UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

O Problema de Snell-Pothenot: uma proposta de integração de História da Matemática, Construção Geométrica e Tecnologias de Informação e Comunicação

POR

LEONARDO DAVID MARQUES DOS SANTOS

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

MAIO/ 2020
JOÃO PESSOA – PB

O Problema de Snell-Pothenot: uma proposta de integração de História da Matemática, Construção Geométrica e Tecnologias de Informação e Comunicação

POR

LEONARDO DAVID MARQUES DOS SANTOS

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

MAIO/ 2020
JOÃO PESSOA – PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237p Santos, Leonardo David Marques dos.
O Problema de Snell-Pothenot: uma proposta de integração de História da Matemática, Construção Geométrica e Tecnologias de Informação e Comunicação / Leonardo David Marques Dos Santos. - João Pessoa, 2020.
63 f. : il.

Orientação: EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Ensino; História da Matemática; Novas Tecnologias. I. SANTOS, EDUARDO GONÇALVES DOS. II. Título.

UFPB/BC

O Problema de Snell-Pothenot: uma proposta de integração de História da Matemática, Construção Geométrica e Tecnologias de Informação e Comunicação

POR

LEONARDO DAVID MARQUES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática, História da Matemática e Tecnologia da Informação e Comunicação.

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos – UFPB (Orientador)

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB (Membro interno)

Prof. Dr. Rafael José Alves do Rego Barros – IFPB (Membro externo)

MAIO / 2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela proteção ao longo da jordana semanal (Vitória – João Pessoa) e todas as vitórias que me concedeu ao longo deste curso.

À minha família, em especial a minha esposa Naiara Guilhermino, pelo apoio e compreensão que me fortaleceram nos momentos difíceis.

Aos professores do PROFMAT por compartilharem conhecimentos valiosos.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo e por todas as horas de estudo compartilhadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, pelas valiosas conversas e sugestões que me ajudaram a concretizar este trabalho.

DEDICATÓRIA

"Dedico este trabalho aos meus pais. Sem eles nada seria possível". Edileusa Santos e David Santos (in memoriam).

RESUMO

O estudo da História da Matemática (HM) vem despertando cada vez mais o interesse de diversos pesquisadores por funcionar como motivador do interesse dos alunos pelo conteúdo matemático que lhe é ensinado. Associado a isso, temos o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como uma ferramenta fundamental de ensino no mundo tecnológico no qual estamos inseridos. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é contribuir com um diálogo entre essas tendências educacionais, propondo a integração da HM, Construção Geométrica (CG) e das TIC na utilização do GeoGebra a partir do problema de Snell-Pothenot. Para isso, foi realizada uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico em alguns livros, artigos e teses que abordam essa temática. Como resultado foi traçado um estudo histórico do problema de Snell-Pothenot e apresentadas duas soluções, uma moderna e mais precisa e outra clássica proposta pelo próprio Pothenot. E por fim, trazemos uma perspectiva de uso em sala de aula pautada em CG com o auxílio das TIC.

Palavras-chave: Ensino; História da Matemática; Novas Tecnologias; Construções Geométricas

ABSTRACT

The study of Mathematics' History (HM) has increasingly aroused the interest of several researchers to act as a motivator for the students' interest in the mathematical content taught to them. Associated to this, we have the use of Information and Communication Technologies (ICT) as a fundamental tool for teaching in the technological world in which we are inserted. Therefore, the aim of this work is to contribute to a dialogue between these educational trends, proposing the integration of HM, Geometric Construction (GC) and ICT in the use of GeoGebra from the problem of Snell-Pothenot. For that, a qualitative research of bibliographic character has been carried out in some books, articles and theses that approach this thematic. As a result, a historical study of Snell-Pothenot's problem was drawn up and two solutions were presented, one modern and more precise and the other classic proposed by Pothenot himself. And finally, we bring a perspective of use in the classroom based on CG with the help of ICT.

Keywords: Teaching; History of Mathematics; New Technologies; Geometric Constructions

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 16

2.1 – História da Matemática no Ensino 16

2.2 – Novas Tecnologias e o software GeoGebra. 18

2.3 – Diálogo entre TIC, HM e CG. 21

2.4 – Uma Análise sobre o ensino da Geometria no Ensino Básico. 23

3. O Problema de Snell-Pothenot: entre o clássico e o moderno 30

3.1 – Aspectos Históricos do Problema 30

3.1.1 – Willebrord Snell...31

3.1.2 – O Problema de Ressecção 33

3.1.3 – Laurent Pothenot 35

3.2 – Soluções para o Problema de Snell-Pothenot 36

3.2.1 – Solução Moderna (Trigonométrica**)**..37

3.2.2 – Solução Clássica (Solução de Pothenot) 40

4. Perspectivas de uso em sala-de-aula..45

4.1 – Sequência Didática para aplicação do problema..46

4.1.1 – Sugestão de aplicação do problema..46

4.1.2 – Uma Solução com auxílio do GeoGebra..47

5. Considerações finais 50

6. Referências..52

7. Apêndices 54

Apêndice A – Comandos do GEOGEBRA..54

Apêndice B – Construções Geométricas 61

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Representação Geométrica para o problema de Snell-Pothenot............30

Figura 2 – Problema de Ressecção 34

Figura 3 – Construção da solução...36

Figura 4 – Representação geométrica do problema 38

Figura 5 – Representação geométrica de uma solução pelo método de Pothenot ...41

Figura 6 – Representação geométrica da primeira solução pelo método de Pothenot 42

Figura 7 – Representação geométrica da segunda solução pelo método de Pothenot 42

Figura 8 – Representação geométrica do caso indeterminado 43

Figura 9 – Ilustração do Problema 47

Figura 10 – Construção do Arco capaz 48

Figura 11 – Construção do Arco capaz 49

Figura 12 – Localização do Ponto P...49

Figura 14 – Opções do botão direito 55

Figura 15 – Barra de Ferramentas 55

Figura 16 – Opções de comandos 56

Figura 17 – Comando mover...56

Figura 18 – Ponto e Interseção de Ponto 56

Figura 19 – Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo 57

Figura 20 – Reta Perpendicular e Reta Mediatriz..58

Figura 21 – Círculo dado Centro e um de seus Pontos...58

Figura 22 – Construção de Ângulo..59

Figura 23 – Mover Janela de Visualização, Reduzir e Ampliar. 59

Figura 24 – Esconder um objeto 60

Figura 25 – Reta perpendicular...61

Figura 26 – Mediatriz..62
Figura 27 – Arco Capaz..63

1. INTRODUÇÃO

A dificuldade em aprender matemática é um tema bastante discutido em diversos debates e pesquisas, sendo abordado por inúmeros autores. Paralelo a essa temática, o estudo sobre História da Matemática no ensino da Matemática vem se destacando há algum tempo, gerando importantes resultados e indicando novos caminhos na busca pela melhoria do processo ensino-aprendizado. A pesquisa agora apresentada expõe pontos de vista que pretendem auxiliar nesse processo.

A motivação por esse tema surgiu pela primeira vez nas aulas de História da Matemática, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba em João Pessoa, ministradas pelo Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, na qual tivemos a oportunidade de fazer uma reconstrução de alguns temas da matemática a partir do contexto em que foram idealizados. E reforçada nas aulas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática, ministradas pelo Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro onde fomos apresentados ao software GeoGebra. Com isso, após tentativas de uso em sala de aula, percebemos o interesse por grande parte dos alunos em fazer uso das tecnologias e em conhecer as motivações históricas de cada teorema. Sentimo-nos assim motivados a nos aprofundar na conexão entre esses dois campos.

Nesse contexto, o presente trabalho vislumbra a possibilidade de incorporação da História da Matemática (HM) na sala de aula a partir do seu estudo e utilização, aliado às Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) no ensino de conteúdos de Matemática mediado pelo uso das Construções Geométricas (CG). Deste modo, a partir dessa possibilidade, pretende-se desenvolver uma pesquisa que possa auxiliar professores no processo ensino-aprendizagem de matemática, que é seguramente desafiador, por requerer muita dedicação por parte de quem ensina e de quem aprende.

Sendo assim, a opção pelo uso da Construção Geométrica com auxílio da tecnologia para solucionar um problema historicamente relevante, tenta fazer o elo entre essas três áreas, buscando tornar o ensino e o aprendizado da matemática mais dinâmico e significativo. Segundo SOUSA e SCHIVANI ALVES (2016), sobre o uso da HM contruída sobre uma investigação matemática e apoiada pelas TIC:

> Essas três vertentes permitirão que o aluno (re)crie experimentos matemáticos realizados na época (em que conceitos ou conteúdos foram desenvolvidos); reflita tal como o matemático estudado e; chegue a resultados tal como o matemático chegou, porém, em uma quantidade de tempo menor a partir da otimização de recursos tecnológicos. Essa redução do tempo (otimização) da (re)criação histórica será possível por meio do uso das TIC (SOUSA & SCHIVANI ALVES, 2016 p. 27) .

Afunilando-se as relações com as pesquisas desenvolvidas nesta área, procura-se responder o seguinte problema de pesquisa: é possível elaborar uma proposta de atividade envolvendo: HM, TIC e as CG?

Para responder o problema, apresentamos aqui uma proposta baseada em uma pesquisa de base bibliográfica e de caráter qualitativo. Ressaltando a importância da pesquisa bibliográfica como sustentáculo do conhecimento científico produzido na Universidade, evidenciamos aqui a definição de SEVERINO (2017):

> A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos. SEVERINO (2017, l. 2045)

Ainda de acordo com autor, quando se fala em abordagem qualitativa nos referimos a diversas referências epistemológicas. “São várias metodologias de pesquisa que podem adotar uma abordagem qualitativa, modo de dizer que faz referência mais a seus fundamentos epistemológicos do que propriamente a especificidades metodológicas” (SEVERINO, 2017, l. 1942). Segundo Abbagnano (1962), a ideia de qualidade é extensa e dificilmente pode ser reduzida a um único conceito. Pode-se dizer então, que essa ideia compreende um conjunto de conceitos que têm em comum a função de formalizar e ser empregados como resposta à pergunta.

Sendo assim, algumas intenções foram estabelecidas. Como objetivo geral a que se pretende alcançar, tem-se: Propor a integração da História da Matemática, construção Geométrica e Tecnologias de Informação e Comunicação utilizando o

GeoGebra, a partir do problema de Snell-Pothenot. A fim de alcançar esse objetivo, perseguiremos os seguintes objetivos específicos:

- Evidenciar a importância da História da Matemática para o Ensino de Matemática;
- Conhecer a história dos principais personagens envolvidos no problema central deste trabalho;
- Indicar o uso da tecnologia como ferramenta no processo de ensino-aprendizado;
- Analisar como está inserida a Geometria na disciplina de matemática segundo a BNCC, e as principais orientações dos PCN;
- Apresentar uma solução clássica e uma solução moderna para o problema;
- Sugerir uma aplicação prática do problema no Ensino Básico.

Quanto à organização desse trabalho, além desse capítulo, elaboramos outros três que tratam da fundamentação teórica que dará base à pesquisa e o Problema de Snell-Pothenot com seus aspectos históricos e suas aplicações.

O segundo capítulo foi dedicado a discutir a importância da História da Matemática no processo ensino-aprendizagem de matemática, tentando mostrar que o diálogo entre o passado e o presente pode ser ferramenta importante na construção do conhecimento. Também foi abordado o uso da tecnologia como ferramenta importante, capaz de unir os jovens cada vez mais ligados ao mundo tecnológico com o ensino da matemática. Também trouxemos um breve diálogo entre a História da Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação e as Construções Geométricas. E por fim, uma análise de como está distribuída a temática das Construções Geométricas no ensino básico segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No terceiro capítulo apresentamos os aspectos históricos do Problema de Snell-Pothenot com suas respectivas motivações, acreditando que tais conhecimentos sejam capazes de enriquecer a aplicação de tal problema nos dias de hoje. Apresentamos também duas soluções para este problema: uma moderna e mais precisa, baseada em conhecimentos trigonométricos e outra clássica, apresentada pelo Laurent Pothenot em artigo enviado à Academia Francesa em 1692.

No quarto capítulo propusermos uma perspectiva de uso em sala de aula, apresentando o problema em uma aplicabilidade real e construindo sua solução com o auxílio da ferramenta GeoGebra.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 História da Matemática no Ensino

As preocupações com a inserção do tema História da Matemática no ensino de Matemática no Brasil foram manifestadas explicitamente na legislação da década de 1930 em discussões acerca das questões educacionais e ficaria conhecido como o *Movimento da Escola Nova.* A Portaria Ministerial de 1931, já indica isso quando diz que:

> E, por fim, com o intuito de aumentar o interesse do aluno, o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da História da Matemática bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência. (Portaria Ministerial, de 30-6-1931 apud Bicudo, 1942, p.8)

Ainda que de forma ingênua alguns autores que atribuíam à HM a capacidade de modificar a atitude dos alunos em relação à matemática, pois teria a função didática de relaxamento, uma recompensa merecida pelo esforço estafante de aprender matemática MIGUEL, MIORIM (2019). Mas, apesar da Portaria Ministerial de 1931, existiram autores que já abordavam essa temática no Brasil desde o final do século XIX início do século XX:

> Um exemplo desse tipo de manifestação da história é o seguinte comentário acerca da progressão por quociente (ou, progressão geométrica) presente no livro Elementos de Álgebra de André Perez y Marin, de 1928: Euclides, notável geômetra grego do século III antes de Cristo (450-380), estabeleceu a teoria das proporções em seus famosos Elementos, pela representação linear das quantidades. Por este motivo, e talvez também pela frequente aplicação que das proporções se faz em geometria, deu-se-lhes a denominação imprópria de proporções geométricas. Como o uso sancionou essa denominação, apesar de sua impropriedade, as progressões por quociente, compostas por sua vez de proporções contínuas sucessivas, receberam também o nome de progressões geométricas. (MIGUEL & MIORIM, 2019, l. 352)

De forma geral, esta perspectiva que a HM configura métodos adequados para abordagem pedagógica de alguns tópicos da Matemática é verificada desde o século XVIII. Um exemplo é o livro *Elémens de Géométrie*, de Alexis Claude Clairaut publicado em 1765, que é considerado por muitos autores como o primeiro registro da relação específica da HM com a Matemática MIGUEL & MIORIM (2019).

Portanto, o conhecimento matemático não deve ser determinado apenas por circunstâncias que levam a uma teoria dedutivamente estruturada, mas também por caminhos que podem nos levar a esse conhecimento e que possam passar pelo conhecimento histórico. Compreender matemática inclui também o entendimento de motivações implícitas e a construção dos significados reflexivos dos matemáticos. Achamos importante ressaltar que o ensino de matemática deve oportunizar aos alunos a possibilidade de percorrer historicamente a construção de determinados fatos "construir matemática". E, nesse sentido, a HM pode ser uma forte aliada.

Sendo assim, destacamos a integração de questões históricas no ensino e aprendizado de matemática como um caminho possível para expô-la. Evidenciando-a como resultado de contribuições de muitas culturas diferentes, que passou por diversas alterações ao longo do tempo, mantém constante diálogo com outras áreas do conhecimento e constitui uma constante força de apoio no desenvolvimento científico, artístico, técnico e social. Com isso, devemos fazer uso da investigação histórica para obtermos o conhecimento matemático gerado em cada contexto. Nesse ponto, concordamos com Mendes, quando ele afirma que:

> O percurso histórico permite estabelecer um diálogo entre o conhecimento aprendido e disseminado mecanicamente, a memória da prática manipulativa que utiliza os objetos matemáticos, os textos, os documentos, os relatos da prática e outros registros, de um modo geral, que os armazenam para torná-los públicos. (MENDES, 2006, p.79-80)

Deste modo, o autor tenta estabelecer a conexão da produção de novos conhecimentos matemáticos a partir dos conhecimentos produzidos em outras épocas, em uma prática de armazenamento e seleção de informações permitindo ao leitor acrescentar suas impressões ao conhecimento. Promover o diálogo entre o passado e o presente valoriza o processo do conhecimento construído, ocasionando mais criatividade ao processo investigativo. Destacamos também, que segundo Lima Filho (2011):

> Obter o máximo de subsídios que contribuam com o processo ensino-aprendizagem. Naturalmente a pesquisa histórica resgatará a essência da problemática vivida na antiguidade, como essa problemática mobilizou aquela sociedade e como essa essência do passado pode ser conectada com o pensamento e as necessidades na atualidade. (LIMA FILHO, 2011, p.5)

Tentar entender a origem dos problemas nos permite conhecer as inquietações e soluções propostas ao longo da história, com suas motivações e influências geradas por uma sociedade em sua determinada cultura.

Ressaltamos que estamos nos referindo à inserção da HM no ensino da matemática e não a disciplina independente, pois acreditamos que essa inserção contribui no fortalecimento do aprendizado de conteúdos matemáticos. E segundo FUAVEL (1997) a justificativa que leva a essa distinção, é a frequente confusão feita por vários professores que se sentem obrigados a lecionar conteúdos de HM que não fazem parte do currículo escolar. Onde o verdadeiro proposito da HM no ensino da matemática é "explorar processos que ajudem o ensino da matemática em si, tornando-o mais rico, variado e eficaz" (FAUVEL, 1997 p.18)

Segundo Nobre (1996), um conceito matemático deve ser abordado a partir de seu desenvolvimento histórico. E com isso, o processo de ensino-aprendizado de matemática deixa de ser apenas uma apresentação de um conceito e passa a ser uma construção do conhecimento. E ainda, segundo os PCN (1997, p.30), esse tipo de abordagem possibilita que os alunos observem o alto nível de conhecimento matemático de antigas culturas, tendo a possibilidade de compreender o quanto os avanços tecnológicos de hoje decorrem desses conceitos herdados das antigas civilizações.

2.2 Novas Tecnologias e o software GeoGebra.

Estamos inseridos em um mundo que cada vez mais está imerso em novidades tecnológicas, tornando-se inevitável seu uso no ambiente escolar. Com isso, surge a necessidade de recorrer a situações capazes de garantir o desenvolvimento do ensino da matemática fazendo uso de tecnologias digitais. É quase que obrigatória a inserção nessa cultura digital.

A tecnologia se faz presente nos diversos setores da sociedade ocasionando mudanças em pontos de vista culturais, científicos, econômicos e sociais. Proporcionando de forma considerável um aumento na disseminação da informação. As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) assumem papel importante na sociedade em tempos que a busca por conhecimento se torna cada vez mais essencial.

> Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. (BNCC, 2017, p.57).

Nesse atual contexto, a informação e o acesso as TIC em sala de aula é claramente inevitável. Segundo Araújo (2005, p.02):

> Por sua curiosidade natural ou por não terem muito medo de novidades, nossos alunos se envolvem com muita facilidade com as novas tecnologias e, dentro de suas possibilidades, incorporam seus recursos e linguagens em seu cotidiano. Esses alunos, com a vida já impregnada de tecnologias vão para a escola e acabam criando certa pressão para que computadores sejam levados para lá.

Na educação brasileira, a implementação das tecnologias como ferramenta pedagógica tem acontecido de forma gradual. Assim, segundo Lucena (2003) temos:

> No Brasil, a utilização de recursos tecnológicos na educação teve início com transmissões via rádio e posteriormente via TV, visando promover a qualificação profissional de trabalhadores que moravam distantes de instituições escolares, iniciando assim projetos de educação à distância numa perspectiva de autoaprendizagem. (LUCENA, 2003, p. 238)

Mas, também precisamos reconhecer que a utilização das tecnologias em sala de aula transpõe a ideia de simples transmissão da informação aos alunos, e sim, deve atuar de forma efetiva na construção do conhecimento.

Os recursos tecnológicos que compõem as TIC são diversos, entre eles destacamos os equipamentos de *hardware* de computadores e *softwares*. Esses, então sendo inseridos no ambiente escolar como ferramentas que possam contribuir para o ensino de conceitos nas diversas disciplinas.

Atualmente as TIC se fazem cada vez mais presentes. E com isso temos uma variedade de *softwares* que são criados com objetivo de auxiliar o ensino e aprendizagem da matemática, se tornando uma ferramenta poderosa para o entendimento de importantes conceitos matemáticos.

> Para o ensino na matemática, amparado por um software, pode ter papel decisivo nas expectativas dos professores do professor em ensinar aos alunos alguns conceitos que, da forma tradicional poderia apresentar resultados não muito interessantes no ponto de vista pedagógico. (Neri, 2010, p.1)

Os *softwares* educacionais proporcionam a possibilidade de uma conexão entre os jovens, que cada vez mais estão ligados em tecnologia, com o ensino da matemática, facilitando assim o processo de construção do conhecimento.

Segundo Bona (2009), um software é considerado relevante para o ensino da Matemática se estiver fundamentado em uma teoria de aprendizado que possibilite ao aluno o desenvolvimento da capacidade de construir o conhecimento sobre um determinado conceito.

Então, dentro desse contexto, enfatizamos nossa escolha em trabalhar com o *software* GeoGebra, por permitir a visualização de elementos geométricos e algébricos simultaneamente. Possibilitando que o principal objeto de estudo desse trabalho possa ser construído de forma dinâmica pelos estudantes do ensino básico.

O GeoGebra é um software de caráter educativo direcionado à matemática para todos os níveis de ensino que reúnem geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, entre outros recursos. Este aplicativo tem a capacidade de fazer a convergência entre a álgebra e a geometria em um mesmo ambiente gráfico, proporcionando a construção de conceitos matemáticos.

A utilização dessa, além de tornar a aula mais dinâmica, por fazer uso da tecnologia no ensino da matemática, contribui na assimilação de conceitos de difícil entendimento, como algumas construções geométricas e gráficos de funções. Além disso, é necessário ter consciência da importância da tecnologia no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

> Ao longo da evolução da humanidade, matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 13).

Portanto, neste trabalho vamos fazer uso da versão GeoGebra Clássico (5.0.557) disponível gratuitamente em: <https://www.geogebra.org/download>. E faremos uso apenas de dois de seus ambientes: Janela de Álgebra e Janela de Visualização.

Assim, reservamos o Apêndice A com o objetivo do entendimento de alguns comandos e ferramentas do GeoGebra que possam auxiliar a construção geométrica da solução do problema central deste trabalho.

2.3 Diálogo entre TIC, HM e CG.

Reunindo tendências da Educação Matemática, o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e o uso da História da Matemática (HM) potencializado pelo recurso da Construção Geométrica (CG), podem caracterizar uma aliança forte para o ensino de Matemática. Então, apresentamos uma breve revisão bibliográfica enfatizando essa aliança.

O uso da História da Matemática em sala de aula é cada vez mais abordado por diversos autores. Segundo Miguel e Miorim (2019) essa abordagem vem sendo explorada por autores de diferentes épocas, os quais recorrem à categoria psicológica da motivação para justificar a importância de sua inserção.

> Dentre esses autores, encontram-se Simons (1923), Hassler (1929), Wiltshire (1930), Humphreys (1980), Meserve (1980), Booker (1988) e Swetz (1989). Para eles, o conhecimento histórico da Matemática despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo matemático que lhe estaria sendo ensinado. Os mais ingênuos acabam atribuindo à

> história um poder quase que mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática. (MIGUEL & MIORIM, 2019, l. 158)

Associado ao recurso da HM, trazemos Borba (2010) enfatizando a importância do uso das TIC, possibilitando uma aprendizagem mais eficiente e estimulante para os alunos.

> Os softwares educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante à visualização na educação matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante [...] (BORBA, 2010, p. 03, grifo do autor).

Nessa perspectiva, incentivamos o uso de atividades relacionadas à HM via TIC e CG. Sobre esse último, trazemos Wagner (2015) reforçando a importância das CG no desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo.

> Há 2 000 anos a palavra número significava número natural. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Era de fato complicado. Se não havia ainda a noção de número racional, os números reais então estavam a séculos de distância. Entretanto os gregos tiveram uma ideia engenhosa. A de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Esta ideia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto de uma semirreta graduada. (WAGNER, 2015, p. 9)

Sendo assim, vamos em busca dessa aliança na certeza da construção de um alicerce forte baseados em tendências da Educação Matemática, particularmente: o uso da HM, das TIC e as CG para o ensino de Matemática, tentando verificar a influência que uma tendência pode exercer sobre outra.

Para isso, usaremos como base algumas reflexões realizadas por SOUSA & SCHIVANI ALVES (2016), onde as autoras apresentam uma sequência de atividades voltadas ao ensino básico, contemplando esse diálogo entre a HM e as TIC na construção do conhecimento Matemático.

O trabalho em questão foi aplicado a uma turma do Ensino Médio, e consiste em uma sequência composta de duas atividades de história solucionadas com o uso de um software de planilhas eletrônicas.

Segundo SOUSA & SCHIVANI ALVES (2016), a experiência foi de fato positiva, pois os alunos puderam vivenciar uma situação de construção do conhecimento, e foram levados por alguns momentos a fortes Investigações Matemáticas que os conduziram a criar diversas conjecturas.

> Mais uma vez comprovamos as potencialidades da IM e das TIC em nossas atividades históricas, levando os alunos a pensarem com acerto por meio de investigações, levantamento de hipóteses e testes. Ressaltamos, também, que esta faceta investigativa foi mais forte quando os alunos fizeram uso das tecnologias. O que nos reafirma que as TIC facilitam, de fato, a análise dos resultados e reservam um tempo maior para a reflexão de outros aspectos que não apenas a construção propriamente dita, mas o que a envolve. (SOUSA & SCHIVANI ALVES, 2016 p. 33)

A experiência realizada pelas autoras reforça a importância dessa aliança, e reafirmamos nossas expectativas em futuros resultados de pesquisas realizadas a partir da aplicação de nossa proposta de intervenção em sala de aula, sugerida no Capítulo 4 deste trabalho.

2.4 Uma Análise sobre o ensino da Geometria no Ensino Básico.

O estudo da geometria é de grande importância no processo de ensino aprendizagem, sendo assim, necessária sua inserção gradual em todos os anos da educação básica. Vamos analisar como está distribuída a geometria na disciplina de matemática, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e quais são as principais orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Os PCN são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que constituem um referencial para a educação. Segundo os PCN, o ensino fundamental tem como alguns dos objetivos gerais para o ensino de matemática:

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter

> de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (PCN, 1997, p. 37).

Além das recomendações do uso de tecnologias no ensino de matemática, podemos destacar que os PCN também reforçam a importância de conceitos geométricos, trazendo como parte fundamental do currículo de Matemática, pois tais conceitos despertam nos alunos a possibilidade de descrever e compreender o mundo o qual estão inseridos.

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (PCN, 1997, p. 39).

Então, um dos desafios do ensino de matemática é superar as dificuldades dos alunos no "desenvolvimento das habilidades de percepção espacial" e a da "elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo", entre outras que estão associadas ao pouco destaque da Geometria nas aulas de Matemática.

Já a BNCC é um documento de caráter normativo, elaborado por especialistas de todas as áreas do conhecimento, e trata de um conjunto de conhecimentos que todos os alunos têm o direito de aprender. A BNCC gera uma referência que permite a todos trabalharem juntos, sejam municípios, estados ou o distrito federal, ajudando na progressão da aquisição do conhecimento.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas, que estabelecem relações, e direcionam a caracterização de habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental. Em especial, a **Geometria** é apresentada segundo a BNCC como:

> [...] o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes

áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BNCC, 2017, p.271).

Na BNCC de matemática do ensino médio, é proposto uma ampliação, aprofundamento e consolidação da aprendizagem construída no ensino fundamental.

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BNCC, 2017, p.527).

No quadro a seguir, expomos como a Geometria está distribuída na BNCC do Ensino Fundamental, especificando os anos, os objetos de conhecimento e as habilidades adquiridas na aquisição destes, dando ênfase apenas aos objetos e habilidades diretamente relacionados ao estudo do nosso problema.

Ensino Fundamental	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º Ano	- Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.	- Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. - Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
2º Ano	- Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo):	- Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados

Ensino Fundamental	Objetos de conhecimento	Habilidades
	reconhecimento e características.	em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
3º Ano	- Congruência de figuras geométricas planas.	- Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.
4º Ano	- Paralelismo e perpendicu-larismo. - Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares. - Simetria de reflexão	- Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria. - Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.
5º Ano	- Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos. - Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimen-to da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.	- Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.
6º Ano	- Construção de figuras seme-lhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas. - Construção de retas para-lelas e perpendiculares, fazen-do uso de réguas, esquadros e softwares.	- Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. - Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. - Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. - Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Ensino Fundamental	Objetos de conhecimento	Habilidades
7º Ano	- Simetrias de translação, rotação e reflexão A circunferência como lugar geométrico Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. - Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.	- Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. - Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. - Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
8º Ano	- Congruência de triângulos e demonstrações de proprie-dades de quadriláteros. - Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. - Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: constru-ção e problemas. - Transformações geométri-cas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	- Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. - Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
9º Ano	- Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo. - Semelhança de triângulos. - Relações métricas no triân-gulo retângulo. - Teorema de Pitágoras: verifi-cações experimentais e de-monstração.	- Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Em relação ao Ensino Médio, Matemática e suas Tecnologias devem assegurar aos estudantes o aprimoramento de competências específicas, e as habilidades relacionadas a serem atingidas nessa etapa. Então, em relação ao ensino da geometria, observamos sua presença nas competências:

Objetos de conhecimento	Habilidades
- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos, aritmética, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. - Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	- Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. - Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança. - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados. - Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas. Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. - Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados. - Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. - Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica. - Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração

	para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Analisando a BNCC, verificamos que a construção geométrica se mostra presente inicialmente no 4º Ano do ensino Fundamental, onde é sugerida a utilização de malhas quadriculadas e softwares de geometria, para construção de figuras congruentes. A partir daí, segue a inserção ano a ano de novos elementos de construção, como régua, compasso, esquadros e sempre a sugestão da utilização de softwares para construção geométrica. Tais conhecimentos e habilidades se apresentados de forma correta e eficiente para os alunos do ensino básico, certamente serão de grande importância para sua formação, pois, por meio das construções geométricas é possível que eles absorvam vários conhecimentos que o ajudem a fortalecer habilidades e competências para uma melhor compreensão dos conteúdos. Sem contar, que a utilização de softwares torna a aula mais dinâmica, deixando os alunos mais motivados a participarem da mesma. Segundo Marmo e Marmo (1994), o desenho geométrico desenvolve o raciocínio lógico, a precisão, a organização matemática e a criatividade.

A Construção Geométrica realiza uma conexão entre a geometria e a álgebra, colaborando com o aprendizado dos alunos. Nesse ponto de vista, a Geometria e a Construção Geométrica “são conceitos que estão relacionados diretamente à matemática numa relação de interdependência, por isso, é inquestionável a importância de uma abordagem articulada desses conhecimentos” (QUEIROZ, 2010, p. 9-10).

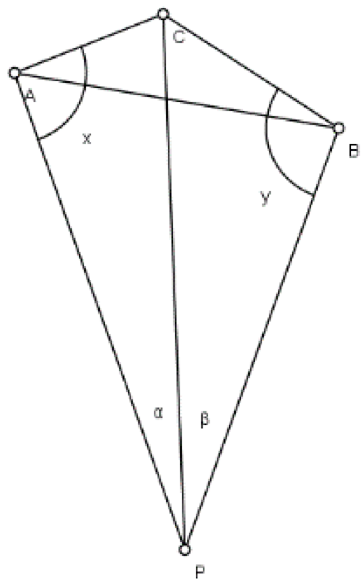
O ensino da Construção Geométrica, quando não trabalhado com a devida atenção exigida, ocasiona prejuízos no aprendizado de conceitos e demonstrações realizadas no ensino da Geometria Plana, na Geometria Espacial e na Matemática do Ensino Fundamental ao Superior, e certamente nas “disciplinas que dependem da visão espacial e das demais competências aprimoradas pelo Desenho Geométrico” (RAYMUNDO, 2010, p. 108).

3. O PROBLEMA DE SNELL-POTHENOT: ENTRE O CLÁSSICO E O MODERNO

3.1 Aspectos Históricos do Problema

Neste capitulo será abordado um breve histórico da vida e obra de Willebrord Snell e Laurent Pothenot, que entre suas contribuições ficaram conhecidos também por resolverem um problema da geometria prática, que consiste em encontrar a posição de um ponto desconhecido P a partir de três outros pontos conhecidos e inacessíveis A, B e C. Então, como ficou conhecido, O Problema de Snell-Pothenot, será o principal objeto de estudo deste trabalho.

Figura 1 – Representação Geométrica para o problema de Snell-Pothenot



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/d/d2/SnellPotFigure1.png 14/01/2020

Esse consiste em um problema de levantamento planar, onde conhecidas as coordenadas dos três pontos A, B e C, um observador em um ponto desconhecido P que observa o segmento AC sob um ângulo α e o segmento BC sob um ângulo β deseja determinar a posição do ponto P. E ainda, de forma inversa mas inteiramente análoga, determinar a posição do ponto P, a partir de observações feitas dos pontos A, B e C.

3.1.1 Willebrord Snell

Willebrord Snell latinizou seu nome para Willebrordus Snell, nome usados em todas as suas publicações. Era filho de Rudolph Snell (1546-1613), professor de matemática em Leiden, na Holanda, e sua mãe era Machteld Cornelisdochter, Snell era o mais velho de 3 filhos de seus pais. Não se sabe ao certo seu ano de nascimento, já que algumas biografias datam 1591 como o ano, outras apontam o ano de 1580 ou 1581, mas afirmam que sua data é desconhecida. De certo, não existe registro que comprovem o ano de seu nascimento, no entanto a estimativa mais coerente é de 1580 ou 1581, pois pode ser deduzida com um certo grau de certeza a partir de uma carta de seu pai no aniversário de seu filho.

Seu pai, Rudolph Snell havia ensinado grego, latim, hebraico e artes liberais no início de carreira em uma escola. Era um estudioso que não possui muita habilidade matemática, mesmo sendo um professor nomeado extraordinariamente de matemática na Universidade de Leiden em 1581. Rudolph tinha como principal influência o trabalho de Peter Ramus, mesmo que as autoridades da Universidade tentassem influenciar que ensinasse mais Euclides e menos Ramus. Segundo Wreede (2010, p.390). Essa preferência fica clara quando corajosamente Rudolph declarou que "o conteúdo do Livro X não aparece em nenhum lugar na obra de Arquimedes, Apolônio, Sereno, Teodósio, Menelau, Ptolomeu, Eutocio, Diofanto ou mesmo Euclides fora dos Elementos: Portanto, o Livro X deve ser descartado, pelo menos na educação[1]".

> [...] portanto [podemos dizer que] a cruz só ficou presa em cima dela e pode ser removida com muita facilidade apenas por cálculos no ábaco. E embora essas [discussões] possam ser armazenadas na biblioteca matemática como meras sutilezas, elas ainda devem ser separadas da instrução elementar, como sendo menos úteis. Como no caso de serem úteis, então toda essa subespécie (da qual esse livro [Elementos X] se compromete a explicar apenas uma parte), sem dúvida incluiria um aprendizado e uma sabedoria ocultos mais distantes. Van Ceulen [1615b, apud WREEDE, 2010, p. 390].

[1] Existem alguns trabalhos que tratam dessa preferência de Rudolph por Ramus; entre eles, destacamos DE WREEDE, 2010.

Rudolph também estudou medicina e as obras de Aristóteles, e administrava sua própria escola particular. Então, é nesse ambiente de estudo que cresceu Willebrord Snell. E assim, aprendeu latim, grego e filosofia com seu pai, e mesmo com o desejo que seu filho estudasse direito na universidade, Snell gostava de estudar matemática e, continuou estudando em casa como aluno particular de Ludolph Van Ceulen[2].

Em 1600, Snell estudava direito e ensinava matemática na universidade nos dias em que o professor não lecionava. Em seguida viajou para vários países da Europa, discutindo, principalmente, Astronomia. E nessas viagens foi apresentado em praga a Tycho Brahe, astrônomo dinamarquês que assumiu um papel vital no pregresso da ciência. Ele foi o melhor astrônomo observacional antes do surgimento do telescópio. Os instrumentos construídos por ele e publicados em 1598 na obra *Astronomiae instaurate mechanica* (Renovação da astronomia mecânica) é parte fundamental da história da astronomia dos séculos XVI e XVII.

Anteriormente o pai de Snell havia combinado que ele fosse educado em Praga pelo astrônomo, em uma troca com o seu filho que seria educado em Leiden, mas o acordo nunca aconteceu na prática. Snell aprendeu bastante nesse período que o ajudou, mas sua experiência teve fim em 1601 com a morte de Tycho. Snell também conheceu Johannes Kepler, pois era assistente de Brahe nessa época. Ele voltou para Leiden em 1602 e começou a trabalhar em manuscritos para publicação. Em 1603 foi a Paris continuar seus estudos em direito, mas também teve muitos contatos com matemáticos. Logo depois, desistiu de estudar direito e passou a maior parte do resto de sua vida em Leiden.

Devido ao estado já debilitado de saúde do pai, Snell passou a ensinar na universidade para ajudá-lo, e por muitos anos formaram uma boa equipe ensinando matemática em Leiden. Apenas em 1609 ele foi designado professor das aulas do sábado pela manhã e, em julho de 1610 foi acrescentado ensino diário a tarde. Em 1612 passou a receber pagamento adicional por seu trabalho e lhe foi prometido a cadeira de matemática logo após a aposentadoria de seu pai. Nesta fase, aproveitando a baixa carga horária, Snell publicou traduções, comentários e edições

[2] Matemático alemão, que ficou conhecido por aperfeiçoar o método para calcular do número irracional Pi(π). Calculando em 1596 um valor com 35 casas decimais. Consultado em 15 de janeiro de 2020 em: http://lhldigital.lindahall.org/cdm/ref/collection/math/id/14980.

de várias obras. Incluindo edições de obras de Ramus. Pois assim como seu pai, Snell gostava de Peter Ramus. Essa influência é claramente vista em uma carta que Snell escreveu para ele em 1607.

> Como você me estimulou desde a juventude a aplicar-me verdadeira e plenamente à bolsa de estudos e me estimulou quando hesitei, nada era mais importante para mim do que examinar mais atentamente a exatidão, clareza e brevidade nas provas dos antigos por meios de seus preceitos, como regras e normas, porque seu Apollo [Ramus] insistiu resolutamente em fazê-lo no Prooemium Mathematicum. [Snell, 1607b, apud WREEDE, 2007, p. 59]

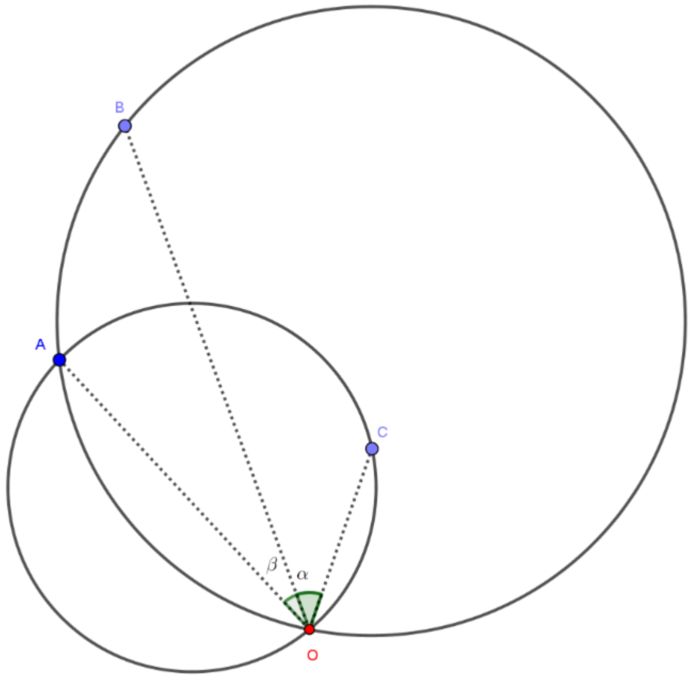
Após defender teses sobre artes liberais: gramática, retórica, lógica, aritmética, geometria, análise/álgebra, física, ótica, astronomia, geografia, estática e ética. Snell recebeu o diploma, em 1608, de Master of Arts de Leiden. Em agosto de 1608 casou-se com Maria de Langhe, e teve pelo menos sete filhos, dos quais apenas três sobreviveram até a idade adulta. Em 1613 assume o lugar de seu pai como professor de matemática na Universidade de Leiden. Mas, após anos brigando por reconhecimento, foi em 1618 que passou a receber um valor adequado para a sua posição, e em 1626, aos 46 anos, Snell faleceu.

3.1.2 O Problema de Ressecção

Ressecção, segundo o dicionário cartográfico, é a determinação gráfica ou analítica de uma posição, como a intersecção, no mínimo de três linhas de direção, conhecida para os pontos correspondentes da posição conhecida.

Entre as inúmeras contribuições de Snell, podemos destacar a publicação, em 1617, do Eratóstenes Batavus, que contém métodos para medir a Terra. Ele propôs o método da triangulação e este trabalho é o fundamento da geodésia. Em conexão com tudo isso, Snell solucionou um problema de ressecção, que no ponto de vista da geometria, consiste em um problema de construção onde são dados três pontos conhecidos A, B e C e os ângulos $A\hat{O}C = \propto$ e $A\hat{O}B = \beta$ a partir de um ponto desconhecido O. O problema é então determinar $\overline{AO}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$ (veja figura 2).

Figura 2 – Problema de Ressecção



Fonte: Construída pelo autor

Em seu livro, Snell primeiro deu uma ideia geral da solução, argumentando que o ponto O está na interseção de dois círculos dados, um desenhado no arco capaz de AB com ângulo inscrito β e o outro no arco capaz de AC com ângulo inscrito α. Em seguida, Snell deu uma construção geométrica exata do ponto O, construindo esses dois círculos.

Outros matemáticos resolveram esse ou outros problemas semelhantes de forma independente. É encontrado no trabalho de Ptolomeu, e poderia ser de conhecimento de Snell, mas nada garante que ele possa ter pensado nisso quando trabalhava no problema de ressecção. Em 1692, tivemos uma outra contribuição importante feita por Laurent Pothenot. E erradamente foi considerado que ele resolveu o problema pela primeira vez e, por muito tempo ficou conhecido como “Problema Pothenot".

3.1.3 Laurent Pothenot

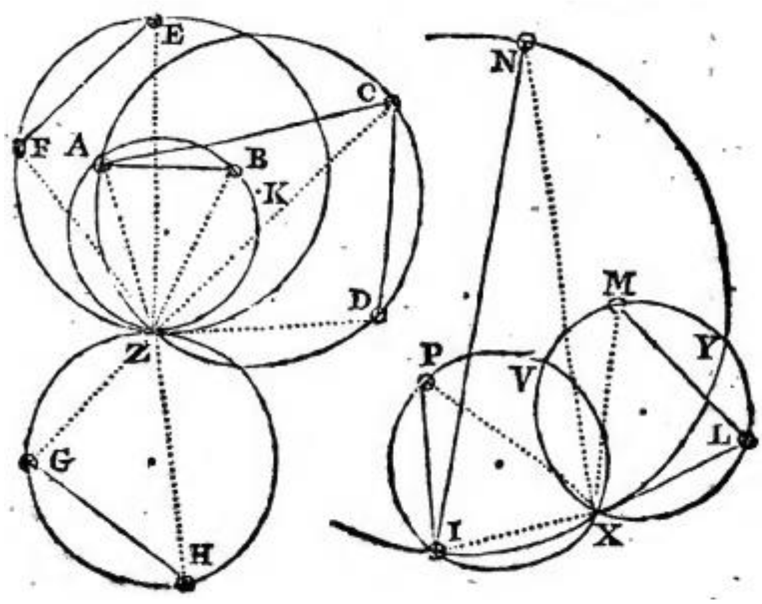
Laurent Pothenot (1650- 1732), é um matemático francês, membro da l'Académie Royale des Sciences e professor do Collège Royal. No livro de memórias que escreveu para a Academia em 1692 Pothenot explicou que,

> há muitos lugares que não têm marcas sensíveis que possam ser vistas à distância; por exemplo, os principais contornos de rios, vales e florestas; a junção de riachos e vales, suas cabeças, a situação das pontes e o encontro das rodovias; e assim não é fácil determinar a posição desses lugares, o que é necessário, no entanto, marcar em um mapa. O Sr. Pothenot frequentemente se encontrava nessa dificuldade quando trabalhava por ordem do rei no mapa das proximidades do novo canal do rio Eure [...]. [PIERRE, p. 277]

Esse problema ficou conhecido como o mais famoso problema de levantamento de terras, e sua solução foi apresentada em um artigo enviado por Pothenot à Academia Francesa em 1692.

Na figura 3, está uma maneira certa e fácil, segundo Pothenot, que ele encontrou e que se esforçou para determinar a proposição desses pontos por observações feitas imediatamente no mesmo local.

Figura 3 – Construção da solução



Fonte: Imagem extraída do livro Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences. p. 277

Atualmente, esse problema tem algumas aplicações importantes como por exemplo na engenharia topográfica, sendo assim, ao logo desse trabalho apresentaremos algumas soluções e uma aplicação da solução com o *Software* **GeoGebra**.

3.2 Soluções para o Problema de Snell-Pothenot

Nesta seção, apresentaremos duas soluções para o Problema de Snell-Pothenot. Iniciaremos com uma solução trigonométrica, que é uma solução necessária quando a precisão é importante, e depois apresentaremos a solução proposta pelo Laurent Pothenot em artigo enviado a Academia Francesa em 1692.

Na resolução do problema apresentado foram explorados a interpretação e aplicações de teoremas, proposições, relações trigonométricas e conceitos de construções geométrica. As resoluções foram postas com o máximo de detalhes necessários a fim de mostrar todas as propriedades envolvidas e com isso facilitar a aplicação com alunos do Ensino Médio.

Reforçamos que este problema pode ser trabalhado com alunos do Ensino Médio. Na seção 4.1, apresentaremos uma proposta de atividade envolvendo a solução do problema com o auxílio do *Software* GeoGebra.

3.2.1 – Solução Moderna (Trigonométrica)

Esse tipo de solução é baseado no teorema da tangente senoidal:

TEOREMA 1. TANGENTE SENOIDAL

Dado que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{m}{n} \tag{1}$$

Então

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{m-n}{m+n} \tag{2}$$

Demonstração:

De (1), segue que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}=\frac{m-n}{m+n} \tag{3}$$

Pois,

$$\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}-1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}+1}=\frac{\frac{m}{n}-1}{\frac{m}{n}+1}\rightarrow\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}=\frac{m-n}{m+n}$$

Como,

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Segue que,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{m-n}{m+n}$$

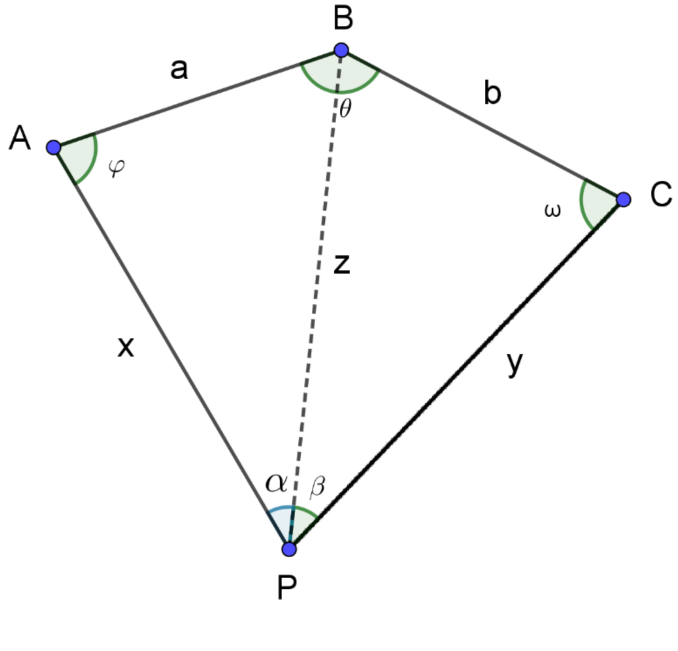
Então

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Fazendo uso desse resultado, podemos resolver o seguinte problema:

Problema: Sejam conhecidos os elementos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $A\hat{B}C = \theta$, $A\hat{P}B = \alpha$ e $B\hat{P}C = \beta$; queremos encontrar os elementos $\overline{AP} = x$, $\overline{CP} = y$, $\overline{BP} = z$, $B\hat{A}P = \varphi$ e $B\hat{C}P = \omega$.

Figura 4 – Representação geométrica do problema



Fonte: Construída pelo autor

Solução:

Aplicando a Lei dos senos aos triângulos ABP e BCP, teremos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{z}{\operatorname{sen}\varphi} \tag{4}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{z}{\operatorname{sen}\omega} \tag{5}$$

Dividindo (4) por (5), obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta} \tag{6}$$

Determinamos o ângulo auxiliar δ cuja tangente é $(b\operatorname{sen}\alpha)/(a\operatorname{sen}\beta)$, é obtemos que

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta} \tag{7}$$

Com isso, usando o Teorema 1, segue que

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\omega}{2}\right)} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha + a\operatorname{sen}\beta} \tag{8}$$

Substituindo (7) em (8), teremos que

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\omega}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\delta - 1}{\operatorname{tg}\delta + 1} = \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ou seja,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\omega}{2}\right).\operatorname{tg}\left(\delta-\frac{\pi}{4}\right) \tag{9}$$

Por outro lado, como $ABCD$ mostrado na figura 4 é um quadrilátero, temos que $\varphi+\omega=2\pi-(\alpha+\beta+\theta)$. Com isso, a equação (9) nos dá

$$\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right).$$

Conhecidos

$$\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right) \text{ e } (\varphi+\omega)$$

Basta agora resolver um simples sistema e termos os valores de φ e ω.

E então, as incógnitas x, y, z são obtidas aplicando a lei dos senos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\varphi)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \quad\rightarrow\quad x=a\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\varphi)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{y}{\operatorname{sen}(\pi-\beta-\omega)}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad\rightarrow\quad y=a\frac{\operatorname{sen}(\beta+\omega)}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{z}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \quad\rightarrow\quad z=a\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Caso as coordenadas de $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$ sejam conhecidas em algum sistema de coordenadas cartesianas apropriado, a posição de P poderá ser determinada.

3.2.2 Solução Clássica (Solução de Pothenot)

Essa solução foi apresentada por Laurent Pothenot em seu artigo enviado à Academia Francesa em 1692. É uma solução pautada em construções geométricas, e segundo ele, uma maneira fácil e certa de solucionar o problema de levantamento de terras.

A solução desse problema como visto anteriormente, estava voltada para construção do mapa das proximidades do novo canal do rio Eure, na França, que tinha como uma das maiores dificuldades o difícil acesso a algumas regiões. Assim sendo, temos o seguinte:

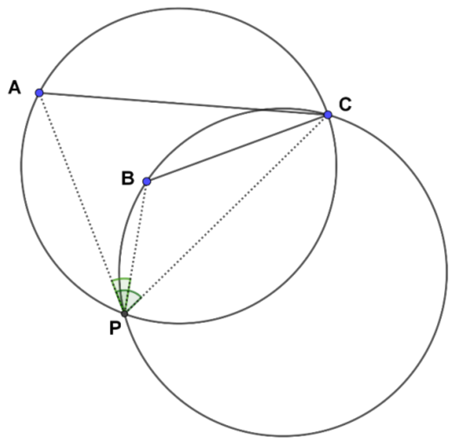
Problema: Determinar a localização de um ponto inacessível P, tomados no mapa os pontos A, B e C, cujas distâncias $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e os ângulos $A\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$ são conhecidos.

Solução:

Conhecidos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, deve-se construir os arcos capazes[3] dos ângulos $A\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$. E a intersecção das circunferências que contém esses arcos, fornecerá o ponto que estamos procurando.

Importante ressaltar que é sempre mais apropriado escolher segmentos de reta com ponto em comum, como na figura 5, temos o ponto C com essa característica. É verdade que podemos utilizar um quarto ponto D, e a partir dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que não tem nenhuma de suas extremidades em comum, o ponto P também será determinado, mas, isso só poderá ocorrer de três maneiras:

Figura 5 – Representação geométrica de uma solução pelo método de Pothenot

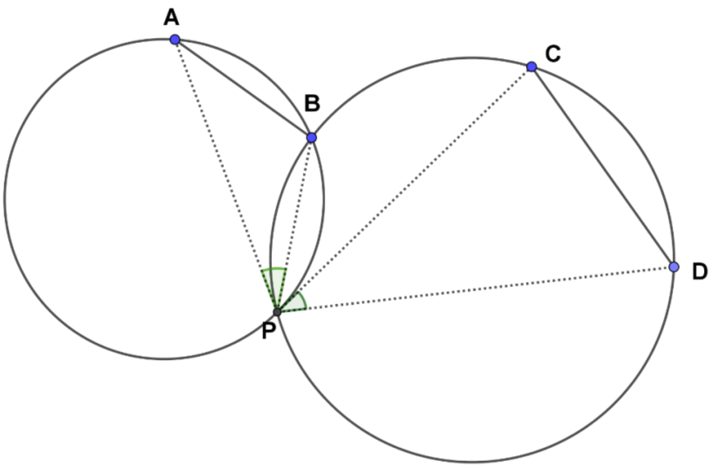


Fonte: Construída pelo autor

[3] O arco capaz de um ângulo α em relação a um segmento de reta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos que formam com as extremidades do segmento um ângulo α. Esse lugar geométrico constitui um arco de circunferência.

Primeira, considerando os quatros pontos A, B, C e D, três pertencem a mesma circunferência, sendo assim, o ponto P será determinado: porque as duas circunferências se intersectam em dois pontos, um dos quais é B, já dado, sendo assim o outro será o ponto procurado P.

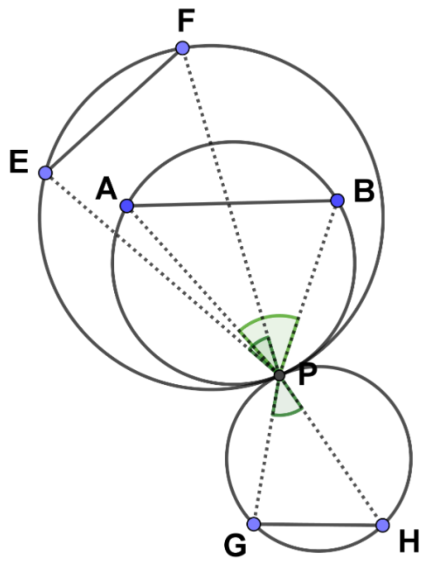
Figura 6 – Representação geométrica da primeira solução pelo método de Pothenot



Fonte: Construída pelo autor

Segunda, para encontrar o mesmo ponto P, podemos tomar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{GH}$, e construídos os arcos capazes de $A\hat{P}B$, $E\hat{P}F$ ou $G\hat{P}H$, de sorte, as circunferências que contém os arcos se intersectaram no ponto P. Mas este caso é raro.

Figura 7 – Representação geométrica da segunda solução pelo método de Pothenot

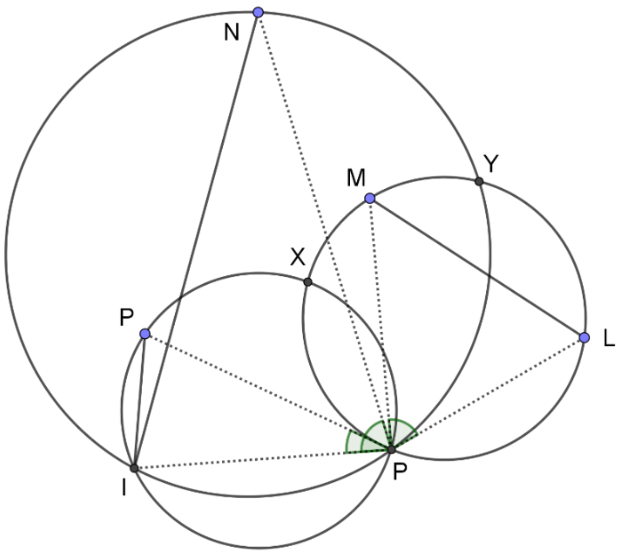


Fonte: Construída pelo autor

Terceira, podemos escolher os segmentos $\overline{LM}$ e $\overline{NI}$ e construir os arcos capazes $L\hat{P}M$ e $N\hat{P}I$, eles não serão suficientes para determinar apenas o ponto P, pois as circunferências também se intersectaram no ponto Y; no entanto, este ponto não pode satisfazer o problema, porque não pertence aos arcos capazes dos ângulos.

Mas, se tomarmos os segmentos $\overline{LM}$ e $\overline{HI}$ e construindo os arcos capazes $L\hat{P}M$ e $H\hat{P}I$, encontraremos dois pontos de intersecção X e P que satisfariam as condições dos ângulos, sendo assim, o ponto P seria indeterminado.

Figura 8 – Representação geométrica do caso indeterminado



Fonte: Construída pelo autor

No entanto, Pothenot relata que é fácil evitar esses inconvenientes, pois as escolhas dos pontos conhecidos na construção do mapa podem ser feitas de forma adequada. E finaliza sua demonstração dando uma orientação sobre a escolha dos pontos A, B e C; que o ponto do meio, como o B, deve estar acima da linha do segmento $\overline{AC}$; ou se estiver abaixo dessa linha, deve estar mais distante do ponto P, do que do segmento $\overline{AC}$.

A indeterminação de P acontece quando os três pontos A, B e C estão localizados na mesma circunferência, pois teremos infinitas soluções. Já que qualquer ponto sobre ela vai vê os mesmo ângulos α e β que os do ponto P. A circunferência através do ABC é conhecida como "Circunferência Perigosa" e as observações feitas nessa circunferência devem ser evitadas quanto à utilização desse método.

4. PERSPECTIVAS DE USO EM SALA-DE-AULA

Pretendemos que esta atividade possa auxiliar alunos e professores no trabalho com conceitos geométricos através de sua construção. Apesar de o *software* GeoGebra ter comandos práticos que são capazes de fazer construções fundamentais como ponto médio, mediatriz, perpendicular e arco capaz, reservamos o apêndice B para uma breve apresentação de tais construções elementares citadas, pois constatamos que o bom entendimento desses conceitos servirá como base sólida para a construção do ensino e aprendizado. E, além disso, pelo retrospecto histórico que esse tema tem dentro da evolução do conhecimento matemático.

> O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam.
>
> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas. (WAGNER, 2015, p. 1).

Assim, apresentaremos uma sequência didática em que o professor vai ter a possibilidade de explorar a importância da CG no desenvolvimento da matemática elementar, podendo fazer um paralelo entre os recursos disponíveis em épocas passadas (régua não graduada e compasso) e as TIC. E ressaltamos que o papel do professor é de condutor na realização desta atividade, orientando e permitindo que os alunos cheguem às suas próprias conclusões, sem fornecer uma solução de imediato.

4.1 Sequência Didática para aplicação do problema

A atividade destina-se a alunos do Ensino Fundamental II e Médio, e tem como objetivo apresentar uma solução prática para o problema clássico de Snell-Pothenot pautada em CG com o auxílio das TIC.

Esta atividade tem a duração sugerida de 4 aulas de 50 minutos cada.

Na primeira aula, o professor pode expor o problema, do ponto de vista de Pothenot, utilizando o *datashow*, resgatando historicamente as dificuldades e aplicações deste problema (descrito no capítulo 3). E com auxílio de régua (preferencialmente não graduada) e compasso, apresentar as seguintes CG com suas respectivas características de lugares geométricos.

a) Reta perpendicular;
b) Mediatriz;
c) Arco Capaz.

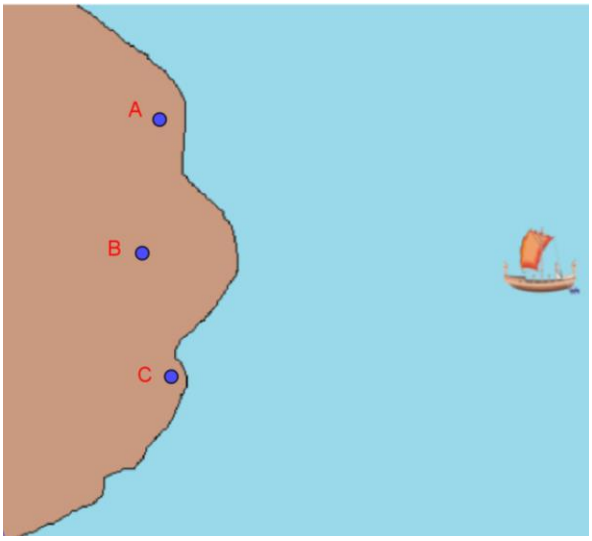
A segunda aula será destinada a utilização do *software* GeoGebra, onde sugerimos que o professor possa fazer a apresentação do *software* e mostrar as construções geométricas fundamentais (descrito no apêndice A). Finalizando a aula com uma série de atividades de construções básicas.

Na terceira aula, o professor pode lançar uma adaptação do problema de Snell-Pothenot como atividade para que os alunos resolvam fazendo uso do *software* GeoGebra.

4.1.1 Sugestão de aplicação do problema

Um navio (P) ao se aproximar da costa, observa os pontos conhecidos no mapa A, B e C. E com o auxílio de um teodolito consegue descrever os ângulos horizontais $A\hat{P}B$ e $B\hat{P}C$ com as respectivas medidas 40º e 60º. Qual a posição desse navio no mapa?

Figura 9 – Ilustração do Problema



Fonte: Construída pelo autor

Na quarta aula, o professor pode apresentar uma solução do problema, promover um debate com seus alunos sobre a praticidade da CG com o uso das TIC, fazendo um paralelo com as soluções propostas por Pothenot (descrito na seção 3.2.2), e pode propor outros problemas semelhantes.

4.1.2 Uma Solução com auxílio do GeoGebra

Conhecimentos prévios: Arco capaz, mediatriz, circunferência, perpendicular.

Solução: Construção

Dado o segmento AB e o ângulo $A\hat{P}B$. Precisamos construir o lugar geométrico (arco capaz) dos pontos que conseguem ver AB sob um ângulo de 40º, faça o seguinte:

Desenhe a mediatriz de AB.

Trace a semirreta AD tal que $B\hat{A}D$ = 40º.

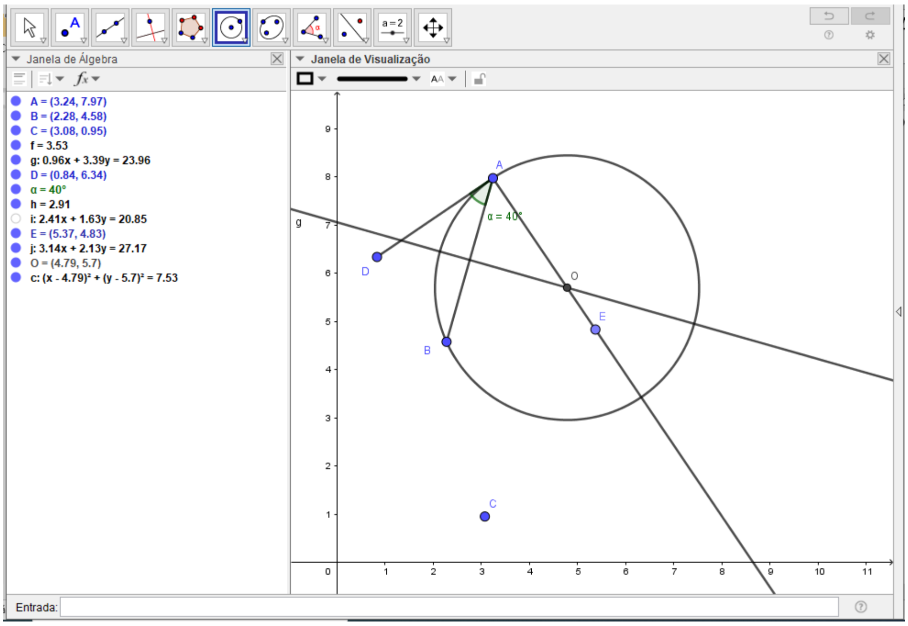
Trace por A a semirreta AE perpendicular a AD.

A interseção de AE com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz.

Com centro em O desenhe o círculo que passa por A.

Com isso, qualquer ponto tomado no arco $\widehat{AB}$ (maior arco) ver o segmento sob um ângulo de 40º.

Figura 10 – Construção do Arco capaz



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 19/03/2020

Dado o segmento BC e o ângulo $B\hat{P}C$. Precisamos construir o lugar geométrico (arco capaz) dos pontos que conseguem ver BC sob um ângulo de 60º, faça o seguinte:

Desenhe a mediatriz de BC.

Trace a semirreta CF tal que $B\hat{C}F$ = 60º.

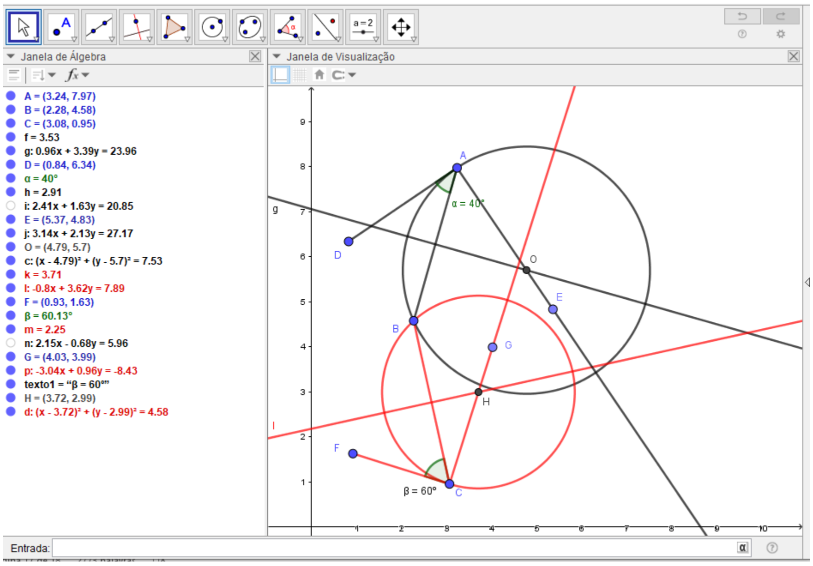
Trace por C a semirreta CG perpendicular a CF.

A interseção de CG com a mediatriz, é o ponto H, centro do arco capaz.

Com centro em H desenhe o círculo que passa por C.

Analogamente, qualquer ponto tomado no arco $\widehat{BC}$ (maior arco) ver o segmento sob um ângulo de 60º.

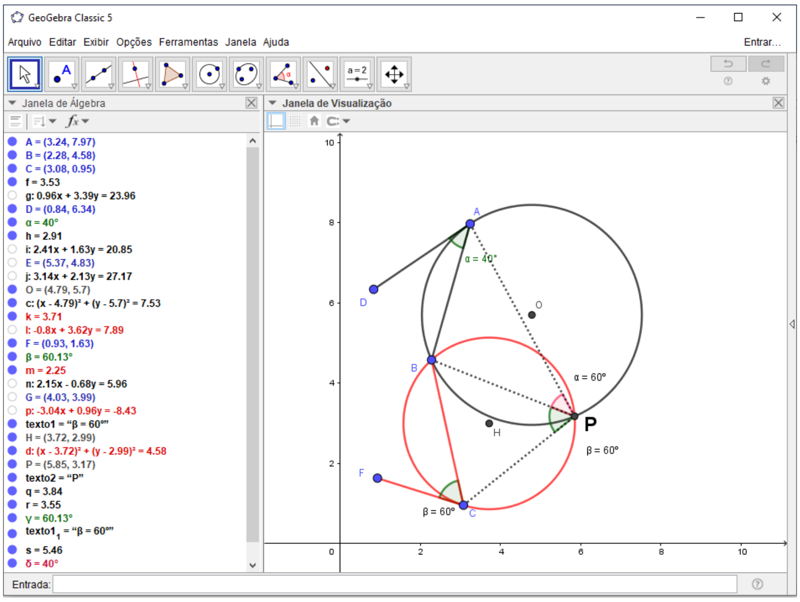
Figura 11 – Construção do Arco capaz



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 19/03/2020

Então, os círculos se intersectam em dois pontos, sendo que um deles é o próprio B, conhecido, e o segundo será a localização procurada do navio (P). Pois esse ponto é inscritível aos dois círculos e com as características pedidas.

Figura 12 – Localização do Ponto P



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 19/03/2020

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de matemática na educação básica necessita de recursos que possam auxiliar professores no árduo trabalho de despertar o interesse dos alunos e possibilitar a compreensão dela. Pensando nisso, esse trabalho buscou ajudar alunos e professores em uma área da matemática muitas vezes considerada difícil, que é a geometria.

Nossa proposta trouxe a concepção do quanto importante é compreender as motivações históricas de um problema e os caminhos limitados de sua época para motivar seu entendimento e aplicações modernas, possibilitando fazer comparações com que intensidade a tecnologia pode nós auxiliar nos dias de hoje, além do fato da relevância que a tecnologia tem em atrair a atenção dos jovens.

O desenvolvimento de nosso trabalho foi baseado na investigação do tema em diversas fontes bibliográficas de autores com vasta experiência na área, e nos documentos oficiais PCN e BNCC. Pois, achamos relevante o desenvolvimento a partir da experiência desses. Mas, temos consciência que o resultado deste trabalho ainda precisa de implementos a partir de testes aplicados na prática em sala de aula, possibilitando assim a observação mais concreta de seu uso, e comparações com cenários de não uso.

Além disso, propusermos uma atividade contextualizada, que pode possibilitar uma ilustração histórica inspirada nas antigas navegações, as quais não faziam uso dos GPS, instigando a curiosidade dos alunos em conhecer métodos de localização no mapa a partir da construção geométrica. Sugerimos também, por meio do anexo B, que o professor poderá fazer essa construção com seus alunos utilizando apenas régua e compasso, antes de apresentar as possibilidades do GeoGebra como ferramenta facilitadora.

Julgamos, então, que nosso trabalho possibilita uma fonte importante de informações para o uso desta prática. Pois, constatamos que essa interação da História, Tecnologia e Matemática podem ser vista como forte aliada no processo do ensino-aprendizado.

Sendo assim, ressaltamos nosso interesse em posteriores análises da aplicação do problema e novas pesquisas sobre essa temática.

Por fim, entendemos que apresentamos possibilidades que podem ser levadas em consideração por parte dos professores que buscam condições de tornar mais real, interessante e instigante o ensino-aprendizado da matemática.

6. REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. (1962). *Dicionário de Filosófia. 2. ed.* São Paulo: Mestre Jou.

BONA, B. d. (2009). Análise de softwares educativos para o ensino de matemática. *Experiências em Ensino de Ciências*, 35-55.

BORBA, M. d. (2010). Softwares e internet na sala de aula de matemática. Anais. *Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador: Universidade Católica do Salvador.

BRASIL. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. *Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília.

BRASIL. (2017.). Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

D'AMBROSIO, B. S. (1996). Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. *SBEM*, 2.

DE WREEDE, L. C. (2007). *Willebrord Snell (1580-1626): a humanist reshaping the mathematical sciences.* Utrecht University.

DE WREEDE, L. C. (2010). *A dialogue on the use of arithmetic in geometry: Van Ceulen's and Snell's Fundamenta Arithmetica et Geometrica.*

DÖRRIE, H. (1965). *100 great problems in Mathematics. Their history and solutions.*

FAUVEL, J. (1997). *A utilização da História em Educação Matemática.* Tradução: Paulo Oliveira. In: VIEIRA, A; VELOSO, E. LAGARTO, M. J. Relevância da História no Ensino da Matemática. GTHEM/APM.

GRAVINA, M. A., & SANTAROSA, L. M. (1998). A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. *IV Congresso RIBIE*. Brasília.

LUCENA, S., & BIANCHETTI, L. (2004). As tecnologias da informação e da comunicação e as possibilidades de interatividade para a educação. *Educação e Contemporaneidade*, 253.

MARMO, C., & MARMO, N. (1994). *Desenho geométrico.* Rio de Janeiro: Scipione.

MENDES, I., FOSSA, J., & VALDES, J. (2006). *A história como um agente de cognição na educação matemática.* Porto Alegre: Sulina.

MIGUEL, Â., & MIORIM, M. Â. (2019). *História na Educação Matemática. 3. ed. - Livro Digital.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

NÉRI, I. C. (2010). *Funções Polinomiais Do Segundo Grau Mediados Pelo Software Geogebra Na Perspectiva Dos Registros De Representação Semiótica.* São Paulo.

OLIVEIRA, C. d. (1993). *Dicionário cartográfico I Cêurio de Oliveira • 4. ed.* Rio de Janeiro: IBGE.

QUEIROZ, J. C. (2010). A Geometria e o Desenho Geométrico nas escolas do Brasil do século XX. *X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade*. Salvador.

RAYMUNDO, M. F. (2010). Construção de conceitos geométricos: investigando a importância do ensino do desenho geométrico nos anos finais do ensino fundamental. *Dissertação de Mestrado em Educação Matemática*. Vassouras, RJ: Universidade Severino Sombra.

SCIENCES, A. D. (1723). Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences. *Année 1692, Pierre du Coup*. Amsterdam.

SEVERINO, A. J. (2017). *Metodologia do Trabalho Científico[livro eletrônico] 2. ed.* São Paulo : Cotez.

SOUSA, G. C., & SCHIVANI ALVES, J. M. (2016). A REGRESSÃO LINEAR DE GALTON: ATIVIDADES HISTÓRICAS PARA FUNÇÃO AFIM E ESTATÍSTICA BÁSICA USANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS. *Conexões - Ciência e Tecnologia, [S.l.], v. 9, n. 4, p. 26-36, apr. 2016. ISSN 2176-0144*, 06. Disponível em: <http://www.conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/936/694>. Acesso em: 14 apr. 2020. doi:https://doi.org/10.21439/conexoes.v9i4.936. .

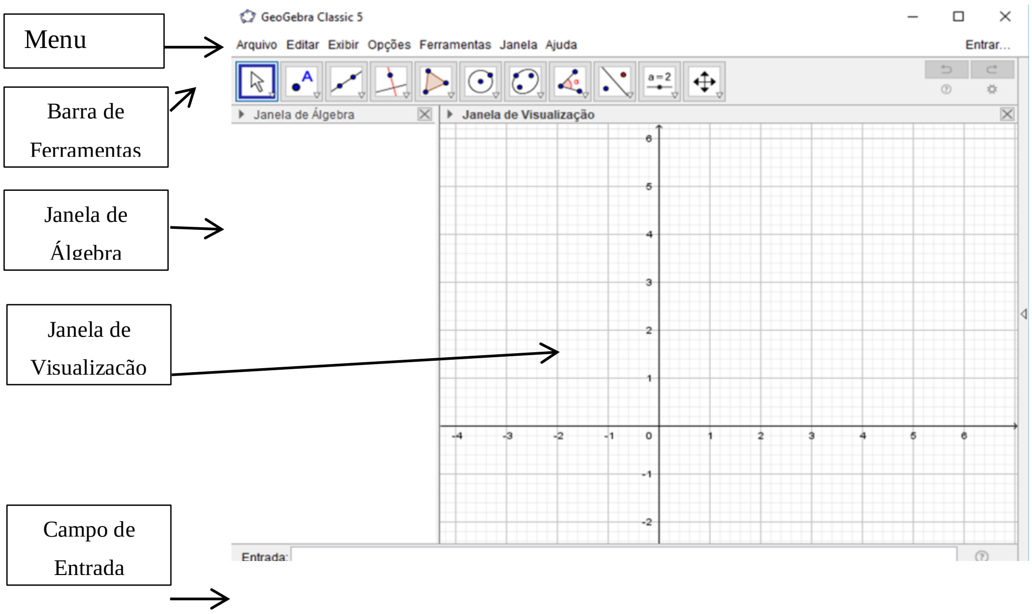
WAGNER, E. (2015). *Uma introdução às construções geométricas.* Rio de Janeiro: IMPA.

7. APÊNDICES

Apêndice A – Comandos do GEOGEBRA

A figura 13, traz a interface inicial do GeoGebra, com as indicações dos principais ambientes de trabalho.

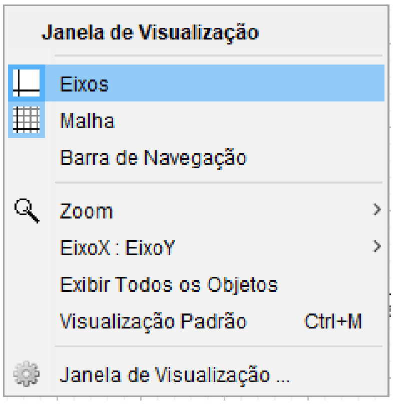
Figura 13 – Interface inicial do GeoGebra



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

As construções podem ser realizadas com ou sem a visualização dos eixos e malhas, assim a exibição fica de acordo com a opção do usuário. A Malha Quadriculada e Eixos Cartesianos podem ser ocultados/exibidos, clicando com o botão direito do mouse em qualquer lugar da Janela de Visualização e escolhendo a opção desejada.

Figura 14 – Opções do botão direito

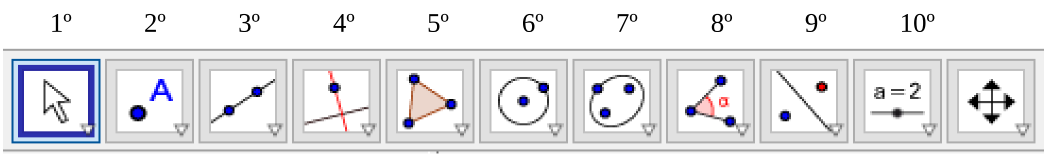


Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Comandos do GeoGebra

Na construção da solução do problema central deste trabalho, não faremos uso de todos os recursos da barra de ferramentas, apresentaremos apenas aqueles que serão utilizados na construção, os quais estão indicados pelos números: 1º, 2º, 3º, 4º, 6º, 8º e 11º, conforme a Figura 15.

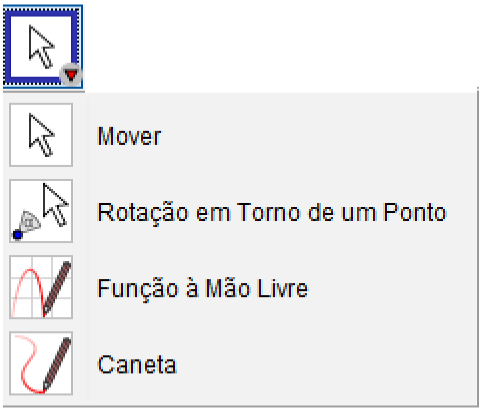
Figura 15 – Barra de Ferramentas



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Os comandos numerados na figura 15, estão agrupados por características e/ou semelhanças, como ilustrado na figura 16, podendo ser alterados ao clicar na seta localizada no canto inferior direito de cada comando.

Figura 16 – Opções de comandos



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

1° ícone → comando: Mover

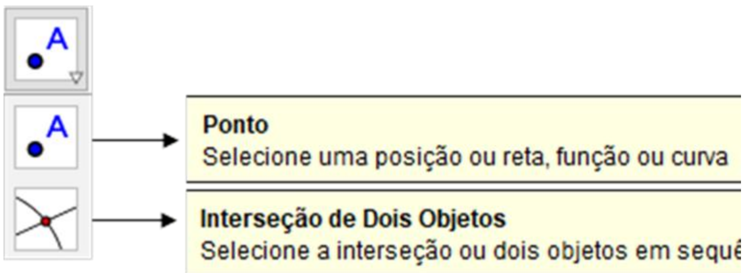
Figura 17 – Comando mover

Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Mover: Ferramenta utilizada para selecionar e mover objetos livres. Ao selecionar um objeto no modo **mover**, pode-se apagar o objeto pressionando a tecla DELETE.

2° ícone → comando: Ponto e Interseção de dois objetos

Figura 18 – Ponto e Interseção de Ponto



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Ponto: Constrói um novo ponto na janela de visualização e em objetos, como segmentos, retas, polígonos, entre outros.

Interseção entre objetos: Constrói um ponto de interseção entre objetos. Para construir basta selecionar os dois objetos, ou clicar diretamente sobre uma intersecção de duas ou mais linhas.

3° ícone → comandos: Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo

Figura 19 – Reta, Segmento e Segmento com Comprimento Fixo

Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

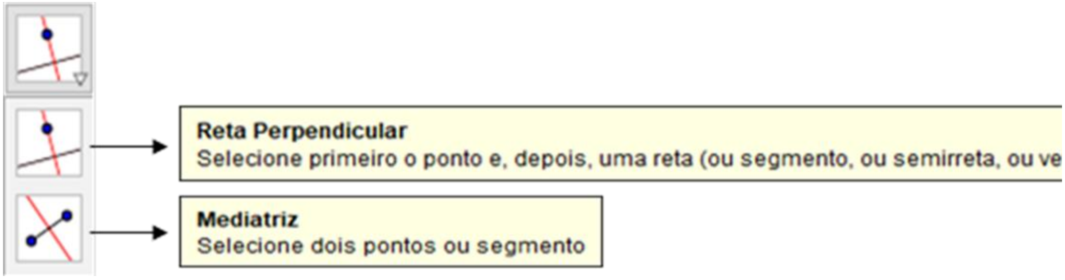
Reta: Constrói uma reta definida por dois pontos. Para construir basta clicar em dois pontos dados, ou definir tais pontos clicando diretamente na janela de visualização.

Segmento: Constrói um segmento entre dois pontos. Para construir basta clicar em dois pontos dados, ou definir tais pontos clicando diretamente na janela de visualização.

Segmento de Comprimento Fixo: Constrói um segmento conhecendo um ponto e seu comprimento. Para construir basta clicar em um ponto ou na janela de visualização e em seguida especifique o comprimento desejado no campo de texto da janela de diálogo que irá aparecer.

4° ícone → comandos: Reta Perpendicular e Reta Mediatriz

Figura 20 – Reta Perpendicular e Reta Mediatriz



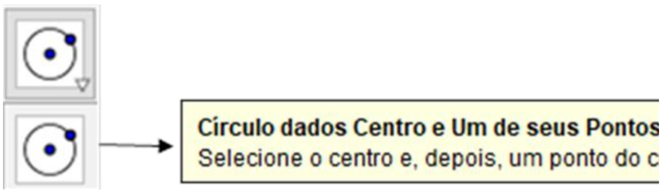
Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Reta Perpendicular: Constrói uma reta perpendicular a um segmento, semirreta ou reta. Para construir basta clicar em uma dessas opções e depois em um ponto ou janela de visualização.

Mediatriz: Constrói a reta mediatriz de um segmento. Para construir basta clicar diretamente no segmento desejado, ou nos dois pontos que os formam.

6° ícone → comando: Círculo dado Centro e um de seus Pontos

Figura 21 – Círculo dado Centro e um de seus Pontos

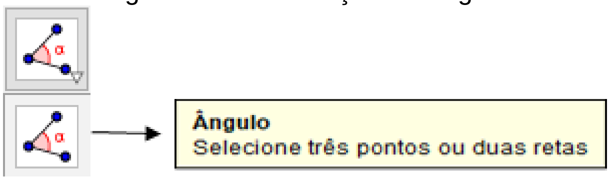


Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Círculo dado Centro e um de seus Pontos: Constrói um círculo dados o centro e um ponto distinto dele.

8° ícone → comando: Ângulo

Figura 22 – Construção de Ângulo

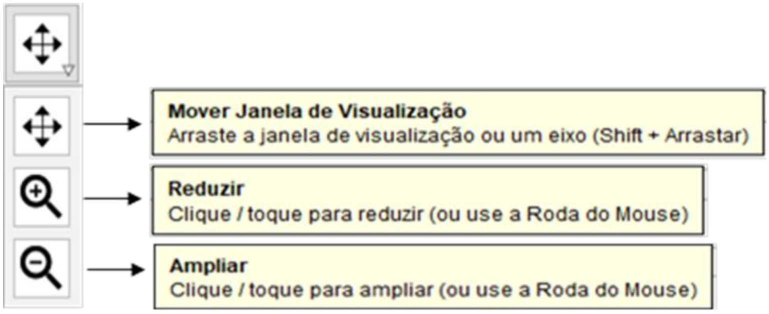


Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Ângulo: Constrói o ângulo formado entre três pontos ou duas retas. Para construir basta selecionar os três pontos desejados ou, sobre as duas retas.

11° ícone → comandos: Mover janela de visualização, Ampliar e Reduzir

Figura 23 – Mover Janela de Visualização, Reduzir e Ampliar.



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

Mover Janela de Visualização: Move a janela de visualização. Para isso, basta clicar e segurar com o mouse e em seguida mover para qualquer direção: vertical, horizontal e diagonal.

Ampliar: Aumentar a tela da área de visualização.

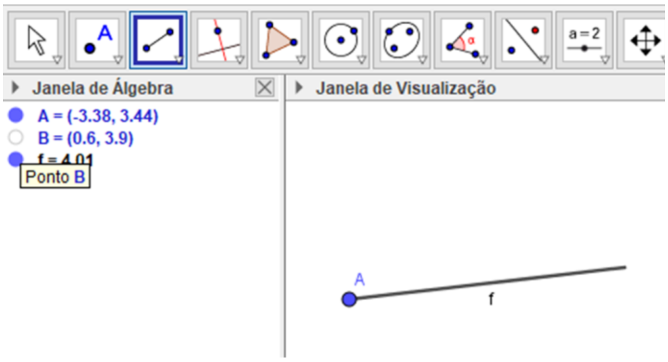
Reduzir: Diminuir a tela da área de visualização.

Procedimentos de edição dos objetos:

- Renomear ponto ou segmento/reta: basta clicar no objeto desejado com o botão direito do mouse e na opção RENOMEAR.

- Esconder Objeto: para esconder algum objeto sem apagá-lo, basta clicar na bolinha colorida que o representa na Janela de Álgebra, ou clicar diretamente no objeto com o botão direito e selecionando a opção *Exibir Objeto*.

Figura 24 – Esconder um objeto



Fonte: Capturada pelo autor do Software GeoGebra Clássico (5.0.557) em 10/01/2020

- Apagar objeto: basta clicar com o botão direito em cima do objeto ou na bolinha que o representa na Janela de Álgebra e na opção APAGAR.

- Mudar a cor do objeto: basta clicar com o botão direito sobre o objeto, depois em configurações/cor, e selecionar a cor desejada.

- Salvar a Construção: basta selecione o menu Arquivo, opção Gravar e em seguida digitar o nome e selecionar o local para armazenamento.

- Salvar como imagem: basta selecionar o menu Arquivo, opção Exportar/Janela de Visualização como imagem. Em seguida, escolher o formato e/ou resolução da figura depois clicar em gravar e digitar o nome e escolher o local onde deseja armazenar.

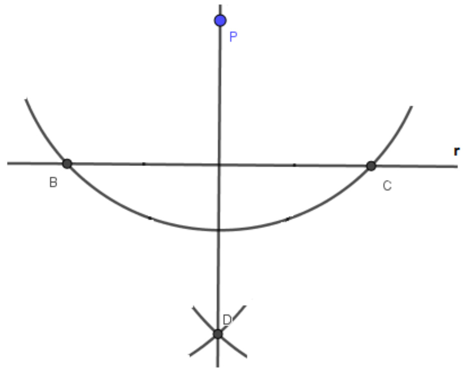
Apêndice B – Construções Geométricas

Vamos apresentar essas construções usando apenas a régua (não graduada) e o compasso.

Reta perpendicular: Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

Seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. Para construir, basta centrar em P e traçar uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B. Em seguida, desenhamos dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos A e B, determinando na interseção o ponto D. A reta PD é perpendicular à reta r.

Figura 25 – Reta perpendicular

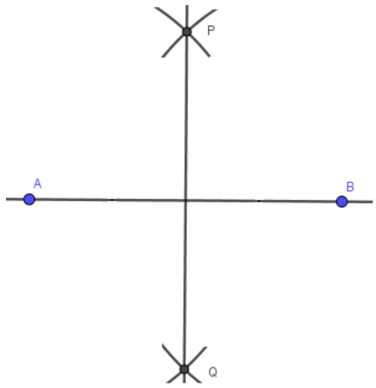


Fonte: Construída pelo autor

A Mediatriz: A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.

Para construir, traçamos dois arcos de circunferência com centros em A e B e com interseções P e Q. A reta PQ é a mediatriz de AB.

Figura 26 – Mediatriz



Fonte: Construída pelo autor

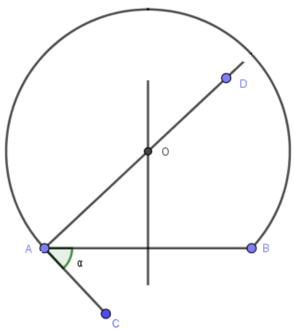
É o lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB num determinado ângulo.

Arco Capaz: Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência, é o lugar geométrico dos pontos que enxergam o segmento AB num determinado ângulo $A\hat{P}B = \alpha$ para todo ponto P sobre um dos arcos.

Para construção do arco capaz, seja dado o segmento AB e o ângulo α. Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver AB segundo ângulo α, devemos:

I. Construir a mediatriz de AB.
II. Traçar a semirreta AC tal que $B\hat{A}C = \alpha$.
III. Traçar por A a semirreta AD perpendicular a AC.
IV. A interseção de AD com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz.
V. Centrado em O desenhe o arco $\widehat{AB}$.

Figura 27 – Arco Capaz



Fonte: Construída pelo autor

O arco $\widehat{AB}$ que desenhamos é o lugar geométrico do ângulo construído sobre o segmento AB. Para justificar, observe que se $B\hat{A}C = \alpha$, então $B\hat{A}D = 90 - \alpha$ e, seja M o ponto médio de AB, teremos que $A\hat{O}M = \alpha$. Assim $A\hat{O}B = 2\alpha$, sendo assim, para qualquer ponto P do arco $\widehat{AB}$ tem-se que $A\hat{P}B = \alpha$ (pois o ângulo inscritível é metade do ângulo central).