTAÇÃO DOS RACIONAIS NA RETA

Os números racionais também podem ser representados numa reta numérica, assim precisamos de uma noção de comparação que coincida com a dos inteiros. Para tanto estabelecemos que todo número racional negativo, aquele que pode ser expresso na forma $\dfrac{-a}{b}$ com numerador negativo e denominador positivo, deve ser menor do que zero e menor do que qualquer número racional positivo, aquele com numerador e denominador positivos. Além disso, a um número racional positivo corresponde uma distância, medida entre o ponto que representa o zero e o ponto que representa $\dfrac{a}{b}$, enquanto que, ao seu oposto aditivo corresponde o ponto em posição simétrica com respeito ao zero. Desta forma, se ordenamos os racionais positivos também ordenaremos, automaticamente, os racionais negativos. Veja a figura a seguir:

Figura 6: Representação de números racionais



Fonte: Disponível em:https://www.infoescola.com/matematica/numeros-racionais/. Acesso em 25 jun. 2020

Quando ambos os racionais forem positivos ou negativos, devemos abordar outros critérios, os quais discutiremos a seguir. Mas antes apresentaremos brevemente a noção de ordem nos números racionais para que faça sentido a nossa obordagem.

Definição 7 *(Relação de Ordem) Dados racionais* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *tem-se:*

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ quando } \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Lemos $\frac{a}{b}$ *menor que* $\frac{c}{d}$.

Agora para realizar a comparação dos números racionais primeiro verificamos se as frações são equivalentes, ou seja, se suas formas reduzidas são iguais. Por exemplo, as frações $\frac{5}{10}$ e $\frac{20}{40}$ são equivalentes, pois ambas têm a forma reduzida igual a $\frac{1}{2}$. Neste caso, representam o mesmo ponto sobre a reta numérica. Se não forem frações equivalentes, então deve-se analisar os seguintes casos:

Caso 1 - As frações tem denominados iguais.

Neste caso a maior fração será aquela cujo numerador for maior.

Exemplo 62 *Comparando as frações* $\frac{8}{11}$ *e* $\frac{5}{11}$ *de mesmos denominadores, temos:*

$$\frac{5}{11} < \frac{8}{11},$$

pois $5 < 8$.

Caso 2 - As frações tem numeradores iguais.

Neste caso a maior fração será aquela cujo denominador for menor.

Exemplo 63 *Comparando as frações* $\frac{7}{2}$ *e* $\frac{7}{5}$ *de mesmos numeradores, temos:*

$$\frac{7}{5} < \frac{7}{2},$$

pois $2 < 5$.

Caso 3 - As frações tem numeradores e denominadores diferentes.

Neste caso a maior fração será aquela cuja representação decimal for maior.

Exemplo 64 *Comparando as frações* $\frac{7}{8}$ *e* $\frac{4}{10}$ *cujos numeradores e denominadores são diferentes, temos:*

$$\frac{4}{10} < \frac{7}{8},$$

pois $\frac{7}{8} = 0,875$ *e* $\frac{4}{10} = 0,4$.

2.2.4 Conjuntos dos Irracionais e dos Reais

Existem porém, números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo,

- $0,1024578963...$;
- $e = 2,718281...$;
- $\pi = 3,141592...$;
- $\sqrt{2} = 1,414213....$

Estes formam um outro conjunto numérico chamado de irracionais, o qual representaremos por $\mathbb{I}r$.

A união dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais formam o conjunto dos números reais o qual representamos por $\mathbb{R}$. No conjunto dos números $\mathbb{R}$ destacamos, além de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}r$, os seguintes subconjuntos:

- $\mathbb{R}_+$: Conjunto dos reais não negativos;
- $\mathbb{R}_-$: Conjunto dos reais não positivos;
- $\mathbb{R}^*$: Conjunto dos reais não nulos.

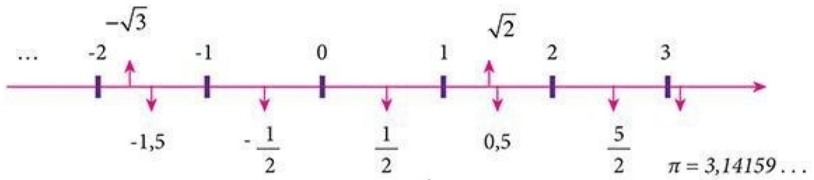
No conjunto dos números reais, as operações de adição e multiplicação gozam das mesmas propriedades vistas para os números racionais. Podendo ainda ser definida as operações de subtração para todo número $\mathbb{R}$ e a divisão no subconjunto $\mathbb{R}^*$.

REPRESENTAÇÃO DOS REAIS NA RETA

Já vimos que tanto os números inteiros quanto os racionais podem ser representados em uma reta numérica observando alguns critérios que já discutimos aqui. Mas esses números não preenchem completamente a reta, ou seja, há pontos nela que não representam racional algum. Note que entre os números $3,14$ e $3,15$ por exemplo, temos o número $\pi = 3,141592...$ que é irracional.

Assim como os racionais, também podemos representar os irracionais sobre uma reta. Ao fazer isso cada ponto da reta passa a representar necessariamente um número racional ou irracional, portanto preenchem completamente a reta.

Figura 7: Reta real



Fonte: Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/21049594. Acesso em 25 jun. 2020

A esta reta, que representa todo o conjunto dos números reais, chamamos de reta real ou reta numérica.

2.3 Caiu no ENEM

Nas seções anteriores apresentamos noções básicas de Matemática que são exigidas na competência um, habilidades 1, 3, 4 e 5 da matriz de referência do ENEM e nesta seção apresentaremos uma coletânea de exercícios com questões que abordaram essa competência em provas do ENEM ao longo dos últimos 10 anos (2009 à 2019).

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Exercício 1 *(ENEM 2011) O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por relógio de luz, é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:*

Figura 8: Medidor de energia

Fonte: Caderno azul ENEM, 2011

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

a) *2614.*

b) *3624.*

c) *2715.*

d) *3725.*

e) *4162.*

Solução:

Os rélogios que representam as unidades e as centenas giram no sentido hórario e os primeiros algarismos ultrapassados pelos ponteiros destes são, respectivamente, 4 e 6, então o número possui 4 unidades e 6 centenas. Já os rélogios que representam as dezenas e a milhar giram no sentido anti-hórario e os primeiros algarismos ultrapassados pelos ponteiros destes são, respectivamente, 1 e 2, então o número possui 1 dezena e 2 unidades de milhar. Logo, tem-se

Milhar: 2;
Centena: 6;
Dezena: 1;
Unidade: 4.

Portanto, o número obtido pela leitura é 2614.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 2 *(ENEM 2012) João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 13 _ 98207, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu. De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de:*

a) *Centena.*

b) *Dezena de milhar.*

c) *Centena de milhar.*

d) *Milhão.*

e) *Centena de milhão.*

Solução:

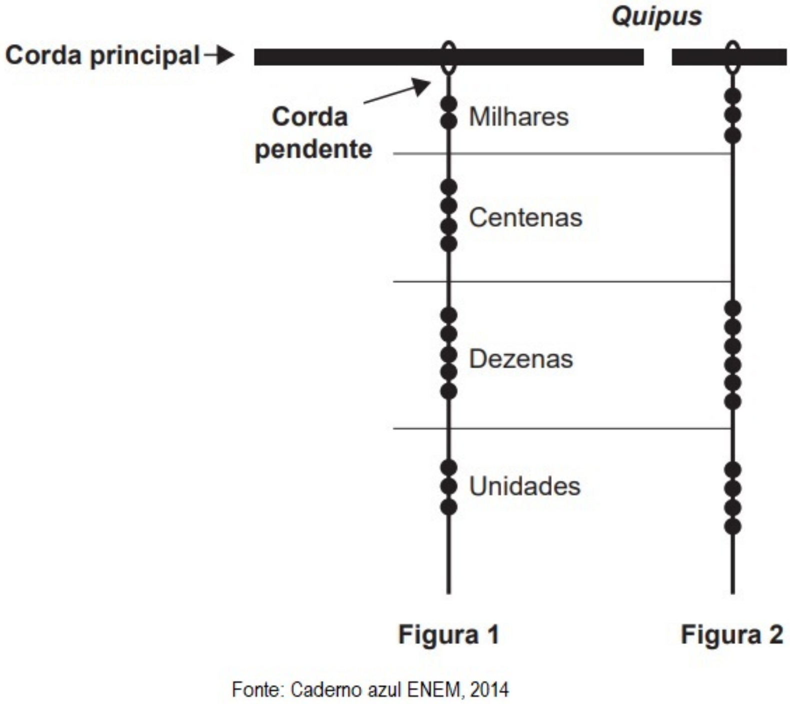
Da direita para esquerda, o algarismo que está faltando ocupa a sexta posição no número, o que corresponde a ordem das centenas da classe de milhar. Portanto, o algarismo faltando ocupa a posição da Centena de Milhar.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 3 *(ENEM 2014) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado quipus. O quipus era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.*

Figura 9: Quipu



O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é:

a) 364.

b) 463.

c) 3 064.

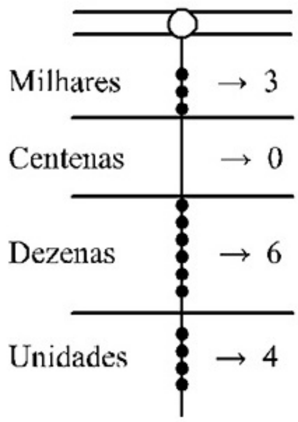
d) 3 640.

e) 4 603.

Solução:

Na figura 2, tem-se:

Figura 10: Número representado no quipu



Fonte: Disponível em: https://www.fariasbrito.com.br/sistemas/enem/enem2014/?prova=amarela. Acesso em 07 jun 2020.

Logo, o número representado é:

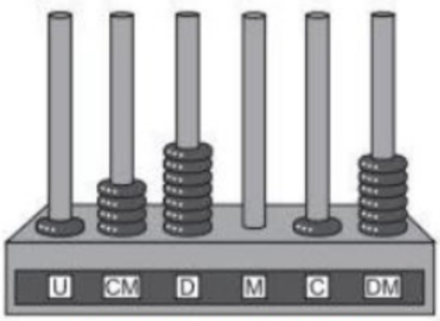
$$3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 = 3000 + 0 + 60 + 4 = 3064.$$

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 4 *(ENEM 2016) O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda. Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.*

Figura 11: Número representado no ábaco



Fonte: Caderno amarelo ENEM, 2016

Nessa disposição, o número que está representado na figura é:

a) 46 171.

b) 147 016.

c) 171 064.

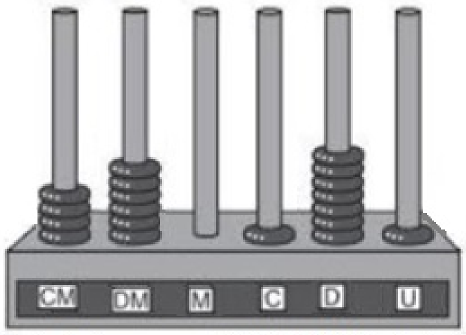
d) 460 171.

e) 610 741.

Solução:

Colocando as hastes do ábaco na disposição usual teremos:

Figura 12: Representação usual do número no ábaco



Fonte: Caderno amarelo ENEM, 2016 (adaptada).

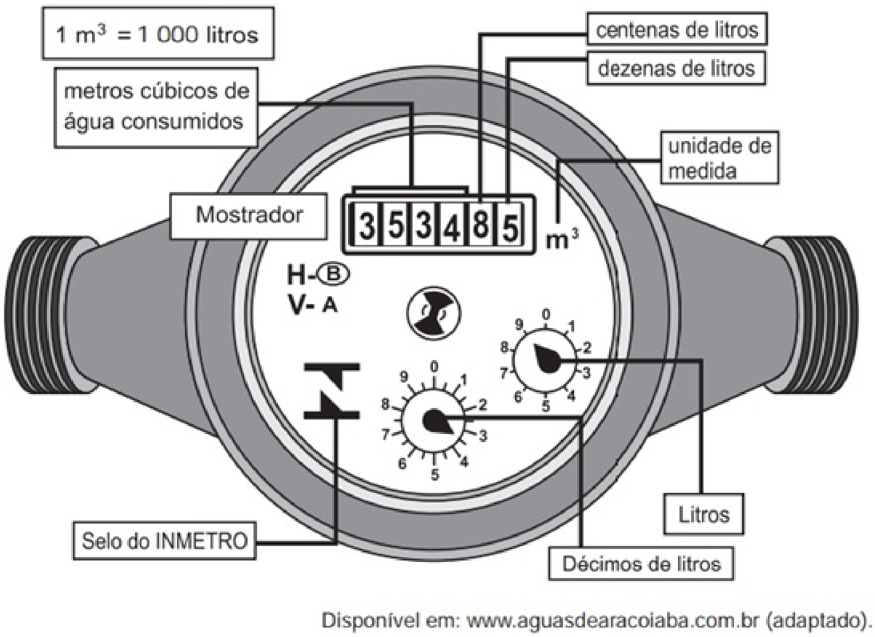
Contando agora, as argolas em cada uma delas, teremos uma argola na haste de adesivo U, sete na de adesivo D, uma na de adesivo C, zero na de adesivo M, seis na de adesivo DM e quatro na de adesivo CM. Como cada argola representa um algarismo nessa posição, então o número apresentado no ábaco tem 1 unidade, 7 dezenas, 1 centena, 6 dezenas de milhar e 4 centenas de milhar. Ou seja, corresponde ao número: 460 171.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 5 *(ENEM 2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em* m^3*, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir.*

Figura 13: Hidrômetro



Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a

a) 3 534,85.

b) 3 544,20.

c) 3 534 850,00.

d) 3 534 859,35.

e) 3 534 850,39.

Solução:

No mostrador estão registrados:

- $3534\ m^3 \longrightarrow 3534 \times 1000l = 3534000l$;
- 8 centenas de litros $\longrightarrow 800l$;
- 5 dezenas de litros $\longrightarrow 50l$.

Nos ponteiros, tem-se:

- 9 unidades de litros $\longrightarrow 9l$;
- 3 décimetros e meio de litros $\longrightarrow 0,35l$.

Portanto, de acordo com a figura, o consumo de água é igual a:

$$3534000 + 800 + 50 + 9 + 0,35 = 3534859,35 \text{ litros.}$$

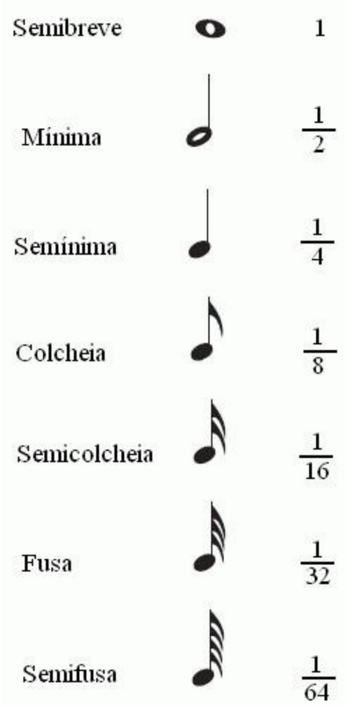
Resposta: Letra d.

◇

OPERAÇÕES BÁSICAS

Exercício 6 *(ENEM 2009) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.*

Figura 14: Notas musicais



Fonte: Caderno rosa ENEM, 2009

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$ *, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras. Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é* $\frac{3}{4}$ *, poderia ser preenchido com:*

a) 24 fusas.

b) 3 semínimas.

c) 8 semínimas.

d) 24 colcheias e 12 semínimas.

e) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

Solução:

O trecho musical é composto de 8 compassos sendo que cada um tem fórmula $\frac{3}{4}$. Então para determinar a duração do trecho devemos somar a fórmula dos 8 compassos, ou seja:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=8\times\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6.$$

Agora devemos determinar de que forma podemos escrever 6, combinando os tempos das notas. Analisando as alternativas, temos:

- 24 fusas $\longrightarrow 24\times\frac{1}{32}=\frac{24}{32}=0,75;$
- 3 semínimas $\longrightarrow 3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75;$
- 8 semínimas $\longrightarrow 8\times\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2;$
- 24 colcheias e 12 semínimas $\longrightarrow 24\times\frac{1}{8}+12\times\frac{1}{4}=\frac{24}{8}+\frac{12}{4}=3+3=6;$
- 16 colcheias e 8 semicolcheias $\longrightarrow 16\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{16}=\frac{16}{8}+\frac{8}{16}=2+0,5=2,5.$

Concluimos que o trecho musical descrito poderia ser preenchido por 24 colcheias e 12 semínimas.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 7 *(ENEM 2009) Joana frequenta uma academia de ginástica onde faz exercícios de musculação. O programa de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos em cada série. No aquecimento, ela caminha durante 10 minutos na esteira e descansa durante 60 segundos para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. Entre uma série e outra, assim como ao mudar de aparelho, Joana descansa por 60 segundos.*

Suponha que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus exercícios às 10h30min e finalizado às 11h7min. Nesse dia e nesse tempo, Joana:

a) não poderia fazer sequer a metade dos exercícios e dispor dos períodos de descanso especificados em seu programa.

b) poderia ter feito todos os exercícios e cumprido rigorosamente os períodos de descanso especificados em seu programa.

c) poderia ter feito todos os exercícios, mas teria de ter deixado de cumprir um dos períodos de descanso especificados em seu programa.

d) conseguiria fazer todos os exercícios e cumpriria todos os períodos de descanso especificados em seu programa, e ainda se permitiria uma pausa de 7 min.

e) não poderia fazer todas as 3 séries dos exercícios especificados em seu programa; em alguma dessas séries deveria ter feito uma série a menos e não deveria ter cumprido um dos períodos de descanso.

Solução:

Joana começa com um aquecimento de 10 minutos e descansa 60 segundos, o que equivale a 1 minuto, então ela gasta $10 + 1 = 11$ minutos antes de começar o primeiro exercício.

Em seguida ela faz 3 séries em cada um dos 6 aparelhos, o que totaliza $3 \times 6 = 18$ séries. Como cada série é de 30 segundos ela gasta:

$$18 \times 30 = 540\ segundos = 9 \times 60\ segundos = 9 \times 1\ minuto = 9\ minutos, \text{ nas séries.}$$

Agora, entre cada série e cada troca de aparelho ela gasta 60 segundos (1 minuto). São $2 \times 6 = 12$ intervalos entre as séries (1 entre a primeira e segunda série e outro entre a segunda e terceira série em cada um dos 6 aparelhos) e 5 intervalos entre as trocas de aparelho (1 entre o primeiro e segundo aparelho, outro entre o segundo e o terceiro, outro entre o terceiro e o quarto, outro entre o quarto e o quinto e outro entre o quinto e o sexto). Logo são $12 + 5 = 17$ intervalos de 1 minuto, o que totaliza $17 \times 1 = 17$ minutos.

Assim, o tempo total de Joana na academia é de $11 + 9 + 17 = 37$ minutos.

No dia em questão, ela chegou às 10h30min e saiu às 11h7min, então permaneceu na academia por 37 minutos ($11h7min - 10h30min$).

Portanto, Joana poderia ter feito todos os exercícios e cumprido rigorosamente os períodos de descanso especificados em seu programa.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 8 *(ENEM 2010) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?*

a) 476.

b) 675.

c) 923.

d) 965.

e) 1538.

Solução:

O diretor quer enviar exatamente 500 folhetos do segundo tipo. Sabe-se que cada um destes, precisa de um selo de R$0,65, um de R$0,60 e um de R$0,20, então para cada folheto será gasto,

$$0,65 + 0,60 + 0,20 = 1,45 \text{ reais.}$$

Como são 500 folhetos deste tipo, o total gasto será de:

$$500 \times 1,45 = 500 \times (1 + 0,4 + 0,05) = 500 + 200 + 25 = 725 \text{ reais.}$$

Ele tem a sua disposição R$ 1000,00, assim restará $1000 - 725 = 275$ reais para gastar com os folhetos do primeiro tipo, que só usam selos de R$0,65.

Agora, dividimos 275 por 0,65 para saber quantos selos ele irá comprar aqui.

$$275 \div 0,65 = 275 \div \frac{65}{100} = \frac{275}{1} \times \frac{100}{65} = \frac{27500}{65} \cong 423.$$

Para saber quantos selos de R$0,65 o diretor comprou, precisamos somar os 500 comprados para os folhetos do segundo tipo, com os 423 comprados para os folhetos do primeiro tipo. Assim, concluímos que ele comprou $500 + 423 = 923$ selos de R$0,65.

Resposta: Letra c.

$\diamond$

Exercício 9 *(ENEM 2011) O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro-velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm. Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa. Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro*

a) 68,21 mm.

b) 68,102 mm.

c) 68,02 mm.

d) 68,012 mm.

e) 68,001 mm.

Solução:

Para decidir qual o pistão ideal, devemos verificar qual dos números: 68,21; 68,102; 68,001; 68,02 e 68,012 é menor. Para isso começamos comparando a primeira casa decimal após a vírgula, depois a segunda, a terceira e assim por diante. Após fazer essa comparação e organizar os números em ordem crescente, teremos:

$$\overbrace{68,001}^{1^{\underline{o}}} \ \overbrace{68,012}^{2^{\underline{o}}} \ \overbrace{68,020}^{3^{\underline{o}}} \ \overbrace{68,102}^{4^{\underline{o}}} \ \overbrace{68,210}^{5^{\underline{o}}}.$$

Portanto, o pistão adequado é aquele de 68,001mm.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 10 *(ENEM 2011) O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.*

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ *do que foi consumido no ano anterior.*

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros.

b) 16 bilhões de litros.

c) 32 bilhões de litros.

d) 40 bilhões de litros.

e) 48 bilhões de litros.

Solução:

De acordo com o enunciado, em 2009 (ano passado) foram consumidos 331 bilhões de xícaras de café. Como cada xícara equivale a 120 ml, então foram consumidos:

$$331 \text{ bilhões} \times 120ml = 39720 \text{ bilhões de ml.}$$

O consumo em 2010 deve ser $\frac{1}{5}$ maior. Calculando $\frac{1}{5}$ de 39720 bilhões de ml, temos:

$$\frac{1}{5} \times 39720 = \frac{39720}{5} = 7944 \text{ bilhões de ml.}$$

Somando com o valor que já era consumido, tem-se:

$$39720 + 7944 = 47664 \text{ bilhões de ml.}$$

Sabemos que 1 ml corresponde a 0,001 litros, então,

$$47664 \textit{ bilhões de ml} = 47664 \textit{ bilhões } \times 0,001\ l = 47,664 \textit{ bilhões de litros.}$$

Portanto, o consumo aproximado é de 48 bilhões de litros.
Resposta: Letra e.

◇

Exercício 11 *(ENEM 2011) Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:*

- *Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.*
- *Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.*
- *Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.*
- *Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.*
- *Uma garrafa de cerveja serve duas.*
- *Uma garrafa de espumante serve três convidados.*

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um.

Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia.
Jornal Hoje 17 dez. 2010 (adaptado).

Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de

a) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

b) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

c) 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

d) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

e) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

Solução:

Considerando que o anfitrião não irá participar da ceia, ele precisará de:

- Carne $\longrightarrow 250g \times 30 = 7500g = 7,5kg$;
- Arroz $\longrightarrow \dfrac{1}{4}\,copo \times 30 = \dfrac{30}{4} = 7,5\,copos$;
- Farofa $\longrightarrow 4\,colheres \times 30 = 120\,colheres$;
- Vinho $\longrightarrow \dfrac{1}{6}\,garrafa \times 30 = \dfrac{30}{6} = 5\,garrafas$;
- Cerveja $\longrightarrow \dfrac{1}{2}\,garrafa \times 30 = \dfrac{30}{2} = 15\,garrafas$;
- Espumante $\longrightarrow \dfrac{1}{3}\,garrafa \times 30 = \dfrac{30}{3} = 10\,garrafas.$

Portanto, o anfitrião deverá dispor de 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 12 *(ENEM 2012)Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes.*

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é:

a) 153.

b) 460.

c) 1 218.

d) 1 380.

e) 3 066.

Solução:

Determinemos primeiro, quantos períodos a criança precisa jogar. Como ela ganha 20 tíquetes por período e precisa de 9200, basta dividir por 20:

$$9200 \div 20 \longrightarrow \frac{9200 \div 10}{20 \div 10} = \frac{920}{2} = \frac{900+20}{2} = \frac{900}{2} + \frac{20}{2} = 450 + 10 = 460.$$

Logo, a criança precisa jogar 460 períodos, como cada um custa R$3,00, ela gastará:

$$3 \times 460 = 3 \times (400 + 60) = 1200 + 180 = 1380\, reais.$$

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 13 *(ENEM 2014) Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:*

- *Recipiente I: 0,125 litro;*
- *Recipiente II: 0,250 litro;*
- *Recipiente III: 0,320 litro;*
- *Recipiente IV: 0,500 litro;*
- *Recipiente V: 0,800 litro;*

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

Solução:

O secretário comprou 16 galões com 4 litros cada, então no total são $16 \times 4 = 64\, litros$ de álcool em gel.

Estes devem ser divididos em 10 escolas e cada uma deverá ter 20 recipientes de mesma capacidade, logo os 64 litros devem ficar divididos em $10 \times 20 = 200$ recipientes. Assim, cada recipiente deve conter:

$$\frac{64}{200} = \frac{64 \div 2}{200 \div 2} = \frac{32}{100} = 32 \times \frac{1}{100} = 32 \times 0,01 = 0,32\, litros.$$

Portanto, o secretário deverá comprar recipientes do Tipo III.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 14 *(ENEM 2015) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:*

Figura 15: Cartas

Fonte: Caderno azul ENEM, 2015

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

a) 9.

b) 7.

c) 5.

d) 4.

e) 3.

Solução:

A fração representada na carta da mesa é equivalente as seguintes representações:

- $\frac{6}{8} \longrightarrow \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$;
- $\frac{6}{8} = \frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75 \times 0,01 = 0,75$;
- $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 75\%$.

Note que $\frac{3}{4}$, 75% e 0,75 estão representados em cartas na mão do jogador. Portanto, há 3 cartas na mão dele que pode formar um par com a carta da mesa.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 15 *(ENEM 2015) A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta"na qual pode ser inserido um refil contendo 3 mL de insulina, como mostra a imagem.*

Figura 16: Caneta para aplicação de insulina

Fonte: Caderno azul ENEM, 2015

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25.

b) 15.

c) 13.

d) 12.

e) 8.

Solução:

Em cada aplicação o paciente deve usar 10 unidades, mas precisa descartar 2 para retirar as bolhas, então deve colocar 12 unidades na caneta. Como cada unidade corresponde a 0,01 ml, então devem ser colocados $12 \times 0,01 = 0,12ml$.

Agora, como cada refil comporta 3 ml, para saber o número máximo de aplicações por refil, basta dividir 3 ml por 0,12.

Assim, é possível fazer no máximo:

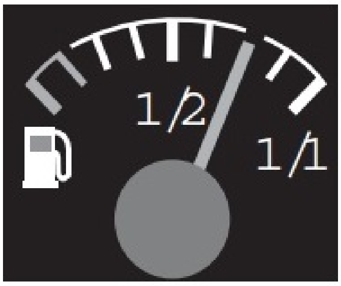
$$3 \div 0,12 = 3 \div \frac{12}{100} = \frac{3}{1} \times \frac{100}{12} = \frac{300}{12} = 25 \quad \text{aplicações.}$$

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 16 *(1ª APLICAÇÃO-ENEM 2016) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.*

Figura 17: Tanque de combustível



Fonte: Caderno azul ENEM 1ª aplicação, 2016

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

a) 570.

b) 500.

c) 450.

d) 187.

e) 150.

Solução:

Observe que o marcador é dividido em 8 intervalos, dos quais 6 está preenchido. Logo o tanque está com:

$$\frac{6}{8} \longrightarrow \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4} \quad \text{de sua capacidade.}$$

Ou seja, o carro tem:

$$\frac{3}{4} \; de\ 50l\ de\ gasolina \longrightarrow \frac{3}{4} \times 50 = \frac{150}{4} = \frac{100+50}{4} = \frac{100}{4} + \frac{50}{4} = 25 + 12,5 = 37,5l.$$

Como a cada litro o carro anda 15km, então é possível viajar ainda $15 \times 37,5 = 562,5$km.

Portanto, o veículo poderá percorrer no máximo até o posto que fica a 500 km.

Resposta: Letra b.

$\diamond$

Exercício 17 *($2^{\underline{a}}$ APLICAÇÃO-ENEM 2016) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de* $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}$ *e* $\frac{5}{4}$. *Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos:*

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$.

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$.

c) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$.

d) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$.

e) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$.

Solução:

Começaremos procurando frações equivalentes as frações dadas de modo a escrevê-las com mesmo denominador.

Temos:

- $\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$;

- $\frac{5}{4} \longrightarrow \frac{5 \times 2}{4 \times 2} = \frac{10}{8}$;

Assim, devemos ordenar as frações $\frac{4}{8}, \frac{3}{8}$ e $\frac{10}{8}$.

Pelo caso 1, descrito na subseção 2.2.3 para representação dos racionais na reta, temos: $\frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{10}{8}$.

Portanto, colocando as medidas dos tubos em ordem crescente teremos:

$$\frac{3}{8}, \frac{1}{2} \text{ e } \frac{5}{4}.$$

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 18 *(ENEM 2017) Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho A partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho B, que havia saído do topo da montanha.*

Quantos segundos após a partida do bondinho B partiu o bondinho A?

a) 5.

b) 10.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

Solução:

A travessia para ambos os bondinhos é realizada em 1,5 minutos, ou seja,

$$1,5 \times 60 = (1 + 0,5) \times 60 = 60 + 30 = 90 \; segundos.$$

Como o bondinho A encontrou o bondinho B 40 segundos após sua partida, significa que o bondinho B se deslocou $90 - 40 = 50$ segundos.

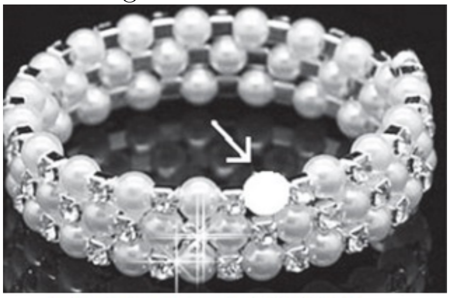
Assim, o bondinho A saiu $50 - 40 = 10$ segundos depois do bondinho B.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 19 *(ENEM 2017) Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.*

Figura 18: Pulseira



Fonte: Caderno amarelo ENEM, 2017.

Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm.

O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais.

A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a

a) 3,099.

b) 3,970.

c) 4,025.

d) 4,080.

e) 4,100.

Solução:

Para decidir qual a pérola mais adequada, devemos calcular a diferença positiva entre os diâmetros da pérola original e as que o joalheiro tem disponível e escolher a menor diferença. Calculemos, então essas diferenças:

- $4,025 - 4 = 0,025$ mm;
- $4,100 - 4 = 0,100$ mm;
- $4 - 3,970 = 0,030$ mm;
- $4,080 - 4 = 0,080$ mm;
- $4 - 3,099 = 0,901$ mm.

Colocando as diferenças em ordem crescente, obtemos:

$$0,025 < 0,030 < 0,080 < 0,100 < 0,901.$$

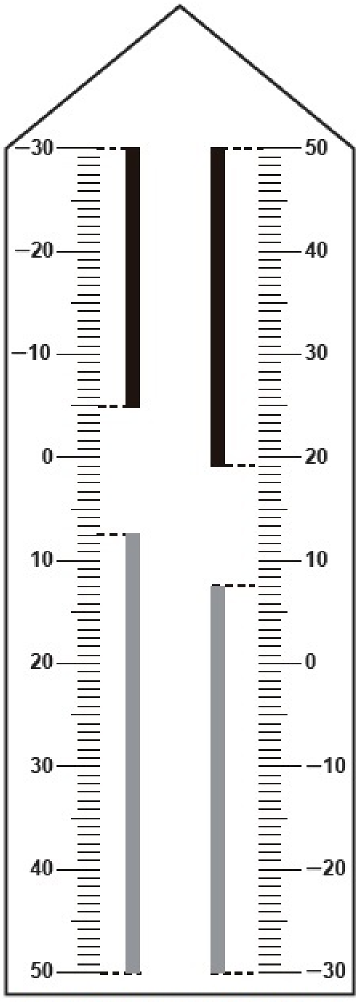
Portanto, a pérola que mais se aproxima da original é aquela cujo diâmetro mede 4,025mm.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 20 *(ENEM 2017) Neste modelo de termômetro, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.*

Figura 19: Termômetro



Fonte: Caderno rosa ENEM, 2017

Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de -30*°C até 50 °C. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de* -30*°C até 50 °C.*

A leitura é feita da seguinte maneira:

- *a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda;*

- *a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita;*
- *a temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinza nas duas colunas.*

Disponível em: www.if.ufrgs.br.
Acesso em: 28 ago. 2014 (adaptado).

Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

a) 5°C.

b) 7°C.

c) 13°C.

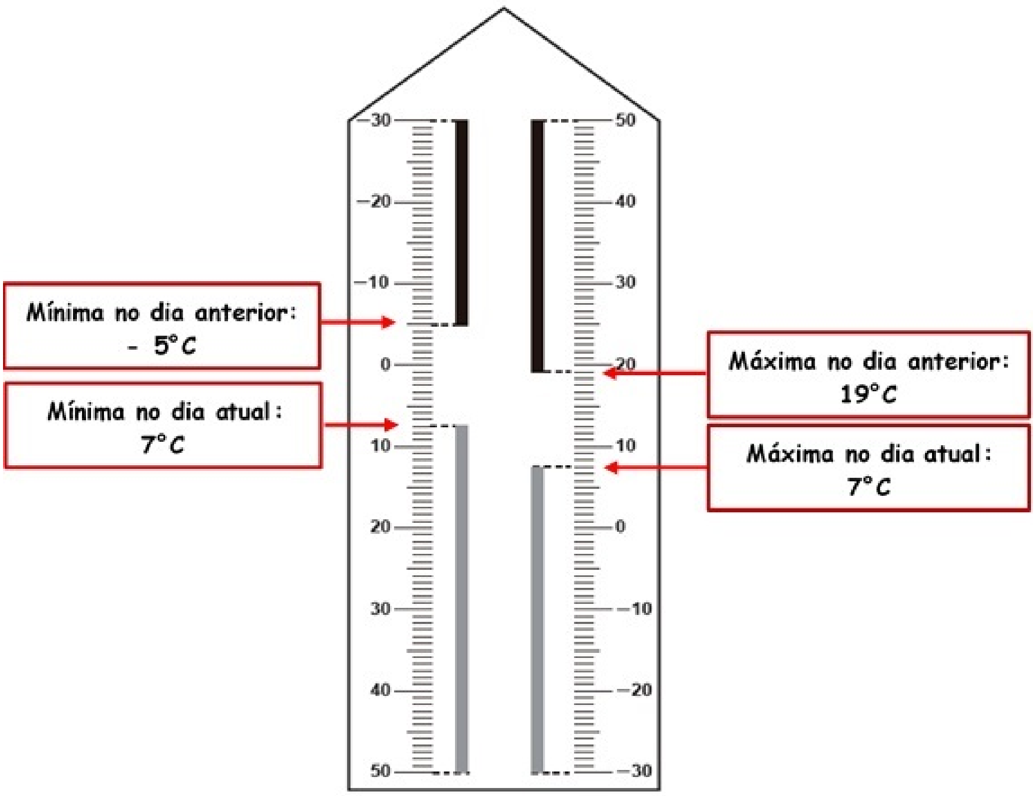
d) 15°C.

e) 19°C.

Solução:

Observando a aproximação das marcações no termômetro, temos:

Figura 20: Temperatura marcada no termômetro



Fonte: Autor

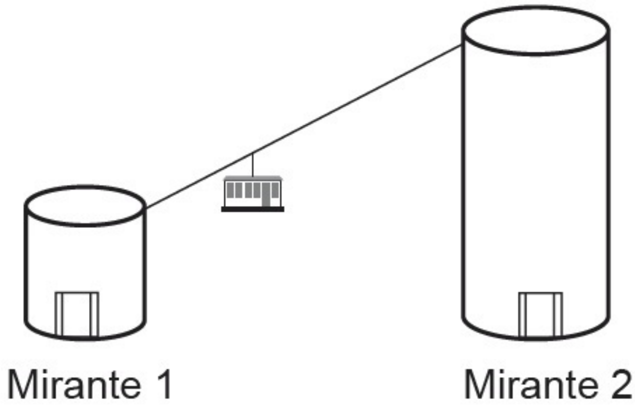
Logo a temperatura máxima mais aproximada, registrada foi 19°C.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 21 *(ENEM 2017) Em um parque há dois mirantes de alturas distintas que são acessados por elevador panorâmico. O topo do mirante 1 é acessado pelo elevador 1, enquanto que o topo do mirante 2 é acessado pelo elevador 2. Eles encontram-se a uma distância possível de ser percorrida a pé, e entre os mirantes há um teleférico que os liga que pode ou não ser utilizado pelo visitante.*

Figura 21: Teleférico



Fonte: Caderno cinza ENEM, 2017

O acesso aos elevadores tem os seguintes custos:

- *Subir pelo elevador 1: R$ 0,15;*
- *Subir pelo elevador 2: R$ 1,80;*
- *Descer pelo elevador 1: R$ 0,10;*
- *Descer pelo elevador 2: R$ 2,30.*

O custo da passagem do teleférico partindo do topo do mirante 1 para o topo do mirante 2 é de R$ 2,00, e do topo do mirante 2 para o topo do mirante 1 é de R$ 2,50.

Qual é o menor custo, em real, para uma pessoa visitar os topos dos dois mirantes e retornar ao solo?

a) *2,25.*

b) *3,90.*

c) *4,35.*

d) *4,40.*

e) 4,45.

Solução:

Calculando os preços dos possíveis percursos, temos:

- Percurso I: Sobe e desce o elevador 1, anda até o mirante II em seguida, sobe e desce elevador 2.

  CUSTO:

  $(0,15+0,10)+(1,80+2,30) = 0,25+(1+0,80+2+0,30) = 3+1,10 = 4,35\, reais.$

- Percurso II: Sobe elevador 1, anda pelo teleférico até mirante II em seguida, desce elevador 2.

  CUSTO:

  $0,15+2+2,30 = 0,15+2+(2+0,30) = 4+0,45 = 4,45\, reais.$

- Percurso III: Sobe elevador 2, anda pelo teleférico até mirante I em seguida, desce elevador 1.

  CUSTO:

  $1,80+2,50+0,10 = 1+0,80+2+0,50+0,10 = 3+1,40 = 4,40\, reais.$

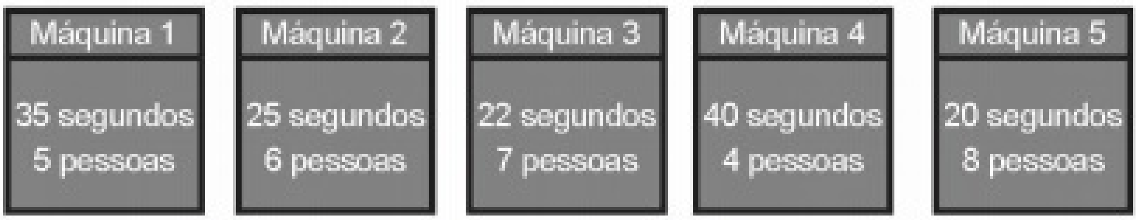
Portanto, o Percurso I é o que apresenta menor custo, onde a pessoa gastará R$4,35.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 22 *(ENEM 2018) Em um aeroporto, os passageiros devem submeter suas bagagens a uma das cinco máquinas de raio-X disponíveis ao adentrarem a sala de embarque. Num dado instante, o tempo gasto por essas máquinas para escanear a bagagem de cada passageiro e o número de pessoas presentes em cada fila estão apresentados em um painel, como mostrado na figura.*

Figura 22: Distribuição de pessoas por máquina



Fonte: Caderno amarelo ENEM, 2018

Um passageiro, ao chegar à sala de embarque desse aeroporto no instante indicado, visando esperar o menor tempo possível, deverá se dirigir à máquina:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Solução:

Para decidir qual máquina escolher, o passageiro deve verificar quanto tempo cada uma gastará para atender as pessoas que já estão na fila e escolher a que apresentar o menor tempo.

Analisando os tempos de cada máquina, temos os seguintes valores.

- Máquina 1:

  $35 \times 5 = (30 + 5) \times 5 = 150 + 25 = 175\, seg.$

- Máquina 2:

  $25 \times 6 = (20 + 5) \times 6 = 120 + 30 = 150\, seg.$

- Máquina 3:

  $22 \times 7 = (20 + 2) \times 7 = 140 + 14 = 154\, seg.$

- Máquina 4:

  $40 \times 4 = 160\, seg.$

- Máquina 5:

  $20 \times 8 = 160\, seg.$

Assim, a melhor opção para ele é a máquina 2.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 23 *(ENEM 2019) Um casal planejou uma viagem e definiu como teto para o gasto diário um valor de até R$ 1 000,00. Antes de decidir o destino da viagem, fizeram uma pesquisa sobre a taxa de câmbio vigente para as moedas de cinco países que desejavam visitar e também sobre as estimativas de gasto diário em cada um, com o objetivo de escolher o destino que apresentasse o menor custo diário em real. O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.*

Nessas condições, qual será o destino escolhido para a viagem?

Tabela 1: Câmbio

País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário
França	Euro (€)	R$ 3,14	315,00 €
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00

Fonte: Caderno cinza ENEM, 2019

a) Austrália.

b) Canadá.

c) EUA.

d) França.

e) Reino Unido.

Solução:

Calculando o gasto diário em cada país de acordo com a taxa de câmbio correspondente, tem-se:

- França:

  $315 \times 3,14 = 315 \times (3 + 0,14) = 945 + 44,1 = 989,1\, reais.$

- EUA:

  $390 \times 2,78 = 390 \times (2 + 0,78) = 780 + 304,2 = 1084,2\, reais.$

- Austrália:

  $400 \times 2,14 = 400 \times (2 + 0,14) = 800 + 56 = 856\, reais.$

- Canadá:

  $410 \times 2,10 = 410 \times (2 + 0,10) = 820 + 41 = 861\, reais.$

- Reino Unido:

  $290 \times 4,24 = 290 \times (4 + 0,24) = 1160 + 69,6 = 1229,6\, reais.$

Portanto, o melhor destino para a viagem é Austrália.

Resposta: Letra a.

◇

PORCENTAGEM

Exercício 24 *(ENEM 2009) A resolução das câmeras digitais modernas é dada em megapixels, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas, em geral, em 3 bytes. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de bytes necessários para armazená-las.*

Considere 1 KB = 1.000 bytes, 1 MB = 1.000 KB, 1 GB = 1.000 MB.

Utilizando uma câmera de 2.0 megapixels cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazená-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar

a) um CD de 700 MB.

b) um pendrive de 1 GB.

c) um HD externo de 16 GB.

d) um memory stick de 16 MB.

e) um cartão de memória de 64 MB.

Solução:

Cada foto tem 2 megapixels, logo as 150 fotos correspondem a:

$$2 \times 150 = 300\, megapixels.$$

Usando as medidas de conversão sugeridas, temos que,

$$300\, megapixels = 300000000\, pixels(Pontos).$$

Como cada ponto é armazenado em 3 bytes, então precisamos de

$$300000000 \times 3\, bytes = 300000000 \times 3000 = 900000000000\, bytes = 900\, MB.$$

Agora, note que, o algoritmo de compressão é 95%, logo será utilizado 5% dos 900MB no armazenamento (100% − 95%), ou seja, precisamos de um dispositivo que comporte:

$$5\%\, de\, 900 = \frac{5}{100} \times 900 = \frac{4500}{100} = 45MB.$$

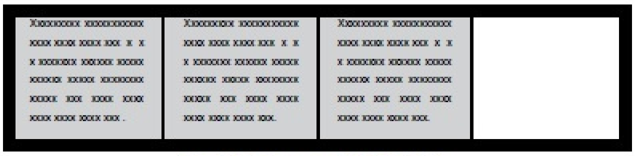
Analisando as opções dadas, aquele que oferece um espaço suficiente com menor espaço restante é o cartão de memória de 64MB.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 25 *(ENEM 2010) Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte:*

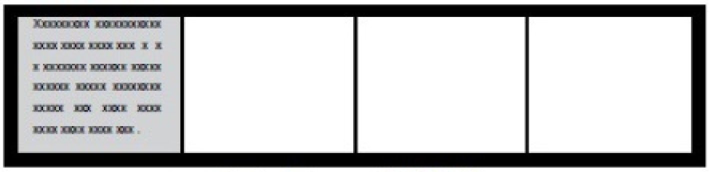
Figura 23: Lousa



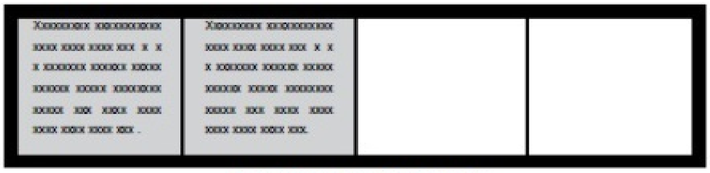
Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

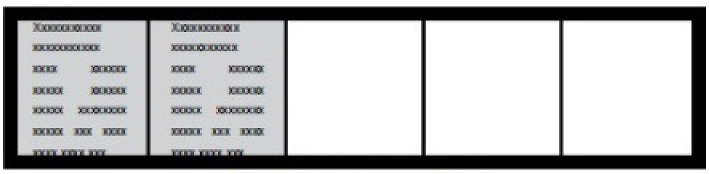
Uma representação possível para essa segunda situação é

a) 

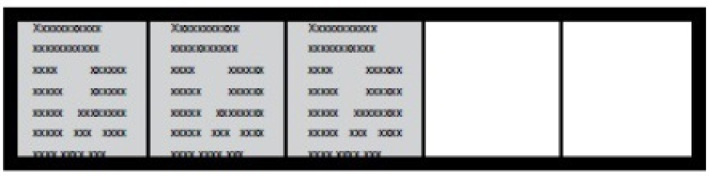
Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

b) 

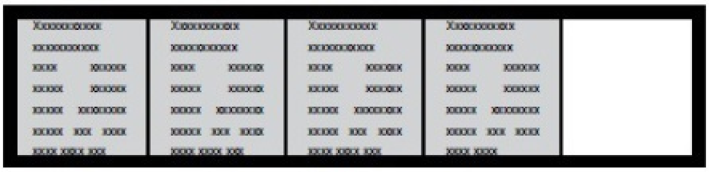
Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

c) 

Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

d) 

Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

e) 

Fonte: Caderno azul ENEM, 2016

Solução:

Analisando as opções dadas temos:

- Item A

  I Fração representada: $\frac{1}{4}$;

  II Porcentagem: $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 25\%$;

- Item B

  I Fração representada: $\frac{2}{4}$;

  II Porcentagem: $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 25}{4 \times 25} = \frac{50}{100} = 50\%$;

- Item C

  I Fração representada: $\frac{2}{5}$;

  II Porcentagem: $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100} = 40\%$;

- Item D

  I Fração representada: $\frac{3}{5}$;

  II Porcentagem: $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} = 60\%$;

- Item E

  I Fração representada: $\frac{4}{5}$;

  II Porcentagem: $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100} = 80\%$.

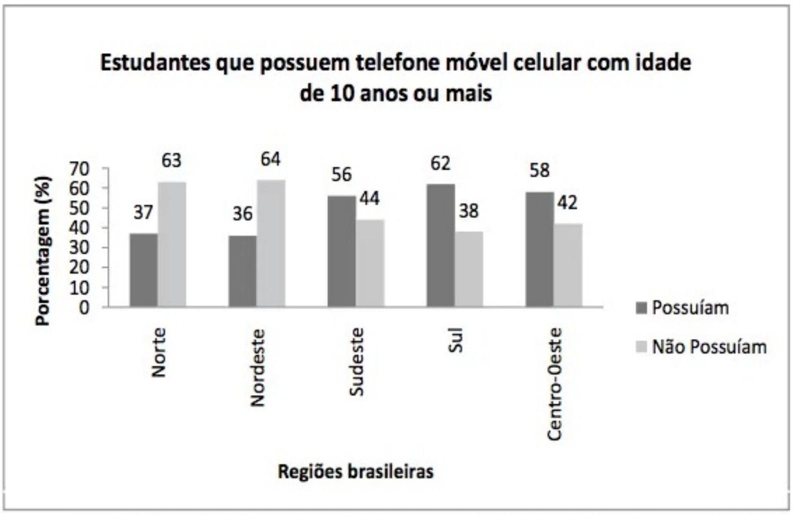
Portanto, uma representação possível para a segunda situação é a representada no item C.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 26 *(ENEM 2010) Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*

Figura 24: Quantidade de telefones celulares



(Foto: Fonte: IBGE.Disponivel em: http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).)

Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

a) 5 513.

b) 6 556.

c) 7 450.

d) 8 344.

e) 9 536.

Solução:

O gráfico mostra que no Sudeste, 56% dos entrevistados possuem telefone móvel celular. Como foram 14900 entrevistados nessa região, então basta calcular 56% desse valor.

Daí:

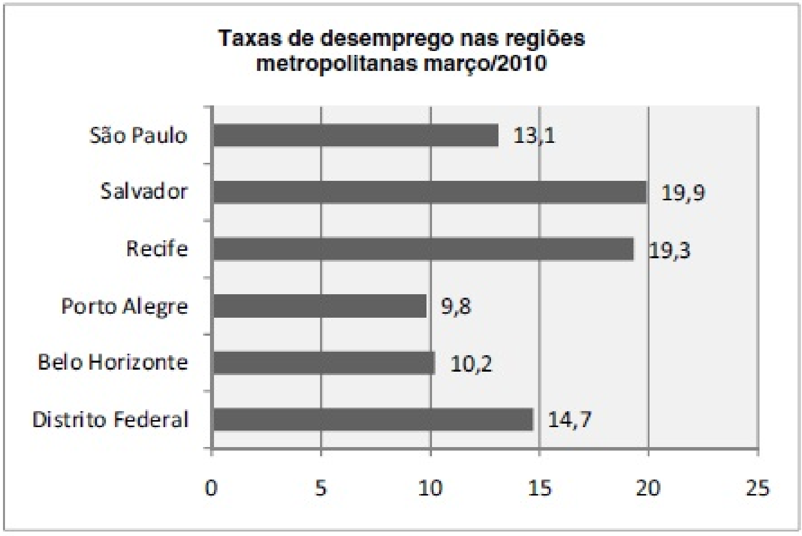
$$56\%\ de\ 14900 \longrightarrow \frac{56}{100} \times 14900 = 56 \times \frac{14900}{100} = 56 \times 149 = 8344.$$

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 27 *(ENEM 2010) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).*

Figura 25: Taxa de desemprego



Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

a) 24500.

b) 25000.

c) 220500.

d) 223000.

e) 227500.

Solução:

De acordo com o gráfico, a taxa de desemprego em Porto Alegre foi de 9,8%, como foram entrevistados 250000 pessoas, então o número de desempregados foi de:

$$9,8\% \; de \; 250000 \longrightarrow 250000 \times \frac{9,8}{100} = 250000 \times 9,8 \times \frac{1}{100} = 250000 \times \frac{98}{10} \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{250000 \times 98 \times 1}{10 \times 100} = \frac{24500000}{1000} = 24500 \; pessoas.$$

Resposta: Letra a.

$\diamond$

Exercício 28 *(ENEM 2010) Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade* *e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.*

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de

a) 16%.

b) 24%.

c) 32%.

d) 48%.

e) 64%.

Solução:

Do grupo inicial, apenas 40% foi curado com o tratamento tradicional, então $100\% - 40\% = 60\%$ foi submetido a algum dos tratamentos inovadores.

Como foram divididos em 2 grupos iguais, então 30% do grupo original foi submetido ao primeiro tratamento e 30% ao segundo, com taxas de cura de 35% e 45%, respectivamente.

Calculando essas taxas nos dois tratamentos, tem-se:

- Primeiro tratamento:
  $35\%\ de\ 30\% \longrightarrow \frac{35}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{1050}{10000}.$
- Segundo tratamento:
  $45\%\ de\ 30\% \longrightarrow \frac{45}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{1350}{10000}.$

Somando os resultados dos dois tratamentos, temos:

$$\frac{1050}{10000} + \frac{1350}{10000} = \frac{2400}{10000} = \frac{24}{100} = 24\%.$$

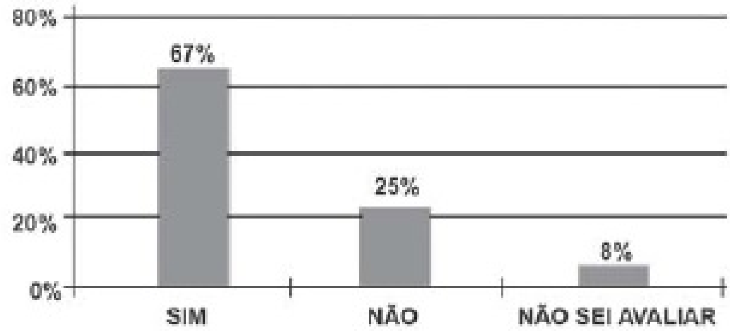
Então, os tratamentos inovadores proporcionaram curaa de 24% em relação aos pacientes submetidos inicialmente.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 29 *(ENEM 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.*

Figura 26: Quantidade de internautas



Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

a) Menos de 23.

b) Mais de 23 e menos de 25.

c) Mais de 50 e menos de 75.

d) Mais de 100 e menos de 190.

e) Mais de 200.

Solução:

De acordo com o gráfico, 25% dos entrevistados responderam NÃO. Ou seja,

$$25\% \text{ de } 279 \longrightarrow \frac{25}{100} \times 279 = \frac{(200+70+9)\times 25}{100} = \frac{(5000+1750+225)\times 25}{100} = \frac{6975}{100}$$

$$= \frac{6000+900+70+5}{100} = \frac{6000}{100} + \frac{900}{100} + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = 60+9+0,7+0,05 = 69,75.$$

Portanto, mais de 50 e menos de 75 internautas, responderam NÃO à enquete.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 30 *(ENEM 2014) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação. No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,*

a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.

b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.

c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.

d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.

e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

Solução:

Calculando a carga no ponto de sustentação central, temos:

$$60\% \; de \; 12t \longrightarrow 12 \times \frac{60}{100} = \frac{720}{100} = \frac{700+20}{100} = \frac{700}{100} + \frac{20}{100} = 7 + 0,2 = 7,2t.$$

Agora temos, $12t - 7,2t = 4,8t$ para dividir igualmente entre os outros 2 pontos, o que dá:

$$4,8 \div 2 = \frac{48}{10} \div 2 = \frac{48}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{48}{20} = 2,4t.$$

Portanto, as cargas recebidas pelos 3 pontos de sustentação serão, respectivamente, 2,4t, 7,2t e 2,4t.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 31 *(ENEM 2014) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,*

- *25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.*
- *33% são utilizados em descarga de banheiro.*
- *27% são para cozinhar e beber.*
- *15% são para demais atividades.*

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia. O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Tabela 2: Consumo de água

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Fonte: Caderno rosa ENEM, 2014

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água, *a) 30,0.*

b) 69,6.

c) 100,4.

d) 130,4.

e) 170,0.

Solução:

Primeiro calculemos a quantidade de água necessária para as "Demais atividades"de acordo com a ONU. Para isso basta calcular 15% de 200 litros:

$$15\% \; de \; 200l \longrightarrow \frac{15}{100} \times 200 = \frac{300}{100} = 30l.$$

Então o consumo, segundo a nova proposta deve ser de:

$$30 + 24 + 18 + 22 + 3,2 + 2,4 = 94 + 3 + 0,2 + 2 + 0,4 = 99 + 0,6 = 99,6 \; litros.$$

Portanto, a economia será de $200 - 99,6 = 100,4$ litros.

Resposta: Letra c.

$\diamond$

Exercício 32 *(ENEM 2014) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.*

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é

a) [35 ; 63].

b) [40 ; 63].

c) [50 ; 70].

d) [50 ; 90].

e) [70 ; 90].

Solução:

A quantidade mínima e máxima da intensidade da luz que sai da fonte externa e atravessa o vidro é dada pelo produto das porcentagens da transparência do vidro e da película. Então temos.

- Quantidade Mínima:
  $70\% \times 50\% = \dfrac{70}{100} \times \dfrac{50}{100} = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{5}{10} = \dfrac{35}{100} = 35\%.$
- Quantidade Máxima:
  $90\% \times 70\% = \dfrac{90}{100} \times \dfrac{70}{100} = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{63}{100} = 63\%.$

Portanto, o intervalo das porcentagens é [35;63]

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 33 *(1ª APLICAÇÃO - ENEM 2016) Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.*

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96.

b) R$ 1,00.

c) R$ 1,40.

d) R$ 1,50.

e) R$ 1,56.

Solução:

O lucro do primeiro dia foi de R$40,00. Como ela quer que o lucro do 2º dia seja 20% maior, então deve ter:

- $20\%\ de\ 40 \longrightarrow \dfrac{20}{100} \times 40 = \dfrac{800}{100} = 8;$
- $40 + 8 = 48$ reais de lucro.

A pessoa comprou 4 caixas de picolé a R$16,00 cada, então gastou $4 \times 16 = 64$ reais.

Com a venda, ela deve arrecadar $64 + 48 = 112$ reais para obter o lucro desejado.

Agora, note que o número de picolés que ela comprou foi de $4 \times 20 = 80$. Assim, o lucro desejado será obtido se vender cada picolé ao preço de $112 \div 80 = 1,4$ reais.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 34 *(2ª APLICAÇÃO - ENEM 2016)O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos e é também um dos campeões mundiais de desperdício. São produzidas por ano, aproximadamente, 150 milhões de toneladas de alimentos e, desse total,* $\frac{2}{3}$ *são produtos de plantio. Em relação ao que se planta, 64% são perdidos ao longo da cadeia produtiva (20% perdidos na colheita, 8% no transporte e armazenamento, 15% na indústria de processamento, 1% no varejo e o restante no processamento culinário e hábitos alimentares).*

Disponível em: www.bancodealimentos.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012.

O desperdício durante o processamento culinário e hábitos alimentares, em milhão de tonelada, é igual a

a) 20.

b) 30.

c) 56.

d) 64.

e) 96.

Solução:

Calculemos primeiro, quantas toneladas é produto de plantio. Para isso, fazemos $\frac{2}{3}$ de 150 milhões de toneladas:

$$\frac{2}{3} \times 150 = \frac{300}{3} = 100 \text{ milhões de toneladas.}$$

É dito que 64% deste, é disperdiçado, sendo:

- 20% na colheta;
- 8% no transporte e armazenamento;
- 15% na indústria de processamento;
- 1% no varejo;

- O restante no processamento culinário e hábitos alimentares.

Calculando qual é a porcentagem desse último item, temos:

- $20\% + 8\% + 15\% + 1\% = 44\%$;
- $64\% - 44\% = 20\%$.

Logo a porcentagem do último item corresponde a 20%.
Calculemos agora, quantas toneladas corresponde a essa porcentagem. Daí:

$$20\% \times 100 = \frac{20}{100} \times 100 = \frac{2000}{100} = 20 \text{ milhões de toneladas.}$$

Portanto, o disperdício durante o processamento culinário e hábitos alimentares é de 20 milhões de toneladas.
Resposta: Letra a.

◇

Exercício 35 *(ENEM 2019) Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1 234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas de transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos 5% do valor do objeto.*

Ela sabe que o custo com transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto.

Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a:

a) 20%.

b) 25%.

c) 40%.

d) 60%.

e) 80%.

Solução:

Calculemos primeiro, a porcentagem que a pessoa irá gastar com transporte. Como é de $\frac{1}{5}$ do valor do objeto, isso corresponde a:

$$\frac{1}{5} \longrightarrow \frac{1 \times 20}{5 \times 20} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

Agora, como a recompensa deve ser máxima, obedecendo ao fato de os gastos com recompensa e transporte não ultrapassar o valor do objeto, então:

$$100\% - 20\% = 80\%.$$

Portanto, o percentual sobre o valor do objeto dado como recompensa deverá ser igual a 80%.

Resposta: Letra e.

$\diamond$

DIVISIBILIDADE

Exercício 36 *(ENEM 2009) Para cada indivíduo, a sua inscrição no Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é composto por um número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, na forma $d_1 d_2$, em que os dígitos d_1 e d_2 são denominados dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, calcula-se o resto r da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11, e se esse resto r for 0 ou 1, d_1 é zero, caso contrário $d_1 = (11 - r)$. O dígito d_2 é calculado pela mesma regra, na qual os números a serem multiplicados pela sequência dada são contados a partir do segundo algarismo, sendo d_1 o último algarismo, isto é, d_2 é zero se o resto s da divisão por 11 das somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário, $d_2 = (11 - s)$.*

Suponha que João tenha perdido seus documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que os nove primeiros algarismos eram 123.456.789. Neste caso, os dígitos verificadores d_1 e d_2 esquecidos são, respectivamente,

a) 0 e *9.*

b) 1 e *4.*

c) 1 e *7.*

d) 9 e *1.*

e) 0 e *1.*

Solução:

Calculando os dígitos da forma como é descrita no problema, temos

- Calculo de d_1:

Efetuando as multiplicações dos 9 primeiros algarismos pela sequência dada, e a soma dos resultados, fica:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & 10 & & 9 & & 8 & & 7 & & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & \\ \times & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & \\ \hline & 10 & + & 18 & + & 24 & + & 28 & + & 30 & + & 30 & + & 28 & + & 24 & + & 18 & = 210 \end{array}$$

Dividindo 210 por 11, temos $210 = 11 \times 19 + 1$. Ou seja, o resto da divisão é 1 e neste caso $d_1 = 0$.

- Cálculo de d_2:

O número do CPF de João com o dígito d_1, ficou $1234567890d_2$. Agora para calcular d_2, devemos multiplicar a sequência 10,9,8,7,6,5,4,3,2 pelo número a partir do segundo dígito, ou seja:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & 10 & & 9 & & 8 & & 7 & & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & \\ \times & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 0 & \\ \hline & 20 & + & 27 & + & 32 & + & 35 & + & 36 & + & 35 & + & 32 & + & 27 & + & 0 & = 244 \end{array}$$

Note que $244 = 11 \times 22 + 2$. Como o resto da divisão é igual a 2, então: $d_2 = 11 - 2 = 9$.

Portanto, os dígitos verificadores d_1 e d_2 são respectivamente, 0 e 9.

Resposta: Letra a.

◇

MÁXIMO DIVISOR COMUM - MDC

Exercício 37 *(ENEM 2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:*

- *cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;*
- *todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;*
- *não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).*

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

a) 2.

b) 4.

c) 9.

d) 40.

e) 80.

Solução:

Para que a quantidade de escolas contempladas seja o mínimo possível, é necessário que cada uma receba o máximo de ingressos. Além disso, como todas devem receber o mesmo número de ingressos sem haver sobras, 320 e 400 devem ser divididos pelo máximo divisor comum.

Pelo processo de fatoração simultânea, tem-se:

$$\begin{array}{ccc|c} 320 & , & 400 & 2 \\ 160 & , & 200 & 2 \\ 80 & , & 100 & 2 \\ 40 & , & 50 & 2 \\ 20 & , & 25 & 5 \\ 4 & , & 5 & \end{array}$$

O $mdc(320, 400) = 2^4 \times 5 = 80$, logo cada escola deve receber 80 ingressos.

Assim, os ingressos vespertinos serão distribuídos entre $400 \div 80 = 5$ escolas e os noturnos entre $320 \div 80 = 4$ escolas.

Portanto, o número mínimo de escolas que podem ser escolhidas é $5 + 4 = 9$.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 38 *(ENEM 2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.*

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.

b) 120 peças.

c) 210 peças.

d) 243 peças.

e) 420 peças.

Solução:

Para que as tábuas sejam cortadas em pedaços de mesmo tamanho sem deixar sobras, 540, 810 e 1080 devem ser divididos pelo mesmo divisor. Como o tamanho dos pedaços devem ser o maior possível, esse divisor deve ser máximo.

Calculando então, o $mdc(540, 810, 1080)$, tem-se:

$$\begin{array}{ccccc|c}
540 & , & 810 & , & 1080 & 2 \\
270 & , & 405 & , & 540 & 3 \\
90 & , & 135 & , & 180 & 3 \\
30 & , & 45 & , & 60 & 3 \\
10 & , & 15 & , & 20 & 5 \\
2 & , & 3 & , & 4 &
\end{array}$$

Daí, $mdc(540, 810, 1080) = 2 \times 3^3 \times 5 = 270$.

Se o carpinteiro dividir as tábuas pelo mdc, terá pedaços de 270 $cm = 2,7\ m$. Porém o arquiteto quer tábuas de tamanho menor que 2 m. Então devemos procurar o maior divisor comum dos 3 números que é imediatamente menor que o mdc e verificar se ele atende a exigência. Para tanto, basta dividir o mdc pelo menor fator primo que aparece na fatoração, ou seja, o maior divisor comum imediatamente anterior ao mdc é:

$$270 \div 2 = \frac{270}{2} = \frac{200 + 70}{2} = \frac{200}{2} + \frac{70}{2} = 100 + 35 = 135.$$

Dividindo por esse número, o carpinteiro terá pedaços de 135 $cm = 1,35\ m$ e atenderá a exigência do arquiteto.

Assim, o número de pedaços produzidos será:

- $40 \times \dfrac{540}{135} = \dfrac{21600}{135} = 160$ pedaços das 40 tábuas de 540 cm;
- $30 \times \dfrac{810}{135} = \dfrac{24300}{135} = 180$ pedaços das 30 tábuas de 810 cm;
- $10 \times \dfrac{1080}{135} = \dfrac{10800}{135} = 80$ pedaços das 10 tábuas de 1080 cm.

Portanto, o carpinteiro produzirá $160 + 180 + 80 = 420$ tábuas.

Resposta: Letra e.

◇

3 RAZÃO E PROPORÇÃO

Frequentemente nos deparamos com situações no nosso cotidiano que nos exige estabelecer igualdades e/ou comparações entre duas medidas. No contexto matemático essas comparações e igualdades são abordadas sob o tema das razões e proporções, que discutiremos neste capítulo.

O texto a seguir basea-se nas referências [3], [14], [16], [17], [19],[22],[23],[24],[25],[26], [29], [33], [36], [45] e [49].

3.1 Razão

A ideia de razão é inserida desde os anos iniciais de ensino, embora nem sempre sejam explicitamente definidas nos livros didáticos.

Ao compararmos duas medidas, dois valores ou até duas grandezas, estamos determinando uma relação entre dois números que os representam. Quando essa relação é determinada por uma divisão, chamamos de razão. Por exemplo, se em um campeonato de futebol o número de gols marcados no total foi de 600 e a equipe campeã marcou 60 gols, dizemos que a razão entre o número de gols marcados pela equipe campeã e o total de gols do campeonato foi de 60 para 600, e escrevemos 60:600.

A razão entre dois números é definida do seguinte modo.

Definição 8 (Razão) *Chama-se razão entre dois números reais a e b, com $b \neq 0$, nesta ordem, a divisão ou quociente entre a e b. O número a é o numerador (antecedente) e o número b, o denominador (consequente).*

Indica-se a razão entre a e b por: $a : b$ ou $\dfrac{a}{b}$ (Lemos: "a está para b").

Assim, quando comparamos dois valores e dizemos que estão na razão $a : b$, isso significa que se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número que representa o primeiro valor e o denominador igual ao número que representa o segundo valor, então a fração seria equivalente a $\frac{a}{b}$. No caso do exemplo acima, podemos dizer que a razão entre o número de gols marcados pelo time campeão e o total de gols do campeonato é $1 : 10$, pois:

$$\frac{\textit{Gols do campeão}}{\textit{Gols no campeonato}} = \frac{60}{600} = \frac{60 \div 60}{600 \div 60} = \frac{1}{10}.$$

É importante destacar que a razão é uma medida relativa e não absoluta, ou seja, se escrevemos que a razão entre o número de gols do campeão e o total de gols no campeonato é de $1 : 10$ sem nenhuma outra informação, isso pode significar também que o campeonato teve 500 gols e o campeão fez 50, ou o campeonato teve 400 gols e o campeão fez 40, etc., pois, $\frac{40}{400}$, $\frac{50}{500}$, $\frac{60}{600}$ e $\frac{1}{10}$, são todas frações equivalentes.

Vejamos alguns exemplos da aplicação do conceito de razão apresentado neste texto.

Exemplo 65 *(UERJ 2020/1)Admita que, em dezembro de 2014, uma filha tinha 20 anos e seu pai, 50. Em dezembro de 2024, a razão entre as idades da filha e do pai será de:*

a) $\frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{4}{3}$.

Solução:

De 2014 a 2024 terão se passado 10 anos, logo a idade da filha será de $20+10 = 30$ anos e a do pai, de $50 + 10 = 60$.

Assim, a razão entre as idades da filha e do pai será:

$$\frac{\textit{Idade da filha}}{\textit{Idade do pai}} = \frac{30}{60} = \frac{30 \div 30}{60 \div 30} = \frac{1}{2}.$$

◇

Exemplo 66 *Um clube de futebol tem 40 jogadores, dos quais apenas 11 são considerados titulares. A razão entre o número de titulares e o número de jogadores é:*

a) $\frac{29}{40}$.

b) $\frac{11}{40}$.

c) $\frac{11}{29}$.

d) $\frac{29}{11}$.

Solução:

Temos que:

$$\frac{\textit{Titulares}}{\textit{Total de jogadores}} = \frac{11}{40}.$$

◇

Exemplo 67 *A razão entre dois números é igual a* $\frac{4}{3}$ *e sua soma é 28. Quais são esses números?*

Solução:

Sejam x e y os dois números procurados. Façamos uma tabela com algumas possibilidades, cuja razão entre eles seja $\frac{4}{3}$. Para tanto, multipliquemos numerador e denominador pelo mesmo número e depois efetuemos a soma.

x	y	$x+y$
4	3	7
8	6	14
12	9	21
16	12	28

Concluímos que os dois números são 16 e 12. ◇

Uma outra maneira de resolver esse problema seria utilizando um sistema de equações com duas variáveis, veja.

Solução:

Sejam x e y os dois números Procurados. Como a soma de x e y é 28, temos $x+y=28$, daí $x=28-y$. Por outro lado, a razão entre x e y é $\frac{4}{3}$. Portanto,

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{28-y}{y}=\frac{4}{3}.$$

Resolvendo esta última equação multiplicando em cruz, temos que:

$$4y=3(28-y)\Rightarrow 4y=84-3y$$
$$\Rightarrow 4y+3y=84\Rightarrow 7y=84\Rightarrow y=12.$$

Daí,

$$x=28-12\Rightarrow x=16.$$

Portanto, os números procurados são 16 e 12. ◇

Exemplo 68 *Uma prova de matemática contém 50 questões. A razão entre o número de acertos e erros de um aluno é de* $7:3$. *Quantas questões esse aluno errou?*

a) 35.

b) 32.

c) 15.

d) 18.

Solução:

Façamos uma tabela para analisar algumas possibilidades cuja razão entre o número de acertos e erros seja 7 : 3. Multiplicando numerador e denominador pelo mesmo número, podemos obter a seguinte situação:

Acertos	Erros	Total
7	3	10
14	6	20
...	...	...
$7x$	$3x$	50

De acordo com o padrão da tabela, quando o total de questões for igual a 50, devemos ter:

$$7x + 3x = 50 \Rightarrow 10x = 50 \Rightarrow x = 5.$$

Portanto, o aluno errou $3 \times 5 = 15$ questões.

◇

RAZÕES ESPECIAIS

Algumas razões são mais frequentes no nosso dia a dia, a estas chamaremos aqui de razões especiais. É o caso das escalas, velocidade média e densidade demográfica. As quais faremos apenas uma breve abordagem.

Definição 9 (Escala) *Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade.*

$$Escala = \frac{Comprimento\ do\ desenho}{Comprimento\ real}.$$

Exemplo 69 *(UNICAMP-SP) Na planta de um edifício em construção, cuja escala é* 1 : 50*, as dimensões de uma sala retangular são de 10cm e 8cm. Calcule a área total da sala projetada. (Obs.: a área de um retângulo é dada pelo produto de suas dimensões).*

a) $20m^2$.

b) $22m^2$.

c) $25m^2$.

d) $36m^2$.

e) $42m^2$.

Solução:

Determinemos primeiro, o comprimento real das dimensões da sala. Sendo, x e y as dimensões correspondentes a $10cm$ e $8cm$ do desenho, respectivamente, temos:

$$Escala = \frac{\textit{Comprimento do desenho}}{\textit{Comprimento real}} \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{10cm}{x} \Rightarrow x = 500\ cm \Rightarrow x = 5\ m;$$

$$Escala = \frac{\textit{Comprimento do desenho}}{\textit{Comprimento real}} \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{8cm}{y} \Rightarrow y = 400\ cm \Rightarrow y = 4\ m.$$

Portanto, a área total da sala será de $5\ m \times 4\ m\ = 20\ m^2$. ◇

Definição 10 (Velocidade média) *Denomina-se velocidade média a razão entre a distância total percorrida em um percurso e o tempo gasto para percorrê-lo.*

$$V_m = \frac{\textit{Distância Percorrida}}{\textit{Tempo gasto}}.$$

Exemplo 70 *(Fuvest) Após chover na cidade de São Paulo, as águas da chuva descerão o rio Tietê até o rio Paraná, percorrendo cerca de 1.000km. Sendo de 4km/h a velocidade média das águas, o percurso mencionado será cumprido pelas águas da chuva em aproximadamente:*

a) 30 dias.

b) 10 dias.

c) 25 dias.

d) 2 dias.

e) 4 dias.

Solução:

Seja H a quantidade de horas que a água levará para fazer todo o percurso. Temos

$$V_m = \frac{\textit{Distância Percorrida}}{\textit{Tempo gasto}} \Rightarrow \frac{4km}{1h} = \frac{1000km}{H} \Rightarrow 4H = 1000 \Rightarrow H = 250 \text{ horas}.$$

Note que, $250 = 10 \times 24 + 10$. Então o percurso será cumprido pelas águas em aproximadamente 10 dias. ◇

Definição 11 (Densidade demográfica) *Denomina-se densidade demográfica a razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada por estes.*

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\textit{Número de habitantes}}{\textit{Área ocupada}}.$$

Exemplo 71 *(FAAP) Admitindo-se que a razão ideal do número de habitantes de uma cidade para cada metro quadrado de área verde fosse de 2 para 5, então a população máxima que deveria ter uma cidade com 400.000 m^2 de área verde seria de:*

a) 16000 habitantes.

b) 80000 habitantes.

c) 160000 habitantes.

d) 200000 habitantes.

e) 140000 habitantes.

Solução:

Se o número ideal de habitantes de uma cidade por metro quadrado é de 2 para 5, isso significa que sua densidade demográfica é de $\frac{2}{5}$. Assim, se x representa a quantidade de habitantes ideal para uma área de 400.000 m^2, então x é igual a:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{400000} \Rightarrow 5x = 800000 \Rightarrow x = 160000 \text{ habitantes.}$$

◇

3.2 Proporção

Vimos na subseção anterior que razão é uma medida relativa entre dois valores, ou seja, pode ocorrer que, ao fazermos comparações de pares de valores diferentes encontrarmos a mesma razão.

Por exemplo, se em uma sala o número de estudantes que gostam de matemática é 6 e o número dos que não gostam é 12, a razão entre o número de estudantes que gostam e os que não gostam da disciplina é 6 : 12. Por outro lado, se em outra sala, o número de estudantes que gostam de matemática é 12 e o número dos que não gostam é 24, a razão entre o número de estudantes que gostam e os que não gostam da disciplina, também é 6 : 12, pois ao fazermos $\frac{12 \div 2}{24 \div 2}$, obtemos $\frac{6}{12}$.

Quando isso ocorre, dizemos que são proporcionais. Assim, definimos.

Definição 12 (Proporção) *Dizemos que duas razões com termos não-nulos, $a : b$ e $c : d$, formam uma proporção quando as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ forem equivalentes, ou seja:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Representamos esta proporção como $a : b = c : d$ e lemos "a está para b assim como c está para d".

Chamaremos ainda, a e d de extremos e b e c de meios.

PROPRIEDADES

As proporções apresentam algumas propriedades muito úteis na resolução de problemas, as quais apresentaremos a seguir.

Propriedade 7 *Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplo 72 .

- $\dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{15} \Rightarrow 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$
- $\dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{21} \Rightarrow 2 \cdot 21 = 7 \cdot 6.$

Propriedade 8 *Em uma proporção, a soma (diferença) dos antecedentes está para a soma (diferença) dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.*

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d};$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}.$

Exemplo 73 .

- $\dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4} \Rightarrow \dfrac{3+6}{2+4} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4};$
- $\dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{15-3}{25-5} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}.$

Propriedade 9 *Em uma proporção, a soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o segundo termo, assim como a soma (diferença) dos últimos termos está para o quarto termo.*

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d};$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}.$

Exemplo 74 .

- $\dfrac{6}{5} = \dfrac{12}{10} \Rightarrow \dfrac{6+5}{5} = \dfrac{12+10}{10}$;
- $\dfrac{5}{2} = \dfrac{10}{4} \Rightarrow \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{10-4}{4}$.

Propriedade 10 *Em uma proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado de seu consequente.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Exemplo 75 .

- $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4^2}{6^2}$.

A seguir apresentamos, algumas aplicações dessas propriedades na resolução de problemas.

Exemplo 76 *(UERE 2012) Segundo uma reportagem, a razão entre o número total de alunos matriculados em um curso e o número de alunos não concluintes desse curso, nessa ordem, é de 9 para 7. A reportagem ainda indica que são 140 os alunos concluintes desse curso. Com base na reportagem, pode-se afirmar, corretamente, que o número total de alunos matriculados nesse curso é:*

a) 180.

b) 260.

c) 490.

d) 520.

e) 630.

Solução:

Seja x o número de alunos não concluintes desse curso, então o total de alunos é $(x + 140)$.

Como a razão entre o total de matriculados e o número de não concluintes é de 9 para 7, teremos:

$$\frac{x+140}{x} = \frac{9}{7} \Rightarrow 9x = 7 \cdot (x + 140) \Rightarrow 9x = 980 + 7x \Rightarrow 2x = 980 \Rightarrow x = 490.$$

Portanto, o total de alunos matriculados no curso é de $490 + 140 = 630$. $\diamond$

Exemplo 77 *A primeira fase da Olimpíada de Matemática contou com a participação de 520 mil alunos. Os organizadores determinaram que a proporção entre aprovados e reprovados fosse de 3 para 7. Quantos estudantes passarão para a próxima fase da Olimpíada?*

Solução:

Sejam x e y o número de estudantes aprovados e reprovados, respectivamente, para a próxima fase da olimpíada. Então

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7}.$$

Temos ainda que $x + y = 520$ mil alunos. Assim podemos escrever,

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{3+7}{7} \Rightarrow \frac{520}{y} = \frac{10}{7} \Rightarrow 10y = 3640 \Rightarrow y = 364 \textit{ mil alunos}.$$

Daí, $x = 520 - 364 = 156$ mil alunos.

Portanto, passarão 156 mil alunos para a segunda fase da olimpíada. ◇

Exemplo 78 *A diferença das idades de Paulo e Marcos é de 15 anos. Determine as idades de Paulo e Marcos sabendo que a razão entre elas é de* $\frac{4}{3}$.

Solução:

Sejam P e M as idades de Paulo e Marcos, respectivamente. Então:

$$\frac{P}{M} = \frac{4}{3}.$$

Sabemos ainda que, $P - M = 15$. Daí,

$$\frac{P}{M} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{P-M}{M} = \frac{4-3}{3} \Rightarrow \frac{15}{M} = \frac{1}{3} \Rightarrow M = 45.$$

Logo, $P = 15 + 45 \Rightarrow P = 60$.

Portanto, as idades de Paulo e Marcos são, respectivamente, 60 e 45 anos. ◇

3.3 Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, contado. Medidas de volume, massa, superfície, comprimento, capacidade, velocidade, tempo, etc., são alguns exemplos de grandezas com as quais nos deparamos no cotidiano.

Frequentemente relacionamos duas ou mais delas nas mais diversas situações. Por exemplo, um aluno ao fazer uma prova, quanto maior for o número de questões que ele acertar, maior será a sua nota. Aqui relacionamos as grandezas questões e notas.

Note que, se o número de questões certas aumentar a nota também aumenta. Mas em algumas situações, quando comparamos duas ou mais grandezas acontece o contrário, ou seja, a medida que uma aumenta a outra diminui. Por exemplo, em uma construção, quanto mais funcionários estiver trabalhando menos tempo levará para a conclusão da obra. Então ao relacionar as grandezas quantidade de funcionários e tempo, percebemos que ao aumentar uma a outra diminui.

No primeiro caso, dizemos que as grandezas podem ser diretamente proporcionais e no segundo, que podem ser inversamente proporcionais. Passaremos então, a defini-las.

Definição 13 (Grandezas diretamente proporcionais) *Sejam $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ duas sequências de números não nulos representando grandezas. Dizemos que as sequências são diretamente proporcionais se existe um número k tal que:*

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Neste caso, k é chamado de constante de proporcionalidade

Observe nos exemplos a seguir, como isso funciona.

Exemplo 79 *Três caminhões transportam 250 m^3 de areia. Quantos caminhões iguais a esse serão necessários para transportar 7000 m^3 de areia?*

a) 30 caminhões.

b) 44 caminhões.

c) 60 caminhões.

d) 74 caminhões.

e) 84 caminhões.

Solução:

Investiguemos a relação entre as grandezas quantidade de caminhões e quantidade de areia transpostada, apartir de uma tabela.

Quantidade de caminhões	Areia tranportada em m^3
3	250
6	500
9	750
12	1000

Note que, ao passo que a quantidade de caminhões aumenta, também aumenta proporcionalmente a quantidade de m^3 de areia transportada. Assim, as grandezas são diretamente proporcionais, logo:

$$\frac{3}{250} = \frac{6}{500} = \frac{9}{750} = \frac{12}{1000}.$$

Daí, se x é a quantidade de caminhões necessário para transportar $7000m^3$ de areia, então:

$$\frac{3}{250} = \frac{x}{7000}.$$

Pela Propriedade 7 de proporção, segue-se que:

$$250x = 3 \cdot 7000 \Rightarrow 250x = 21000 \Rightarrow x = 84.$$

Portanto, serão necessários 84 caminhões para transportar os 7000 m^3 de areia.

◇

Exemplo 80 *Sílvia fará um bolo para a festa da primavera. Para cada pacote de mistura para bolos, Sílvia deve usar 2 ovos.*

Quantos pacotes dessa mistura serão necessários se ela usar 10 ovos?

a) 3 pacotes.

b) 5 pacotes.

c) 6 pacotes.

d) 10 pacotes.

Solução:

Primeiro, perceba que uma suposição implicita ao problema é a de que o número de ovos usados é diretamente proporcional ao número de pacotes da mistura. Assim, sendo x o número de pacotes usados, podemos construir a seguinte tabela relacionando os pacotes necessários com a quantidade de ovos usados:

Pacotes da mistura	Ovos
1	2
x	10

Como já observamos, os números que fazem parte da primeira coluna são diretamente proporcionais aos da segunda. Assim:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}.$$

Pela Propriedade 7 de proporção, temos:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

Portanto, Sílvia irá precisar de 5 pacotes da mistura. ◇

Exemplo 81 *Um professor de matemática desafiou seus alunos a descobrir as idades a, b e c de seus três filhos. Para isso, ele deu duas informações:*

I - A soma da idade dos três é 33 anos;

II - As idades são diretamente proporcionais a 5, 4 e 2, respectivamente.

A idade do filho mais velho é:

a) 11 anos.

b) 12 anos.

c) 14 anos.

d) 15 anos.

e) 16 anos.

Solução:

Como a, b e c são diretamente proporcionais aos números 5, 4 e 2, respectivamente, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = k.$$

Aplicando a Propriedade 8 de proporção, temos:

$$\frac{a+b+c}{5+4+2} = k.$$

Como $a + b + c$ é a soma das idades dos três filhos então $a + b + c = 33$. Daí:

$$\frac{a+b+c}{5+4+2} = k \Rightarrow \frac{33}{11} = k \Rightarrow k = 3.$$

Assim, a idade de cada filho é:

- $\frac{a}{5} = k \Rightarrow \frac{a}{5} = 3 \Rightarrow a = 15$ anos;
- $\frac{b}{4} = k \Rightarrow \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$ anos;
- $\frac{c}{2} = k \Rightarrow \frac{c}{2} = 3 \Rightarrow c = 6$ anos.

Portanto, o filho mais velho do professor tem 15 anos. $\diamond$

Exemplo 82 *Numa loja de automóveis, cada vendedor recebe uma comissão diretamente proporcional ao número de carros que vende. Se, em uma semana, o gerente pagou um total de R\$ 8280,00 de comissões a quatro funcionários, os quais venderam 3, 6, 7 e 9 carros, respectivamente, pergunta-se: quanto ganhou o vendedor que menos carros vendeu?*

Solução:

Sejam x, y, z e t os valores das comissões recebidas pelos quatro vendedores, nesta ordem. Como é dito no problema que estes valores são diretamente proporcionais aos números de carros vendidos, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{t}{9} = k.$$

Aplicando a Propriedade 8 de proporção, temos:

$$\frac{x+y+z+t}{3+6+7+9} = k.$$

Como $x+y+z+t$ é o total de comissões pagas, então $x+y+z+t = 8280$. Daí:

$$\frac{x+y+z+t}{3+6+7+9} = k \Rightarrow \frac{8280}{25} = k \Rightarrow k = 331,2.$$

Assim, o vendedor que menos carro vendeu (3 carros), ganhou:

$$\frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3 \cdot k \Rightarrow x = 3 \cdot 331,2 \Rightarrow x = 993,60 \text{ reais}.$$

◇

Passemos agora para definição de grandezas inversamente proporcionais.

Definição 14 (Grandezas inversamente proporcionais) *Sejam* $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ *e* $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ *duas sequências de números não nulos representando grandezas. Dizemos que as sequências são inversamente proporcionais se existe um número k tal que:*

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k.$$

Neste caso, k é chamado de constante de proporcionalidade.

Aplicando as propriedades de frações, temos que a igualdade,

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k,$$

é equivalente a:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \cdots = x_n \cdot y_n = k.$$

A ideia embutida no conceito de grandezas inversamente proporcionais é a de que, aumentando o valor de x_i diminui proporcionalmente o de y_i e diminuindo o valor de x_i , o de y_i aumenta proporcionalmente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 83 *Um clube decidiu promover uma competição de atletismo entre seus atletas. E, querendo incentivar e motivar os atletas participantes, ofereceu um prêmio de R$ 600,00 a ser dividido entre aqueles que fizerem os 100 metros rasos em menos de 13 segundos. Se 2 atletas conseguirem fazer isso, cada um receberá R$ 300,00. E se 4 atletas conseguirem, quanto receberá cada um ?*

Solução:

Investiguemos o que acontece com as grandezas Número de atletas e valor do prêmio:

Nº de atletas	Prêmio (em reais)
1	600
2	300
3	200
4	150

Note que, ao aumentar o número de atletas o valor do prêmio diminui, além disso:

$$1 \times 600 = 2 \times 300 = 3 \times 200 = 4 \times 150 = 600,$$

ou seja, o produto das grandezas resultam sempre no mesmo valor (600).

Concluimos então, que são inversamente proporcionais e de acordo com a tabela, se 4 atletas fizerem os $100m$ em menos de 13 segundos, cada um ganhará R$ 150,00. ◇

Exemplo 84 *Todos os dias ao entardecer costumo fazer minha caminhada diária de 2 horas, seguindo o mesmo trajeto e mantendo a mesma velocidade média de 2,5 km/h. Outro dia, cronometrei o meu tempo e percebi que estava com uma velocidade média de 5 km/h.*

Nessas condições, em quanto tempo fiz o mesmo trajeto?

a) $\frac{1}{2}$ *hora.*

b) $\frac{3}{4}$ *hora.*

c) 1 *hora.*

d) 4 *horas.*

e) 5 *horas.*

Solução:

Seja h o tempo que gastei para fazer esse percurso na velocidade de $5km/h$. Organizando os dados em uma tabela, tem-se:

Velocidade (km/h)	Tempo (horas)
2,5	2
5	h

Agora, observe que quanto maior é minha velocidade menor é o tempo que gasto para realizar o percurso. Além disso, é razoável supor que a diminuição do tempo é proporcional a velocidade, uma vez que esta é constante e o percurso é o mesmo. Em outras palavras, estamos dizendo que são grandezas inversamente proporcionais e neste caso, temos:

$$2,5 \cdot 2 = 5h \Rightarrow 5h = 5 \Rightarrow h = 1.$$

Portanto, com uma velocidade constante de $5km/h$, faço o percurso em uma hora. $\diamond$

Exemplo 85 *(UPE 2004 - PM/PE - Adaptada) Uma mãe dividiu certa quantia entre seus três filhos, em partes inversamente proporcionais às suas idades. Sabendo-se que os filhos tinham 2, 4 e 8 anos e que o mais novo recebeu R$8000,00, que quantia foi dividida?*

a) R$14000,00.

b) R$16000,00.

c) R$18000,00.

d) R$20000,00.

e) R$24000,00.

Solução:

Seja, x e y as quantias recebidas pelos filhos mais velhos, respectivamente. Como as quantias são inversamente proporcionais as suas idades, então:

$$4x = 8y = 2 \cdot 8000 = 16000.$$

Logo,

$$4x = 16000 \Rightarrow x = 4000;$$

$$8y = 16000 \Rightarrow y = 2000.$$

Somando o valor que cada filho recebeu, concluimos que a quantia dividida foi de, $8000 + 4000 + 2000 = 14000$ reais. $\diamond$

Exemplo 86 *(Banestes-FGV). Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.*

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) 3600.

b) 3960.

c) 4050.

d) 4240.

e) 4800.

Solução:

Sejam x, y e z as quantidades de notas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00, que tem no terminal, respectivamente. Como esses valores são inversamente proporcionais, então:

$$10x = 20y = 50z = k \Rightarrow x = \frac{k}{10}, y = \frac{k}{20} \text{ e } z = \frac{k}{50}.$$

Somando as três últimas equações, resulta:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{k}{10} + \frac{k}{20} + \frac{k}{50} \\ &= \frac{k \cdot 10}{10 \cdot 10} + \frac{k \cdot 5}{20 \cdot 5} + \frac{k \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{10k}{100} + \frac{5k}{100} + \frac{2k}{100} \\ &= \frac{10k + 5k + 2k}{100} \\ &= \frac{17k}{100}. \end{aligned}$$

Como o total de cédulas no terminal é 272, então $x + y + z = 272$, logo a última equação acima, fica:

$$272 = \frac{17k}{100} \Rightarrow 17k = 27200 \Rightarrow k = 1600.$$

Então, o terminal possui:

- $x = \dfrac{1600}{10} = 160$ notas de R$ 10,00;
- $y = \dfrac{1600}{20} = 80$ notas de R$ 20,00;
- $z = \dfrac{1600}{50} = 32$ notas de R$ 50,00.

Assim, o valor armazenado no terminal é de: $10 \cdot 160 + 20 \cdot 80 + 50 \cdot 32 = 4800$ reais. ◇

3.4 Regra de Três Simples e Composta

Com frequência usamos a ideia de proporção para resolver problemas do cotidiano, prática que a humanidade vem utilizando há muito tempo. A utilização de conceitos semelhantes a regra de três são muito antigos. Muitos problemas envolvendo manipulações aritméticas equivalentes ao que hoje conhecemos como "regra de três" aparecem no Papiro Rhind, documento confeccionado no Egito há cerca de 3000 anos. Embora seu uso sistemático tenha ocorrido provavelmente na China antiga.

Apesar de sua criação ser tão remota, as aplicações relativas à regra de três são as mais variadas. O leitor irá perceber que, na verdade trata-se de uma abordagem muito semelhante de problemas que envolvem proporção, conteúdo que discutimos anteriormente.

Uma regra de três pode ser simples ou composta e envolve relações entre grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Passaremos então a detalhar melhor cada uma delas.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

A regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam duas grandezas das quais conhecemos três valores e desejamos determinar um quarto valor. Para resolver problemas dessa natureza podemos seguir os seguintes passos:

1. construir uma tabela, agrupando as grandezas em colunas relacionando cada valor a sua grandeza;

2. identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;

3. se as grandezas forem diretamente proporcionais, escrever uma proporção com as razões observadas e resolver;

4. se as grandezas forem inversamente proporcionais, escrever uma proporção invertendo uma das razões, em seguida resolver a proporção.

Vejamos como aplicar esse processo na resolução de problemas.

Exemplo 87 *Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg. Se uma criança recebeu 25 gotas, então quantos quilos tem a criança?*

a) 8.

b) 9.

c) 10.

d) 11.

e) 12.

Solução:

Seja x o peso da criança que recebeu as 25 gotas. Comecemos organizando as grandezas gotas e pesos em uma tabela agrupando em cada coluna seu valor correspondente.

Gotas	Peso(kg)
5	2
25	x

Note que se aumentarmos a quantidade de gotas o peso também aumenta proporcionalmente, logo trata-se de uma regra de três simples direta. Usaremos duas setas na mesma direção, colocadas ao lado de cada grandeza, para indicar que são diretamente proporcionais.

Gotas($\downarrow$)	Peso(kg)($\downarrow$)
5	2
25	x

Agora escrevemos a proporção e usamos a Propriedade 7 para encontrar o valor de x.

$$\frac{5}{25} = \frac{2}{x} \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \cdot 25 \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = 10.$$

Concluímos que se a criança recebeu 25 gotas, então seu peso é $10kg$. $\diamond$

Exemplo 88 *Uma máquina varredeira limpa uma área de* $5100\,m^2$ *em 3 horas de trabalho. Nas mesmas condições, em quanto tempo limpará uma área de* $11900\,m^2$*?*

a) 4 horas.

b) 5 horas.

c) 7 horas.

d) 9 horas.

e) 10 horas.

Solução:

Seja x o tempo que a máquina leva para varrer a área de $11900m^2$. Comecemos organizando as grandezas área e tempo em uma tabela agrupando em cada coluna seu valor correspondente.

Área(m^2)	Tempo(h)
5100	3
11900	x

Note que se aumentarmos a área o tempo de trabalho da máquina também aumenta proporcionalmente, logo temos uma regra de três simples direta. Usaremos duas setas na mesma direção, colocadas ao lado de cada grandeza, para indicar que são diretamente proporcionais.

Área(m^2)($\downarrow$)	Tempo(h)($\downarrow$)
5100	3
11900	x

Agora escrevemos a proporção e usamos a Propriedade 7 para determinar o valor de x.

$$\frac{5100}{11900} = \frac{3}{x} \Rightarrow 5100 \cdot x = 3 \cdot 11900 \Rightarrow 5100x = 35700 \Rightarrow x = 7.$$

Então a máquina levará 7 dias para varrer a área de $11900m^2$. $\diamond$

Exemplo 89 *Se 4 máquinas fazem um serviço em 6 dias, então 3 dessas máquinas farão o mesmo serviço em*

a) 7 dias.

b) 8 dias.

c) 9 dias.

d) 4,5 dias.

Solução:

Seja x a quantidade de dias que as 3 máquinas levarão para fazer o mesmo serviço. Comecemos organizando as grandezas quantidade de máquinas e quantidade de dias em uma tabela agrupando em cada coluna seu valor correspondente.

Máquinas	Dias
4	6
3	x

Note que ao diminuir a quantidade de máquinas o número de dias aumenta proporcionalmente, logo estamos diante de uma regra de três simples inversa. Para indicar que as duas grandezas são inversamente proporcionais, colocamos duas setas, uma para cima e outra para baixo, ao lado de cada um dos nomes das grandezas.

Máquinas($\downarrow$)	Dias($\uparrow$)
4	6
3	x

Agora escrevemos a proporção invertendo uma das razões e usamos a Propriedade 7 de proporção para determinar o valor de x.

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8.$$

Então 3 máquinas farão o mesmo serviço em 8 dias. ◇

Exemplo 90 *Um barco com 7 pessoas, à deriva no mar, tem suprimento de água suficiente para 28 dias. Após 3 dias, o barco recolhe mais 2 náufragos. Se o consumo diário de água por pessoa se mantiver o mesmo, em quantos dias aproximadamente, acabará a reserva?*

a) 19 dias.

b) 21 dias.

c) 27 dias.

d) 28 dias.

Solução:

Primeiro observe que quando o náufrago foi recolhido o barco ainda tinha reserva suficiente para as 7 pessoas que já estavam a bordo, para $28 - 3 = 25$ dias. Devemos então, calcular quantos dias durará essa reserva para 9 pessoas já que a partir daí os 2 náufragos foram recolhidos ao barco.

Se x a quantidade de dias que a reserva irá durar com as 9 pessoas a bordo. Comecemos organizando as grandezas pessoas e dias em uma tabela agrupando em cada coluna seu valor correspondente.

Pessoas	Dias
7	25
9	x

Note que, aumentando o número de pessoas a bordo e mantendo o mesmo consumo diário de água por pessoas, a reserva acabará em menos dias proporcionalmente, logo estamos diante de uma regra de três simples inversa. Para indicar que as duas grandezas são inversamente proporcionais, colocamos duas setas, uma para cima e outra para baixo, ao lado de cada um dos nomes das grandezas.

Pessoas($\downarrow$)	Dias($\uparrow$)
7	25
9	x

Agora escrevemos a proporção invertendo uma das razões e usamos a Propriedade 7 de proporção para determinar o valor de x.

$$\frac{7}{9} = \frac{x}{25} \Rightarrow 9 \cdot x = 7 \cdot 25 \Rightarrow 9x = 175 \Rightarrow x \cong 19,4.$$

Então a reserva acabará em aproximadamente 19 dias. ◇

Exemplo 91 *(UFMG-adaptada)Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas adquiridas seria suficiente para quantos dias?*

a) 11.

b) 15.

c) 17.

d) 20.

Solução:

Devemos determinar a quantidade de dias que as marmitas compradas pela empresa seriam suficiente para alimentar $750 + 500 = 1250$ empregados. Seja x essa quantidade de dias. Organizando as grandezas empregados e dias em uma tabela agrupando em cada coluna seu valor correspondente, temos.

Empregados	Dias
750	25
1250	x

Note que aumentando o número de empregados diminuirá proporcionalmente, o número de dias em que as marmitas serão suficientes para alimentá-los, logo temos uma regra de três simples inversa. Para indicar que as duas grandezas são inversamente proporcionais, colocamos duas setas, uma para cima e outra para baixo, ao lado de cada um dos nomes das grandezas.

Empregados($\downarrow$)	Dias($\uparrow$)
750	25
1250	x

Agora escrevemos a proporção invertendo uma das razões e usamos a Propriedade 7 de proporção para determinar o valor de x.

$$\frac{750}{1250} = \frac{x}{25} \Rightarrow 1250 \cdot x = 750 \cdot 25 \Rightarrow 1250x = 18750 \Rightarrow x = 15.$$

Então as marmitas compradas seriam suficiente para alimentar os empregados por 15 dias. $\diamond$

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

A regra de três composta é uma generalização da regra de três simples, muito útil quando o problema envolve mais de duas grandezas e apenas uma delas é desconhecida. Para resolver problemas desse tipo siga os seguintes passos:

1. organize os pares de valores de cada grandeza em uma tabela;

2. identifique quais grandezas são diretamente e inversamente proporcionais indicando com uma seta. Essa comparação deve ser feita sempre aos pares onde uma das grandezas deve ser sempre aquela que apresenta o valor desconhecido;

3. inverta as razões que foram marcadas com a seta como inversamente proporcionais;

4. organize uma equação com as razões onde no primeiro termo fique a razão que apresenta o valor desconhecido e no segundo termo fique o produto das demais razões.

Vejamos algumas aplicações desse método.

Exemplo 92 *(UFRGS RS-adaptada) Se foram empregados* $4kg$ *de fios para tecer* $14m$ *de uma maquete de fazenda com* $0,8m$ *de largura, quantos quilogramas serão necessários para produzir* $350m$ *de uma maquete de fazenda com* $1,2m$ *de largura?*

a) 135kg

b) 147kg

c) 160kg

d) 150kg

Solução:

Seja x a quantidade de quilogramas necessários para produzir $350m$ de uma maquete com $1,2m$ de largura. Comecemos organizando as grandezas quantidade de fios, Comprimento da maquete e largura.

Fios(kg)	Comprimento	Largura
4	14	0,8
x	350	1,2

Comparando agora as grandezas, fixaremos a quantidade de fios (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparamos com as outras duas grandezas, assim temos

- quando a quantidade de fios aumenta o comprimento também aumenta proporcionalmente, logo são diretamente proporcionais;
- quando a quantidade de fios aumenta a largura também aumenta proporcionalmente, logo são diretamente proporcionais.

Após essa análise, indicamos as grandezas diretamente proporcionais com setas para baixo, ficando com a seguite tabela

Fios(kg)(↓)	Comprimento(↓)	Largura(↓)
4	14	0,8
x	350	1,2

Agora organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{4}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja,

$$\frac{4}{x} = \frac{14}{350} \cdot \frac{0,8}{1,2}.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\frac{4}{x} = \frac{11,2}{420} \Rightarrow 11,2x = 1800 \Rightarrow x = 150.$$

Então serão necessários $150kg$ de fios para produzir os 350m da maquete de fazenda com $1,2m$ de largura. ◇

Exemplo 93 *Numa indústria, 18 operários, trabalhando 7 horas por dia, fazem determinado serviço em 24 dias. Em quantos dias, 12 operários, trabalhando 9 horas por dia farão o mesmo serviço?*

a) 18.

b) 30.

c) 22.

d) 32

e) 28.

Solução:

Seja x a quantidade de dias necessários para que os 12 operários realizem o trabalho. Comecemos organizando as grandezas operários, horas trabalhadas por dia e dias em uma tabela.

Operários	Horas	Dias
18	7	24
12	9	x

Comparando agora as grandezas, fixaremos a quantidade de dias (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparamos com as outras duas grandezas, assim temos:

- quando a quantidade de horas trabalhadas aumenta a quantidade de dias diminui proporcionalmente, logo são inversamente proporcionais;
- quando o número de funcionários aumenta a quantidade de dias diminui proporcionalmente, logo são inversamente proporcionais;

Após essa análise, indicamos as grandezas inversamente proporcionais com setas em sentido contrário a da seta da grandeza fixada, conforme a tabela a seguir.

Operários($\uparrow$)	Horas($\uparrow$)	Dias($\downarrow$)
18	7	24
12	9	x

Agora invertemos as razões que são inversamente proporcionais e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{24}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja,

$$\frac{24}{x} = \frac{12}{18} \cdot \frac{9}{7}.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\frac{24}{x} = \frac{108}{126} \Rightarrow 108x = 3024 \Rightarrow x = 28.$$

Então são necessários 28 dias para que 12 operários realizem o mesmo serviço, trabalhando 9 horas por dia. $\diamond$

Exemplo 94 *(Unifor CE-adaptada) Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?*

a) 160 minutos.

b) 2h30 minutos.

c) 168 minutos.

d) 2h38 minutos.

Solução:

Seja x a quantidade de minutos necessários para se produzir os 2000 folhetos com 3 máquinas. Comecemos organizando as grandezas máquinas, quantidade de panfletos e minutos em uma tabela.

Máquinas	Panfletos	Minutos
6	1000	40
3	2000	x

Comparando agora as grandezas, fixaremos os minutos (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparamos com as outras duas grandezas.

- quando a quantidade de máquinas diminui a quantidade de minutos necessários para realizar o trabalho aumenta proporcionalmente, logo são inversamente proporcionais;

- quando o número de panfletos aumenta a quantidade de minutos necessários para pruduzi-los também aumenta proporcionalmente, logo são diretamente proporcionais.

Após essa análise, indicamos as grandezas inversamente proporcionais com setas em sentido contrário a da seta da grandeza fixada, de acordo com a seguite tabela:

Máquinas($\uparrow$)	Panfletos($\downarrow$)	Minutos($\downarrow$)
6	1000	40
3	2000	x

Agora invertemos as razões que são inversamente proporcionais e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{40}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja,

$$\frac{40}{x} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1000}{2000}.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\frac{40}{x} = \frac{3000}{12000} \Rightarrow \frac{40}{x} = \frac{3}{12} \Rightarrow 3x = 480 \Rightarrow x = 160.$$

Então são necessários 160 minutos para produzir os 2000 planfletos em 3 máquinas. ◇

Exemplo 95 *(Vunesp) Numa editora, 8 digitadores, trabalhando 6 horas por dia, digitaram $\frac{3}{5}$ de um determinado livro em 15 dias. Então, 2 desses digitadores foram deslocados para um outro serviço, e os restantes passaram a trabalhar apenas 5 horas por dia na digitação desse livro. Mantendo-se a mesma produtividade, para completar a digitação do referido livro, após o deslocamento dos 2 digitadores, a equipe remanescente terá de trabalhar ainda:*

a) 18 dias.

b) 16 dias.

c) 15 dias

d) 14 dias.

e) 12 dias.

Solução:

Primeiro observe que se já foi digitado $\frac{3}{5}$ do livro falta $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Além disso, após a editora deslocar os 2 digitadores para outro serviço, o trabalho deverá ser feito por $8 - 2 = 6$ digitadores, que trabalharão 5 horas por dia.

Dessa forma, queremos descobrir qual o número x de dias que a editora levará para digitar $\frac{2}{5}$ do livro com 6 digitadores trabalhando 5 horas por dia. Comecemos organizando as grandezas digitadores, horas trabalhadas, quantidade de digitação e dias em uma tabela.

Digitadores	Horas	Digitação	Dias
8	6	$\frac{3}{5}$	15
6	5	$\frac{2}{5}$	x

Comparando agora as grandezas, fixaremos a quantidade de dias (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparamos com as outras três grandezas.

- as grandezas números de digitadores e dias são inversamente proporcionais, pois se diminuirmos o número de digitadores a quantidade de dias aumenta proporcionalmente;
- as grandezas horas trabalhadas por dia e dias são inversamente proporcionais, pois se diminuirmos o número de horas por dia a quantidade de dias aumenta proporcionalmente;
- as grandezas digitação e dias são diretamente proporcionais, pois se diminuirmos a quantidade de digitação para fazer a quantidade de dias diminui proporcionalmente.

Após essa análise, indicamos as grandezas inversamente proporcionais com setas em sentido contrário a da seta da grandeza fixada, de acordo com a seguite tabela:

Digitadores($\uparrow$)	Horas($\uparrow$)	Digitação($\downarrow$)	Dias($\downarrow$)
8	6	$\frac{3}{5}$	15
6	5	$\frac{2}{5}$	x

Agora invertemos as razões que são inversamente proporcionais e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\frac{15}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja,

$$\frac{15}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\frac{15}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{450}{480} \Rightarrow 450x = 7200 \Rightarrow x = 16.$$

Então 6 digitadores concluíram o livro em 16 dias se trabalharem 5 horas por dia. ◇

Exemplo 96 *(UFPE) Dez guindastes carregam 180 caixas em um navio em 12 dias com 5 horas de trabalho diárias. Quantas caixas serão carregadas em 15 dias, por 12 guindastes, trabalhando 4 horas por dia?*

a) 216.

b) 214.

c) 212.

d) 210.

e) 208.

Solução:

Seja x a quantidade de caixas que serão carregadas em 15 dias, por 12 guindastes, trabalhando 4 horas por dia . Comecemos organizando as grandezas guindastes, caixas, dias e horas em uma tabela.

Guindastes	Caixas	Dias	Horas
10	180	12	5
12	x	15	4

Comparando agora as grandezas, fixaremos a quantidade de caixas (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparamos com as outras grandezas.

- o número de guindastes é diretamente proporcional ao número de caixas, pois se aumentarmos o número de caixas precisamos de mais guindastes;
- o número de dias é diretamente proporcional ao número de caixas, pois se aumentamos o número de caixas será necessário um número maior de dias;
- o número de horas é diretamente proporcional ao número de caixas, pois se aumentarmos o número de caixas são necessáriass mais horas.

Após essa análise, indicamos as grandezas diretamente proporcionais com setas em mesmo sentido a da seta da grandeza fixada, ficando com a seguite tabela

Guindastes($\downarrow$)	Caixas($\downarrow$)	Dias($\downarrow$)	Horas($\downarrow$)
10	180	12	5
12	x	15	4

Agora organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{180}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja,

$$\frac{180}{x} = \frac{10}{12} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{4}.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\frac{180}{x} = \frac{10}{12} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{600}{720} \Rightarrow 600x = 180 \cdot 720600x = 129600 \Rightarrow x = 216.$$

Então 12 guindastes trabalhando 4 horas por dia durante 15 dias carregarão 216 caixas. $\diamond$

3.5 Caiu no ENEM

Neste capítulo temos abordado um tema muito recorrente nas provas do ENEM, que é exigido pela Competência 4, habilidades 15, 16, 17 e 18 da matriz de referência do ENEM e nesta seção, assim como no capítulo 2, apresentaremos alguns questões que abordaram essa competência em provas do ENEM ao longo dos últimos 10 anos (2009 à 2019).

RAZÃO E PROPORÇÃO

Exercício 39 *(ENEM 2018) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala* $1 : x$. *Os valores possíveis para* x *são, apenas,*

a) $x > 1500$.

b) $x < 3000$.

c) $1500 < x < 2250$.

d) $1500 < x < 3000$.

e) $2250 < x < 3000$.

Solução:

Sabemos que escala é a razão entre o tamanho do desenho e o tamanho real, então calculemos a escala ideal para o guindaste e para a esteira que deve ser usada considerando as restrições dadas.

- Para a esteira devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{1500} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1500} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\frac{5}{10}}{1500} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1500} \\ &\Rightarrow \quad \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1500} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1500} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{3000} < \frac{1}{x} < \frac{1}{1500} \\ &\Rightarrow \quad 3000 > x > 1500. \end{aligned}$$

- Para o guindaste devemos ter:
$\frac{1}{x} > \frac{4}{90000} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{22500} \Rightarrow x < 22500.$

Então para atender a todas as exigências os possíveis valores de x devem ser $1500 < x < 2250$.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 40 *(ENEM 2018) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.*

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

a) 12.

b) 18.

c) 30.

d) 40.

e) 50.

Tabela 3: Balanço nacional de vacinação

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em: http://portalsaude.saude.gov.br. Acesso em: 16 ago. 2012.

Solução:

A porcentagem pedida é dada pela razão entre o número total de pessoas já vacinadas e o número total da população de risco. Calculando essa razão, teremos:

$$\frac{0,9+1+1,5+0,4+8,2}{4,5+2+2,5+0,5+20,5} = \frac{12}{30} = 0,4 = 40\%.$$

Portanto, 40% das pessoas já foram vacinadas.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 41 *(ENEM 2018) Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual a quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1 500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R$ 180,00 cada 1 000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias.*

Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente.

O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão

a) $\dfrac{50X}{4} + \dfrac{50Y}{9}$.

b) $\dfrac{50X}{9} + \dfrac{50Y}{4}$.

c) $\dfrac{4X}{50} + \dfrac{4Y}{50}$.

d) $\dfrac{50}{4X} + \dfrac{50}{9Y}$.

e) $\dfrac{50}{9X} + \dfrac{50Y}{4Y}$.

Solução:

Calculemos a razão entre os números de pessoas atingidas por cada anúncio do rádio e o preço de cada anúncio e a razão entre o número de pessoas atingidas pela panfletagem e o gasto destes.

- Para o anúncio no rádio, temos: $\dfrac{1500\,pessoas}{120\,reais} = \dfrac{50}{4}\,pessoa/real$;
- Para o anúncio com panfletos, temos: $\dfrac{1000\,pessoas}{180\,reais} = \dfrac{50}{9}\,pessoa/real.$

Assim, o número de pessoas alcançadas para o investimento de X reais no rádio e Y reais em panfletos é $\dfrac{50X}{4} + \dfrac{50Y}{9}$.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 42 *(ENEM 2018) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna.*

Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

a) *10.*

b) *15.*

c) *35.*

d) 40.

e) 45.

Solução:

Seja x a quantidade de perguntas fáceis que o gerente deve acrescentar à urna. Inicialmente há 25% *de* 20 $\Rightarrow 0,25 \cdot 20 = 5$ perguntas de nível fácil na urna. Como queremos que es perguntas fáceis representem 75% do total de perguntas então devemos ter $(x+5)$ perguntas fáceis de um total de $(20+x)$ correspondendo a 75% do total. Ou seja,

$$\frac{5+x}{20+x} = \frac{75}{100}.$$

Pela propriedade 7 de proporção, segue-se

$$100(5+x) = 75(20+x) \Rightarrow 100x - 75x = 1500 - 500 \Rightarrow x = 40.$$

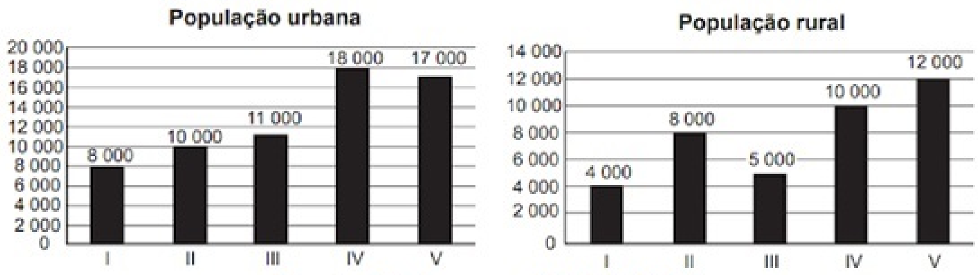
Portanto, devem ser acrescentadas 40 questões fáceis à urna.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 43 *(ENEM 2019) A taxa de urbanização de um município é dada pela razão entre a população urbana e a população total do município (isto é, a soma das populações rural e urbana). Os gráficos apresentam, respectivamente, a população urbana e a população rural de cinco municípios (I, II, III, IV, V) de uma mesma região estadual. Em reunião entre o governo do estado e os prefeitos desses municípios, ficou acordado que o município com maior taxa de urbanização receberá um investimento extra em infraestrutura.*

Figura 27: Taxa de urbanização



Fonte: Caderno azul ENEM, 2019

Segundo o acordo, qual município receberá o investimento extra?

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

Solução:

De acordo com as informações fornecidas pelo problema temos:

$$\text{Taxa de Urbanização} = \frac{\text{População urbana}}{\text{População urbana} + \text{População rural}}.$$

Calculando a taxa de urbanização de cada município temos,

- Município I
$$\frac{8000}{8000+4000} = \frac{8000}{12000} = \frac{8000 \div 4000}{12000 \div 4000} = \frac{2}{3};$$
- Município II
$$\frac{10000}{10000+8000} = \frac{10000}{18000} = \frac{10000 \div 2000}{18000 \div 2000} = \frac{5}{9};$$
- Município III
$$\frac{11000}{11000+5000} = \frac{11000}{16000} = \frac{11000 \div 1000}{16000 \div 1000} = \frac{11}{16};$$
- Município IV
$$\frac{18000}{18000+10000} = \frac{18000}{28000} = \frac{18000 \div 2000}{28000 \div 2000} = \frac{9}{14};$$
- Município V
$$\frac{17000}{17000+12000} = \frac{17000}{29000} = \frac{17000 \div 1000}{29000 \div 1000} = \frac{17}{29}.$$

Comparando as razões obtidas temos

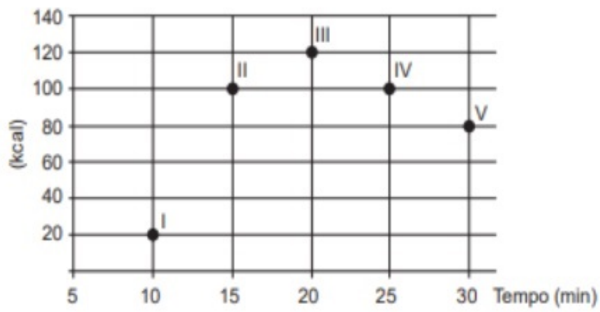
- $\dfrac{2\cdot 3}{3\cdot 3} = \dfrac{6}{9}$, então $\dfrac{5}{9} < \dfrac{2}{3}$;
- $\dfrac{2\cdot 16}{3\cdot 16} = \dfrac{32}{48}$ e $\dfrac{11\cdot 3}{16\cdot 3} = \dfrac{33}{48}$, daí $\dfrac{5}{9} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{11}{16}$;
- $\dfrac{2\cdot 14}{3\cdot 14} = \dfrac{28}{42}$ e $\dfrac{9\cdot 3}{14\cdot 3} = \dfrac{27}{42}$, então $\dfrac{5}{9} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{9}{14}$;
- $\dfrac{9\cdot 8}{14\cdot 8} = \dfrac{72}{112}$ e $\dfrac{11\cdot 7}{16\cdot 7} = \dfrac{77}{112}$, então $\dfrac{5}{9} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{9}{14} < \dfrac{11}{16}$;
- $\dfrac{5\cdot 29}{9\cdot 29} = \dfrac{145}{261}$ e $\dfrac{17\cdot 9}{29\cdot 9} = \dfrac{153}{261}$, então $\dfrac{5}{9} < \dfrac{17}{29}$;
- $\dfrac{2\cdot 29}{3\cdot 29} = \dfrac{58}{87}$ e $\dfrac{17\cdot 3}{29\cdot 3} = \dfrac{51}{87}$, então $\dfrac{5}{9} < \dfrac{17}{29} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{9}{14} < \dfrac{11}{16}$.

Assim, o município III é o que apresenta maior taxa de urbanização e portanto, é quem receberá o investimento.
Resposta: Letra c.

◇

Exercício 44 *(ENEM 2019) Os exercícios físicos são recomendados para o bom funcionamento do organismo, pois aceleram o metabolismo e, em consequência, elevam o consumo de calorias. No gráfico, estão registrados os valores calóricos, em kcal, gastos em cinco diferentes atividades físicas, em função do tempo dedicado às atividades, contado em minuto.*

Figura 28: Consumo de calorias



Fonte: Caderno rosa ENEM, 2019

Qual dessas atividades físicas proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto?

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

Solução:

Calculando a razão entre o consumo de calorias e o tempo em minutos temos,

- atividade I: $\dfrac{Kcal}{min} = \dfrac{20}{10} = 2Kcal/min;$
- atividade II: $\dfrac{Kcal}{min} = \dfrac{100}{15} \cong 6,7Kcal/min;$
- atividade III: $\dfrac{Kcal}{min} = \dfrac{120}{20} = 6Kcal/min;$

- atividade IV: $\dfrac{Kcal}{min} = \dfrac{100}{25} = 4Kcal/min$;
- atividade V: $\dfrac{Kcal}{min} = \dfrac{80}{30} \cong 2,7Kcal/min.$

Assim, a atividade II é a que proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto.

Resposta: Letra b.

◇

GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Exercício 45 *(ENEM 2012) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção* $6 : 5 : 4$, *respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção* $4 : 4 : 2$, *respectivamente.*

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350.

b) 300, 300, 150.

c) 300, 250, 200.

d) 200, 200, 100.

e) 100, 100, 50.

Solução:

Uma condição implícita ao problema é que a divisão nas duas partes do trajeto foi diretamente proporcional ao cansaço de cada um. Assim, se x é o total de laranjas e J, C e P a quantidade que José, Carlos e Pedro levaram, respectivamente na primeira parte do trajeto, então $J + C + P = x$.

Além disso, na primeira parte do trajeto, como essas quantidades foram diretamente proporcionais a $6, 5$ e 4 temos

$$\frac{J}{6} = \frac{C}{5} = \frac{P}{4} = k. \tag{3.17}$$

Daí, $J = 6k$, $C = 5k$ e $P = 4k$.

Aplicando a propriedade 8 de proporção na igualdade 3.17, segue-se

$$\frac{J}{6} = \frac{C}{5} = \frac{P}{4} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{J + C + P}{6 + 5 + 4} = k \tag{3.18}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{15} = k \tag{3.19}$$
$$\Rightarrow \quad x = 15k \tag{3.20}$$

Agora, se J_1, C_1 e P_1 são a quantidade que José, Carlos e Pedro levaram, respectivamente, na segunda parte do trajeto, então $J_1 + C_1 + P_1 = x$.

Como na segunda parte do trajeto essas quantidades foram diretamente proporcionais a $4, 4\ e\ 2$ temos

$$\frac{J_1}{4} = \frac{C_1}{4} = \frac{P_1}{2} = k_1. \tag{3.21}$$

Daí, $J_1 = 4k_1$, $C_1 = 4k_1$ e $P_1 = 2k_1$.

Aplicando a propriedade 8 de proporção na igualdade 3.21, segue-se

$$\frac{J_1}{4} = \frac{C_1}{4} = \frac{P_1}{2} = k_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{J_1 + C_1 + P_1}{4 + 4 + 2} = k_1 \tag{3.22}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{10} = k_1 \tag{3.23}$$
$$\Rightarrow \quad x = 10k_1. \tag{3.24}$$

Das igualdades 3.20 e 3.24 segue-se que:

$$15k = 10k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{3k}{2}. \tag{3.25}$$

Comparando agora as quantidades que cada um levou no primeiro e segundo trajeto, temos

José

- 1ª parte do trajeto: $J = 6k$
- 2ª parte do trajeto: $J_1 = 4k_1 \Rightarrow J_1 = 4 \cdot \dfrac{3k}{2} \Rightarrow J_1 = 6k.$

Carlos

- 1ª parte do trajeto: $C = 5k$
- 2ª parte do trajeto: $C_1 = 4k_1 \Rightarrow C_1 = 4 \cdot \dfrac{3k}{2} \Rightarrow C_1 = 6k$.

Paulo

- 1ª parte do trajeto: $P = 4k$
- 2ª parte do trajeto: $P_1 = 2k_1 \Rightarrow P_1 = 2 \cdot \dfrac{3k}{2} \Rightarrow P_1 = 2k$.

Note que na segunda parte do trajeto a quantidade de laranjas que José levou permaneceu a mesma da primeira parte do trajeto, mas a de Carlos aumentou, enquanto a de Paulo diminuiu. Concluimos então, que a pessoa que levou 50 laranjas a mais na segunda parte do trajeto foi Carlos.

Assim, subtraíndo a quantidade de laranjas que Carlos levou na primeira parte do trajeto com a quantidade levada na segunda parte o resultado deve ser 50, ou seja, $6k - 5k = 50$ daí $k = 50$.

Substituindo o valor de k na igualdade 3.25, temos

$$k_1 = \frac{3 \cdot 50}{2} \Rightarrow k_1 = 75.$$

Desta forma, as quantidades de laranja levadas por José, Carlos e Paulo, respectivamente, na segunda parte do trajeto, foram $J_1 = 4 \cdot 75 = 300$, $C_1 = 4 \cdot 75 = 300$ e $P_1 = 2 \cdot 75 = 150$.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 46 *(ENEM 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.*

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) *1,75.*

b) *2,00.*

c) *2,33.*

d) *4,00.*

e) *8,00.*

Solução:

Sejam c, a e b as quantidades em metros cúbicos de cimento, areia e brita, respectivamente, na constituição do concreto. Como esses componentes são diretamente proporcionais a 1, 4 e 2, então:

$$\frac{c}{1} = \frac{a}{4} = \frac{b}{2} = k. \tag{3.26}$$

Daí, $c = k$, $a = 4k$ e $b = 2k$.

Aplicando a propriedade 8 de proporção na igualdade 3.26 segue-se:

$$\frac{c}{1} = \frac{a}{4} = \frac{b}{2} = k. \quad \Rightarrow \quad \frac{c+a+b}{1+4+2} = k \tag{3.27}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c+a+b}{7} = k. \tag{3.28}$$

Como é dito que a contrutora encomendou $14m^3$ de concreto, então $c+a+b = 14$. Substituíndo, esse valor na igualdade 3.28, temos:

$$\frac{c+a+b}{7} = k \Rightarrow \frac{14}{7} = k \Rightarrow k = 2.$$

Logo a quantidade de cimento trazidos pela betoneira foi de $c = k \Rightarrow c = 2m^3$.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 47 *(ENEM 2019) Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1 000 000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.*

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800 000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1 800 000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

a) 29,60 e 11,11.

b) 28,70 e 13,89.

c) 25,00 e 25,00.

d) 18,52 e 11,11.

e) 12,96 e 13,89.

Solução:

Sejam, a, b e c os valores investidos pelos três primeiros sócios e d o valor investido pelo quarto sócio. Então temos:

- $a = b = c = \dfrac{1000000}{3} + \dfrac{800000}{4} = \dfrac{6400000}{12} \cong 533333,33;$
- $d = \dfrac{800000}{4} = 200000.$

Como a fábrica foi vendida por R$ 1800000,00 e o que cada sócio recebeu foi proporcional a sua aplicação, temos

- os três primeiros sócios receberam $\dfrac{533333,33}{1800000} \cong 0,296 = 29,6\%;$
- o quarto sócio recebeu $\dfrac{200000}{1800000} \cong 0,1111 = 11,11\%;$

Portanto, a porcentagem recebida pelos três primeiros sócios foi de aproximadamente 29,6% e pelo quarto sócio foi de aproximadamente 11,11%.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 48 *(ENEM 2019) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:*

- *Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;*
- *O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$31000,00;*
- *O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.*

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a) R$ 3.100,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 6.200,00.

d) R$ 15.000,00.

e) R$ 15.500,00.

Solução:

Sejam x, y e z os valores que as empresas que venceram cadastrando as máquinas com 2, 3 e 5 anos respectivamente, receberão. Como o valor recebido é inversamente proporcional as idades de uso das máquinas então teremos

$$2x = 3y = 5z = k \Rightarrow x = \frac{k}{2},\ y = \frac{k}{3} \text{ e } z = \frac{k}{5}.$$

Somando as três últimas igualdades, segue-se

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} && (3.29)\\ &= \frac{k \cdot 15}{2 \cdot 15} + \frac{k \cdot 10}{3 \cdot 10} + \frac{k \cdot 6}{5 \cdot 6} && (3.30)\\ &= \frac{15k}{30} + \frac{10k}{30} + \frac{6k}{30} && (3.31)\\ &= \frac{31k}{30}. && (3.32) \end{aligned}$$

Como o total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31 000,00, então $x + y + z = 31000$. Logo da igualdade 3.32 segue-se que

$$\frac{31k}{30} = 31000 \Rightarrow 31k = 930000 \Rightarrow k = 30000.$$

Assim, os valores que as empresas irão receber será

- $\frac{30000}{2} = 15000;$
- $\frac{30000}{3} = 10000;$
- $\frac{30000}{5} = 6000.$

Portanto, a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso receberá R$ 6000,00.

Resposta: Letra b.

◇

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Exercício 49 *(ENEM 2009) Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo diesel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1° de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.*

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br.
Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final dísel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros.

b) 37,00 milhões de litros.

c) 231,25 milhões de litros.

d) 693,75 milhões de litros.

e) 888,00 milhões de litros.

Solução:

Seja x o consumo de biodiesel com a adição de 3%. Perceba que ao aumentar a quantidade de biodiesel na mistura o consumo também aumenta, logo podemos calcular esse valor, fazendo uma regra de três simples diretamente proporcional.

Comecemos organizando as grandezas Porcentagem e consumo em uma tabela, indicando com uma seta no mesmo sentido as grandezas diretamente proporcionais.

Porcentagem(%)(↓)	Consumo (milhões de litros)(↓)
4	925
3	x

Agora escrevendo uma equação com a proporção e usando Propriedade 7 para resolvê-la, temos.

$$\frac{4}{3} = \frac{925}{x} \Rightarrow 4x = 3 \cdot 925 \Rightarrow 4x = 2775 \Rightarrow x = 693,75.$$

Então o consumo de biodiesel com a adição de 3% é de 693,75 milhões de litros.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 50 *(ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.*

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

a) 12 kg.

b) 16 kg.

c) 24 kg.

d) 36 kg.

e) 75 kg.

Solução:

Seja x a massa corporal do filho que tomou as 30 gotas. Note que ao aumentar a quantidade de gotas, a massa aumenta proporcionalmente também, logo gotas e massas são grandezas diretamente proporcionais, neste caso. Assim, organizando-as em uma tabela, temos:

Gotas	Massa (kg)
5	2
30	x

Agora escrevendo uma equação com a proporção e usando a Propriedade 7 para resolvê-la, temos.

$$\frac{5}{30} = \frac{2}{x} \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12.$$

Portanto, a massa corporal do filho é de 12 Kg.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 51 *(ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionada para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.*

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos.

b) 360 tijolos.

c) 400 tijolos.

d) 480 tijolos.

e) 600 tijolos.

Solução:

O caminhão já está carregado com 900 telhas, então pode receber no máximo mais $1500 - 900 = 600$ telhas para não exceder sua carga.

Note que a razão entre o número de telhas e o número de tijolos que o caminhão pode carregar é de $\dfrac{1500}{1200} = \dfrac{5}{4}$. Isso significa que a cada 5 telhas correspondem 4 tijolos.

Seja x o número de tijolos que ainda podem ser colocados no caminhão que já contém as 900 telhas. Perceba que as grandezas telhas e tijolos são diretamente proporcionais, pois a medida que uma grandeza aumenta a outra também aumenta proporcionalmente. Assim, podemos organizar essas grandezas na seguinte tabela, indicando que são proporcionais.

Telhas(↓)	Tijolos(↓)
5	4
600	x

Escrevendo a proporção e usando a propriedade 7 de proporção para resolvê-la, teremos:

$$\frac{5}{4} = \frac{600}{x} \Rightarrow 5x = 2400 \Rightarrow x = 480.$$

Portanto é possível colocar mais 480 tijolos no caminhão que já carrega 900 telhas, sem exceder sua carga máxima.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 52 *(ENEM 2017) A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do campus de uma universidade brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia. O projeto inclui 100 m^2 de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente 300 m^2 de painéis, sendo 100 m^2 para gerar energia elétrica utilizada no campus, e 200 m^2 para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.*

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

Disponível em: http:agenciabrasil.ebc.com.br.
Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de

a) 231.

b) 431.

c) 472.

d) 523.

e) 672.

Solução:

A universidade já disponha de 200 m^2 de painéis solares gerando energia elétrica (100 m^2 sobre os estacionamentos e 100 m^2 sobre o hospital) e 200 m^2 de painéis solares gerando energia térmica. Como cada metro quadrado gerando energia solar produz uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado gerando energia térmica produz economia de 0,7 kWh por dia, então a economia diária da universidade com esses painéis é de

$$200 \cdot (1kWh) + 200 \cdot (0,7kWh) = 200 + 140 = 340\, kWh.$$

Para que a economia em energia seja dobrada na segunda fase, essa deverá ser de $2 \cdot 340 = 680 \;\; kWh$ por dia. Mas parte dessa economia será responsabilidade da energia elétrica. Como os painéis que geram energia solar terão sua área aumentada em 75% então a nova área deve corresponder a $200 + 200 \cdot 0,75 = 350\, m^2$ o que vai gerar economia de $350 \cdot (1kWh) = 350 \;\; kWh/dia$.

Assim, a economia que a energia térmica deve gerar é igual a $680 - 350 = 330 \;\; kWh/dia$. Então se x corresponde a área ocupada pelos painéis solares gerando energia térmica, teremos a seguinte proporção

$$\frac{0,7\, kWh}{330\, kWh} = \frac{1m^2}{x} \Rightarrow 0,7x = 330 \Rightarrow x \cong 472.$$

Portanto a área total dos painéis que geram energia térmica deverá ser aproximadamente 472 m^2.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 53 *(ENEM 2019) O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de 0,3* m^3*. Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade.*

Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é

a) 9.

b) 12.

c) 89.

d) 112.

e) 134.

Solução:

Comecemos calculando quantos litros corresponde a $0,3\,m^3$. Sabemos que $1\,m^3$ corresponde a $1000l$, assim se x é a quantidade de litros que corresponde a $0,3m^3$, podemos construir a seguinte tabela com as grandezas m^3 e litros

$m^3(\downarrow)$	Litros($\downarrow$)
1	1000
0,3	x

Note que aumentando os m^3 os litros também aumentam proporcionalmente, então as grandezas são diretamente proporcionais. Daí montando a proporção e usando a Propriedade 7, temos:

$$\frac{1}{1000} = \frac{0,3}{x} \Rightarrow x = 300 \textit{ litros}.$$

Como a banheira deve ser preenchida com até 80% de sua capacidade, devemos calcular quantos litros isso corresponde. Temos então,

$$80\% \;\; de \;\; 300\,l \Rightarrow 0,8 \cdot 300 = 240 \;\; litros.$$

Agora devemos calcular quantas embalagens são necessárias para essa quantidade de litros. Seja y essa quantidade. Antes, observe que as grandezas embalagens e litros são diretamente proporcionais, pois se a quantidade de litros aumenta a quantidade de embalagens também aumenta proporcionalmente. Construindo uma tabela com essas grandezas, temos

Embalagens(↓)	Litros(↓)
1	2,7
y	240

Escrevendo a proporção e usando a propriedade 7, teremos

$$\frac{1}{2,7} = \frac{y}{240} \Rightarrow 2,7y = 240 \Rightarrow y \cong 88,9.$$

Então serão necessárias no mínimo 89 embalagens para o banho de imersão dessa pessoa.
Resposta: Letra c.

◇

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Exercício 54 *(ENEM 2009) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.*

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria

a) manter sua proposta.

b) oferecer 4 máquinas a mais.

c) oferecer 6 trabalhadores a mais.

d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

Solução:

Como o fazendeiro quer que a colheta de 180 hectares seja realizada em 6 dias, vamos começar analisando como a cooperativa pode fazer isso mantendo o mesmo número de trabalhadores e a mesma quantidade de máquinas. Para tanto considere que x será a quantidade de horas por dia trabalhadas por cada trabalhador e organizemos as grandezas horas por dia, hectares e dias em uma tabela.

Horas/dia	Hectares	Dias
6	20	1
x	180	6

Fixemos agora a grandeza horas por dia (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparemos com as outras duas grandezas.

- quando a quantidade de horas trabalhadas aumenta a quantidade de hectares colhidos também aumenta proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais;
- quando a quantidade de horas trabalhadas aumenta a quantidade de dias diminui proporcionalmente, logo são grandezas inversamente proporcionais.

Após essa análise, indicamos as grandezas diretamente proporcionais com setas com mesmo sentido e as inversamente proporcionais com setas em sentido oposto. Assim a tabela anterior fica do seguinte modo:

Horas/dia($\downarrow$)	Hectares($\downarrow$)	Dias($\uparrow$)
6	20	1
x	180	6

Agora invertemos a razão que é inversamente proporcional e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\frac{6}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja, escrevemos

$$\frac{6}{x} = \frac{20}{180} \cdot \frac{6}{1}.$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{120}{180} \Rightarrow 120x = 1080 \Rightarrow x = 9.$$

Assim, se a cooperativa optar por manter a mesma quantidade de trabalhadores e a mesma quantidade de máquinas, deverá aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

Devemos entretanto, verificar se essa proposta atende ao orçamento proposto pelo fazendeiro. Note que o gasto com trabalhadores e máquinas se mantém fixo por dia, assim em 6 dias de trabalho serão gastos $6 \cdot (12 \cdot 10 + 4 \cdot 1000) = 24720$ reais, o que atende ao orçamento.

Concluímos, portanto, que para atender a exigência do fazendeiro, a cooperativa deve aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

Resposta: Letra d.

◇

Exercício 55 *(ENEM 2009)Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.*

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

a) 920 kg.

b) 800 kg.

c) 720 kg.

d) 600 kg.

e) 570 kg.

Solução:

Nos primeiros 10 dias tivemos 20 alunos trabalhando 3 horas por dia e arrecadando 12 kg de alimentos por dia, o que siginifica que até o décimo dia da campanha foram arrecadas $12 \cdot 10 = 120$ kg de alimentos. Após esse período mais 30 alunos juntaram-se ao grupo e começaram a trabalhar 4 horas por dia, então nessa segunda etapa, tivemos $20 + 30 = 50$ alunos trabalhando 4 horas por dia durante $30 - 10 = 20$ dias. Assim se x é a quantidade de alimentos arrecadados nessa segunda etapa, podemos organizar as grandezas, alunos, dias, horas por dia e quilogramas na seguinte tabela.

Alunos	Dias	Horas/dia	Kg
20	10	3	120
50	20	4	x

Fixemos agora a grandeza Kg (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparemos com as outras grandezas.

- quando a quantidade de alunos aumenta a quantidade de Kg arrecadados também aumenta proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais;

- quando a quantidade de dias aumenta a quantidade de Kg arrecadados também aumenta proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais;
- quando a quantidade de horas trabalhadas aumenta a quantidade de Kg arrecadados também aumenta proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais.

Após essa análise, indicamos as grandezas diretamente proporcionais com setas com mesmo sentido. Assim a tabela anterior fica do seguinte modo:

Alunos($\downarrow$)	Dias($\downarrow$)	Horas/Dia($\downarrow$)	Kg($\downarrow$)
20	10	3	120
50	20	4	x

Agora organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{120}{x}$ e no segundo o produto das outras razões, ou seja, escrevemos

$$\frac{120}{x} = \frac{20}{50} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{3}{4}.$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{120}{x} = \frac{600}{4000} \Rightarrow \frac{120}{x} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3x = 2400 \Rightarrow x = 800.$$

Assim, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado foi de $120 + 800 = 920Kg$.

Resposta: Letra a.

$\diamond$

Exercício 56 *(ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.*

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2.

b) 4.

c) 5.

d) 8.

e) 9.

Solução:

Seja x a quantidade de ralos que devem ser utilizados no novo reservatótio. Organizando em uma tabela as grandezas Capacidade (m^3), quantidade de ralos e horas, temos:

Capacidade(m^3)	Ralos	Horas
900	6	6
500	x	4

Fixando a grandeza quantidade de ralos (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparando-a com as outras temos:

- quando a capacidade do tanque diminui a quantidade de ralos necessários para o escoamento também diminui proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais;
- quando a quantidade de horas diminui a quantidade de ralos aumenta proporcionalmente, logo são grandezas inversamente proporcionais.

Indicando as grandezas diretamente proporcionais com setas em mesmo sentido e as inversamente proporcionais com setas em sentidos opostos, ficamos com a seguinte tabela:

Capacidade(m^3)($\downarrow$)	Ralos($\downarrow$)	Horas($\uparrow$)
900	6	6
500	x	4

Agora invertemos a razão que é inversamente proporcional e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\frac{6}{x}$ e no segundo fique o produto das demais, ou seja, escrevemos

$$\frac{6}{x} = \frac{900}{500} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{18}{15} \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5.$$

Portanto, a quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a 5.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 57 *(ENEM 2016 2ª aplicação) Um clube tem um campo de futebol com área total de 8 000 m^2, correspondente ao gramado. Usualmente, a poda da grama desse campo é feita por duas máquinas do clube próprias para o serviço. Trabalhando no mesmo ritmo, as duas máquinas podam juntas 200 m^2 por hora. Por motivo de urgência na realização de uma partida de futebol, o administrador do campo precisará solicitar ao clube vizinho máquinas iguais às suas para fazer o serviço de poda em um tempo máximo de 5 h.*

Utilizando as duas máquinas que o clube já possui, qual o número mínimo de máquinas que o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho?

a) 4.

b) 6.

c) 8.

d) 14.

e) 16.

Solução:

Seja x a quantidade de máquinas necessárias para realizar a poda dos 8000 m^2 de área em 5 horas. Organizando em uma tabela as grandezas quantidade de máquinas, área (m^2) e horas, temos:

Máquinas	Área (m^2)	Horas
2	200	1
x	8000	5

Fixando a grandeza quantidade de máquinas (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparando-a com as outras temos:

- quando a quantidade de máquinas aumenta a área podada também aumenta proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais;
- quando a quantidade de máquinas aumenta a quantidade de horas trabalhadas diminui proporcionalmente, logo são grandezas inversamente proporcionais.

Indicando as grandezas diretamente proporcionais com setas em mesmo sentido e as inversamente proporcionais com setas em sentidos opostos, ficamos com a seguinte tabela:

Máquinas($\downarrow$)	Área (m^2)($\downarrow$)	Horas($\uparrow$)
2	200	1
x	8000	5

Agora invertemos a razão que é inversamente proporcional e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\frac{2}{x}$ e no segundo fique o produto das demais, ou seja, escrevemos

$$\frac{2}{x} = \frac{200}{8000} \cdot \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{40} \cdot \frac{5}{1} \Rightarrow 5x = 80 \Rightarrow x = 16.$$

Logo a quantidade de máquinas necessárias para podar os 8000 m^2 de área é igual a 16, como o clube já dispõe de 2, então deverá solicitar $16 - 2 = 14$ ao clube vizinho.

Resposta: Letra d.

$\diamond$

Exercício 58 *(ENEM 2017 2ª aplicação) Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção.*

Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9 000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6 000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento.

Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

a) 16 h 45 min.

b) 18 h 30 min.

c) 19 h 50 min

d) 21 h 15 min.

e) 22 h 30 min.

Solução:

As 4 máquinas juntas produziram 6000 itens durante as 6 primeiras horas de trabalho, após esse período elas pararam por 30min e apenas 3 delas voltam a trabalhar. Estas deverão agora, produzir os $9000 - 6000 = 3000$ itens restantes.

Seja x a quantidade de horas que as 3 máquinas levarão para produzir esses 3000 itens. Organizando em uma tabela as grandezas quantidade de máquinas, quantidade de itens produzidos e horas, temos:

Máquinas	Itens	Horas
4	6000	6
3	3000	x

Fixando a grandeza horas (pois é a que apresenta o valor desconhecido) e comparando-a com as outras temos:

- quando a quantidade de máquinas diminui a quantidade de horas aumenta proporcionalmente, logo são grandezas inversamente proporcionais;

- quando a quantidade de itens diminui a quantidade de horas também diminui proporcionalmente, logo são grandezas diretamente proporcionais.

Indicando as grandezas diretamente proporcionais com setas em mesmo sentido e as inversamente proporcionais com setas em sentidos opostos, ficamos com a seguinte tabela:

Máquinas($\uparrow$)	Itens($\downarrow$)	Horas($\downarrow$)
4	6000	6
3	3000	x

Agora invertemos a razão que é inversamente proporcional e organizamos a equação de modo que no primeiro termo fique a razão $\dfrac{6}{x}$ e no segundo fique o produto das demais, ou seja, escrevemos

$$\frac{6}{x} = \frac{6000}{3000} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{6}{x} = 2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4.$$

Logo serão necessárias mais 4 horas de trabalho para que as 3 máquinas produzam os 3000 itens restante.

Como a produção começou as 8 horas e terminou 10 horas e 30 minutos depois (6 horas com as 4 máquinas funcionando, 30 minutos de manutenção e 4 horas com apenas 3 máquinas trabalhando), então a manutenção de esgotamento começou às 18h30min.

Resposta: Letra b.

$\diamond$

4 MÉTODOS DE CONTAGEM

Neste capítulo abordaremos uma área da matemática que é provavelmente uma das mais intrigantes para a maioria dos alunos do ensino médio: análise combinátoria ou simplesmente combinátoria.

Normalmente esse tópico é compreendido pelos estudantes como o estudo das permutações, arranjos e combinações aliadas a um amontoado de fórmulas sem sentido. Essa visão está associada a forma como esse tópico é costumeiramente abordado nessa fase do ensino.

O estudo da análise combinatória no entanto é muito mais fascinante que a solução de simples problemas de contagem a partir da aplicação mecânica de fórmulas. Várias técnicas como o príncipio da inclusão-exclusão, o príncipio da casa dos pombos (também conhecido como príncipio das gavetas de Dirichlet) e a teoria dos grafos são poderosas técnicas de resoluções de problemas desse ramo da matemática.

Neste trabalho porém, nos limitaremos ao estudo das permutações, arranjos e combinações, pois entre outros fatores eles são, segundo Morgado et al. (2006, p.2) "entre os vários tipos de números para contagem da Análise Combinatória os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória". Ficando assim, a cargo do leitor aprofundar-se mais em outras técnicas.

O texto a seguir é baseado nas referências [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [20], [30], [35], [37] e [41].

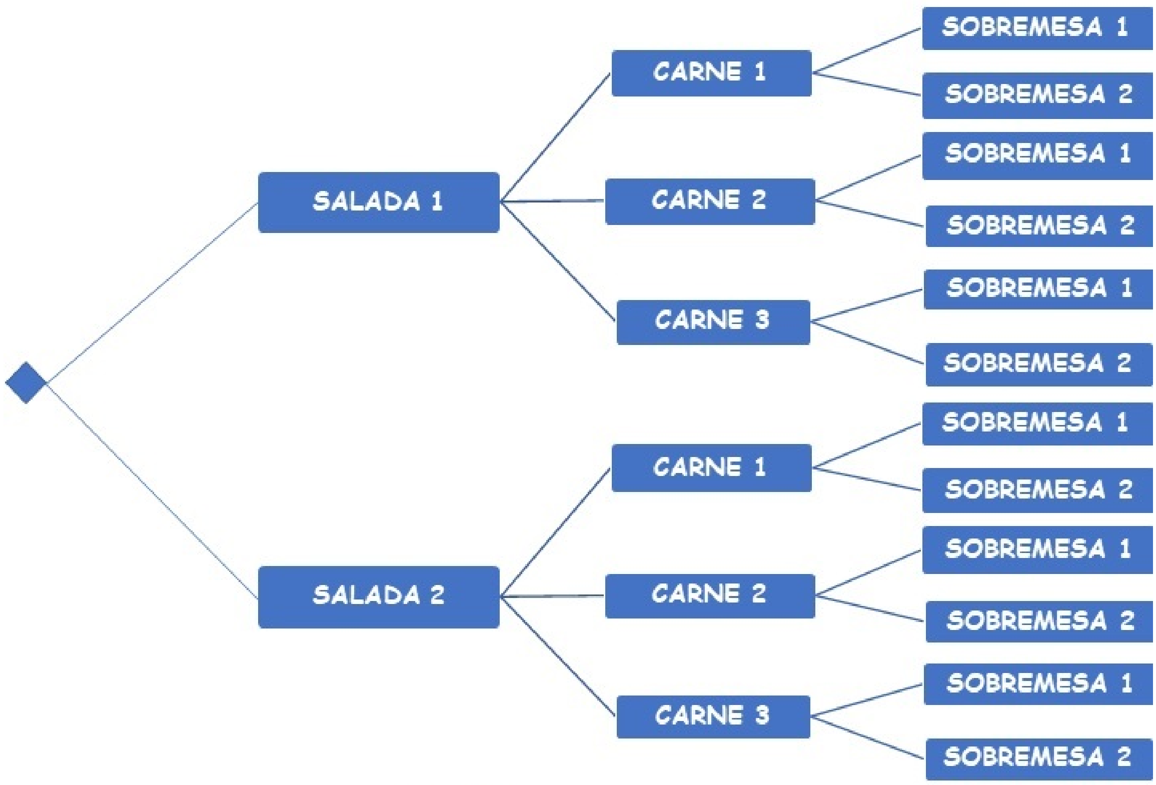
4.1 Princípio Fundamental da Contagem

Frequentemente enfrentamos situações na nossa rotina que nos obrigam a fazer escolhas e contar o número de maneiras que certas ações podem ser executadas. Por exemplo, como montar sua refeição, que peças de vestuário usar para se vestir, que caminho escolher para chegar em determinado lugar, etc. Esse tipo de problema pode ser solucionado fazendo uma lista de possibilidades e contando-as uma a uma. Mas em algumas situações esse pode ser um processo tão longo que se torna inviável, como por exemplo se quisermos contar de quantas formas podemos escolher as seis dezenas da Mega-Sena.

Há vários métodos mais eficientes para realizar contagem em problemas que trabalhem com muitas possibilidades e a maioria deles baseia-se, direta ou indiretamente, no chamado "Princípio Fundamental da Contagem" ou, simplesmente, "Princípio Multiplicativo". Mas antes de defini-lo vamos analisar a seguinte situação: você vai a um restaurante disposta a comer um só tipo de salada, um só tipo de carne e uma só sobremesa e o restaurante dispõem de 2 tipos de saladas, 3 tipos de carne e 2 tipos de sobremesa. De quantos modos diferentes você pode montar sua refeição?

Podemos ilustrar essa situação a partir de uma *árvore de possibilidades*, como a que apresentamos a seguir.

Figura 29: Árvore de possibilidades



Fonte: Autor

Observe que ao desenhar uma árvore de possibilidades também estamos listando todas as possibilidades para montar a refeição. Esse é um método prático, mas não muito eficiente em situações em que as ações apresentam muitas possibilidades ou em que precisamos executar muitas ações. Nesse caso o Princípio Fundamental da Contagem generaliza esse raciocínio de forma mais rápida e prática.

O *Princípio Fundamental da Contagem* afirma que, se determinada tarefa pode ser executada em n ações (etapas) diferentes, e se k_1,k_2,$\cdots$, k_n, indicam o número de possibilidades para executarmos cada ação (etapa), então o número total de maneiras pelas quais o evento pode ocorrer é dado por

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_n.$$

Vejamos algumas aplicações do Princípio Fundamental da Contagem nos exemplos a seguir.

Exemplo 97 *Quantas anagramas de 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?*

Solução:

Um anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra ou expressão para produzir outras palavras ou expressões utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

Veja que a tarefa de formar esses anagramas será dividida em três etapas, escolher a primeira letra (I), escolher a segunda letra (II) e escolher a terceira letra (III).

Para realizar a etapa I temos 26 possibilidades de escolha, feita essa escolha a etapa II terá 25 possibilidades, uma vez que não podemos repetir a letra usada na etapa I, agora para etapa III, restam 24 possibilidades, pois não podemos repetir a letra usada nem na etapa I e nem na etapa II.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a palavra pode ser formada de $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ modos diferentes. ◇

Exemplo 98 *Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões, de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?*

Solução:

Nesta situação a tarefa é dividida em 10 etapas (escolha das respostas de cada uma das 10 questões). Como as alternativas podem ser repetidas nas etapas, então cada uma delas tem 5 possibilidades. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o número de gabaritos possíveis é

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 5}_{\text{10 vezes.}} \quad = \quad 5^{10}$$

◇

Exemplo 99 *Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?*

Solução:

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois o zero não pode ocupar essa posição, o segundo algarismos pode ser escolhido de 9 modos também, pois não podemos usar o algarismo colocado na primeira posição, mas podemos usar o zero e o último algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não podemos usar nenhum dos dois que já foram usados nas duas primeiras posições. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números naturais de três algarismos distintos. ◇

Exemplo 100 *Quantos números naturais ímpares, de 3 algarismos distintos (na base 10) existem?*

Solução:

O último algarismo pode ser escolhido de 5 modos diferentes, pois como o número deve ser ímpar deve terminar em um dos algarismos ímpares (1,3,5,7,9), o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser o zero nem o algarismo usado na última posição e o segundo algarismos pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser o algarismo que ocupou a primeira nem a última posição. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ números ímpares de 3 algarismos distintos.

◇

O leitor deve observar, que no Exemplo 99, se começássemos pelo último algarismo, teríamos 10 possibilidades para fazer a escolha dele, 9 possibilidades para escolher o penúltimo algarismo, pois ele não pode ser igual ao último e agora nos depararíamos com um problema para escolher o primeiro algarismo. Se o algarismo zero já tiver sido escolhido em alguma das duas últimas posições, então teremos 8 possibilidades para a escolha do primeiro, mas se não tiver sido escolhido ainda, teremos apenas 7 possibilidades para escolha do primeiro.

Já no Exemplo 100 se começássemos pela escolha do primeiro algarismo teríamos 9 possibilidades, pois não pode ser o zero, o segundo algarismo poderia ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro e teríamos agora um problema para escolher o último algarismo. Se tivermos escolhido dois algarismo ímpares nas duas primeiras posições, então teremos 3 possibilidades para o último algarismo. Se tivermos escolhido apenas um algarismo ímpar, teremos 4 possibilidades para o último algarismo. Se não tivermos escolhido nenhum algarismo ímpar, então teremos 5 possibilidades para o último algarismo.

Problemas como esses exige que os abordemos começando sempre pelas "pequenas dificuldades" a fim de que elas não se tornem grandes dificuldades, como as que descrevemos acima.

Em seu livro [30] Lima et al. (2016) aconselha que os problemas de contagem devem ser abordados sempre, seguindo os seguintes passos:

I - devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que realiza a ação solicitada pelo problema;

II - devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples;

III - não devemos adiar dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa deve ser a primeira decisão a ser tomada

Perceba que no Exemplo 99 a nossa decisão mais restrita era o algarismo da primeira posição, por isso começamos por ele. Já no Exemplo 100, temos duas decisões com restrição, o primeiro e o último algarismo e entre essas duas decisões o último algarismo apresentava mais restrições, por isso começamos por ele e em seguida pelo primeiro algarismo, só depois nos preocupamos com o algarismo central.

A seguir apresentaremos mais alguns exemplos da aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplo 101 *(PUC - 70) Num banco de automóvel o assento pode ocupar 6 posições diferentes e o encosto 5 posições, independente da posição do assento. Combinando assento e encosto, esse banco assume:*

a) 6 posições diferentes.

b) 30 posições diferentes.

c) 90 posições diferentes.

d) 180 posições diferentes.

e) 720 posições diferentes.

Solução:

A posição do assento pode ser escolhida de 6 modos diferentes e a posição do encosto de 5 modos diferentes. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $6 \cdot 5 = 30$ posições diferentes para combinar assento e encosto. $\diamond$

Exemplo 102 *(UFAL-99) Com os elementos do conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *formam-se números de 4 algarismos distintos. Quantos dos números formados NÃO são divisíveis por 5?*

a) 15.

b) 120.

c) 343.

d) 720.

e) 840.

Solução:

Primeiro lembre que para um número ser divisível por 5 ele precisa terminar em 0 ou 5, como o nosso conjunto não possui o algarismo 0, então um número formado por esses algarismos será divisível por 5, se terminar em 5.

Como queremos os NÃO divisíveis por 5, devemos contar todos aqueles que não terminam nesse algarismo. Logo o último algarismo pode ser escolhido de 6 modos diferentes (entre 1,2,3,4,6,7), o primeiro algarismo pode ser escolhido de 6 modos diferentes (não pode ser o que foi escolhido para a última posição, mas pode ser o 5), o segundo algarismo pode ser escolhido de 5 modos diferentes (não pode ser nenhum dos dois já escolhidos) e o terceiro algarismo pode ser escolhido de 4 modos diferentes (não pode ser nenhum dos 3 já escolhidos).

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ números de 4 alagarismos distintos formados com os algarismos do conjunto dado e que não são divisíveis por 5. $\diamond$

Uma outra maneira de resolver esse problema seria contando todos os números de 4 alagrismos distintos e excluíndo destes, aqueles que são divisíveis por 5. Tal solução é apresentada a seguir.

Solução:

Contemos primeiro todos os números de 4 algarismos distintos formados com os elementos do conjunto dado.

Há 7 possibilidades de escolha para o primeiro algarismo, 6 possibilidades de escolha para o segundo, 5 possibilidades de escolha para o terceiro e 4 possibilidades de escolha para o quarto. Logo, há $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ números de 4 alagrismos distintos formados com os elementos do conjunto dado.

Agora, contemos quantos destes números são divisíveis por 5. Para o último algarismo temos 1 possibilidade de escolha (deve ser 5), para o primeiro há 6 possibilidades, para o segundo 5 possibilidades e para o terceiro 4 possibilidades. Assim, há $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ números de 4 alagrismos divisíveis por 5 formados com os algarismos dados.

Portanto o total de números de 4 algarismos distintos formados com os algarismos do conjunto dado que não são divisíveis por 5 são $840 - 120 = 720$. $\diamond$

Exemplo 103 *(UCSAL-BA) Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código, tem barras de uma só cor. Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?*

a) 128.

b) 64.

c) 62.

d) 32.

e) 16.

Solução:

Como o código é constituído por 6 barras, teremos 6 escolhas para serem feitas (escolher a cor para pintar a primeira barra, escolher a cor para pintar a segunda e assim sucessivamente). Como só dispomos das cores preta e branca, teremos duas possibilidades para a primeira barra, duas possibilidades para a segunda, duas possibilidades para a terceira, duas possibilidades para a quarta, duas possibilidades para a quinta e duas possibilidades para a sexta.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ modos diferentes de pintar as barras, mas como não podemos ter um código formado com todas as barras brancas ou todas de barras pretas, então devemos subtrair essas duas possibilidades, logo há $64 - 2 = 62$ códigos diferentes. $\diamond$

Exemplo 104 *(ITA/2001) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?*

a) 375.

b) 465.

c) 545.

d) 585.

e) 625.

Solução:

Como serão escritos números de 2 a 6 algarismos, teremos números formados com 2 algarismos, números formados com 3 algarismos, números formados com 4 algarismos, números formados com 5 algarismos e números formados com 6 algarismos.

Como eles devem ser números ímpares então devem terminar em um algarismo ímpar, logo para o último algarismo teremos sempre 3 possibilidades (1, 5, 7) além disso, como devem começar com números pares o primeiro algarismo terá sempre 3 possibilidades (2,4,8). Note que os algarismos que podem ser escolhidos para a primeira posição são sempre distintos dos que podem ser escolhidos para a última posição o que já atende a condição de que os algarismos do número formado sejam todos distintos. Contemos então quantos são os números de 2, 3, 4, 5 e 6 algarismos formados nestas condições.

- Números formados com 2 algarismos:

  Para o primeiro algarismo são 3 possibilidades de escolha e para o segundo também são 3 possibilidades de escolha, então pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $3 \cdot 3 = 9$ números.

- Números formados com 3 algarismos:

  Para o primeiro algarismo são 3 possibilidades de escolha, para o último também são 3 possibilidades e como os algarismos devem ser todos distintos, restam 4 possibilidades de escolha para o segundo. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ números.

- Números formados com 4 algarismos:

  Para o primeiro algarismo são 3 possibilidades de escolha, para o último são 3 possibilidades, como os algarismos devem ser distintos então para o segundo são 4 possibilidades e para o terceiro são 3 possibilidades de escolha. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 108$ números.

- Números formados com 5 algarismos:

  Para o primeiro algarismo são 3 possibilidades de escolha, para o último são 3 possibilidades, como os algarismos devem ser distintos então para o segundo são 4 possibilidades, para o terceiro são 3 possibilidades e para o quarto são 2 possibilidades de escolha. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $3{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2 = 216$ números.

- Números formados com 6 algarismos:

  Para o primeiro algarismo são 3 possibilidades de escolha, para o último são 3 possibilidades, como os algarismos devem ser distintos então para o segundo são 4 possibilidades, para o terceiro são 3 possibilidades, para o quarto são 2 possibilidades e para o quinto resta 1 possibilidade de escolha. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 216$ números.

Portanto o total de números formados, atendendo as condições do problema, são $9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585$. $\diamond$

Exemplo 105 *(GV-72) Existem apenas dois modos de atingir uma cidade D partindo de uma outra B. Uma delas é ir até uma cidade intermediária A e de lá atingir D; a outra é ir até C e de lá chegar a D. Existem 10 estradas ligando B e A; 12 ligando A a D; 5 ligando B a C; 8 ligando C a D; nenhuma ligação direta entre B e D e nenhuma ligação direta entre A e C. Qual e o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de B, atingir D pela primeira vez?*

a) 4.

b) 35.

c) 160.

d) 300.

e) 4800.

Solução:

Para atingir a cidade D a pessoa pode escolher o percurso BAD (a pessoa saí da cidade B passa pela cidade A e vai para cidade D) ou BCD (a pessoa saí da cidade B passa pela cidade C e vai para cidade D). Analisemos as possibilidades em cada percurso.

- Percurso BAD

  Para sair de B e chegar em A a pessoa tem 10 possibilidades de escolha, feita essa primeira parte do percurso ela terá 12 possibilidades de escolha para sair de A e chegar em D. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $10 \cdot 12 = 120$ possibilidades para a pessoa realizar o percurso BAD.

- Percurso BCD

  Para sair de B e chegar em C a pessoa tem 5 possibilidades de escolha, feita essa primeira parte do percurso ela terá 8 possibilidades de escolha para sair de C e chegar em D. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $5 \cdot 8 = 40$ possibilidades para a pessoa realizar o percurso BCD.

Portanto o número de percursos diferentes que a pessoa pode fazer para sair da cidade B e chegar na cidade D é $120 + 40 = 160$. ◇

Exemplo 106 *(MACK-74) A quantidade de números de 3 algarismos que tem pelo menos 2 algarismos repetidos é:*

a) 38.

b) 252.

c) 300.

d) 414.

e) 454.

Solução:

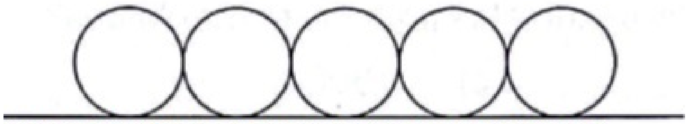
Contemos primeiro todos os números de 3 algarismos que se pode formar. Para o primeiro algarismo temos 9 possibilidades (não pode ser o zero), para o segundo algarismo são 10 possibilidades e para o terceiro algarismo são 10 possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem, temos $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de 3 algarismos.

Contemos agora, quantos são os números de 3 algarismos todos distintos. Pelo Exemplo 97, há 648.

Assim, o total de números de 3 algarismos com pelo menos 2 repetidos é $900 - 648 = 252$. ◇

Exemplo 107 *(Masck - SP)Cada um dos círculos da figura deverá ser pintado com uma cor, escolhida dentre três disponíveis.*

Figura 30: Círculos



Fonte: Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/14659781. Acesso: 13 jun. 2020

Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, o número de formas de se pintar os círculos é:

a) 72.

b) 68.

c) 60.

d) 54.

e) 48.

Solução:

Identifiquemos os círculos da esquerda para a direita de A, B, C, D e E . Assim o círculo A pode ser colorido de 3 modos diferentes, o círculo B pode ser colorido de 2 modos diferentes (não pode ter a mesma cor do círculo A), o círculo C pode ser colorido de 2 modos diferentes (não pode ter a mesma cor do círculo B, mas pode repetir a cor de A), o círculo D pode ser colorido de 2 modos diferentes (só não pode ter a mesma cor de C) e o círculo E pode ser colorido de 2 modos diferentes (só não pode ter a mesma cor de D). Então pelo princípio fundamental da contagem, há $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ modos de colorir os círculos. ◇

Exemplo 108 *Sejam A e B conjuntos tais que, o número de elementos de A é igual a 5 e o número de elementos de B é igual a 8. Quantas funções $f : A \to B$ existem?*

a) 40.

b) 8^5.

c) 5^8.

d) 6720.

e) 40320.

Solução:

Lembre-se que para que exista uma função $f : A \to B$, todos os elementos de A (domínio) devem possuir uma e somente uma imagem em B (contradomínio). Logo para determinar o número de funções devemos contar de quantos modos podemos escolher essas imagens.

Para escolher a imagem para o primeiro elemento do conjunto A temos 8 possibilidades (pode ser qualquer elemento de B), para escolher a imagem do segundo elemento de A temos novamente 8 possibilidades ou seja, para cada um dos demais elementos de A teremos sempre 8 possibilidades de escolha (pode ser qualquer elemento de B). Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de funções $f : A \to B$, é

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5.$$

◇

4.2 Permutações e fatorial de um número natural

Vários problemas de contagem exigem que façamos "troca" de posições entre elementos, que os "embaralhemos". Quando surge esse tipo de problema, normalmente resolvemos contando o número de permutações que conseguimos obter com esses elementos.

Permutar é sinônimo de trocar, de reordenar. Quando queremos contar quantas filas diferentes podemos formar com um determinado número de pessoas, por exemplo, só precisamos trocar as pessoas de lugar entre si e contar de quantas maneiras diferentes podemos fazer isso.

O leitor irá perceber que esse método não diverge do Princípio Fundamental da Contagem no qual, como já mencionamos na seção anterior, baseia-se a maioria dos métodos de contagem. Mas antes de defini-lo vamos apresentar um outro conceito muito importante no estudo da análise combinatória, o *fatorial de um número natural*.

Muitos problemas de contagem são resolvidos por um produto de números naturais consecutivos. Por exemplo, pode-se saber quantas filas diferentes podemos formar com 4 pessoas, basta escolher a primeira pessoa da fila, o que pode ser feito de 4 modos, a segunda pessoa o que pode ser feito de 3 modos, a terceira pessoa o que pode ser feito de 2 modos e a quarta pessoa, o que pode ser feito de 1 modo. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de filas será dado pelo produto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Esse produto representa o *fatorial do número 4*.

Definição 15 (Fatorial de um número natural) *Dado um número natural n, chamamos de fatorial de n ao produto de todos os naturais de 1 até n e representamos em* *símbolo por* $n!$ *(lê-se n-fatorial). Assim, temos:*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, definimos $0! = 1$*, por convenção.*

Exemplo 109 *De acordo com a definição os fatoriais de 1,2,3,4,5,6 e 7 são*

- $1! = 1$;
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$;
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$;
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$;
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$;
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$;
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

No exemplo anterior podemos perceber que para determinar o valor de $n!$ basta multiplicar n por $(n-1)!$, note

- $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$;
- $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$.

Veja como pode-se aplicar isso na simplificação de expressões que envolva fatoriais de números naturais.

Exemplo 110 *Simplifique as expressões.*

a) $\dfrac{7!}{4!}$.

Solução:
$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$ ◇

b) $\dfrac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!}$.

Solução:
$$\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{6!}} = \frac{7}{4}$$ ◇

c) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$.

Solução:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$ ◇

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$.

Solução:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)\cdot(n+1)$$ ◇

Vimos aqui que o número de maneiras diferentes de organizar uma fila com 4 pessoas é 4!. Analisemos agora quantas são as filas que podemos formar com n pessoas. Note que para a primeira pessoa temos n possibilidades de escolha, para a segunda temos $(n-1)$ possibilidades de escolha, para a terceira temos $(n-2)$ possibilidades de escolha e assim por diante até a última pessoa, para a qual temos 1 possibilidade de escolha. Então o número de filas diferentes é dado por

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1 = n!.$$

Cada ordenação que se dá às pessoas na fila é chamada de Permutaçõs simples. Assim, definimos

Definição 16 (Permutação simples) *O número de modos de ordenar n objetos distintos é*

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1 = n!$$

e cada ordenação desses n objetos é chamada de permutação simples, a qual representamos por P_n. Assim, $P_n = n!$.

Exemplo 111 *Quantos são os anagramas da palavra AMOR?*

Solução:

O número de anagramas da palavra AMOR corresponde ao número de maneiras de reorganizar das letras A, M, O e R, o que é dado pela permutação simples de 4 elementos, ou seja, é igual a $P_4 = 4! = 24$. ◇

Exemplo 112 *Quantos são os anagramas da palavra colar que começam com consoante?*

Solução:

Para formar anagramas da palavra colar que comecem com consoante, devemos escolher, inicialmente, a primeira letra e depois reorganizar as letras restantes.

Para a escolha da primeira letra temos 3 possibilidades (c,l,r). Feita a escolha de uma destas restam 4 letras para reordenar, o que pode ser feito de $P_4 = 4! = 24$ modos distintos. Assim, o número anagramas da palavra Colar que começa com consoante é $3\cdot 24 = 72$. ◇

Exemplo 113 *De quantos modos uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?*

Solução:

O número de modos de organizar essa família para a foto é dado por uma permutação simples de 5 elementos, ou seja, $P_5 = 5! = 120$. ◇

Exemplo 114 *De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros de geometria, 3 livros de álgebra e 4 livros de trigonometria numa estante, de modo que os livros de uma mesma área da matemática fiquem sempre juntos?*

Solução:

Há $P_3 = 3! = 6$ modos de escolher a ordem das áreas. Feita essa escolha, há $P_5 = 5! = 120$ modos de organizar os livros de geometria entre si, $P_3 = 3! = 6$ modos de organizar os livros de álgebra entre si e $P_4 = 4! = 24$ modos de organizar os livros de trigonometria entre si. Assim, existem $6 \cdot 120 \cdot 6 \cdot 24 = 103680$ modos de organizar os livros na estante, deixando os livros de cada área juntos. ◇

Exemplo 115 *Quantos são os anagramas da palavra TEORIA em que as vogais aparecem juntas?*

Solução:

Como as vogais devem aparecer sempre juntas, vamos formar um "bloco" com elas e considerar que são um único objeto, assim teremos que fazer uma permutação de 3 objetos (o bloco e as letras T e R), o que nos dá $P_3 = 3! = 6$ modos diferentes de ordená-los entre si.

Agora note que podemos ainda, permutar as vogais entre si, de $P_4 = 4! = 24$ modos distintos.

Assim, o número de anagramas da palavra TEORIA em que as vogais aparecem juntas é $6 \cdot 24 = 144$. ◇

Exemplo 116 *(UECE - Adaptada) A quantidade de números inteiros compreendidos entre os números 1 000 e 4 500 que podemos formar utilizando os algarismos 1, 3, 4 e 5 de modo que não figurem algarismos repetidos é:*

a) 16.

b) 24.

c) 60.

d) 72.

e) 144.

Solução:

Para que o número formado com os algarismos dados esteja compreendido no intervalo de 1000 a 4500, deve ser um número formado com 4 algarismo e além disso, deve começar com um dos algarismos 1, 3 ou 4 desde que o segundo algarismo dos números que começam com 4 sejam 1 ou 3. Contemos então, separadamente, os casos em que o número começa com 1 ou 3 e os que o número começa com 4.

- começando com 1 ou 3

  Para escolha do primeiro algarismo temos 2 possibilidades, feita essa escolha há $P_3 = 3! = 6$ modos de organizar os outros alagrismos. Assim, há $2 \cdot 6 = 12$ números começando por 1 ou 3.

- começando por 4

  Para escolha do primeiro algarismo temos apenas 1 possibilidade (tem que ser 4), para a escolha do segundo algarismo temos 2 possibilidades (1 ou 3, pois se usarmos o 5 o número formado ficará fora do intervalo dado). Feita essa escolha, há $P_2 = 2! = 2$ modos de organizar os algarismos restantes. Assim, há $1{\cdot}2{\cdot}2 = 4$ números começando por 4.

Então há $12 + 4 = 16$ números entre 1000 e 4500 que tem seus alagarismos distintos e formados com os alagrismos dados. ◇

Exemplo 117 *(VIÇOSA) Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:*

a) 2h.

b) 3h.

c) 4h.

d) 5h.

e) 6h.

Solução:

O número de filas diferentes que essas 6 pessoas podem formar é $P_6 = 6! = 720$, como as pessoas demoram 10 segundos para mudarem de ordem são necessários $720 \cdot 10 = 7200$ segundos para formar todas as filas, ou seja, $7200 \div 3600 = 2$ horas. ◇

Exemplo 118 *(Unesp-02) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatros podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:*

a) 2.

b) 4.

c) 8.

d) 16.

e) 24.

Solução:

Como queremos que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos, vamos colocá-los em um "bloco" e considerá-los como um único elemento, da mesma forma como João e Rita também devem ficar juntos colocaremos também os dois em um "bloco" e os consideramos como um único elemento. Então temos $P_2 = 2! = 2$ modos de permutar os blocos. Feito isso, há $P_2 = 2! = 2$ modos de permutar o casal João e Rita entre si e $P_2 = 2! = 2$ modos de permutar o casal Pedro e Luísa entre si.

Assim, há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modos diferentes de sentar os quatro amigos. ◇

Exemplo 119 *(UNB) Seis pessoas A, B, C, D, E e F ficam em pé, uma ao lado da outra para uma fotografia. Se A e B se recusam a ficar lado a lado e C e D insistem em aparecer uma ao lado da outra, o número de possibilidades distintas para as seis pessoas posarem é:*

a) 72.

b) 96.

c) 120.

d) 144.

e) 240.

Solução:

Como um casal deve ficar junto e um outro casal deve ficar separado, vamos contar primeiro todas as possibilidades do casal CD, ficar junto.

Como esse casal não pode se separar, contaremos ele como um bloco (como se fossem uma única pessoa), assim teremos uma permutação de 5 pessoas apenas, ou seja, $P_5 = 5! = 120$. No entanto o casal CD não pode se separar, mas não é definido sua ordem, então devemos permutá-los entre si, ou seja, há $120 \cdot P_2 = 120 \cdot 2! = 120 \cdot 2 = 240$ modos de organizar a fila.

Nessas 240 possibilidades, contamos todas as vezes em que CD estava junto, mas contamos também as vezes em que o casal AB estava junto e as vezes em que estavam separados, logo se retirarmos daí as vezes em que AB esteve junto, teremos as possibilidades de CD juntos e AB separados. Contando então, as vezes em que tivemos AB e CD juntos, temos $P_4 \cdot P_2 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! \cdot 2! = 24 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

Logo há $240 - 96 = 144$ modos de organizar as pessoas para a fotografia, deixando AB separado e CD junto. $\diamond$

Exemplo 120 *(UFPI-2000) Escrevendo-se em ordem decrescente todos os números de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos 3, 5, 7, 8 e 9, a ordem do número 75389 é:*

a) 54.

b) 55.

c) 56.

d) 66.

e) 67.

Solução:

Como os números formados serão escritos em ordem decrescente devemos contar todas as permutações que geram números maiores que 75389. Note que todo número que comece com 9 ou 8 e apenas alguns dos números que começam com 7 são maiores que o número 75389. Então contemos em dois casos os números que começam por 9 ou 8 e os que começam com 7.

- começando com 9 ou 8, temos:

  O primeiro algarismo pode ser escolhido de 2 modos diferentes, feito isso há $P_4 = 4! = 24$ modos de organizar os demais algarismos. Assim, há $2 \cdot 24 = 48$ números começando por 9 ou 8.

- começando por 7, temos:

  Para a escolha do primeiro algarismo há uma única possibilidade de escolha (tem que ser 7), para o segundo algarismo há 2 possibilidades de escolha (8 ou 9), feita essa escolha há $P_3 = 3! = 6$ modos de organizar os outros algarismos. Assim, há $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$ números que começam com 78 ou 79. Além disso, há ainda 5 números que começam com 75 e são maiores que 75389 (75983, 75938, 75893, 75839 e 75398). Ou seja, há $12 + 5 = 17$ números começando com 7 que são maiores que 75389.

Então há $48 + 17 = 65$ números maiores que 75389 e portanto, a ordem desse número é $66^{\underline{o}}$. $\diamond$

Exemplo 121 *Quantos são os anagramas da palavra SIMPLES?*

Solução:

Se todas as letras da palavra SIMPLES fossem diferentes a resposta seria $P_7 = 7! = 5040$. Mas temos duas letras iguais na palavra (a letra S), então quando contamos os anagramas dessa forma, estamos contando um mesmo anagrama mais de uma vez, precisamente $2! = 2$ vezes, pois há $2! = 2$ modos de permutar as letras S entre si. Assim o número correto de anagramas da palavra é

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

◇

Neste último exemplo podemos perceber, que ao fazer um reordenação de elementos, onde figuram elementos repetidos, não podemos fazer apenas uma permutação simples. Aqui temos a necessidade de definir então, como calcular a permutação de elementos com repetição.

Definição 17 (Permutação com repetição) *O número de permutações de n objetos com $n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k$ representando o número de objetos repetidos, onde $n_1+n_2+...+n_k = n$ é dada por*

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

Exemplo 122 *Quantos são os anagramas da palavra TETRAEDRO?*

Solução:

Note que a palavra tem 9 letras das quais, duas são a letra T e duas são a letra E. Assim, o número de anagramas da palavra é dado por

$$P_9^{2,2} = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 90720.$$

◇

Exemplo 123 *Quantos anagramas da palavra ELEGER começam por consoante?*

Solução:

A primeira letra pode ser escolhida de 3 modos diferentes (L, G ou R). Feita essa escolha restam 5 letras para permutar entre si, das quais temos 3 letras E repetidas. Logo o número de anagramas pedido é dado por $3 \cdot P_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 3 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$ ◇

Exemplo 124 *Com duas bandeiras vermelhas indistinguíveis, três azuis também indistinguíveis e uma branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas no mastro de um navio?*

Solução:

Note que uma sequência possível para organizar as bandeiras no mastro é colocar primeiro as duas bandeiras vermelhas, depois três bandeiras azuis, e por fim a bandeira branca. Assim representando por V cada bandeira vermelha, por A cada bandeira azul e por B a bandeira branca, teríamos a sequência VVAAAB. Perceba ainda, que qualquer outro sinal pode ser representado fazendo uma permutação das letras dessa sequência.

Como a sequência é formada por 6 letras, com a letra V repetida 2 vezes e a letra A repetida 3 vezes, então o número de sinais que podem ser emitidos com essas bandeiras é $P_6^{2,3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60.$ ◇

Exemplo 125 *(FGV) O número de anagramas diferentes que podem ser construídos com as letras da palavra VARGAS, e que comecem e terminem com consoantes é:*

a) 15.

b) 24.

c) 144.

d) 288.

e) 360.

Solução:

Para a escolha da primeira letra temos 4 possibilidades de escolha (V,R,G,S) e 3 possibilidades de escolha para a última letra (uma das três consoantes que restam).

Agora devemos posicionar as quatro letras centrais, para isso dispomos de duas vogais e duas consoantes, mas como as duas vogais são iguais temos uma permutação de 4 letras com duas repetições, logo há $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4 \cdot 3 = 12$ maneiras para posicionar essas letras.

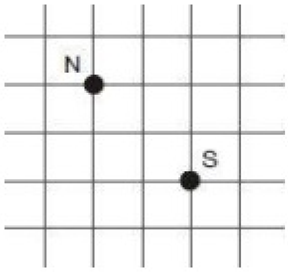
Daí temos, 4 possibilidades de escolha para a primeira letra, 12 para as letras centrais e 3 para a última, logo há $4 \cdot 12 \cdot 3 = 144$ anagramas começando e terminando com consoante. ◇

Exemplo 126 *(PUC) Formigas da caatinga ajudam a plantar sementes. Observou-se que várias espécies de formigas carregam a semente para o ninho, comem a carúncula e abandonam a semente intacta, próximo à planta-mãe, e que a terra do ninho é mais própria à germinação do que o solo sem formigueiros.*

(Adaptado de Pesquisa Fapesp. maio 2007. n. 135. p. 37)

Na figura tem-se um reticulado em que o ponto S representa uma semente e o ponto N um ninho de formigas.

Figura 31: Ninho



Fonte: Caderno de provas PUC. Disponível em: http://www.puccamp.br/wp-content/uploads/2016/07/ProvaEngAmbiental.pdf. Acesso 13 jun. 2020

Caminhando apenas sobre as linhas do reticulado, uma formiga parte de S e desloca-se até N, da seguinte forma:

- *nas linhas horizontais, caminha somente para a esquerda;*
- *nas linhas verticais caminha somente para cima.*

Nessas condições, de quantas maneiras distintas ela pode ir de S até N?

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 10.

Solução:

Uma sequência de passos possíveis para que a formiga realize o percurso é caminhar dois passos para esquerda e depois dois passos para cima. Assim, representando por E cada passo para esquerda e por C cada passo para cima, temos a seguinte sequência EECC.

Note que qualquer outro percurso é obtido pela permutação das letras dessa sequência. Então como são 4 letras das quais há 2 letras E e 2 letras C, temos

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 2 \cdot 3 = 6$$

modos diferentes para a formiga realizar o percurso. ◇

Exemplo 127 *(Olimpíada Brasileira-99)Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?*

a) 16.

b) 18.

c) 24.

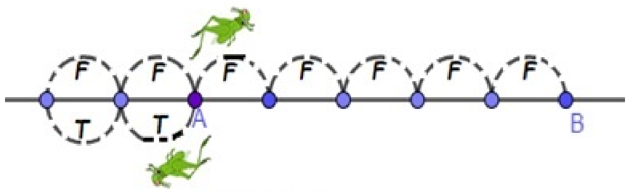
d) 36.

e) 48.

Solução:

Primeiro observe que, para o gafanhoto sair do ponto A e parar no ponto B após o nono pulo, ele deverá dar x pulos para frente e y pulos para trás, visto que a distância entre os pontos A e B é igual a 5 metros. Veja na figura abaixo uma sequência de pulos possível.

Figura 32: Saltos



Fonte: Autor

Sendo F a representação de cada pulo que o gafanhoto dá da esquerda para direita e T cada pulo que ele dá da direita para esquerda, então na figura anterior ele fez a seguinte sequência de pulos TTFFFFFFF.

Agora note que, o número de maneiras que o gafanhoto pode pular para atingir o ponto B, obedecendo as restrições da questão, é dado pelo número de permutações entre esses F's e T's. Além disso, em cada situação ele dará sempre 9 pulos sendo, 7 pulos da direita para esquerda e 2 pulos da esquerda para direita. Logo há

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 9 \cdot 4 = 36$$

maneiras diferentes do gafanhoto pular até B. ◇

Exemplo 128 *(UERJ 2010) Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos* *meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos. Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:*

a) 80.

b) 96.

c) 120.

d) 126.

e) 130.

Solução:

Como são 9 sábados disponíveis dos quais 4 terão aula e 5 não, temos por exemplo a sequência SNSNSNSNN, em que S representa um sábado com aula e N um sábado sem aula. O número de maneiras de permutarmos essas letras será portanto, uma permutação de 9 elementos com repetição de 4 S e 5 N, ou seja,

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!.5!} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 126.$$

Nesses 126 casos contamos também as permutações em que os 4 sábados com aula são consecutivos, por exemplo: SSSSNNNNN, então devemos contar quantos são esses casos e subtrai-los. Para isso, coloquemos as 4 letras S em um "bloco" e contemos como um único elemento, assim teremos uma permutação de 6 elementos com repetição de 5 N, que é igual a $P_6^5 = \dfrac{6!}{5!} = \dfrac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6$.

Daí teremos 126 maneiras de permutar os sábados das quais 6 não interessam, por terem 4 sábados consecutivos. Logo há $126 - 6 = 120$ modos de escolher os sábados com aula. ◇

Exemplo 129 *(PUC-SP) Alfredo, Arnaldo, Ricardo, Renato e Ernesto querem formar uma sigla com 5 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de seus nomes. O total de siglas possíveis é:*

a) 10.

b) 24.

c) 30.

d) 60.

e) 120.

Solução:

Escrevendo uma possível sigla formada das iniciais dos nomes dados temos, por exemplo, a sigla AARRE. Note que qualquer outra sigla é obtida permutando-se as letras desta. Assim, como são 5 letras, sendo 2 letras A e 2 letras R, então o total de siglas possíveis é $P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$ ◇

Exemplo 130 *De quantos modos podem ser alojados 10 campistas em 3 barracas, se na primeira cabem 5, na segunda 3 e na terceira apenas 2?*

a) 10.

b) 30.

c) 120.

d) 1250.

e) 2520.

Solução:

Consideremos 10 fichas com as letras A, B e C sendo 5 fichas com a letra A, 3 com a letra B e 2 com a letra C. Agora formemos uma fila com os campistas e distribuamos as fichas entre eles, aqueles que receberem as fichas A serão alojados na primeira barraca, os que receberem a ficha B serão alojados na segunda barraca e os que receberem as fichas C serão alojados na terceira barraca. Dessa forma o número de maneiras diferentes de alojar os 10 campistas coincide com o número de permutações que podemos formar com os 10 cartões, sendo que em 5 deles temos a letra A, em 3 deles a letra B e em 2 deles a letra C. Logo, há

$$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{2}} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$$

modos diferentes de alojar os campistas nas 3 barracas. ◇

Exemplo 131 *O número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 10$ é*

a) 10.

b) 30.

c) 66.

d) 120.

e) 132.

Solução:

Analisemos a seguinte sequência $(\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\bullet)$. Se pensarmos que o número de pontos antes do primeiro sinal de adição é o valor de x, entre os sinais de adição, o valor de y e, depois do segundo sinal de adição, o valor de z então teremos, para este exemplo, $x = 3$, $y = 3$ e $z = 4$, o que nos dá soma 10 e, portanto, é uma solução da equação $x+y+z = 10$. Uma outra solução possível seria $(\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet)$ onde, pelo mesmo raciocínio, teríamos $x = 4$, $y = 4$ e $z = 2$ que também é uma solução da equação $x + y + z = 10$. Assim, para encontrarmos o número de soluções inteiras não negativas da equação dada, basta permutarmos 10 pontos e 2 sinais de mais entre si, o que nos dá $P_{12}^{10,2} = \dfrac{12!}{10! \cdot 2!} = \dfrac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} \cdot \cancel{2}} = 6 \cdot 11 = 66$ soluções diferentes para a equação. $\diamond$

4.3 Arranjo e Combinação

Vimos nas seções anteriores três métodos de contagem muito utilizados na resolução de problemas de análise combinatória e aqui apresentaremos mais dois metódos que são normalmente trabalhados no ensino médio apenas como uma fórmula pronta para resolver problemas de combinátoria. São estes os arranjos simples e as combinações simples.

Faremos uma obordagem destes dois métodos buscando, sempre que possível, despertar no leitor a percepção de que as fórmulas são apenas um recurso prático na resolução desses problemas e não uma "receita" pronta, pois muitas vezes elas precisam ser adaptadas ao problema que se deseja resolver.

ARRANJO SIMPLES

Já discutimos anteriormente que se quisermos reordenar n objetos em uma fila podemos fazer isso de $n!$ modos diferentes. Os problemas de arranjos simples irão tratar de como ordenar uma certa quantidade p destes n objetos, onde $0 \leq p \leq n$.

Analisemos então essa situação. Dados n objetos, quantas filas distintas podemos formar com p destes n objetos, onde $0 \leq p \leq n$? Note que para a escolha do primeiro objeto, temos n possibilidades, para o segundo $(n - 1)$ possibilidades, para o terceiro $(n - 2)$ possibilidades e assim sucessivamente, até que para a escolha do p-ésimo objeto tenhamos $n - (p - 1)$ possibilidades de escolha. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de organizar os p objetos é

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)].$$

Multiplicando essa expressão por $1 = \dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$ teremos,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Logo,

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Desta forma, concluímos que o número de maneiras de ordenar p, de um total de n objetos, é dado por $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Problemas desse tipo são chamados de arranjos simples, os quais definimos como:

Definição 18 (Arranjo Simples) *Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer maneira de listar ordenadamente p elementos distintos, tomados dentre os n elementos dados.*

Escreveremos $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ para indicar a quantidade de arranjos simples de n elementos, tomados p a p.

A seguir apresentaremos alguns exemplos com a aplicação direta da fórmula de arranjo simples e outros mais contextualizados.

Exemplo 132 *Calcule.*

a) $A_{10,5}$.

Solução:

Pela definição temos,

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

◇

b) $A_{10,5} - A_{5,2}$.

Solução:

Pelo item A $A_{10,5} = 30240$ e pela definição temos,

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Assim, $A_{10,5} - A_{5,2} = 30240 - 20 = 30220$. ◇

c) $\dfrac{A_{15,12}}{A_{15,3} \cdot A_{12,3} \cdot A_{9,3} \cdot A_{6,3}}$.

Solução:

Pela definição temos,

$$\frac{A_{15,12}}{A_{15,3}\cdot A_{12,3}\cdot A_{9,3}\cdot A_{6,3}} \Rightarrow \frac{\dfrac{15!}{(15-12)!}}{\dfrac{15!}{(15-3)!}\cdot\dfrac{12!}{(12-3)!}\cdot\dfrac{9!}{(9-3)!}\cdot\dfrac{6!}{(6-3)!}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{15!}{3!}}{\dfrac{15!}{12!}\cdot\dfrac{12!}{9!}\cdot\dfrac{9!}{6!}\cdot\dfrac{6!}{3!}} \Rightarrow \frac{\dfrac{15!}{3!}}{\dfrac{15!}{\cancel{12!}}\cdot\dfrac{\cancel{12!}}{\cancel{9!}}\cdot\dfrac{\cancel{9!}}{\cancel{6!}}\cdot\dfrac{\cancel{6!}}{3!}} \Rightarrow \frac{\dfrac{15!}{3!}}{\dfrac{15!}{3!}} = 1$$

◇

Exemplo 133 *Determine o valor inteiro de $x \geq 2$, para o qual $A_{x,2} = 156$.*

Solução:

Pela definição, $A_{x,2} = \dfrac{x!}{(x-2)!}$, daí como $A_{x,2} = 156$ temos

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 156 \Rightarrow \frac{x\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 156 \Rightarrow x\cdot(x-1) = 156 \Rightarrow x^2 - x - 156 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos $x = 13$ ou $x = -12$. Como queremos $x \geq 2$, então o valor de x que atende ao problema é $x = 13$. ◇

Exemplo 134 *(Sefaz RJ-Coperj 2010). Em uma fila do cinema há 5 cadeiras consecutivas vazias.*

O número de maneiras que três pessoas, A, B e C, podem sentar-se nelas é:

a) 10.

b) 15.

c) 30.

d) 45.

e) 60.

Solução:

Note que a solução do problema consiste em determinar de quantas maneiras podemos escolher 3 das 5 cadeiras disponíveis para dispor as pessoas A, B e C nessa fila, logo esse número é dado pelo arranjo simples de 5 tomados 3 a 3. Ou seja, há

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5\cdot4\cdot3 = 120$$

maneiras das três pessoas sentar-se. ◇

Esse mesmo problema pode ser resolvido utilizando simplesmente a idéia do Princípio Fundamental da Contagem, como apresentamos a seguir.

Solução:

A pessoa A tem 5 possibilidades de escolha, feita sua escolha a pessoa B terá 4 possibilidades, pois não pode ocupar a mesma cadeira de A e pelo mesmo motivo a pessoa C terá 3 possibilidades de escolha. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ modos das três pessoas sentar-se. ◇

Quase sempre os problemas de arranjo simples podem ser solucionados com um raciocínio semelhante a este. Então as próximas questões sê-lo-ão resolvidas, detalhadamente, com o uso da noção de arranjo simples e sugere-se ao leitor que tente resolvê-las novamente, usando o PFC.

Exemplo 135 *(PM SC-Cesiep 2011 adaptada). Em uma corrida com 10 atletas competindo pergunta-se: de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?*

a) 300.

b) 720.

c) 800.

d) 930.

e) 1000

Solução:

Podemos pensar esse problema do seguinte modo, dos 10 atletas devemos escolher 3 para formar uma fila, onde o primeiro da fila receberá a medalha de ouro, o segundo a de prata e o terceiro a de bronze. Dessa forma, o número de maneiras de distribuir as medalhas é dado pelo número de arranjos simples de 10 tomados 3 a 3.

Assim, há $A_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ modos de distribuir as medalhas. ◇

Exemplo 136 *(FGV 95) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é*

a) 1680.

b) 1344.

c) 720.

d) 224.

e) 136.

Solução:

Como o número tem 5 algarismos, começa com 6 e não tem algarismos repetidos então precisamos escolher apenas 4 entre os algarismos restantes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9). Além disso, é dito que o algarismo 7 é um dos 4 algarismos que faltam escolher, assim começamos escolhendo sua posição, o que pode ser feito de 4 modos diferentes (pode ser o segundo, terceiro, quarto ou quinto algarismo). Feita essa escolha, restam 8 algarismo para organizarmos nas 3 posições restantes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9), o que pode ser feito com um arranjo simples de 8 tomados 3 a 3. Ou seja, há

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

modos diferentes de organizar os algarismos nas posições restantes.

Assim, o número máximo de tentativas para acertar a senha é $4 \cdot 336 = 1344$. $\diamond$

Exemplo 137 *(Mackenzie 99)Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos uma brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:*

a) 426.

b) 444.

c) 468.

d) 480.

e) 504.

Solução:

Para determinar as 3 primeiras colocações podemos escolher 3 dos 9 atletas e formar uma fila com estes, assim o número de maneiras de fazer isso será calculado pelo arranjo simples de 9 tomados 3 a 3. Mas queremos que em uma dessas 3 colocações tenha pelo menos um brasileiro. Uma maneira de resolver esse problema é contando todas as colocações possíveis e retirando aquelas que não aparecem nenhum dos brasileiros. Contemos então em dois casos separados.

- Total de casos possíveis:

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

- Total de casos em que não aparecem nenhum brasileiro:

  Devemos fazer a escolha dos três primeiros colocados entre os 5 atletas que não são brasileiros, assim teremos

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Concluímos assim, que o número de maneiras em que há pelo menos uma brasileiro entre as três primeiras colocações é $504 - 60 = 444$. ◇

Exemplo 138 *(UERJ)Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas de modo a não usar a mesma cor no papel e na fita, em nenhuma das 30 embalagens. A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou utilizar para a confecção de todas as embalagens foi igual a:*

a) 30.

b) 18.

c) 6.

d) 3.

e) 2.

Solução:

Seja $n > 0$ o número de cores diferentes que Ana necessitou para embalar as caixas. Perceba que uma caixa difere da outra pela ordem em que ela dispõem as cores, por exemplo, a caixa embalada com a cor vermelha e laço branco é diferente da embalada com a cor branca e laço vermelho. Assim o total de cores é dado pelo arranjo simples de n tomados 2 a 2.

Como Ana deve embalar 30 caixas com essas cores, devemos determinar n de modo que $A_{n,2} = 30$. Assim, temos

$$A_{n,2} = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $n = 6$ ou $n = -5$, como queremos $n > 0$ então $n = -5$ não serve.

Portanto a menor quantidade de cores que Ana precisa é 6. ◇

Exemplo 139 *Sejam os conjuntos A com 3 elementos e B com 5 elementos. O total de funções injetoras de A para B é:*

a) 10.

b) 15.

c) 60.

d) 120.

e) 125.

Solução:

Inicialmente lembre-se que uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora se, e somente se, cada elemento $y \in B$ é imagem de um único $x \in A$. Assim o problema consiste em determinar de quantos maneiras podemos escolher 3 dos 5 elementos de B que sejam imagem dos elementos de A.

Façamos isso, escolhendo três dos elementos de B e formando uma sequência, onde o primeiro corresponde a imagem do primeiro elemento de A, o segundo corresponde a imagem do segundo elemento de A e o terceiro corresponde a imagem do terceiro elemento de A. Dessa forma, o número de maneiras de fazer essa escolha é dado pelo número de arranjos simples de 5 tomados 3 a 3. Ou seja, há

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

funções injetoras de A em B. ◇

COMBINAÇÃO SIMPLES

Nos problemas de arranjo simples podemos perceber que um agrupamento difere de outro pela sua ordenação, ou seja, são problemas em que a ordem da disposição dos elementos gera uma nova sequência. Entretanto em alguns problemas de análise combinatória nos deparamos com situações em que um agrupamento não difere do outro pela ordem em que seus elementos são dispostos. Estes são os problemas das combinações simples.

Comecemos analisando a seguite situação: dados n objetos distintos, quantos subconjuntos podemos formar com p desses objetos, sendo $0 \leq p \leq n$? Primeiro montamos uma lista ordenada com p dos n objetos disponíveis, o que pode ser feito de $A_{n,p} = \dfrac{n}{(n-p)!}$ modos diferentes. Acontece que cada conjunto de p elementos será obtido a partir de exatamente $p!$ dessas listas, uma vez que $p!$ é o número de maneiras de montar uma lista com os p objetos do conjunto. Assim, a quantidade de subconjuntos com p objetos, escolhidos dentre os n objetos dados, é igual a $\dfrac{A_{n,p}}{p!}$. Ou seja, há

$$\frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow \frac{n!}{(n-p!)} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p!)}$$

subconjuntos de p objetos escolhidos entre os n objetos disponíveis.

Este é, portanto, o metódo das combinações simples o qual definimos a seguir.

Definição 19 (Combinação simples) *Dados n elementos, chamamos de combinação simples dos n tomados p a p $(p \leq 0)$ aos subconjuntos com exatamente p elementos que se pode formar com os n elementos dados.*

Indica-se por $C_{n,p}$, C_p^n ou $\binom{n}{p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p, onde

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p!)}$$

.

Vale a pena destacar aqui uma propriedade muito útil para facilitar os cálculos das combinações simples, conhecida como *igualdade de combinações complementares* a qual afirma que

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}.$$

Exemplo 140 *As combinações a seguir são complementares.*

$$C_{5,2} \text{ e } C_{5,3} \qquad C_{10,7} \text{ e } C_{10,3}.$$

Passaremos agora a discutir aplicações da definição dada, na resolução de problemas de combinações simples.

Exemplo 141 *Calcule.*

a) $C_{15,10}$.

Solução:

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} C_{15,10} &= \frac{15!}{10! \cdot (15-10)!} \\ &= \frac{15!}{10! \cdot 5!} \\ &= \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \\ &= 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 \\ &= 3003. \end{aligned}$$

◇

b) $C_{n,n-2}, n \geq 2$.

Solução:

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} C_{n,n-2} &= \frac{n!}{(n-2)! \cdot (n-[n-2])!} \\ &= \frac{n!}{(n-2)! \cdot (n-n+2)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2}. \end{aligned}$$

$\diamond$

c) $C_{n,1}$.

Solução:

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1 \cdot \cancel{(n-1)!}} \\ &= n. \end{aligned}$$

$\diamond$

d) $C_{n,0}$.

Solução:

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} C_{n,0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} \\ &= \frac{\cancel{n!}}{1 \cdot \cancel{n!}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\diamond$

Exemplo 142 *(FAM) Sabendo-se que* $\dfrac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2$, *determine o valor de* p.

Solução:

Pela definição, temos que

- $C_{8,p+2} = \dfrac{8!}{(p+2)! \cdot (8-[p+2])!}$;
- $C_{8,p+1} = \dfrac{8!}{(p+1)! \cdot (8-[p+1])!}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{8!}{(p+2)! \cdot (8-[p+2])!}}{\dfrac{8!}{(p+1)! \cdot (8-[p+1])!}} = 2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{8!}{(p+2)! \cdot (8-[p+2])!} \cdot \frac{(p+1)! \cdot (8-[p+1])!}{8!} = 2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\cancel{8!}}{(p+2) \cdot \cancel{(p+1)!} \cdot (8-[p+2])!} \cdot \frac{\cancel{(p+1)!} \cdot (8-[p+1])!}{\cancel{8!}} = 2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{(p+2) \cdot \cancel{(8-[p+2])!}} \cdot \frac{(8-[p+1]) \cdot \cancel{(8-[p+2])!}}{1} = 2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{7-p}{p+2} = 2 \\
&\Rightarrow \quad 2p+4 = 7-p \\
&\Rightarrow \quad 3p = 3 \\
&\Rightarrow \quad p = 1.
\end{aligned}
$$

Concluímos então que $p = 1$. ◇

Exemplo 143 *Cinco estudantes fizeram um trabalho em equipe, mas apenas 2 vão apresentá-lo. De quantos modos podemos escolher a dupla para fazer a apresentação?*

a) 10.

b) 20.

c) 45.

d) 60

e) 120.

Solução:

O problema consiste em escolher um subconjunto de 2 pessoas entre as 5 disponíveis, o que pode ser feito de

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 5 \cdot 2 = 10$$

modos diferentes. ◇

Exemplo 144 *(PUCCAMP 2005) O cientista John Dalton é bastante conhecido pelas suas contribuições para a Química e a Física. Descreveu a forma e o uso de vários instrumentos de meteorologia, fazendo considerações sobre a variação da altura barométrica. Além disso, Dalton descreveu uma doença hereditária que o impossibilitava de distinguir a cor verde da vermelha. Essa doença hereditária, causada por um alelo recessivo ligado ao cromossomo X, recebeu o nome de daltonismo. Dois daltônicos fazem parte de um grupo de 10 pessoas. De quantas maneiras distintas pode-se selecionar 4 pessoas desse grupo, de maneira que haja pelo menos um daltônico entre os escolhidos?*

a) 140.

b) 240.

c) 285.

d) 336.

e) 392.

Solução:

Contemos primeiro quantos grupos de 4 pessoas podem ser formados com as 10 disponíveis, o que pode ser feito de

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

modos diferentes.

Agora contamos em quantos destes grupos não aparece nenhum daltônico. Neste caso, devemos formar grupos de 4 pessoas escolhendo entre os 8 que não são daltônicos. Desta forma, temos

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$$

modos diferentes de formar os grupos sem nenhum daltônico.

Assim, o total de grupos que podemos formar com pelo menos um daltônico é $210 - 70 = 140$. ◇

Outra forma de resolver esse problema seria dividindo em dois casos, os grupos que possuem um único daltônico e os que possuem dois daltônicos. Veja:

Solução:

Contemos primeiro os grupos formados por 1 daltônico e 3 não daltônicos. Para a escolha do daltônico temos 2 possibilidades, feito essa escolha restam 8 (não pode ser nenhum dos daltônicos) pessoas para escolhermos as outras 3 que vão compor o grupo, o que pode ser feito de

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 8 \cdot 7 = 56$$

modos. Assim, um grupo com um daltônico e 3 não daltônicos pode ser escolhido de $2 \cdot 56 = 112$ modos diferentes.

Agora contemos os grupos formados por 2 daltônicos e dois não daltônicos. Como só temos dois daltônicos no grupo, então não há escolha a ser feita, os dois devem está no grupo. Para a escolha dos que não são daltônicos temos

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 4 \cdot 7 = 28$$

possibilidades de escolha. Assim, um grupo com 2 daltônico e 2 não daltônicos pode ser escolhido de 28 modos diferentes.

Portanto o número de maneiras distintas de selecionar 4 pessoas de maneira que haja pelo menos 1 daltônico é $112 + 28 = 140$. ◇

Exemplo 145 *(UFMG 99) Um teste é composto por 15 afirmações. Para cada uma delas, deve-se assinalar, na folha de respostas, uma das letras V ou F, caso a afirmação seja, respectivamente, verdadeira ou falsa. A fim de se obter, pelo menos, 80% de acertos, o número de maneiras diferentes de se marcar a folha de respostas é*

a) 455.

b) 576.

c) 560.

d) 620.

e) 720.

Solução:

Note que 80% de 15 questões corresponde a $15 \cdot 0,8 = 12$ questões. Assim, como queremos pelo menos 80% de acertos devemos calcular de quantos modos podemos escolher 12, 13, 14 ou 15 das afirmações do teste para estarem corretas.

Contemos separadamente cada caso.

- Para 12 questões certas há

$$C_{15,12} = \frac{15!}{12! \cdot (15-12)!} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{14} \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

possibilidades de escolha.

- Para 13 questões certas há

$$C_{15,13} = \frac{15!}{13! \cdot (15-13)!} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot \cancel{14} \cdot \cancel{13!}}{\cancel{13!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105$$

possibilidades de escolha.

- Para 14 questões certas há $C_{15,14}$ modos de escolhas. Pela propriedade de igualdade de combinações complementares, temos $C_{15,14} = C_{15,1}$ e pelo item c do Exemplo 141, temos que $C_{15,1} = 15$. Assim, há 15 possibilidades de escolhas para 14 questões certas.

- Para 15 questões certas só há 1 possibilidade de escolha.

Assim, o número de maneiras de se obter pelo menos, 80% de acertos é $455 + 105 + 15 + 1 = 576$. ◇

Exemplo 146 *(NC-UFPR 2017)Durante uma cerimônia de formatura, cada um dos 32 formandos cumprimentou uma única vez (com um aperto de mãos) cada um de seus colegas e cada um dos 6 professores presentes à cerimônia. Além disso, cada um dos seis professores também cumprimentou cada um de seus colegas uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados durante essa cerimônia?*

a) 496.

b) 688.

c) 703.

d) 992.

e) 1214.

Solução:

Como são 32 formandos e 6 professores temos um total de 38 pessoas. Note que cada formando cumprimentou uma única vez cada colega e cada professor e além disso cada professor também se cumprimentou uma única vez, então os cumprimentos são sempre feitos com 2 pessoas e não se repetem. Assim o número de apertos de mãos é dado pela combinação simples de 38 tomados 2 a 2, ou seja foram dados

$$C_{38,2} = \frac{38!}{2! \cdot (38-2)!} = \frac{38!}{2! \cdot 36!} = \frac{\cancel{38} \cdot 37 \cdot \cancel{36!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{36!}} = 19 \cdot 37 = 703$$

apertos de mão. ◇

Exemplo 147 *(FGV) O número de segmentos de reta que têm ambas as extremidades localizadas nos vértices de um cubo dado é:*

a) 12.

b) 15.

c) 18.

d) 24.

e) 28.

Solução:

Sabemos que um cubo tem 8 vértices sendo que não há três ou mais deles colineares e um segmento de reta fica determinado por dois pontos, além disso o segmento $\overline{AB}$ é igual ao segmento $\overline{BA}$. Assim para determinar o número de segmentos de retas com extremidades nestes vértices, basta escolhermos 2 deles, o que pode ser feito de

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 4 \cdot 7 = 28$$

modos diferentes.

Portanto é possível formar 28 segmentos de retas com extremidades nos vértices de um cubo. ◇

Exemplo 148 *(Mackenzie 96 adaptada)A partir de um grupo de 10 pessoas devemos formar k comissões de pelo menos dois membros, sendo que em todas deve aparecer uma determinada pessoa A do grupo. Então k vale:*

a) 216.

b) 511.

c) 512.

d) 1023.

e) 1024.

Solução:

Como a pessoa A deve estar em todas as comissões então devemos escolher as outras pessoas que irão compor a comissão entre as 9 pessoas restantes. Como a comissão deve ter pelo menos 2 membros então devemos contar todas as comissões com 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 membros. Contando-as separadamente, temos:

- para as comissões com 2 membros há $C_{9,1} = 9$ (pelo item c do exemplo 141) possibilidades de escolha;

- para as comissões com 3 membros há

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 9 \cdot 4 = 36$$

possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 4 membros há

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 5 membros há

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$$

possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 6 membros há $C_{9,5} = C_{9,4} = 126$ (combinações complementares) possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 7 membros há $C_{9,6} = C_{9,3} = 84$ (combinações complementares) possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 8 membros há $C_{9,7} = C_{9,2} = 36$ (combinações complementares) possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 9 membros há $C_{9,8} = C_{9,1} = 9$ (pelas combinações complementares e pelo item c do exemplo 141) possibilidades de escolha;

- Para as comissões com 10 membros há 1 única possibilidade de escolha.

Assim, o número k de comissões com pelo menos 2 membros que podem ser formadas é $9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 511$. ◇

Exemplo 149 *(PUC-RJ) De um pelotão com 10 soldados, quantas equipes de cinco soldados podem ser formadas se em cada equipe um soldado é destacado como líder?*

a) 1260.

b) 1444.

c) 1520.

d) 1840.

e) 1936.

Solução:

Há 10 possibilidades de escolha para o líder, feito essa escolha, devemos escolher mais 4 soldados para compor a equipe entre os 9 soldados restantes. O que pode ser feito de

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$$

modos diferentes.

Assim, o número de equipes com 5 soldados onde 1 é destacado como líder é $10 \cdot 126 = 1260$. ◇

Exemplo 150 *(Mack-2007 adaptada) Em uma sala de aula há 25 alunos, quatro deles considerados gênios. O número de grupos, com três alunos, que pode ser formado, incluindo pelo menos um dos gênios, é*

a) 580.

b) 780.

c) 970.

d) 1050.

e) 1200.

Solução:

Comecemos calculando todos os grupos de 3 alunos que podemos formar escolhendo-os entre os 25 alunos da sala, o que pode ser feito de

$$C_{25,3} = \frac{25!}{3! \cdot (25-3)!} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{25 \cdot \cancel{24} \cdot 23 \cdot \cancel{22!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{22!}} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300$$

modos diferentes.

Agora contamos todos os casos em que não há nenhum gênio do grupo, para isso devemos escolher grupos de 3 entre os 21 alunos restante (retira os 4 gênios). Assim, teremos

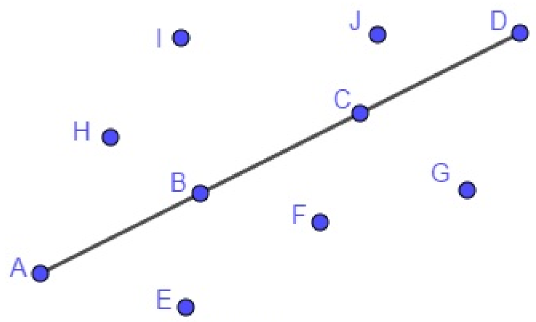
$$C_{21,3} = \frac{21!}{3! \cdot (21-3)!} = \frac{25!}{3! \cdot 18!} = \frac{\cancel{21} \cdot \cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{18!}} = 7 \cdot 10 \cdot 19 = 1330$$

possibilidades.

Portanto o número de grupos com 3 alunos que podemos formar nessa sala incluindo pelo menos um dos gênios é $2300 - 1330 = 970$. ◇

Exemplo 151 *(Vunesp-2005) Marcam-se, num plano, 10 pontos, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, dos quais 4 estão sobre a mesma reta e três outros pontos quaisquer nunca estão alinhados, conforme a figura.*

Figura 33: Pontos



Fonte: Autor

O número total de triângulos que podem ser formados, unindo-se três quaisquer desses pontos, é

a) 24.

b) 112.

c) 116.

d) 120.

e) 124.

Solução:

São necessários 3 pontos não colineares para formar um triângulo. Além disso um triângulo não difere do outro pela disposição dos vértices, por exemplo, os triângulos ABC e CBA são o mesmo. Então para determinar o número de triângulos, basta escolhermos 3 dos 10 pontos dados, o que pode ser feito de

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

modos diferentes.

No entanto, ao fazer essa escolha contamos também $C_{4,3} = C_{4,1} = 4$ casos que não formam um triângulo, pois são pontos que estão alinhados (A, B, C, D), devemos então retirá-los do total.

Assim, o número de triângulos que é possível formar é $120 - 4 = 116$. ◇

Exemplo 152 *(UEL-PR)São dados n pontos, dois a dois distintos entre si, 4 dos quais pertencem a uma reta r e os demais encontram-se sobre uma reta paralela a r. Se podem ser construídos 126 quadriláteros com vértices nesses pontos, então n é um número:*

a) quadrado perfeito.

b) primo.

c) múltiplo de 7.

d) menor que 10.

e) maior que 15.

Solução:

Para formar um quadrilátero precisamos escolher 2 pontos na reta r e 2 pontos na reta paralela a r. Como o total de pontos é n e a reta r possui 4 destes pontos, então sua paralela tem $(n-4)$ pontos. Assim, há $C_{4,2}$ modos de escolher dois pontos em r e $C_{n-4,2}$ modos de escolher dois pontos na paralela a r. Assim, pelo princípio fundamental da contagem há $C_{4,2} \cdot C_{n-4,2}$ modos de formar um quadrilátero nas condições dadas.

Como é dito que o número de quadriláteros formados é igual a 126, então temos

$$\begin{aligned}
C_{4,2} \cdot C_{n-4,2} = 126 \quad & \Rightarrow \quad \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{(n-4)!}{2! \cdot ((n-4)-2)!} = 126 \\
& \Rightarrow \quad \frac{4!}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{(n-4)!}{2 \cdot (n-6)!} = 126 \\
& \Rightarrow \quad \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{(n-4) \cdot (n-5) \cdot \cancel{(n-6)!}}{2 \cdot \cancel{(n-6)!}} = 126 \\
& \Rightarrow \quad \cancel{6} \cdot \frac{(n-4) \cdot (n-5)}{\cancel{2}} = 126 \\
& \Rightarrow \quad 3 \cdot (n-4) \cdot (n-5) = 126 \\
& \Rightarrow \quad (n-4) \cdot (n-5) = 42 \\
& \Rightarrow \quad n^2 - 9n - 22 = 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau temos $n = 11$ ou $n = -2$ (não serve). Logo, concluímos que $n = 11$ e portanto, é um número primo. ◇

Exemplo 153 *(ITA-2004) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?*

a) 210.

b) 315.

c) 410.

d) 415.

e) 521.

Solução:

Para formar um triângulo precisamos de três pontos não colineares, então façamos a escolha de 3 dos 12 pontos dispostos no plano, o que pode ser feito de

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{9!}} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

modos diferentes.

Destes há

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2}} = 5 \cdot 2 = 10$$

casos que não formam triângulos por serem pontos alinhados.

Portanto o número de triângulos que se pode formar é $220 - 10 = 210$. ◇

4.4 Caiu no ENEM

Neste capítulo temos abordado noções básicas sobre os métodos de contagem mais comumente apresentados no Ensino Médio e que são exigidos na competência 1, habilidades 2, 3 e 4 da matriz de referência do ENEM. Então nesta seção, como fizemos nos dois capítulos anteriores, trataremos de exercícios que abordaram essa competência em provas do ENEM ao longo dos últimos 10 anos (2009 à 2019).

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Exercício 59 *(ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.*

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há *a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.*

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Solução:

Para dar uma resposta o aluno deve escolher 1 objeto, o que pode ser feito de 5 modos diferentes, 1 personagem, o que pode ser feito de 6 modos diferentes e 1 cômodo, o que pode ser feito de 9 modos diferentes. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$ respostas possíveis. Como cada aluno só pode dar uma resposta e esta será sempre diferente das já apresentadas, então o número máximo de alunos que podem responder a pergunta é 270.

Então o diretor pode ter certeza que algum aluno acertará a resposta porque há $280 - 270 = 10$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 60 *(ENEM 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.*

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\dfrac{62^6}{10^6}$.

b) $\dfrac{62!}{10!}$.

c) $\dfrac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$.

d) $62! - 10!$.

e) $62^6 - 10^6$.

Solução:

Para definir uma senha no primeiro modelo proposto pelo banco, o cliente precisaria escolher 6 dígitos tendo 10 possibilidades (0 a 9) para a escolha de cada um destes. Pelo princípio fundamental da contagem isso daria $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ senhas possíveis.

Pelo novo modelo proposto, o cliente também deve escolher 6 dígitos, mas terá agora $26 + 26 + 10 = 62$ possibilidades de escolha para cada um deles (26 letras maiúsculas, 26 letras minúsculas e 10 algarismos). . Pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que é possível criar agora $62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^6$ senhas possíveis.

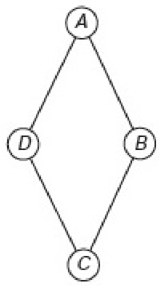
Assim, como o coeficiente de melhora é dado pela razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo, então é igual a $\dfrac{62^6}{10^6}$.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 61 *(ENEM 2013) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.*

Figura 34: Joia



Fonte: Caderno azul ENEM, 2013

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6.

b) 12.

c) 18.

d) 24.

e) 36.

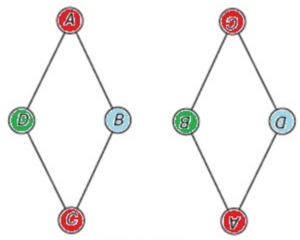
Solução:

Devemos considerar dois casos, os vértices A e C tem a mesma cor e os vértices A e C tem cores diferentes. Contemos as possibilidades de cada caso separado.

- Os vértices A e C tem cores iguais.

  Neste caso há 3 possibilidades de escolha para o vértice A, 2 possibilidades para o B (não pode ser igual a A), 1 possibilidade para o C (tem que ser a mesma cor de A) e 2 possibilidades para D (como A e C são iguais então D só não pode ter a mesma cor deles). Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ possibilidades para montar a joia. No entanto, por simetria o colar composto por A vermelho, B azul, C vermelho e D verde e o colar composto por A vermelho, B verde, C vermelho e D azul, por exemplo, são iguais. Veja a figura.

  Figura 35: Modelos de joias

  Fonte: Autor

  Isso significa que cada um dos casos acima foi contado duas vezes, logo o número de colares diferentes que se pode produzir com A e C iguais é $\dfrac{12}{2} = 6$.

- Os vértices A e C tem cores diferentes.

  Neste caso há 3 possibilidades de escolha para o vértice A, 2 possibilidades para o B (não pode ser igual a A), 1 possibilidade para o C (é diferente de A e não pode ser igual a B) e 1 possibilidade para D (não pode ser igual nem a A nem a C). Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ possibilidades para montar a joia.

Portanto é possível montar $6 + 6 = 12$ colares diferentes com as 3 pedras.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 62 *(ENEM 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia.*

Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \cdot 8! + (3!)^2$.

b) $8! \cdot 5! \cdot 3!$.

c) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$.

d) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$.

e) $\dfrac{16!}{2^8}$.

Solução:

No primeiro dia o cliente alugará 1 filme de ação o que pode fazer de 8 modos diferentes e 1 de comédia o que pode fazer de 5 modos diferentes, no segundo dia alugará novamente 1 filme de ação o que pode ser feito de 7 modos (não pode alugar o do dia anterior) e 1 de comédia o que pode ser feito de 4 modos diferentes (não pode alugar o do dia anterior) e assim sucessivamente, até que acabem os filmes de comédia e ele passa a alugar 1 de ação e 1 de drama. Então teremos a seguinte situação

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1^{\text{o}}\text{Dia} & 2^{\text{o}}\text{Dia} & 3^{\text{o}}\text{Dia} & 4^{\text{o}}\text{Dia} & 5^{\text{o}}\text{Dia} & 6^{\text{o}}\text{Dia} & 7^{\text{o}}\text{Dia} & 8^{\text{o}}\text{Dia} \\ \text{Filme} & \overbrace{A_1\ C_1} & \overbrace{A_2\ C_2} & \overbrace{A_3\ C_3} & \overbrace{A_4\ C_4} & \overbrace{A_5\ C_5} & \overbrace{A_6\ D_1} & \overbrace{A_7\ D_2} & \overbrace{A_8\ D_3} \\ \text{Possibilidades} & 8\ \ 5 & 7\ \ 4 & 6\ \ 3 & 5\ \ 2 & 4\ \ 1 & 3\ \ 3 & 2\ \ 2 & 1\ \ 1 \end{array}$$

Assim, pelo princípio fundamental da contagem há

$$8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! \cdot 5! \cdot 3!$$

maneiras do cliente alugar os filmes.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 63 *(ENEM 2015) Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.*

Tabela 4: Apuração do desfile de carnaval

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Fonte: Caderno cinza ENEM, 2015

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21.

b) 90.

c) 750.

d) 1 250.

e) 3 125.

Solução:

Perceba que a disputa da campeã está apenas entre as Escolas II e IV, pois mesmo que estas recebessem nota mínima no quesito bateria e as demais recebessem nota máxima, a pontuação ficaria

- Escola I - $55 + 10 = 65$;
- Escola II - $66 + 6 = 72$;
- Escola III - $50 + 10 = 60$;
- Escola IV - $68 + 6 = 74$;
- Escola V - $54 + 10 = 64$.

Ou seja, as Escolas I, III e V não atingiriam pontuação suficiente para superar as Escolas II e IV.

Então analisemos o que deve acontecer para que a escola II ganhe da Escola IV. Note que em caso de empate entre elas a campeã é a Escola II, pois apresenta notas maiores nos quesitos Enredo e Harmonia, que é o critério de desempate. Assim, a Escola II pode tirar 10 se a Escola IV tirar 8, 7 ou 6, ou pode tirar 9 se a Escola IV tirar 7 ou 6 ou ainda, pode tirar 8 se a Escola IV tirar 6. O que nos dá 6 possibilidades diferentes da Escola II ganhar da Escola IV.

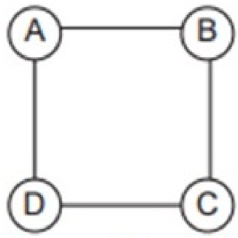
Perceba ainda que para cada uma destas possibilidades, temos 5 possibilidades de escolha de notas para a Escola I, 5 possibilidades de escolha de notas para a Escola III e 5 possibilidades de escolha de notas para a Escola V. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$ modos da Escola II ser a campeã.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 64 *(ENEM 2016 2ª aplicação) Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.*

Figura 36: Desenho dos círculos



Fonte: Caderno rosa 2ª aplicação ENEM, 2016

De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

a) 6.

b) 12.

c) 18.

d) 24.

e) 72.

Solução:

Devemos considerar dois casos, os círculos A e C tem a mesma cor e os círculos A e C tem cores diferentes. Contemos as possibilidades de cada caso separado.

- Os círculos A e C tem cores iguais. Neste caso há 3 possibilidades de escolha para o círculo A, 2 possibilidades para o B (não pode ser igual a A), 1 possibilidade para o C (tem que ser a mesma cor de A) e 2 possibilidades para D (como A e C são iguais então D só não pode ter a mesma cor deles). Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ possibilidades para a criança colorir o desenho.

- Os círculos A e C tem cores diferentes. Neste caso há 3 possibilidades de escolha para o círculo A, 2 possibilidades para o B (não pode ser igual a A), 1 possibilidade para o C (é diferente de A e não pode ser igual a B) e 1 possibilidade para D (não pode ser igual nem a A nem a C). Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ possibilidades para a criança colorir o desenho.

Portanto há $12 + 6 = 18$ modos de colorir o desenho nas condições que o pai apresentou.

Resposta: Letra c.

◇

O leitor deve ter notado que esse exercício é muito semelhante ao Exercício 61, no entanto no primeiro uma configuração tornava-se igual a outra por uma rotação, o que não ocorre neste caso uma vez que o desenho é fixo.

Exercício 65 *(ENEM 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.*

Tabela 5: Modelos de senhas

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

Fonte: Caderno cinza ENEM, 2017

As letras do alfabeto entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

Solução:

Comecemos analisando o número de senhas que se pode formar em cada opção.

Opção I - neste caso a senha deve ser composta por uma letra e 5 dígitos, sendo que para cada letra há 26 possibilidades de escolha e para cada dígito há 10 possibilidades. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2600000$ senhas possíveis. Um número superior ao dobro do número esperado de clientes, logo essa opção não serve;

Opção II - neste caso a senha deve ser composta por 6 dígitos sendo que para cada um há 10 possibilidades de escolha. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$ senhas possíveis. Como esse número é igual ao número esperado de clientes, então essa opção também não serve;

Opção III - neste caso a senha deve ser composta por 2 letras e 4 dígitos sendo que para cada letra há 26 possibilidades de escolha e para cada dígito há 10 possibilidades de escolha. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6760000$ senhas possíveis. Como esse número é superior ao dobro do número esperado de clientes, então essa opção também não serve;

Opção IV - neste caso a senha deve ser composta por 5 dígitos sendo que para a escolha de cada dígito há 10 possibilidades de escolha. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$ senhas possíveis. Como esse número é inferior ao número esperado de clientes, então essa opção também não serve;

Opção V - neste caso a senha deve ser composta por 3 letras e 2 dígitos sendo que para cada letra há 26 possibilidades de escolha e para cada dígito há 10 possibilidades de escolha. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 1757600$ senhas possíveis. Note que esta opção oferece um número de senhas superior ao número de clientes esperado e inferior ao dobro de clientes esperados, se adequando as condições da empresa.

Logo a opção V é a que melhor se adequa a empresa.

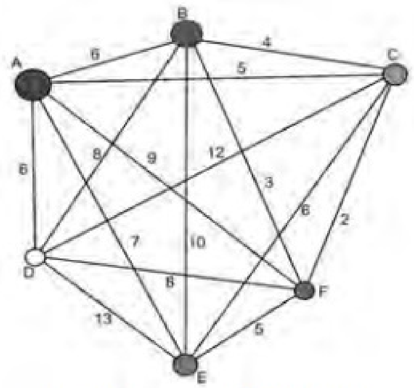
Resposta: Letra e.

◇

PERMUTAÇÕES

Exercício 66 *(ENEM 2010) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.*

Figura 37: Trajetos



Fonte: Caderno azul ENEM, 2010

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.

Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

a) *60 min.*

b) *90 min.*

c) *120 min.*

d) *180 min.*

e) *360 min.*

Solução:

Como João mora na cidade A então toda sequência que ele observar começará e terminará sempre em A, logo só iremos nos preocupar em permutar as outras 5 cidades B,C,D,E e F o que pode ser feito de $P_5 = 5! = 120$ modos diferentes. Mas como ele descarta as sequências simétricas, devemos dividir o número de permutações possíveis por 2, pois ao analisar cada sequência, esta mesma analise é válida para a sequência simétrica a ela. Assim, o número de trajetos diferentes que João pode observar é $\dfrac{120}{2} = 60$.

Agora sabemos que ele gasta 90 segundos (1 minuto e 30 segundos) para analisar cada trajeto, então o tempo mínimo necessário para calcular todos eles é de $60 \cdot 90\ segundos\ = 5400$ segundos (90min).

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 67 *(ENEM 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.*

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

a) 24.

b) 31.

c) 32.

d) 88.

e) 89.

Solução:

Devemos formar uma lista, em ordem crescente, com todos os números formados com todos os algarismos ímpares distintos e determinar a posição do número 75913 nesta lista. Neste caso, comecemos contando quantos são os números que começam com 1, 3 e 5 e quantos são os números que começam com 7 seguido de 1 e 3, pois estes serão menores que o número dado.

- Começando com 1, 3 ou 5.

  Para este caso, temos 3 possibilidades de escolha para o primeiro algarismo. Feita esta escolha, podemos organizar os demais algarismos de $P_4 = 4! = 24$ modos. Assim, há $3 \cdot 24 = 72$ números começando por 1, 3 ou 5.

- Começando por 71 ou 73

  Neste caso, temos 1 possibilidade de escolha para o primeiro algarismo (tem que ser 7), 2 possibilidades de escolha para o segundo (1 ou 3). Feitas estas escolhas, podemos organizar os outros algarismos de $P_3 = 3! = 6$ modos diferentes. Assim, há $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$ números começando por 71 ou 73.

Agora temos ainda mais 4 números que serão escritos antes do número dado (75139, 75193, 75319 e 75391). Neste caso serão escritos $72 + 12 + 4 = 88$ números antes de 75913.

Portanto a ordem de chamada do candidato será 89ª.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 68 *(ENEM 2016 1ª aplicação) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.*

Disponível em: www.infowester.com.
Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

a) $10^2 \cdot 26^2$.

b) $10^2 \cdot 52^2$.

c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2!}$.

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Solução:

Cada letra pode ser escolhida entre $26 + 26 = 52$ possibilidades (26 letras maiúsculas e 26 letras minúsculas) e cada algarismo entre 10 possibilidades (0 a 9).

Representando letra por L e algarismo por A podemos formar, por exemplo, a senha LLAA, onde o primeiro dígito pode ser escolhido de 52 modos o segundo de 52 modos, o terceiro de 10 modos e o quarto de 10 modos. Além disso, o número de maneiras de escolher a posição dessas duas letras e dois algarismos é dada por $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem o número total de senhas possíveis é $52 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 52^2 \cdot 10^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.
Resposta: Letra e.

◇

Exercício 69 *(ENEM 2019) Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.*

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a) 69.

b) 70.

c) 90.

d) 104.

e) 105.

Solução:

Comecemos escolhendo as duplas que tem 1 jogador canhoto. Podemos escolher o jogador que formará dupla com o primeiro canhoto de 6 maneiras diferentes (6 destros), já para o segundo canhoto há 5 possibilidades para a escolha de sua dupla (5 destros restantes). Feitas estas escolhas, há para o terceiro destro (dois já foram escolhidos), 3 possibilidades de escolha (dos 6, dois já foram e o 3° não pode formar dupla com ele mesmo). Para o 5° destro (quatro já foram escolhidos), há apenas uma possibilidade (o destro que restou). Assim, pelo princípio fundamental da contagem há $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 90$ maneiras diferentes para formar as quatro duplas.
Resposta: Letra c.

◇

ARRANJO E COMBINAÇÃO

Exercício 70 *(ENEM 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.*

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de *a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.*

b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) duas combinações.

e) dois arranjos.

Solução:

Note que para a formação do Grupo A serão sorteados 4 times, não importando sua ordem de escolha então podemos contar o número de escolhas usando uma combinação. Já para o jogo de abertura o primeiro sorteado tem o direito de jogar em seu próprio campo, então aqui a ordem da escolha é importante, logo podemos calcular essas possibilidades de escolha usando um arranjo. Dessa forma, a quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de uma combinação e um arranjo, respectivamente.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 71 *(ENEM 2012) O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.*

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br.
Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14.

b) 18.

c) 20.

d) 21.

e) 23.

Solução:

Note que 5 cores já podem ser identificadas de imediato com o sistema, as cores primárias (azul, amarelo e vermelho), branco e preto.

Contemos então quantas são as cores secundárias que podem ser representadas neste sistema. Perceba que a justaposição de dois símbolos não produz uma cor diferente de acordo com a ordem, por exemplo, se combinarmos o amarelo com o azul conseguimos representar o verde e se combinarmos o azul com o amarelo continuamos representando o verde. Então o número de cores secundárias que se pode representar é dado pela combinação de 3 tomados 2 a 2, ou seja, é possível representar $C_{3,2} = C_{3,1} = 3$ cores secundárias nesse sistema. Além disso, cada uma das cores primárias e secundárias podem aparecer na sua cor normal, ou clara (quando associada com o branco), ou escura (quando associada com o preto).

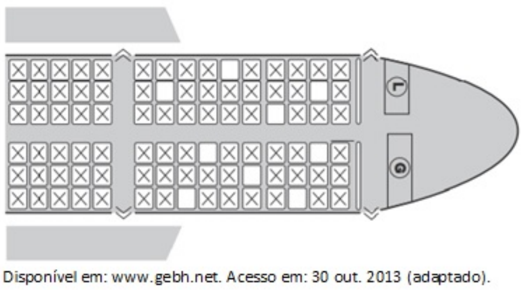
Assim é possível representar $3 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 = 20$ cores pelo sistema proposto. Sendo, 3 primárias na tonalidade normal, 3 secundarias na tonalidade normal, 6 primárias clara ou escura, 6 secundárias clara ou escura, 1 branca e 1 preta.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 72 *(ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.*

Figura 38: Disponibilidade de acentos do avião



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\dfrac{9!}{2!}$.

b) $\dfrac{9!}{7! \cdot 2!}$.

c) $7!$.

d) $\dfrac{5!}{2!} \cdot 4!$.

e) $\dfrac{5!}{4!} \cdot \dfrac{4!}{3!}$.

Solução:

Note que ainda há 9 lugares disponíveis e que a uma nova configuração é obtida de acordo com a ordem em que dispomos as pessoas, então o número de maneiras de acomodar essa família é dado por um arranjo simples de 9 tomados 7 a 7. Ou seja, há $A_{9,7} = \dfrac{9!}{(9-7)!} = \dfrac{9!}{2!}$ modos de acomodar a família.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 73 *(ENEM 2016 1ª aplicação)O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?*

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$.

c) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - 2$.

d) $\dfrac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$.

e) $\dfrac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$.

Solução:

Note que uma dupla não difere da outra pela ordem da escolha, ou seja a dupla A e B é a mesma B e A, então podemos escolher uma dupla entre os 10 tenistas de $C_{10,2} = \dfrac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!}$ modos diferentes.

Mas nesse caso contamos também as duplas formadas por dois canhotos, que não nos interessa. Temos 4 canhotos entre os tenistas, então uma dupla formada por 2 canhotos pode ser escolhida de $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$ modos diferentes.

Então há $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$ possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição atendendo as exigências do problema.

Resposta: Letra a.

◇

Exercício 74 *(ENEM 2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:*

Tabela 6: Torneio de futebol

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Fonte: Caderno amarelo ENEM, 2017.

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64.

b) 56.

c) 49.

d) 36.

e) 28.

Solução:

Como cada jogador joga uma única vez com cada um dos jogadores então para determinar o número de partidas basta contar de quantos modos podemos escolher uma dupla entre o número de jogadores. Como a dupla AB é igual a dupla BA, então esse número é dado pela combinação simples do número de jogadores tomados 2 a 2.

Assim, com 8 jogadores é possível realizar

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 4 \cdot 7 = 28$$

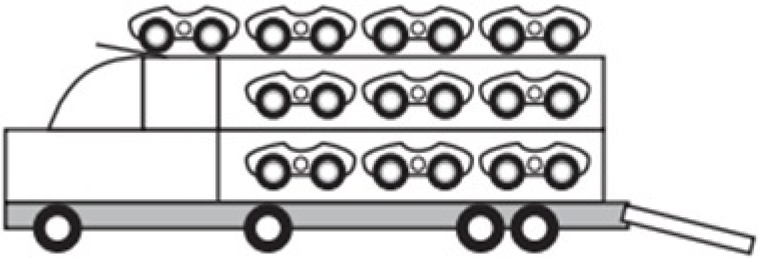
partidas.

Resposta: Letra e.

◇

Exercício 75 *(ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*

Figura 39: Modelo do brinquedo



Fonte: Caderno azul ENEM, 2017

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$.

b) $C_{9,3}$.

c) $C_{10,4}$.

d) 64.

e) 46.

Solução:

Sejam A, B, L, V as quantidades de carrinhos de cada cor que terá no brinquedo. Como São 10 carrinhos, então:

$$A + B + L + V = 10 \tag{4.33}$$

Como deve haver "pelo menos" 1 carrinho de cada uma das quatro cores, então queremos saber a quantidade de soluções positivas da equação acima. Ou seja, nenhuma incógnita pode ser zero. Em cada brinquedo deve haver pelo menos um carrinho Amarelo, um Branco, um Laranja e um Verde. Então fazemos uma troca de variáveis, do seguinte modo:

$$A = x + 1;$$

$$B = y + 1;$$

$$L = z + 1;$$

$$V = t + 1.$$

Fazendo a troca de variáveis, a equação 4.17 fica,

$$x + 1 + y + 1 + z + 1 + t + 1 = 10 \Rightarrow x + y + z + t = 6$$

Então o problema agora é equivalente a encontrarmos o número de soluções inteiras não negativas dessa última equação.

Para tanto, Analisemos a seguinte sequência $(\bullet + \bullet\bullet + \bullet\bullet + \bullet)$. Se pensarmos que o número de pontos antes do primeiro sinal de mais é o valor de x, entre o primeiro e o segundo sinal de mais, o valor de y, entre o segundo e terceiro sinal de mais, o valor de z e depois do terceiro sinal de mais, o valor de z então teremos, para este exemplo, $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$ e $t = 1$, o que nos dá soma 6 e, portanto, é uma solução da equação $x + y + z + t = 6$. Assim, para encontrarmos o número de soluções inteiras não negativas da equação dada, basta permutarmos 6 pontos e 3 sinais de mais entre si, o que pode ser feito de $P_9^{6,3} = \dfrac{9!}{6! \cdot 3!}$ modos diferentes.

Note ainda que, $\dfrac{9!}{6! \cdot 3!} = \dfrac{9!}{6! \cdot (9-6)!} = C_{9,3}$. Portanto o número de maneiras de colorir os carrinhos é dado por $C_{9,3}$.

Resposta: Letra b.

◇

Exercício 76 *(ENEM 2018) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.*

Disponível em: http://g1.globo.com.
Acesso em: 4 fev.2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) $A_{10,4}$.

b) $C_{10,4}$.

c) $C_{4,2} \cdot C_{6,2} \cdot 2 \cdot 2$.

d) $A_{4,2} \cdot A_{6,2} \cdot 2 \cdot 2$.

e) $C_{4,2} \cdot C_{6,2}$.

Solução:

Façamos primeiro a escolha dos automóveis que serão expostos. Perceba que a ordem dessa escolha é irrelevante, então estamos trabalhando com um problema de combinação simples.

A escolha do carro compacto pode ser feita de $C_{4,2}$ modos diferentes, pois a montadora disponibilizou 4 modelos para serem escolhidos 2. Já a escolha da caminhonete pode ser feita de $C_{6,2}$ modos diferentes, já que foram disponibilizados 6 caminhonetes de cores diferentes para se escolher 2. Feitas essas escolhas, há 2 possibilidades de escolha para expor os carros compactos (estande na estrada ou na região central) e do mesmo modo há 2 possibilidades de escolha para expor as caminhonetes.

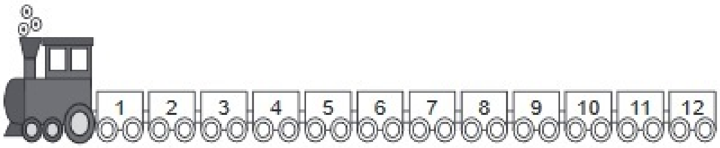
Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{4,2} \cdot C_{6,2} \cdot 2 \cdot 2$ maneiras diferentes para expor os automóveis.

Resposta: Letra c.

◇

Exercício 77 *(ENEM 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.*

Figura 40: Modelo do trem



Fonte: Caderno cinza ENEM, 2019.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C_{12,4} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,2}$.

b) $C_{12,2} + C_{8,3} + C_{5,3} + C_{2,2}$.

c) $C_{12,4} \cdot 2 \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,2}$.

d) $C_{12,4} + 2 \cdot C_{12,3} + C_{12,2}$.

e) $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$.

Solução:

Podemos fazer a escolha dos vagões que serão pintados de vermelho de $C_{12,4}$ modos diferentes. Feita essa escolha restam 8 vagões para serem pintados, então podemos escolher quais serão pintados de azul de $C_{8,3}$ modos diferentes. Agora restam 5 vagões para serem pintados, assim podemos escolher os que serão pintados de verde de $C_{5,3}$ modos diferentes e por fim podemos escolher os que serão pintados de amarelo de $C_{2,2}$ modos diferentes.

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$ modos de pintar os vagões.

Resposta: Letra e.

$\diamond$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação no Brasil apresenta dados preocupantes que devem, no mínimo, inquietar todo brasileiro, mas especialmente aqueles profissionais ligados diretamente a ela, dentre os quais destacam-se os professores que são responsáveis diretos pela formação dos estudantes. É certo que somente eles não são capazes de mudar uma realidade que vai muito além de simplesmente ensinar a disciplina para a qual foram formados academicamente. Mas isso não deve impedi-los de buscar meios e elaborar estratégias que contribuam para uma mudança significativa dessa realidade.

Quando a disciplina ministrada por esse profissional é a Matemática o desafio pode tornar-se ainda maior, uma vez que esta é, segundo dados do governo, uma das disciplinas que apresenta maiores índices de reprovação.

Ao concluir essa etapa do ensino, o estudante brasileiro tem como principal meio de acesso à universidade, a prova do ENEM a qual apresenta significativa parcela de questões voltadas para a disciplina de matemática e por isso faz-se necessário está muito bem preparado se deseja conquistar uma vaga no ensino superior.

Foi pensando nesses dados preocupantes e almejando contribuir com estudantes e professores do ensino básico que lidam com a preparação para o ENEM, que elaboramos esse material.

Vale ressaltar que essa dissertação abrange apenas uma pequena parcela dos conteúdos cobrados na prova e, por fins didáticos, omitimos as demonstrações de alguns resultados exibidos ao longo do texto. Para quem desejar aprofundar-se nos assuntos tratados aqui e em outros tópicos da matemática sugerimos a leitura dos livros e materiais que nortearam esse trabalho e encontram-se listados nas referências. Deixamos ainda, como sugestão, para trabalhos futuros a elaboração de um material como este que aborde os demais assuntos da prova do ENEM.

REFERÊNCIAS

[1] ASSIS, Cleber; MIRANDA, Tiago. *MDC e MMC 6° ano E.F.* . Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/8bkltnn1wtwcs.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2020

[2] ASSIS, Cleber; MIRANDA, Tiago. *Múltiplos e Divisores 6° ano E.F.* . Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/d5slrp7xnz4kg.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2020

[3] ASSIS, Cleber; MIRANDA, Tiago. *Propriedades de proporções 7° ano E.F.* . Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/dy64ywxbj34gc.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2020

[4] BAHIANO, Carlos E. N. *Números racionais e irracionais.* Disponível em: <https://miltonborba.org/OBMEP/APOST_3-Racin_Irrac.pdf>. Acesso em: 13.mar.2020.

[5] BENEVIDES, Fabrício Siqueira. *Princípio Fundamental da Contagem.* Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf>. Acesso em: 19 maio 2020.

[6] BENEVIDES, Fabrício Siqueira; NETO, Ângelo Papa. *O fatorial de um número e as permutações simples* . Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim80c.pdf>. Acesso em: 19 maio 2020.

[7] BUCCHI, Paulo. *Curso prático de matemática.* 1.ed. São Paulo: Moderna, 1998.

[8] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Métodos de Contagem e Probabilidade.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[9] CARVALHO, Sérgio; CAMPOS, Weber. *Raciocínio lógico simplificado* . vol.2. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

[10] CONEXÕES com a matemática vol. 2. Editora responsável Juliane Matsubara Barroso. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2010. 304p.

[11] DANTE, Luiz Roberto.*Matemática*: Contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

[12] DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana *Encontros de Aritmética.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[13] FERREIRA, Jamil. *A construção dos números.* 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] FRAÇÕES como razões. 6° ano/E.F. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/8aen0s25bi4gc.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2020

[15] FRAÇÕES e suas Operações. 6° ano/E.F. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/a2q8zswiivk84.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2020

[16] FREITAS, Elizabete Alves. *Razão, proporção e grandezas proporcionais.* BRASIL:MEC.

[17] GARCIA, Rômulo. *Módulo 1 - Razões e Proporções.* Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/326/matematica_basica_modulo_1_razao_proporcao_romulo_garcia.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2020.

[18] GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedict. *A Conquista da matemática, 6º ano.* 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

[19] GIOVANNI JR., José Ruy; CASTRUCCI, Benedict. *A Conquista da matemática, 7º ano.* 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

[20] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da matemática elementar* . vol. 5.3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

[21] HEFEZ, Abramo. *Iniciação à Aritmética.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[22] HOLANDA, Francisco Bruno; NETO, Antonio Caminha M. *A Noção de Razão e Exercícios.* Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a2lelc7rz94w0.pdf>. Acesso em: 09 maio 2020.

[23] HOLANDA, Francisco Bruno; NETO, Antonio Caminha M. *Proporções e Conceitos Relacionados.* Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf>. Acesso em: 09 maio 2020.

[24] HOLANDA, Francisco Bruno; NETO, Antonio Caminha M. *Propriedades de Proporções.* Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 09 maio 2020.

[25] HOLANDA, Francisco Bruno; NETO, Antonio Caminha M. *Números Diretamente e Inversamente Proporcionais.* Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmw0n6cgks.pdf>. Acesso em: 09 maio 2020.

[26] HOLANDA, Francisco Bruno;NETO,Antonio Caminha M. *Regra de Três Simples e Composta.* Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5nwaox43fmw4s.pdf>. Acesso em: 09 maio 2020.

[27] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar*: Conjuntos e Funções. vol.1. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

[28] INEP. *Relatório técnico do Sistema Nacional de Avaliação Básica - SAEB,2017.* Brasília:INEP/Ministério da Educação, 2017.

[29] LACERDA, José Carlos Admo. *Praticando a Aritmética.*4. ed. Rio de Janeiro: XYZ, 2012.

[30] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A matemática do ensino médio* . vol.2.7.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[31] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A matemática do ensino médio* vol.1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[32] LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem*: componente do ato pedagógico. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

[33] MATEMÁTICA Básica. Sapiens Colégio. 51 p.

[34] MATEMÁTICA 1 - Matemática básica. Disponível em: <https://pt.slideshare.netMarceloNunesdaSilva1/matemtica-bsica-coc-teoria>. Acesso em: 16 mar. 2020.

[35] MORGADO, A.C.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P.; *Análise Combinatória e Probabilidade.* 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[36] MURRIE,Zuleika de Felice (Coord). *Matemática e suas tecnologias*: livro do estudante, ensino médio. 2. ed. Brasília. MEC : INEP, 2006.

[37] NETO, Ângelo Papa. *Arranjos e Combinações Simples.* Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf>. Acesso em: 19 maio 2020.

[38] NETO, Ângelo Papa. *Critérios de divisibilidade*. Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads material_teorico/gfuewdw2kdcg4.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2020.

[39] NETO, Ângelo Papa. *MMC e MDC*: Parte 1. Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8ex39lt2qn8kw.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2020.

[40] NETO, Ângelo Papa. *Múltiplos e divisores*. Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/k2sgczml2e8k4.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2020.

[41] NETO, Ângelo Papa. *Permutações com elementos repetidos*. Revisão Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/cb4c5cmdhggko.pdf>. Acesso em: 19 maio 2020.

[42] PARANÁ (Estado). Secretaria de Educação. Departamento de Educação Básica. *Caderno de atividades - Matemática - Anos iniciais do Ensino Fundamental*. Paraná, 2009. 48 p.

[43] PARENTE, Ulisses et al. *Números Racionais (A) Frações*: material apresentado na Formação continuada de professores de matemática do Estado do Ceará. Juazeiro do Norte. 2019. 23 f. Notas prévias. Mimeografado.

[44] PARENTE, Ulisses et al. *Números Racionais (A) Operações com frações*: material apresentado na Formação continuada de professores de matemática do Estado do Ceará. Juazeiro do Norte. 2019. 23 f. Notas prévias. Mimeografado.

[45] PERNAMBUCO (Estado). Secretaria de Educação. Superintendência de Comunicação da Secretaria de Educação. *Ação de Fortalecimento da Aprendizagem-Anos Finais do Ensino Fundamental- Reforço Escolar-Caderno 2*. Pernambuco. 112 p.

[46] PIMENTEL, Fernado; MAYMONE, Annelise. *Aritmética Elementar (A)*: O sistema posicional, Adição e subtração, Técnicas de Cálculo mental, Os números relativos.Revisão Antonio Caminha M.Neto.Material apresentado na Formação continuada de professores de matemática do Estado do Ceará. Juazeiro do Norte. 2019. 23 f. Notas prévias. Mimeografado.

[47] PIMENTEL, Fernado; MAYMONE, Annelise. *Aritmética Elementar (B)*: Multiplicação, Divisão, Fatoração de números inteiros, MDC e MMC.Revisão Antonio Caminha

M. Neto. Material apresentado na Formação continuada de professores de matemática do Estado do Ceará. Juazeiro do Norte. 2019. 23 f. Notas prévias. Mimeografado.

[48] QUARTIERI, M.T. et al. *Atividades semelhantes à Prova Brasil-5º e 9º anos do Ensino Fundamental*. Rio Grande do Sul. 51 p.

[49] SILVA, Luiz Paulo Moreira. *Exercícios Sobre As Grandezas Diretamente Proporcionais*. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-as-grandezas-diretamente-proporcionais.htm>. Acesso em: 15 mai. 2020

[50] TEMCZUK, Rosimeri. *Matemática Básica no Ensino Médio*. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_pdf_rosimeri_temczuk.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2020