Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Transformações Geométricas no Plano e no Espaço [†]

por

Rênad Ferreira da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Transformações Geométricas no Plano e no Espaço

por

Rênad Ferreira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto Medeiros - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Maria Isabelle Silva

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB

Agosto/2013

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus, pela vida, saúde e coragem que me deu, para a conclusão do curso;

A minha mãe Maria das Dôres, a minha avó Maria das Neves e aos meus irmãos Renê, Maria Reny e Renan, pelo incentivo e apoio que me ofereceram durante todo o curso, como também durante toda a jornada até aqui;

A minha esposa Maria Vitória, pela paciência, compreensão e amor, estando ao meu lado durante todos esse anos;

A senhora Mariazinha e seu esposo Wallace, que me acolheram como um filho e sempre me incentivaram nos meus estudos;

Ao professor Everaldo, pela sua paciência, amizade e orientação, estando sempre presente, auxiliando-me na conclusão do mestrado;

Aos meus colegas de curso, com os quais convivi e compartilhei momentos de alegria e de tristeza, até chegarmos ao final do curso;

A UFPB e a todo corpo docente, como também a todos os funcionários;

Aos meus professores da UEPB, onde conclui a minha graduação;

E, aos demais, que de alguma forma contribuíram para a conclusão de mestrado e elaboração do TCC.

Dedicatória

Aos meus pais Luis Rodrigues e Maria das Dôres, a minha esposa Maria Vitória, e aos meus irmãos, pelo amor, paciência e incentivo para a conclusão do PROFMAT . Aos meus colegas e professores, por esses dois anos que passamos juntos, enfim, à todos que me ajudaram a realizar mais um dos meus objetivos, concluir o PROFMAT.

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas das transformações geométricas no Plano e no Espaço. Inicialmente, apresentamos alguns tipos de transformações especiais no Plano e encontramos a matriz de cada uma destas transformações. Na segunda parte abordamos as transformações no Espaço, dando ênfase as rotações. Utilizamos os ângulos de Euler para determinar uma rotação no espaço em torno dos eixos cartesianos e definimos uma equação que permite rotacionar um vetores em torno de um eixo qualquer. Também abordamos os espaços homogêneos objetivando a representação matricial da transformação de translação. Por último, usamos a estrutura do grupo dos Quatérnios para apresentar uma segunda forma de fazer rotações de vetores e composição de rotações no espaço. Ressaltamos que este estudo é fundamental para descrever o movimento de objetos no plano e no espaço.

Palavras Chave: Transformações Geométricas, Ângulos de Euler, Grupo dos Quatérnios, Espaço Homogêneos.

Abstract

Abstract: In this work we study some geometric transformations in the plane and the space. Initially, we present some special types of transformations in the plane and find the matrix of each of these transformations. In the second part we discourse the transformations in the space, emphasizing the rotations. We will use the angles of Euler to determine a rotation in the space around the Cartesian axes and define an equation which allows to rotate a vector around any axis. We also discuss the homogeneous spaces aiming the matrix representation of transformations of translation. Finally, we use the structure of the quaternions group to present a second form to rotation vectors and composition of rotations in the space. We emphasize that this study is essential to describe the motion of objects in the plane and in the space.

Key words: Geometric Transformations, Angles of Euler, Quaternions Groups, Homogeneous Space

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

No ensino médio, quando os alunos tem os primeiros contatos com os conteúdos de matrizes, determinantes, trigonometria e funções (este já introduzido no 9º ano do ensino fundamental), eles têm a ideia equivocada que esses conteúdos são apenas meros procedimentos matemáticos para cálculos sem nenhuma utilidade, além do colégio. Visamos neste trabalho, desmitificar esta ideia. Como observado em [6] as transformações geométricas tem diversas aplicações na área da computação gráfica, pois permite alterar, modelar e manipular os objetos que estão contidos numa determinada cena. Por exemplo, mudanças em orientações, tamanho e forma dos objetos. Elas tem grande importância na descrição da forma e dos movimentos em cenários virtuais. Uma cena por mais complexa que pareça, pode ser reduzida a uma mais simples, basta observar que cada componente da cena pode ser observado como um conjunto de subcomponentes, assim algumas podem ser reduzidas a formas geométricas planas mais simples como triângulos, quadrados, pentágonos entre outros ou figuras espaciais mais usuais como cubo, cilindro, cone , esfera, etc. A partir dessas formas geométricas utilizando as transformações de forma e movimento, podemos gerar modelos de cenas mais complexos. Pretendemos mostrar que os conceitos de matrizes, determinantes, trigonometria e principalmente funções são de extrema importância no desenvolvimento da teoria das transformações geométricas. Este trabalho será dedicado ao estudo das transformações geométricas no Plano e no Espaço, assim como o estudo dos quatérnios, estrutura que facilita o estudo das rotações no espaço. O nosso trabalho está escrito como segue:

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos elementares das transformações no Plano tendo como foco as transformações geométricas: dilatação ou contração, escala, espelhamento ou reflexão, rotação, cisalhamento e translação. Ainda neste capítulo obtivemos a representação matricial de cada transformação.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de algumas transformações geométricas no Espaço Euclidiano. Mais especificamente, estudamos as rotações em torno dos eixos ordenados. Também introduzimos os ângulos de Euler objetivando uma forma mais simples de representar uma rotação no Espaço.

Finalmente no Capítulo 3 deste trabalho, introduzimos o Grupo dos Quatérnios e usamos esta estrutura para encontrar uma outra forma de representar uma rotação no Espaço.

Capítulo 1

Transformações Geométricas no Plano

1.1 Transformação no Plano

Nesta seção vamos nos dedicar ao estudo das transformações no plano, tendo como foco as transformações lineares: escala, rotação, reflexão e cisalhamento. Primeiro vamos definir o que é uma transformação no $\mathbb{R}^2$. Também chamada de função ou aplicação no plano.

Definição 1 *Uma transformação no* $\mathbb{R}^2$ *é uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, que associa a cada vetor* $\boldsymbol{p}$ *do plano um novo vetor* $\boldsymbol{p}'$ *tal que:*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$$

ou

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

onde $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*, corresponde as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$*, sendo* $\boldsymbol{o}$ *a origem do sistema cartesiano.*

Observe que o vetor $\boldsymbol{p}$ é transformado no vetor $\boldsymbol{p}'$ por uma transformação $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como indica a figura abaixo:

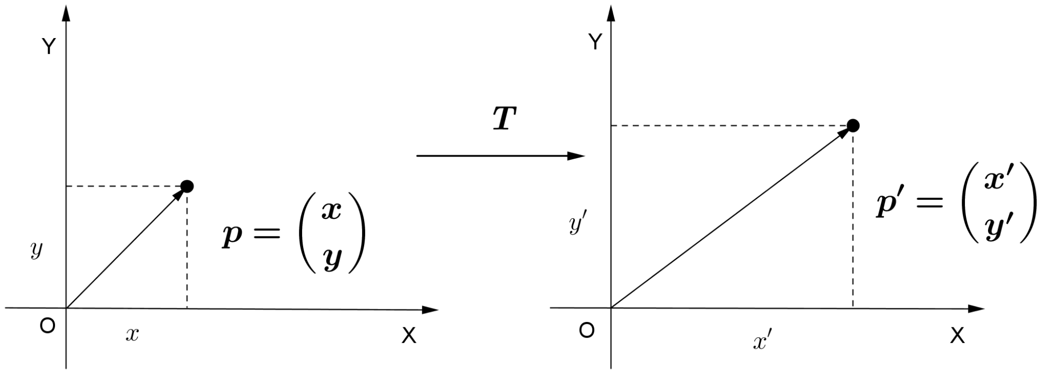

Figura 1.1: Transformação de $\boldsymbol{p}$ em $\boldsymbol{p}'$ no plano

Observação 1 *No que segue, denotaremos o vetor* $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$ *por* $\mathbf{p}$

Daremos um exemplo simples de uma transformação no $\mathbb{R}^2$ para mostrar o que acontece com o vetor $\boldsymbol{p}$ após ser aplicada uma transformação $\boldsymbol{T}$.

Exemplo 1 *Considere a aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Note que o vetor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *é transformado por* $\boldsymbol{T}$ *no vetor*

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Existem transformações que tem algumas propriedades que a diferenciam das outras, elas são chamadas de transformações lineares, mais podemos nos fazer a seguinte pergunta. Quando é que uma transformação é linear? Para responder esta pergunta precisaremos primeiro definir o que é um espaço vetorial.

Definição 2 *Seja um conjunto* $\boldsymbol{E}$*, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, isto é:*

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \in \boldsymbol{E}, \lambda \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}.$

O conjunto $\boldsymbol{E}$ *munido dessas duas operações é chamado espaço vetorial real se forem verificados os seguintes axiomas:*

1. *Para quaisquer vetores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}$,

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}). \quad (\textit{associatividade})$$

2. *Existe um vetor em* $\boldsymbol{E}$, *denotado por* 0 *e chamado vetor nulo, para o qual*

$$\boldsymbol{u} + 0 = 0 + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}. \quad (\textit{elemento neutro})$$

   para qualquer vetor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$.

3. *Para cada vetor* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$, *existe um vetor em* $\boldsymbol{E}$, *denotado por* $-\boldsymbol{u}$, *para o qual*

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = 0. \quad (\textit{inverso aditivo})$$

4. *Para quaisquer vetores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}. \quad (\textit{comutatividade})$$

5. *Para qualquer escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e quaisquer vetores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$,

$$\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}.$$

6. *Para quaisquer escalares* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *e qualquer vetor* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$,

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{u}.$$

7. *Para quaisquer escalares* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *e qualquer vetor* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$,

$$(\lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{u} = \lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{u}).$$

8. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, *para qualquer vetor* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}$.

Observação 2 *Chamaremos os elementos do espaço vetorial* $\boldsymbol{E}$ *de vetores, independentemente de sua natureza. No que segue, exceto referência contrária, quando falarmos que* $\boldsymbol{E}$ *é um espaço vetorial, fica subtendido que* $\boldsymbol{E}$ *é um espaço vetorial sobre o conjunto* $\mathbb{R}$, *dos números reais.*

Definição 3 *Sejam* $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{W}$ *espaços vetoriais. Uma transformação* $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{W}$, *é dita linear se:*

1. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$, *para todo* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$;

2. $\boldsymbol{T}(\lambda.\boldsymbol{v}) = \lambda.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$, *para todo* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ *e para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$.

A Definição 3 afirma que se, $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ é linear, ela preserva as duas operações básicas de um espaço vetorial, isto é, adição de vetores e multiplicação por escalar.

Observação 3 *Uma transformação linear* $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ *(caso em que* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{W}$ *) é chamado de operador linear sobre* $\boldsymbol{E}$*. Neste Capítulo vamos considerar* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{W} = \mathbb{R}^2$.

Podemos também verificar se uma transformação $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ é linear pelo seguinte lema:

Lema 3.1 *Uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ *é uma transformação linear se, e somente se,* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *e* $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ *tivermos que*

$$\boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \ + \ \lambda_2 \boldsymbol{p}_2) = \lambda_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_1) \ + \ \lambda_2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_2).$$

Demonstração: Se $\boldsymbol{T}$ é linear, utilizando 1 e 2 da Definição 3 temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{u} + \lambda_2 \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\lambda_2 \boldsymbol{v}) \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \lambda_2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

A recíproca segue de que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v}) \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + 0\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(1\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \\ &= 1\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + 1\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

logo $\boldsymbol{T}$ é linear. ■

Em outras palavras temos que se aplicarmos uma transformação $\boldsymbol{T}$ a uma combinação linear de vetores e obtermos como resultado a combinação linear dos vetores transformados por $\boldsymbol{T}$. Essa transformação será linear. Uma propriedade importante das transformações lineares é que $\boldsymbol{T}(0) = 0$, isto é, a transformação leva elemento neutro de um espaço em elemento neutro do outro espaço.

Essa propriedade pode ser demonstrada da seguinte forma,

$$\boldsymbol{T}(0) = \boldsymbol{T}(0\boldsymbol{u}) = 0\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

1.1.1 Matriz Associada as Transformações Lineares

Nesta seção vamos tratar das transformações $\boldsymbol{T}$ associadas a multiplicação de matrizes. Para cada $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$ é dado por $\boldsymbol{Mp}$, onde $\boldsymbol{M}$ é uma matriz $m \times n$. Para simplificar, muitas vezes denotamos essa transformada matricial por $x \longrightarrow \boldsymbol{Mp}$. Observe que o domínio de $\boldsymbol{T}$ é o $\mathbb{R}^n$ quando $\boldsymbol{M}$ tem n colunas, e o contradomínio de $\boldsymbol{T}$ é o $\mathbb{R}^m$ quando cada coluna de $\boldsymbol{M}$ tem m elementos. Sempre que uma transformada linear aparece geometricamente ou é descrita em palavras, geralmente queremos uma " fórmula " para $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p})$. A discussão que segue mostra que toda transformada linear $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é na verdade, uma transformada matricial $x \longrightarrow \boldsymbol{Mp}$ e que propriedades importantes da transformação $\boldsymbol{T}$ estão intimamente relacionadas as propriedades conhecidas da matriz $\boldsymbol{M}$. A chave para se determinar $\boldsymbol{M}$ é observar que $\boldsymbol{T}$ fica completamente determinada pela sua ação nas colunas da matriz identidade $n \times n, \boldsymbol{I}_n$.

Apresentaremos a seguir uma proposição que diz que toda transformação linear pode ser escrita como o produto $\boldsymbol{Mp}$ onde $\boldsymbol{M}$ é denominada de matriz de transformação.

Proposição 1 *: Uma transformação $\boldsymbol{T}$ é linear se, e somente se, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Mp}$.*

Demonstração: Se $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Mp}$, então pelas propriedades do produto de matrizes segue

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{p}_2) &= \boldsymbol{M}(\lambda_1 \boldsymbol{p}_1) + \boldsymbol{M}(\lambda_2 \boldsymbol{p}_2) \\
&= \lambda_1 \boldsymbol{Mp}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{Mp}_2 \\
&= \lambda_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_1) + \lambda_2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}_2) \\
&= \boldsymbol{T}(\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{p}_2),
\end{aligned}$$

portanto $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Mp}$ é linear.

Vamos mostrar agora que se $\boldsymbol{T}$ é uma transformação linear, ela pode ser escrita da forma $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{p}$. Como estamos trabalhando com transformações no plano, sem perda de generalidade iremos particularizar a demonstração para o $\mathbb{R}^2$.

Seja $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$, isto é, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \boldsymbol{T}\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \boldsymbol{T}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= x\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Fazendo-se

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax \\ bx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cy \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{Mp},
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{M}$ é a matriz de transformação linear como queríamos demonstrar. ■

Observação 4 *Note que todo elemento* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ *pode ser escrito da forma*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja, todo vetor do plano é uma combinação linear de $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Assim,*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}.$$

Analogamente se $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *então*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix},$$

onde $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trataremos agora das transformações lineares geométricas do $\mathbb{R}^2$. Veremos algumas mais importantes e suas interpretações geométricas.

1.1.2 Transformação Linear de Dilatação ou Contração no Plano

Antes de falarmos da transformação de escala no plano, vamos observar o que acontece com um vetor $\mathbf{v} \in \boldsymbol{E}$, *onde* $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2$ quando é aplicado uma transformação de dilatação ou contração. Vejamos algumas transformações de dilatação ou contração a seguir, assim como suas matrizes de transformação:

a) Dilatação ou contração na direção do vetor:

Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observamos que:

- se $|\lambda| > 1$, $\boldsymbol{T}$ dilata o vetor;
- se $|\lambda| < 1$, $\boldsymbol{T}$ contrai o vetor;
- se $\lambda = 1$, $\boldsymbol{T}$ não altera o vetor, o que implica que $\boldsymbol{T}$ é a identidade $\boldsymbol{I}$;
- se $\lambda < 0$, $\boldsymbol{T}$ troca o sentido do vetor.

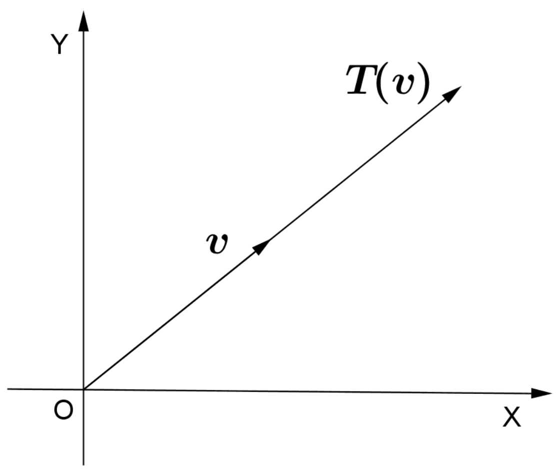

Figura 1.2: Transformação de dilatação no plano $\mathbb{R}^2$

Exemplo 2 *A transformação* $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *representa uma dilatação na direção do vetor.*

b) Dilatação ou contração na direção do eixo x:

Seja $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com $\lambda > 0$.

Observe que:

- se $\lambda > 1$, $\boldsymbol{T}$ dilata o vetor;
- se $0 < \lambda < 1$, $\boldsymbol{T}$ contrai o vetor.

Essa transformação também é chamada dilatação ou contração horizontal de um fator λ.

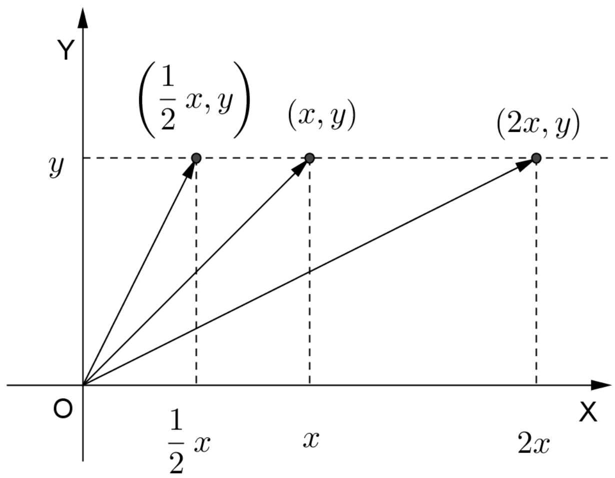

Figura 1.3: Dilatação ou contração na direção do eixo x

Nas figuras 1.3 e 1.4 os fatores de dilatação e contração λ foram considerados $\lambda = 2$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. respectivamente.

c) Dilatação ou contração na direção do eixo y:

Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com $\lambda > 0$.

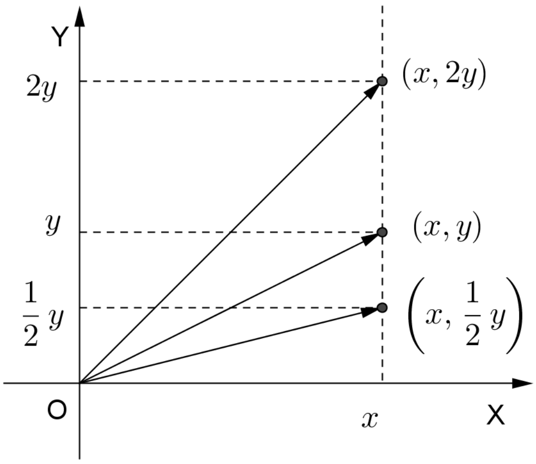

Figura 1.4: Dilatação ou contração em relação ao eixo y

Observação 5 *No caso de $\lambda = 0$, teríamos:*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\boldsymbol{T}$ seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo x, como podemos ver pela figura.

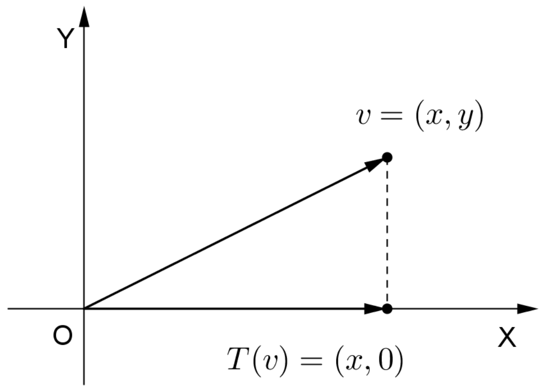

Figura 1.5: Projeção ortogonal do plano sobre o eixo x

Se $\lambda = 0$ no caso b), $\boldsymbol{T}$ seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo y.

1.1.3 Transformação de Escala no Plano

A transformação de escala é uma aplicação $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde a abscissa x é multiplicada por um fator $\mathbf{s}_1$ e a ordenada y por um fator $\mathbf{s}_2$ e a matriz de transformação é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 \end{pmatrix},$$

pois

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 x \\ \mathbf{s}_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3 *Vamos aplicar a transformação de escala no triângulo de vértices $\boldsymbol{A}(1,1)$, $\boldsymbol{B}(5,2)$ e $\boldsymbol{C}(3,3)$; com $\boldsymbol{s}_1 = \dfrac{1}{2}$ e $\boldsymbol{s}_2 = 2$. Assim se $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ e $\boldsymbol{C}'$ são os novos vértices do triângulo após a aplicação da transformação de escala, temos que: $\boldsymbol{A}'\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\boldsymbol{B}'(\dfrac{5}{2}, 2)$ e $\boldsymbol{C}'\left(\dfrac{3}{2}, 6\right)$. Observe a figura abaixo para entender o que aconteceu com o triângulo $\boldsymbol{ABC}$.*

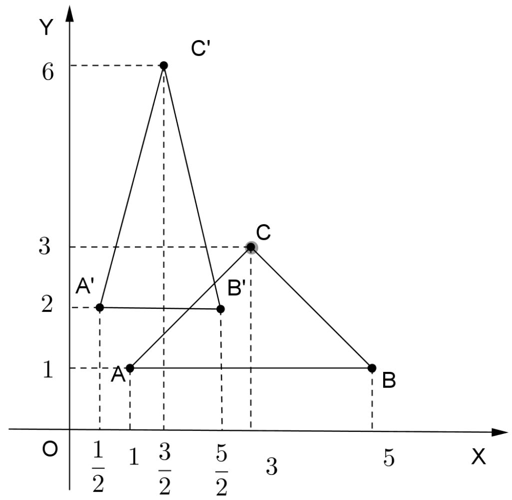

Figura 1.6: Transformação de escala no $\mathbb{R}^2$

Porém, como podemos observar, a escala modifica a posição inicial do nosso elemento. Para contornar esse problema, podemos definir um ponto desse elemento como ponto de origem (também chamado de **pivot**). Então moveríamos esse ponto para origem do sistema de coordenadas por meio de uma translação (que será vista mais a diante) e só depois aplicada a escala. Após a aplicação da escala no nosso elemento levaríamos de volta o **pivot** para a posição inicial.

Na transformação de escala temos que os escalares $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ são números reais positivos. Quando eles variam no intervalo (0,1) temos uma redução da dimensão correspondente e se $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ forem maiores que 1 teremos um aumento, porém se forem negativos os pontos do plano seriam espelhados em torno de um eixo correspondente.

1.1.4 Transformação de Espelhamento ou Reflexão no Plano

A transformação linear de espelhamento ou reflexão tem a matriz de transformação igual a matriz identidade com alguns de seus termos da diagonal principal com sinal negativo. Apresentaremos alguns tipos transformações de espelhamento.

1. **A transformação de espelhamento em relação ao eixo x:**

   Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

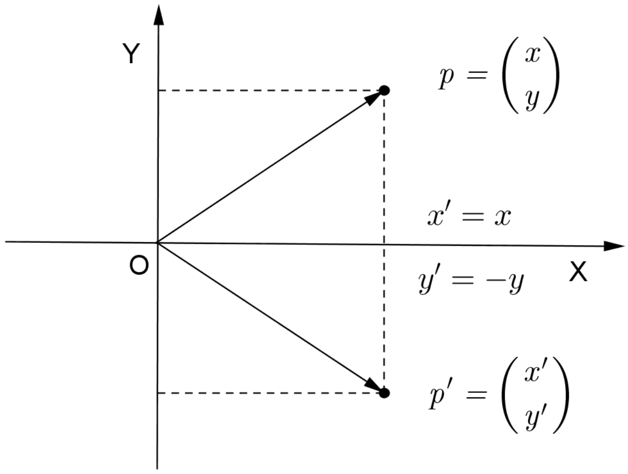

Figura 1.7: Transformação de espelhamento em relação ao eixo x

Note que a matriz de uma transformação de espelhamento em relação ao eixo x, é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. **Espelhamento em relação ao eixo y:**
Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

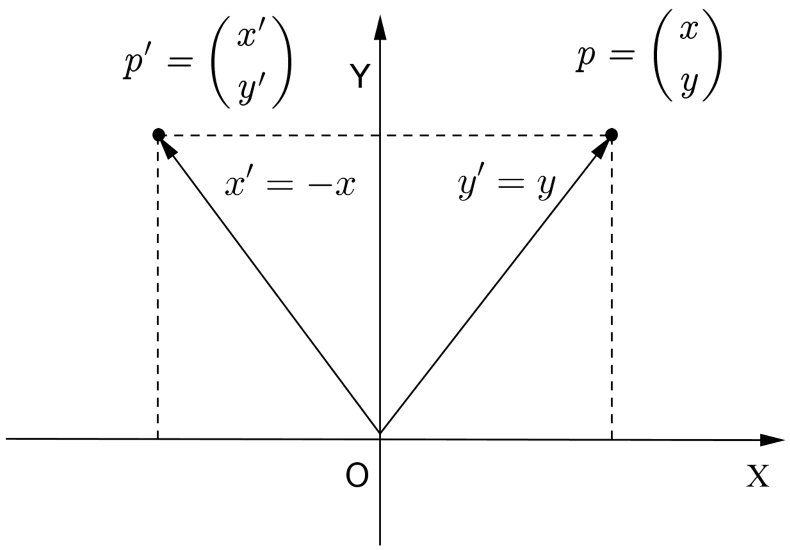

Figura 1.8: Transformação de espelhamento em relação ao eixo y

Note que a matriz de uma transformação de espelhamento em relação ao eixo y é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. **Espelhamento em torno da origem:**

   Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

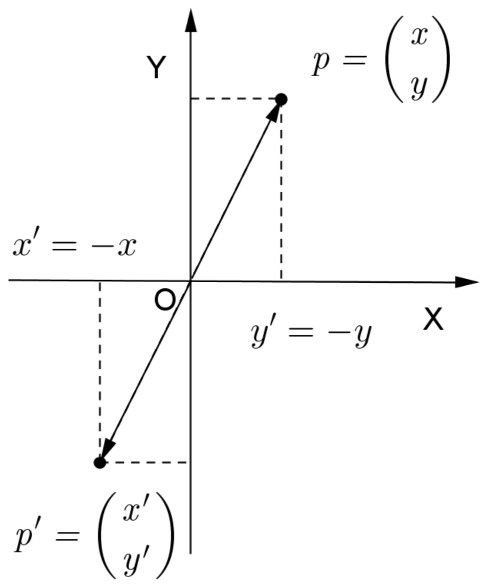

Figura 1.9: Transformação de espelhamento em relação a origem

Note que a matriz de uma transformação de espelhamento em relação a origem é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. **Espelhamento em torno da reta $y = -x$:**

Seja $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}.$$

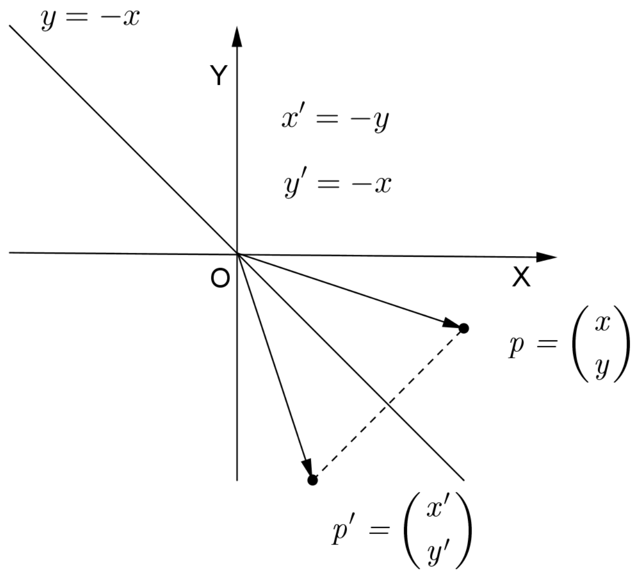

Figura 1.10: Transformação de espelhamento em torno da reta $y=-x$

Note que a matriz de uma transformação de espelhamento em relação a reta $y=-x$ é dada por:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix}-y\\ -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

5. **Espelhamento em torno da reta $y=x$:**

Seja $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}.$$

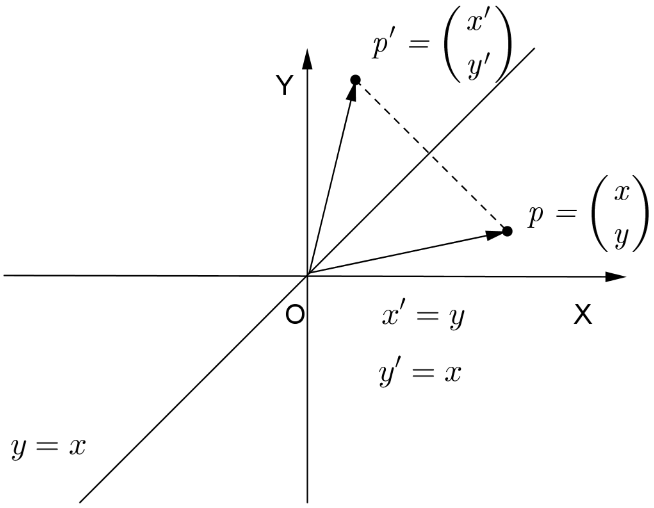

Figura 1.11: Transformação de espelhamento em torno da reta $y = x$

Note que a matriz de uma transformação de espelhamento em relação a reta $y = x$ é dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1.1.5 Transformação de Rotação no Plano

Apresentaremos agora a transformação de rotação no plano. Ela permite rotacionar um vetor em torno da origem de um ângulo θ através da multiplicação da matriz de transformação de rotação pela coordenadas do vetor que queremos rotacionar.

Definição 4 *Uma transformação de rotação no plano em torno da origem de um ângulo θ é uma aplicação*

$$\boldsymbol{R} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que

$$\boldsymbol{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Proposição 2 *A matriz de uma transformação de rotação no* $\mathbb{R}^2$ *é dada por:*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Para realizar esta demonstração vamos precisar das seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\text{sen}\ (\alpha + \theta) = \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \theta\ +\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \alpha \tag{1.1}$$

$$\cos\ (\alpha + \theta) = \cos\ \alpha\ \cos\theta\ -\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \theta \tag{1.2}$$

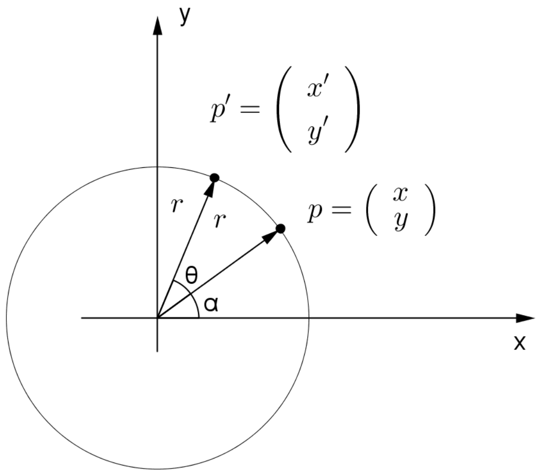

Figura 1.12: Transformação de rotação no $\mathbb{R}^2$

Pela figura vemos que

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\ \text{sen}\ \alpha$$
$$\cos\ \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\ \cos\ \alpha$$

assim podemos escrever o vetor $\boldsymbol{p}$ em função de cos e sen, isto é,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} r\ \cos\ \alpha \\ r\ \text{sen}\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Fazendo a rotação do vetor $\boldsymbol{p}$ de um ângulo θ em torno da origem temos:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos\,(\alpha+\theta) \\ r\,\mathrm{sen}\ (\alpha+\theta) \end{pmatrix},$$

como $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$ e $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, concluirmos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos\,(\alpha+\theta) \\ r\,\mathrm{sen}\ (\alpha+\theta) \end{pmatrix}.$$

Utilizando as fórmulas trigonométricas (1.1) e (1.2) obtemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos\ \alpha\ \cos\ \theta\ -\ r\,\mathrm{sen}\ \alpha\ \mathrm{sen}\ \theta \\ r\ \cos\ \alpha\ \mathrm{sen}\ \theta\ +\ r\,\mathrm{sen}\ \alpha\ \cos\ \theta \end{pmatrix}.$$

Desde que $x = r\ \cos\ \alpha$ e $y = r\,\mathrm{sen}\ \alpha$ temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\ \cos\ \theta\ -\ y\ \mathrm{sen}\ \theta \\ x\ \mathrm{sen}\theta\ +\ y\ \cos\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\mathrm{sen}\ \theta \\ \mathrm{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz de rotação de um ângulo θ em torno da origem é

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\mathrm{sen}\ \theta \\ \mathrm{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix},$$

o que prova o resultado desejado. ■

Poderíamos ter encontrado a matriz de uma transformação de rotação de uma maneira mais simples se observarmos que as colunas da matriz de rotação são as coordenadas dos vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ transformados pela transformação $\boldsymbol{R}$, isto é:

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta \\ \mathrm{sen}\ \theta \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\ \theta \\ \cos\ \theta \end{pmatrix}.$$

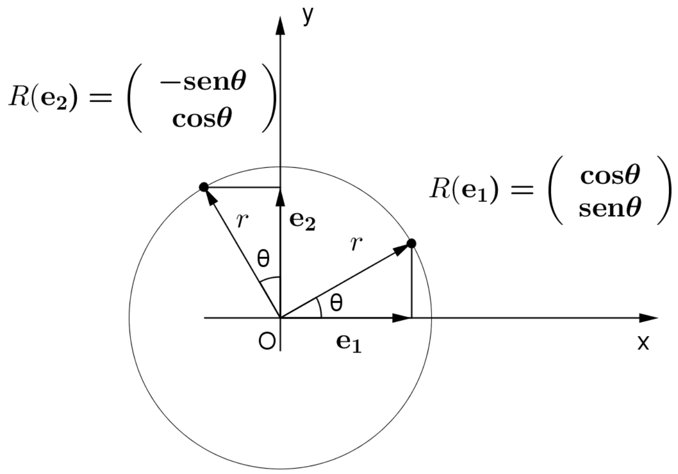

Figura 1.13: Dedução direta da matriz de rotação

Como $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}(\mathbf{e})_1 & \boldsymbol{R}(\mathbf{e})_2 \end{pmatrix}$, segue que

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

1.1.6 Produto Interno e Rotação

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ como matrizes $n \times 1$. A transposta $\boldsymbol{u}^T$ é uma matriz $1 \times n$, e o produto matricial $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}$ é uma matriz 1×1, que vamos escrever como um número real(escalar). O número $\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v}$ é chamado o **produto interno** de $\boldsymbol{u}$ por $\boldsymbol{v}$ e é escrito muitas vezes como $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. Portanto Se

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

então o produto interno de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

As propriedades do produto interno são as seguintes: Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e seja λ um escalar. Então

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$;
- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$;
- $(\lambda \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \lambda(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\lambda \boldsymbol{w})$;
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geqslant 0$ *e* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ se e somente se $\boldsymbol{u} = 0$.

Definição 5 *Seja os vetores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, *tal que* $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$ *e* $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ *o produto interno de* $\boldsymbol{u}$ *por* $\boldsymbol{v}$ *que representaremos por* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, *será determinado por* $x_1x_2 + y_1y_2$, *isto é:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Definição 6 *Dado um vetor* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, *a norma, módulo ou comprimento de* $\boldsymbol{v}$ *é o número real não-negativo, representado por* $\|\boldsymbol{v}\|$, *definido por:*

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}.$$

Proposição 3 *Seja uma matriz* $\boldsymbol{M}$ *de transformação no plano , então:*

$$\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\|^2 & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} & \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{pmatrix},$$

onde $\boldsymbol{M}^T$ *é a matriz transposta de* $\boldsymbol{M}$.

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\boldsymbol{T}(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{T}(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{v}$, onde $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Então a matriz de transformação será

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

portanto a transposta da matriz $\boldsymbol{M}$ será:

$$\boldsymbol{M}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\|^2 & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Observação 6 *O produto interno de dois vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *no espaço vetorial* $\boldsymbol{E}$ *também pode ser definido da seguinte forma*

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\ \beta$$

onde β *é o ângulo formado pelos vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$*.*

Proposição 4 *Os vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são ortogonais se, e somente se,*

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0.$$

Demonstração: Se $\boldsymbol{u}$ é ortogonal a $\boldsymbol{v}$, ou seja, perpendicular, o ângulo entre eles é 90° pela Observação 6 temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\ 90^\circ \\
&= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Definição 7 *Dizemos que um vetor* u *é unitário se sua norma for igual a* 1*, isto é:*

$$\|\boldsymbol{u}\| = 1.$$

Neste caso dizemos que $\boldsymbol{u}$ *está normalizado.*

Proposição 5 *Todo vetor* $\boldsymbol{u}$ *não-nulo pode ser normalizado, fazendo-se:*

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.$$

Demonstração: Observe que

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \cdot \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2} = 1$$

e, portanto $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ é unitário. ∎

Definição 8 *Dois vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são ortonormais se, somente se, ambos forem unitário e ortogonais entre si, isto é:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

e

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1.$$

Definição 9 *Se os vetores coluna de uma matriz* $\boldsymbol{M}$ *são unitários e ortogonais dois a dois, dizemos que* $\boldsymbol{M}$ *é uma matriz ortonormal.*

Exemplo 4 *A matriz* $\boldsymbol{M}$ *de rotação no plano é ortonormal, pois temos* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta \\ \text{sen}\ \theta \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\ \theta \\ \cos\ \theta \end{pmatrix}$*, logo*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\ \theta\ (-\text{sen}\ \theta)\ +\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta = 0$$

e

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\cos^2\ \theta\ +\ \text{sen}^2\ \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

Observação 7 *O produto interno é comutativo, ou seja,*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Proposição 6 *Seja* $\boldsymbol{M}$ *uma matriz ortonormal, então*

$$\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}^{-1}.$$

Demonstração: Pela Preposição 3, segue que

$$\boldsymbol{M}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\|^2 & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} & \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade, portanto $\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}^{-1}$ como queríamos demostrar. ∎

Afirmação 1 *Numa rotação, em termos de coordenadas tanto faz rotacionarmos o vetor* $\boldsymbol{p}$ *em um ângulo* θ *ou escrevermos as coordenadas deste vetor num sistema de coordenadas rotacionado de* $-\theta$*, ou seja :*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

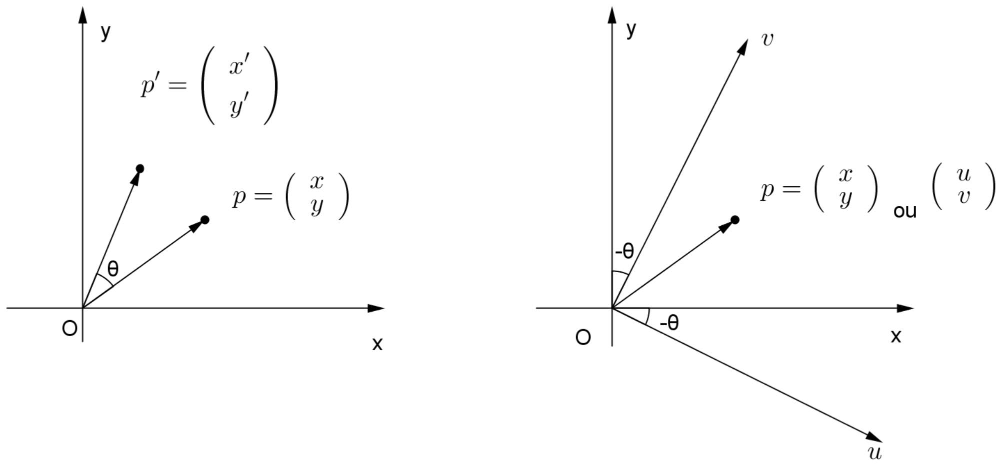

Figura 1.14: Transformação versus mudança de base

Demonstração: Temos que as coordenadas dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ em relação aos eixos cartesianos x e y são: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, onde

$$\begin{aligned} u_x &= \cos\,(-\theta); \\ u_y &= -\text{sen}\,(-\theta); \\ v_x &= \text{sen}\,(-\theta); \\ v_y &= \cos\,(-\theta); \end{aligned}$$

assim:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\,(-\theta) \\ -\text{sen}\,(-\theta) \end{pmatrix} \ e \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \text{sen}\,(-\theta) \\ \cos\,(-\theta) \end{pmatrix},$$

como as colunas da matriz de transformação são as coordenadas dos vetores transformados, então a matriz $\boldsymbol{M}$ de rotação de um ângulo $-\theta$ será:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \text{sen}\,(-\theta) \\ -\text{sen}\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix},$$

más $\cos(-\theta) = \cos\ \theta$ e $\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\ \theta$, logo:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix},$$

portanto

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

como queríamos demonstrar. ■

Temos ainda que se escrevemos a matriz de rotação de um ângulo $-\theta$ teríamos a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}\,(-\theta) \\ \text{sen}\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & \text{sen}\ \theta \\ -\text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix}.$$

Observe que a transposta da matriz $\boldsymbol{A}$ é igual a $\boldsymbol{M}$, assim

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}.$$

Através dessa igualdade podemos concluir que para rotacionar um vetor em um ângulo $-\theta$ basta tomar a transposta da matriz de rotação $\boldsymbol{M}$, isto é, dado um vetor $\boldsymbol{p}$ do $\mathbb{R}^2$ temos que:

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}$$

e

$$\boldsymbol{p}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & \text{sen}\ \theta \\ -\text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{p},$$

onde $\boldsymbol{p}'$ é o vetor rotacionado de $\boldsymbol{p}$ em um ângulo θ e $\boldsymbol{p}''$ é obtido do mesmo vetor $\boldsymbol{p}$ numa rotação de um ângulo $-\theta$.

1.1.7 Transformação de Cisalhamento no Plano

Agora vamos falar da transformação linear de cisalhamento que consiste em preservar uma coordenada e mover a outra, mais esse movimento depende do valor da coordenada inalterada.

Proposição 7 *Uma transformação de cisalhamento em relação ao eixo x é uma aplicação $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \text{ tg } \gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde γ é o ângulo de deslocamento em relação ao eixo y. A matriz de transformação de cisalhamento em relação ao eixo x é:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

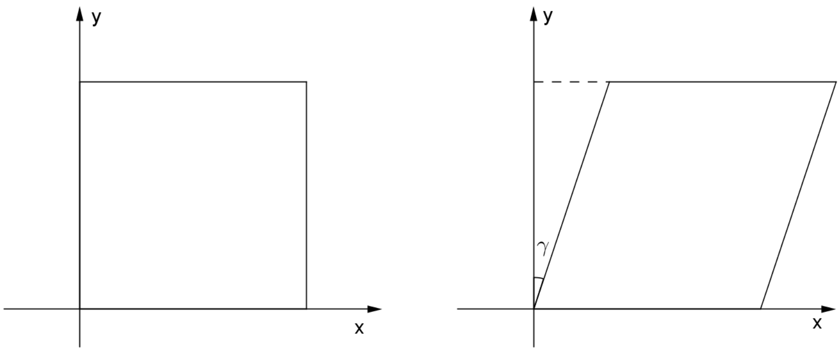

Figura 1.15: Transformação de cisalhamento em x

Demonstração: Para obter a matriz de transformação acima, observe que se $\boldsymbol{T}$ é uma transformação de cisalhamento então para todo $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \text{ tg } \gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A ordenada permanece inalterada e a abscissa sofre um acréscimo $k \in \mathbb{R}$, isto é:

$$y' = y \;\; e \;\; x' = x + k$$

como tg $\gamma = \dfrac{k}{y} \rightarrow k = y$ tg γ, temos

$$x' = x + y \text{ tg } \gamma,$$

o que prova o resultado desejado. ■

Observação 8 *Caso o deslocamento seja em direção ao eixo y, digamos com o ângulo de deslocamento β a matriz de transformação será:*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{tg}\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Se o cisalhamento ocorrer em ambas direções a matriz de transformação será

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}\beta & 1 \end{pmatrix}$$

pois teríamos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \operatorname{tg}\gamma \\ x \operatorname{tg}\beta + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1.1.8 Transformação de Translação no Plano

Uma transformação importante na computação gráfica mais que não é linear, é a transformação de translação que consiste em adicionar um vetor $\boldsymbol{t}$ não nulo ao vetor $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, esta transformação por ser muito usada no processo gráfico deve ser representada de uma forma mais simples possível.

Seja um vetor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$, a transformação de translação pode ser vista como: $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}.$$

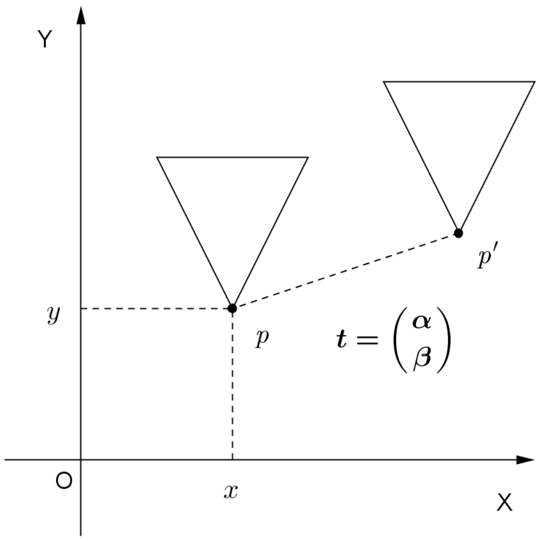

Figura 1.16: Transformação de Translação no plano

A transformação de translação não é linear pois não transforma o vetor nulo nele mesmo, pois

$$\boldsymbol{T}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{t} \neq 0.$$

Como a translação não é linear ela não pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p},$$

com a, b, c e d constantes reais.

Escrevendo a translação na forma matricial temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Porém esta forma dificulta a escrita de composição de transformações, pois se temos duas transformações lineares digamos $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ a sua composta é dada por $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$, mas no caso de as transformações serem do tipo $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t}$ a composição apresenta uma certa dificuldade na escrita quando o número de transformação vai aumentando.

1.1.9 Espaço Homogêneo

Existe uma maneira de tratarmos translações como transformações lineares, basta imaginar o

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; z = cte \right\},$$

isto é, sendo um plano do $\mathbb{R}^3$ com a componente z igual a uma constante real w, assim o plano seria visto como um espaço de dimensão três chamado de espaço homogêneo onde as coordenadas x e y do $\mathbb{R}^2$ seriam vista como coordenadas homogêneas x_h, y_h e w, portanto um vetor $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ do plano será representado no espaço homogêneo por $\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{bmatrix}$.

As coordenadas do espaço homogêneo são chamadas de de homogêneas ou projetivas.

Para nosso estudo vamos considerar $w = 1$, então uma transformação de translação de vetores do $\mathbb{R}^2$ pode ser vista como uma transformação linear de vetores que estão no plano $z = 1$.

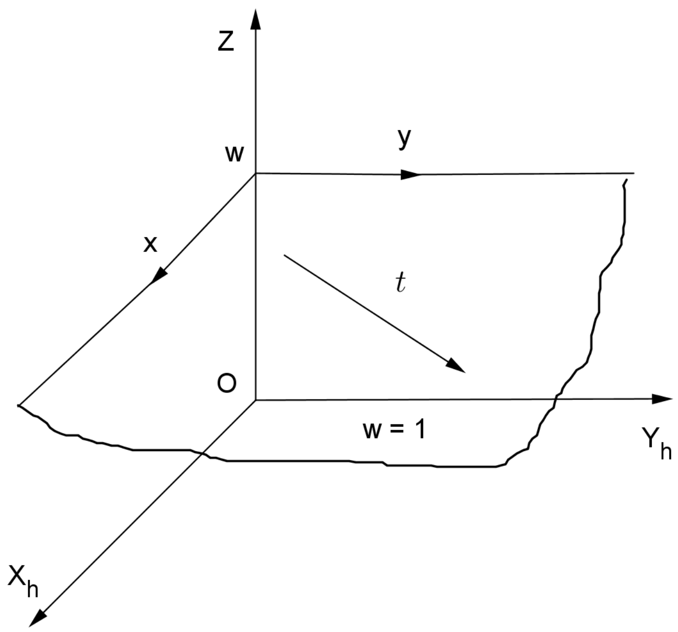

Figura 1.17: Imersão do $\mathbb{R}^2$ no sistema homogêneo x_h, y_h e w

Assim

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

representa uma transformação de translação que ocorre no plano $z = 1$.

Observe que para qualquer vetor $\boldsymbol{p}$ do $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é único o vetor no sistema homogêneo representado por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, da mesma forma temos que para cada vetor no espaço homogêneo com $w = 1$, ou seja, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ também é único o vetor do $\mathbb{R}^2$. Sendo assim podemos representar transformações do $\mathbb{R}^2$ com matrizes 3×3 e transformações do $\mathbb{R}^3$ com matrizes 4×4, para não confundir um vetor homogêneo do $\mathbb{R}^2$ com um vetor cartesiano do $\mathbb{R}^3$ já que ambos possuem três coordenadas faremos o seguinte:

Usaremos ( ) para representar vetores cartesianos e [ ] para representar vetores do espaço homogêneo.

Com a utilização das coordenadas homogêneas podemos dar o mesmo tratamento algébrico as transformações translação dado as transformações lineares, desta maneira o processo de composição de transformações fica mais simples, sendo modelado pelo produto de matrizes.

Exemplo 5 *A equação*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

representa a composição de duas translações com uma rotação de um ângulo α num vetor $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ do plano em coordenadas homogêneas.

Capítulo 2

Transformações Geométricas no Espaço

2.1 Transformações Geométricas no Espaço

No espaço vamos estudar as transformações de escala, reflexão, rotação e translação.Vamos definir o que é uma transformação no espaço.

Definição 10 *Uma transformação no* $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, que associa a cada vetor* $\boldsymbol{p}$ *do espaço um novo vetor* $\boldsymbol{p}'$ *tal que:*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$$

ou

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Onde $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *corresponde as coordenadas do vetor* $\vec{\boldsymbol{op}}$*, sendo* $\boldsymbol{o}$ *a origem do espaço.*

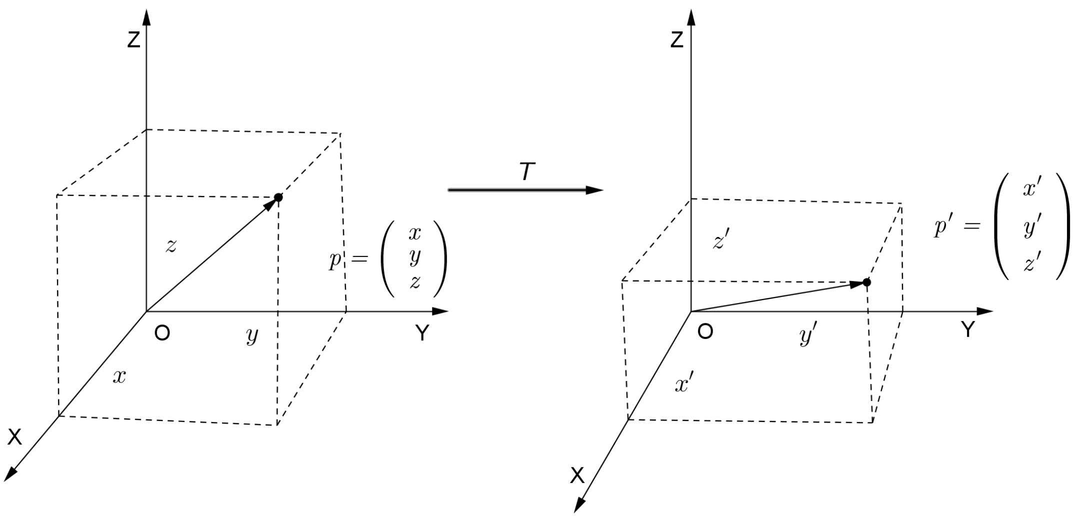

Figura 2.1: Transformação de $\boldsymbol{p}$ em $\boldsymbol{p}'$ no espaço

2.1.1 Transformação de Translação no Espaço

A transformação de translação no espaço possui a mesma características da transformação de translação no plano sendo apenas uma ampliação do mesmo.

Definição 11 *A transformação de translação $\boldsymbol{T}$ no espaço é uma aplicação $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix},$$

onde $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix}$ *é um vetor não-nulo.*

Observação 9 *Como a transformação de translação no espaço não é linear porque não preserva a origem, isto é, a transformada do vetor nulo é $\boldsymbol{t}$, que é diferente de zero. A translação não pode ser escrita da forma:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$.

A forma matricial de uma transformação de translação no espaço é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Por esta forma de escrita não facilitar a composição de transformações, vamos utilizar o mesmo raciocínio que utilizamos no plano. Para facilitar a composição de transformações, vamos olhar as transformações de translação no espaço como uma transformação linear através do espaço homogêneo, ou seja, o $\mathbb{R}^3$ será visto como o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ w = cte \right\};$$

no nosso estudo vamos considerar $w = 1$.

Então a transformação de translação no espaço poder ser escrita em coordenadas homogêneas da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

sendo a matriz de transformação de translação no espaço homogêneo a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Transformação de Escala no Espaço

Definição 12 *A transformação de escala* $\boldsymbol{T}$ *no espaço é uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, tal que*

$$\boldsymbol{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

No espaço homogêneo a transformação de escala no espaço seria representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de transformação de escala no espaço homogêneo é:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.3 Transformações de Reflexões no Espaço

Vamos estudar três tipos de reflexão no espaço.

a) **Reflexões em relação aos planos cartesianos:**

Definição 13 *A transformação $\boldsymbol{T}$ de reflexão em relação ao plano xOy é uma aplicação $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao plano xOy é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

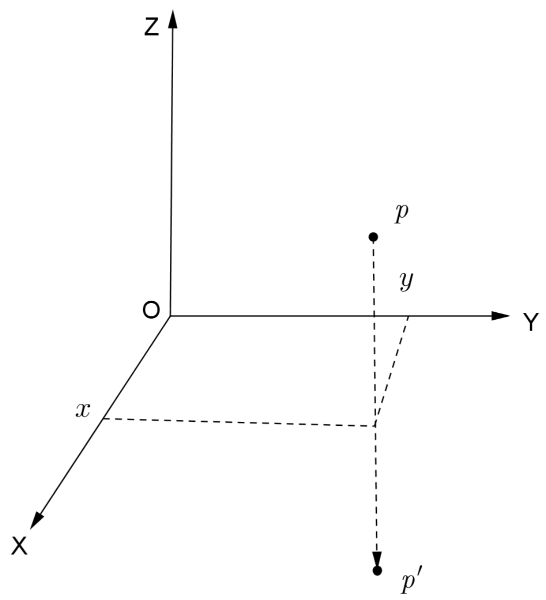

Figura 2.2: Transformação de reflexão em relação ao plano xOy

Definição 14 *A transformação $\boldsymbol{T}$ de reflexão em relação ao plano xOz é uma aplicação $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao plano xOz é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

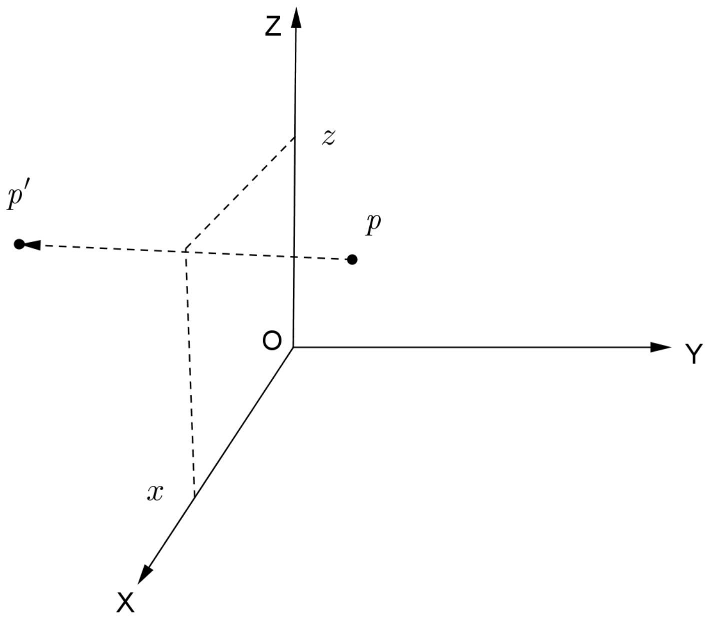

Figura 2.3: Transformação de reflexão em relação ao plano xOz

Definição 15 *A transformação* $\boldsymbol{T}$ *de reflexão em relação ao plano* yOz *é uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao plano yOz é:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

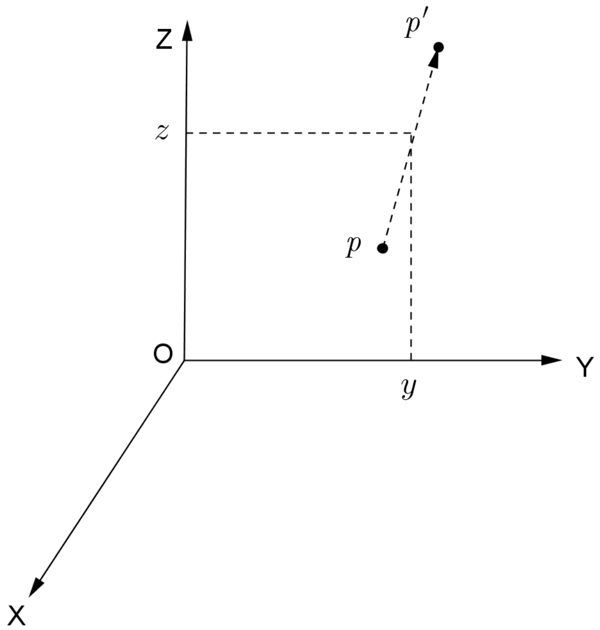

Figura 2.4: Transformação de reflexão em relação ao plano yOz

b) **Reflexões em relação aos eixos coordenados:**

Definição 16 *A transformação* $\boldsymbol{T}$ *de reflexão em relação ao eixo* x *é uma aplicação* $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao eixo x é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

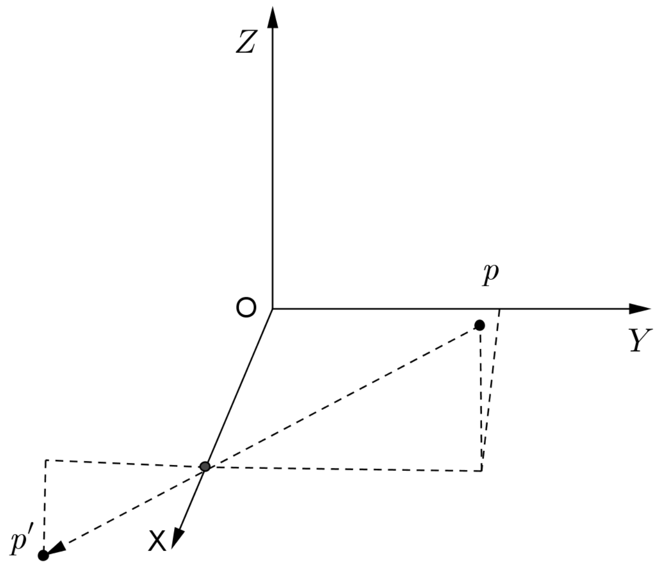

Figura 2.5: Transformação de reflexão em relação ao eixo x

Analogamente,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

definem as reflexões em relação aos eixos y e z respectivamente.

c) **Reflexão na origem:**

Definição 17 *A transformação* $\boldsymbol{T}$ *de reflexão em relação a origem no espaço é uma aplicação* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *tal que*

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A matriz de transformação de reflexão na origem no espaço é:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

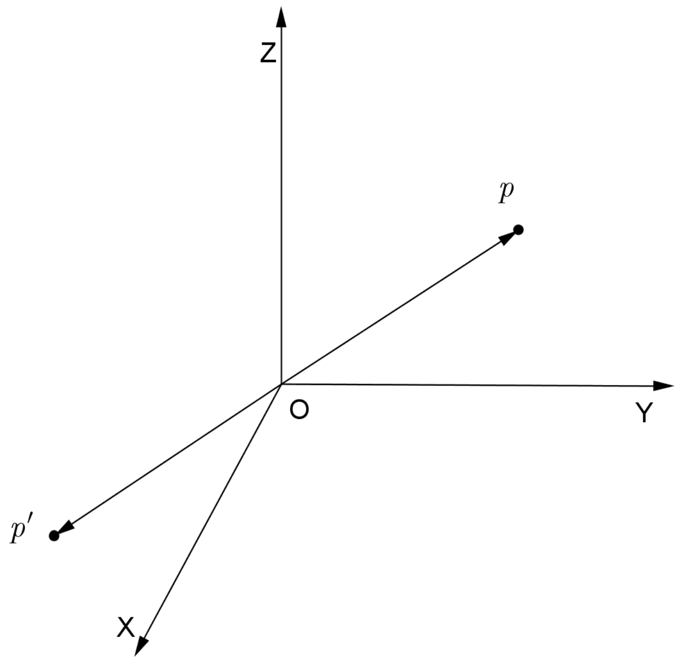

Figura 2.6: Transformação de reflexão no espaço em relação a origem

2.1.4 Transformação de Rotação no Espaço

As matrizes de rotação no espaço não são tão simples de serem definidas como a matriz de rotação no plano. Mais podemos simplificar o processo se observarmos a rotação de um objeto no espaço a partir de três rotações em torno de cada um dos eixos cartesianos e observando a ordem das rotações pois se alterarmos a ordem em que elas são aplicadas obtemos resultados diferentes.

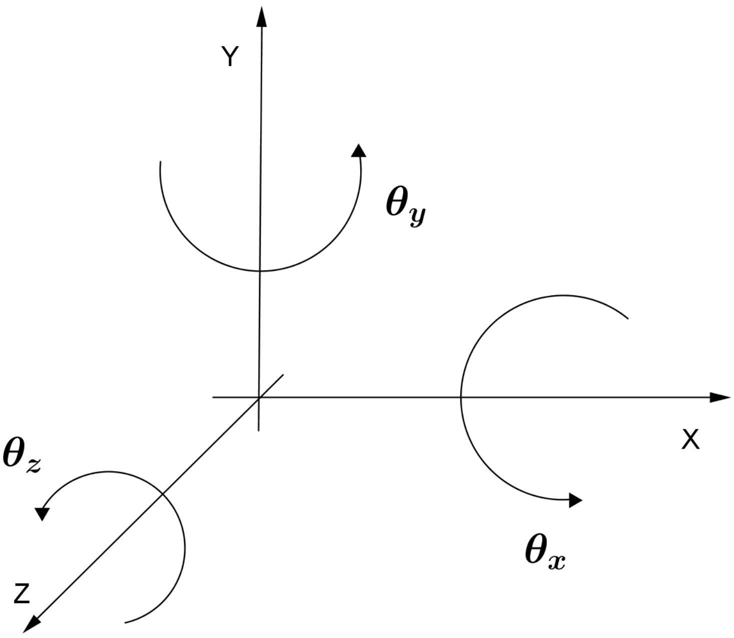

Figura 2.7: Rotação em torno dos eixos cartesianos

Vamos considerar a seguinte ordem de rotação: primeiro em torno do eixo x de um ângulo θ_x, segundo em torno do eixo y de um ângulo θ_y e por último em torno do eixo z de um ângulo θ_z.

Proposição 8 *A matriz de uma transformação de rotação no espaço em relação ao eixo x é:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\ \theta_x & -\ \mathrm{sen}\theta_x \\ 0 & \mathrm{sen}\ \theta_x & \cos\ \theta_x \end{pmatrix}.$$

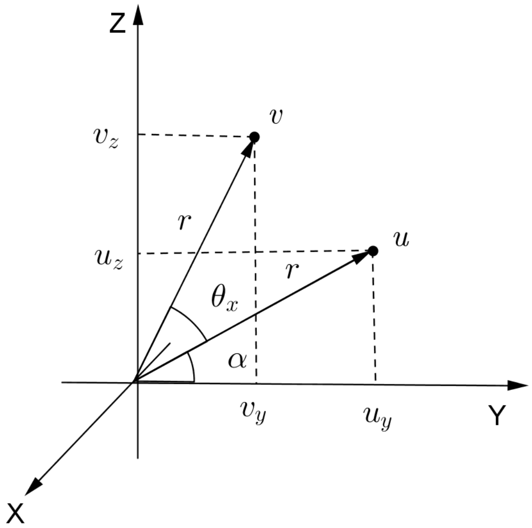

Figura 2.8: Rotação em relação ao eixo x no espaço

Demonstração: Seja o vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$, com norma igual a r, vamos rotacionar esse vetor $\boldsymbol{u}$ em torno do eixo x de um ângulo θ_x, obtendo assim o vetor $\boldsymbol{v}$. Considere que u_y e u_z são as componentes do vetor $\boldsymbol{u}$ em relação ao eixo y e ao eixo z respectivamente, da mesma forma que v_y e v_z são as componentes do vetor $\boldsymbol{v}$. Assim temos que: $u_y = r\ \cos\ \alpha, u_z = r\ \text{sen}\ \alpha, v_y = r\ \cos\ (\alpha + \theta_x)\ e\ v_z = r\ \text{sen}\ (\alpha + \theta_x)$. Utilizando as identidades trigonométricas (1.1) e (1.2) apresentadas no Capítulo 1 obtemos

$$\begin{aligned}
v_y &= r\ \cos\ (\alpha + \theta_x) \\
&= r\ (\cos\ \alpha\ \cos\ \theta_x\ -\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \theta_x) \\
&= r\ \cos\ \alpha\ \cos\ \theta_x\ -\ r\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \theta_x \\
&= u_y\ \cos\ \theta_x\ -\ u_z\ \text{sen}\ \theta_x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v_z &= r\ \text{sen}\ (\alpha + \theta_x) \\
&= r\ (\text{sen}\ \alpha\ \cos\ \theta_x\ +\ \text{sen}\ \theta_x\ \cos\ \alpha) \\
&= r\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \theta_x\ +\ \text{sen}\ \theta_x\ \cos\ \alpha \\
&= u_z\ \cos\ \theta_x\ +\ u_y\ \text{sen}\ \theta_x \\
&= u_y\ \text{sen}\ \theta_x\ +\ u_z\ \cos\ \theta_x
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \cos\,\theta_x \; - \; u_z \,\mathrm{sen}\,\theta_x \\ u_y \,\mathrm{sen}\,\theta_x \; + \; u_z \cos\,\theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_x & -\mathrm{sen}\,\theta_x \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta_x & \cos\,\theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix},$$

portanto a matriz de rotação no espaço em relação ao eixo x de um ângulo θ_x é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_x & -\mathrm{sen}\,\theta_x \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta_x & \cos\,\theta_x \end{pmatrix}$$

como queríamos demostrar. ■

Em coordenadas homogêneas temos que a rotação no espaço em torno do eixo x pode ser representada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_x & -\mathrm{sen}\,\theta_x & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta_x & \cos\,\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 10 *Veja que sendo $\boldsymbol{T}$ a transformação que rotaciona vetores em torno do eixo x em um ângulo θ_x. temos que:*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\,\theta_x \\ \mathrm{sen}\,\theta_x \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta_x \\ \cos\,\theta_x \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga temos que a rotação no espaço em relação ao eixo y e ao eixo z em coordenadas homogêneas serão representadas respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\,\theta_y & 0 & \mathrm{sen}\,\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\,\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\,\theta_z & -\mathrm{sen}\,\theta_z & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo as matrizes de rotação em relação aos eixos y e z em coordenadas cartesianas são respectivamente

$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta_y & 0 & \text{sen}\,\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\,\theta_y \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta_z & -\text{sen}\,\theta_z & 0 \\ \text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como já definimos as matrizes de rotação no espaço em relação aos eixos, vamos nessa próxima seção falar sobre rotação no espaço usando os ângulos de Euler.

2.1.5 Rotação no Espaço usando os Ângulos de Euler

A parametrização das rotações no espaço por ângulos de Euler dá a ideia que qualquer rotação no espaço pode ser obtida utilizando as três rotações sucessivas $\boldsymbol{R}_x$, $\boldsymbol{R}_y$ e $\boldsymbol{R}_z$ em torno dos eixos coordenados.

Definição 18 *Os ângulos de Euler são θ_x, θ_y e θ_z onde suas respectivas rotações são dadas por*

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_x & -\text{sen}\,\theta_x \\ 0 & \text{sen}\,\theta_x & \cos\,\theta_x \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\,\theta_y & 0 & \text{sen}\,\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\,\theta_y \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\,\theta_z & -\text{sen}\,\theta_z & 0 \\ \text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta_x, \theta_y, \theta_z \in [-\pi, \pi]$, representando rotações em torno dos eixos x, y e z respectivamente.

Como esta representação utiliza apenas três variáveis (θ_x, θ_y *e* θ_z) para representar uma rotação, ela é muito útil apesar de não ser fácil a composição de uma rotação arbitrária como uma série de três rotações em torno dos eixos coordenados. A matriz de rotação especificada pelos ângulos de Euler será obtida pela matriz

$$\boldsymbol{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \boldsymbol{R}_z \boldsymbol{R}_y \boldsymbol{R}_x$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\,\theta_z & -\text{sen}\,\theta_z & 0 \\ \text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\,\theta_y & 0 & \text{sen}\,\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\,\theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_x & -\text{sen}\,\theta_x \\ 0 & \text{sen}\,\theta_x & \cos\,\theta_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\,\theta_y\,\cos\,\theta_z & \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_y\,\cos\,\theta_z - \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_y\,\cos\,\theta_z + \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z \\ \cos\,\theta_y\,\text{sen}\,\theta_z & \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_y\,\text{sen}\,\theta_z + \cos\,\theta_x\,\cos\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_y\,\text{sen}\,\theta_z - \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,\theta_z \\ -\text{sen}\,\theta_y & \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,\theta_y & \cos\,\theta_x\,\cos\,\theta_y \end{pmatrix}$$

Os ângulos de Euler apresentam alguns problemas, entre eles destacamos o "*Gimbal lock*" que significa a perda de um grau de liberdade rotacional, ele acontece quando alguns dos ângulos de Euler é de 90° .

Por exemplo, considere uma sequência de rotações a serem realizadas por um vetor. A primeira rotação de um ângulo θ_x em torno do eixo x, a segunda é de 90° em torno do eixo y e a terceira rotação de um ângulo θ_z em torno do eixo z. Após estas rotações veremos que a rotação θ_z tem o mesmo efeito que a rotação em torno do eixo x. A rotação $\theta_y = 90°$, provoca um alinhamento entre os eixos x e z, o que causa a perda de um grau de liberdade na rotação. Assim $\boldsymbol{R}(\theta_x, 90°, \theta_z)$ será

$$= \begin{pmatrix} \cos\,90°\,\cos\,\theta_z & \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,90°\,\cos\,\theta_z - \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,90°\,\cos\,\theta_z + \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z \\ \cos\,90°\,\text{sen}\,\theta_z & \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,90°\,\text{sen}\,\theta_z + \cos\,\theta_x\,\cos\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,90°\,\text{sen}\,\theta_z - \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,\theta_z \\ -\text{sen}\,90° & \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,90° & \cos\,\theta_x\,\cos\,90° \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,\theta_z - \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\cos\,\theta_z + \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z \\ 0 & \text{sen}\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z + \cos\,\theta_x\,\cos\,\theta_z & \cos\,\theta_x\,\text{sen}\,\theta_z - \text{sen}\,\theta_x\,\cos\,\theta_z \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\,(\theta_x - \theta_z) & \cos\,(\theta_x - \theta_z) \\ 0 & \cos\,(\theta_x - \theta_z) & -\text{sen}\,(\theta_x - \theta_z) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz acima mostra que a rotação

$$\boldsymbol{R}(\theta_x, 90°, \theta_z)$$

depende somente da diferença $(\theta_x - \theta_z)$, isto é, tem apenas um grau de liberdade em vez de dois. Antes de iniciar a próxima seção, apresentaremos a definição de produto vetorial.

2.1.6 Produto Vetorial

Definição 19 *Seja* $\boldsymbol{u} = (x, y, z), \boldsymbol{v} = (x', y', z')$ *vetores do espaço, então o produto vetorial de* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *é o vetor*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Para entender melhor está definição e ajudar a sua memorização, vamos definir como se obtém o determinante de uma matriz 2×2 e 3×3.

Definição 20 *Seja uma matriz de ordem* 2*, isto é,* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, o determinante dessa matriz é definido por:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Definição 21 *Seja uma matriz de ordem 3, isto é,* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$*, o determinante dessa matriz pode ser definido por:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Se reescrevermos a Definição 19 utilizando determinantes de segunda ordem e os vetores canônicos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ *e* $\mathbf{k}$, veremos que o produto vetorial do vetor $\boldsymbol{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ por $\boldsymbol{v} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Proposição 9 *Seja* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$*,então:*

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0.$$

Demonstração: Se $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$, temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (yz - zy)\mathbf{i} - (xz - zx)\mathbf{j} + (xy - yx)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 10 *O vetor* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ *é ortogonal a* $\boldsymbol{u}$ *e a* $\boldsymbol{v}$*.*

Demonstração: Para mostrar que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ é ortogonal a $\boldsymbol{u}$, vamos efetuar o produto interno com $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\mathbf{x} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\mathbf{y} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\mathbf{z} \\ &= x(yz' - zy') - y(xz' - zx') + z(xy' - yx') \\ &= xyz' - xy'z - xyz' + x'yz + xy'z - x'yz \\ &= 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$. Portanto, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ é ortogonal tanto a $\boldsymbol{u}$ quanto a $\boldsymbol{v}$. ∎

Proposição 11 *Se θ é o ângulo formado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, com $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, então*

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\mathrm{sen}\ \theta.$$

Demonstração: Das definições de produto vetorial e norma de um vetor, temos

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2 &= (yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2\\
&= y^2z'^2-2yy'zz'+z^2y'^2+z^2x'^2-2xx'zz'+x^2z'^2+\\
&\quad x^2y'^2-2xx'yy'+y^2x'^2\\
&= (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2\\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2\\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2\cos^2\ \theta\\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2(1-\cos^2\ \theta)\\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2\mathrm{sen}^2\ \theta.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada e observando que $\sqrt{\mathrm{sen}^2\ \theta}=\mathrm{sen}\ \theta$ porque $\mathrm{sen}\ \theta\geqslant 0$ quando $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, temos

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\mathrm{sen}\ \theta, \tag{2.1}$$

o que prova o resultado desejado. ∎

Proposição 12 *Dois vetores não nulos $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ são paralelos se, e somente se*

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=0.$$

Demonstração: Dois vetores não nulos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são paralelos se o ângulo θ formado por eles for $0°$ ou $180°$. Em qualquer um dos casos $\mathrm{sen}\ \theta=0$, assim por (2.1) temos que $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=0$ e, portanto, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=0$. ∎

Aplicando as proposições 7 e 8 nos vetores canônicos $\mathbf{i},\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{k}$ com $\theta=90°$ obtemos:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\\
\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}
\end{array}$$

Proposição 13 *Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vetores no espaço, então*

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}).$$

Demonstração: Basta observar que o vetor

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} &= (yz'-zy',zx'-xz',xy'-yx')\\
&= -(zy'-yz',xz'-zx',yx'-xy')\\
&= -(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

2.1.7 Rotação no Espaço em torno de um Eixo qualquer

Nesta seção, vamos dá uma olhada mais aprofundada sobre o processo geométrico que ocorre durante uma rotação em torno de um eixo qualquer. Iremos considerar inicialmente que esse eixo passe pela origem.

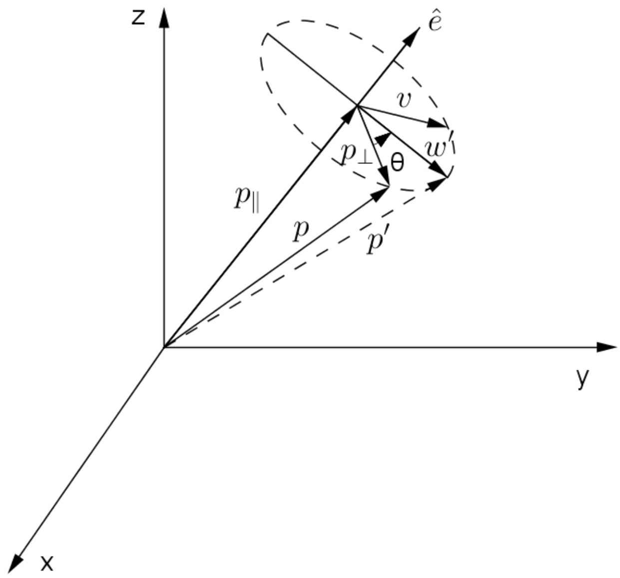

Figura 2.9: Rotação em torno de um eixo qualquer

Seja o vetor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$, vamos rotacioná-lo de um ângulo θ em torno de um eixo unitário $\hat{\mathbf{e}}$. Observe que o vetor $\boldsymbol{p}$ é igual a soma de dois vetores, um paralelo $\boldsymbol{p}_{\|}$ ao eixo $\hat{\mathbf{e}}$ e outro perpendicular $\boldsymbol{p}_{\perp}$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\|} + \boldsymbol{p}_{\perp}. \tag{2.2}$$

Aplicando a transformação linear de rotação $\boldsymbol{R}$ no vetor $\boldsymbol{p}$ obtemos o vetor $\boldsymbol{p}'$ através da equação

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_{\|} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_{\perp},$$

temos que $\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_{\|} = \boldsymbol{p}_{\|}$ e a componente perpendicular $\boldsymbol{w}'$ rotacionada de $\boldsymbol{p}_{\perp}$ de um ângulo θ em torno do eixo $\hat{\mathbf{e}}$ pode ser escrita como

$$\boldsymbol{w}' = (\cos\ \theta)\boldsymbol{p}_{\perp} + (\text{sen}\ \theta)\boldsymbol{v},$$

onde $\boldsymbol{v}$ é um vetor ortogonal aos vetores $\hat{\mathbf{e}}$ e $\boldsymbol{p}_{\perp}$, isto é, ele é obtido pelo produto vetorial de $\hat{\mathbf{e}}$ por $\boldsymbol{p}_{\perp}$.

$$\boldsymbol{v} = (\hat{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{p}_{\perp}).$$

Como $\|\hat{\mathrm{e}}\| = 1$ pois ele é unitário e $\|(\hat{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{p}_{\perp})\| = \|\hat{\mathrm{e}}\|\|\boldsymbol{p}_{\perp}\|\text{sen } 90°$, então

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\| &= \|(\hat{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{p}_{\perp})\| \\
&= \|\hat{\mathrm{e}}\|\|\boldsymbol{p}_{\perp}\|\text{sen } 90° \\
&= 1\|\boldsymbol{p}_{\perp}\|1 \\
&= \|\boldsymbol{p}_{\perp}\|.
\end{aligned}
$$

Logo temos que a norma de $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{p}_{\perp}\|$ e como $\boldsymbol{w}'$ foi obtido de $\boldsymbol{p}_{\perp}$ por rotação eles tem a mesma norma, isto é,

$$\|\boldsymbol{w}'\| = \|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{p}_{\perp}\|,$$

assim visualizamos o círculo.

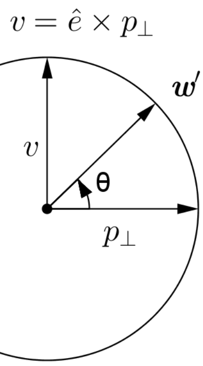

Figura 2.10: Rotação

O vetor $\boldsymbol{p}'$ fica determinado pela equação

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_{\|} + (\cos\ \theta)\boldsymbol{p}_{\perp} + (\text{sen } \theta)\boldsymbol{v}.$$

Vamos escrever os vetores $\boldsymbol{p}_{\|}$, $\boldsymbol{p}_{\perp}$ e $\boldsymbol{v}$ em função de $\boldsymbol{p}$ e $\hat{\mathrm{e}}$. Como $\boldsymbol{p}_{\|}$ é a projeção de $\boldsymbol{p}$ sobre o eixo $\hat{\mathrm{e}}$, isto é,

$$\boldsymbol{p}_{\|} = (\hat{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathrm{e}},$$

da equação (2.2) temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{\perp} &= \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{\parallel} \\ &= \boldsymbol{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

O vetor $\boldsymbol{v}$ será escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \hat{\mathbf{e}} \times (\boldsymbol{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}}) \\ &= (\hat{\mathbf{e}} \times \boldsymbol{p}) - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})(\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{e}}) \\ &= \hat{\mathbf{e}} \times \boldsymbol{p}, \end{aligned}$$

pois $\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{e}} = 0$, assim podemos obter a equação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= (\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}} + (\cos\ \theta)(\boldsymbol{p} - (\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}}) + (\mathrm{sen}\ \theta)(\hat{\mathbf{e}} \times \boldsymbol{p}) && (2.3) \\ &= (\cos\ \theta)\boldsymbol{p} + (1 - \cos\ \theta)(\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}} + (\mathrm{sen}\ \theta)(\hat{\mathbf{e}} \times \boldsymbol{p}). && (2.4) \end{aligned}$$

Mais a formulação dessa equação não é muito prática nem elegante, embora esteja escrita nos dados do problema.

Uma outra saída para calcular a rotação em torno de um eixo qualquer $\hat{\mathbf{e}} = (e_x, e_y, e_z)$ de um vetor $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ seria o cálculo da matriz da transformação de rotação. Vamos determiná-la considerando que a primeira, segunda e terceira coluna seja a transformada dos vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ *e* $\mathbf{k}$ respectivamente. Temos que as colunas representam rotações em torno das direções dos eixos coordenados , então a matriz de rotação no espaço homogêneo será

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Onde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix} &= \cos\ \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos\ \theta)e_x \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \mathrm{sen}\ \theta \begin{pmatrix} 0 \\ e_z \\ -e_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\ \theta + (1 - \cos\ \theta)e_x^2 \\ e_x e_y(1 - \cos\ \theta) + e_z \mathrm{sen}\ \theta \\ e_x e_z(1 - \cos\ \theta) - e_y \mathrm{sen}\ \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix} &= \cos\ \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\ \theta)e_y \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \text{sen}\ \theta \begin{pmatrix} -e_z \\ 0 \\ e_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_y e_x(1-\cos\ \theta) - e_z \text{sen}\ \theta \\ \cos\ \theta + (1-\cos\ \theta)e_y^2 \\ e_y e_z(1-\cos\ \theta) - e_x \text{sen}\ \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix} &= \cos\ \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\ \theta)e_z \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} + \text{sen}\ \theta \begin{pmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_z e_x(1-\cos\ \theta) + e_y \text{sen}\ \theta \\ e_z e_y(1-\cos\ \theta) - e_x \text{sen}\ \theta \\ \cos\ \theta + (1-\cos\ \theta)e_z^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Então pela transformação de rotação temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde a matriz de rotação será

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\ \theta + (1-\cos\ \theta)e_x^2 & e_y e_x(1-\cos\ \theta) - e_z \text{sen}\ \theta & e_z e_x(1-\cos\ \theta) + e_y \text{sen}\ \theta & 0 \\ e_x e_y(1-\cos\ \theta) + e_z \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta + (1-\cos\ \theta)e_y^2 & e_z e_y(1-\cos\ \theta) - e_x \text{sen}\ \theta & 0 \\ e_x e_z(1-\cos\ \theta) - e_y \text{sen}\ \theta & e_y e_z(1-\cos\ \theta) - e_x \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta + (1-\cos\ \theta)e_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 11 *Na obtenção da matriz* $\boldsymbol{M}$*, foram utilizados os seguintes resultados* $\hat{\mathbf{e}}\cdot\boldsymbol{i} = e_x$, $\hat{\mathbf{e}}\cdot\boldsymbol{j} = e_y$, *e* $\hat{\mathbf{e}}\cdot\boldsymbol{k} = e_z$ *assim como* $\hat{\mathbf{e}}\times\boldsymbol{i} = (0, e_z, -e_y)$, $\hat{\mathbf{e}}\times\boldsymbol{j} = (-e_z, 0, e_x)$ *e* $\hat{\mathbf{e}}\times\boldsymbol{k} = (e_y, -e_x, 0)$, *com* $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0)$ *e* $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$.

Se o eixo $\hat{\mathbf{e}}$ não passar pela origem, podemos compor a matriz de rotação com duas de translações. Considere que o eixo de rotação $\hat{\mathbf{e}}$ não passe pela origem, mais sim pelo vetor $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a rotação final será dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A equação acima faz uma translação do vetor $\boldsymbol{p}_0$ para origem, em seguida uma rotação em torno do eixo $\hat{\mathbf{e}}$ e por último uma translação para levar o vetor $\boldsymbol{p}_0$ a sua posição inicial.

Uma maneira mais simples de estudar rotações no espaço é através do uso de Quatérnio o que será estudado no Capítulo 3.

2.1.8 Instanciação de Objetos e Hierarquia de movimentos

Quando instanciamos um objeto numa cena, aplicamos transformações geométricas que colocam o modelo geométrico padrão do objeto no tamanho e na posição corretos na cena. Considere, por exemplo, o modelo de um braço mecânico simples obtido através. O cubo unitário por meio de transformações. Basta que o cubo seja escalado, rodado e transladado de forma adequada.

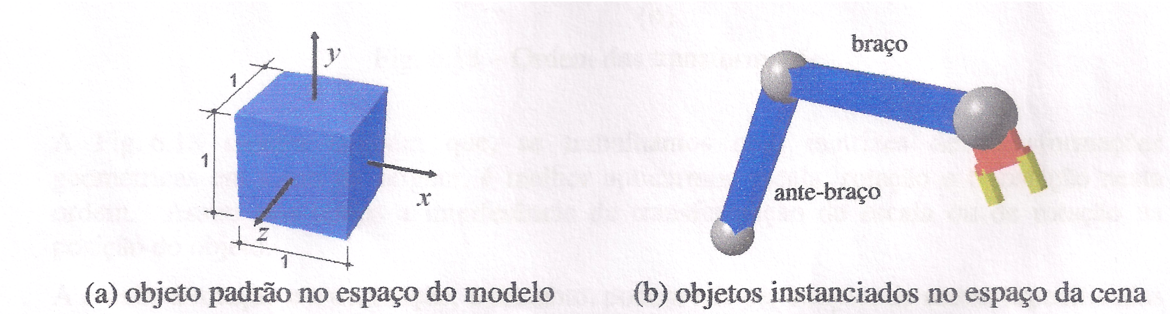

Figura 2.11: Instanciação de objetos num braço mecânico simples

Para seguir uma cadeia de transformações que ocorre em objetos articulados como o braço mecânico é conveniente pensarmos em outra interpretação geométrica para as transformações. Ao invés de considerarmos as transformações como ocorrendo nos objetos, podemos pensar nelas ocorrendo num sistema de eixos, chamados de eixos locais, que rodam e transladam. A ideia geral é que os eixos locais estão originalmente coincidentes com os eixos globais. A cada transformação de rotação e translação, o eixo local muda de posição. Quando algum objeto for desenhado, ele estará referenciado no sistema local transformado.

Com a ideia de eixos locais, a instanciação de objetos para compor o braço mecânico simples é mais fácil de ser organizada. A partir dos eixos xyz a cinemática do braço mecânico pode ser descrita seguindo a ordem dos objetos, como ilustra o quadro abaixo.

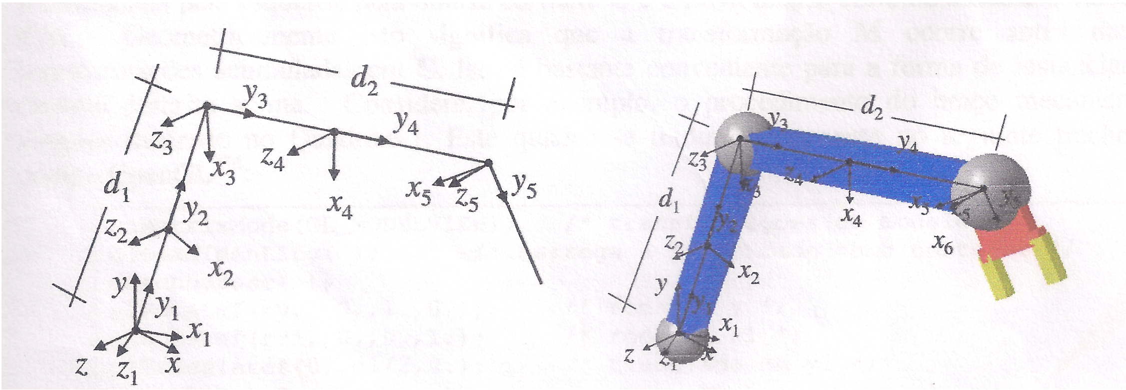

Figura 2.12: Eixos locais do braço mecânico

Procedimentos para instanciar objetos no braço mecânico simples

```
Desenha a base no sistema xyz;
Roda em y;
Roda em z1;
Translada em y1 de d1/2;
Desenha o ante-braço no sistema x2y2z2;
Translada em y1 de d1/2;
Desenha cotovelo no sistema x3y3z3;
Roda em z3;
Translada em y3 de d2/2;
Desenha o braço no sistema x4y4z4;
Translada em y3 de d2/2;
Desenha o pulso no sistema x5y5z5;
Roda em z5;
Desenha a mão no sistema x5y5z5;
```

É interessante notarmos que o procedimento de instanciação do Quadro acima resulta na cadeia de matrizes mostrada na tabela abaixo.

base	$\mathbf{I}$
ante-braço	$\mathbf{R}_y\mathbf{R}_{z1}\mathbf{T}_{y1}$
cotovelo	$\mathbf{R}_y\mathbf{R}_{z1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{T}_{y1}$
braço	$\mathbf{R}_y\mathbf{R}_{z1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{R}_{z3}\mathbf{T}_{y3}$
pulso	$\mathbf{R}_y\mathbf{R}_{z1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{R}_{z3}\mathbf{T}_{y3}\mathbf{T}_{y3}$
mão	$\mathbf{R}_y\mathbf{R}_{z1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{T}_{y1}\mathbf{R}_{z3}\mathbf{T}_{y3}\mathbf{T}_{y3}\mathbf{R}_{z5}$

Capítulo 3

Quatérnios

3.1 Fundamentos Históricos

A descoberta dos Quatérnios foi fruto da procura de uma forma algébrica simples e elegante para representar as rotações no espaço onde a partir da extensão dos números complexos o *Sir William Rowam Hamilton* em 1843 inventou uma estrutura algébrica a qual deu o nome de Quatérnios.

O que motivou *Hamilton* a procurar números complexos tridimensionais era que ele queria encontrar uma forma para descrever rotações no espaço, análoga aos números complexos, onde o produto de dois complexos produz uma rotação e uma mudança de escala no plano. No ano de 1843 do mês de outubro numa segunda feira caminhando pelo *Royal Canal* em Dublim *Hamilton* teve a ideia de que seriam necessários quatros números para descrever uma rotação no espaço seguida de um aumento de escala, um número representa a mudança de escala, outro o grau a ser girado e os outros dois dão o plano em que o vetor deve ser girado. Assim *Hamilton* encontrou uma multiplicação fechada para os números complexos, quadri-dimensionais da forma

$$\underline{q} = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

onde

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1;$$
$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k};$$
$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i};$$
$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j};$$

Hamilton batizou seus números complexos de quatérnios. Um quatérnio $s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é usualmente escrito como $[s, \boldsymbol{v}], s \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ onde s é chamado *parte escalar* e $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$, *parte vetorial.*

3.1.1 Operações com Quatérnios

Nesta seção será iniciada o estudo das operações com quatérnios assim como sua notação, entre as operações destacamos a adição, subtração, multiplicação por um escalar e a multiplicação entre dois quatérnios. Também vamos definir o conjugado e o inverso de um quatérnio.

Definição 22 *O conjunto dos Quatérnios é representado por* $\mathbb{H}$.

Quatérnios são estruturas algébricas formadas por uma parte escalar $s \in \mathbb{R}$ e uma parte vetorial $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Usaremos o símbolo "$\equiv$ "para indicar "*igual por definição* ".

Definição 23 *Sejam* $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$ *e* $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$. *Então, se* $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$, *podemos escrever:*

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}} &\equiv s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &\equiv [s, (x, y, z)], com\ s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &\equiv [s, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Definição 24 *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}'} \in \mathbb{H}$, *onde* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, (x, y, z)]$ *e* $\underline{\boldsymbol{q}'} = [s', (x', y', z')]$. *O operador adição "+ ", é definido como:*

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{q}'} &\equiv [s, \boldsymbol{v}] + [s', \boldsymbol{v}'] \\ &\equiv [s, (x, y, z)] + [s', (x', y', z')] \\ &\equiv [s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}] + [s' + x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}] \\ &\equiv [(s + s') + (x + x')\boldsymbol{i} + (y + y')\boldsymbol{j} + (z + z')\boldsymbol{k}]. \end{aligned}$$

Proposição 14 (Adição Quatérnia) *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}'} \in \mathbb{H}$ *onde* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ *e* $\underline{\boldsymbol{q}'} = [s', \boldsymbol{v}']$, *então:*

$$\underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{q}'} \equiv [s + s', \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{q}'} &\equiv [s, \boldsymbol{v}] + [s', \boldsymbol{v}'] \\ &\equiv [s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] + [s' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}] \\ &\equiv [(s + s') + (x + x')\mathbf{i} + (y + y')\mathbf{j} + (z + z')\mathbf{k}] \\ &\equiv [s + s', \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'], \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 25 *Sejam $\underline{q}, \underline{q'} \in \mathbb{H}$, onde $\underline{q} = s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ e $\underline{q'} = s' + x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$. A operação de multiplicação é definida por:*

$$\begin{aligned}
\underline{q}\,\underline{q'} &\equiv [s, \boldsymbol{v}][s', \boldsymbol{v'}] \\
&\equiv [s, (x, y, z)][s', (x', y', z')] \\
&\equiv [s + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}][s' + x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}] \\
&\equiv [ss' - (xx' + yy' + zz') + (sx' + s'x + yz' - y'z)\boldsymbol{i} + (sy' + s'y + zx' - z'x)\boldsymbol{j} \\
&\quad + (sz' + s'z + xy' - x'y)\boldsymbol{k}].
\end{aligned}$$

Proposição 15 (Multiplicação Quatérnia) *Sejam $\underline{q}, \underline{q'} \in \mathbb{H}$, onde $\underline{q} = [s, \boldsymbol{v}]$ e $\underline{q'} = [s', \boldsymbol{v'}]$ então:*

$$\underline{q}\,\underline{q'} \equiv [ss' - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v'}, s\boldsymbol{v'} + s'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v'}],$$

onde " $\cdot$" e " $\times$ " denotam o produto interno e vetorial em $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Demonstração: Pela Definição 23, temos que $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$. Usando-as temos:

$$\begin{aligned}
\underline{q}\,\underline{q'} &\equiv [s, \boldsymbol{v}][s', \boldsymbol{v'}] \\
&\equiv (s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(s' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) \\
&\equiv ss' - (xx' + yy' + zz') + (sx' + s'x + yz' - zy')\mathbf{i} \\
&\quad + (sy' + s'y + zx' - xz')\mathbf{j} + (sz' + s'z + xy' - yx')\mathbf{k} \\
&\equiv (ss' - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v'}) + (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k} \\
&\quad + s(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) + s'(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\
&\equiv [ss' - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v'}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v'} + s\boldsymbol{v'} + s'\boldsymbol{v}],
\end{aligned}$$

o que prova o resultado desejado. ■

Corolário 15.1 *A multiplicação quatérnia geralmente não é comutativa.*

Demonstração: A prova desse corolário será feita através de um contra-exemplo, já que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ mas $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$. ■

Apresentaremos algumas proposições sem prová-las, pois sua prova são bastante cansativas e extensas.

Proposição 16 *Sejam* $\underline{\boldsymbol{p}}, \underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}'} \in \mathbb{H}$ *então:*
1. $(\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}})\underline{\boldsymbol{q}'} = \underline{\boldsymbol{p}}(\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}'})$ *(associatividade)*
2. $\underline{\boldsymbol{p}}(\underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{q}'}) = \underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}'}$ *(distributividade a esquerda)*
3. $(\underline{\boldsymbol{q}} + \underline{\boldsymbol{q}'})\underline{\boldsymbol{p}} = \underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{p}} + \underline{\boldsymbol{q}'}\ \underline{\boldsymbol{p}}$ *(distributividade a direita)*

Podemos representar um número real r como um quatérnio da forma $[r, 0]$. O que possibilita a introdução da multiplicação por um escalar.

Definição 26 *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *temos que:*

$$r\underline{\boldsymbol{q}} \equiv [r, 0]\underline{\boldsymbol{q}}.$$

A próxima proposição mostra que a multiplicação de um quatérnio por um escalar é comutativa.

Proposição 17 (Multiplicação por um escalar) *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *onde* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ *então:*

$$r\underline{\boldsymbol{q}} = \underline{\boldsymbol{q}}r.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
r\underline{\boldsymbol{q}} &= [r, 0][s, \boldsymbol{v}] \\
&= (r + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k})(s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\
&= [rs - 0, 0 + r\boldsymbol{v} + s(0, 0, 0)] \\
&= [rs, r\boldsymbol{v}] \\
&= (rs + rx\mathbf{i} + ry\mathbf{j} + rz\mathbf{k}) \\
&= (s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})r \\
&= [s, \boldsymbol{v}]r = \underline{\boldsymbol{q}}r,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

As notações $\dfrac{\underline{\boldsymbol{q}}}{r}$ e $-\underline{\boldsymbol{q}}$ indicam a multiplicação de um quatérnio por $\dfrac{1}{r}$ e por (-1) respectivamente com $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ e $r \in \mathbb{R}$.

Definição 27 *Dados* $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}'} \in \mathbb{H}$, *a subtração quatérnia é definida por:*

$$\underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{q}'} \equiv \underline{\boldsymbol{q}} + (-1)\underline{\boldsymbol{q}'}.$$

Com esta definição podemos introduzir a subtração quatérnia através da proposição a seguir.

Proposição 18 (Subtração Quatérnia.) *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}'} \in \mathbb{H}$, *onde* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ *e* $\underline{\boldsymbol{q}'} = [s', \boldsymbol{v}']$. *Então:*

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{q}'} &\equiv \underline{\boldsymbol{q}} + (-1)\underline{\boldsymbol{q}'} \\ &\equiv [s - s', \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}']. \end{aligned}$$

Da mesma maneira que definimos o conjugado de um complexo iremos definir o conjugado de um quatérnio.

Definição 28 *Seja* $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$. *Então o conjugado de* $\underline{\boldsymbol{q}}$ *será* $\underline{\boldsymbol{q}}^*$ *que representamos por*

$$\underline{\boldsymbol{q}}^* \equiv [s, \boldsymbol{v}]^* \equiv [s, -\boldsymbol{v}].$$

Segue da definição do conjugado de um quatérnio a seguinte proposição que trás algumas propriedades sobre conjugado de quatérnios.

Proposição 19 *Sejam* $\underline{\boldsymbol{p}}, \underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ *então:*

1. $(\underline{\boldsymbol{q}}^*)^* = \underline{\boldsymbol{q}}$;
2. $(\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}})^* = \underline{\boldsymbol{q}}^* \underline{\boldsymbol{p}}^*$;
3. $(\underline{\boldsymbol{p}} + \underline{\boldsymbol{q}})^* = \underline{\boldsymbol{p}}^* + \underline{\boldsymbol{q}}^*$;
4. $\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^* = \underline{\boldsymbol{q}}^* \underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}$;

Demonstração: 1) Seja $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$, isto é $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ e $\underline{\boldsymbol{q}}^* = [s, -\boldsymbol{v}]$, logo

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{q}}^*)^* &= [s, -(-\boldsymbol{v})] \\ &= [s, \boldsymbol{v}] = \underline{\boldsymbol{q}}. \end{aligned}$$

2) Sejam $\underline{\boldsymbol{p}}, \underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$, onde $\underline{\boldsymbol{p}} = [s, \boldsymbol{v}]$ e $\underline{\boldsymbol{q}} = [s', \boldsymbol{v}']$ então pela multiplicação de quatérnios temos que

$$\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}} = [ss' - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}', s\boldsymbol{v}' + s'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}'],$$

logo

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}})^* &= [ss' - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}', -s\boldsymbol{v}' - s'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}'] \\ &= [s's - \boldsymbol{v}'.\boldsymbol{v}, -s'\boldsymbol{v} - s\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v}] = \underline{\boldsymbol{q}}^* \underline{\boldsymbol{p}}^*. \end{aligned}$$

pois

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'.\boldsymbol{v} \ (\textit{produto interno})$$

e

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' = -(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v}) \ (produto\ vetorial)$$

3) Sejam $\underline{\boldsymbol{p}}, \underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ com $\underline{\boldsymbol{p}} = [s, \boldsymbol{v}]$ e $\underline{\boldsymbol{q}} = [s', \boldsymbol{v}']$ temos que

$$\underline{\boldsymbol{p}} + \underline{\boldsymbol{q}} = [s + s', \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'],$$

logo

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{p}} + \underline{\boldsymbol{q}})^* &= [s + s', -(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}')] \\ &= [s + s', -\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'] \\ &= [s, -\boldsymbol{v}] + [s', -\boldsymbol{v}'] \\ &= \underline{\boldsymbol{p}}^* + \underline{\boldsymbol{q}}^*. \end{aligned}$$

4) Se $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ então $\underline{\boldsymbol{q}}^* = [s, -\boldsymbol{v}]$, assim

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^* &= [ss - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}, -s\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}] \\ &= [s^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2, 0]. \end{aligned}$$

Temos que qualquer vetor é ortogonal a ele mesmo, isto é

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0.$$

Assim

$$\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^* = [ss + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}, s\boldsymbol{v} - s\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}] = \underline{\boldsymbol{q}}^* \underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar. ■

Outra propriedade obtida através da conjugação quatérnica é a norma.

Definição 29 *Seja $\underline{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{H}$, a aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ definida por $\|\underline{\boldsymbol{q}}\| \equiv \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^*}$. Está aplicação é chamada norma e $\|\underline{\boldsymbol{q}}\|$ é a norma de $\underline{\boldsymbol{q}}$.*

A seguir apresentaremos um resumo das propriedades da aplicação norma.

Proposição 20 *Sejam $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}}' \in \mathbb{H}$ e $\|\cdot\| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ a aplicação norma. As seguintes equações são válidas:*

1. $\|\underline{\boldsymbol{q}}\| = \sqrt{s^2 + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
2. $\|\underline{\boldsymbol{q}}^*\| = \|\underline{\boldsymbol{q}}\|$
3. $\|\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}'\| = \|\underline{\boldsymbol{q}}\|\|\underline{\boldsymbol{q}}'\|$

Demonstração: 1) Seja $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ onde $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}]$ e $\underline{\boldsymbol{q}}^* = [s, -\boldsymbol{v}]$, temos que

$$\begin{aligned} \|\underline{\boldsymbol{q}}\| &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^*} \\ &= \sqrt{[s, \boldsymbol{v}][s, -\boldsymbol{v}]} \\ &= \sqrt{[s^2 + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}, 0]} \\ &= \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

2) Seja $\underline{\boldsymbol{q}}^*$ o conjugado de $\underline{\boldsymbol{q}}$ segue que

$$\begin{aligned} \|\underline{\boldsymbol{q}}^*\| &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}^*(\underline{\boldsymbol{q}}^*)^*} \\ &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}^*\underline{\boldsymbol{q}}} \\ &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^*} \\ &= \|\underline{\boldsymbol{q}}\|. \end{aligned}$$

3) Sejam $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}}' \in \mathbb{H}$. Assim

$$\begin{aligned} \|\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}'\| &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}'(\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}')^*} \\ &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}'(\underline{\boldsymbol{q}}')^*\underline{\boldsymbol{q}}^*} \\ &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\|\underline{\boldsymbol{q}}'\|^2\underline{\boldsymbol{q}}^*} \\ &= \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^*\|\underline{\boldsymbol{q}}'\|^2} \\ &= \sqrt{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2\|\underline{\boldsymbol{q}}'\|^2} \\ &= \|\underline{\boldsymbol{q}}\|\|\underline{\boldsymbol{q}}'\|, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Com base no item 1) da Proposição 20 que define a norma de $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$ como

$$\|\underline{\boldsymbol{q}}\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Observamos que a norma de um quatérnio tem a mesma definição do produto interno de vetores do $\mathbb{R}^4$.

Definição 30 *Sejam* $\underline{\boldsymbol{q}}, \underline{\boldsymbol{q}}' \in \mathbb{H}$ *com* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}] = [s, (x, y, z)]$ *e* $\underline{\boldsymbol{q}}' = [s', \boldsymbol{v}'] = [s', (x', y', z')]$.

O produto interno é definido como $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, *onde*

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{q}} \cdot \underline{\boldsymbol{q}}' &= ss' + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' \\ &= ss' + xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

Dessa definição segue o seguinte corolário.

Corolário 20.1 *A norma de um quatérnio pode ser obtida por* $\|\underline{\boldsymbol{q}}\| = \sqrt{\underline{\boldsymbol{q}} \cdot \underline{\boldsymbol{q}}}$.

Demonstração: Segue-se da proposição 7 que $\underline{\boldsymbol{q}} \cdot \underline{\boldsymbol{q}} = \|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2$, com $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, (x, y, z)] \in \mathbb{H}$. Se indicarmos $\underline{\boldsymbol{q}}$ como $(s, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, o método de calcular a norma acima, é idêntico ao da norma euclidiana no $\mathbb{R}^4$. ■

3.1.2 Propriedades Algébricas dos Quatérnios

Nesta seção vamos mostrar que o subconjunto do conjunto dos quatérnios $\mathbb{H}\backslash[0, (0, 0, 0)]$ é um grupo não abeliano com base na multiplicação quatérnia.

Definição 31 *O conjunto dos quatérnios* $\mathbb{H}\backslash[0, (0, 0, 0)]$ *será representado por* $\mathring{\mathbb{H}}$.

Vamos primeiro definir o que é um grupo para que possamos depois apresentar algumas proposições que mostram que o conjunto dos quatérnios $\mathring{\mathbb{H}}$ é um grupo não comutativo.

Definição 32 *Seja* $\mathbb{G}$ *um conjunto com um operador* $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *definida por*

$$(a, b) \to a \cdot b \equiv ab$$

.

$\mathbb{G}$ é um grupo se

1. $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in \mathbb{G}$ *(o operador é associativo)*
2. *Existe um único* $\boldsymbol{I} \in \mathbb{G}$ *tal que* $\boldsymbol{I}a = a\boldsymbol{I} = a, \forall a \in \mathbb{G}$ *($\boldsymbol{I}$ é o elemento neutro)*
3. $\forall a \in \mathbb{G}$ *existe um elemento inverso denotado por* $a^{-1} \in \mathbb{G}$ *tal que* $aa^{-1} = a^{-1}a = \boldsymbol{I}$ *(a^{-1} é o elemento inverso de a)*

Se $ab = ba \ \ \forall a, b \in \mathbb{G}$, *$\mathbb{G}$ é um grupo abeliano ou comutativo.*

Será apresentado dois lemas a seguir onde é mostrado que, existe um elemento neutro e um inverso em $\mathring{\mathbb{H}}$ com relação à multiplicação quatérnia.

Lema 32.1 *O elemento* $\boldsymbol{I} = [1, 0] \in \mathring{\mathbb{H}}$ *é o único elemento neutro sob a multiplicação quatérnia.* $(\boldsymbol{I} = [1, 0] \equiv 1 \in \mathbb{R})$

Demonstração: Seja $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}] \in \mathring{\mathbb{H}}$. Como

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{I} &= \boldsymbol{I}\underline{\boldsymbol{q}} \\
&= [1, 0][s, \boldsymbol{v}] \\
&= [1 \cdot s - 0 \cdot \boldsymbol{v}, 1 \cdot \boldsymbol{v} + s \cdot 0 + 0 \times \boldsymbol{v}] \\
&= [1 \cdot s, 1 \cdot \boldsymbol{v}] \\
&= [s, \boldsymbol{v}] = \underline{\boldsymbol{q}}.
\end{aligned}$$

Assim $\boldsymbol{I}$ é um elemento neutro. Vamos mostrar que $\boldsymbol{I}$ é o único; suponha que exista outro elemento neutro, digamos $\boldsymbol{J}$. Então $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{I}$, pois $\boldsymbol{J}$ é um elemento neutro. Além disso $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{J}$, já que $\boldsymbol{I}$ também é um elemento neutro. Assim temos que

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{J},$$

ou seja, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}$. ■

Lema 32.2 *Seja* $\underline{\boldsymbol{q}} = [s, \boldsymbol{v}] \in \mathring{\mathbb{H}}$, *então existe um único* $\underline{\boldsymbol{q}}^{-1} \in \mathring{\mathbb{H}}$, *tal que* $\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^{-1} = \underline{\boldsymbol{q}}^{-1}\ \underline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{I}$. *Onde* $\underline{\boldsymbol{q}}^{-1} = \dfrac{\underline{\boldsymbol{q}}^*}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2}$.

Demonstração: Vamos primeiro mostrar a unicidade do elemento inverso de $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathring{\mathbb{H}}$. Considere $\underline{\boldsymbol{p}}_1, \underline{\boldsymbol{p}}_2 \in \mathring{\mathbb{H}}$, ambos inversos de $\underline{\boldsymbol{q}}$. Assim

$$\underline{\boldsymbol{p}}_1 = \underline{\boldsymbol{p}}_1\boldsymbol{I} = \underline{\boldsymbol{p}}_1(\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{p}}_2) = (\underline{\boldsymbol{p}}_1\ \underline{q})\underline{\boldsymbol{p}}_2 = \boldsymbol{I}\underline{\boldsymbol{p}}_2 = \underline{\boldsymbol{p}}_2.$$

Agora mostraremos que dado $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathring{\mathbb{H}}$ existe um elemento inverso denotado por $\underline{\boldsymbol{q}}^{-1}$.

De fato, seja $\underline{\boldsymbol{p}}$ o inverso de $\underline{\boldsymbol{q}}$, onde $\underline{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\underline{\boldsymbol{q}}^*}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = \underline{\boldsymbol{q}}^{-1}$. Então temos que

$$\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{p}} = \underline{\boldsymbol{q}}\frac{\underline{\boldsymbol{q}}^*}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = \frac{\underline{\boldsymbol{q}}\ \underline{\boldsymbol{q}}^*}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = \frac{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = 1 \equiv \boldsymbol{I},$$

e

$$\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\boldsymbol{q}} = \frac{\underline{\boldsymbol{q}}^*}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2}\underline{\boldsymbol{q}} = \frac{\underline{\boldsymbol{q}}^*\ \underline{\boldsymbol{q}}}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = \frac{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2}{\|\underline{\boldsymbol{q}}\|^2} = 1 \equiv \boldsymbol{I}.$$

Portanto, todo quatérnio em $\mathring{\mathbb{H}}$ possui inverso único. ■

Proposição 21 *O conjunto* $\mathring{\mathbb{H}}$ *é um grupo não - abeliano sob a multiplicação quatérnia.*

Demonstração: Como o conjunto dos quatérnios é fechado sob a multiplicação segundo a definição de *Hamilton*. Temos que $\mathring{\mathbb{H}}$ tem a propriedade da associatividade pela Proposição 16 e possui elemento neutro e inverso com base nos Lemas 32.1 e 32.2. Quanto a ser um grupo não abeliano, segue da não - comutatividade dos quatérnios. ■

3.1.3 Quatérnios Unitários

Estudaremos nesta seção algumas definições, proposições e propriedades dos quatérnios unitários, um subconjunto do grupo quatérnios que constituem uma esfera no espaço quadri-dimensional com uma importante aplicação na rotação de vetores no $\mathbb{R}^3$.

Definição 33 *Seja $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}$. Se $\|\underline{\boldsymbol{q}}\| = 1$, então $\underline{\boldsymbol{q}}$ é chamado de quatérnio unitário. O conjunto dos quatérnios unitários é representado por $\mathbb{H}_1$ e se $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{H}_1$ ele será representado por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}$.*

Proposição 22 *Seja $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [s, \boldsymbol{v}] \in \mathbb{H}_1$, então existe $\boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^3$, $\|\boldsymbol{v}'\| = 1$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$ tal que*

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [\cos\theta, \boldsymbol{v}'\mathrm{sen}\theta].$$

Demonstração: Se $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [1, 0]$ e $\theta = 0$, $\boldsymbol{v}'$ pode ser qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$, pois

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [1, 0] = [\cos 0, \boldsymbol{v}'\mathrm{sen}0].$$

No caso de $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}$ ser diferente do vetor unitário $[1, 0]$ e $\boldsymbol{v}$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\boldsymbol{v}\| = k \in \mathbb{R}$ então $\boldsymbol{v}' = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \dfrac{1}{k}\boldsymbol{v}$. Logo $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v}'$, onde $\boldsymbol{v}'$ é um vetor unitário no espaço. Como $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [s, \boldsymbol{v}] \in \mathbb{H}_1$ temos

$$1 = \|\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}\|^2 = s^2 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = s^2 + k^2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}' = s^2 + k^2.$$

Como $s^2 + k^2 = 1$ indica uma circunferência com centro na origem e raio igual a 1 no plano. Podemos escrever a equação da circunferência trigonométrica como $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1$, com $\theta \in]-\pi, \pi[$ tal que $s = \cos\theta$ e $k = \mathrm{sen}\theta$. Assim temos que

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [s, \boldsymbol{v}] = [s, \boldsymbol{v}'k] = [\cos\theta, \boldsymbol{v}'\mathrm{sen}\theta],$$

o que prova o resultado desejado. ■

Proposição 23 *sejam $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}, \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}' \in \mathbb{H}_1$. Então*

1. $\|\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}'\| = 1$;

2. $\underline{\hat{q}}^{-1} = \underline{\hat{q}}^*$.

Demonstração: 1) $\|\underline{\hat{q}}\ \underline{\hat{q}'}\| = \|\underline{\hat{q}}\|\|\underline{\hat{q}'}\| = 1 \cdot 1 = 1$.

2) $\underline{\hat{q}}^{-1} = \dfrac{\underline{\hat{q}}^*}{\|\underline{\hat{q}}\|^2} = \underline{\hat{q}}^*$, pois $\|\underline{\hat{q}}\| = 1$. $\blacksquare$

Temos que $\mathbb{H}_1 \subset \mathring{\mathbb{H}}$, isto é, o conjunto dos quatérnios unitários $\mathbb{H}_1$ é um subconjunto de $\mathring{\mathbb{H}} = \mathbb{H}\backslash[0,(0,0,0)]$. Mostraremos através da definição e da proposição a seguir que $\mathbb{H}_1$ é um subgrupo de $\mathring{\mathbb{H}}$.

Definição 34 *Seja $\mathbb{G}$ e $\mathbb{F} \neq \phi$ um subconjunto de $\mathbb{G}$. $\mathbb{F}$ é um subgrupo de $\mathbb{G}$ se:*

1. *$\forall a, b \in \mathbb{F}$, temos $ab \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ é fechado)*
2. *$\forall a \in \mathbb{F}$, $a^{-1} \in \mathbb{F}$.*

Proposição 24 *O conjunto $\mathbb{H}_1$ de quatérnios unitários é um subgrupo de $\mathring{\mathbb{H}}$.*

Demonstração: Sejam $\underline{\hat{q}}, \underline{\hat{q}'} \in \mathbb{H}_1$, temos que

$$\|\underline{\hat{q}}\ \underline{\hat{q}'}\| = 1,$$

isto é $\underline{\hat{q}}\ \underline{\hat{q}'} \in \mathbb{H}_1$ e

$$\|\underline{\hat{q}}^{-1}\| = \|\underline{\hat{q}}^*\| = \|\underline{\hat{q}}\| = 1,$$

assim $\underline{\hat{q}}^{-1} \in \mathbb{H}_1$ logo podemos concluir que $\mathbb{H}_1$ é um subgrupo de $\mathring{\mathbb{H}}$. $\blacksquare$

3.1.4 Quatérnios e Rotações

Como já falamos anteriormente, que os quatérnios facilitariam as rotações de vetores do $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{e}}$ rotacionado de um ângulo θ, explicaremos como esse processo é obtido seguindo o seguinte roteiro.

1. Considerando uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo $\hat{\mathbf{e}}$, vamos construir o quatérnio unitário

$$\underline{\hat{q}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}\right].$$

2. Seja $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$, isto é $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ ou $\boldsymbol{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, vamos considerar o quatérnio

$$\underline{\boldsymbol{p}} = [0, \boldsymbol{p}].$$

3. Efetuando o produto

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}\ \underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1}.$$

Obtemos o quatérnio

$$\underline{\boldsymbol{p}}' = [0, \boldsymbol{p}'],$$

onde $\boldsymbol{p}'$ é o vetor do $\mathbb{R}^3$, rotacionado de $\boldsymbol{p}$, assim

$$\underline{\boldsymbol{p}}' = \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}\ \underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1}.$$

Observamos que a parte real desse produto é igual a zero e a parte imaginária igual ao vetor $\boldsymbol{p}'$.

Como $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}$ é um quatérnio unitário temos que pela Proposição 23

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1} = \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{*}.$$

Assim

$$\underline{\boldsymbol{p}}' = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}\right][0, \boldsymbol{p}]\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}\right].$$

O quatérnio $\underline{\boldsymbol{p}}'$ possui componente imaginária igual ao vetor obtido pela equação

$$(\cos\theta)\boldsymbol{p} + (1 - \cos\theta)(\hat{\mathbf{e}}\cdot\boldsymbol{p})\hat{\mathbf{e}} + (\operatorname{sen}\theta)(\hat{\mathbf{e}}\times\boldsymbol{p}).$$

Vamos mostrar que a igualdade acontece considerando que o eixo de rotação seja o eixo x, isto é, $\hat{\mathbf{e}} = (1, 0, 0)$ e o ângulo de rotação será θ. O procedimento é análogo se o eixo de rotaçã for o eixo y ou o eixo z. Seja $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} \in \mathbb{H}_1$ e $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ temos que das igualdades abaixo

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(1, 0, 0)\right]$$

$$\boldsymbol{p} = (1, 0, 0)$$

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1} = \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{*}$$

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(1, 0, 0)\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{p}} = [0, \boldsymbol{p}].$$

Efetuando a multiplicação a seguir

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(1,0,0)\right][0,\boldsymbol{p}]\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(1,0,0)\right]$$

devemos encontrar o mesmo resultado quando comparamos a parte imaginária desse produto com a coordenada do vetor obtido utilizando a equação

$$(\cos\theta)\boldsymbol{p} + (1-\cos\theta)((1,0,0)\cdot\boldsymbol{p})(1,0,0) + (\text{sen}\theta)((1,0,0)\times\boldsymbol{p}).$$

Para facilitar, vamos considerar que $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $b = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Assim

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}\ \underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1} &= (a+b\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k})(0+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(a-b\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}) \\ &= (a+b\mathbf{i})(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(a-b\mathbf{i}).\end{aligned}$$

Como a multiplicação de quatérnios é associativa, multiplicaremos primeiro $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}$ por $\underline{\boldsymbol{p}}$ e o resultado deste produto por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}^{-1}$ sendo assim temos que

$$\begin{aligned}(a+b\mathbf{i})(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(a-b\mathbf{i}) &= (ax\mathbf{i}+ay\mathbf{j}+az\mathbf{k}+bx\mathbf{i}^2+by\mathbf{ij}+bz\mathbf{ik})(a-b\mathbf{i}) \\ &= (ax\mathbf{i}+ay\mathbf{j}+az\mathbf{k}-bx+by\mathbf{k}-bz\mathbf{j})(a-b\mathbf{i}) \\ &= a^2x\mathbf{i}+a^2y\mathbf{j}+a^2z\mathbf{k}-abx+aby\mathbf{k}-abz\mathbf{j}-abx\mathbf{i}^2 \\ &\quad -aby\mathbf{ji}-abz\mathbf{ki}+b^2x\mathbf{i}-b^2y\mathbf{ki}+b^2z\mathbf{ji} \\ &= a^2x\mathbf{i}+a^2y\mathbf{j}+a^2z\mathbf{k}-abx+aby\mathbf{k}-abz\mathbf{j}+abx \\ &\quad +aby\mathbf{k}-abz\mathbf{j}+b^2x\mathbf{i}-b^2y\mathbf{j}-b^2z\mathbf{k} \\ &= a^2x\mathbf{i}+b^2x\mathbf{i}+a^2y\mathbf{j}-2abz\mathbf{j}-b^2y\mathbf{j}+a^2z\mathbf{k} \\ &\quad +2aby\mathbf{k}-b^2z\mathbf{k} \\ &= (a^2+b^2)x\mathbf{i}+[(a^2-b^2)y-2abz]\mathbf{j} \\ &\quad +[(a^2-b^2)z+2aby]\mathbf{k}. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Das relações trigonométricas

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha, \quad \text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

e substituindo os valores de a e b em (3.1)obtemos o seguinte resultado.

$$\begin{aligned}
x\mathbf{i} + \cos\theta y\mathbf{j} - \text{sen}\theta z\mathbf{j} + \cos\theta z\mathbf{k} + \text{sen}\theta y\mathbf{k} &= \cos\theta x\mathbf{i} - \cos\theta x\mathbf{i} + x\mathbf{i} + \cos\theta y\mathbf{j} \\
&\quad -\text{sen}\theta z\mathbf{j} + \cos\theta z\mathbf{k} + \text{sen}\theta y\mathbf{k} \\
&= \cos\theta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + (1-\cos\theta)x\mathbf{i} \\
&\quad +\text{sen}\theta(y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) \\
&= (\cos\theta)\boldsymbol{p} + (1-\cos\theta)((1,0,0)\cdot\boldsymbol{p})(1,0,0) \\
&\quad +(\text{sen}\theta)((1,0,0)\times\boldsymbol{p}).
\end{aligned}$$

O quatérnio

$$\underline{\hat{\boldsymbol{q}}} = [1, 0\hat{\mathbf{e}}] = [1, 0] = [1, (0,0,0)] = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \equiv 1 \in \mathbb{R}$$

é responsável pela rotação nula, isto é, ele faz com que $\underline{\boldsymbol{p}}' = \underline{\boldsymbol{p}}$ o que resulta em $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$. Por facilitar os problemas de composição de rotações no espaço, o uso de quatérnios tornou-se bastante utilizado na computação gráfica.

3.1.5 Composições de Rotações no Espaço

Podemos compor rotações através de quatérnios unitários, isto é, seja as rotações definidas por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1$ e por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2$, então a rotação resultante da combinação das rotações $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1$ e $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2$ é obtida utilizando o produto $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1$ onde temos o eixo e o ângulo da rotação que leva o vetor $\boldsymbol{p}$ da posiçõ original ao final da segunda rotação definida por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2$.

Vamos provar essa propriedade da seguinte maneira. Seja $\boldsymbol{p}'$ o vetor obtido da rotação produzida por $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1$ sobre o vetor $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}''$ o vetor rotacionado de $\boldsymbol{p}'$ da rotação que $\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2$ produziu sobre $\underline{\boldsymbol{p}}'$, então

$$\underline{\boldsymbol{p}}' = \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1^{-1}$$

e

$$\underline{\boldsymbol{p}}'' = \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2\underline{\boldsymbol{p}}'\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2^{-1},$$

assim temos que

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{p}}'' &= \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2(\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1\underline{\boldsymbol{p}}\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1^{-1})\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2^{-1} \\
&= (\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1)\underline{\boldsymbol{p}}(\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1^{-1}\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2^{-1}) \\
&= (\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1)\underline{\boldsymbol{p}}(\underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_2\ \underline{\hat{\boldsymbol{q}}}_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Vamos exemplificar a composição de rotações com o seguinte exemplo. Considere um objeto que sofreu duas rotações $\theta_x = -60°$ seguida de $\theta_y = 90°$. Assim

$$\begin{aligned}\underline{\hat{q}}_1 &= [\cos(-30^\circ), \operatorname{sen}(-30^\circ)(1,0,0)] \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}(1,0,0)\right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\underline{\hat{q}}_2 &= [\cos(45^\circ), \operatorname{sen}(45^\circ)(0,1,0)] \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0)\right],\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\underline{\hat{q}}_2\underline{\hat{q}}_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{4}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Como a norma do vetor

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

é igual a

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Sabendo que dado um vetor $\boldsymbol{v}$ qualquer diferente do vetor nulo ele pode ser escrito da seguinte forma

$$\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v}',$$

onde k representa a norma de $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}'$ o vetor unitário obtido de $\boldsymbol{v}$ dividindo - se cada componente pela sua norma. Assim

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{10}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

portanto

$$\underline{\hat{q}}_2\underline{\hat{q}}_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right).$$

Como

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

temos que

$$\frac{\theta}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \cong 52,248^\circ.$$

Concluirmos assim que o ângulo de rotação desejada é de $\theta \cong 104,5^\circ$ em torno do eixo $\hat{\mathbf{e}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Referências Bibliográficas

[1] CARVALHO, João Pitombeira de, *Introdução à Álgebra Linear*,Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

[2] BOLDRINI, José Luiz, COSTA, Sueli I. Rodrigues, FIGUEIREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry G,*Álgebra Linear*,São Paulo Alegre: Harper e Row do Brasil , 1980.

[3] LIMA, Elon Lages, *Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada , 2003.

[4] LIPSCHUTZ, Seymour, *Álgebra Linear, Tradução: Roberto Ribeiro Baldino*, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil , 1992.

[5] STEWART, James, *Cálculo, volume 2, Tradução Técnica: Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins*, São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[6] GATTASS, Marcelo,*Transformações geométricas*,Disponível em « http://www.tecgraf.puc-rio.br/ mgattass/cg/pdf/06TransGeoQuat.pdf » Acesso em 10/01/2013.

[7] STEIBRUCH, Alfredo, WINTERLE, Paulo,*Álgebra Linear*, São Paulo: Makron Books, 1987.

[8] ARAÚJO, Edson Leite de, Orientador: Lenimar Nunes de Andrade, *Interpolação de Rotação de Objetos Sólidos via Quatérnios, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba - UFPB*, João Pessoa,2000.

[9] RODRIGUES, Alexandre Augusto martins,*Álgebra Linear e Geometria Euclidiana*, São Paulo: Livraria Nobel S. A, 1969.

[10] LAY, David C,*Álgebra Linear e suas aplicações, Tradução: Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório*, Rio de Janeiro: LTC, 1999.