UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALEXANDRE SOUSA PALMERIM

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Belém - Pará

2019

ALEXANDRE SOUSA PALMERIM

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará, como requisito de parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior.

Belém - Pará

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P173p Palmerim, Alexandre Sousa
Uma proposta para o ensino de trigonometria por meio do software Geogebra / Alexandre Sousa Palmerim. — 2019.
81 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior Almeida Júnior
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Geogebra. 2. Trigonometria. 3. Aluno. 4. Professor. I. Título.

CDD 510

ALEXANDRE SOUSA PALMEIRIM

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará, como requisito de parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Data de aprovação: 17/12/2019

Banca examinadora

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior – PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias – PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo – PROFMAT/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Gesson José Mendes Lima – SEDUC/PARÁ

Belém - Pará

2019

DEDICATÓRIA

À minha família, em especial a minha esposa Alyssangela e aos meus filhos Alyssa de Nazaré, Alexandre Filho e Jorge Davi

AGRADECIMENTOS

Agradeço a esse Deus maravilhoso pelo dom da minha vida e por ter me presenteado com essa honra de cursar esse mestrado profissional de matemática;

Em memória aos meus pais Izidorio e Maria da Conceição que sempre acreditaram em mim e no apoio irrestrito a minha educação;

À minha esposa, Alyssangela por sempre ter me apoiado nessa caminhada, dado forças nos momentos mais difíceis e sua oração me deu ânimo nas horas de desespero;

Aos meus filhos, Alyssa de Nazaré, Alexandre Filho e Jorge Davi que são a razão da minha vida e a força que me faz seguir em frente;

A minha sogra Iraci, meu sogro Alcides e os meus cunhados Alyssandra e Alciney pelo papel fundamental de proteger minha família e no apoio aos meus estudos.

Aos professores pela perseverança, dedicação e por momentos preciosos de aprendizagem, em especial ao meu orientador, professor Dr. Dilberto pela atenção, paciência e seriedade com que me guiou no período de elaboração e confecção desse trabalho.

A meus colegas de classe pela troca de experiências. Em especial, ao meu amigo Profº Msc Jocimar Xavier, que me ajudou e me deu coragem nas horas mais difíceis para superar todos os obstáculos e barreiras que surgiram durante esse curso;

À Escola Arte de Educar, por me ajudar, compreender minhas ausências e por ter contribuído com o meu aperfeiçoamento profissional;

E a todos que, mesmo indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Se vi mais longe, foi por estar sobre os ombros dos gigantes”.

Isaac Newton

RESUMO

Nesse estudo pretende-se analisar a relevância do software *Geogebra* com suas implicações e propor atividades direcionadas ao ensino da trigonometria para alunos do ensino médio. O trabalho segue uma metodologia de referências bibliográfica e análise de dados cruzando informações de diferentes fontes autorais. A revisão da literatura aborda três frentes relevantes para implementação do *Geogebra* no contexto da matemática escolar: as práticas de ensino referentes a trigonometria em sala de aula com uso dos materiais didáticos; a análise desse ensino e aprendizagem, aliado com a base nacional curricular comum (BNCC) que vem de encontro com a proposta do trabalho na inserção digital do aluno com a implementação da Geometria Dinâmica as aulas; as vantagens e desvantagens no uso do *Geogebra* em aplicações já realizadas em outros trabalhos. As recomendações emergentes do estudo apontam que o uso desse programa pode dar suporte ao professor em sala de aula, por isso deixamos propostas de atividades orientadas aos docentes elaboradas de forma sistemática para que o aluno consiga dar significados aos conceitos e compreender os assuntos na intenção de motivar a comunidade estudantil.

Palavras-chave: Geogebra, trigonometria, aluno, professor.

ABSTRACT

This study aims to analyze the relevance of Geogebra software with its implications and propose activities directed to the teaching of trigonometry for high school students. The work follows a methodology of bibliographic references and data analysis crossing information from different author sources. The literature review addresses three relevant fronts for the implementation of Geogebra in the context of school mathematics: teaching practices related to trigonometry in the classroom using didactic materials; the analysis of this teaching and learning, allied with the common national curricular base (BNCC) that meets the proposal of the work in the digital insertion of the student with the implementation of Dynamic Geometry the classes; the advantages and disadvantages of using Geogebra in applications already done in other works. The emerging recommendations of the study indicate that the use of this program can support the teacher in the classroom, so we leave proposals for teacher-oriented activities systematically designed so that the student can give meaning to the concepts and understand the subjects in order to motivate the student community.

Keywords: Geogebra, trigonometry, student, teacher.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

Iniciamos este capítulo com uma breve introdução, na qual faremos a contextualização do presente estudo, apresentando em seguida as nossas justificativas que nos levaram a fazer esse estudo. Prosseguimos, mencionando os objetivos desse trabalho e por fim, apresentamos a organização da dissertação.

1.1 - Justificativas

Atualmente estamos passando por período desafiador no ensino da matemática, os nossos alunos estão desestimulado, pois o método predominante ainda hoje é o tradicional, assuntos difíceis que se utilizam de imagens estáticas, principalmente no estudo da trigonometria, fazem com que os alunos de certa forma fiquem mais preocupados em decorar fórmulas do que aprenderem o significado dos conceitos matemáticos. Esse fato decorre devido as dificuldades dos alunos em compreender esses conceitos, as fórmulas e os algoritmos que são peças fundamentais para o entendimento dos objetos matemáticos que dependem dessas definições abstratas, a fim das aplicações dos entes trigonométricos como seno, cosseno, tangente, ciclo trigonométrico, entre outros assuntos abordados no trabalho.

Outro fator relevante da concorrência de atenção e do interesse do aluno são os entretenimentos digitais modernos, como redes sociais, aplicativos de celulares, vídeos aulas e outros tipos de informações oriundas da internet. Essa inserção digital tira de certa forma o foco dos discentes distanciando ainda mais dos assuntos ensinados na matemática, colocando o professor como mero expositor de ideias de um ensino baseado em conteúdo, onde a sala de aula é um espaço monótono e estagnado.

Como afirma Lima (1991) “É preciso duvidar, questionar, indagar, conjecturar. Procurar caminhos, imaginar construções, pesquisar interconexões, forçar o raciocínio, exercitar a mente”. Para que esse processo de ensino-aprendizagem dos assuntos estudados em matemática, principalmente os relacionados com a trigonometria tenham uma melhor importância, cabe ao professor procurar meios e instrumentos criativos e motivacionais, para despertar nos alunos interesses nos conteúdos, com o intuito de instigá-los a questionar e raciocinar, a fim de assimilar melhor o objeto matemático.

Diante desse panorama, o ensino de matemática conta com inúmeros recursos para melhorar esse quadro de ensino e aprendizagem dos alunos, enfatizando os softwares educativos, principalmente os trabalhos relacionados geometria dinâmica que têm mostrado ser um grande suporte na compreensão dos conceitos geométricos. Esses softwares apresentam ambientes interativos e abre a possibilidade de realizar as tradicionais construções geométricas ou trigonométricas com régua e compasso, com diversas vantagens como de interagir com as figuras, movimentando-as e assim poder realizar uma infinitos testes com uma única construção. Podendo dessa forma, auxiliar os professores em atividades e os alunos na construção de seu conhecimento, funcionando como agente motivador para despertar o interesse e entendimento deles, em consequência acaba direcionando os professores a inserir conteúdos digitais em suas aulas.

Em consonância com essas ferramentas digitais, atualmente a base para toda a educação básica no Brasil está inserida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que tem como meta incansável a aprendizagem de qualidade, nesse viés consta em sua proposta de ensino para matemática:

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BNCC pg. 276)

Com base nesse caminho podemos apresentar um valioso software muito procurado no ensino e aprendizagem chamado de *Geogebra*, uma ferramenta construtiva e criativa que usa da realidade virtual para entender os princípios matemáticos, as simulações apresentadas por esse software dão vida às abstrações, ou seja, simula experiências reais fazendo aguçar a curiosidade do aluno, tendo como principal proposito despertar no aluno a sua paixão pela matemática.

Segundo Sousa (2018) verifica-se o destaque do software de geometria dinâmica Geogebra, por se tratar de um software inovador que permite estudar a Geometria e Álgebra de maneira concomitante. Esse software é gratuito e de fácil instalação e manipulação tornando assuntos como por exemplo estudo da Trigonometria mais interessante, contribuindo para o processo de ensino aprendizagem dos nossos alunos.

Esse desafio de inserir a Geometria dinâmica através do Geogebra para que seja um auxilio no aprendizado dos alunos é fundamental que os professores estejam disponíveis a procurar diferentes maneiras de ensinar e aprender, desenvolvendo práticas pedagógicas com o uso das tecnologias, transformando o processo de ensino aprendizagem mais rico e eficiente. Dessa forma, uso da experiência de 10 (dez) anos de magistério e 2 (dois) anos como aluno do PROFMAT turma 2017 que durante a formação de graduação não tive contato com os softwares de geometria dinâmica, já durante o curso de mestrado, especificamente na disciplina de geometria analítica ministrada pela professora Drª Joelma Morbach tive a honra de ter esse contato com o *Geogebra*, nas aulas práticas, no laboratório de informática de matemática. Então, constatei de fato alguns significados que quando aluno de graduação não conseguia abstrair de minhas ideias, como por exemplo quando duas retas paralelas são coincidentes, pois na abstração não imaginava tal situação que através do ambiente interativo do programa, contribui consideravelmente para solução do problema e fez visualizar o caso, principalmente pelo meio do uso da visão 3D que executam movimentos na figura, como de rotação e translação, constatei o sentido que fazem as definições teóricas aprendidas durante as aulas. Ressalto que essa descoberta, despertou a curiosidade de escrever a monografia sobre software *Geogebra* relacionando com a Trigonometria, no propósito de melhorar o ensino e aprendizagem de forma mais prazerosa e interessante de compreender a matemática.

O uso dessa ferramenta leva os discentes para fora da sala de aula sem de fato sair dela, podendo observar as dificuldades e necessidades do nosso dia a dia, e que a matemática nos auxilia a resolver problemas, e também, comprovar todos os conceitos e teoremas abstratos estudados no ambiente de sala de aula apresentando aos alunos, através de experiências práticas. O escopo é propiciar condições para que consigam sintetizar significados aos conteúdos de trigonometria e desta forma transformar o aprendizado em momentos interessantes e agradáveis.

1.2 – Objetivos

O objetivo geral desta investigação prende-se em analisar a relevância do software Geogebra no ensino da trigonometria para alunos da educação básica.

Para que tenhamos subsídios na construção dessa dissertação existe a necessidade de procurar outros trabalhos na mesma linha de pesquisa analisando a importância desse software no ensino da trigonometria para docentes do ensino básico, principalmente os trabalhos disponíveis no banco de dissertações do site do profmat que vão nos enriquecer de conceitos na condução dessa monografia.

A questão principal que norteou a nossa pesquisa foi surgindo de acordo com questionamentos de minha vivência como professor, onde o aluno perguntava:

- Não existe uma maneira mais fácil de ensinar a trigonometria?

- Não consigo visualizar esse problema?

- Acho isso muito difícil?

Dessa maneira, a indagação foi elaborada da seguinte forma:

Quais as potencialidades e limitações do software Geogebra no ensino da trigonometria para alunos da educação básica?

Neste contexto, definimos os seguintes objetivos específicos deste trabalho de investigação:

- Analisar o ensino de trigonometria praticados atualmente e em consenso com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para implementação do software Geogebra aos alunos do ensino básico.
- Verificar vantagens e desvantagens do uso do software Geogebra para alunos do ensino básico.
- Organizar propostas de atividades com uso do Geogebra no ensino da trigonometria para alunos do ensino básico

Com esses objetivos específicos nosso trabalho volta-se de maneira a ofertar um caminho ao professor como forma de sugestão para aplicações futuras atividades em sala de aula, ou seja, um caminho para que o discente tenha subsídios em suas estratégias de ensino para não permanecer apenas no uso de pincel e quadro.

1.3 – Organização da Dissertação

O presente estudo organiza-se em quatro capítulos, nos quais dedicamos o capítulo 1 à introdução desta dissertação, o capítulo 2 aos fundamentos teóricos, o capítulo 3 ao *Geogebra* e o ensino da trigonometria, o capítulo 4 à apresentação das considerações finais.

De uma forma abreviada expomos os principais aspectos tratados em cada um dos referidos capítulos:

Capítulo 1, Introdução. Neste capítulo apresentamos uma breve justificativa, contextualizando sobre o assunto abordado, motivações pessoais e relevância para o ensino da matemática, também os objetivos do estudo e a organização da dissertação.

Capítulo 2, Fundamentos teóricos. Nesse capítulo abordaremos sobre o ensino da trigonometria com os conteúdos de alguns livros didáticos e a inserção da base nacional curricular comum (BNCC) e da geometria dinâmica.

Capitulo 3, O Geogebra e o ensino da trigonometria. Nesse capítulo exploramos as principais ferramentas do software e em seguida apresentamos as propostas de atividades utilizando o programa no ensino para alunos do ensino médio.

Capítulo 4, Considerações Finais. Neste capítulo apresentamos as principais conclusões desenvolvidas no estudo e expomos algumas considerações relevantes a temática abordada.

2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 - Estudos sobre a Trigonometria

Nesse tópico faremos alusão de relatos históricos sobre a Trigonometria de acordo com sua evolução, o ensino utilizando os livros didáticos e uma análise do ensino da trigonometria em sala de aula.

2.1.1 – Breve Histórico

Nesse primeiro momento abordaremos um pouco da história da Matemática, relacionado a Trigonometria que com o passar do tempo desempenhou um papel importantíssimo para sociedade na resolução de problemas práticos, principalmente ligados à Astronomia, agrimensura, engenharia e navegação.

Segundo Barbosa e Soares (2007) a origens da trigonometria são incertas, tem-se relatos que no antigo Egito por volta de 1650 a.c. apresenta um texto matemático denominado de Papiro de Rhind com 85 problemas, sendo o de número 56 um dos mais antigos registros conhecidos sobre Trigonometria relacionado a construção de pirâmides, também teria surgido nessa época um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, chamado groma, que facilitou de certa forma edificar monumentos na civilização egípcia.

Essas situações tratadas sobre as pirâmides, referente a construção em que era essencial manter a mesma inclinação nas faces, requisito que levou os construtores a manter constantes as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos, cujos catetos eram determinados pela sobreposição de blocos de pedra. Atualmente, essas razões entre os lados de um triângulo retângulo são chamadas de razões trigonométricas.

Outro achado que contribui para a origem da trigonometria foi a tábua cuneiforme chamada de Plimpton 332, datada por volta de 1800 a.C. atribuídos a civilização babilônica que para alguns matemáticos contém as ternas pitagóricas, mas recentemente em 2017 pesquisadores de Sidney, concluíram que as quatro colunas e 15 fileiras representam uma tabela de trabalho trigonométrico mais antiga e mais precisa do mundo, sendo usada na topografia e no cálculo de templos, palácios e pirâmides.

Continuando os trabalhos iniciados pelos babilônios, a civilização grega deixou importantes contribuições para o estudo da trigonometria, como, por exemplo, a estimativa das distâncias entre o Sol e a Terra e entre o Sol e a lua, feita por Aristarco, por volta de 260 a.C., mesmo que seus números estivessem muito longe dos valores modernos que somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesimal, a trigonometria desvinculou-se da Astronomia, passando a ser um ramo independente, onde os aparelhos chamados de teodolitos hoje usados por agrimensores e engenheiros que tiveram sua “primeira versão” (com esse nome) no século XVI também colaboraram para essa divisão. Outra exemplificação foi sobre a estimativa da medida do raio da Terra, feita por Eratóstenes, por volta de 200 a.C. No entanto, o primeiro estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e o comprimento da corda correspondente, que resultou na primeira tabela trigonométrica, é atribuído a Hiparco de Niceia (180 a.C.-125 a.C.), que ficou conhecido como “pai da trigonometria”. Outra contribuição determinante para evolução da trigonometria foi através de Pitágoras, (séc. VI a.C.) filósofo e matemático grego que nasceu na cidade de Samos, fundou uma escola em Crotona (colônia grega na península itálica), cujos princípios foram determinantes para evolução geral da matemática e da filosofia ocidental. A observação dos astros sugeriu-lhes a idéia de que uma ordem domina o universo. Nessa visão, também concluiu que a terra é esférica, estrela entre as estrelas que se movem ao redor de um fogo central. Alguns pitagóricos chegaram até a falar da rotação da Terra sobre seu eixo, mas a maior descoberta de Pitágoras ou dos seus discípulos (já que há obscuridades que cercam o pitagorismo devido ao caráter religioso e secreto da irmandade) refere-se às relações entre os lados do triângulo retângulo, que consiste em provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Os egípcios já sabiam que um triângulo cujos lados são 3, 4, 5 tem ângulo reto, mas os pitagóricos foram os primeiros a conseguir uma prova da proposição geral.

Esse ramo da matemática denominado Trigonometria que vem do grego trígónon, que significa triângulo, e métron, que significa medida. Esse termo foi criado em 1595 pelo matemático Bartholomeus Pitiscus para designar o estudo das relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

Já os termos seno e cosseno muito utilizados na trigonometria apareceram com o povo hindu a partir de problemas de astronomia que precisavam ser solucionados por meio de uma reta que une dois pontos extremos de um arco de circunferência. O seno era chamado de Jya, significando corda em hindu, e traduzido para o latim como sinus em 1150. O termo co-sinus (cosseno) surgiu no século XVII para designar o seno complementar do ângulo. Entre os árabes, astrônomos como Al-Battano (858-929) e Abu-Wafa (940-997), deram importantes contribuições para a Trigonometria, devendo-se a eles a ampliação das Funções Circulares às seis funções atualmente em uso e o estabelecimento de suas relações. O aspecto atual da Trigonometria foi dado por Euler (1707-1783) quando introduziu a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo.

Dessa forma, encontramos a Trigonometria como um ramo da matemática que mais se desenvolveu devido o estudo continuo das ofertas de teorias e técnicas, e depois da separação da astronomia ocorreu uma interação entre teoria e aplicação, corroborou para uma integração continua entre a análise numérica e a geometria. Algumas considerações algébricas foram muito importantes e essenciais, embora o simbolismo predominante na álgebra só tenha sido introduzido no século XVI. Assim a história da trigonometria mostra o crescimento de três ramos da matemática em seu interior: a álgebra, a análise e a geometria. Então, além do grande avanço na matemática, essa ferramenta é atualmente utilizada em diversas áreas do conhecimento, tais como: as navegações marítimas e aéreas, engenharias, na arquitetura, astronomia, meteorologia e a sismologia, na física e até mesmo nas ciências da saúde com diversas aplicações.

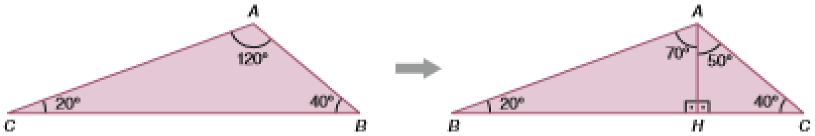
2.1.2 – Trigonometria em sala de aula

Nesse segundo momento apresentaremos os conteúdos básicos de Trigonometria que são requisitos iniciais para a proposta desse trabalho, a fim da realização das atividades propostas na sequência didática. As definições a seguir são baseadas em obras de IEZZI et al (2016), PAIVA (2016) e DANTE (2016) retiradas da proposta do programa nacional do livro e do material didático (PNLD) do ano de 2018.

Triangulo Retângulo

Qualquer triângulo pode ser separado, por uma de suas alturas, em dois triângulos retângulos. Por exemplo:

Figura 1: Triângulos



Fonte: Paiva

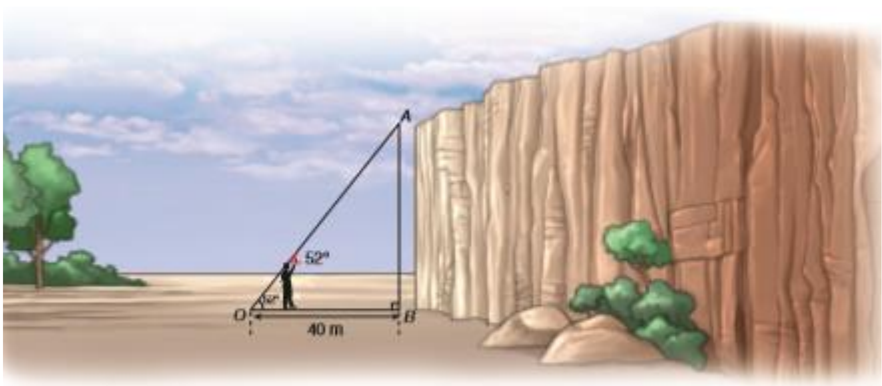
Assim, se conhecermos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo retângulo, conheceremos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo qualquer. Por isso, daremos início ao estudo dessas relações em triângulos retângulos, consideradas relações fundamentais pela Trigonometria.

Razões trigonométricas

Para medir a altura AB de uma encosta vertical, cuja base está em um terreno plano e horizontal, um topógrafo fixou um ponto O do terreno, conforme o esquema abaixo, e mediu o ângulo AOB e a distância OB, obtendo 52m e 40 m, respectivamente.

Daí:

Figura 2: Esquema do problema



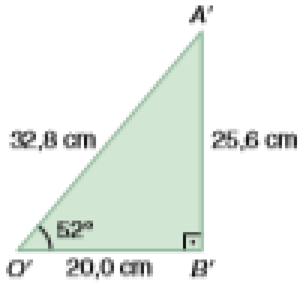
Fonte: Paiva

A seguir, o topógrafo desenhou um triângulo O’A’B’ qualquer, retângulo em B’ e com o ângulo agudo AOB medindo 52m. Então, com uma régua graduada, mediu os lados desse triângulo, obtendo os valores indicados ao lado. Como os triângulos A’O’B’ e AOB são semelhantes (pelo caso AA), seus lados correspondentes são proporcionais. Assim, o topógrafo calculou a altura h da encosta pela proporção a seguir, em que 40 m foi substituído por 4.000 cm:

$$\frac{h}{25{,}6} = \frac{4000}{20}$$

$$h = 5120\ cm$$

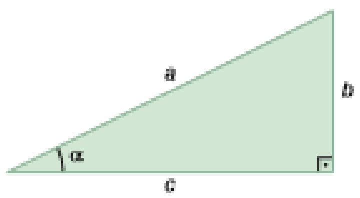
Figura 3: Triângulo



Fonte: Paiva

Dessa forma, ele descobriu que a encosta tinha 5.120 cm de altura, ou 51,20 m. A ideia de relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos, levou alguns matemáticos a construir tabelas com as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos para várias medidas a de ângulos agudos, como os da tabela abaixo. Note que se o topógrafo tivesse a seu dispor essa tabela, não precisaria desenhar o triângulo semelhante ao triângulo AOB.

Figura 4: Triângulo Retângulo



Fonte: Paiva

Figura 5: Tabela das razões

α	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$
40°	0,642788	0,766044	0,839010
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1,000000
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942

Fonte: Paiva

Atualmente, as tabelas das razões trigonométricas são substituídas pelas calculadoras eletrônicas. Para facilitar a identificação dessas razões, chamadas de razões trigonométricas, foi adotada a seguinte nomenclatura:

- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida a e a medida da hipotenusa foi chamada de seno de a;
- a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida a e a medida da hipotenusa foi chamada de cosseno de a;
- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida a e a medida do cateto adjacente a a foi chamada de tangente de a.

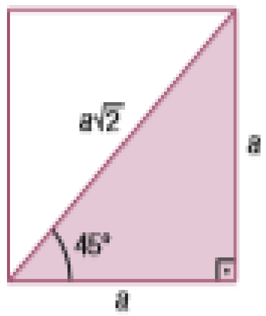
Usamos sen(a), cos(a) e tg(a) para abreviar seno, cosseno e tangente de a, respectivamente.

Ângulos notáveis

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecer o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30º, 45º e 60º, que chamaremos de ângulos notáveis.

Vimos que a medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois ângulos de 45º. Assim, temos:

Figura 6: Quadrado



Fonte: Paiva

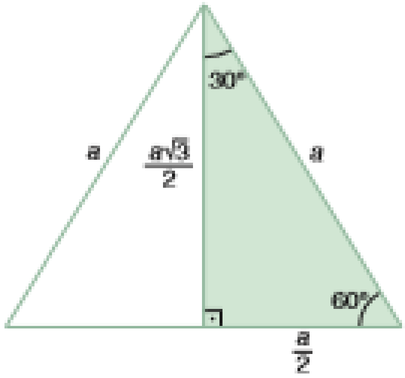
$$\boldsymbol{sen 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{tg 45° = \frac{a}{a} = 1}$$

Ângulos de 30º e 60º, a medida de cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vimos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.

Figura 7: Triângulo Equilátero



Fonte: Paiva

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60º, temos:

$$\boldsymbol{sen30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Temos, ainda, que 60º é o complemento de 30º. Logo:

$$\boldsymbol{sen60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{tg60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}}$$

Figura 8: Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Paiva

Lei dos senos

Acompanhe a seguinte situação-problema: Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância. Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, o teodolito, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 1208. Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve 100 m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 458. Com essas informações, o engenheiro ficou satisfeito, pois ele já conseguiria calcular a distância entre os postes. Vamos descobrir como a seguir.

Figura 9: Vista da realidade e modelo matemático do problema

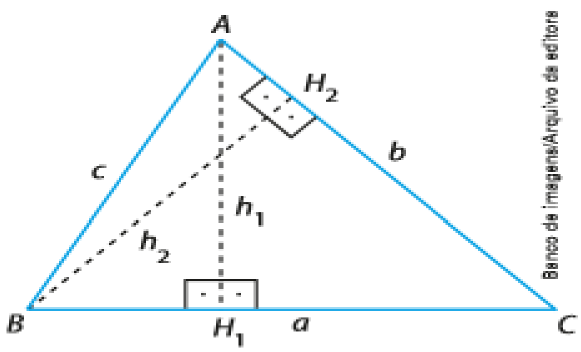
Fonte: Dante

O triângulo AOB é obtusângulo, e a resolução desse problema consiste em determinar a medida do lado AB. Para resolvê-lo, vamos estudar a lei dos senos, onde em qualquer triangulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Acompanhe a seguir a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo. Consideremos o triângulo ABC acutângulo e duas de suas alturas: AH_1 e BH_2.

Figura 10: triângulo acutângulo



Fonte: Dante

No triângulo ACH_1, retângulo H_1, temos que:

$$\boldsymbol{senC} = \frac{\mathrm{H1}}{\boldsymbol{b}} \rightarrow \mathrm{H1} = \mathrm{b}.\boldsymbol{senC}$$

No triângulo ABH_1, retângulo H_1, temos que:

$$\boldsymbol{senB} = \frac{\mathrm{H1}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow \mathrm{H1} = \mathrm{c}.\boldsymbol{senB}$$

Comparando as duas respostas, temos que:

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{senB}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{senC}}$$

No triângulo BCH_2, retângulo H_2, temos que:

$$\boldsymbol{senC} = \frac{\mathrm{H2}}{\boldsymbol{a}} \rightarrow \mathrm{H2} = \mathrm{a}.\boldsymbol{senC}$$

No triângulo ABH_2, retângulo H_2, temos que:

$$\boldsymbol{senA} = \frac{\mathrm{H2}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow \mathrm{H2} = \mathrm{c}.\boldsymbol{senA}$$

Comparando as duas respostas, temos que:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{senA}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{senC}}$$

Concluímos, então:

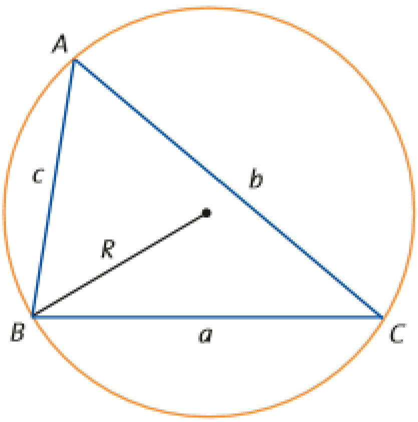
$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Observações:

a) Pode-se provar que a razão $\frac{medida\ do\ lado\ a}{seno\ do\ \hat{a}ngulo\ oposto\ de\ a}$ é constante e igual a 2R, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo considerado. A mesma relação vale para os outros dois lados do triângulo.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

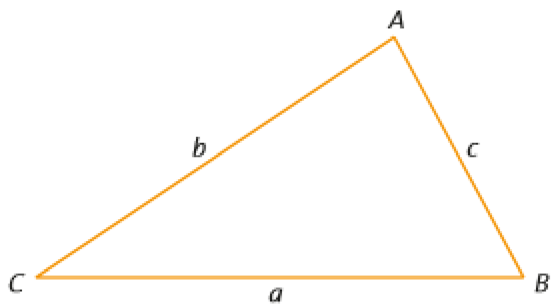
Figura 11: Circunferência Circunscrita ao Triângulo



Fonte: Dante

b) Quando o enunciado de uma questão se refere a um triângulo ABC, devemos colocar o lado a oposto ao ângulo A, o lado b oposto ao ângulo B, e o lado c oposto ao ângulo C, como na figura abaixo:

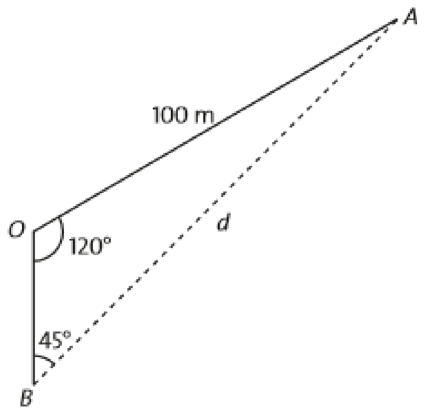
Figura 12: Triângulo ABC qualquer



Fonte: Dante

c) Agora temos condições de resolver a situação-problema apresentada na página 13. Leia-a novamente e acompanhe a resolução a seguir. Retomando o modelo matemático, temos:

Figura 13: Vista do modelo matemático



Fonte: Dante

Aplicando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{\mathbf{100}}{\boldsymbol{sen45°}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{sen120°}} = \frac{\mathbf{100}}{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}} \rightarrow \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{d} = \mathbf{100}\sqrt{\mathbf{3}} \rightarrow \boldsymbol{d} = \frac{\mathbf{100}\sqrt{\mathbf{3}}.\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2}}.\sqrt{\mathbf{2}}} \rightarrow$$

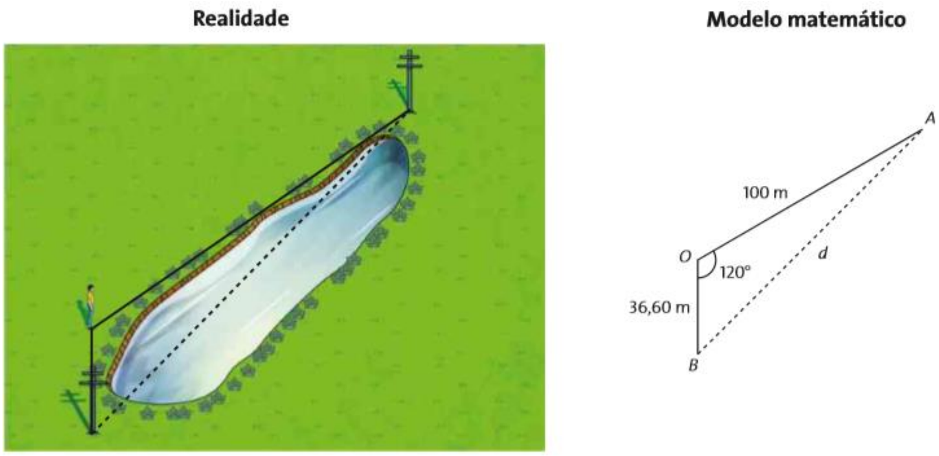
$$\boldsymbol{d} = \mathbf{50}\sqrt{\mathbf{6}} = \mathbf{122{,}47}\boldsymbol{m}$$

Então a distância entre os postes é de, aproximadamente 122,47 metros.

Lei dos cossenos

Voltemos ao nosso engenheiro e seu problema em medir a distância entre os postes, sugerido no início do item 3. Se tivesse encontrado alguma dificuldade para obter o ângulo de 458, ou mesmo que não quisesse obtê-lo, o engenheiro poderia ter pedido ao seu segundo auxiliar que medisse a distância do local onde ele estava até o poste mais próximo. Assim, além do valor do ângulo (1208) que o engenheiro já havia medido e da distância entre o poste mais afastado e ele (100 metros), o engenheiro teria obtido a nova distância, de 36,60 metros, entre o poste mais próximo e ele. Essas informações também permitiriam calcular a distância desejada. Observe as representações novamente.

Figura 14: Vista da realidade e modelo matemático



Fonte: Dante

Pela representação, observamos que o problema consiste em determinar a medida de um lado de um triângulo, quando conhecemos as medidas dos outros dois lados e do ângulo oposto ao lado cuja medida queremos encontrar. Para resolvê-lo, precisamos estudar a lei dos cossenos, enunciada a seguir:

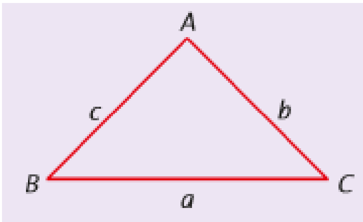
- Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja,

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos}\hat{A}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C}$$

Figura 15: Triângulo

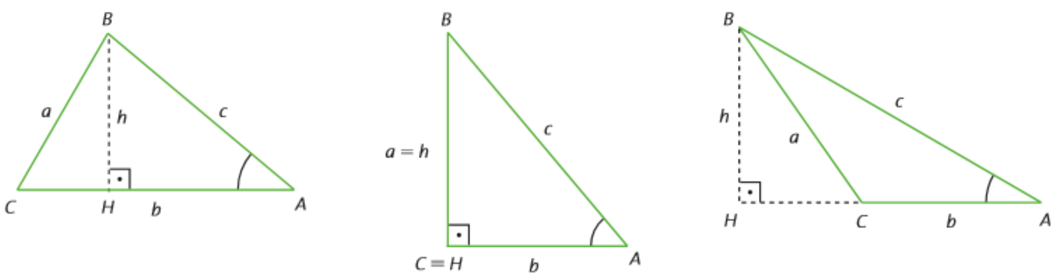


Fonte: Dante

Vamos provar apenas a primeira das relações acima, considerando o ângulo A agudo; a demonstração das outras relações é análoga.

O ângulo agudo A pode estar em um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Figura 16: um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo.



Fonte: Dante

Vamos demonstrar a lei dos cossenos usando o triângulo acutângulo. Traçando a altura BH, obtemos os triângulos retângulos ABH e CBH.

No ΔABH, temos:

$$\boldsymbol{cos}\hat{A} = \frac{\boldsymbol{AH}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow \boldsymbol{AH} = \boldsymbol{c.cos}\hat{A}$$

$$\boldsymbol{c^2} = \boldsymbol{h^2} + \boldsymbol{AH^2} \rightarrow \boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{AH^2} \rightarrow \boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{c^2} - (\boldsymbol{c.cos}\hat{A})^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{c^2cos}\hat{A}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{I})$$

No ΔCBH, temos:

$$\boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{h^2} + \boldsymbol{CH^2} \rightarrow \boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{h^2} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{AH})^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{a^2} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c.cos}\hat{A})^{\boldsymbol{2}} \rightarrow$$

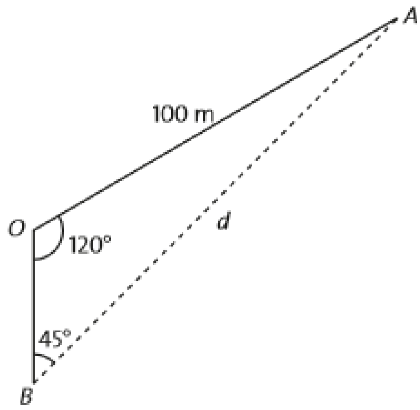
$$\boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{2bc.cos}\hat{A} - \boldsymbol{c^2.cos}\hat{A}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{II})$$

Igualando I ao II, temos que:

$$\boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{2bc.cos}\hat{A} - \boldsymbol{c^2.cos}\hat{A}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{c^2cos}\hat{A}^{\boldsymbol{2}} \rightarrow \boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{2bc.cos}\hat{A}$$

Agora estamos em condições de resolver a situação-problema colocada no início deste item. Retomando o modelo matemático, temos:

Figura 17: Modelo matemático



Fonte: Dante

$$\boldsymbol{d^2 = 100^2 + (36,6)^2 - 2.100.36,6.cos120°} \rightarrow \boldsymbol{d^2 = 15000} \rightarrow \boldsymbol{d = \sqrt{15000}} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{d = 122,47}$$

Radiano: unidade de medida de ângulo

Os arcos de circunferência têm comprimento e medida angular. A medida do comprimento de um arco pode ser expressa em metros, centímetros, etc. A medida angular de um arco é, em geral, expressa em graus ou radianos. Por definição, a medida angular de um arco é a medida do ângulo central subtendido por ele.

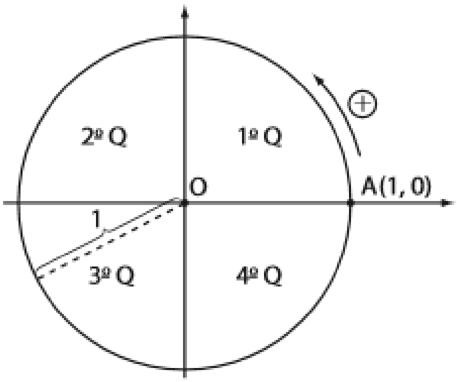
- Grau: O ângulo de um grau é o ângulo correspondente a de um ângulo reto. O arco de um grau é o arco que subtende um ângulo central de, de modo que corresponde a da circunferência.
- Radiano: Considere uma circunferência cujo raio tem medida de comprimento igual a r, em uma determinada unidade. Nessa circunferência, um arco de um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento também é igual a r, na mesma unidade. Assim, se retificássemos o arco, transformando-o em um segmento de reta, poderíamos verificar que ele teria o mesmo comprimento do raio dessa circunferência. Um ângulo de um radiano (1 rad) é um ângulo congruente a um ângulo central subtendido por um arco de um radiano. A medida do comprimento de arco e a medida do ângulo central são proporcionais; então, a medida do comprimento do arco e a medida angular do arco também são

proporcionais. Considerando-se a circunferência cujo raio tem medida igual a r, se por definição um arco de medida 1 rad tem comprimento de medida1r, um arco de 2 rad tem medida de comprimento igual a 2r, e, generalizando, um arco de a rad tem medida de comprimento?

Ciclo Trigonométrico

Fixemos dois eixos perpendiculares cruzando-se em O e orientados conforme as indicações: o vertical, para cima, e o horizontal, para a direita. No sistema assim descrito, consideremos uma circunferência com centro O e raio unitário (isto é, raio de medida igual a 1). O círculo limitado por essa circunferência fica dividido em quatro partes iguais denominadas quadrantes (Q) e indicadas na figura por 1°Q, 2°Q, 3°Q e 4°Q. Vamos con1vencionar que todos os arcos tomados nessa circunferência têm origem no ponto A(1, 0) — interseção da circunferência com o semieixo horizontal positivo — e o sentido positivo é o anti-horário. Construímos, deste modo, a circunferência trigonométrica.

Figura 18: Circunferência dividida em quadrantes



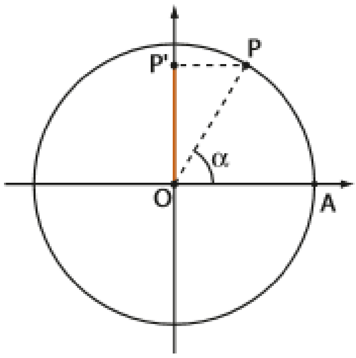
Fonte: Iezzi

Razões Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real a, 0 < a < 2p. Definimos o seno de a como a ordenada do ponto P:

Observe que, projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'. Considerando o sentido positivo (“para cima”) do eixo vertical e tomando o segmento OP', podemos também definir o seno de a como a medida algébrica desse segmento, isto é,

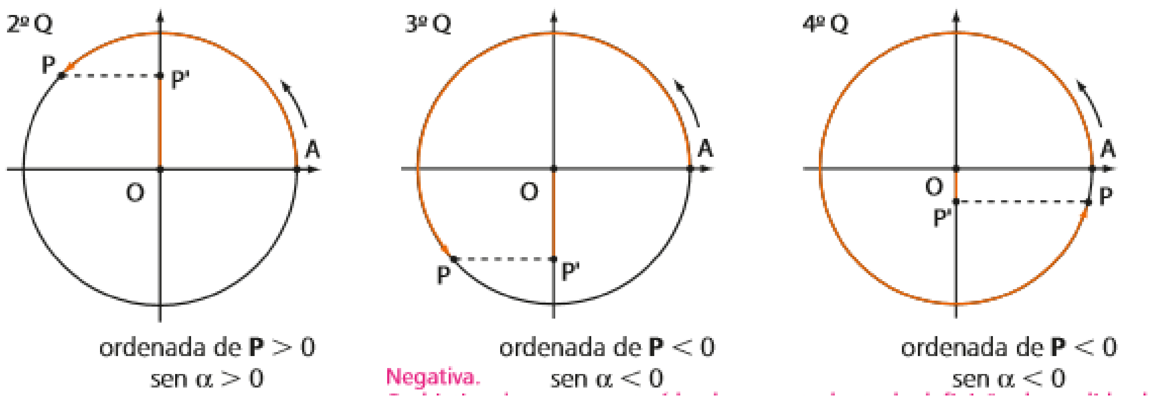
Figura 19: Circunferência para definir o seno



Fonte: Iezzi

Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado eixo dos senos. O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo “para cima” do eixo dos senos, observe o sinal do seno de um número real α em cada quadrante, à medida que varia a posição de P (P é imagem de α).

Figura 20: Seno na circunferência



Fonte: Iezzi

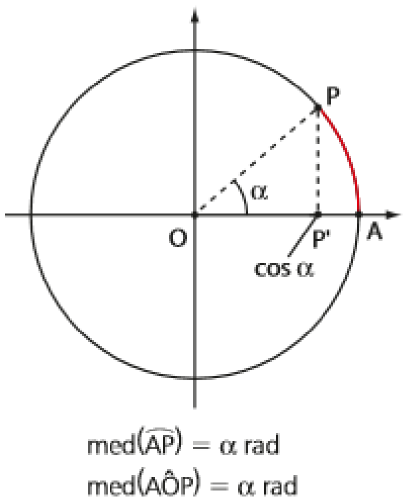
Cosseno

Seja P um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α, 0 < α < 2π. Definimos o cosseno de α como a abscissa do ponto P: cosα=abscissa de P.

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto P'. Considerando o sentido positivo (“para a direita”) do eixo horizontal e tomando o segmento OP', podemos também definir o cosseno de α como a medida algébrica desse segmento, isto é: cosα=med (OP')

A partir desse momento, o eixo horizontal da circunferência trigonométrica será chamado eixo dos cossenos.

Figura 21: Circunferência para definir cosseno

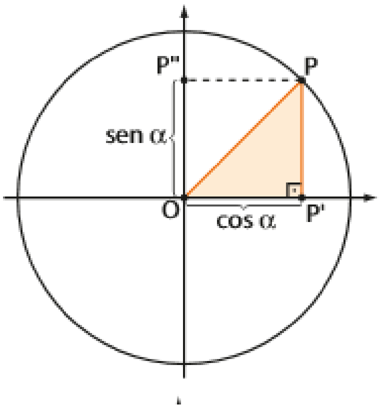


Fonte: Iezzi

Relação fundamental da trigonometria

Do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, temos a relação fundamental da trigonometria: $(sena)^2 + (\cos a)^2 = 1$, sendo a a medida de um dos ângulos agudos do triângulo. Vamos agora ampliar essa relação para a circunferência trigonométrica, mostrando que ela é válida para todo número real pertencente ao intervalo [0, 2π]. Seja P a imagem de um número real α pertence [0, 2π]. • Se P pertence ao primeiro quadrante, temos que:

Figura 22: Circunferência relação fundamental



Fonte: Iezzi

2.1.3 – Analise do ensino da Trigonometria

Nesse item faremos uma abordagem sobre o ensino de Trigonometria praticado em sala de aula no ensino básico através de estudos realizados por monografias no Profmat e o conjunto de aprendizagem essências inseridas pela base nacional curricular comum (BNCC) para que sejam parâmetro na implementação do uso de um software no ensino e aprendizagem nas aulas de matemática.

Para Freitas (2016) pressupõe-se que o aluno aprenda por “repetição”, considera, ainda, que a repetição ou reprodução estando correta ocorra a aprendizagem. Nessa colocação o autor foi muito pontual no que ocorre, pois muitos de nós ouvimos de nossos professores de matemática dizendo “repitam o que estou fazendo”, ainda hoje muitos docentes acreditam que é a melhor maneira de ensinar muitos alunos. Ocorre que atualmente a concorrência com recursos tecnológicas está muito acirrada e as aulas tradicionais não atrai mais os alunos e o professor como mediador do ensino têm a função essencial de motivador para que essas aulas se tornem atraentes.

De acordo com a realidade exposta acima retratou Rego (2016) que a utilização do laboratório por parte do professor estimula o aluno a buscar o conhecimento. O simples fato de sair da rotina faz com o que esse estudante se sinta desafiado. Essa forma de ensinar está plantada na base nacional curricular comum (BNCC) que trata:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BNCC p.471)

Com esse tratamento a BNCC recria de certa forma o ensino para se adequar no tempo e espaço, estimula o aluno no ensino fundamental e quando chega no ensino médio o foco central é viabilizar o projeto de vida dos estudantes e continuidade nos estudos, sendo a escola uma ponte para organizar essas práticas.

Isso vem de encontro com a proposta desse trabalho, em que a BNCC contempla o uso da computação e das tecnologias digitais para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores:

> pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação (p.474)

Esse direcionamento inseri o aluno no mundo digital propiciando envolvimento e aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, tendo futuramente uma fluência no uso dessa tecnologia para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Portanto, na BNCC, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. São definidas competências e habilidades, nas diferentes áreas, apenas que permitem aos estudantes:

- Buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais; apropriar-se das linguagens da cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdo em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho;

- Usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdo em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e

- Utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

Essa mudança é evidente como expõe Rego (2016)

> quando o professor se depara com a mudança e a trata como um desafio e oportunidade, ganha a possibilidade de propiciar a um número maior de alunos um ambiente enriquecedor de aprendizagem, não sendo apenas uma obrigação que atrapalhe suas atividades diárias e sim uma atividade que tem relação com a vida do aluno e que trará oportunidades de crescimento pessoal e profissional (p.36).

Para que haja de certa forma a aplicação desses parâmetros o professor tem que sair da sua zona de conforto, procurar outros meios principalmente os digitais, como retrataremos no próximo tópico buscando a inserção dos meios digitais na sala de aula, através da Geometria Dinâmica, contemplando as diretrizes da BNCC para ensino, já devidamente apresentadas nesse trabalho, para que o ensino da matemática praticado em diante seja mais próximo da realidade.

2.2 - Estudos sobre Geometria Dinâmica.

Atualmente os computadores garantiram, definitivamente um espaço na escola, seja ele para uso da internet, de softwares educativos ou para educação à distância, eles estão presentes no cotidiano da grande maioria das escolas tanto pública como privada.

Esse fato não indica uma mudança na metodologia do ensino, mesmo com o avanço da tecnologia, a presença maciça dos computadores não gerou transformações na pratica dos professores que de certa forma preferem permanecer na zona de conforto, para sua atuação seja dentro de uma área onde tudo é conhecido, previsível e controlável, mesmo cientes de que sua atuação não favoreça a aprendizagem de seus alunos, como colocam Borba & Penteado (2001).

Mesmo com todos esses entraves, nos últimos anos, a área de novas tecnologias aplicadas na educação tem avançado consideravelmente, principalmente na matemática, com os softwares de geometria dinâmica têm auxiliado na compreensão dos conceitos geométricos. Esses novas ferramenta computacionais criam ambientes interativos que proporcionam realizar as tradicionais construções geométricas com régua e compasso, fazendo interação com as figuras, movimentando-as e assim poder realizar vários testes com uma única construção.

Essa nova forma de observar as formas aliado a matemática, são ferramentas recentes, a Geometria Dinâmica recebeu essa denominação pela característica dinâmica da possibilidade de se passar de um desenho a outro pelo deslocamento quase contínuo dos objetos livres. Com o dinamismo, as propriedades geométricas da figura aparecem como propriedades mecânicas dos desenhos. A percepção age sobre as características dinâmicas dos desenhos geométricos. Segundo Isotoni (2005) “O nome “Geometria Dinâmica” (GD) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Por isso que este nome é entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, considerada estática, pois se o aluno realizar uma construção e desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho, diferente se for confeccionado na geometria dinâmica que pode ser manipulado diretamente nas representações criadas.

Para Almeida (2010) Muitas pesquisas em educação matemática, tem mostrado que o uso da geometria dinâmica como recurso didático não só favorece a exploração e aquisição de conceitos geométricos, como também apresenta vantagens em relação a construção com régua e compasso no ambiente de lápis e papel. Essa possibilidade de movimentação facilita a análise de situações antes nem pensáveis, que eram feitas com régua e compasso.

Dentre os muitos softwares de geometria dinâmica daremos ênfase nessa pesquisa ao Geogebra. Os estudantes dessa geração são familiarizados com as mídias e recursos computacionais, transitam tranquilamente entre as redes sociais e aplicativos, estando à vontade no mundo digital. É natural, para eles, a interatividade com esse tipo de recurso. O GeoGebra, por sua vez, por ser um software de Geometria Dinâmica, permite que os próprios usuários manipulem seus mecanismos de simulações. Ao fazer isso, o aluno interage com o objeto estudado.

Em contrapartida, das virtudes e qualidades do uso da geometria dinâmica segundo Freitas (2016) o número limitado de computadores da escola e, muitas vezes, máquinas desatualizadas, o que dificultou um pouco o trabalho. Essa realidade exposta pelo autor refere-se a uma escola pública do município de Andradina, no interior do Estado de São Paulo, sabemos que essas situações relatadas ocorrem praticamente em todo país, os noticiários trazem diversos casos similares ao colocado e o próprio professor que convive com essa realidade de nossas escolas públicas sabe bem sobre esse problema que causa ao profissional desmotivação e acaba deixando até mesmo de aplicar os seus projetos relacionados a tecnologia digital.

Esse cenário terá mudanças lentas, mas para minimizar essa situação o uso .do celular pode ajudar muito no melhoramento desse quadro, pois em pesquisas recentes do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) que 77,1% da população, com 10 anos ou mais de idade, tinham um aparelho de celular próprio em 2016. Quando esses dados são cruzados com os que foram disponibilizados pela Agência nacional de telecomunicações (Anatel) no período, temos uma média de 1,7 aparelho/linha ativa por usuário. Com essa notícia podemos ter uma alternativa para uso da Geometria Dinâmica em sala de aula com uso do celular, pois esses softwares estão disponíveis para esses aparelhos eletrônicos.

Em seguida, faremos uma abordagem especifica sobre o Geogebra para conhecer programa, manuseio das ferramentas básicas e as propostas de atividades.

3. GEOGEBRA E O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

3.1 Geogebra

Geogebra é um programa livre de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, com início do projeto em 2001 na University of Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University. Por ser um software livre, os colaboradores podem fazer alterações em seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando, aprimorando atualizando ferramentas nele disponível ou acrescentando novas ferramentas, com o compromisso de disponibilizarem tais melhoramentos de maneira livre também.

Segundo Assunção (2015) quanto as atividades no computador, outros softwares matemáticos, diferentes do GeoGebra, podem ser utilizados. Sugerimos o GeoGebra pela facilidade de manipulação e pela pluralidade de ferramentas. Dessa forma, que propomos a escolha do software Geogebra por ser uma multiplataforma e pela disponibilidade do programa para usuários não comerciais podendo atualmente ser utilizado em computadores, notebook, tablets e em celulares smartphone.

Outro recurso ofertado muito interessante é o GeoGebra Pre-Release onde se tem acesso ao programa on-line, desta forma o usuário pode fazer o uso do programa sem ter que instalá-lo na máquina, como ele roda em múltiplas plataformas o aluno poderá utilizá-lo tanto na escola como na sua residência, na lan-house, ou seja, em qualquer lugar que tenha acesso a um computador conectado a internet e possua a máquina virtual Java instalada, caso contrário ele pode fazer a instalação pela própria página do Geogebra. A versão Web Start for Java 5 or 6, permite que se obtenha as atualizações do programa a cada vez que o mesmo é utilizado conectado à internet, oportunizando ao usuário usufruir de ferramentas novas, correção de problemas internos do programa, uma vez que o Geogebra é um software livre qualquer programador pode fazer sua contribuição. Caso não esteja conectado a internet a versão Pre-Realese funciona perfeitamente off-line. O site GeoGebraWiki é uma fonte de materiais educacionais livres para o aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra. Uma pré-visualização de alguns trabalhos criados com o aplicativo podem ser encontradas na seção em português do próprio GeoGebraWiki1.

Este leque de possibilidades de integrar em um mesmo software ferramentas de geometria e álgebra configura ao Geogebra o local de destaque no campo de softwares educacionais aliado ainda a condição de software livre e multiplataforma. A seguir segue uma lista reduzida das ferramentas disponíveis no Geogebra.

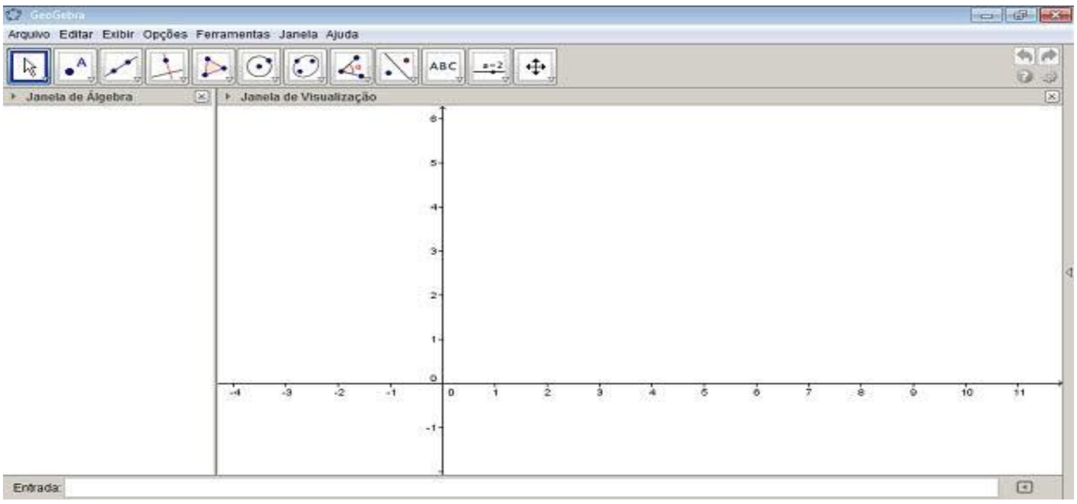
3.1.1 - Conhecendo o Programa:

O Geogebra é um programa bastante intuitivo e auto-explicativo, adequado a usuários com conhecimentos avançados em informática ou para iniciantes, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental de sua utilização. Por ser um software livre há colaboração de vários programadores inclusive brasileiros os quais disponibilizaram uma versão totalmente em português, o que facilita muito sua utilização em nosso país.

3.1.2 - Conhecendo a barra de ferramentas:

A janela apresentada abaixo é a tela de trabalho do Geogebra, onde podem ser observados na parte superior os botões das ferramentas disponíveis, desta forma o trabalho é desenvolvido apenas com o uso do mouse, usando desta forma o aspecto geométrico do programa. Na parte inferior temos a janela de Entrada, neste caso os comandos são dados via teclado, desta forma podem-se definir variáveis, equações, limites e outras tantas funções matemática, ou seja, a parte algébrica do software, um diferencial importante, visto que, pode-se desta forma, representar o mesmo ente matemático de duas maneiras, a geométrica e a algébrica.

Figura 23: Vista do Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor

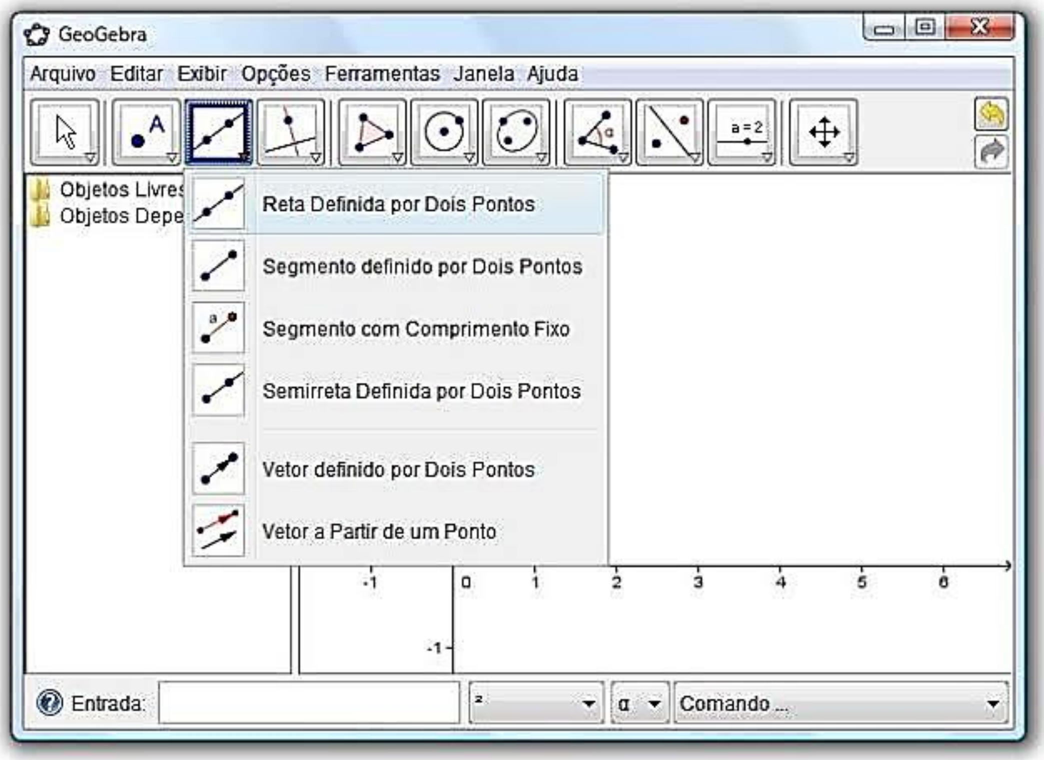
A barra de ferramenta (no detalhe) possui além da função apresentada, outras funções que podem ser selecionadas via mouse, esta barra pode sofrer alterações, pois constantemente está sendo atualizado com outras ferramentas que também podem ser criadas pelo usuário.

Figura 24: Ferramentas do Geogebra

Fonte: Elaborada pelo autor

As opções das ferramentas logo abaixo possuem descrições que facilitam o uso e auxiliam na fixação da definição matemática do comando, desta forma o usuário ao mesmo tempo em que constrói a figura geométrica estuda as suas propriedades.

Figura 25: Opções de ferramentas I



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26: Opções de ferramentas II

Fonte: Elaborada pelo autor

Com o objetivo de explorar estas ferramentas no próximo tópico, serão propostas atividades que servirão para aprimorar alguns conhecimentos matemáticos e ambientar-se a utilização do programa, sendo que são possibilidades de utilização do mesmo.

3.1.3 - Atividades para o ensino de trigonometria por meio da plataforma do software Geogebra.

As dificuldades dos alunos apontam para a necessidade de introdução de metodologias que possam efetivamente contribuir de forma dinâmica com o ensino e a aprendizagem dos referidos sujeitos no que tange aos conteúdos de Matemática.

Em busca de uma superação para as dificuldades, faço a proposta desta atividade de ensino de acordo com Xavier (2007) que possibilitem a interação entre alunos e objetos matemáticos geométricos por meio da utilização de artefatos computacionais.

A atividade a seguir está pautado no uso do software Geogebra, pois este possibilita recursos que potencializam os processos mentais básicos de um indivíduo como os atos de abstrair, refletir, intuir, estabelecer, relacionar, generalizar, etc fundamentais para a construção do pensamento matemático.

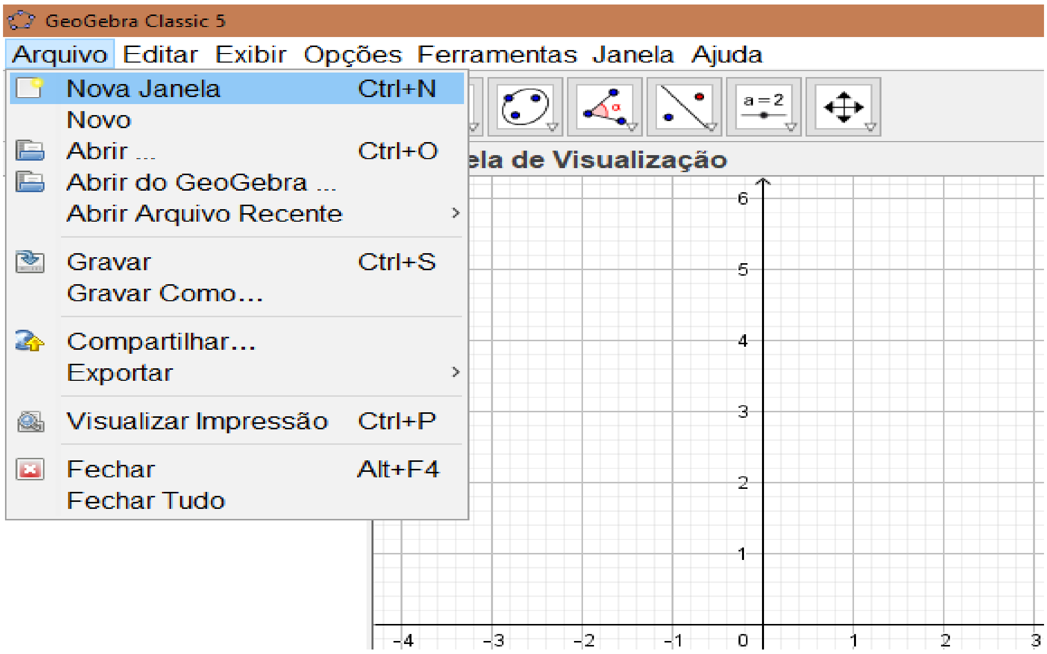
ATIVIDADE 01: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

OBJETIVO: Analisar, experimentalmente, as relações existentes entre os elementos de um triângulo retângulo.

PROCEDIMENTOS:

1 - Peça uma “Nova Janela”, conforme abaixo;

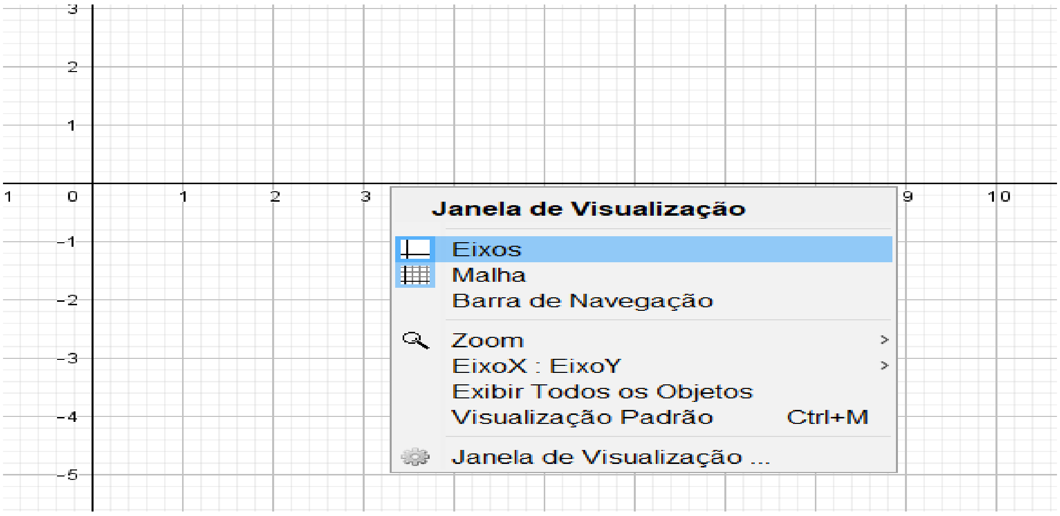
Figura 27: Geogebra “Nova Janela”



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Caso necessário “mostrar eixos”, de acordo com a figura abaixo;

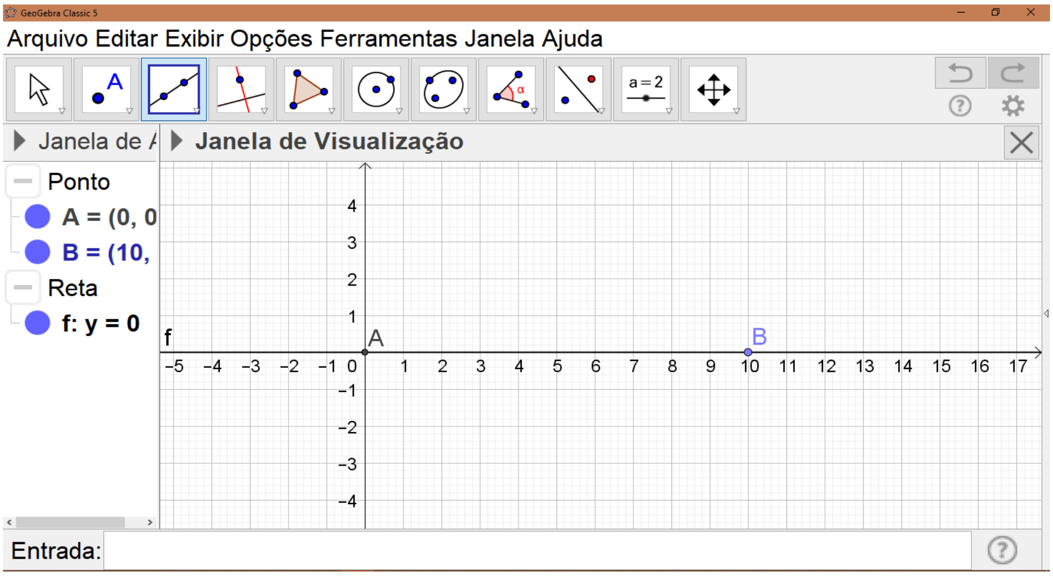
Figura 28: Geogebra “mostrar eixos”



Fonte: Elaborada pelo autor

3 – Trace uma reta que passe pelos pontos (0,0) e (10,0). O objetivo deste passo é que tenhamos uma reta que seja coincidente com o eixo das abscissas, conforme a figura abaixo;

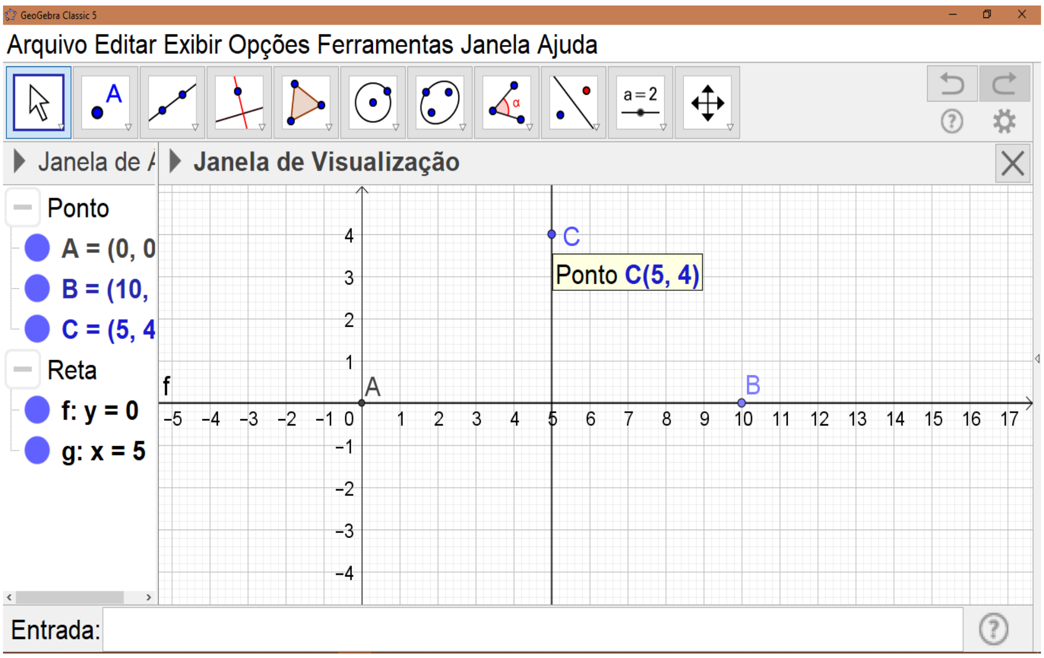
Figura 29: Geogebra pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

4 – Trace uma reta perpendicular a reta criada anteriormente e que passe pelos pontos (5,0) e (5,4). Neste passo o propósito é criarmos uma reta que seja perpendicular à primeira reta e paralela ao eixo das ordenadas, conforme abaixo;

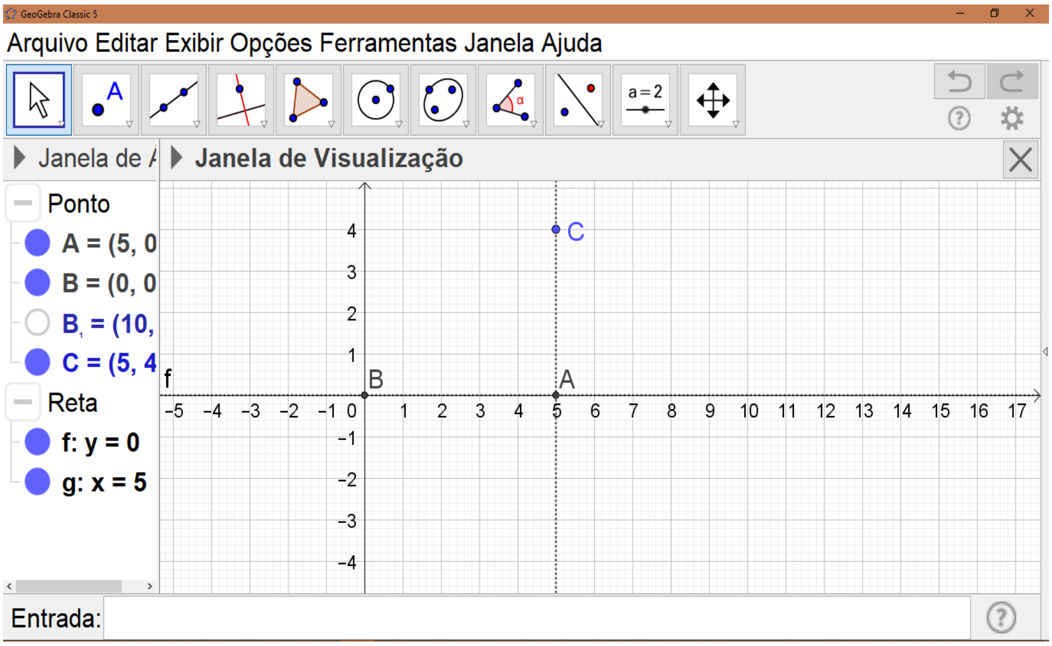
Figura 30: Geogebra reta perpendicular



Fonte: Elaborada pelo autor

5 – Modifique a espessura de ambas as retas para pontilhado . Agora clique em cima do pontos (5,0), (0,0) e (5,0) um de cada vez, e altere o nome dos pontos para A, B, C respectivamente, de acordo com a figura abaixo;

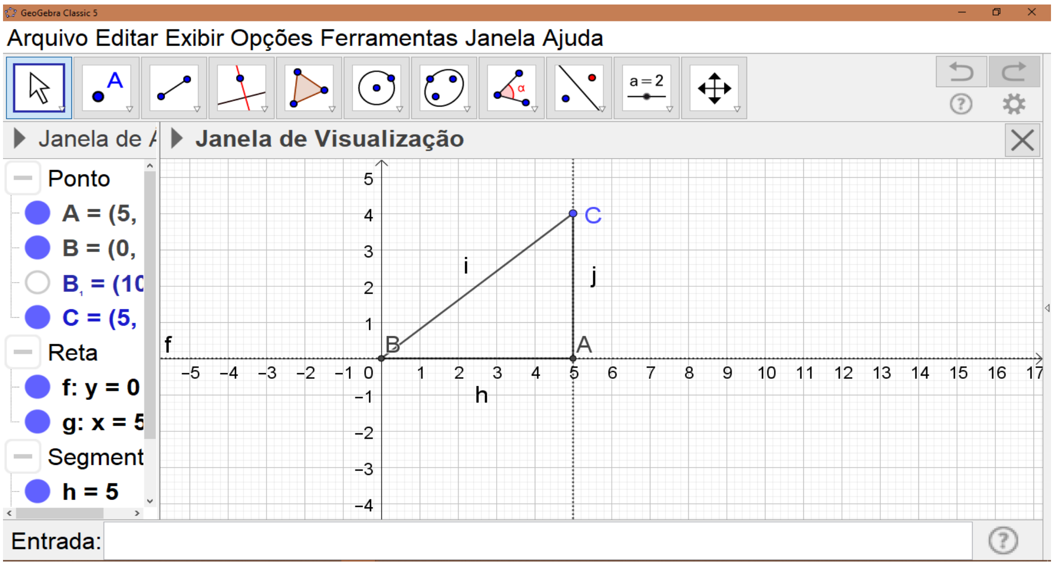
Figura 31: Geogebra nomeando pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

6 – Trace três segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, conforme figura abaixo;

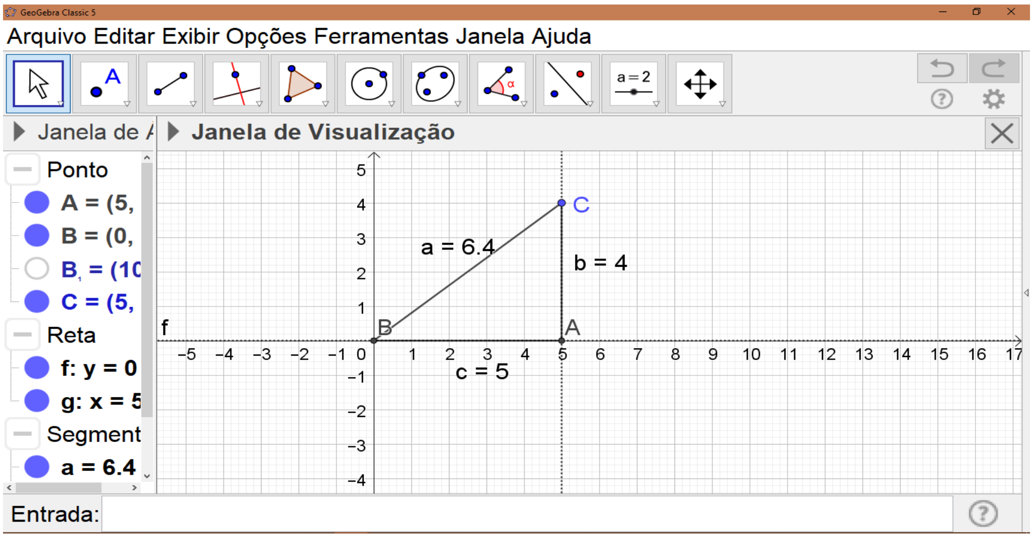
Figura 32: Geogebra Segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Altere a espessura dos segmentos, use negrito, e nomeie os seguimentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente por c, a e b, de acordo com a figura em seguida;

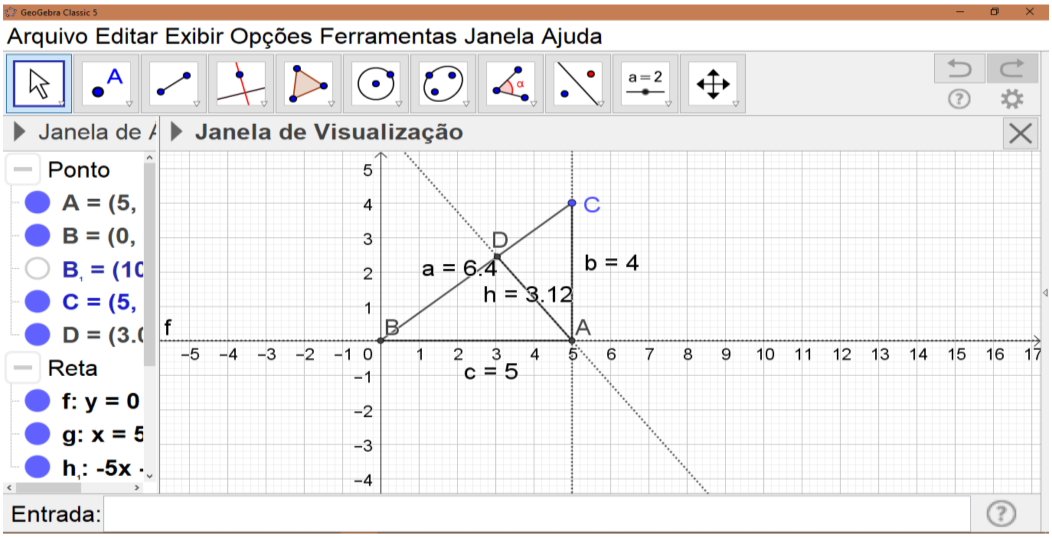
Figura 33: Geogebra alteração de segmento



Fonte: Elaborada pelo autor

8 – Trace uma perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ e que passa pelo vértice A. Altere a espessura dessa perpendicular para pontilhado e marque o ponto de intersecção dessa perpendicular com o seguimento $\overline{BC}$ e nomeie de D. Em seguida trace o seguimento $\overline{AD}$ e nomeie como h, de acordo com figura abaixo;

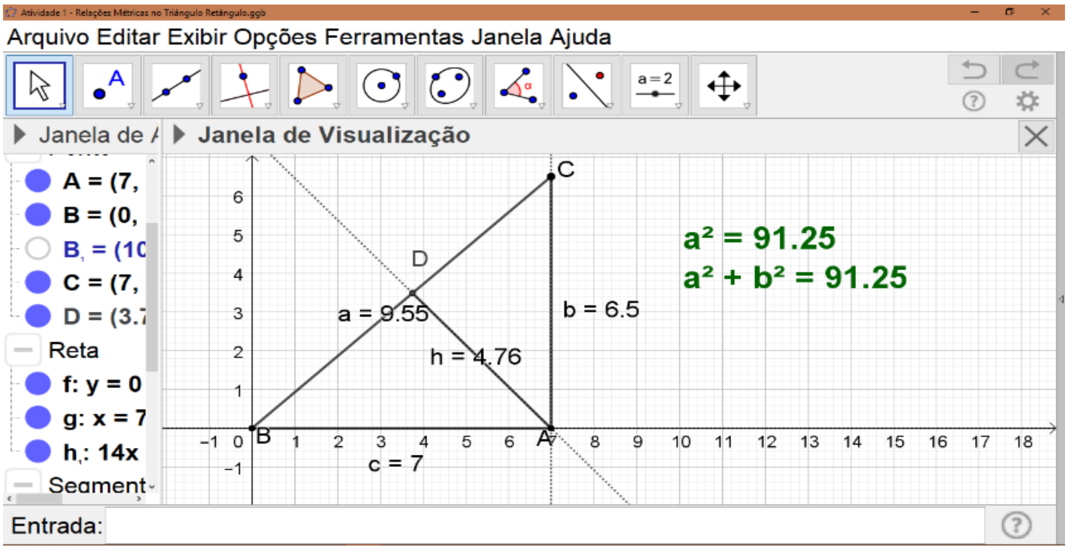
Figura 34: Geogebra traçando segmento e nomeando



Fonte: Elaborado pelo autor

9 – Ative a ferramenta “Expressão Aritmética” e clique em qualquer ponto da área de trabalho. Ao abrir a janela “Editar expressão” calcule o valor de a^2 (Explanação: a2, Expressão Aritmética: a*a ou a^2, cor verde, espessura grossa, exibir nomes, mostra valores, usar negrito). Ative novamente a ferramenta expressão, clique bem ao lado da expressão anterior e calcule o valor de b^2+c^2 (Explanação: a2 + c2, Expressão Aritmética: b*b+c*c ou b^2+c^2, cor verde, espessura grossa, exibir nomes, mostra valores, usar negrito), como logo abaixo;

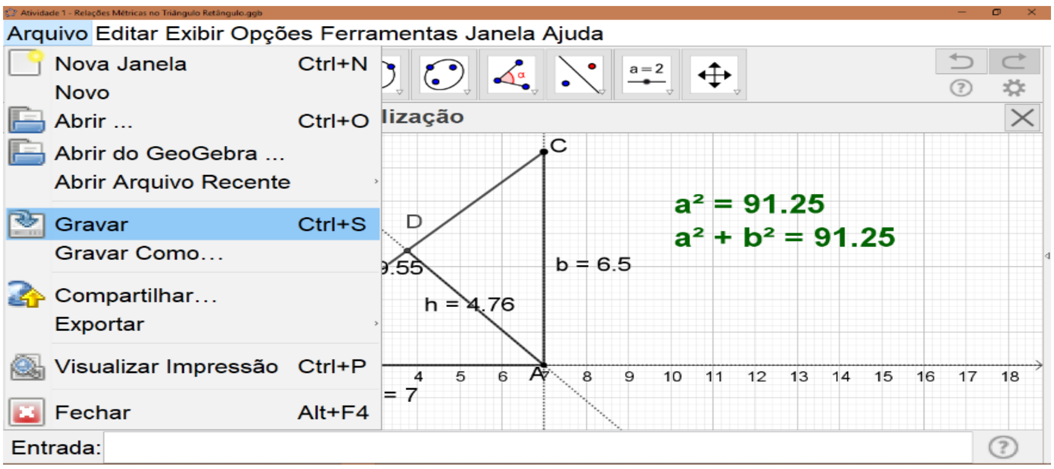
Figura 35: Geogebra expressão numerica



Fonte: Autor

10 – Salve a construção, conforme abaixo:

Figura 36: Geogebra salvando construção



Fonte: Autor

ACOMPANHAMENTO DE APRENDIZAGEM:

1 – Mova o ponto “C” de modo a obter diferente medidas dos elementos do triângulo retângulo. Feito isso faça uma comparação entre os valores obtidos para $\mathbf{a^2}$ **e** $\mathbf{b^2+c^2}$**.** O que podemos concluir?

2 – Realize os mesmos procedimentos e faça uma comparação entre os valores de $\mathbf{c^2}$ e **a x m**, **a x h** e **b x c**, $\mathbf{b^2}$ e **a x n** e entre $\mathbf{h^2}$ e **m x n.** O que podemos concluir?

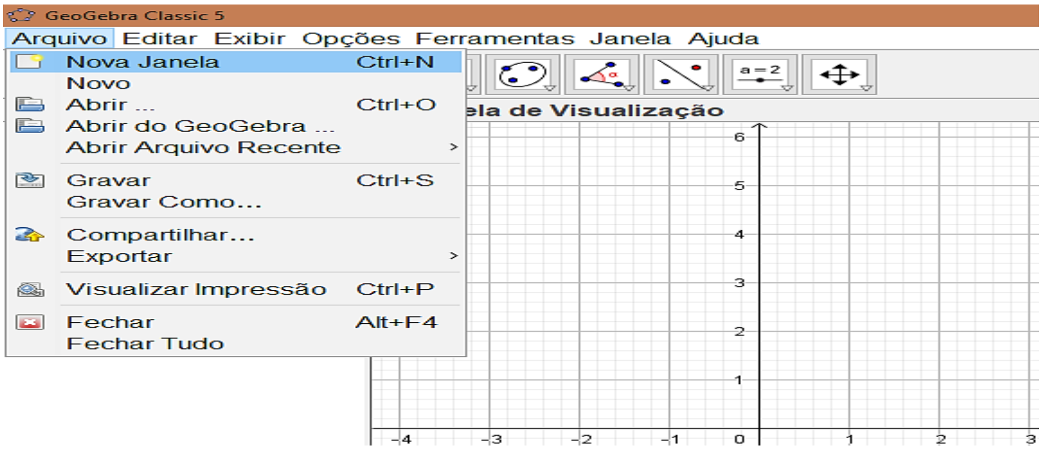
ATIVIDADE 02: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

OBJETIVO: Analisar experimentalmente as relações trigonométricas no triangulo retângulo.

PROCEDIMENTOS:

1 - Peça uma “nova construção”, como logo abaixo;

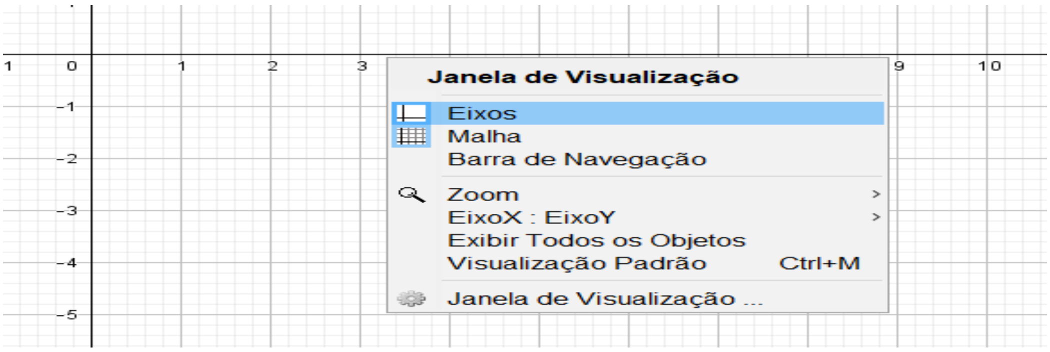
Figura 37: Geogebra nova construção



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Caso necessário “mostrar eixos”, de acordo com a figura abaixo:

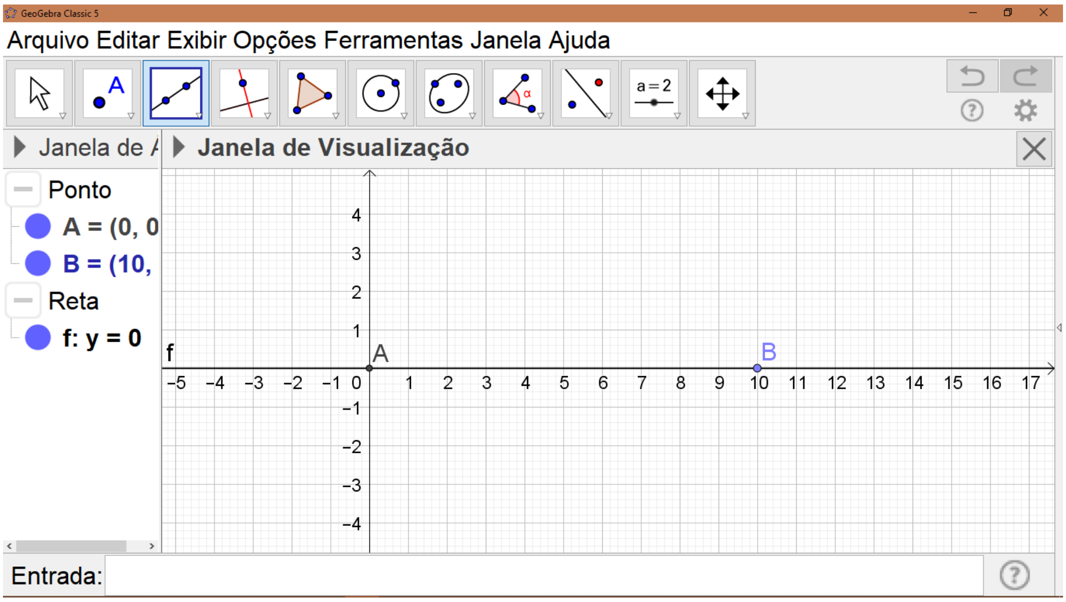
Figura 38: Geogebra eixos



Fonte: Elaborada pelo autor

3 – Trace uma reta que passe pelos pontos (0,0) e (10,0). O objetivo deste passo é que tenhamos uma reta que seja coincidente com o eixo das abscissas, como logo abaixo;

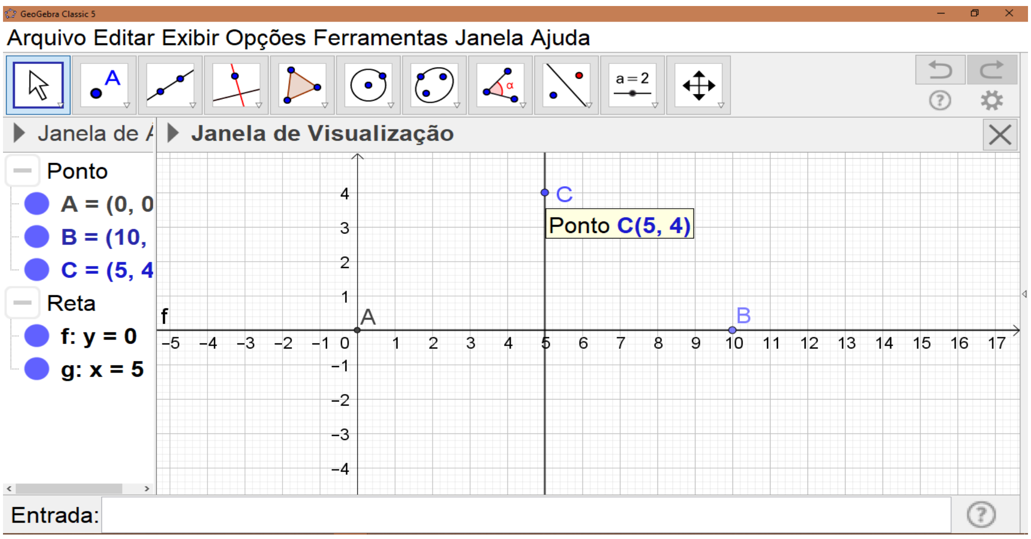
Figura 39: Geogebra traçando retas



Fonte: Elaborada pelo autor

4 – Trace uma reta perpendicular a reta criada anteriormente e que passe pelos pontos (5,0) e (5,4). Neste passo o propósito é criarmos uma reta que seja perpendicular à primeira reta e paralela ao eixo das ordenadas, conforme abaixo;

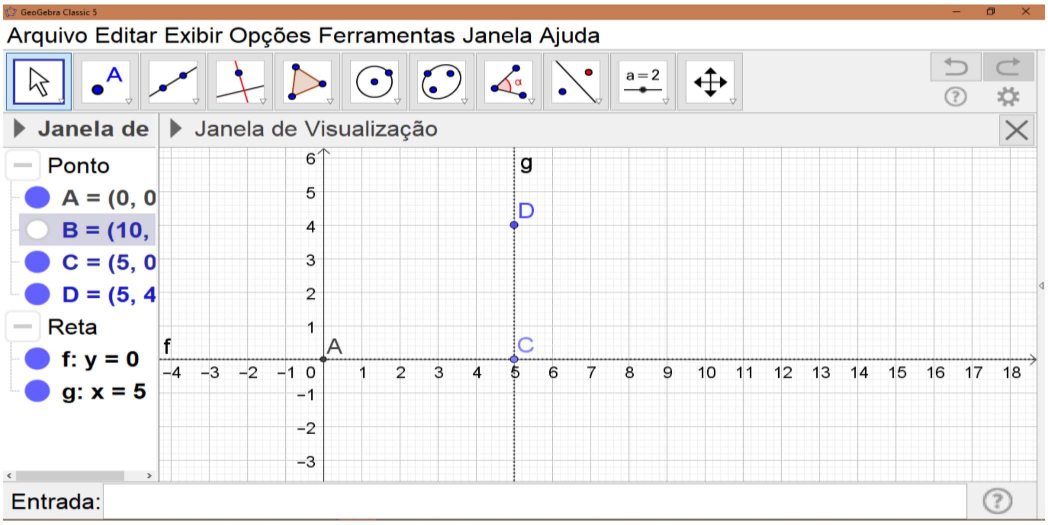
Figura 40: Geogebra retas



Fonte: Elaborada pelo autor

5 – Ative a ferramenta “Editar objeto”  e clique em cima das retas criadas. Ao aparecer à janela de edição mude unicamente a espessura de ambas as retas para pontilhado . , de acordo com a figura abaixo;

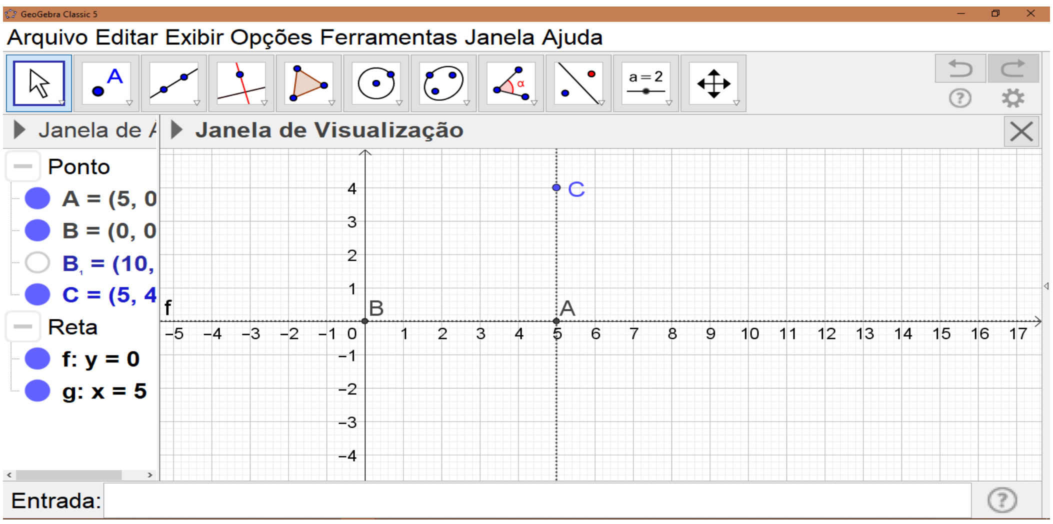
Figura 41: Geogebra editar objeto



Fonte: Elaborada pelo autor

6 – Com a ferramenta “Editar Objeto” ainda ativa clique em cima do pontos (5,0), (0,0) e (5,0) um de cada vez, e ao aparecer a janela “Editar Ponto” altere o nome dos pontos para A, B, C respectivamente e ative a ferramenta “exibir nomes dos objetos” , conforme o comando abaixo;

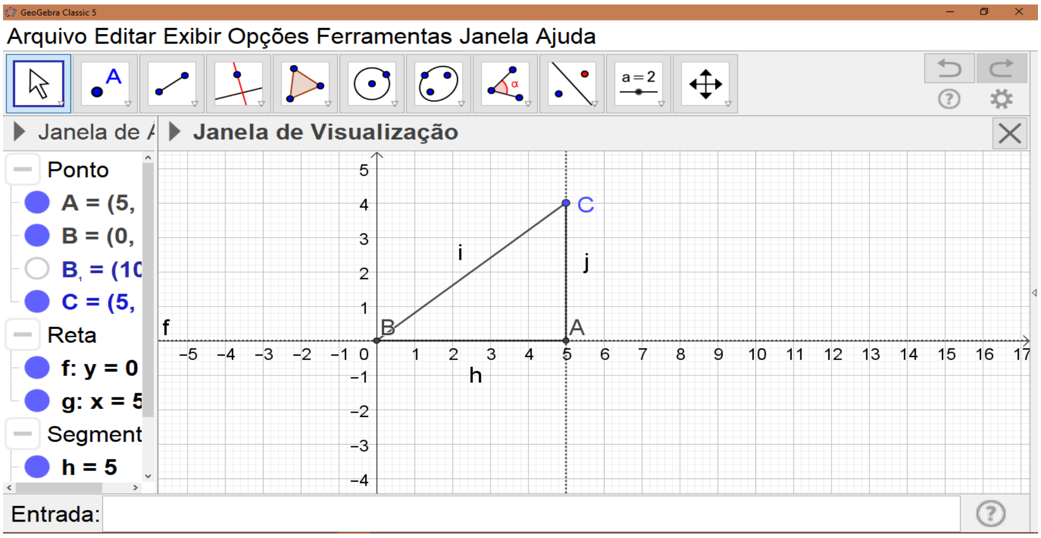
Figura 42: Geogebra editar ponto



Fonte: Elaborada pelo autor

7 – Trace três segmentos  : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, conforme o comando em seguida;

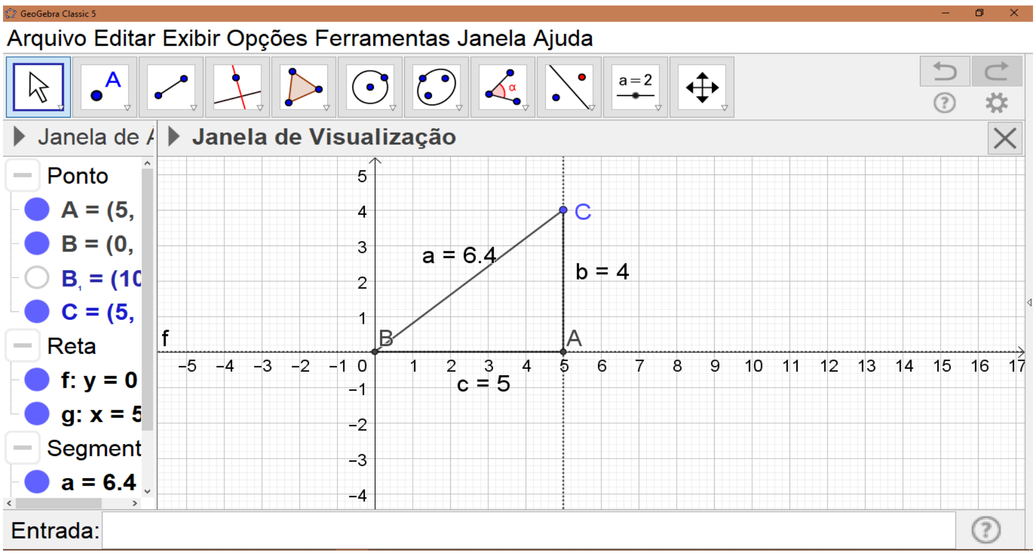
Figura 43: Criar segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

8 - Ative novamente a ferramenta "Editar objeto"  e clique em cima dos seguimentos. Altere a espessura, use negrito, e nomeie os seguimentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente por c, a e b, como logo em seguida;

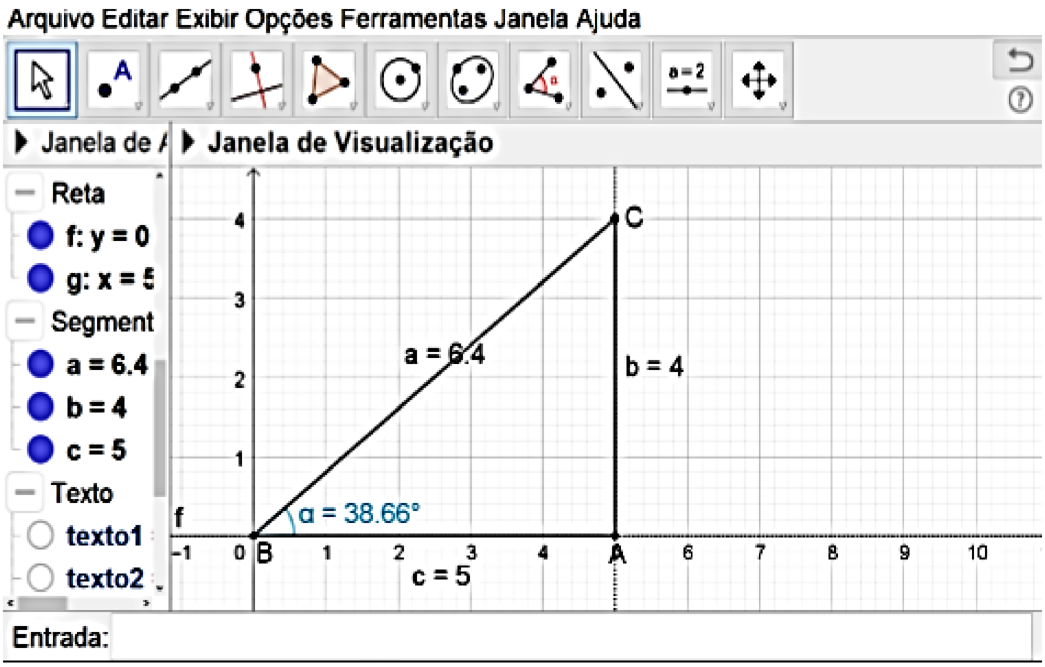
Figura 44: Objeto editar



Fonte: Elaborada pelo autor

9 – Ative a ferramenta “ângulo” e clique em cima dos pontos A, B e C respectivamente para criarmos o ângulo, conforme figura em seguida;

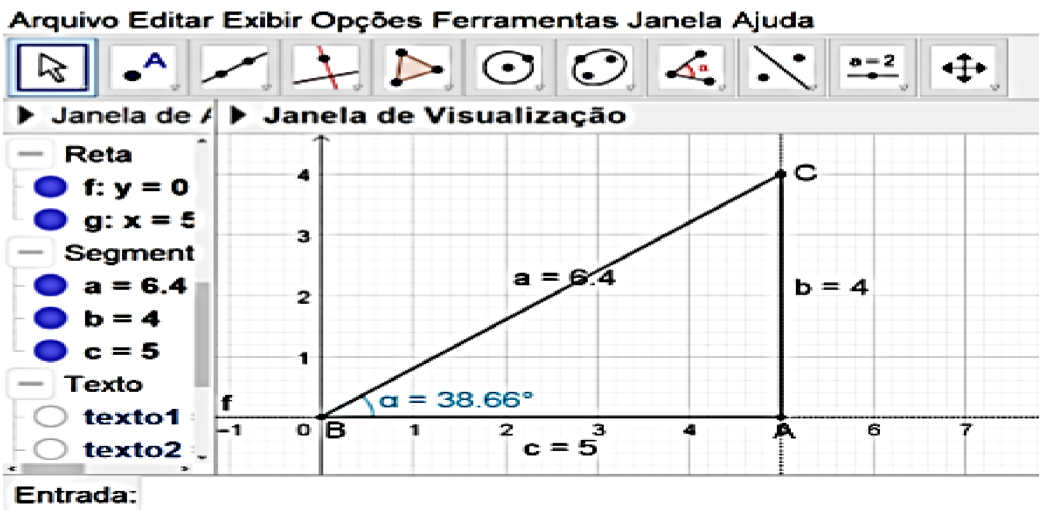
Figura 45: Ângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

10 – Em “editar objeto” clique no ângulo criado na janela de edição altere o nome para (comando no programa \a ou \A), espessura, exibir nome, mostrar valor, negrito e tamanho, como logo abaixo;

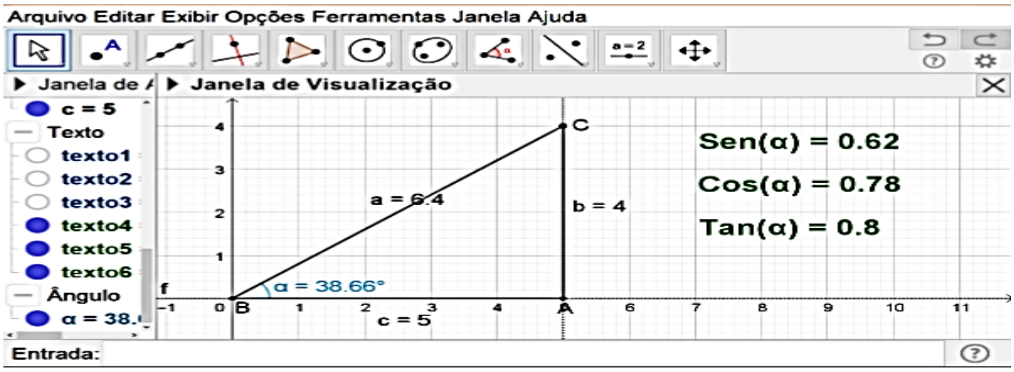
Figura 46: Editar figura



Fonte: Elaborada pelo autor

11 – Ative a ferramenta “expressão aritmética”. Clique no ponto (8,7) e ao aparece o a janela ”editar expressão” digite no campo “expressão” o comando “sin(\a)” assim como no campo “explanação” digite “seno \a”. Nesta etapa definimos o valor correspondente ao ângulo. Repita o mesmo procedimento para calcular o cosseno (Expressão: b/a, Explanação: cos(\a)) e a tangente (Expressão: tg(\a) , Explanação: tan \a), conforme o comando em seguida;

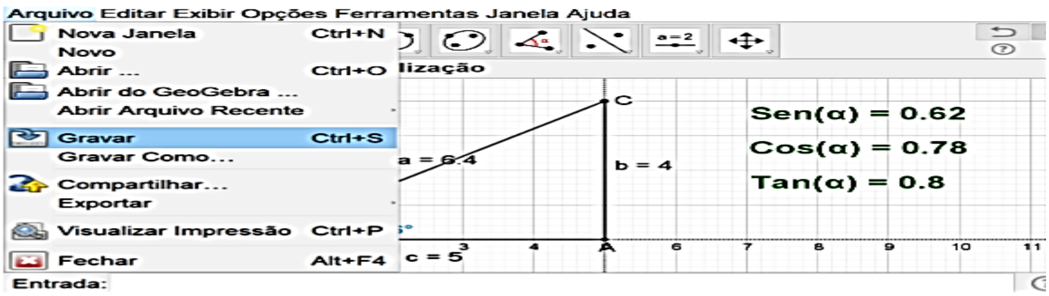
Figura 47: Ative ferramenta



Fonte: Elaborada pelo autor

12 – Salve a construção, de acordo com a figura abaixo;

Figura 48: Salvar trabalho



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>**ACOMPANHAMENTO DE APRENDIZAGEM:**</u>

1 – Ative a ferramenta “mover ponto” e movimente o ponto **c** de modo a obter diferentes valores para α e com auxílio da ferramenta expressão calcule o valor da razão entre $\frac{b}{a}, \frac{c}{a} e \frac{b}{c}$, comparando com os valores obtidos para o seno α, cosseno de α e tangente de α. O que podemos concluir?

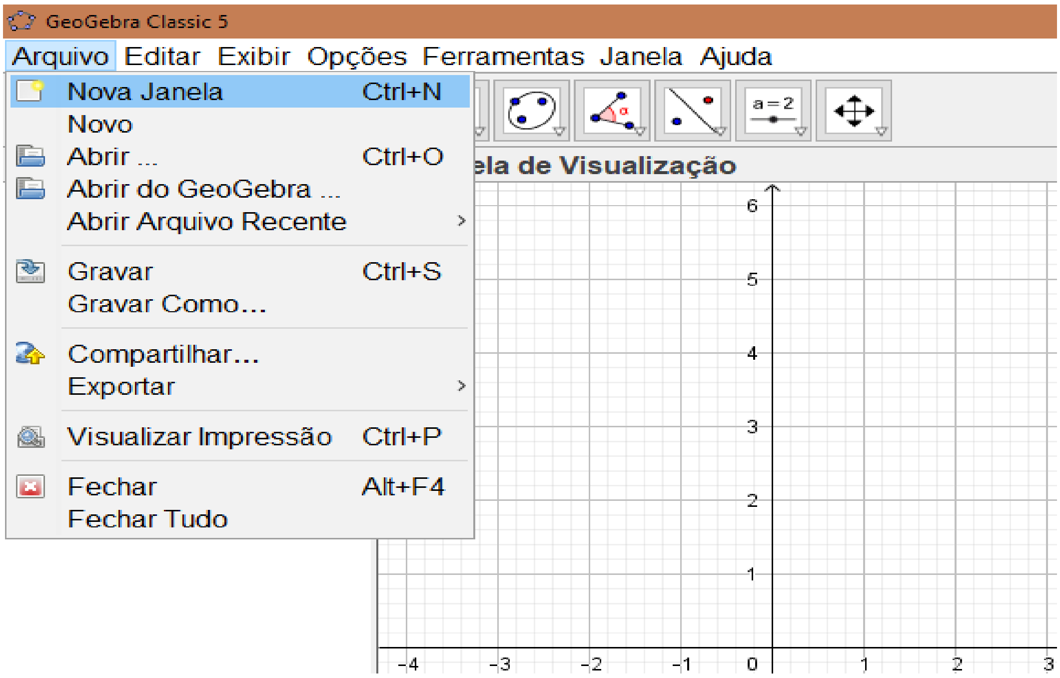
ATIVIDADE 03: Lei dos Senos

OBJETIVO: Demonstrar experimente com o auxílio da geometria dinâmica a validade da lei dos senos

PROCEDIMENTOS:

1 - Peça uma "nova construção", como logo em seguida;

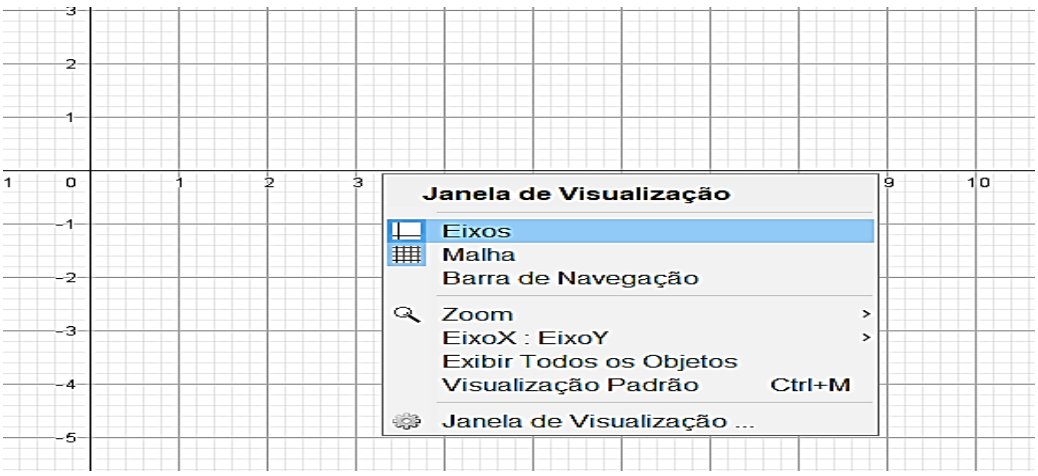
Figura 49: Construção nova



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Caso necessário "mostrar eixos" , conforme abaixo;

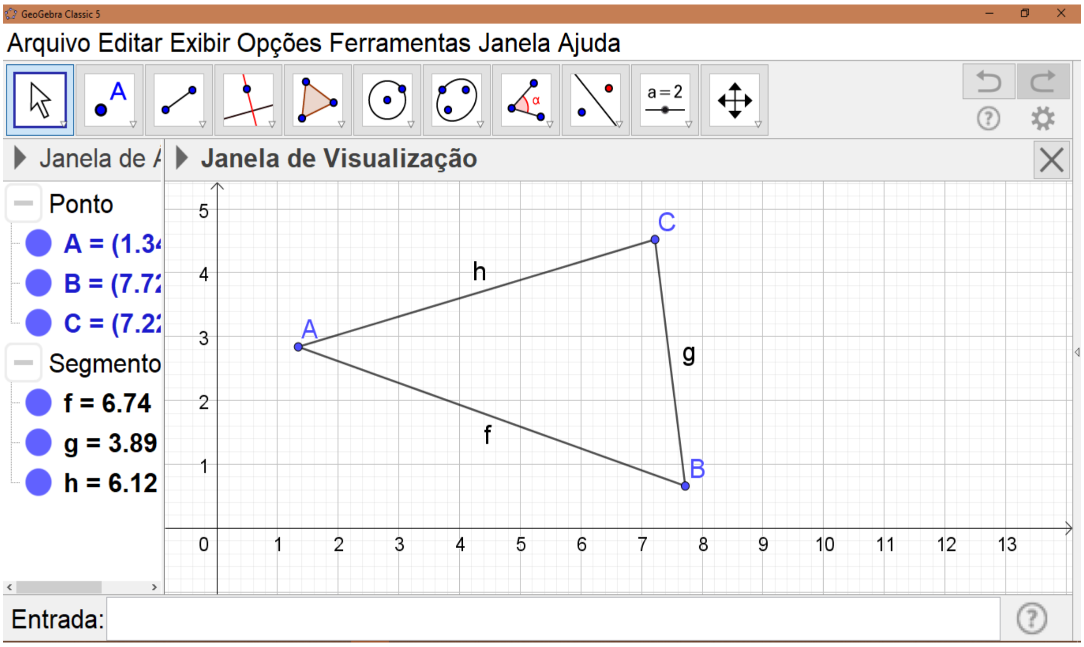
Figura 50: Eixo mostrar



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Trace três seguimentos, sendo que a extremidade de um tem que ser a origem do outro, como logo abaixo;

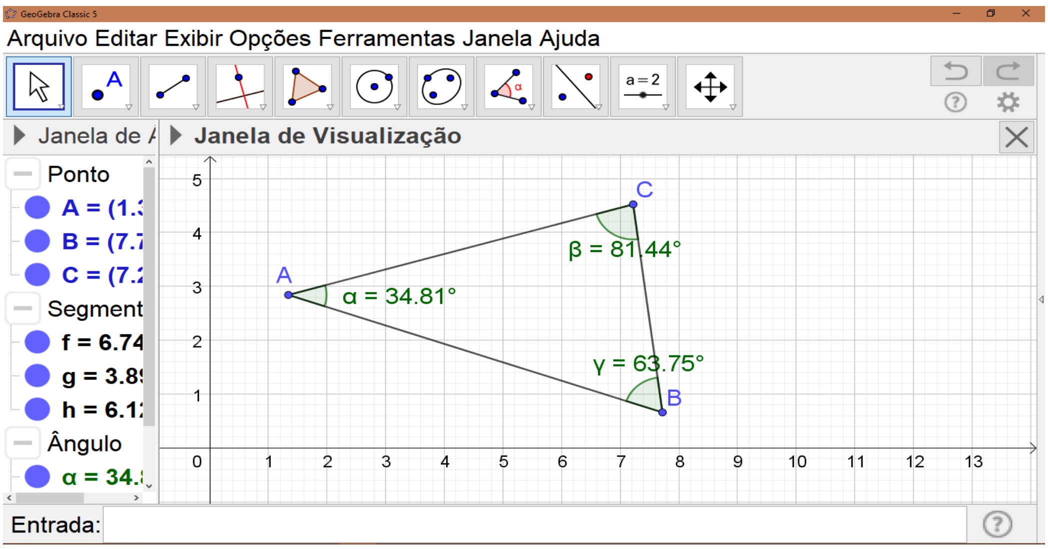
Figura 51: Criando segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Ative a ferramenta ângulos e mostre os ângulos do polígono formado, como logo abaixo;

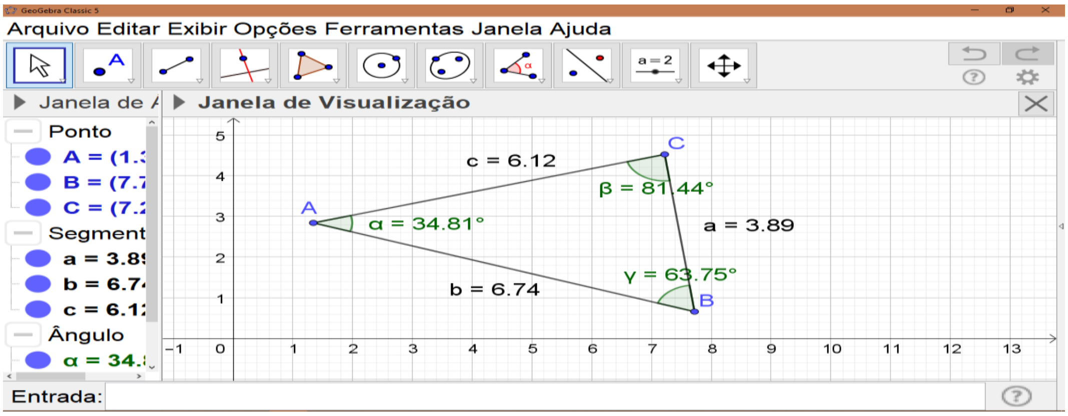
Figura 52: Mostrar ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

5 - Edite os três seguimentos que formam os lados do polígono, nomeando-os de a, b e c bem como ativando os valores dos respectivos lados. Edite também os ângulos e nomeie de α (\a), β (\b) e γ (\c) e os vértices nomeando-os de A, B, e C.(ative a ferramenta mostrar valores e/ ou nome dos objetos), conforme figura abaixo;

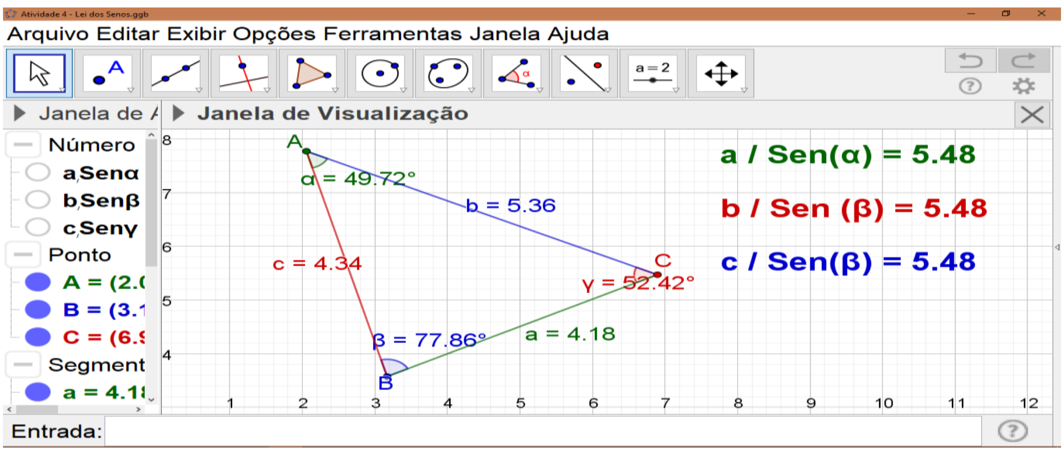
Figura 53: Segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

6 - Ative a ferramenta “expressão aritmética”. Clique no ponto (8,7) e ao aparece o a janela ”editar expressão” digite no campo “expressão” o comando “a/ sin(\a)” assim como no campo “explanação” digite “ a / seno(\a)”. Nesta etapa definimos o valor correspondente a razão entre o lado a e o valor do seno do angulo oposto que no caso é o ângulo. Repita o mesmo procedimento para a razão entre o lado b e o angulo β (Expressão: b/sin(\b), Explanação: a / seno (\a)) e para o lado c e o ângulo γ (Expressão: c/ sin(\c), Explanação: c / seno(\c)), como logo em seguida;

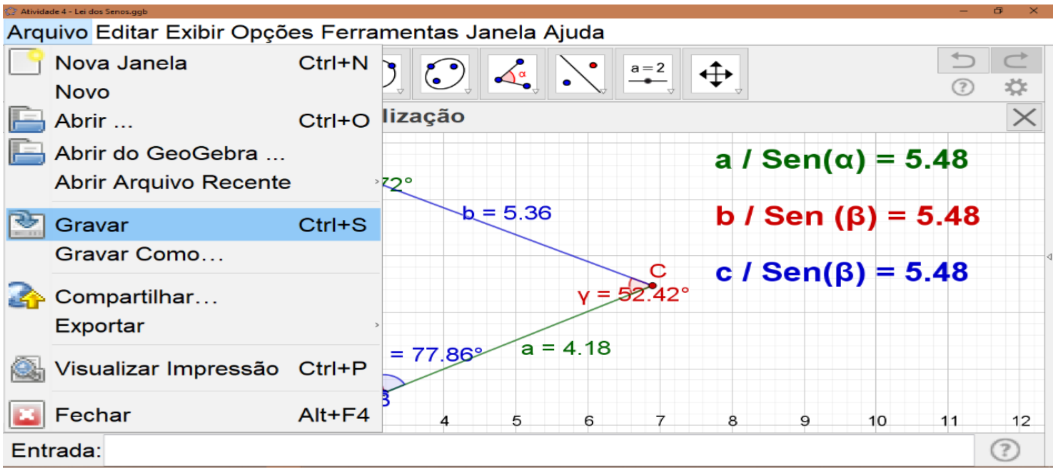
Figura 54: Ativar ferramenta de expressões



Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Salve a construção, conforme abaixo;

Figura 55: Salvar



Fonte: Elaborada pelo autor

ACOMPANHAMENTO DE APRENDIZAGEM:

1 - Movimente os pontos de triângulo e verifique se as razões calculadas se mantêm constantes em qualquer triangulo. O que podemos concluir?

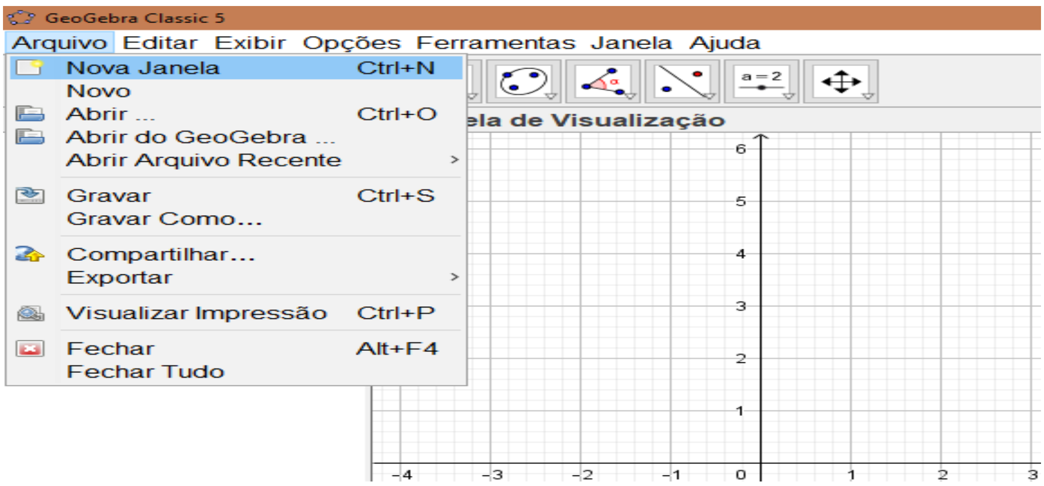
ATIVIDADE 04: Lei dos Cossenos

OBJETIVO: Demonstrar experimente com o auxílio da geometria dinâmica a validade da lei dos cossenos

PROCEDIMENTOS

1 - Peça uma "nova construção", de acordo com o comando abaixo;

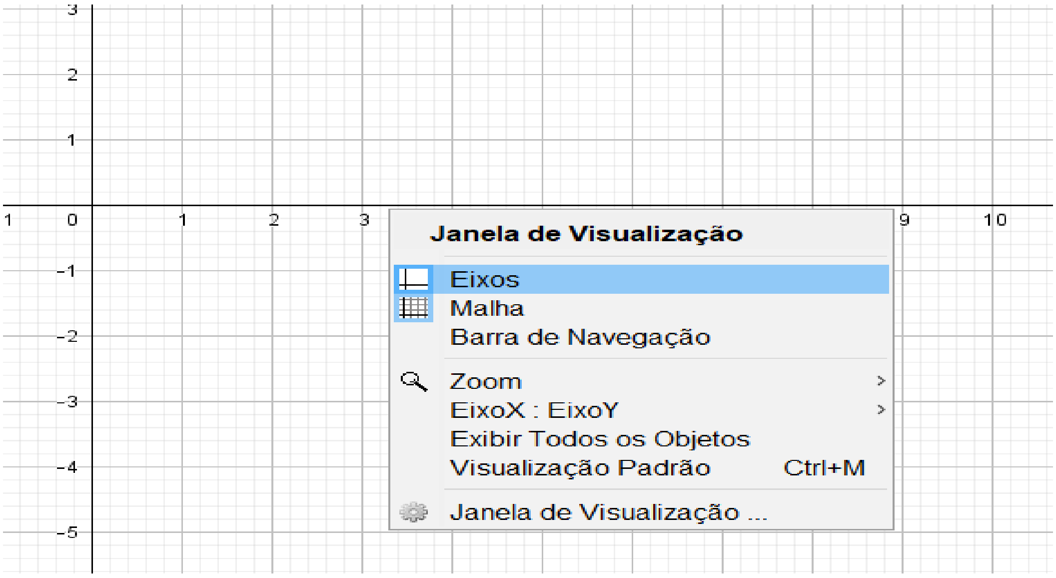
Figura 56: Nova criação



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Caso necessário “mostrar eixos”, como logo abaixo;

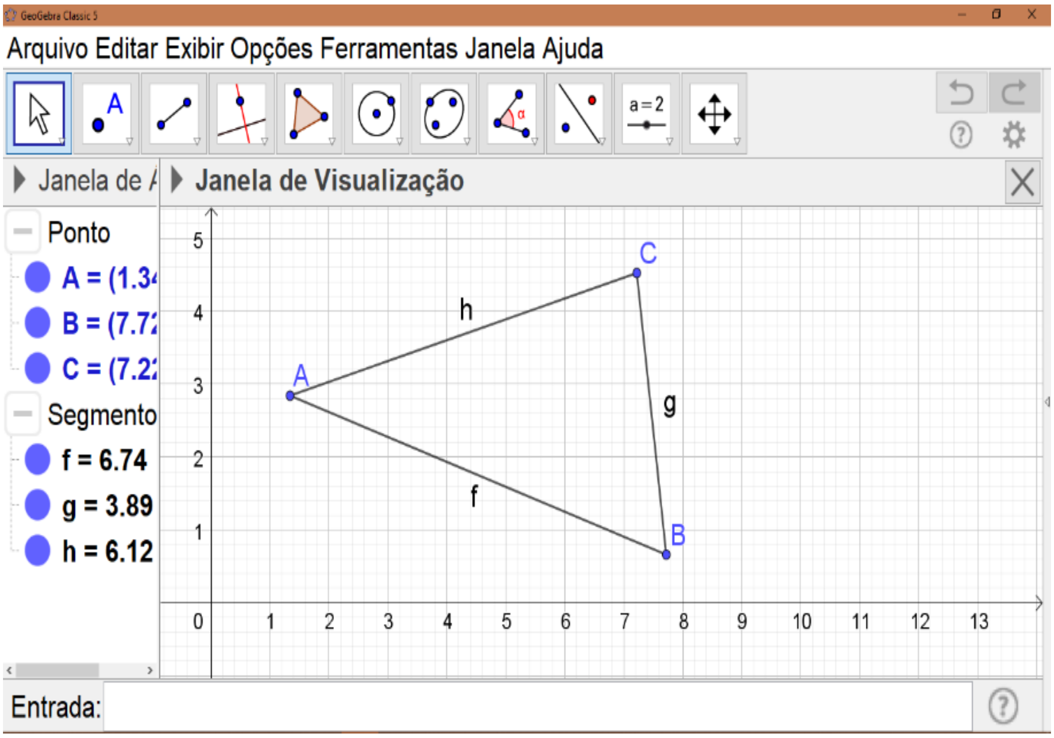
Figura 57: Apresentação de eixos



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Trace três seguimentos, sendo que a extremidade de um tem que ser a origem do outro, conforme em seguida;

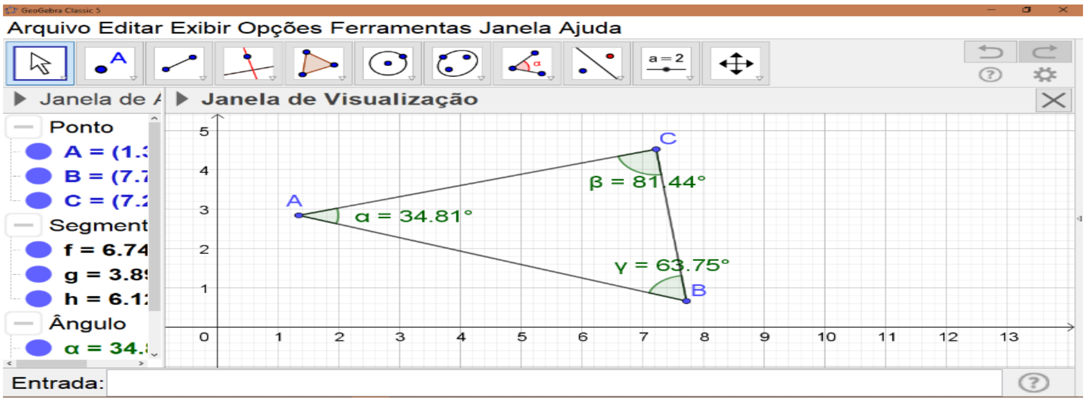
Figura 58: Três segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Ative a ferramenta ângulos e mostre os ângulos do polígono formado, como logo abaixo;

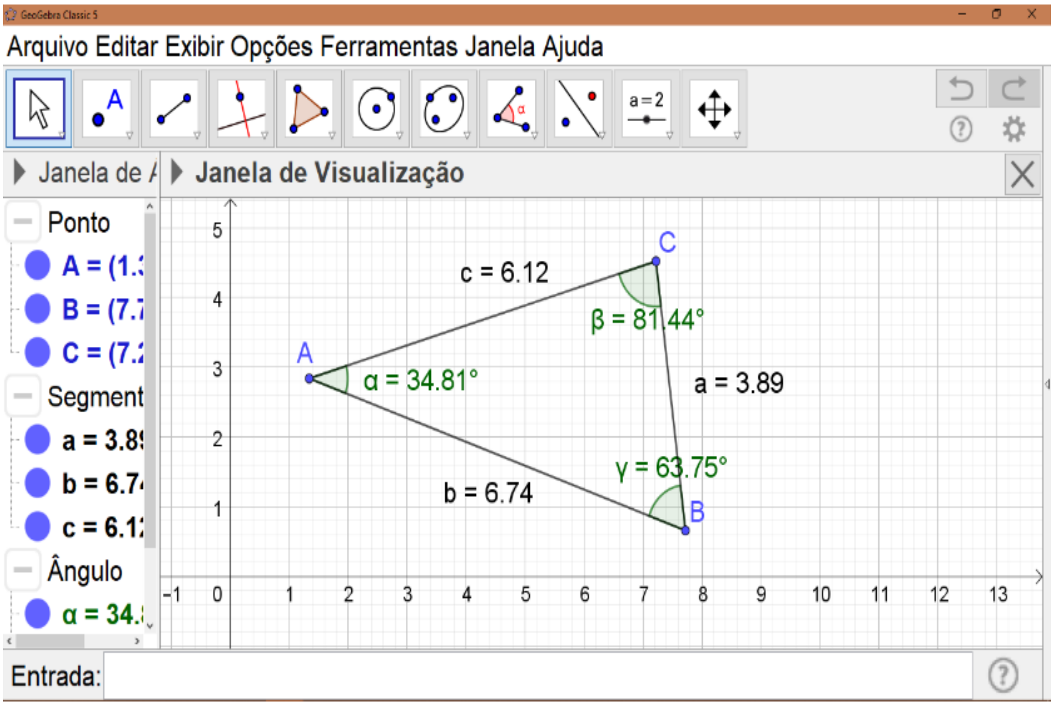
Figura 59: Ferramenta ângulos e mostrar



Fonte: Elaborada pelo autor

5 - Edite os três seguimentos que formam os lados do polígono, nomeando-os de a, b e c bem como ativando os valores dos respectivos lados. Edite também os ângulos e nomeie de α (\a), β (\b) e γ (\c) e os vértices nomeando-os de A, B, e C.(ative a ferramenta mostrar valores e/ ou nome dos objetos), de acordo com a figura em seguida;

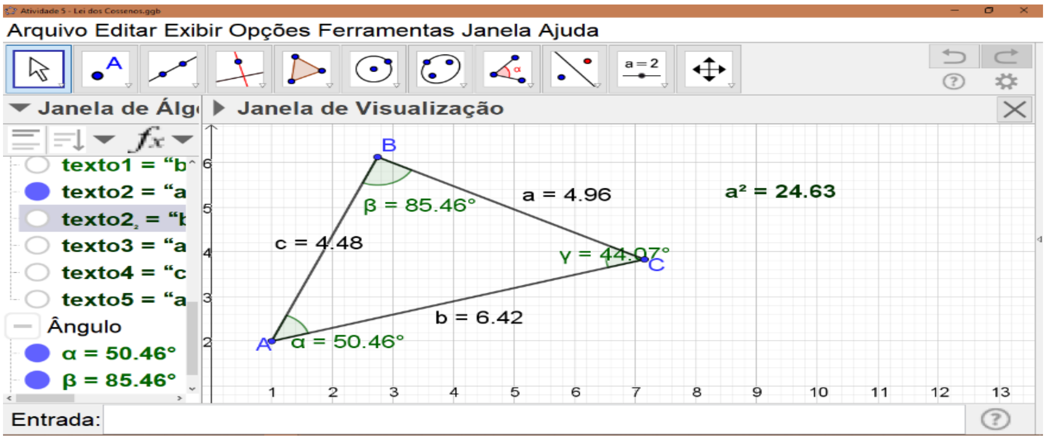
Figura 60: Editar segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

6 - Ative a ferramenta “expressão aritmética”. Clique em um ponto e aparecera o a janela ”editar expressão” calcule o valor de a^2 (Explanação: a^2, Expressão: a^2 ou a*a), como logo abaixo;

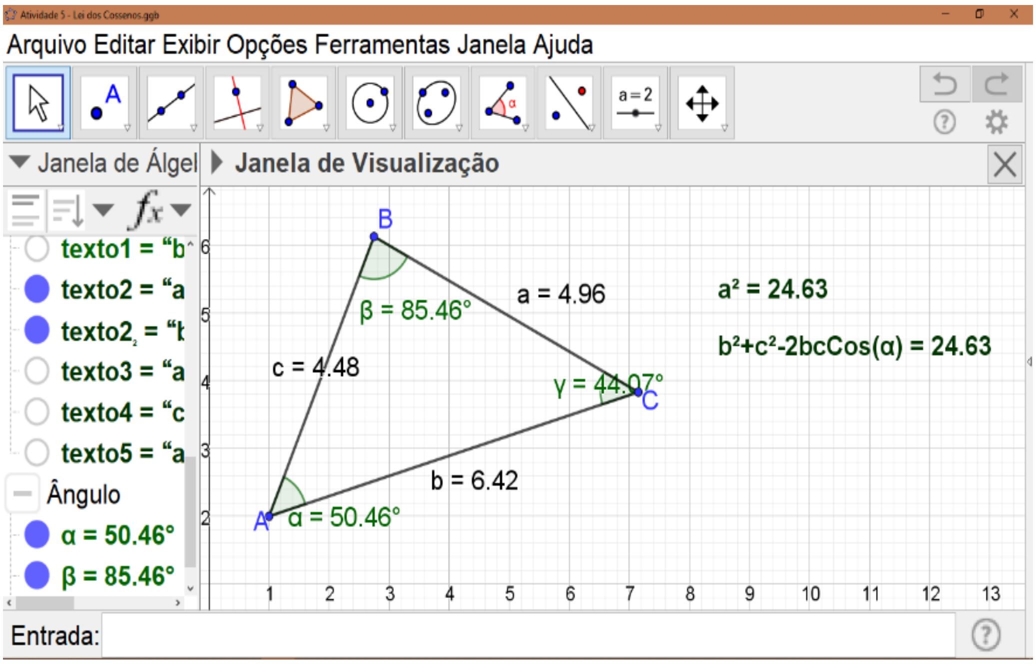
Figura 61: Ferramenta expressão



Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Ative novamente a ferramenta “expressão aritmética”. Clique em um ponto diferente da expressão anterior e aparecera o a janela ”editar expressão”. calcule o valor de $b^2 + c^2 - 2\ bc\ \cos\ \alpha$ (Explanação: b^2+c^2-2*b*c*cos(\a) , Expressão: b^2+c^2-2*b*c*cos(\a)), conforme comando abaixo;

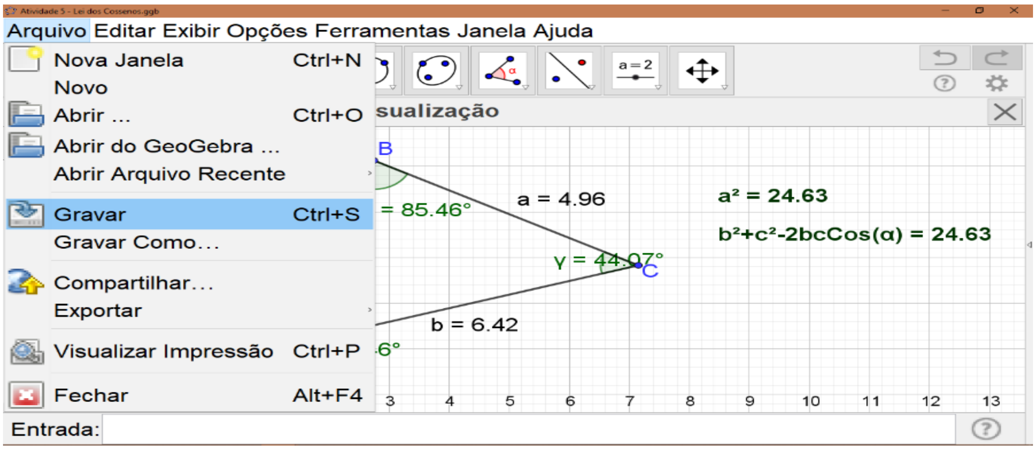
Figura 62: Ativar ferramenta



Fonte: Elaborada pelo autor

8 - Salve a construção, de acordo com a figura abaixo;

Figura 63: Salvando



Fonte: Elaborada pelo autor

ACOMPANHAMENTO DE APRENDIZAGEM:

1 - Mova os pontos dos polígonos de forma a verificar se a relação a^2 e $b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$, mantém mesma relação para todo triangulo, conforme a figura abaixo. A que conclusão se chega?

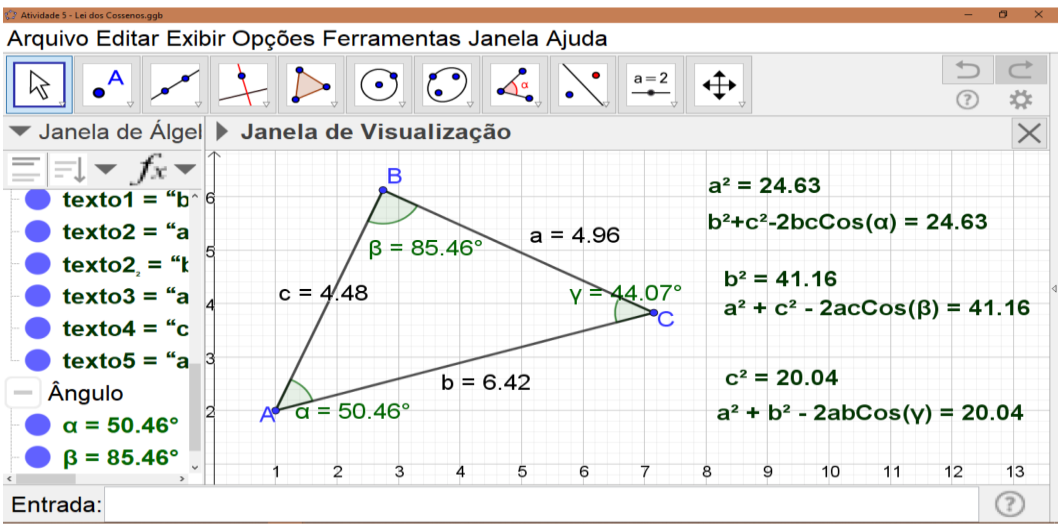
2 - Faça o mesmo procedimento e prove que

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \gamma$

De acordo com os comandos abaixo:

Figura 64: Mova pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

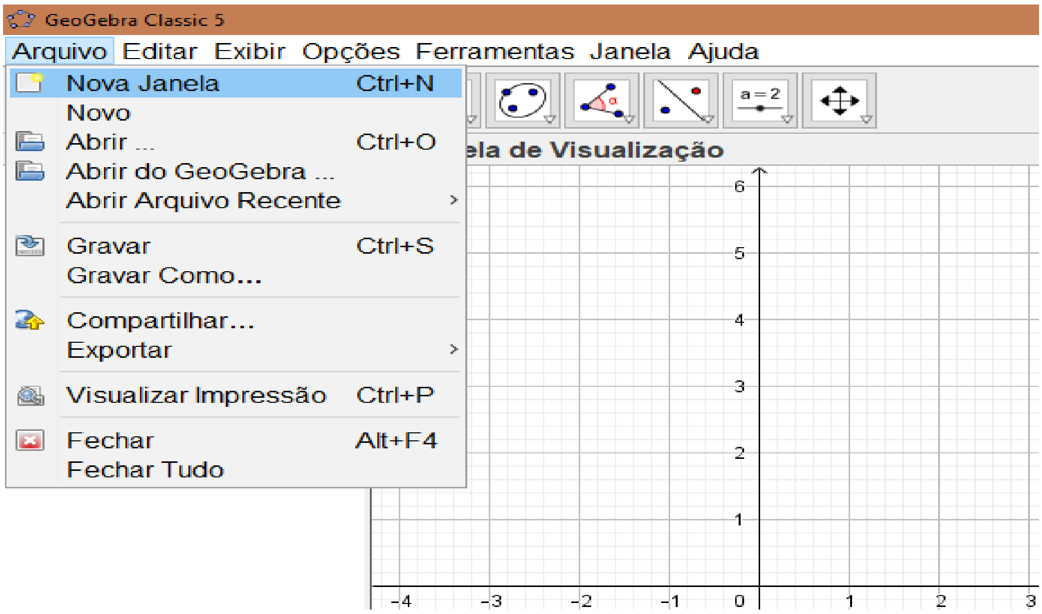
ATIVIDADE 05: Seno e Cosseno na Circunferência Trigonométrica

OBJETIVO: Analisar dinamicamente as relações trigonométricas na circunferência.

PROCEDIMENTOS:

1 - Peça uma nova construção, conforme abaixo;

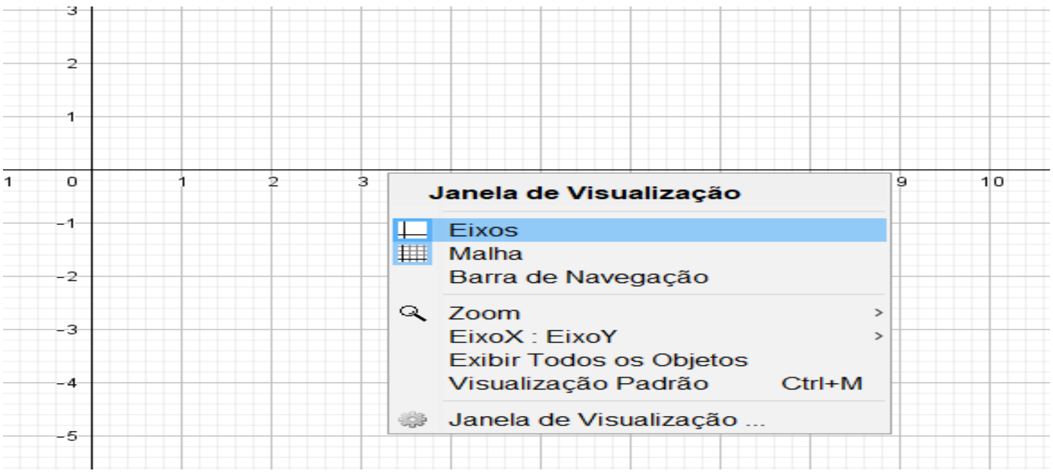
Figura 65: Nova figura



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Caso necessário ative a ferramenta "mostrar eixos", como logo abaixo;

Figura 66: Mostrando Eixos



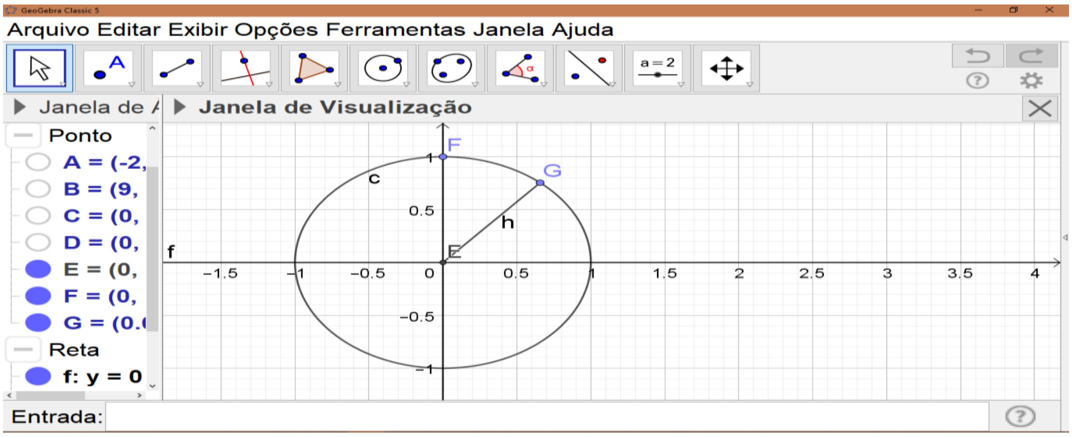
Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Com a ferramenta “reta” trace uma reta que seja coincidente com o eixo das abscissas. E seguida ative a ferramenta “perpendicular” trace uma reta que seja perpendicular a primeira e coincidente com o eixo das ordenadas;

4 - Ative a ferramenta “Circulo” trace um círculo que tenha centro no ponto (0,0) e que passe no ponto (0,1);

5 - Trace um “segmento”  que tenha origem em (0, 0) e extremidade em qualquer ponto da circunferência, conforme abaixo;

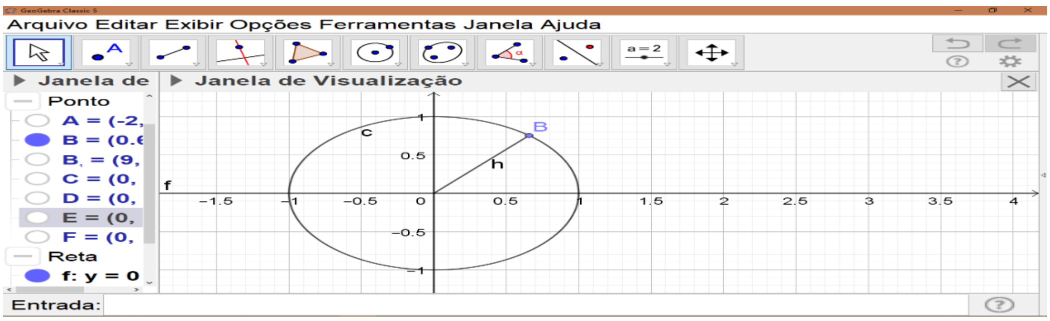
Figura 67: Trace segmento



Fonte: Elaborada pelo autor

6 - Ative a ferramenta “Editar Objeto”  e clique no ponto que serviu de extremidade para o seguimento criado anteriormente. Nomeie como B e ative a ferramenta “exibir nome” , de acordo com o comando em seguida;

Figura 68: Editando objeto

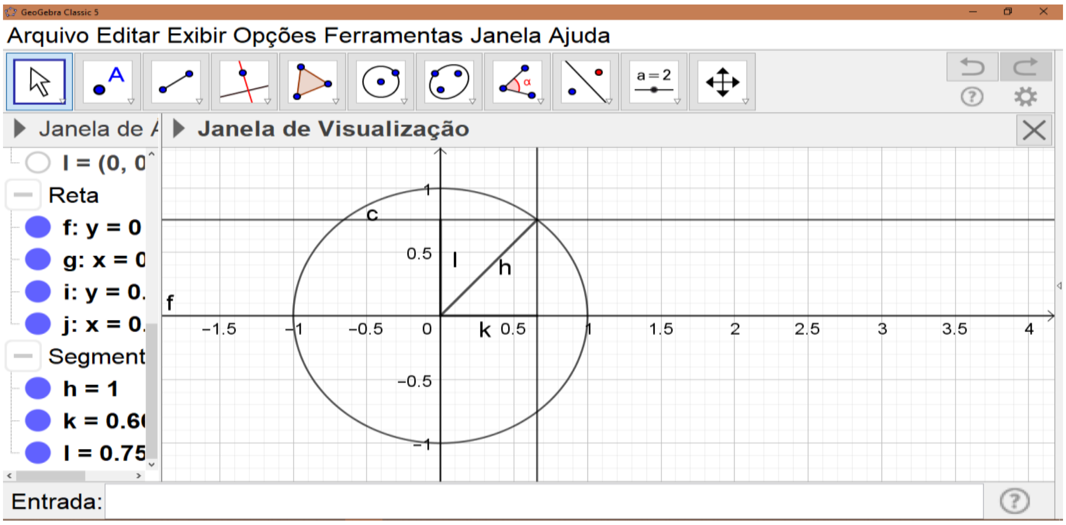


Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Trace duas retas, uma que seja perpendicular ao eixo das abscissas e que passe por B e outra que seja perpendicular ao eixo das ordenadas e passe por B;

8 - Trace dois seguimentos, um que seja coincidente com o eixo das abscissas, tenha origem em (0,0) e extremidade no ponto de intersecção da reta perpendicular com o eixo das abscissas do procedimento anterior. O outro que seja coincidente com o eixo das ordenadas, tenha origem em (0,0) e extremidade no ponto de intersecção da reta perpendicular com o eixo das ordenadas do procedimento anterior, conforme abaixo;

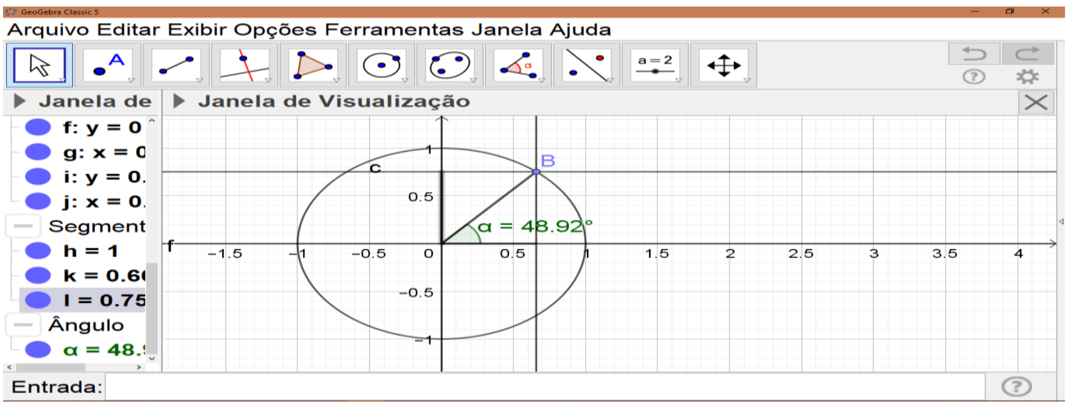
Figura 69: Trace dois segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

9 - Ative a ferramenta “ângulo” e cria em ângulo através dos pontos (1,0), (0,0) e (0,1). Edite alterando espessura, cor e nomeie como α (\a), como logo abaixo;

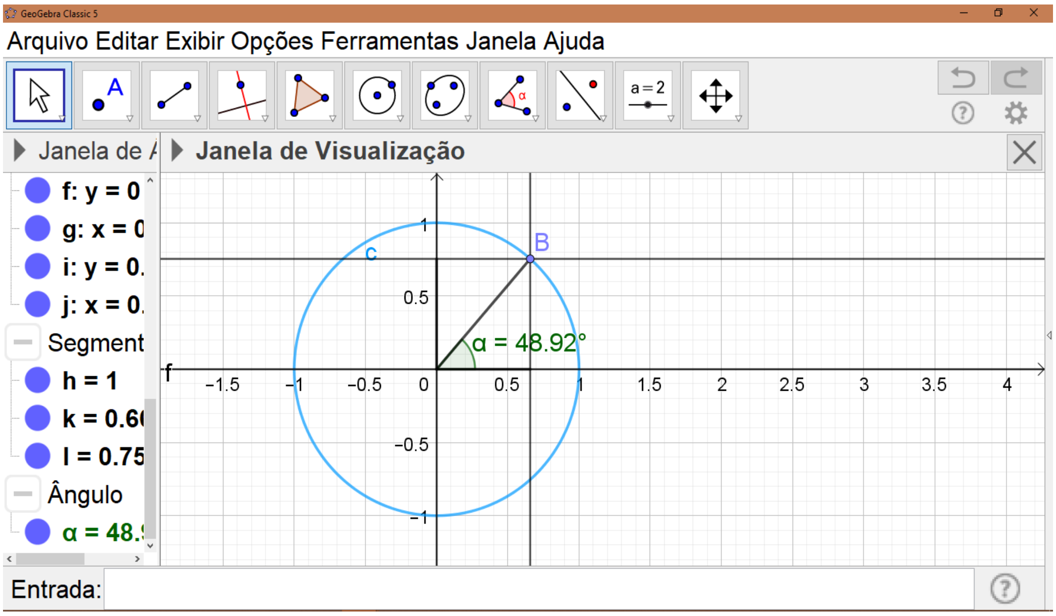
Figura 70: Ângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

10 - Ative a ferramenta editar objeto e clique em cima da circunferência criada e edite a cor, espessura e ative negrito, de acordo com o comando em seguida;

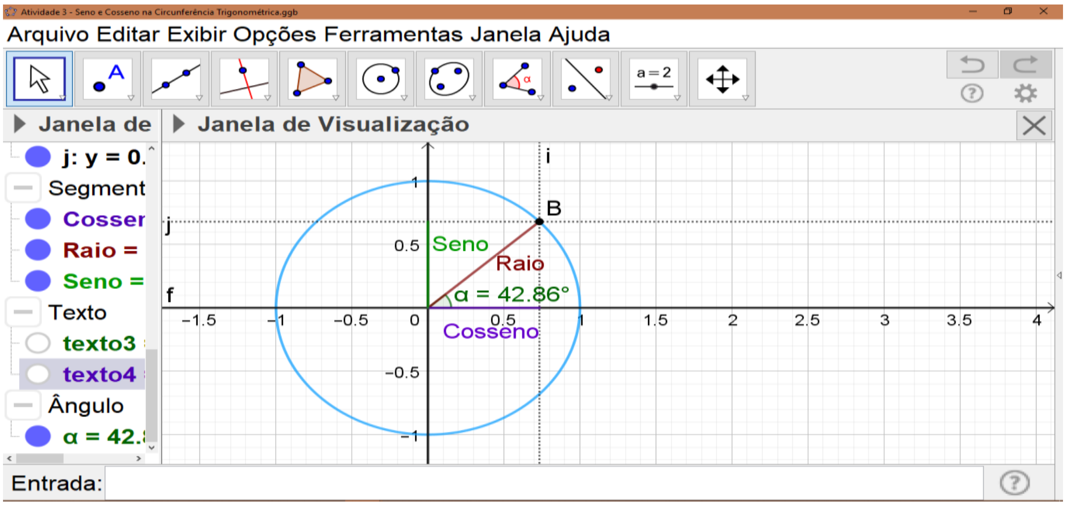
Figura 71: Editar objeto



Fonte: Elaborada pelo autor

11 - Com a ferramenta editar ainda ativada, edite os três seguimentos criados, mude a cor, a espessura e altere o nome (de extremidade na circunferência chame de “Raio”, o segundo que é coincidente com o eixo das abscissas, chame de “Cosseno” e o terceiro que é coincidente com o eixo das ordenadas chame de “Seno”), como logo abaixo;

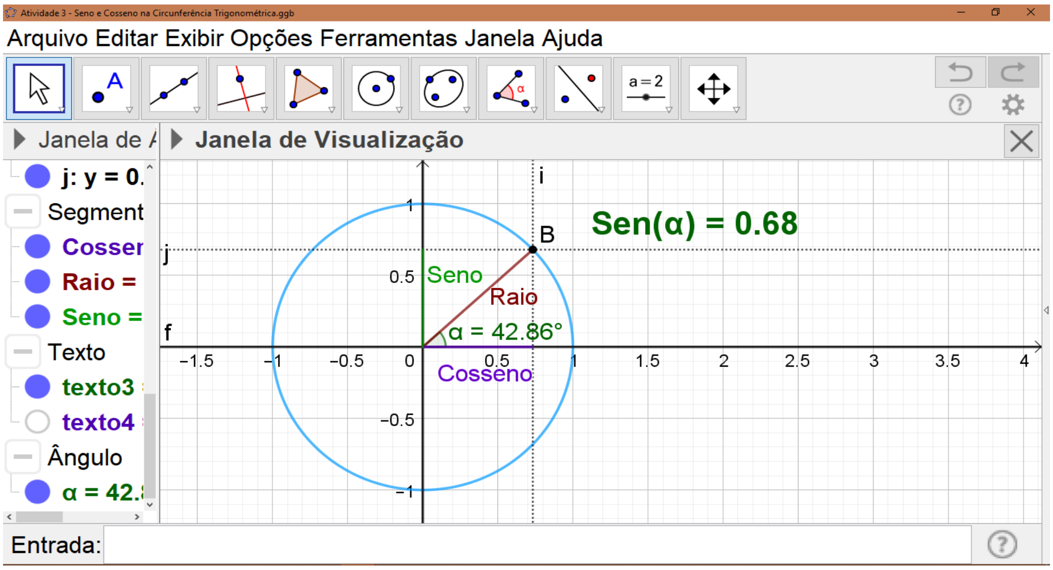
Figura 72: Editar construção



Fonte: Elaborada pelo autor

12 - Ative a ferramenta “expressão aritmética”  e clique em um ponto fora da circunferência. Ao abrir a janela editar expressão a explanação Seno \a e expressão sin(\a), conforme a figura abaixo;

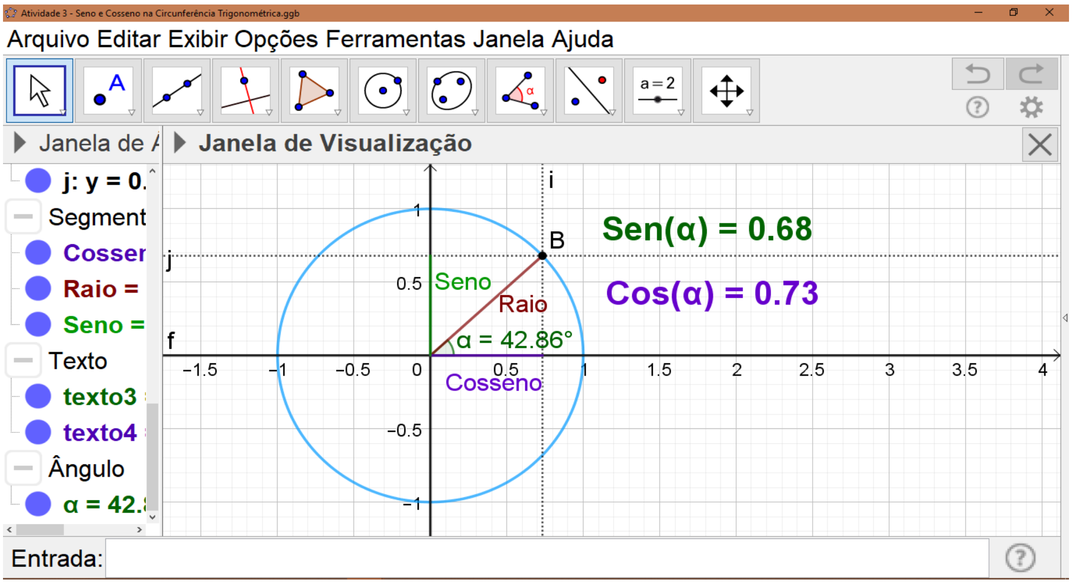
Figura 73: Ativar ferramenta



Fonte: Elaborada pelo autor

13 - Ative novamente a ferramenta “expressão aritmética” e clique em baixo da expressão no passo anterior. Ao abrir a janela de edição use a explanação Cosseno \a e expressão cos(\a), como logo em seguida;

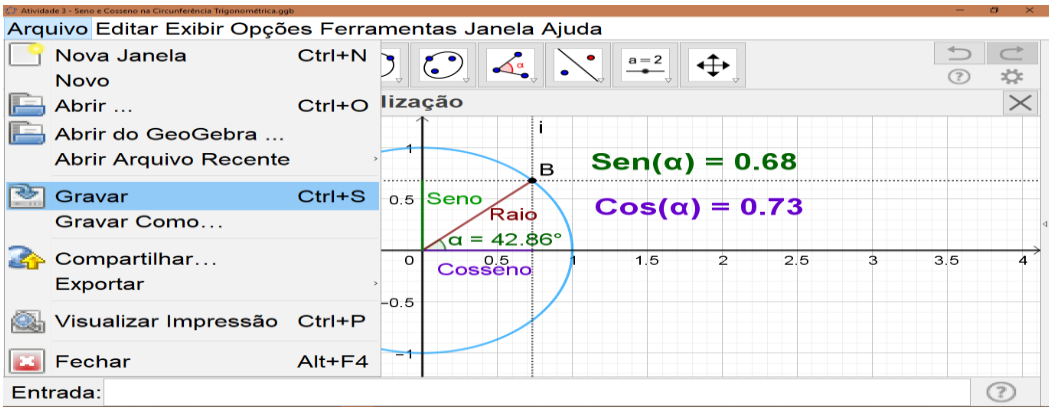
Figura 74: Expressão aritmética



Fonte: Elaborada pelo autor

14 - Salve a construção, conforme o comando abaixo.

Figura 75: Salvar a construção



Fonte: Elaborada pelo autor

ACOMPANHAMENTO DE APRENDIZAGEM:

1 – Movimente o ponto B através da circunferência e diga qual a relação entre as coordenadas do ponto B e os valores do Seno e Cosseno encontrado para cada ângulo?

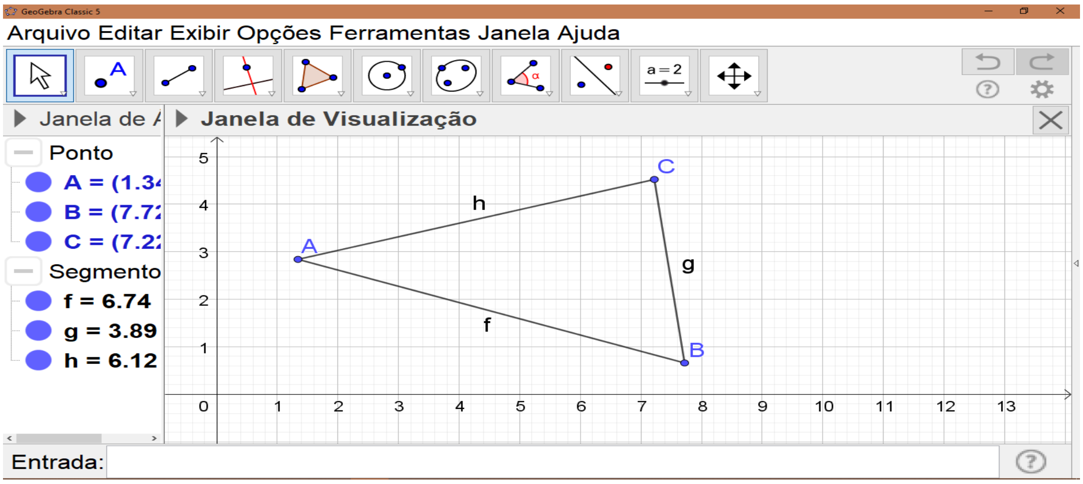
ATIVIDADE 06: Ângulos Suplementares

OBJETIVO: Determinar a relação existente entre as razões trigonométricas dos ângulos suplementares

PROCEDIMENTOS:

1 - Peça uma nova construção, de acordo com figura abaixo;

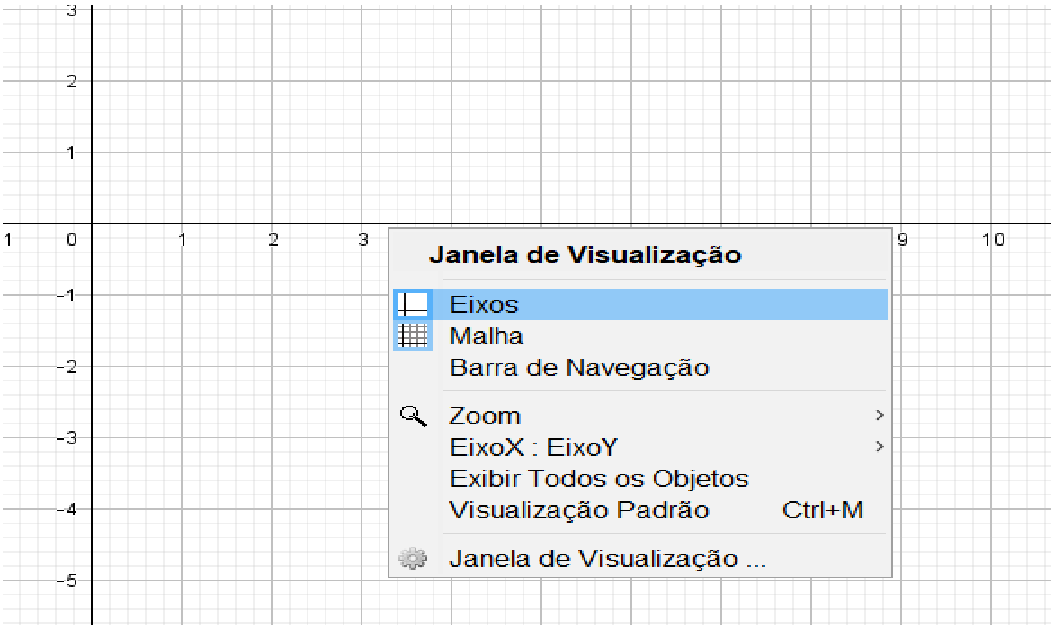
Figura 76: Nova construção



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Se necessário ative a ferramenta mostra eixos, conforme abaixo;

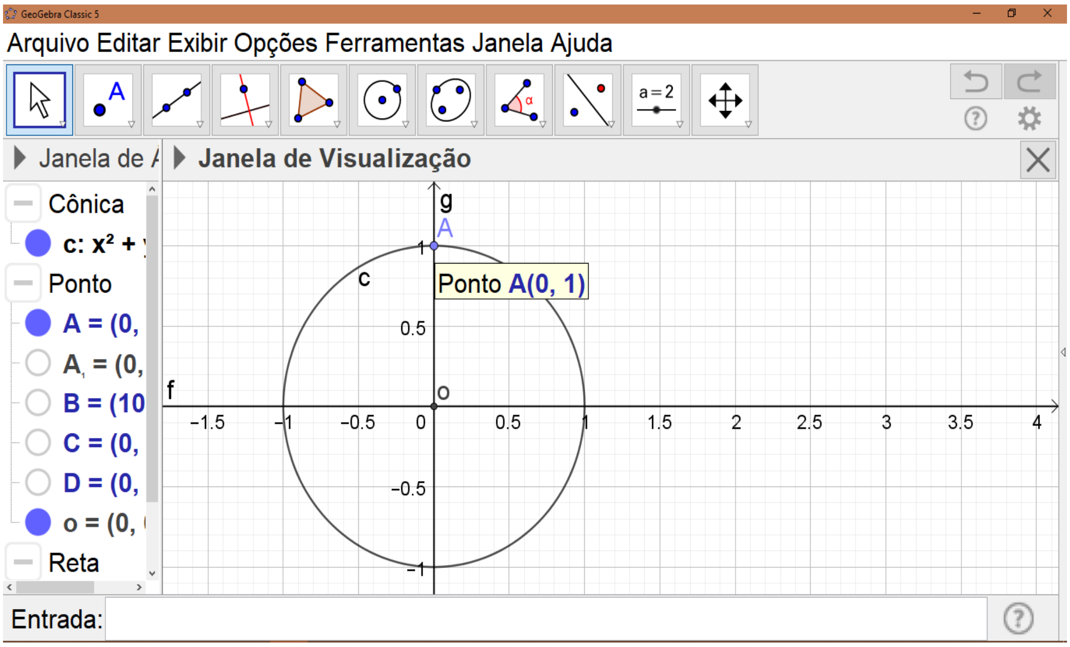
Figura 77: Ferramenta eixos



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Com ferramenta círculo, crie uma circunferência com centro em O = (0,0) e que passe pelo ponto A = (1,0), como a figura abaixo;

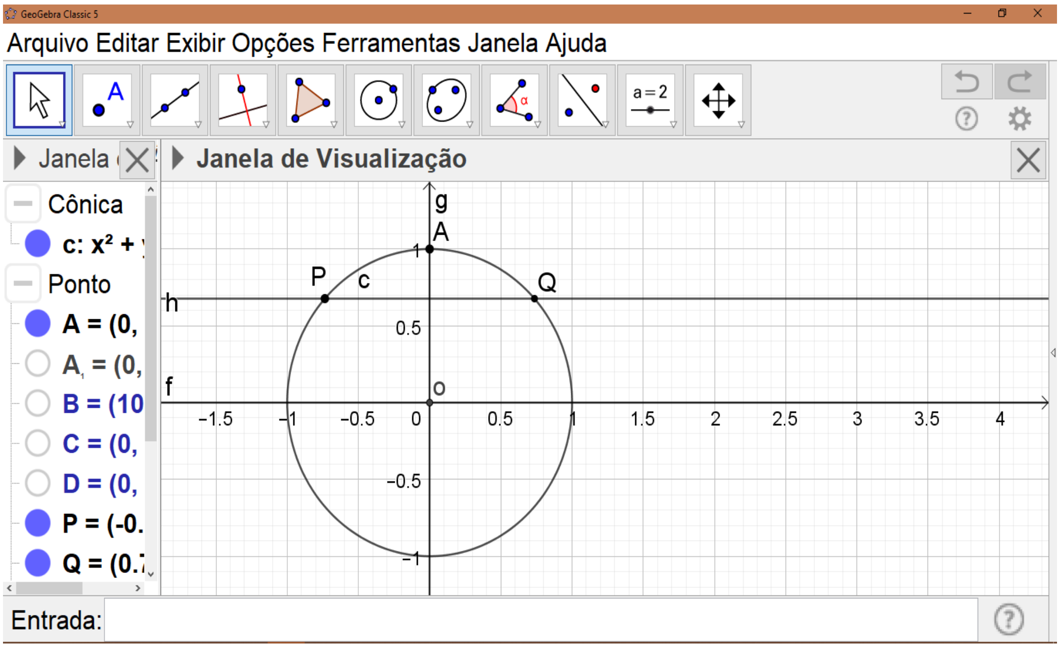
Figura 78: Ferramenta círculo



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Trace uma reta que seja paralela ao eixo das abscissas (ou perpendicular ao eixo da ordenadas) e que passe por dois pontos da circunferência. Com a ferramenta ponto indique os pontos de intersecção da reta com a circunferência e nomeie-os de P e Q, de acordo com o comando abaixo;

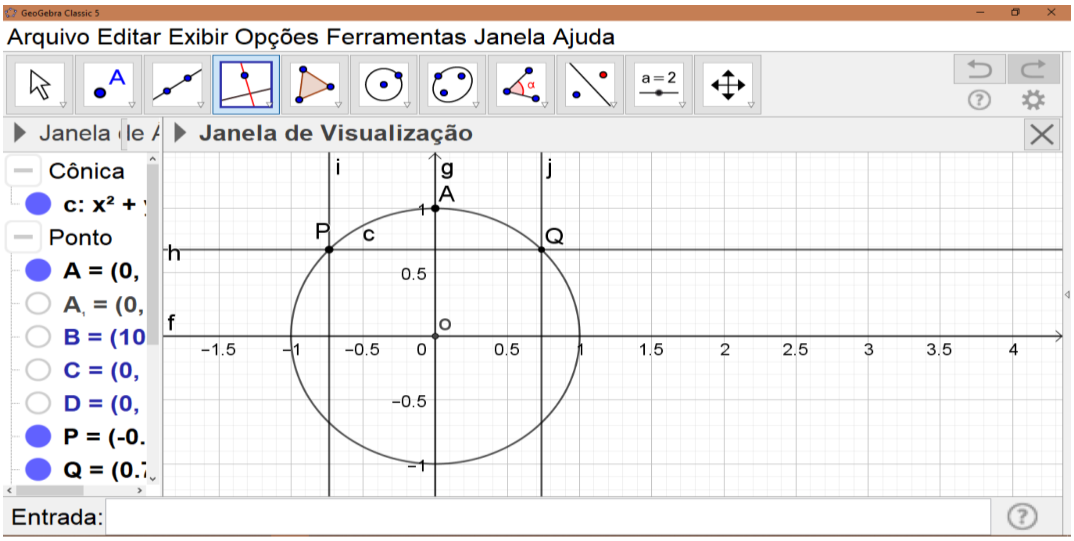
Figura 79: Retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor

6 - Trace duas retas que sejam perpendiculares a reta criada anteriormente e que passe pelos mesmos pontos, como logo abaixo;

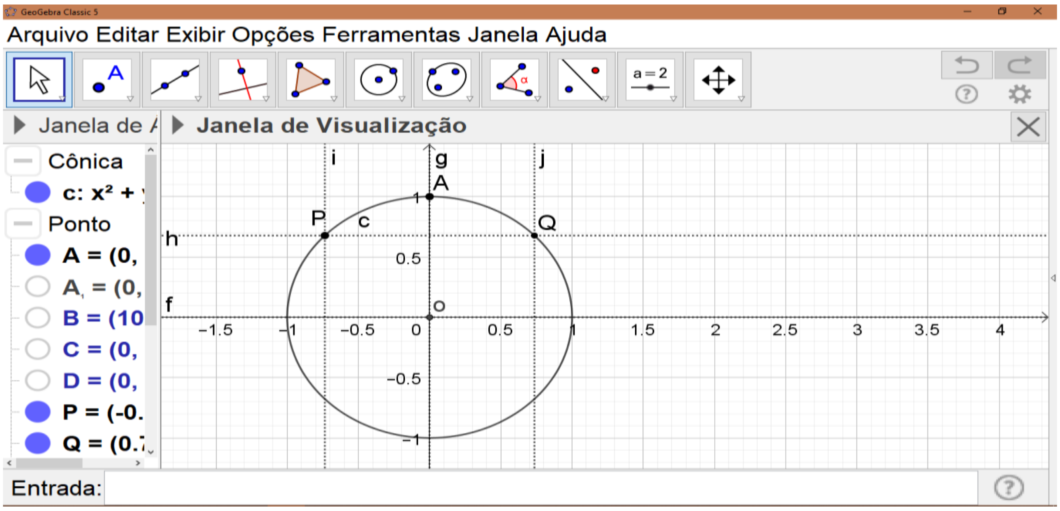
Figura 80: Retas



Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Com a ferramenta editar objeto clique em cima de todas as retas criadas até agora e mude a espessura pra pontilhada, conforme figura abaixo;

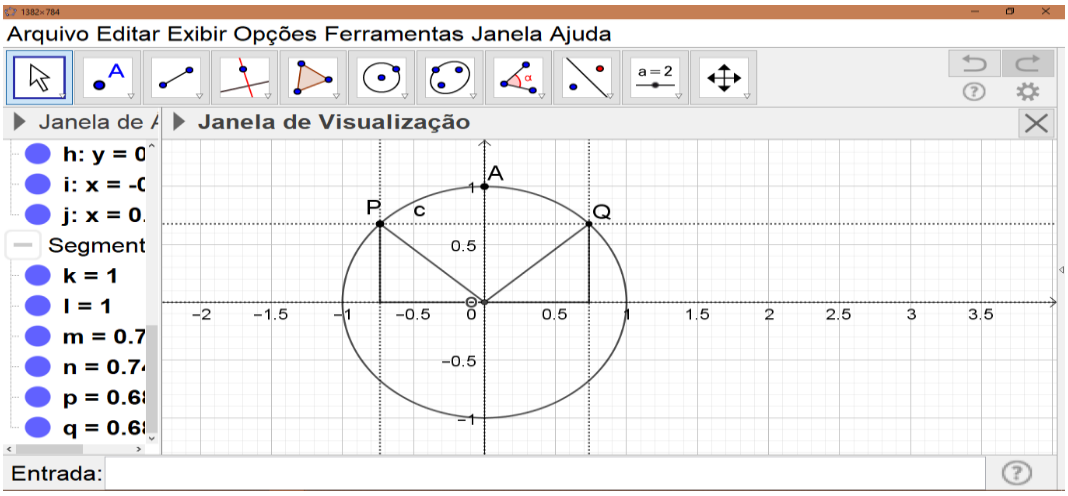
Figura 81: Editar Objeto



Fonte: Elaborada pelo autor

8 - Agora crie seis seguimentos. Os dois primeiros com origem em (0,0) e extremidade nos dois pontos criados sobre a circunferência. Os próximos com origem em (0,0) e extremidade nos ponto de intersecção do eixo das abscissas com suas perpendiculares. Os dois últimos que sejam paralelos ao eixo das ordenadas e que tenham origem nos dois pontos, P e Q, criados sobre a circunferência e extremidades no eixo das abscissas, de acordo com o comando em seguida;

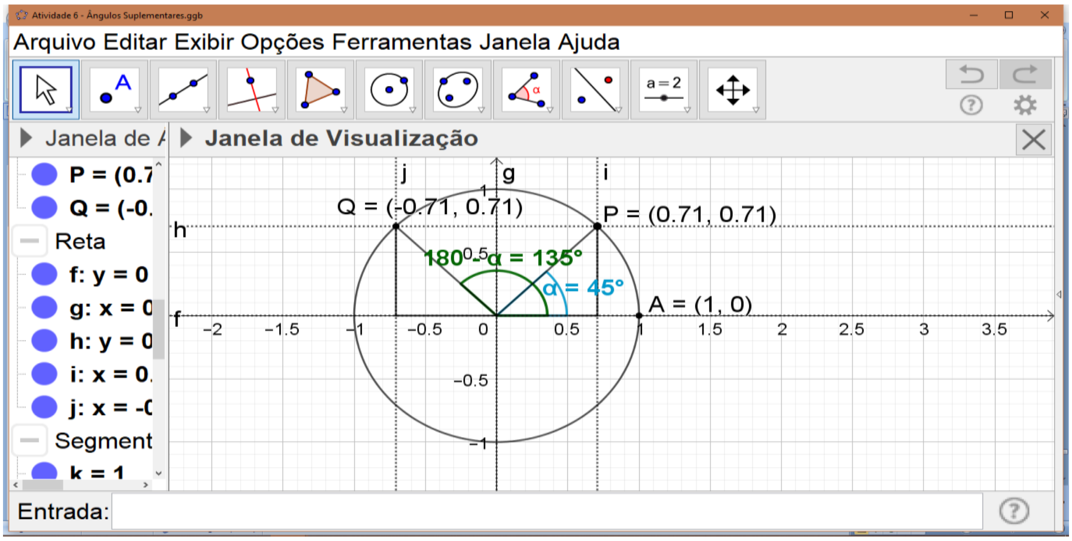
Figura 82: Criando segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

9 - Com a ferramenta ângulo marque os ângulos AOP e AOQ nomeando-os respectivamente de 180 - α (comando 180 - \a) e de α (comando \a). Para editar o ângulo ative a ferramenta editar objetos e clique em cima de cada ângulo, a partir daí ao abri a janela de edição de ângulo é possível fazer as alterações como editar nome, mostra valores, como logo abaixo;

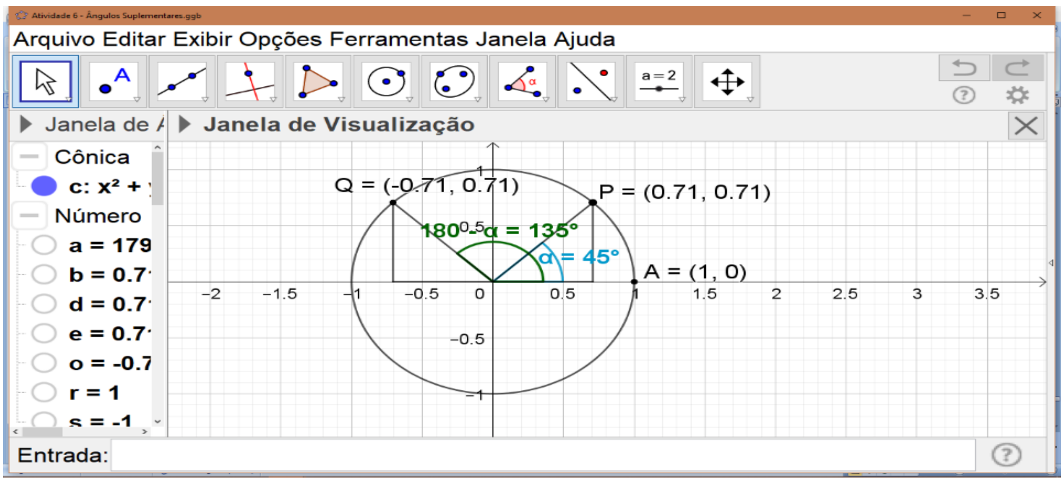
Figura 83: Ferramenta ângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

10 - Para uma melhor visualização ative a ferramenta ocultar objetos e oculte todas as retas criadas, assim só serão visualizados os seguimentos e permitirão um melhor entendimento dos objetivos da atividade, de acordo com a figura abaixo;

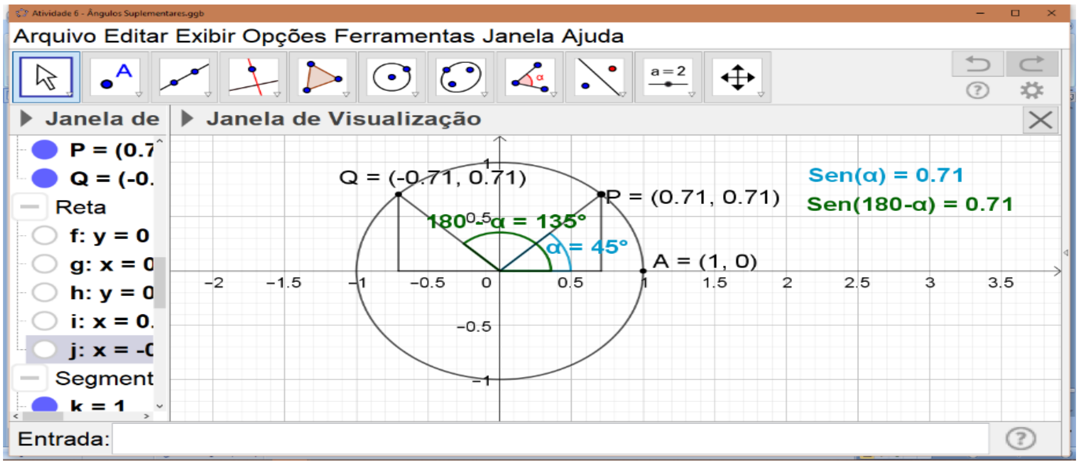
Figura 84: Ferramenta Ocultar Objeto



Fonte: Elaborada pelo autor

11 - Ative a ferramenta expressão aritmética e clique em qualquer ponto fora da circunferência, ao abrir a janela de edição digite em explanação 180-\a e em expressão digite sin (180-(\a)) feito isso clique em ok. Ative novamente a ferramenta expressão e clique bem ao lado da expressão criada anteriormente, ao abrir a janela de edição digite em explanação \a e em expressão digite sin (\a) feito isso clique em ok. Nesta etapa calculamos o seno de 180 - α e de α , conforme abaixo;

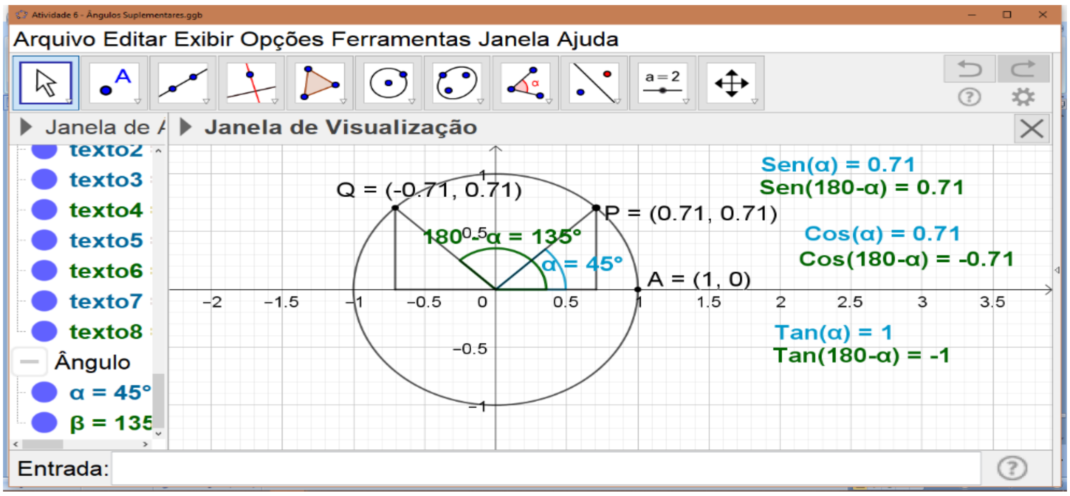
Figura 85: Ferramenta Aritmética



Fonte: Elaborada pelo autor

12 - Repita o mesmo procedimento anterior e calcule o Cos α e tg α (Expressão: cós (\a) e tan (\a) respectivamente) e Cos 180 - α e Sem 180 - α (Expressão: cós (180-(\a)) e tan (180-(\a)) respectivamente, de acordo com o comando abaixo;

Figura 86: Aplicação de expressões

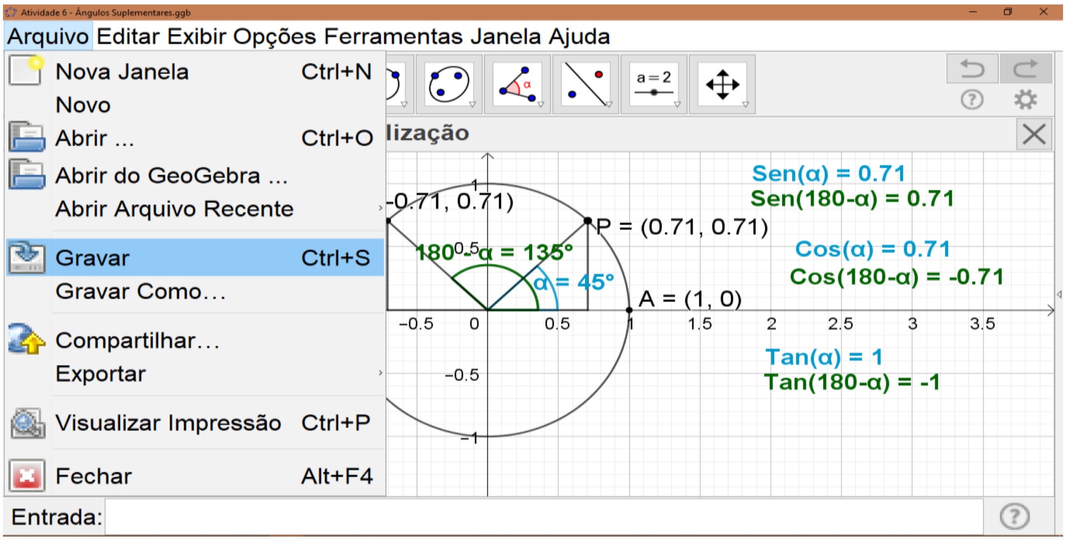


Fonte: Elaborada pelo autor

13 - Se preferir utilize a fermenta editar objeto e altera determinadas características dos objetos criados, como cor, espessura, etc.

14 - Salve a construção, conforme a figura em seguida:

Figura 87: Salvando a figura

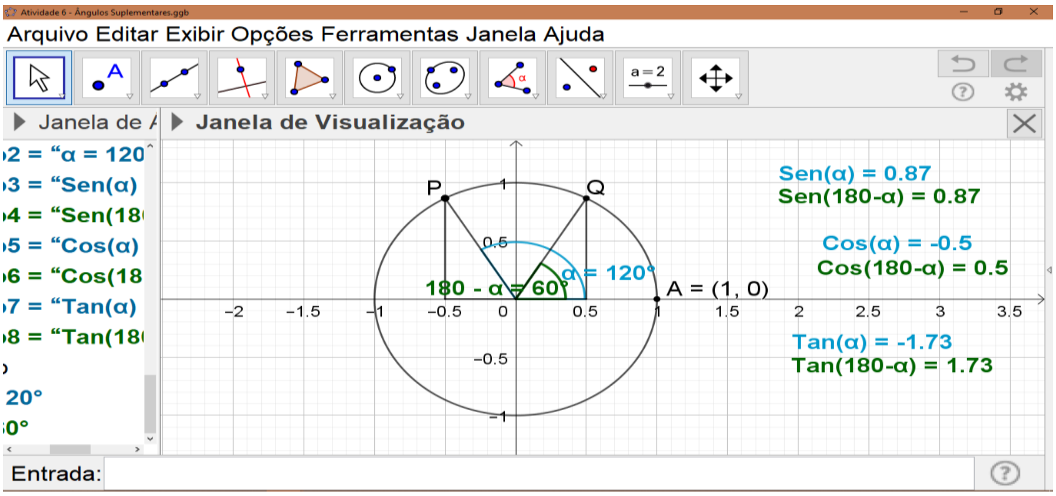


Fonte: Elaborada pelo autor

QUESTIONAMENTOS:

1 – Utilize a ferramenta “Mover Ponto” e movimente o ponto P e Visualize sobre a circunferência trigonométrica os ângulos 120º, 135º, 150º, e 180º, conforme abaixo;

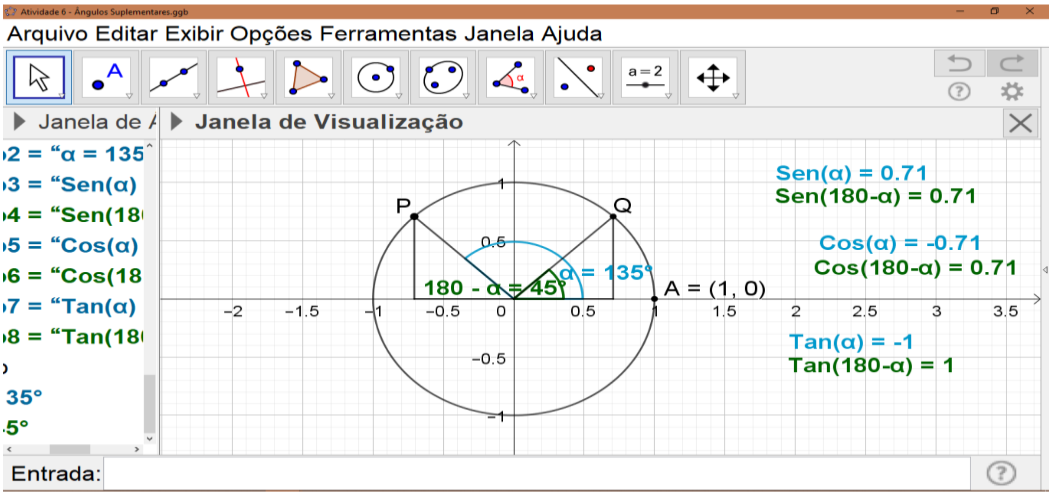
Figura 88: Movendo ponto



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Quais os valores de suas razões trigonométricas, de acordo com figura abaixo?

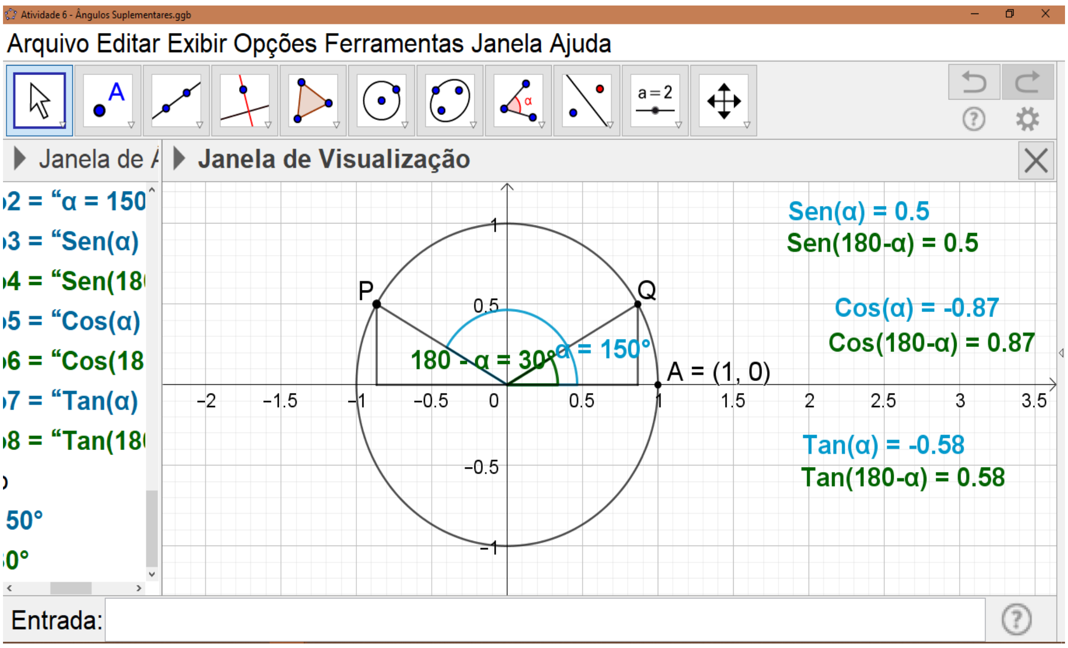
Figura 89: Razões trigonométricas



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Que relação existe entre as razões trigonométricas dos ângulos suplementares, como retratada logo em seguida?

Figura 90: Razões trigonométricas dos ângulos suplementares



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Como podemos achar as razões trigonométricas de um ângulo do 2º quadrante a partir de um ângulo do 1º quadrante?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar as discursões sobre a temática proposta nesse trabalho, temos impressões iniciais bastantes significativas para o ensino e aprendizagem, porém antes de constatar essas conclusões, mostramos os grandes entraves da educação atual, primeiro a manutenção do ensino tradicional, no que tange a matemática, principalmente no ensino da trigonometria, colocando o professor como um ponto fundamental para a mudança de estratégias educacionais e motivacional em sala de aula. Após levantamos a ampla concorrência com os entretenimentos digitais que fazem que o aluno fique com várias abas abertas, tirando o seu foco.

Voltando-se novamente ao educador de acordo com nossas pesquisas verificou-se ainda que o professor apresenta certa resistência para sair da zona de conforto, ora por sua falta de conhecimento, no caso me incluía nesse rol, ora por falta de incentivo ou até mesmo de motivação. Isso se confirma de acordo com Moran (2009) alunos e, por vezes, professores dos cursos de história, geografia, matemática, ciências, biologia, sociologia e outros afirmam, sem constrangimento, que o importante para se formar professor é o domínio dos conteúdos dos respectivos cursos. Essa afirmação questiona alguns aspectos na formação do futuro professor nos cursos de graduação que para a nossa discursão é relevante e necessária numa futura pesquisa sobre as causas da dificuldade de aprendizagem do aluno, mas na atual conjuntura temática não cabe tal caminho, pois os nossos propósitos é a implementação do software *Geogebra* com proposta de atividades para ajudar o professor em sala de aula.

Para isso, trouxemos uma pequena essência do estudo sobre a Trigonometria, como o histórico fascinante e enriquecedor conhecimento, servindo como ponte para várias áreas das ciências. Também inserimos o nosso objeto matemático de que forma é apresentado nos livros didáticos através da PNLD do ano de 2018, verificou-se que a didática usada pelos autores analisados como Paiva, Iezzi e Dante é similar seguem praticamente a mesma linha de ensino, se diferem nas sugestões de softwares educacionais todos apresentam animações, mas o único que inseri ferramentas de intervenção pelo aluno para construção de figuras e no livro de Dante.

Sabe-se que atualmente muitas monografias são redigidas com tema abordado nesse trabalho que propõem a inserção da geometria dinâmica nas atividades de sala de aula, principalmente o *Geogebra* que apresentam ferramentas que podem ser utilizadas para construção de figuras, gráficos, funções e entre outros, facilitam a interação e intervenção do aluno para que tudo o que foi ensinado pelo professor como as definições, teoremas e axiomas sejam compreendidos. Aproveitando essas qualidades e potencialidades desse programa, prosseguimos esta pesquisa que vieram num momento promissor da educação, aglutinando com base nacional curricular comum (BNCC) que contempla o uso das tecnologias, principalmente a inserção digital com uma nova roupagem interagindo com ensino e aprendizagem, para que entrem nas escolas com o objetivo de melhorar o ensino. É obvio que os problemas irão continuar, mas agora temos em mãos o poder de cobrar melhores condições nas escolas, principalmente mais computadores e suportes técnicos para mantê-los, pois como foi mencionado no trabalho uma dificuldade para o funcionamento do software *Geogebra* foi o uso de máquinas obsoletas e danificadas.

Espera-se que a inserção do software com as propostas de atividades para sala de aula, especificamente para alunos do ensino médio possam contribuir no ensino e aprendizagem. Essa sugestão foi idealizada de acordo com um tema, objetivos, procedimentos com imagens do uso de ferramentas e os passos para as construções solicitadas e por fim um questionamento, a fim de fazer o aluno refletir e para que ele perceba o sentido daquela ação para não ser apenas um entretenimento e sim um significado para seu ensino e aprendizagem que posteriormente a essa etapa, em um momento oportuno será realizado atividades em sala de aula referente ao ensino da trigonometria para futuras analises, afim de que seja comprovado a eficácia dos conhecimentos adquiridos com as atividades apresentadas nesse trabalho usando o software Geogebra.

Por fim, este trabalho vem continuar as discussões realizadas sobre o uso do software *Geogebra* no ensino da matemática que a cada ano se intensificam pela sua versatilidade e adaptações para notebooks, tablets e celulares smartphone, isso para que não fiquemos a mercê apenas dos computadores. Mesmo assim, o professor continua sendo mediador do conhecimento e que na atual conjuntura é um dos principais canais para instruir nas inovações, nas tecnologias e no comportamento social. Com isso, nós professores temos um compromisso com a formação de cidadãos para melhorar a sociedade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Talita C. S. **Sólidos Arquimedianos Cabri 3D: Um estudo de truncaturas baseados no renascimento/ 2010.** Dissertação de mestrado profissional em educação matemática, São Paulo: PUC. P. 46, 2010.

ASSUNÇÃO, Ricardo Gomes. **Um estudo das transformações geométricas no plano via congruência e semelhança de figuras planas/ 2015**. Dissertação (mestrado) – PROFMAT – Universidade Federal de Goiás, 2015. 92 p.

BARBOSA, P.R., SOARES, S.R.B. **Trigonometria.** Dissertação (mestrado) – Centro Universitario FIEO - Osasco, p.4, 2007.

BORBA, M.C., PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática.** (3ª Edição). Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação, **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**, 2018. Disponível em htpps:<basenacionalcomum.mec.gov.br> acesso em 21 de abril de 2019 às 21:00.

BRASIL, Ministério da Educação, **Plano Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)**, 2018. Disponível em htpps:<portal.mec.gov.br/pnld> acesso em 23 de abril de 2019 às 19:00.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações; Ensino Médio.** Vol. 2. 3ª ed., São Paulo: Ática, 2016.

FREITAS, Glaucia Maria Queiroz de. **Trigonometria: um estudo teórico em sala de aula com auxilio do software Geogebra/ 2016**. Dissertação (mestrado) – PROFMAT – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, p. 1 e p. 60, 2016.

IEZZI, e outros autores. **Matemática: Ciência e aplicações; ensino médio.** Vol. 1. 9ª ed., São Paulo: Saraiva, p. 214 a 227, 2016.

BRASIL, IBGE. **Pesquisas**, 2016. Disponível em;<wwwibge.gov.br>. Acesso em 04 abril de 2019.

ISOTANI, S. **Desenvolvimento de ferramentas no IGEON: utilizando a Geometria Dinâmica no ensino presencial e a distância.** Dissertação (mestrado). São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. P.2, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T; BEHRENS, Marilda Aparecida. Novas tecnologias e mediação pedagógica. 15. ed. Campinas: Papirus, 2009.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Manoel Rodrigues Paiva**. 2° Edição, São Paulo: Moderna, 2010.

REGO, Sávio Antônio dos Santos. **O uso do Geogebra como ferramenta de ensino em trigonometria/ 2016**. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, p. 10 e p.36, 2016.

SOUSA, Francisco Deilson Rodrigues Barbosa. **A contribuição do software Geogebra no ensino da trigonometria: uma revisão integrativa das dissertações do PROFMAT dos últimos cinco anos**/ 2018. Dissertação (mestrado) – PROFMAT – Universidade Federal do Maranhão, p. 10, 2018.

XAVIER, J. A. **Uma sequência didática para o ensino de trigonometria a partir do software Régua e Compasso**. 2007. 76 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura Plena em Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém. 2007.