Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Alana Ventura Lucena

Uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade

João Pessoa - PB
2020

ALANA VENTURA LUCENA

Uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

João Pessoa - PB
2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A319p Lucena, Alana Ventura.
Uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade / Alana Ventura Lucena. - João Pessoa, 2020.
37 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Ensino de matemática. 2. Equação de primeiro grau. 3. Resolução de problemas. 4. Problemas de idade. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC CDU 51:37.091.3(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

ALANA VENTURA LUCENA

Uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos (UFPB)

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB)

Moisés Dantas dos Santos

Prof. Dr. Moisés Dantas dos Santos (UFPB)

Dedico este trabalho aos meus pais, aos meus irmãos, ao meu esposo e a todos aqueles que me incentivaram nessa conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde desfrutada e pela meta alcançada.

Aos meus pais, Ventura e Elzanir, por todo ensinamento, dedicação, sacrifício e por acreditarem em mim.

Aos meus irmãos, Aline e Danilo por estarem sempre presentes e torcerem pela minha vitória.

Ao meu esposo, Carlos, pelo amor, pela compreensão e pelo incentivo.

Aos meus familiares, pela torcida.

Aos professores do PROFMAT da UFPB, por toda contribuição, em especial, ao professor Dr. Eduardo Gonçalves pela competência, dedicação e paciência.

Aos meus colegas do mestrado, pelo apoio, parceria e incentivo.

RESUMO

Ao estudar os documentos oficiais que norteiam a educação no Brasil, verifica-se que eles mostram como o ensino da matemática e da equação de primeiro grau foi desenvolvido nas escolas, ao longo dos anos e ressaltam a importância da resolução de problemas nessa disciplina. Portanto apresentaremos neste trabalho uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade com o objetivo de aprimorar o ensino-aprendizagem em equações de primeiro grau com uma incógnita e despertar o interesse do aluno pela disciplina e pelo conteúdo, por se tratar de um conteúdo que pode ser ricamente explorado.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Equação de primeiro grau. Resolução de problemas. Problemas de idade.

ABSTRACT

Studying the official documents that guide education in Brazil, we see that they show how the mathematics teaching and the teaching of the first degree equation was developed in schools over the years and emphasize the importance of problem solving in this discipline. Therefore we will present in this essay a methodological proposal for teaching first-degree equation by solving age problems with the aim of improving teaching-learning in first-degree equations with an unknown part and creating the student's interest in the subject and the content, due to the fact that the content can be richly explored.

Key-words: Mathematics teaching. First degree equation. Problem-solving. Age problems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO AO TEMA DE PESQUISA

1.1 JUSTIFICATIVA

Diante das experiências dos professores de Matemática, constata-se uma grande dificuldade de o aluno compreender e desenvolver o raciocínio para a resolução de equações e problemas correlatos. Observa-se ainda que historicamente resolver problemas se dá de forma mecânica, limitada, baseada em técnicas, regras, conforme percebe-se na obra de Stanic e Kilpatrick (1989, p. 7):

> A principal razão para a maior ênfase dada pelos educadores matemáticos ao ensino da resolução de problemas é que, até este século, era assumido que o estudo da Matemática – de qualquer Matemática, não apenas daquela que agora consideramos problemas – melhoraria, de uma maneira geral, o pensamento das pessoas. Platão dizia que "aqueles que são por natureza bons em cálculo são, pode-se dizê-lo, naturalmente argutos em todos os outros estudos, e (...) aqueles que são lentos nisso, se são educados e exercitados nesse estudo, melhoram e tornam-se mais competentes do que eram.

Em virtude disso, várias foram as pesquisas realizadas a fim de encontrar um panorama que pudesse ser trabalhado no contexto escolar para suprir essa dificuldade. A literatura é ampla e há muitas pesquisas relacionadas ao ensino de equações do primeiro grau que tratam sobre as dificuldades apresentadas por estudantes, como por exemplo, as obras dos autores Polya (1995), Ponte (2004), Ribeiro (2007), Onuchic e Allevato (2011), dentre outros, e isso, gerou interesse em apresentar uma proposta didática a fim de melhorar a aprendizagem dos alunos através de resolução de problemas de idade.

Dessa forma, o estudo de equações do primeiro grau na educação básica adquire caráter significativo, quando possibilita o desenvolvimento de habilidades com relação à leitura e à interpretação, principalmente pelo fato de envolver os conhecimentos matemáticos ligados ao cotidiano dos alunos.

1.2 OBJETIVO GERAL

Apresentar uma proposta para o ensino e para aprendizagem de equação de primeiro grau utilizando problemas de idade.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer uma leitura a respeito dos documentos oficiais que balizam o ensino de matemática no Brasil;
- Fazer uma revisão bibliográfica sobre as pesquisas desenvolvidas e que tratam do ensino de equações do primeiro grau;
- Discorrer sobre a metodologia de Resolução de Problemas, apontando as suas principais nuances;
- Elaborar uma proposta de ensino para as Equações do Primeiro Grau à luz da metodologia da Resolução de Problemas e que utilize os problemas de idade.

1.4 METODOLOGIA

Essa pesquisa propõe através da resolução de problemas de idade, uma aprendizagem de equação do primeiro grau. É uma pesquisa qualitativa, pois o objeto a ser analisado possui caráter subjetivo e exploratório: a teoria e a metodologia possuem uma linha investigativa, interpretativa.

Com base nos objetivos, segundo Gil, é classificada como exploratória, pois tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias.

> Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de idéias ou a descoberta de intuições. (Gil, p.41, 2002).

A pesquisa exploratória busca novas perspectivas, como é o caso dessa, envolve aspectos comparativos, complementares e possui a vantagem de poder checar antes do início, a pertinência de sua contribuição e do que se propõe discutir.

Já com relação aos procedimentos técnicos utilizados, essa pesquisa é classificada como bibliográfica, baseado no procedimento utilizado para a coleta de dados. Assim:

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. (Gil, p.44, 2002).

Foi feito um levantamento bibliográfico, principalmente através de livros e artigos científicos com o objetivo de reunir informações e dados que servirão de base para a construção da proposta mencionada, assim como foram selecionados problemas com níveis diferentes de dificuldade, interpretação e forma de resolução.

1.5 DIVISÃO DO TRABALHO

O trabalho é constituído de três capítulos: este primeiro capítulo, intitulado ‘Introdução ao tema de pesquisa’ traz uma apresentação de uma proposta metodológica para o ensino de equação de primeiro grau por meio da resolução de problemas de idade e é composto por cinco seções: Justificativa, Objetivo geral, Objetivos específicos, Metodologia e Divisão do trabalho. O segundo capítulo, ‘Fundamentação Teórica’, possui três seções: A Educação Matemática e os documentos oficiais, O Ensino da equação de primeiro grau e Resolução de problemas. O terceiro capítulo intitulado ‘Uma proposta para o ensino da equação de primeiro grau utilizando problemas de idade’, possui duas seções: Problemas de idade e Resolução de problemas de idade através de equação de primeiro grau.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OS DOCUMENTOS OFICIAIS

A educação brasileira é norteada por caminhos que se desenvolveram ao longo dos anos para o aprimoramento e aprendizado gradativo do educando conforme as fases etárias, principalmente no universo matemático, que acontece de forma contínua. Em virtude disso, muitas vezes a dificuldade encontrada pelo aluno na elaboração do pensamento lógico, ponto de partida para a resolução de grande parte do estudo matemático posterior, vai desde as fases iniciais até o término dos seus estudos acadêmicos.

Nessa trajetória, a legislação nacional, Lei n. 9394/1996, estabelece a obrigatoriedade do ensino da matemática e do conhecimento do mundo físico e natural.

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.
>
> §1º Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. (BRASIL, 1996, Art. 26)

Essa obrigatoriedade de inserir a Matemática na grade curricular do ensino se dá pelo fato dela contribuir para o desenvolvimento mental, social e cotidiano do indivíduo. O raciocínio desenvolvido para a resolução dos problemas matemáticos pode ser utilizado em muitas outras áreas do conhecimento do cidadão e deve ser ferramenta para o ensino-aprendizagem da matemática, como cita Onuchic e Alevatto, (2011, p.78):

> Durante a década de 1980, educadores matemáticos que não desistiram de ideais preconizados anteriormente, que acreditavam no potencial da resolução de problemas e visavam a um ensino e aprendizagem com compreensão e significado, continuaram trabalhando nessa busca. Exatamente em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publica um documento intitulado An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's, com a indicação de que a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar".

O ensino da matemática tem absorvido modificações com o passar do tempo, no Brasil e no mundo. Essas mudanças têm sido feitas com o intuito de desenvolver melhores resultados para ultrapassar obstáculos encontrados pelos alunos na resolução de problemas e no desenvolvimento do raciocínio lógico que se faz tão necessário para compreensão e obtenção de resultados promissores nessa disciplina e, consequentemente, na vida de cada indivíduo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), tratam de aspectos de como melhorar a intermediação do conteúdo, entre professor e aluno. Algumas estratégias podem ser abordadas para a facilitação da compreensão do conteúdo matemático como a tecnologia, que se torna forte aliada; os jogos, instrumentos facilitadores para compreensão da lógica matemática num universo lúdico e criativo, entre outras que possam conectar a matemática e as demais áreas curriculares.

A tecnologia associada ao aprendizado científico e matemático é essencial, atualmente, na formação do cidadão, o que propicia um aprendizado na sala de aula, na vida e em todas as funções que o indivíduo for desempenhar, pois as informações, as habilidades e os valores desenvolvidos se tornam instrumentos de percepção, interpretação, desenvolvimento pessoal e, desta forma, a Matemática contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstração, do raciocínio e da compreensão de fatos matemáticos para interpretação da realidade.

> Calculadoras[1], computadores e outras tecnologias devem ser vistas como ferramentas essenciais para fazer e aprender matemática na sala de aula. A tecnologia permite que estudantes foquem nas ideias matemáticas, para raciocinar e resolver problemas de forma que seriam impossíveis sem essas ferramentas. A tecnologia melhora o aprendizado da Matemática permitindo maior exploração e representação aprimorada ideias e aumenta a gama de problemas que podem ser estudados. (WALLE; KARP; BAY-WILLIAMS, 2010, p. 34, tradução nossa)

E nesse viés, a equação, assunto que nos interessa, desde a sua compreensão, formalização e resolução tem sido objeto de estudo ao longo dos anos, na intenção de melhorar o entendimento e compreensão da linguagem utilizada e das suas técnicas para resolução. As preocupações em possibilitar a alunos e professores diferentes formas de conceber a equação são ratificadas pelas orientações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que enfatizam a importância do desenvolvimento do

[1] Calculators, computers, and other technologies should be seen as essential tools for doing and learning mathematics in the classroom. Technology permits students to focus on mathematical ideas, to reason, and to solve problems in ways that are often impossible without these tools. Technology enhances the learning of mathematics by allowing for increased exploration and enhanced representation of ideas. It extends the range of problems that can be accessed.

pensamento algébrico do aluno, o trabalho com atividades que envolvam diferentes perspectivas e formas de desenvolver a álgebra.

Para os alunos desenvolverem a habilidade de pensar de forma abstrata é necessário que eles tenham, a princípio, contato com a álgebra articulada com outra parte da matemática, como a aritmética, por exemplo, e desenvolvam o pensamento algébrico ao estudar situações que expressem regularidades e generalizações entre números, como é o caso das sequências, ou ainda aprendam a aperfeiçoar a linguagem algébrica através da geometria, enfim dessa forma irão desenvolver e trabalhar o raciocínio com o objetivo de generalizar situações matemáticas através da linguagem algébrica.

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar abstratamente, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (PCN, 2000, p.117).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que integra a política nacional de educação básica, define como deve se dar a aprendizagem na educação escolar, visando à formação humana para a construção de uma sociedade justa, que além de procurar garantir o acesso à escola, garanta também um aprendizado comum a todos os estudantes e formem pessoas capazes de resolver situações complexas pertinentes a vida do indivíduo.

No tocante a Matemática, uma das dez competências da BNCC (Brasil, 2017, p. 9) é:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

A resolução de problemas associada ao aprendizado da Matemática além de exercitar os conhecimentos aprendidos pelos alunos, algoritmos já conhecidos, contribui para desenvolver o raciocínio do indivíduo e desperta a capacidade de refletir e criar estratégias. Segundo a BNCC (Brasil, 2000, p. 267):

> A matemática por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade - precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas,

> figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas, na intenção que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.

O aluno aprende a interpretar, argumentar, raciocinar e ser capaz de resolver problemas usando as ferramentas matemáticas. Esse conhecimento estimula o raciocínio lógico e contribui para desenvolver a capacidade de abstrair o contexto, com ideias de equivalência, proporcionalidade, interdependência, relacionando e generalizando quantidades e grandezas, fazendo uso de letras e símbolos para solucionar problemas por meio de equações e inequações, compreendendo os diversos significados das variáveis numéricas.

Segundo Onunchic e Allevato (2011, p. 80) que coordena um grupo de trabalho e estudos em resolução de problemas:

> Esse é o ponto central de interesse dos trabalhos que temos desenvolvido atualmente, isto é, o trabalho com matemática através da resolução de problemas. Esse trabalho se apoia na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas.

O processo ensino aprendizagem é complexo e para atingir o sucesso depende de vários fatores. Não há uma regra a ser seguida e nem sempre uma receita que deu certo, significará sucesso sempre, não existe método de ensino que seja o melhor ou mais eficiente. A experiência, fatores externos, pesquisas, o material e os próprios alunos farão diferença nesse caminhar.

2.2 O ENSINO DA EQUAÇÃO DE PRIMEIRO GRAU

Em cada época histórica, foram várias as noções de equações tratadas pelos estudiosos. A busca de soluções estava relacionada com a resolução de problemas particulares, específicos de acordo com a necessidade apresentada.

Os babilônios trabalhavam com tábuas de cálculos, eram hábeis nos cálculos e mais fortes em álgebra do que em geometria, juntamente com eles, seguem os egípcios e seus papiros, com problemas de ordem prática, que utilizavam equações lineares com uma incógnita.

> Os problemas eram normalmente simples e não iam além das equações lineares com uma incógnita, a qual eles representavam por hau ou aha. Suas soluções não exigiam grandes métodos e raciocínios, sendo que o mais empregado, o da falsa posição, assemelha-se bastante com o que conhecemos hoje como "método das tentativas. (Ribeiro, 2009, p.72)

A noção de equações nessas civilizações procurava a solução de forma intuitiva, igualando duas quantidades, objetivando encontrar o valor desconhecido.

Já os gregos, não resolviam equações advindas de problemas práticos, utilizavam o método das proporções e o método da aplicação de áreas, pois a resolução tinha um caráter mais geométrico e surge nessa época, Diofanto de Alexandria, considerado um grande algebrista grego, contribuindo para o desenvolvimento dessa ciência. (Boyer citado por Ribeiro, 2009, p. 73).

Ribeiro (2009) ainda afirma que a matemática árabe se desenvolveu a partir da necessidade apresentada pelo comércio, pela arquitetura, pela astronomia, trabalhando também com problemas de ordem prática, porém a noção de equação tinha um caráter mais algébrico, generalizando situações, já os hindus utilizavam a matemática intuitiva, através do método da falsa posição ou de inversão, onde se trabalha o problema de frente para trás e Bháskara se destacou como o matemático mais importante deles (Ribeiro, 2009, p. 76).

Os Europeus colocavam as equações com características e propriedades bem definidas, a fim de se obter soluções gerais. Viète, francês, nascido em 1540 é considerado por vários o precursor da álgebra simbólica, utilizando letras para designar valores desconhecidos e outro matemático europeu que contribuiu para o estudo das equações foi René Descartes, também francês, nascido em 1596, que continuou o desenvolvimento da linguagem algébrica e contribuiu para a resolução de equações (Segundo Puig, citado por Ribeiro, 2009, p. 79).

Na atualidade, o estudo das equações marca o início de uma nova etapa do raciocínio matemático, uma vez que o aluno se depara pela primeira vez com uma linguagem de códigos e com grau de abstração nunca visto, a álgebra, parte da matemática que utiliza letras e símbolos para generalizar ideias e estruturas matemáticas e que exige também o conhecimento matemático anterior para trabalhar tais entidades abstratas.

Carolyn Kieran, (apud Ribeiro e Cury, 2015, p. 32), uma das pesquisadoras mais citadas no ensino e aprendizagem da Álgebra, classifica as atividades algébricas em três tipos:

> [...] geracional, transformacional e global. No primeiro estão inseridas as atividades que envolvem a formação de expressões e equações estudadas em Álgebra, como as equações de uma variável ou as expressões que representam padrões ou sequências numéricas, cujos entes subjacentes são as variáveis e as incógnitas. No segundo tipo incluem as atividades transformacionais ou baseadas em regras, [...] que incluem, por exemplo, reduzir termos semelhantes, fatorar, expandir, substituir, adicionar e multiplicar expressões polinomiais, elevar um polinômio a um determinado expoente, resolver equações, simplificar expressões, trabalhar com expressões equivalentes e equações, etc. No terceiro tipo proposto pela autora, estão as atividades nas quais a Álgebra é usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas desse ramo do conhecimento matemático, tais como a resolução de problemas, a modelagem, o estudo da variação, a generalização, a predição, etc.

Este início tem se revelado bastante problemático para a maioria dos alunos, pelo fato de entrarem em contato com novas expressões, novos símbolos e uma nova forma de pensar o conteúdo matemático e, nessa veia, vale salientar que o sucesso futuro na aprendizagem dessa área dependerá de como o aluno conseguirá evoluir esse tipo de raciocínio abstrato e resolver problemas através das equações. Segundo Ponte (2004, p.149):

> A aprendizagem das equações, conceito central da Álgebra, representa para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática. Ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações com que contactaram anteriormente, surgem agora outras expressões, envolvendo novos símbolos e novas regras de manipulação, que remetem para outro nível de abstracção. O início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos, sendo neste ponto que se decide em grande medida quais suas possibilidades de sucesso futuro na aprendizagem escolar desta disciplina.

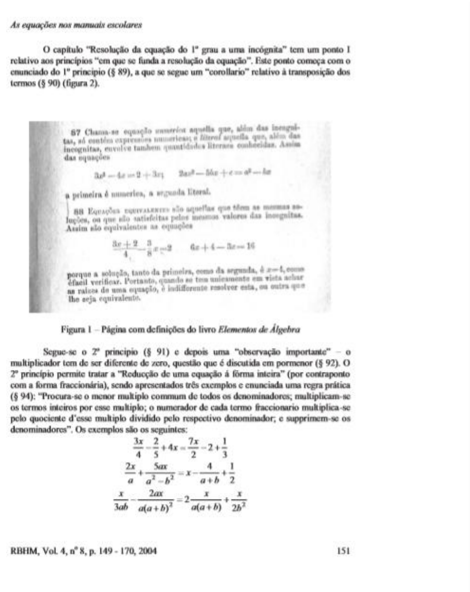
Estudos sobre equações são bastante antigos, como visto. Por muitos séculos, a resolução era feita sem incógnitas, através de trabalhosas figuras geométricas, o que tornava sua resolução muito complexa. Hoje, as equações são um instrumento utilizado para transcrever para linguagem matemática, problemas com valores desconhecidos, que têm sua importância reconhecida para o desenvolvimento das ciências e do raciocínio lógico.

As equações facilitam as resoluções de problemas mais difíceis do ponto de vista aritmético e conseguem construir a sintaxe das representações algébricas de diversos contextos. Existem muitas pesquisas relacionadas ao ensino de equações do primeiro grau que tratam das dificuldades apresentadas pelos estudantes do ensino básico, quando a eles são propostos solucionar uma equação ou solucionar problemas através delas. Esses estudos têm se mostrado de grande importância e utilidade por desenvolver propostas didáticas e produzirem resultados significativos em relação à aprendizagem.

João Pedro da Ponte (2004), em seu artigo intitulado ‘As equações nos manuais escolares’ faz uma análise em quatro manuais escolares portugueses de épocas diferentes, desde final do século XIX até os anos de 1990, pouco mais de cem anos, na intenção de verificar as abordagens feitas sobre o conceito de equações e como o conteúdo é abordado, com o intuito de verificar algumas mudanças: a apresentação do texto, se formal ou informal, a metodologia utilizada, se o texto traz figuras, se é motivador, se o nível dos exercícios aumenta de forma gradativa, se o assunto é abordado sempre para alunos de mesma faixa etária entre outras.

No primeiro manual, da autoria de Augusto José da Cunha, de 1887, ‘Elementos de Álgebra’, Ponte percebe que o texto é denso e não apresenta figuras, nem tabelas, nem esquemas, um texto formal e cujo nível é elevado. Apresenta desde o início, equações de coeficientes numéricos e literais e pressupõe conhecimentos anteriores, como expressões algébricas, operações com monômios, polinômios e frações algébricas. Há uma preocupação em ensinar técnicas para a resolução de equações e os exercícios se encontram no final do capítulo e têm naturezas semelhantes, porém com níveis diferentes de complexidade, dentre eles, caso geral de equação literal do 1º grau com várias incógnitas, mas sempre abordados com caráter estritamente matemático, sem nenhuma referência histórica, por exemplo.

Figura 1: Elementos de Álgebra de Augusto José da Cunha (1887).



As equações nos manuais escolares

O capítulo "Resolução da equação do 1º grau a uma incógnita" tem um ponto I relativo aos princípios "em que se funda a resolução da equação". Este ponto começa com o enunciado do 1º princípio (§ 89), a que se segue um "corollario" relativo à transposição dos termos (§ 90) (figura 2).

87 Chama-se equação *numerica* aquella que, além das incognitas, só contém expressões numericas; e *literal* aquella que, além das incognitas, envolve tambem quantidades literaes conhecidas. Assim das equações

[illegible]

a primeira é numerica, a segunda literal.

88 Equações equivalentes são aquellas que têem as mesmas soluções, ou que são satisfeitas pelos mesmos valores das incognitas. Assim são equivalentes as equações

[illegible]

porque a solução, tanto da primeira, como da segunda, é $x=4$, como é facil verificar. Portanto, quando se tem unicamente em vista achar as raizes de uma equação, é indifferente resolver esta, ou outra que lhe seja equivalente.

Figura 1 – Página com definições do livro *Elementos de Álgebra*

Segue-se o 2º principio (§ 91) e depois uma "observação importante" – o multiplicador tem de ser diferente de zero, questão que é discutida em pormenor (§ 92). O 2º princípio permite tratar a "Reducção de uma equação á fórma inteira" (por contraponto com a forma fraccionária), sendo apresentados três exemplos e enunciada uma regra prática (§ 94): "Procura-se o menor multiplo commum de todos os denominadores; multiplicam-se os termos inteiros por esse multiplo; o numerador de cada termo fraccionario multiplica-se pelo quociente d'esse multiplo dividido pelo respectivo denominador; e supprimem-se os denominadores". Os exemplos são os seguintes:

$$\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}+4x=\frac{7x}{2}-2+\frac{1}{3}$$

$$\frac{2x}{a}+\frac{5ax}{a^2-b^2}=x-\frac{4}{a+b}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{3ab}-\frac{2ax}{a(a+b)^2}=2\frac{x}{a(a+b)}+\frac{x}{2b^2}$$

RBHM, Vol. 4, nº 8, p. 149 - 170, 2004 151

Fonte: Ponte (2004, p.2)

No segundo manual, da autoria de J. Jorge G. Calado, de 1952, intitulado 'Compêndio de Álgebra', Ponte afirma não possuir, em seu texto sobre equações, tabelas e esquemas, mas possui resolução gráfica de equação de 1º grau. O conceito de equação é apresentado tardiamente, surge depois de expressões algébricas, operações com monômios e polinômios e frações algébricas e as equações trabalhadas são apenas as de coeficiente numéricos. O texto apresenta a noção de identidade e é motivador ao desenvolver o conteúdo através de diálogo com o leitor utilizando problemas, cunho histórico e problemas cotidianos, como os de idade.

No terceiro manual, da autoria de Antônio de Almeida Costa e Alfredo Osório dos Anjos, publicado em 1970, 'Compêndio de Matemática', segundo Ponte, é mostrado que a ideia de satisfazer uma equação é transformá-la numa igualdade numérica e mostra-se também a noção de equação impossível e de solução indeterminada da equação. O texto motiva o aluno a participar e há intenção do aluno aprender a resolver equações, através de uma "regra prática", apresentando processos da modernização da matemática.

No quarto manual, de Maria José Soares, publicado em 1992, 'Compêndio de Matemática', o texto mostra o porquê de estudar equações, mostrando sua aplicabilidade à Física, à engenharia e à resolução de problemas, resumindo, inclusive, quais devem ser os passos para resolvê-los: como escolher a incógnita, traduzir o problema para a linguagem da equação matemática, resolver a equação, analisar a solução e dar a resposta ao verificar a viabilidade da solução. Com relação ao texto, existem quadros, tabelas e esquemas para chamar a atenção para conceitos e ideias. Há também figuras decorativas para motivar o aluno e estuda-se só equações de coeficientes numéricos, já os problemas abordam geometria e situações cotidianas, mas não há referências históricas.

Figura 2: Compêndio de Matemática de Maria José Soares (1992)

João Pedro da Ponte

O segundo princípio é apresentado a partir do problema: "O perímetro de um quadrado é 16; qual é a medida do lado?" (p. 166). Apresenta-se ainda um terceiro problema: "A base de um rectângulo mede mais 5 cm que a sua altura, sendo o perímetro 34 cm. Quais as dimensões do rectângulo?" (p. 167). Indica-se então, através de um exemplo, um procedimento geral para a resolução de uma equação. Este procedimento fala em desembaraçar de parêntesis e reduzir os termos semelhantes (p. 167), mas não fala de desembaraçar de denominadores. Tendo apresentado diversos problemas ao longo do capítulo, a autora resume agora "os seguintes passos na resolução de um problema" (p. 168):

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA:
- *escolher a incógnita*
- *traduzir o problema em equação;*
- *resolver a equação;*
- *analisar a solução e dar a resposta.*

Figura 13 – Primeiros 4 exercícios propostos do livro *Compêndio de Matemática*

166 RBHM, Vol. 4, nº 8, p. 149 - 170, 2004

Fonte: Ponte (2004, p. 16)

Em suma, os alunos têm contato com a álgebra e com equações cada vez mais novos, e, nesse caminhar, o texto também foi ficando menos formal, com uma linguagem mais simples. A modernização da matemática apresenta textos com o intuito de motivar o aluno, seja através de uma figura, de um esquema, de um lembrete, de referências históricas ou através de problemas que envolvam ações cotidianas. São vistos os princípios de equivalência e regras para resolução de equações e aos poucos, o processo gráfico para resolução de equações do 1° grau.

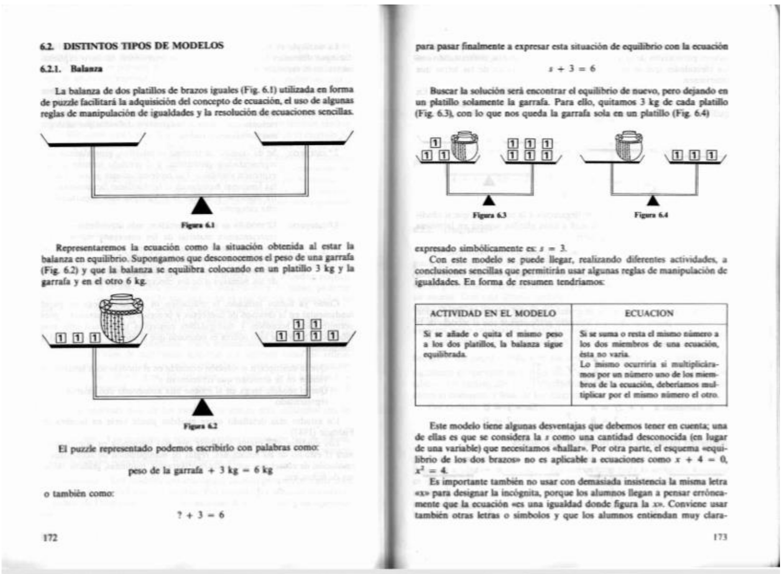
Na obra Iniciacion al Algebra (Robayna et al, 1996), os autores mencionam que se passaram mais três mil anos para se chegar ao processo atual para resolução de equações. Os egípcios, em seus papiros, deixaram muitos problemas matemáticos resolvidos, nos quais a equação de primeiro grau era a mais usada. Reitera que o método mais utilizado era o "método de la falsa posición" ou "regula falsi" que consistia em supor um intervalo que contivesse ao menos uma raiz e esse processo era repetido, reduzindo o intervalo, até ser encontrado uma raiz aproximada, com erro mínimo, que satisfizesse a igualdade.

O método atual sugere relacionar conceitos a estruturas básicas ou esquemas concretos para facilitar a aprendizagem, pois uma vez desenvolvida uma forma geral e o raciocínio para resolver equações, permitirá o aluno passar uma situação-problema para a linguagem matemática correspondente e depois generalizá-la para as demais situações.

Alguns modelos concretos intuitivos explorados nessa obra, foram:

1- A balança de pratos;

Figura 3: Balança de pratos para equações



6.2. DISTINTOS TIPOS DE MODELOS

6.2.1. Balanza

La balanza de dos platillos de brazos iguales (Fig. 6.1) utilizada en forma de puzzle facilitará la adquisición del concepto de ecuación, el uso de algunas reglas de manipulación de igualdades y la resolución de ecuaciones sencillas.

Figura 6.1

Representaremos la ecuación como la situación obtenida al estar la balanza en equilibrio. Supongamos que desconocemos el peso de una garrafa (Fig. 6.2) y que la balanza se equilibra colocando en un platillo 3 kg y la garrafa y en el otro 6 kg.

Figura 6.2

El puzzle representado podemos escribirlo con palabras como:

peso de la garrafa + 3 kg = 6 kg

o también como:

$$? + 3 = 6$$

172

para pasar finalmente a expresar esta situación de equilibrio con la ecuación

$$x + 3 = 6$$

Buscar la solución será encontrar el equilibrio de nuevo, pero dejando en un platillo solamente la garrafa. Para ello, quitamos 3 kg de cada platillo (Fig. 6.3), con lo que nos queda la garrafa sola en un platillo (Fig. 6.4)

Figura 6.3 Figura 6.4

expresado simbólicamente es: $x = 3$.

Con este modelo se puede llegar, realizando diferentes actividades, a conclusiones sencillas que permitirán usar algunas reglas de manipulación de igualdades. En forma de resumen tendríamos:

ACTIVIDAD EN EL MODELO	ECUACION
Si se añade o quita el mismo peso a los dos platillos, la balanza sigue equilibrada.	Si se suma o resta el mismo número a los dos miembros de una ecuación, ésta no varía. Lo mismo ocurriría si multiplicáramos por un número uno de los miembros de la ecuación, deberíamos multiplicar por el mismo número el otro.

Este modelo tiene algunas desventajas que debemos tener en cuenta; una de ellas es que se considera la x como una cantidad desconocida (en lugar de una variable) que necesitamos «hallar». Por otra parte, el esquema «equilibrio de los dos brazos» no es aplicable a ecuaciones como $x + 4 = 0$, $x^2 = 4$.

Es importante también no usar con demasiada insistencia la misma letra «x» para designar la incógnita, porque los alumnos llegan a pensar erróneamente que la ecuación «es una igualdad donde figura la x». Conviene usar también otras letras o símbolos y que los alumnos entiendan muy clara-

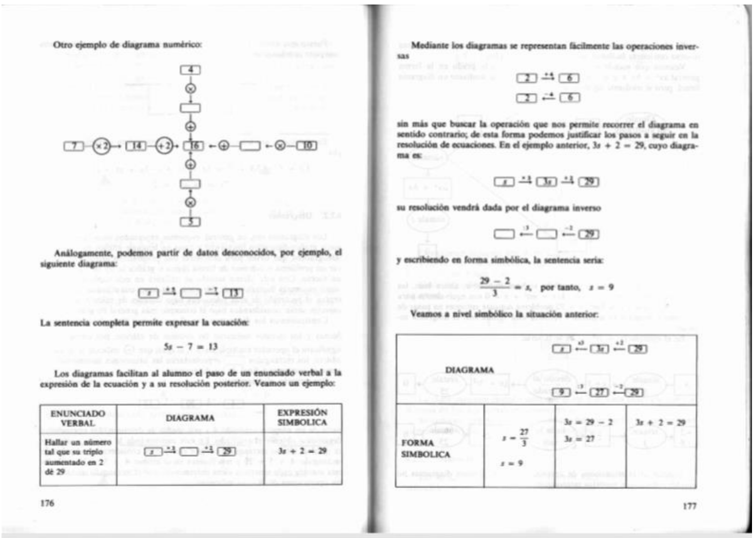
173

Fonte: Robayna (1996, p. 172)

Essa facilitará o entendimento do conceito de equação, o uso das regras de manipulação para que a igualdade seja mantida, onde sabe-se que obter a solução é obter o equilíbrio novamente após isolar o valor desconhecido;

2- Os diagramas;

Figura 4: Diagramas



Otro ejemplo de diagrama numérico:

$\boxed{7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{14} \xrightarrow{+2} \boxed{16}$; $\boxed{4}$; $\boxed{5}$; $\boxed{10}$

Análogamente, podemos partir de datos desconocidos, por ejemplo, el siguiente diagrama:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 5} \boxed{} \xrightarrow{-7} \boxed{13}$$

La sentencia completa permite expresar la ecuación:

$$5x - 7 = 13$$

Los diagramas facilitan al alumno el paso de un enunciado verbal a la expresión de la ecuación y a su resolución posterior. Veamos un ejemplo:

ENUNCIADO VERBAL	DIAGRAMA	EXPRESIÓN SIMBOLICA
Hallar un número tal que su triplo aumentado en 2 dé 29	$\boxed{x} \xrightarrow{\times 3} \boxed{} \xrightarrow{+2} \boxed{29}$	$3x + 2 = 29$

176

Mediante los diagramas se representan fácilmente las operaciones inversas

$$\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{6}$$
$$\boxed{2} \xleftarrow{-4} \boxed{6}$$

sin más que buscar la operación que nos permite recorrer el diagrama en sentido contrario; de esta forma podemos justificar los pasos a seguir en la resolución de ecuaciones. En el ejemplo anterior, $3x + 2 = 29$, cuyo diagrama es:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 3} \boxed{3x} \xrightarrow{+2} \boxed{29}$$

su resolución vendrá dada por el diagrama inverso

$$\boxed{} \xleftarrow{:3} \boxed{} \xleftarrow{-2} \boxed{29}$$

y escribiendo en forma simbólica, la sentencia sería:

$$\frac{29-2}{3} = x, \quad \text{por tanto,} \quad x = 9$$

Veamos a nivel simbólico la situación anterior:

DIAGRAMA	$\boxed{x} \xleftarrow{\times 3} \boxed{3x} \xleftarrow{+2} \boxed{29}$ $\boxed{9} \xleftarrow{:3} \boxed{27} \xleftarrow{-2} \boxed{29}$		
FORMA SIMBOLICA	$x = \frac{27}{3}$ $x = 9$	$3x = 29 - 2$ $3x = 27$	$3x + 2 = 29$

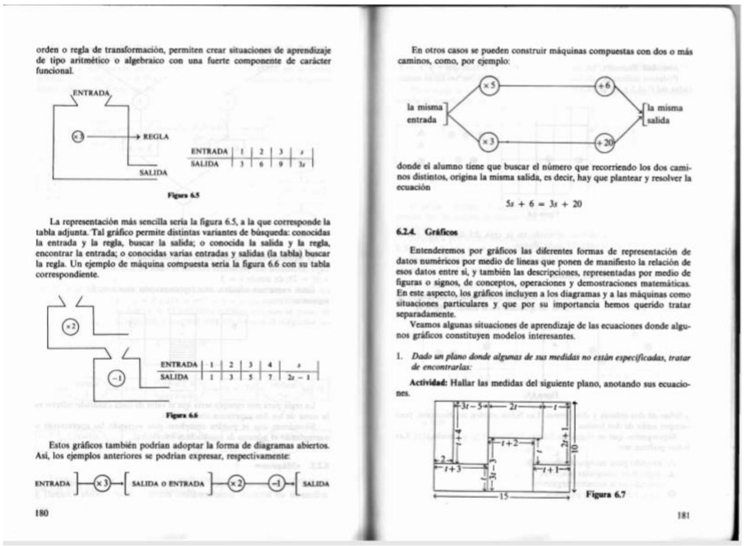
177

Fonte: Robayna (1996, p. 176)

Com eles, o aluno terá facilidade para transformar um enunciado verbal para linguagem algébrica, assim como, representar mais facilmente a operação inversa através de figuras como o retângulo, por exemplo, onde se inserirá o número e as setas, que informarão as operações;

3- As máquinas;

Figura 5: Máquinas para resolução de equações



orden o regla de transformación, permiten crear situaciones de aprendizaje de tipo aritmético o algebraico con una fuerte componente de carácter funcional.

ENTRADA	1	2	3	x
SALIDA	3	6	9	$3x$

Figura 6.5

La representación más sencilla sería la figura 6.5, a la que corresponde la tabla adjunta. Tal gráfico permite distintas variantes de búsqueda: conocidas la entrada y la regla, buscar la salida; o conocida la salida y la regla, encontrar la entrada; o conocidas varias entradas y salidas (la tabla) buscar la regla. Un ejemplo de máquina compuesta sería la figura 6.6 con su tabla correspondiente.

ENTRADA	1	2	3	4	x
SALIDA	1	3	5	7	$2x - 1$

Figura 6.6

Estos gráficos también podrían adoptar la forma de diagramas abiertos. Así, los ejemplos anteriores se podrían expresar, respectivamente:

180

En otros casos se pueden construir máquinas compuestas con dos o más caminos, como, por ejemplo:

donde el alumno tiene que buscar el número que recorriendo los dos caminos distintos, origina la misma salida, es decir, hay que plantear y resolver la ecuación

$$5x + 6 = 3x + 20$$

6.2.4. Gráficos

Entenderemos por gráficos las diferentes formas de representación de datos numéricos por medio de líneas que ponen de manifiesto la relación de esos datos entre sí, y también las descripciones, representadas por medio de figuras o signos, de conceptos, operaciones y demostraciones matemáticas. En este aspecto, los gráficos incluyen a los diagramas y a las máquinas como situaciones particulares y que por su importancia hemos querido tratar separadamente.

Veamos algunas situaciones de aprendizaje de las ecuaciones donde algunos gráficos constituyen modelos interesantes.

1. *Dado un plano donde algunas de sus medidas no están especificadas, tratar de encontrarlas:*

Actividad: Hallar las medidas del siguiente plano, anotando sus ecuaciones.

Figura 6.7

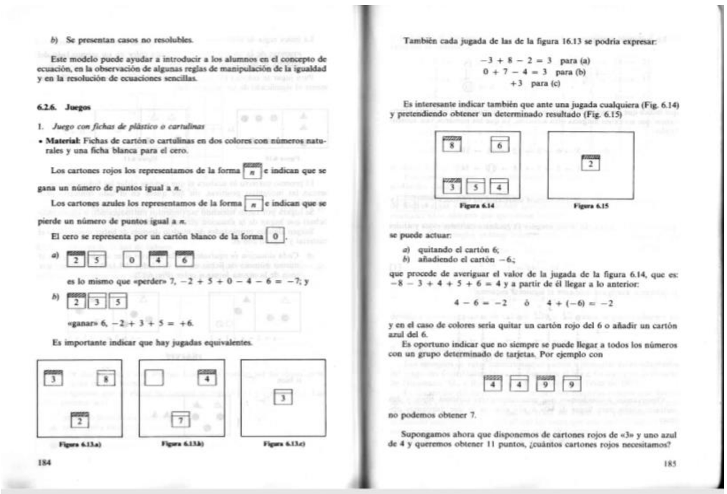
181

Fonte: Robayna (1996, p. 180)

Recurso que utiliza uma interface informatizada, utilizando a ideia de entrada, lei de transformação e saída;

4- Os jogos;

Figura 6: Jogos para resolução de equações



b) Se presentan casos no resolubles.

Este modelo puede ayudar a introducir a los alumnos en el concepto de ecuación, en la observación de algunas reglas de manipulación de la igualdad y en la resolución de ecuaciones sencillas.

6.2.6. Juegos

1. *Juego con fichas de plástico o cartulinas*

- **Material:** Fichas de cartón o cartulinas en dos colores con números naturales y una ficha blanca para el cero.

Los cartones rojos los representamos de la forma $\boxed{n}$ e indican que se gana un número de puntos igual a n.

Los cartones azules los representamos de la forma $\boxed{n}$ e indican que se pierde un número de puntos igual a n.

El cero se representa por un cartón blanco de la forma $\boxed{0}$.

a) $\boxed{2}\ \boxed{5}\quad \boxed{0}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$

es lo mismo que «perder» 7, $-2 + 5 + 0 - 4 - 6 = -7$; y

b) $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$

«ganar» 6, $-2 + 3 + 5 = +6$.

Es importante indicar que hay jugadas equivalentes.

Figura 6.13.a) Figura 6.13.b) Figura 6.13.c)

184

También cada jugada de las de la figura 16.13 se podría expresar:

$$-3 + 8 - 2 = 3 \quad \text{para (a)}$$
$$0 + 7 - 4 = 3 \quad \text{para (b)}$$
$$+3 \quad \text{para (c)}$$

Es interesante indicar también que ante una jugada cualquiera (Fig. 6.14) y pretendiendo obtener un determinado resultado (Fig. 6.15)

Figura 6.14 Figura 6.15

se puede actuar:

a) quitando el cartón 6;
b) añadiendo el cartón −6.;

que procede de averiguar el valor de la jugada de la figura 6.14, que es: $-8 - 3 + 4 + 5 + 6 = 4$ y a partir de él llegar a lo anterior:

$$4 - 6 = -2 \quad \text{ó} \quad 4 + (-6) = -2$$

y en el caso de colores sería quitar un cartón rojo del 6 o añadir un cartón azul del 6.

Es oportuno indicar que no siempre se puede llegar a todos los números con un grupo determinado de tarjetas. Por ejemplo con

$\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{9}$

no podemos obtener 7.

Supongamos ahora que disponemos de cartones rojos de «3» y uno azul de 4 y queremos obtener 11 puntos, ¿cuántos cartones rojos necesitamos?

185

Fonte: Robayna (1996, p. 184)

Por exemplo, a utilização de fichas de cartolina de duas cores para indicar números positivos e negativos e ficha de cartolina branca para indicar o zero. É interessante propor antes, que número pretende se obter e vale salientar que nem sempre diante de um grupo de cartolinas com números, conseguirá obter o resultado desejado.

Bautista (2004), em seu trabalho, 'Razonamiento Matemático - Estrategias en la resolución de problemas', começa o estudo sobre equações apontando três delas, como:

1) $$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

2) $$\frac{3x-1}{3} = x + 5$$

3) $$3x = 12$$

Na equação (1), a igualdade é verdadeira para qualquer valor de x. Na (2), não há valor de x que torne a sentença verdadeira e na (3), apenas para um valor de x se verifica a igualdade.

Apresentando a equação **identidade**, como acontece na ocasião (1).

Quando se tem uma equação onde se verifica a igualdade para infinitos valores de x, tem-se uma equação indeterminada, como por exemplo:

4) $$5x - 2y = 105$$

E quando não existir nenhum valor, a equação é dita impossível, como:

5) $$3(x-2) = 3x + 8$$

Então, resolver uma equação é encontrar o valor numérico que torna a igualdade verdadeira, chamado de **raiz,** quando há uma só incógnita.

Esse autor também traz o conceito de equações equivalentes como sendo equações que possuem a mesma solução e apresenta as propriedades fundamentais para a transformação de equações:

1- Obtém-se uma equação equivalente ao somar ou subtrair uma mesma expressão algébrica inteira, em particular uma constante a ambos os membros;
2- Também se obtém uma equação equivalente ao multiplicar ou dividir, por um mesmo número, diferente de zero. Vale salientar que o mesmo pode não ocorrer se ao invés de um número, a equação for multiplicada ou dividida por uma expressão algébrica;
3- Ao se elevar ambos os membros ao mesmo número, obtém-se ao menos todas as raízes da primeira;

4- Ao se extrair raízes de mesmo índice em ambos os membros, obtém-se equação que poderá ter menos raízes que a original.

Barbarón e Peréz (2018), em sua obra, 'Razonamiento Matemático', começa o estudo das equações construindo como o aluno deve interpretar enunciados e os traduzi-los para a linguagem matemática através de problemas que aumentam gradativamente seu nível de interpretação, sugerindo mais de sessenta exercícios para a prática.

Já Vega (2017), na obra 'Razonamiento Matemático - problemas de nível', sugere que para escrever uma equação na linguagem algébrica é necessário compreender e interpretar aquilo que se pede em um problema, apresentar fragmentos de enunciados e em seguida, mostrar como esse fragmento transforma-se na linguagem matemática, e, de maneira crescente, vai construindo o raciocínio do aluno, porém essa é a única forma introdutória no capítulo dedicado ao estudo das equações. Em seguida, trabalha com exemplos, depois exercícios resolvidos e, por último com problemas sugeridos, todos em ordem crescente de dificuldade.

Ribeiro e Dorigo (2015, p. 7), realizam, em sua obra, um estudo de caráter diagnóstico para que a aprendizagem de equações contemple vários significados do conceito de equação: Intuitivo-Pragmático, Dedutivo-Geométrico, Estrutural-Generalista, Estrutural-Conjuntista, Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional.

> Intuitivo-Pragmático - concebidas como igualdade entre valores, ligada às ideias intuitivas, tratadas de forma aritmética e sempre vinculadas a problemas práticos;
> Dedutivo-Geométrico - ligada a figuras geométricas, nas quais as incógnitas eram, normalmente, segmentos de reta; posteriormente (entre 250 d.C. e 350 d.C. com Diofanto de Alexandria), essas equações eram tratadas de forma dedutiva;
> Estrutural-Generalista - reconhece uma equação a partir de sua generalização, sejam incógnitas ou parâmetros, e tratam-na de forma estrutural. Significa dizer que para os europeus, o olhar estava sobre as propriedades algébricas envolvidas na resolução das equações;
> Estrutural-Conjuntista - as equações são reconhecidas como sendo relações entre conjuntos e sempre tratadas de forma a observar as propriedades algébricas;
> Processual-Tecnicista - o indivíduo reconhece uma equação através do processo de resolução e trata-a segundo técnicas de manipulações algébricas;
> Axiomático-Postulacional - uma equação pode ser reconhecida como algo sem definição, de maneira análoga a um conceito primitivo como o da geometria.

O resultado desse estudo sinaliza para o excesso de processos mecânicos e automáticos utilizados pelos alunos para resolução de equações e mostra também a dificuldade que eles têm de reconhecer o conceito e o uso delas em situações matemáticas. Os significados processual-tecnicista e o intuitivo pragmático foram os mais presentes na aprendizagem e além de se verificar que eles não conseguem associar equações à resolução dos problemas e resolvem-nos em sua maioria, através do método das tentativas, o que leva a conclusão de que não se pode conceber a noção de equação apenas como um conjunto de regras e procedimentos para chegar a solução, é preciso que o aluno saiba articular diferentes formas de representação, ao se tratar do mesmo problema, para assim construir o conhecimento matemático.

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo preceitua os PCN (2000, p. 52),

> [...] a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Dessa forma, faz-se necessário inserir a resolução de problemas como ferramenta para o ensino-aprendizagem da Matemática para os alunos, despertando interesse no conteúdo e mostrando aplicação no seu cotidiano.

A resolução de problemas se tornou alvo de pesquisa e recebeu mais atenção a partir de Polya, um dos principais nomes dessa área:

> A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considera-la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção a partir de Polya (1944), considerado o pai da Resolução de Problemas. (Onuchic, 1999, p.5)

Em sua obra, 'A Arte de Resolver Problemas', Polya elenca quatro etapas de como resolver um problema:

1- Compreender o problema: desejar resolver o problema, identificar a incógnita, os dados, a condicionante;
2- Estabelecer um plano: saber qual a conexão entre os dados e a incógnita; saber se existe algum problema semelhante conhecido e já resolvido; saber se é possível utilizar o resultado do problema já conhecido ou estabelecer entre eles alguma ligação;
3- Executar o plano: verificar se cada passo está correto;

4- Retrospecto: verificar o resultado, saber se é possível chegar ao resultado por outro caminho e saber se é possível utilizar o resultado em outro problema.

Walle, Karp e Bay-Williams (2010, p. 34) também defendem a ideia de que a resolução de problemas contribui para o desenvolvimento das ideias matemáticas, para o desenvolvimento do pensamento lógico e diz que além de resolver o problema, o aluno deverá saber interpretar o resultado. O estudante precisa aprender a conectar assuntos dentro da matemática e a matemática com outras disciplinas, além de utilizar várias ferramentas, como representação através de símbolos, gráficos, diagramas, o que capacitará o aluno a saber interpretar o problema e discutir as possíveis soluções.

Uma publicação de Schroeder & Lester (1989), obra de dois pesquisadores na área de resolução de problemas, citada por Walle, Karp e Bay-Williams (2010, p. 63), identifica três maneiras de trabalhar a resolução de problemas em Matemática:

> 1. Ensinar[2] o conceito para que o aluno desenvolva habilidades para resolver problemas, partindo do raciocínio abstrato e evoluam para desenvolver modelos semelhantes aos que lhe foram apresentados;
> 2. Ensinar a resolver problemas através de um passo a passo que vai desde o entendimento do que se pede até desenvolvimento de estratégias para resolução e implementação do resultado, utilizando desenhos, diagramas, figuras, tabelas;
> 3. Usar contextos reais, cotidianos, para que o aluno consiga perceber a utilidade do problema e da importância daquele tema e da disciplina no dia a dia, despertando o interesse pelo estudo da Matemática. (WALLE; KARP; BAY-WILLIAMS, 2010, p. 63, tradução nossa).

[2] 1. Teaching[2] for problem solving. This approach can be summarized as teaching a skill so that a student can later problem solve, which follows the format of many textbooks designed with skills taught first. Rather than building on prior knowledge, teaching for problem solving often starts with learning the abstract concept and then moving to solving problems as a way to apply the learned skills. For example, students learn the algorithm for adding fractions, and once that is mastered, solve story problems that envolve adding fractions.
2. Teaching about problem solving. This second approach involves teaching students how to problem solve, which can include teaching the process (understand, design a strategy, implement, look back) or strategies for solving a problem. An example of a strategy is "draw a picture," in which students use a picture or diagram to help solve a problem. This is discussed in more detail in the section "Teaching about Problem Solving" later in this chapter.
3. Teaching through problem solving. This approach generally means that students learn mathematics through real contexts, problems, situations, and models. The contexts and models allow students to build meaning for the concepts so that they can move to abstract concepts. Teaching through problem solving might be described as upside down from teaching for problem solving—with the problem(s) presented at the beginning of a lesson and skills emerging from working with the problem(s). For example, in exploring the situation of combining 12 and 13 feet of ribbon to figure out how long the ribbon is, students would be led to discover the procedure for adding fractions.

A resolução de problemas ajuda o aluno a enxergar e a desenvolver o pensamento matemático, esse talvez seja o método mais eficaz para desenvolver o raciocínio e despertar no aluno o interesse pelo sentido daquela resposta. Ao desenvolver esse raciocínio, o estudante aprende a justificar o resultado através de um argumento lógico, mostrando qual resposta condiz com o que se quer no problema.

3. **UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA EQUAÇÃO DE PRIMEIRO GRAU UTILIZANDO PROBLEMAS DE IDADE**

3.1 PROBLEMAS DE IDADE

Estudos sobre equações são bastante antigos, como visto. Por muitos séculos, a resolução era feita sem incógnitas, através de trabalhosas figuras geométricas, o que tornava sua resolução muito complexa. Hoje, as equações são um instrumento utilizado para transcrever para linguagem matemática, problemas com valores desconhecidos, que têm sua importância reconhecida para o desenvolvimento das ciências e do raciocínio lógico.

A literatura peruana também utilizada neste trabalho diz que “plantear ecuaciones” significa interpretar um enunciado de um problema, expressar na linguagem matemática e solucioná-lo a fim de obter a resposta para o problema apresentado, assim como menciona Veja (2017, p. 145):

> El plantear uma ecuación significa que el enunciado de cualquier problema que se tenga hay que interpretalo, entenderlo y uma vez compreendido, hay que expresalo em uma ecuación matemática, lo cual dará solución al problema.

As equações facilitam as resoluções de problemas mais difíceis do ponto de vista aritmético e conseguem construir a sintaxe das representações algébricas de diversos contextos. Existem muitas pesquisas relacionadas ao ensino de equações do primeiro grau que tratam das dificuldades apresentadas pelos estudantes do ensino básico, quando a eles são propostos solucionar uma equação ou solucionar problemas através delas. Esses estudos têm se mostrado de grande importância e utilidade por desenvolver propostas didáticas e produzirem resultados significativos em relação à aprendizagem.

André Toom, matemático russo, nasceu em 1942, morou em Nova York, desenvolveu trabalhos na área de análise de algoritmos, teoria da probabilidade, educação matemática, dentre outros e hoje é professor do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco. Em sua obra ‘Comparação de ensino matemática no Brasil, Rússia e outros países’ (2004) afirma que por ser matemático de origem russa, ter passado vários anos nos Estados Unidos e ser professor na Universidade Federal de Pernambuco, teve oportunidade de comparar o ensino da Matemática nesses três países. Diante dos vários estudos feitos, ele percebeu uma queda no desempenho dos alunos americanos ao longo dos anos escolares e dentre outras coisas, conclui que apesar do poder dos EUA, o Brasil não deve seguir o exemplo do ensino americano, é melhor buscar exemplos em outros lugares, como por exemplo, na Rússia e em países asiáticos, pois com as mudanças implantadas nos Estados Unidos, a qualidade do ensino americano caiu.

> Tudo isto foi feito sob pretexto que assuntos acadêmicos (álgebra, geometria) são irrelevantes na vida real. No começo das reformas educadores americanos queriam separar os alunos segundo suas possibilidades e ensinar assuntos acadêmicos só para alunos mais inteligentes e interessados. Mas outros alunos poderiam ficar zangados, logo os educadores acabaram não ensinando a ninguém. (Toom, p.5, 2004).

Nessa mesma obra, Toom que afirma que os Estados Unidos não defendem a ideia de trabalhar com problemas verbais, que é muito comum na Rússia e cita Polya, que explica sua importância:

> Por quê problemas verbais? Eu espero pasmar só um pouco de pessoas afirmando que a tarefa importantíssima de ensino escolar é ensinar a fazer equações para resolver problemas verbais. Porém, existe um argumento forte em favor desta opinião. Quando resolver um problema verbal fazendo equações, o aluno traduz uma situação real para termos matemáticos; ele tem a oportunidade de experimentar que conceitos matemáticos podem ser relacionados com as realidades, mas estas relações devem ser elaboradas cuidosamente.

A resolução de problemas é para todos e tem um papel motivador e os problemas de idade, que se incluem nos problemas ditos verbais, favorecem a construção desse conhecimento.

Dentre as várias aplicações das equações de primeiro grau com uma incógnita, os problemas de idade têm sido tratados de forma particular em nossa bibliografia e na bibliografia internacional pelo fato de contribuir na formação do aluno, auxiliando a compreensão e o desenvolvimento da linguagem matemática ao utilizar situações cotidianas.

3.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE IDADE ATRAVÉS DE EQUAÇÃO DE PRIMEIRO GRAU

Inicialmente lidaremos com um tipo de problema de idade que envolva uma só pessoa. Nesse tipo de problema, como o próprio nome diz, há apenas uma pessoa envolvida e solicita-se que utilize previsões futuras ou passadas para se descobrir a idade, possivelmente atual, da pessoa.

Exemplo 1: Dentro de 16 anos, terei o dobro da idade que tinha há 15 anos. Que idade tenho?
Resolução:

a) Compreensão do problema: qual a incógnita? Quais os dados?

   A incógnita de que fala o enunciado do problema é a minha idade, logo ela será denotada por x.

b) Elaboração do plano:

   Como o problema gira em torno de uma única incógnita, minha idade, então há de se definir, assim:

   A minha idade hoje = x
   A minha idade daqui a 16 anos =$x + 16$
   A minha idade há 15 anos = $x - 15$

c) Execução do plano:

	Hoje	Daqui 16 anos	Há 15 anos
Minha idade	x	$x + 16$	x -15

   Dentro de 16 anos, terei o dobro da idade que tinha há 15 anos, ou seja:

$$x + 16 = 2(x - 15)$$
$$\Rightarrow x + 16 = 2x - 30$$
$$\Rightarrow 16 + 30 = 2x - x$$
$$\Rightarrow x = 46$$

d) Retrospecto:

	Hoje	Daqui 16 anos	Há 15 anos
Minha idade	46	62	31

   Interpretado o resultado, temos que:

   Daqui a 16 anos, terei 62 anos, exatamente o dobro da idade que tinha há 15 anos.

Segundo Polya (1995), esses são os quatro passos que visam a facilitar o entendimento do problema: o primeiro passo é compreender o problema, identificando quais são as incógnitas, quais os dados apresentados e a utilização de uma notação adequada; em seguida, estabelecer um plano: encontrar a conexão entre os dados e a incógnita, esquematizar e transformar para a linguagem matemática as informações do problema, analisar se já foi feito algum problema parecido e estabelecer uma conexão entre eles; por terceiro, executar o plano: resolver a equação, verificando se os passos dados estão corretos; e por último, fazer um retrospecto: examinar a solução obtida e interpretá-la, assim como verificar se é possível obter o resultado utilizando um caminho diferente.

Baseado na obra de Ribeiro (2007, p. 16), percebe-se que os significados processual-tecnicista e o intuitivo pragmático foram os mais presentes. O intuitivo-pragmático por trabalhar com igualdade entre valores e ideias intuitivas, usar a aritmética e trabalhar problemas práticos e o processual-tecnicista pelo fato de trabalhar a equação através do processo de resolução e utilizar manipulações algébricas.

Agora, lidaremos com os problemas de idade que envolvam mais de uma pessoa. Nesses problemas, as idades estão relacionadas em tempos diferentes para se descobrir na maioria das vezes, a idade atual e colocar os dados em uma tabela de dupla entrada, facilitará a compreensão.

Exemplo 2: A idade de João é o dobro da idade de Pedro. Sabendo que há 10 anos, era o triplo, quais as idades atuais?

Resolução:

Primeiramente, ao compreender o problema, identificamos que há mais de uma pessoa: João e Pedro; e mais de um tempo: passado e presente e as seguintes condições: no presente, a idade de João é o dobro da de Pedro e no passado era o triplo, logo, temos:

1- Representaremos por x, a idade de Pedro, no presente;
2- A idade de João é o dobro da idade de Pedro, no presente;
3- As idades no passado serão representadas com 10 anos a menos;

	Passado (há 10 anos)	Presente
João	2x-10	2x
Pedro	x-10	x

Então: $2x - 10 = 3(x - 10)$

$\Rightarrow 2x - 10 = 3x - 30$

$\Rightarrow x = 20$

Se o problema quer as idades atuais, então Pedro tem 20 anos e João tem 40 anos e verificando o que ocorrera no passado, temos exatamente que Pedro tinha $(x - 10)$, ou seja, 10 anos e João tinha $(2x - 10) = 30$ anos. Realmente João tinha o triplo da idade de Pedro, há 10 anos.

Segundo Walle, Karp e Bay-Williams (2010), na obra de Schroeder & Lester (1989), deve-se ensinar o aluno a desenvolver habilidades através de conceitos para resolver problemas, utilizando o raciocínio abstrato e modelos semelhantes aos que lhe foram apresentados; em seguida, deve-se ensinar a resolver problemas através de uma regra, um passo a passo a partir do entendimento daquilo que o problema pede até o desenvolvimento de estratégias para resolução, como nesse caso, pelo fato de se tratar de mais de uma pessoa e mais de um tempo (passado e presente) e em seguida, implementar o resultado, utilizando tabelas para facilitar o entendimento; e, por fim, usar contextos reais, problemas cotidianos, para que o aluno perceba a utilidade do problema.

Ainda tratando de problemas que envolvam duas pessoas e tomando por base uma tabela de dupla entrada com dados arbitrários, por exemplo:

	Passado	Presente	Futuro
Pessoa A	15	25	35
Pessoa B	10	20	30

Vale observar, segundo Vega (2017, p. 221) os seguintes detalhes:

1- A diferença de idade entre as pessoas permanece constante com o decorrer do tempo, assim:

$$15 - 10 = 25 - 20 = 35 - 30 = 5$$

2- E a soma de valores dispostos na tabela simetricamente em “cruz” também é constante. Desta forma, temos:

$$15 + 20 = 10 + 25 = 35$$

$$25 + 30 = 20 + 35 = 55$$

$$15 + 30 = 10 + 35 = 45$$

Essas informações serão úteis para resolução do próximo exemplo que envolverá três tempos: passado, presente e futuro e uma linguagem menos trivial.

Exemplo 3: Tu tens sete vezes a idade que eu tinha quando tu tinhas a idade que eu tenho. E daqui a cinco anos nossas idades somarão 120. Que idade tenho?

Resolução:
Vamos começara preencher a tabela:

Do enunciado, temos:

a) “Tu tens sete vezes a idade que eu tinha...”, portanto:

	Passado	Presente	Futuro
Tu		$7\,x$	
Eu	x		

b) “...quando tu tinhas a idade que eu tenho.”

	Passado	Presente	Futuro
Tu	?	$7\,x$	
Eu	x	?	

Sabendo que a soma de valores dispostos na tabela simetricamente em “cruz” é constante, então pelos valores já preenchidos na tabela, temos que a soma:

$$x + 7x = 8x$$

Portanto, para que essa soma se mantenha constante onde estão localizadas as interrogações, é necessário que preenchamos com o valor de $4x$, já que pelo enunciado esses valores são iguais, assim:

	Passado	Presente	Futuro
Tu	$4x$	x	
Eu	x	$4x$	

E como o último dado do enunciado diz:

c) "...daqui a cinco anos nossas idades somarão 120", então a tabela totalmente preenchida, ficará da seguinte forma:

	Passado	Presente	Futuro
Tu	$4x$	$7x$	$7x + 5$
Eu	x	$4x$	$4x + 5$

Como dentro de cinco anos nossas idades somarão 120, então:

$$7x + 5 + 4x + 5 = 120$$

$$\Rightarrow 11x = 110$$

$$\Rightarrow x = 10$$

Então a idade que tenho (presente) é $4x = 4(10) = 40$ anos.

Seguindo o passo a passo do Polya, em sua obra a "A arte de resolver problemas", compreendemos o problema: identificamos as incógnitas e os dados apresentados no enunciado e a utilizamos uma notação adequada; em seguida, estabelecemos um plano: encontramos a conexão entre os dados e o que se queria determinar, esquematizamos através de tabela e transformamos para a linguagem matemática as informações do problema, estabelecemos uma conexão entre problemas correlatos; por terceiro, executamos o plano: resolvemos a equação, verificando se os passos dados estão corretos; e por último, fizemos um retrospecto: examinamos e interpretamos a solução obtida.

André Toom (2004) trouxe um problema interessante, simples, porém com uma solução diferente das que estamos acostumados a encontrar.

Exemplo 4: O pai tem 32 anos de idade, o filho tem 5 anos. Quantos anos depois a idade do pai será dez vezes mais do que a idade do filho?

Colocando os dados na tabela, temos:

	Presente	Futuro
Pai	32	$32 + x$

Filho	5	$5 + x$

Conforme o enunciado, temos:

“...Quantos anos depois a idade do pai será dez vezes mais do que a idade do filho?”

$$32 + x = 10(5 + x)$$
$$\Rightarrow 32 + x = 50 + 10x$$
$$\Rightarrow -9x = 18$$
$$\Rightarrow x = -2$$

Para nossa surpresa, não esperávamos que a solução da equação fosse negativa pensamos que esse acontecimento de a idade do pai ser dez vezes maior do que a idade do filho, só aconteceria no futuro, porém essa relação somente foi possível no passado e, o autor chama nossa atenção para o fato de algumas vezes uma equação ser mais precavida que nós e aproveita para citar um autor russo Ya. I. Perelman, Algebra recreativa. “Nauka”, Moscou (1976):

> Quando fizemos a equação, não pensamos que a idade do pai nunca será dez vezes maior do que a idade do filho no futuro - esta relação foi possível somente no passado. A equação tornou-se mais pensante que nós e lembrou-nos da nossa omissão.

A ideia foi trabalhar com problemas de idade que envolvessem diferentes situações na intenção de nortear o ensino-aprendizagem das equações de primeiro grau, utilizando a conversão entre as linguagens, a manipulação algébrica, o uso de tabelas, entre outros recursos, para facilitar a compreensão da resolução de tais problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A relação dos estudantes com a disciplina de Matemática despertou a vontade de pesquisar sobre o tema, pois é grande o número de alunos com dificuldade no aprendizado, principalmente ao se tratar de álgebra.

A pesquisa fornece uma alternativa metodológica para o ensino-aprendizagem das equações de primeiro grau através da utilização da resolução de problemas de idade. O uso da metodologia resolução de problemas já vem sendo objeto de estudo na perspectiva de se obter uma melhoria no desempenho do conhecimento matemático do aluno.

Os alunos não estão acostumados a serem despertados a pensar, portanto a metodologia da resolução de problemas conforme a organização de Polya (1995) conseguiu estabelecer uma linha de raciocínio para que encontrem maneiras para organizar os problemas e solucioná-los de forma mais natural e consistente.

O objetivo principal dessa proposta de ensino é contribuir para que o estudante tenha acesso a um ensino de qualidade, consolidando o aprendizado, na intenção de que isso conduza para uma melhor formação dele e ao alargar essas perspectivas e desmistificar os temas da equação de primeiro grau e da resolução de problemas, surgem aspectos positivos no ensino da Matemática ao proporcionar oportunidades para explorarem, discutirem, investigarem problemas, trazendo uma ideia promissora para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva e significativa.

REFERÊNCIAS

BARBARÓN, Jimmy Paredes; PÉREZ, Javier Portuguez. **Razonamiento Matemático**. Colección Compendios Académicos. Lumbreras, 2018.

BAUTISTA, Hernán Hernández. **Razonamiento Matemático**: Estrategias em la resolución de problemas, Lima: Editorial Ingenuo, 2004.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEM, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. - São Paulo : Atlas, 2002.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. Unesp. pp. 199-218. São Paulo, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema. Rio Claro – SP, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2ª reimpressão. Interciência. Rio de Janeiro. 1995.

PONTE, João Pedro da. **As equações nos manuais escolares**. Universidade de Lisboa. Portugal. 2004.

ROBAYNA, Martín Manuel Socas et al. **Iniciacion al Algebra**. Madrid: Editorial Síntesis,1996.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático**. Unicamp, 2007.

RIBEIRO, Alessandro Jacques**. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos.** Universidade Federal do ABC (UFABC), 2009.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** Autêntica, 2015.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. DORIGO, Marcio. **Significados de equação: um estudo realizado com alunos do ensino médio**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. 2015.

STANIC. George M. A; KILPATRICK, Jeremy. **Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de Matemática.** Universidade da Georgia, EUA,1990.

TOOM, André. **Comparação de ensino matemática no Brasil, Rússia e outros países**. II Bienal da SBM, 2004.

VEGA, Adolfo Povis**. Razonamiento Matematico: problemas de nível**. 2ªed. Moshera. Lima, 2017.

WALLE, John A. Van de; KARP, Karen S.; BAY-WILLIAMS, Jennifer M. **Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally**. 7ªed. Allyn & Bacon. 2010.