UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Exponenciais e logaritmos: Tópicos da história, da teoria e aplicações no mundo real

Alexandre Grilli Freitas

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Alexandre Grilli Freitas

Exponenciais e logaritmos: Tópicos da história, da teoria e aplicações no mundo real

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Profa. Dra. Janete Crema Simal

USP – São Carlos
Março de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Grilli Freitas, Alexandre
G866e Exponenciais e logaritmos: Tópicos da história, da teoria e aplicações no mundo real / Alexandre Grilli Freitas; orientadora Janete Crema Simal. -- São Carlos, 2020.
125 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Exponenciais. 2. Logaritmos. 3. História dos logaritmos. 4. John Napier. 5. Henry Briggs. I. Crema Simal, Janete, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Alexandre Grilli Freitas

Exponentials and logarithms: Topics on history, theory and applications to the real world

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Janete Crema Simal

USP – São Carlos
March 2020

Este trabalho é dedicado à minha esposa Angélica, que com toda sua paciência ajudou a conter todas as minhas angústias e foi compreensiva em relação a minha ausência em vários momentos ao longo do desenvolvimento dessa dissertação; ao meu irmão Felipe por ter topado participar do PROFMAT junto a mim, encarando em conjunto o desafio de enfrentar salas de aula diariamente e estudar constantemente, mesmo sem bolsa de estudo, para o mestrado; à minha mãe Rosane por acreditar no meu sucesso profissional em uma carreira tão bela, porém tão difícil por ser tão desacreditada e desrespeitada por nosso governo e finalmente ao meu pai Edson, por me incentivar a buscar o conhecimento de um assunto que, como ele diz "nunca entendi esse tal de logarítmo".

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que contribuem para o sucesso do importantíssimo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade de São Paulo e principalmente a minha orientadora Dra. Janete Crema Simal, que não fora unicamente orientadora, mas por tudo que aprendi, uma ótima professora com uma incrível paciência.

“ A ostra, para fazer uma pérola,
precisa ter dentro de si um grão de areia
que a faça sofrer. O ato criador, seja na ciência
ou na arte, surge sempre de uma dor e por vezes a dor
aparece como aquela coceira que tem o nome de curiosidade.
Ostra feliz não faz pérola.”
(Rubem Alves)

RESUMO

FREITAS, A. G. **Exponenciais e logaritmos: Tópicos da história, da teoria e aplicações no mundo real**. 2020. 125 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Compilamos neste trabalho tópicos (históricos, teóricos e aplicados) das funções logaritmicas e exponenciais, com o intuito de prover ao professor do ensino médio aspectos que julgamos interessantes referentes a tais funções.

Palavras-chave: aspectos históricos do logaritmo, teoria de exponenciais e logaritmos, aplicações da exponencial no ensino médio, tabela de John Napier, a contaminação de césio 137 em Goiânia.

ABSTRACT

FREITAS, A. G. **Exponentials and logarithms: Topics on history, theory and applications to the real world**. 2020. 125 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In this work we compile topics (historical, theorical and applied) regarding logarithms and exponential functions, aiming at providing high school teacher with aspects we judge interesting regarding these functions.

Keywords: historical aspects of logarithm, exponentials and logarithms theory, applications of exponential in high school, John Napier table, cesium 137 contamination in Goiânia.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O presente trabalho compila aspectos que julgamos interessantes no estudo (e ensino) das funções exponenciais e logarítmicas. Visa fornecer a professores do Ensino Médio o desenvolvimento teórico de tais funções numa abordagem que vai do nível do ensino básico até o nível superior. Apresenta também tópicos da história das funções logarítmicas, e contextualiza a exponencial em problemas concretos. Acreditamos que explorando aspectos históricos curiosos e aplicações em problemas contemporâneos, relacionados a tais temas, o professor que for ministrar estes conteúdos terá subsídios para tornar sua aula mais atrativa para os alunos do ensino médio (e de cursos preparatórios para vestibulares). Apresentamos abaixo o conteúdo de cada capítulo.

Durante séculos, na busca para simplificação de operações com números "astronômicos", o homem buscou maneiras de se transformar o cálculo de produtos e divisões em somas e diferenças, respectivamente. Esta busca passou pela exploração de propriedades das funções trigonométricas com as tabelas de Ptolomeu, e no século XVI, pelas tabelas de Napier, com as ideias primitivas do logaritmo. Nesta última, já se tinha em mente as relações entre progressões geométricas e progressões aritméticas. Assim no Capítulo 2 contamos um pouco da história de Napier, o "inventor" dos logaritmos e exploramos brevemente as ideias predecessoras a criação da sua tábua de logaritmos. Exibimos parte desta tabela explicando cada um de seus elementos, bem como fazemos seu uso na conversão das operações de multiplicação e divisão, respectivamente em somas e diferenças. Além disso através da definição, dita geométrica, do logaritmo de Napier e sua transcrição em termos de equações diferenciais, vimos qual sua relação com o logaritmo atual. As tabelas de Napier foram aperfeiçoadas por Briggs e utilizadas até meados do século XX e as ideias de sua construção estão mostradas na Sequência didática I, contida no Capítulo 8.

No Capítulo 3, a partir das potências com expoentes naturais e suas propriedades, evoluímos para a construção de potências com expoentes reais, de modo que tais propriedades fossem preservadas.

No Capítulo 4 definimos a função exponencial mostrando sua continuidade e no Capítulo 5 definimos a função logaritmica e estudamos suas propriedades.

No Capítulo 6 motivamos o aparecimento do número e através de um problema financeiro envolvendo cômputo de juros em intervalos de tempo cada vez menores, o que já era alvo de interesse por banqueiros no século XVII. Com o número e em mãos, mostramos que as funções exponenciais e logarítmicas são deriváveis.

No Capítulo 7 passamos a explorar problemas envolvendo quantidades que variam com o tempo e cujas taxas de variação dependem da própria quantidade e, deduzimos através do Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias, que tais quantidades devem ser dadas através de funções do tipo exponencial. Então passamos a descrever modelos de problemas ligados à dinâmica populacional, radioatividade, arqueologia, fármacos radioativos, finanças e resfriamento de corpos.

Por fim, exibimos no Capítulo 8 duas sequências didáticas. A primeira explora as propriedades do logaritmo através da construção da tabela logaritmica de Briggs e a utiliza na conversão de multiplicações e produtos em somas e diferenças, respectivamente. A segunda explora problemas contemporâneos apresentados no Capítulo 7, para contextualização das exponenciais. As sequências didáticas foram modificadas a partir de uma experiência do autor com alunos do terceiro ano do Ensino Médio na escola COC, situada em Rio Claro-SP.

CAPÍTULO

2

NAPIER E A ADMIRÁVEL INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

2.1 John Napier

Nascia na metade do século XVI, John Napier, o oitavo Barão de Merchiston, localizada a sudeste da Escócia. O menino rico e talentoso estudou em sua casa até os seus 13 anos, idade normal para o ingresso na Universidade de St. Andrews, a mais antiga da Escócia. Não se sabe ao certo se Napier se formou em St. Andrews, possivelmente optou por estudar no exterior, costumeiro entre os jovens nobres da época. Contudo, em 1571 ele voltara à Escócia, onde se casou e em pouco tempo, após o falecimento de seu pai em 1603, mudou-se para perto de Edimburgo, no castelo de Merchiston, onde além do trabalho sobre logaritmos, não poupou suas energias ao escrever um livro tentando provar que o papa de sua época era o Anticristo. Este livro atingiu 10 edições ainda em vida do autor e 21 edições no total.

Não foi apenas no campo teológico que Napier ficou conhecido, mas como inventor também. Uma de suas invenções consistia em um parafuso hidráulico para regular o nível da água nas minas de carvão. Demonstrou também estima por questões relacionadas a guerra, planejando armas que visavam a defesa de seu país. Dentre essas, segundo BURTON (2011, p.351), assim como Arquimedes, Napier elaborou um sistema de espelhos que incendiariam navios inimigos a grandes distâncias, uma peça de artilharia que tinha a finalidade de "eliminar de um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura", produção de "dispositivos para navegar debaixo d'água" e uma carruagem blindada que teria o poder de "espalhar a destruição por todas as partes" Eves (2005, p. 342). Não há registros se essas armas foram concretizadas, mas o intrigante é que a metralhadora, o submarino e o tanque se sucederam na primeira guerra mundial.

É possível que Napier acreditasse que seria lembrado pelas suas obras no campo teológico ou por suas invenções engenhosas, mas foi numa atividade de descontração — o estudo da Matemática abstrata— que seu nome repousou, entrando para a história da Matemática.

2.2 A prenunciada ideia do logaritmo

É charmoso e romântico pensar que a ideia da criação dos logaritmos por Napier surgiu de forma não usual, acontecendo de maneira repentina e inesperada através de um *insight* espetacular, contudo barbaramente inexata; muito provavelmente a ideia de Napier é uma evolução de ideias de outros grandes matemáticos, que assim como ele, se dedicaram ao longo de muitos anos para concluí-las, como veremos aqui.

Sabe-se que o desenvolvimento dos logaritmos surgiu da necessidade de facilitar longos cálculos, especificamente reduzindo multiplicações e divisões a operações simples de adição e subtração. De acordo com BURTON (2011, p.352) o termo logaritmo foi criado pelo próprio Napier e significa número estimado, contudo os termos número de razão e número artificial se revelam em sua obra traduzida para o inglês. Vejamos abaixo algumas ideias bem conhecidas em sua época, que possivelmente são predecessoras dos logaritmos.

• **Fórmulas de Werner:**

Comecemos por uma ideia que nos remete a trigonometria, conhecida por fórmulas de Werner(1468-1528). Ao que tudo indica o alemão as utilizou como forma de facilitar cálculos astronômicos, sendo largamente utilizadas ao fim do século XVII por diversos astrônomos. São quatro as fórmulas:

$$\begin{aligned}
2\,\text{sen}\,(a)\,\cos\,(b) &= \text{sen}\,(a-b) + \text{sen}\,(a+b) \qquad (I)\\
2\cos\,(a)\,\cos\,(b) &= \cos\,(a-b) + \cos\,(a+b) \qquad (II)\\
2\cos\,(a)\,\text{sen}\,(b) &= \text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b) \qquad (III)\\
2\,\text{sen}\,(a)\,\text{sen}\,(b) &= \cos\,(a-b) - \cos\,(a+b) \qquad (IV)
\end{aligned}$$

Utilizemos como exemplo a segunda fórmula. Considere a seguinte multiplicação: 9563 por 5740.

$$9563 \cdot 5740 = 0,9563 \cdot 0,5740 \cdot 10^8$$

Repare que os dois fatores acima foram escritos no formato abaixo:

$$\alpha \cdot 10^n; \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

pois o intervalo em que α varia está contido na imagem da função cosseno, que varia entre -1 e 1, incluindo os extremos.

Com o auxílio de uma tábua de cossenos, os valores a e b tais que $\cos(a) \cong$ 0,5740 e $\cos(b) \cong$ 0,9563, então a=55° e b=17°.

Pela Fórmula (II) acima e utilizando novamente uma tabela de cossenos, temos:

$$10^8 \cdot \cos(55°) \cdot \cos(17°) = 10^8 \cdot \frac{\cos(55° + 17°) + \cos(55° - 17°)}{2} = 10^8 \cdot 0,5485.$$

Então, o produto dado passou a ser calculado através de uma adição. Fórmulas como estas são conhecidas por fórmulas de prostaférese, com base em uma palavra grega que significa “adição e subtração”.

• **Tabela de Stifel:**

Talvez a ideia que mais influenciou a criação do conceito de logaritmos, foi a publicação, em 1544, da obra conhecida por Arithmetica Integra, pelo matemático algebrista alemão Michael Stifel. Obra esta dedicada aos números racionais, números irracionais e álgebra. Na parte que trata de números racionais, Stifel enfatiza o quão proveitoso poderia ser a associação de uma progressão aritmética a uma progressão geométrica, prenunciando assim, de quase um século, por meio de métodos que mostraremos logo a seguir, a invenção dos logaritmos.

O algebrista alemão organizou uma tabela em que a segunda linha (uma progressão geométrica de razão 2) é representada por potências de base 2 e a primeira linha (uma progressão aritmética de razão 1) contém seus respectivos expoentes:

Tabela 1 – Associação das progressões

P.A.	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P.G.	2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Fonte – Próprio autor

Apontando que a soma de termos na primeira linha possui um vínculo com a multiplicação de termos na segunda linha. Por exemplo, para se realizar a multiplicação entre 32 e 64, procuramos seus correspondentes na primeira linha que são 5 e 6, somando-se 5 e 6 obtemos 11. Localizando, então, na primeira primeira linha o 11, concluímos que seu correspondente na segunda linha é 2048, logo $2^5 \cdot 2^6 = 32 \cdot 64 = 2048$.

Um processo semelhante poderia ser utilizado para realizar divisões, mas ao invés da soma poderia-se utilizar a subtração, afinal o sucesso do método decorre das conhecidas propriedades:

$$(i) \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad \frac{a^b}{a^c} =^{a^{b-c}}, \qquad a \neq 0$$

Reparemos que uma consequência da propriedade (ii) é que se um par de números desta tabela é proporcional a outro par, então o expoente correspondente ao quociente do primeiro par será o mesmo do correspondente ao outro par.

Vejamos um exemplo:

$$\frac{128}{32} = \frac{32}{8} \Rightarrow 2^{7-5} = 2^{5-3}$$

É possível que as Fórmulas de Werner e a tabela de Stifel tenham fornecido a Napier a ideia de desenvolver um método que substituiria as operações de multiplicação e divisão por soma e subtração.

2.3 A invenção dos Logaritmos (NapLog)

Os métodos mostrados até então, são interessantes, contudo limitados, pois nos permite realizar um número limitado de multiplicações e divisões, dado que as potências de base 2 crescem rapidamente, bem como o intervalo entre duas potências consecutivas.

Logo, os esforços para facilitar ainda mais as contas, culminaram na invenção dos logaritmos por Napier. Este resolveu utilizar como "base" um número ligeiramente próximo de 1, fazendo com que as suas potências crescessem lentamente. Como consequência, a distância entre potências consecutivas ficou pequena, dessa forma, eventuais lacunas poderiam ser preenchidas por interpolação para garantir maior exatidão. Todavia, como na época era muito comum pelos astrônomos, o uso de valores de senos e cossenos, seria pertinente criar uma tábua com ampla quantidade de números no intervalo de 0 a 1.

Assim, Napier optou por utilizar 0,9999999 (ou em notação moderna, $1-10^{-7}$). Para evitar o incômodo de se trabalhar com decimais, cada potência era multiplicada por 10^7. Ele então chamou n de logaritmo de N, onde:

$$N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$$

Para fins de simplificação de linguagem denotaremos o logaritmo de N por

$$\text{NapLog}\, N = n$$

Então podemos concluir que:

$$\text{NapLog}\left[10^7(1-10^{-7})^0\right] = \text{NapLog}(10000000) = 0;$$
$$\text{NapLog}\left[10^7(1-10^{-7})^1\right] = \text{NapLog}(9999999) = 1;$$

$$\text{NapLog}\left[10^7(1-10^{-7})^2\right] = \text{NapLog}(9999998) = 2;$$

E assim por diante.

Observe que a sequência: $\left[10^7(1-10^{-7})^0\right]$, $\left[10^7(1-10^{-7})^1\right]$, $\left[10^7(1-10^{-7})^2\right]$, etc de fato é um progressão geométrica de razão 0,9999999.

Seguindo essa linha de raciocínio, Napier viria a criar a sua tábua de logaritmos, contudo dedicar-se-ia a encontrar uma maneira simples – ou a mais simples possível – de realizar os cálculos da tabela, uma vez que seria laborioso e enfadonho realizar isto através de multiplicações envolvendo o fator 0,9999999 (cabe observar que na época não se utilizava notação de expoentes). Veremos adiante como ele calculou as potências de 0,9999999. Todavia, utilizaremos simbolismo moderno. Usando tal simbolismo, consideraremos a progressão geométrica:

$$N_n = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^n$$

Assim,

$$N_1 = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^1$$
$$N_2 = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^2 = 10^7(1-10^{-7})(1-10^{-7}) = N_1(1-10^{-7}) = N_1 - \frac{N_1}{10^7}$$
$$N_3 = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^3 = 10^7(1-10^{-7})^2(1-10^{-7})^1 = N_2 - \frac{N_2}{10^7}$$

Obtendo então, a seguinte equação de recorrência de primeira ordem:

$$N_n = N_{n-1} - \frac{N_{n-1}}{10^7}$$

A partir desse raciocínio simplificador, Napier realizou os cálculos através das seguintes subtrações sucessivas:

$$\begin{array}{l} 10000000,0000000 \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \boxed{9999999,0000000} \\ \quad -1,0000000 \\ \hline 9999999,0000000 \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \boxed{9999998,0000001} \\ \quad -0,9999999 \\ \hline 9999998,0000001 \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \boxed{9999997,0000003} \\ \quad -0,9999998 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9999997,0000003 & \\ & \Rightarrow \boxed{9999996,0000006} \\ -0,9999997 & \end{array}$$

...

Sendo $N_1 = 9999999$, $N_2 = 9999998$, $N_3 = 9999997$.

Dessa maneira, Napier publicou em 1614 sua obra sobre logaritmos intitulada *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos), a qual dedicou mais de 50 páginas de explicação de métodos logaritmicos de cálculo, seguido de 90 páginas de tabelas numéricas que envolvem o cálculo do logaritmo de senos de 0° a 90°, sendo cada grau subdividido de 0' a 60'.

2.4 Logaritmo de Napier em notação moderna

Napier nunca mencionou em seus trabalhos algo sobre "base" para seus logaritmos, ainda assim, analisando a definição em termos geométricos presente em seu trabalho, percebemos que o conceito de "base" está implícito a este. Vejamos abaixo, em linguagem moderna, como seria essa definição:

Sejam MN um segmento de reta de medida 10^7 e PQ uma semirreta de origem P (figura 1) e vamos considerar que os pontos móveis O e R coloquem-se em movimento a partir de M e P, respectivamente, e com mesma velocidade inicial, tal que, a velocidade de O é numericamente igual a $\overline{ON}$ e a velocidade de R é constante, o que nos leva a concluir que a velocidade de R vale 10^7.

Então Napier definiu que $\overline{PR}$ é logaritmo de $\overline{ON}$, isto é:

$$\overline{PR} = \text{NapLog}\overline{ON}$$

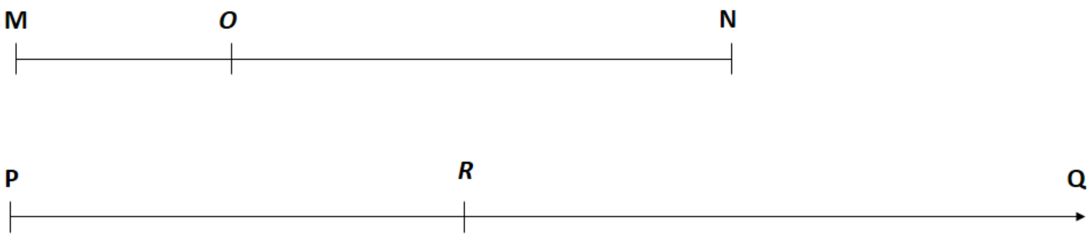
Adotemos $\overline{PR}$=X e $\overline{ON}$=Y, de modo que $X = NapLog(Y)$.

A partir da situação relacionada na figura a seguir poderemos concluir que de acordo com as notações atuais de logaritmos, teremos:

$$X = \text{NapLog}(Y) = 10^7 \cdot log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{Y}{10^7} \right)$$

Vejamos como isso dá. Para tanto, utilizaremos a linguagem de equações diferenciais para descrever este problema.

Figura 1 – $\overline{PR}$ = NapLog$\overline{ON}$



Fonte – Próprio autor

Colocando M e P na posição 0, consideremos que $Z(t)$ fornece o deslocamento do ponto móvel O com o tempo t e $X(t)$, o deslocamento do ponto móvel R também em função do tempo , ambos a partir de 0. Então:

$$Z'(t) = 10^7 - Z(t), \qquad X'(t) = \text{cte} \quad \text{e} \quad Z'(0) = X'(0) = 10^7 - Z(0) = 10^7.$$

Consequentemente $Z(t)$ e $X(t)$ são soluções dos seguintes problemas de valores iniciais:

$$\begin{cases} Z' + Z = 10^7 \\ Z(0) = 0 \end{cases} e \begin{cases} X' = 10^7 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o segundo problema temos que:

$$X(t) = 10^7 t \tag{2.1}$$

Resolvendo o primeiro problema temos que:

$$Z'(t)e^t + Z(t)e^t = 10^7 e^t \Rightarrow \int_0^t (Z(s)e^s)' ds = \int_0^t 10^7 e^s ds$$
$$\therefore Z(t)e^t - Z(0)e^0 = 10^7(e^t - 1) \Rightarrow Z(t) = 10^7(1 - e^{-t})$$

$$\text{Mas} \quad Y(t) = \overline{ON} = 10^7 - Z(t) = 10^7 - 10^7 + 10^7 e^{-t}$$

$$Y(t) = 10^7 e^{-t} \tag{2.2}$$

$$\text{Assim,} \quad e^{-t} = \frac{Y}{10^7} \Leftrightarrow -t = ln\left(\frac{Y}{10^7}\right)$$

$$\text{Portanto,} \quad X = 10^7 t = -10^7(-t) = -10^7 ln\left(\frac{Y}{10^7}\right) = 10^7 log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right) = \text{NapLog}(Y)$$

Dessa maneira temos, basicamente, um logaritmo moderno na base $\frac{1}{e}$, isto é:

$$\text{NapLog}(Y) = log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right)^{10^7}$$ [1]

Em notação moderna é possível também isolar X, simplesmente por:

$$Y = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^X \Leftrightarrow \frac{Y}{10^7} = \left(1-10^{-7}\right)^X \Leftrightarrow X = \log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{Y}{10^7}\right) \tag{2.3}$$

Para se chegar que $\text{NapLog}\,(Y) = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right)^{10^7}$ poderia-se usar o 2^o limite fundamental (pp. 72-76)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

de forma que, para $X = -10^7$, $1+\frac{1}{X} = 1-10^{-7}$ e $\left(1-10^{-7}\right)^{-10^7} \approx e$ ou $\dfrac{1}{e} \approx \left(1-10^{-7}\right)^{10^7}$.

De (2.3), $\dfrac{Y}{10^7} = \left(1-10^{-7}\right)^X = \left[\left(1-10^{-7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{X}{10^7}} \approx \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{n}{10^7}} \Leftrightarrow$

$$\frac{X}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right) \Leftrightarrow X = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right)^{10^7}$$

Então Eves (2005, p. 345) complementa:

> Nota-se ademais que, sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, y decresce em progressão geométrica enquanto x cresce em progressão aritmética. Assim, verifica-se o princípio fundamental de um sistema de logaritmos, a associação de uma progressão geométrica a uma aritmética. Daí que, por exemplo, se $a/b = c/d$, então $\text{NapLog}(a) - \text{NapLog}(b) = \text{NapLog}(c) - \text{NapLog}(d)$, que é um dos muitos resultados estabelecidos por Napier.

A igualdade mencionada na citação acima pode ser facilmente demonstrada utilizando-se as propriedades de NapLog que serão mostradas em seguida.

[1] Com uma simbologia desconhecida por Napier, a função neperiana possui base $\frac{1}{e}$, portanto expressões da forma $ln(x)$ não devem ser chamadas de logaritmos neperianos, mas de logaritmos naturais, afinal $ln(x) = log_e(x)$.

2.5 Propriedades do NapLog

Inspirados nas conhecidas propriedades dos logaritmos modernos, vejamos como se comporta o NapLog para produtos e divisões. Para tanto, utilizamos como referência Edwards (1979, p. 149).

$$\boxed{\mathrm{NapLog}(MN) = \mathrm{NapLog}(M) + \mathrm{NapLog}(N) - \mathrm{NapLog}(1)} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\mathrm{NapLog}\left(\frac{M}{N}\right) = \mathrm{NapLog}(M) - \mathrm{NapLog}(N) + \mathrm{NapLog}(1)} \tag{2.5}$$

Para as demonstrações das equações acima, adotaremos:

$$m = \mathrm{NapLog}\, M,\ n = \mathrm{NapLog}\, N \text{ e } Q = \mathrm{NapLog}(1), \text{ isto é,}$$

$$M = 10^7(1-10^{-7})^m,\ N = 10^7(1-10^{-7})^n \text{ e } 1 = 10^7(1-10^{-7})^Q.$$

Demonstração. $\mathrm{NapLog}(MN) = \mathrm{NapLog}(M) + \mathrm{NapLog}(N) - \mathrm{NapLog}(1)$:
De fato,

$$MN = 10^7(1-10^{-7})^{m+n}10^7 = 10^7(1-10^{-7})^{m+n-Q} \Rightarrow \mathrm{NapLog}(MN) = m+n-Q.$$

□

Demonstração. $\mathrm{NapLog}\left(\frac{M}{N}\right) = \mathrm{NapLog}(M) - \mathrm{NapLog}(N) + \mathrm{NapLog}(1)$:
De fato,

$$\frac{M}{N} = \frac{10^7}{10^7}(1-10^{-7})^{m-n} = 10^7(1-10^{-7})^{m-n}10^{-7} = 10^7(1-10^{-7})^{m-n+Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{NapLog}\left(\frac{M}{N}\right) = m-n+Q.$$

□

Observação 1. Referente a citação contida na página 30, mostremos que :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NapLog}(a) - \mathrm{NapLog}(b) = \mathrm{NapLog}(c) - \mathrm{NapLog}(d)}$$

De fato, $NapLog\left(\frac{a}{b}\right) = NapLog\left(\frac{c}{d}\right)$ e segue de (2.5) que

$$\mathrm{NapLog}(a) - \mathrm{NapLog}(b) + \mathrm{NapLog}(1) = \mathrm{NapLog}(c) - \mathrm{NapLog}(d) + \mathrm{NapLog}(1)$$

Observação 2. Como $0 < 0.9999999 < 1$, e considerando $M = 10^7(0.9999999)^m$ e $N = 10^7(0.9999999)^n$, do Teorema 3.10 (resultado a ser mostrado posteriormente), temos:

$$M > N \Leftrightarrow m < n.$$

Ou ainda,

$$\boxed{M > N \Leftrightarrow \text{NapLog}(M) < (N)}$$

Observação 3. Para o valor de $\text{NapLog}(1)$ devemos nos lembrar que se $\text{NapLog}(Y) = log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{Y}{10^7}\right)^{10^7}$, então:

$$\text{NapLog}(1) = 10^7 log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{10^7}\right) = -10^7 log_{\frac{1}{e}}\left(10^7\right) \approx 161180957.$$

Logo,

$$\boxed{\text{NapLog}(1) = \text{NapLog}[10^7(1-10^{-7})^Q] = Q \approx 161180957.} \tag{2.6}$$

Ao que tudo indica John Napier desconhecia[2] e consequentemente não considerava em seus cálculos de multiplicação e divisão, o valor de $NapLog(1)$ como aparece nas Equações (2.4) e (2.5). Assim, para o cálculo de produtos era necessário fazer um ajuste no resultado através do fator multiplicativo 10^7 e na divisão de 10^{-7}, como veremos adiante.

Mais à frente comentaremos o que motivou Henry Briggs a adotar base 10 para seu sistema de logaritmos, o que, entre outras coisas, resultou nas seguintes propriedades:

i) $\log(ab) = \log(a) + \log(b); \quad a,b > 0$

ii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad a,b > 0$

2.6 A tabela de Napier

Apresentaremos a tabela de Napier e algumas de suas aplicações possíveis, o que nos levará a entender por que esta foi uma revolução em um tempo que não havia calculadora.
A diante seguem as imagens das duas primeiras, das noventa páginas de tabela do livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (NAPIER, 1614), e posteriormente será explicado o significado de cada coluna da tabela.

[2] Um sinal que indica o desconhecimento é que o valor de $Q \approx 161180957$ não pode ser encontrado na tabela; outro sinal ocorre no cálculo da tangente pela tabela, que consiste na simples diferença entre os dois Naplogs de uma linha, como veremos adiante.

Figura 2 – Primeira página de tabela do livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Gr. 0

0

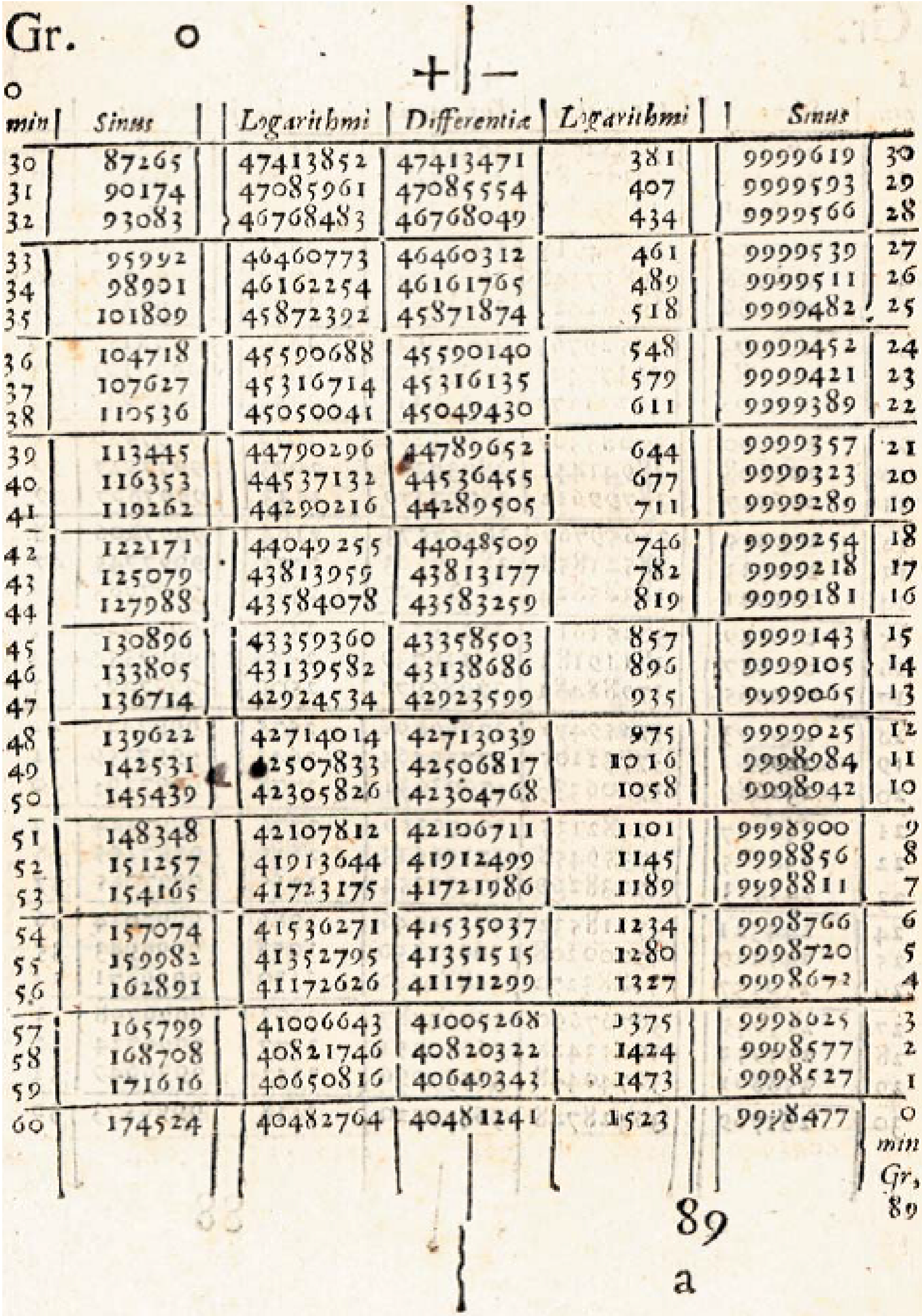
\+ | −

min	Sinus.	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Figura 3 – Segunda página de tabela do livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio



Gr. 0

0

+ | −

min	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus	
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30
31	90174	47085961	47085554	407	9999593	29
32	93083	46768483	46768049	434	9999566	28
33	95992	46460773	46460312	461	9999539	27
34	98901	46162254	46161765	489	9999511	26
35	101809	45872392	45871874	518	9999482	25
36	104718	45590688	45590140	548	9999452	24
37	107627	45316714	45316135	579	9999421	23
38	110536	45050041	45049430	611	9999389	22
39	113445	44790296	44789652	644	9999357	21
40	116353	44537132	44536455	677	9999323	20
41	119262	44290216	44289505	711	9999289	19
42	122171	44049255	44048509	746	9999254	18
43	125079	43813959	43813177	782	9999218	17
44	127988	43584078	43583259	819	9999181	16
45	130896	43359360	43358503	857	9999143	15
46	133805	43139582	43138686	896	9999105	14
47	136714	42924534	42923599	935	9999065	13
48	139622	42714014	42713039	975	9999025	12
49	142531	42507833	42506817	1016	9998984	11
50	145439	42305826	42304768	1058	9998942	10
51	148348	42107812	42106711	1101	9998900	9
52	151257	41913644	41912499	1145	9998856	8
53	154165	41723175	41721986	1189	9998811	7
54	157074	41536271	41535037	1234	9998766	6
55	159982	41352795	41351515	1280	9998720	5
56	162891	41172626	41171299	1327	9998672	4
57	165799	41006643	41005268	1375	9998625	3
58	168708	40821746	40820322	1424	9998577	2
59	171616	40650816	40649343	1473	9998527	1
60	174524	40482764	40481241	1523	9998477	0
						min
						Gr. 89

89

a

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Em seguida colocamos parte da primeira página da tabela adaptada para a linguagem moderna:

Figura 4 – Reescrevendo a tabela de Napier

0°			+ | -			
α	10^7sen(α) = $10^7(0{,}9999999)^n$	NapLog[10^7sen(α)] = NapLog[$10^7(0{,}9999999)^n$]	NapLog [10^7Tg(α)]	NapLog[10^7sen(β)] = NapLog[$10^7(0{,}9999999)^m$]	10^7sen(β) = $10^7(0{,}9999999)^m$	$\beta = 90 - \alpha$
$0°0'$	0	Infinito	Infinito	0	10000000	$89°60'$
$0°1'$	2900	81425681	81425680	1	10000000	$89°59'$
$0°2'$	5818	74494213	74494211	2	9999998	$89°58'$
$0°3'$	8727	70439564	70439560	4	9999996	$89°57'$
$0°4'$	11636	67562746	67562739	7	9999993	$89°56'$
...	...	...	...	...	...	...
$0°29'$	84357	47752859	47752503	356	9999644	$89°31'$
$0°30'$	87265	47413852	47413471	381	9999619	$89°30'$
						89°

Fonte – Próprio autor

Note que no canto superior esquerdo da página da tabela original aparece Gr. 0, que corresponde ao 0°. Bem como no canto inferior direito vem o número 89, que corresponde a 89°. Além disso, a tabela aparece graduada em minutos de 0’ a 60’. Esta graduação aparece na primeira coluna em ordem crescente e é retomada na última coluna em ordem decrescente. Esta ordenação permite que numa mesma linha visualizemos as informações referentes a um ângulo e a seu complementar; por exemplo, na tabela original vemos os números 2 e 58 na mesma linha, o que corresponde, na tabela adaptada a 0°2’ e 89°58’, respectivamente, que são ângulos complementares.

Na segunda coluna aparecem os valores de 10^7 sen α e na terceira o NapLog de 10^7 sen α. Seguindo a mesma linha, no sentido da direita para a esquerda, vemos as mesmas informações , porém referentes ao ângulo complementar contido na primeira coluna.

Por exemplo, pela tabela, 10^7 sen $(0°2') = 5818$. Assim, de acordo com a terceira coluna

$\text{NapLog}(10^7 \text{ sen}\,(0°2')) = 74494213$, isto é, $10^7 \text{ sen}\,(0°2') = 10^7(0,9999999)^{74494213}$

Na mesma linha, observando da direita para a esquerda, na segunda coluna encontramos o valor de $10^7 \text{ sen}\,(\beta)$ e na terceira coluna o NapLog de $10^7 \text{ sen}\,\beta$. Nesta linha, por exemplo, nota-se que $10^7 \text{ sen}\,(89°58') = 9999998$. Assim, de acordo com a terceira coluna, $\text{NapLog}(10^7 \text{ sen}\,(89°58')) = 2$, isto é, $10^7 \text{ sen}\,(89°58') = 10^7(0,9999999)^2$.

Como $\beta = 90° - \alpha$, então $10^7 \cos\,(\beta) = 10^7 \text{ sen}\,(90° - \beta)$. Esse raciocínio nos permite encontrar valores de cossenos pela tabela, como veremos na próxima seção.

Para qualquer $\text{sen}\,\alpha$ localizado em alguma das linhas da tabela, encontramos na última coluna da referida linha o correspondente valor de $\cos\beta$, pois sendo $\alpha = 90° - \beta$, tem-se que:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha) = \cos\beta$$

Assim, do exemplo anterior:

$$10^7 \text{ sen}\,(0°2') = 5818 = 10^7 \cos\,(89°58') \text{ e}$$

$$10^7 \text{ sen}\,(89°58') = 9999998 = 10^7 \cos\,(0°2')$$

Um outro exemplo; se quiséssemos encontrar o valor $10^7 \cos\,(60°)$, procuraríamos a linha que contém o $10^7 \text{ sen}\,(30°)$, vejamos:

Figura 5 – Cosseno na tabela de Napier

Gr. 30 + | –

30 min	Sinus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344	58

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Conclui-se que $10^7 \cos\,(60°) = 10^7 \text{ sen}\,(30°) = 5000000$

• A tangente na tabela:

Agora estamos aptos a compreender a quarta coluna. Note que na tabela original aparece a palavra "differentia", e de fato ela contém a diferença entre os valores da terceira e quinta colunas, isso é, a diferença entre $\text{NapLog}(10^7 sen\alpha)$ e $\text{NapLog}(10^7 \cos\alpha)$, assim esta era utilizada para calcular a tangente.

De fato,

$$\text{NapLog}(10^7 \text{ sen}\,\alpha) = n \text{ e } \text{NapLog}(10^7 \cos\alpha) = \text{NapLog}(10^7 \text{ sen}\,(90^\circ - \alpha) = m \Rightarrow$$

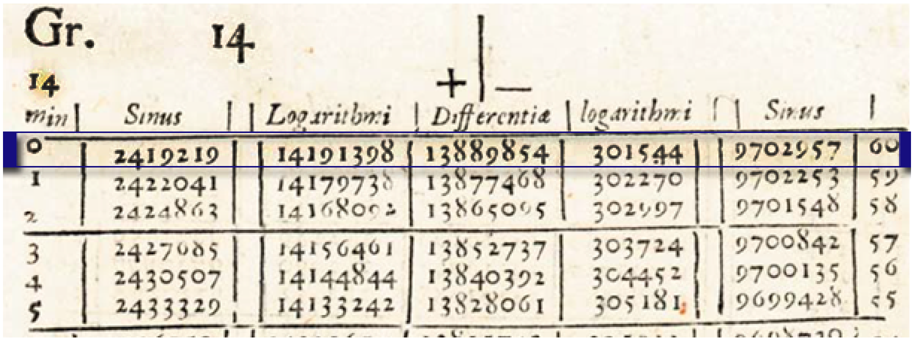
$$\Rightarrow 10^7 \text{ tg}\,\alpha = 10^7 \frac{10^7(0,9999999)^n}{10^7(0,9999999)^m} = 10^7(0,9999999)^{n-m}.$$

Logo,

$$\text{NapLog}(10^7 \text{ tg}\,\alpha) = n - m = \text{NapLog}(10^7 \text{ sen}\,\alpha) - \text{NapLog}(10^7 \cos\alpha)$$

Exemplo Vamos calcular a tg (14°), usando a tabela de Napier :

Figura 6 – Tangente na tabela de Napier



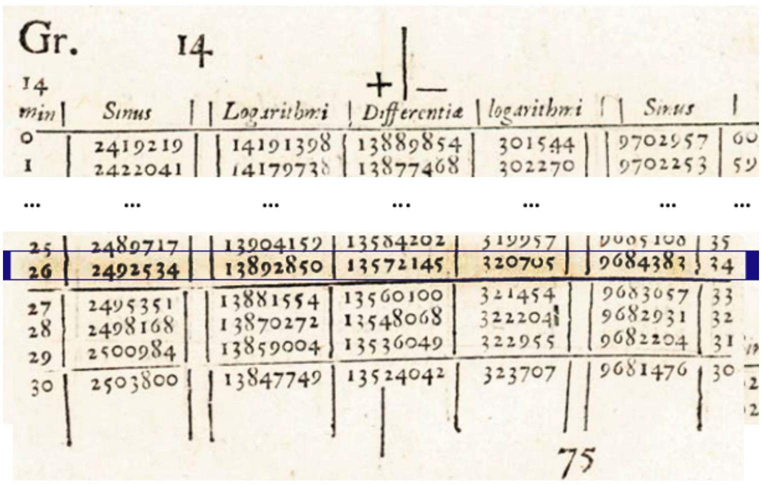
Gr. 14

14 min	Sinus	Logarithmi	+ | − Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	2419219	14191398	13889854	301544	9702957	60
1	2422041	14179738	13877468	302270	9702253	59
2	2424863	14168002	13865005	302997	9701548	58
3	2427685	14156461	13852737	303724	9700842	57
4	2430507	14144844	13840392	304452	9700135	56
5	2433329	14133242	13828061	305181	9699428	55

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Pela quarta coluna notemos que $\text{NapLog}(10^7 \text{ tg } 14^\circ) = 13889854$; em seguida devemos procurar, em alguma das páginas, na terceira ou quinta coluna, o valor mais próximo de 13889854. Nesse exemplo, pôde-se encontrar o valor 13892850 na terceira coluna da mesma página (veja na figura abaixo):

Figura 7 – Tangente na tabela de Napier



Gr. 14

14 min	Sinus	Logarithmi	+ | − Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	2419219	14191398	13889854	301544	9702957	60
1	2422041	14179738	13877468	302270	9702253	59
...	...	...	...	...	...	...
25	2489717	13904159	13584202	319957	9685106	35
26	2492534	13892850	13572145	320705	9684383	34
27	2495351	13881554	13560100	321454	9683657	33
28	2498168	13870272	13548068	322204	9682931	32
29	2500984	13859004	13536049	322955	9682204	31
30	2503800	13847749	13524042	323707	9681476	30

75

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Daí, $\text{NapLog}(10^7 \text{ tg } 14^\circ) = 13889854 \approx 13892850 = \text{NapLog}(2492534)$.

Portanto, 10^7 tg $14° \approx 2492534 \Rightarrow$ tg $14° \approx 0,2492534$.

Abaixo uma tabela comparativa entre os valores que obtivemos para tg $14°$ calculando de formas diferentes:

Tabela 2 – Tabela comparativa

Calculadora	0,24932800284316
Tabela	0,2492534

Fonte – Próprio autor

• **Realizando multiplicações e divisões:**

Como sabemos, o interesse de Napier era calcular a multiplicação através da soma e a divisão através da subtração. Nas próximas seções mostraremos como eram feitas essas operações por meio da tabela.

A multiplicação:

Vejamos como utilizar a tabela e transformar o cálculo de um produto em uma soma. Primeiramente, observemos que se $M = 10^7(0.9999999)^m$, $N = 10^7(0.9999999)^n$ e $P = 10^7(0,9999999)^{m+n}$, então:

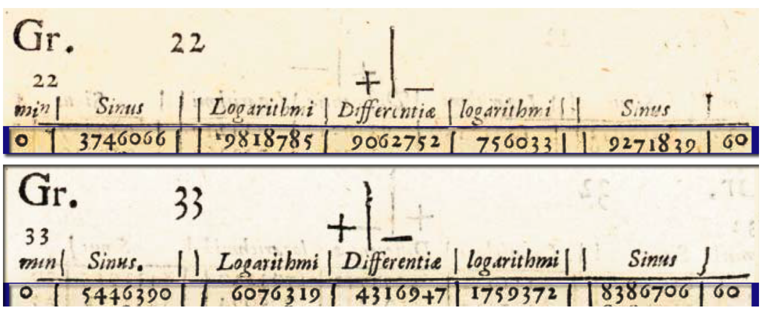
$$M.N = 10^7[10^7(0.9999999)^{m+n}] \Rightarrow M \cdot N = 10^7 \cdot P \tag{2.7}$$

.

Assim, para encontrar o valor de $M \cdot N$ basta buscar o valor de P, tal que NapLog$(P) = m+n$.

Exemplo Determinemos o produto $3746066 \cdot 5446390$.

Figura 8 – Localização de valores na tabela de Napier


Gr. 22

min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	3746066	9818785	9062752	756033	9271839	60

Gr. 33

min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	5446390	6076319	4316947	1759372	8386706	60

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

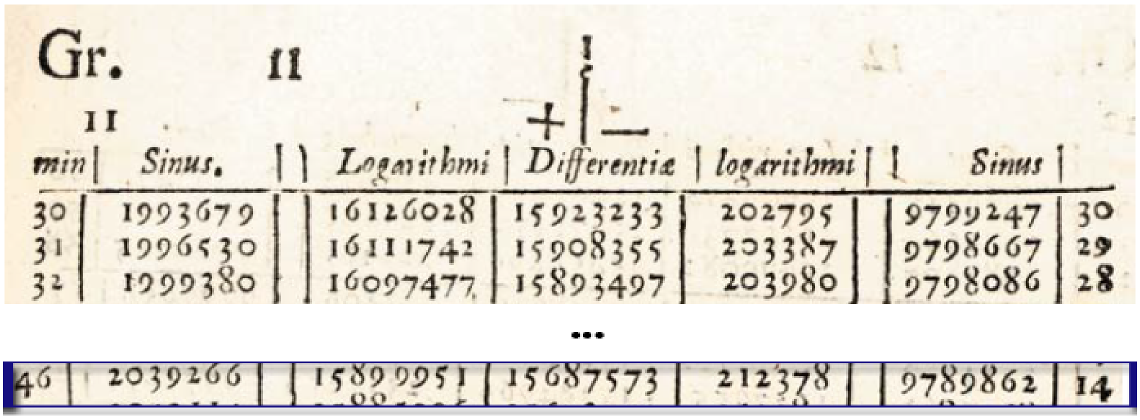
Sejam $M = 3746066$ e $N = 5446390$. Que na tabela correspondem, respectivamente, a $10^7 sen(22°)$ e $10^7 sen(33°)$.

Buscamos na segunda ou sexta coluna da tabela estes valores(ou o mais próximo possível deles) e obtemos da terceira coluna que:

$$M = 3746066 = 10^7(0,9999999)^{9818785} \text{ e } N = 5446390 = 10^7(0,9999999)^{6076319}.$$

Assim denotando-se $m = 9818785$ e $n = 6076319$ temos que $n+m = 15895104$. Voltando a tabela, buscamos na terceira coluna este valor (ou o valor mais próximo a ele) e encontramos na segunda coluna correspondente a $sen(11°46')$ o valor 2039266 isto é, $10^7(0,9999999)^{15895104} = P \approx 2039266$.

Figura 9 – Exemplo de multiplicação



Gr. 11

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
30	1993679	16126028	15923233	202795	9799247	30
31	1996530	16111742	15908355	203387	9798667	29
32	1999380	16097477	15893497	203980	9798086	28
...						
46	2039266	15899951	15687573	212378	9789862	14

Fonte – livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Logo, de acordo com (2.7) temos:

$$3746066 \cdot 5446390 = 10^7 P = 10^7(0.9999999)^{15.895.104} \approx 2039266 \cdot 10^7.$$

Abaixo a comparação dos resultados obtidos para $M \cdot N$ pela calculadora e pela tabela de Napier:

Tabela 3 – Tabela comparativa

Calculadora	20402536401740
Tabela	2039266.10^7

Fonte – Próprio autor

Observe que se os números a serem multiplicados, M e N, não forem da ordem de 10^7, basta multiplicá-los por convenientes potências de 10, para que o resultado seja da ordem de 10^7. Vejamos o exemplo a seguir:

Utilizemos $M' = 37461$ e $N' = 54464$. Queremos o produto $M' \cdot N'$.

Procurariamos, na tabela, os números mais próximos de 37461.10^2 e 54464.10^2 e encontraríamos os mesmos M e N do exemplo anterior, assim repetiríamos o raciocínio daquele exemplo, contudo o resultado final adaptado com conveniente base 10 seria:

$$M' \cdot N' = (10^7 \cdot P) \cdot 10^{-4} = (10^7 \cdot 2039266) \cdot 10^{-4} \approx 2039266.10^3.$$

A divisão:

Observe que se $M < N$, $M = 10^7 \cdot (0,9999999)^m$, $N = 10^7 \cdot (0,9999999)^n$ e $P = 10^7 \cdot (0,9999999)^{m-n}$, então:

$$\frac{M}{N} = 10^{-7} \cdot P \tag{2.8}$$

Assim, para encontrar o valor de $\frac{M}{N}$ basta determinar, na tabela, P tal que $\text{NapLog}(P)$ seja o mais próximo possível de $m-n$.

Suponhamos, então, a divisão entre M e N, com $M < N$. Assim, teríamos:

$$\frac{M}{N} = \frac{10^7(0.9999999)^m}{10^7(0.9999999)^n} = (0.9999999)^{m-n}$$

.

Onde $m-n > 0$ pela Observação 2.

Já se $M > N$, temos ainda da Observação 2 que $m-n < 0$ e portanto, não existe valor correspondente na tabela de Napier. Nesse caso, ajustaremos a fração $\frac{M}{N}$ com potências de 10 de modo que a nova fração tenha numerador menor que o denominador. Em seguida devemos procurar na tabela o logaritmo (expoente) que mais se aproxima da diferença entre m e n.

Exemplo 1: Façamos a divisão $\dfrac{2503800}{5562956}$

Pela tabela,

$2503800 = 10^7 sen(14°30') = 10^7(0,9999999)^{13847749}$;

$5562956 = 10^7 sen(33°48') = 10^7(0,9999999)^{5864552}$,

Dessa forma,

$$\frac{2503800}{5562956} = \frac{10^7(0,9999999)^{13847749}}{10^7(0,9999999)^{5864552}} = (0,9999999)^{7983197}$$

Consultando a tabela novamente, a potência cujo logaritmo mais se aproxima da diferença $13847749 - 5864552 = 7983197$ é referente a $10^7(0,9999999)^{7982887} = 4500984$.

Logo da equação (2.8):

$$\frac{2503800}{5562956} = 10^{-7} \cdot 4500984 = 0,4500984$$

Tabela 4 – Tabela comparativa

Calculadora	0,4500845
Tabela	0,4500984

Fonte – Próprio autor

Exemplo 2: Façamos a divisão $\dfrac{5562956}{2503800}$

Usando os dados do exemplo anterior,

$$\frac{5562956}{2503800} = \frac{10^7(0,9999999)^{5864552}}{10^7(0,9999999)^{13847749}} = (0,9999999)^{-7983197}.$$

Teríamos então um expoente negativo, já que o numerador é maior que o denominador e a função NapLog é decrescente.

Assim ajustaremos a fração $\frac{M}{N}$ com potências de 10 de modo que a nova fração tenha numerador menor que o denominador. Neste caso, é suficiente trabalhar com $\frac{10^{-1}\cdot M}{N}$. Para encontrar $\frac{10^{-1}\cdot M}{N}$ procedemos como no exemplo anterior. Como não encontramos um valor exato para $10^{-1}\cdot M$, buscamos na tabela o valor mais próximo dele e que continue menor que N.

Encontramos então,

$$\frac{10^{-1}\cdot M}{N} \approx \frac{555312}{2503800} = \frac{10^7(0,9999999)^{28908117}}{10^7(0,9999999)^{13847749}} = 10^{-7}\left[10^7(0,9999999)^{15060368}\right].$$

Então,

$$10^{-1}\cdot\frac{M}{N} = (0,9999999)^{15060368}$$

Pela tabela,

$$10^7(0,9999999)^{15060368} = 2218322$$

Logo,

$$\frac{M}{N} = 10\cdot\left(\frac{10^{-1}\cdot M}{N}\right) \approx 10^{-6}\cdot(2218322)$$

Na tabela a seguir a comparação entre as diferentes formas de se obter o resultado dessa divisão:

Tabela 5 – Tabela comparativa

Calculadora	2,221805
Tabela	2,218322

Fonte – Próprio autor

2.7 O que a tabela de Napier inovou

Segundo Eves (2005), as melhores tábuas de seno da época eram formadas por valores que se estendiam em até 7 casas decimais (por isso Napier utilizou 7 dígitos em 0,9999999). Ainda segundo Roegel (2010, p.16) , Napier utilizou a tabela do astrônomo alemão Erasmus Reinhold (1511-1553), que continha informações relativas ao seno e tangente, com variação de 1 em 1 minuto.

Exceto para alguns erros de escrita, a tabela de Reinhold concordava com a de Napier entre 0° e 89°. Contudo, entre 89° e 90° existiam algumas diferenças, o que mostra que Napier também usou outra(s) fonte(s), sendo várias as possibilidades.

Seja qual for a fonte utilizada, Napier teve de obter, para cada valor de seno, um valor de logaritmo, ou seja, 90x60=5040 diferentes logaritmos (NapLogs); talvez a maior herança do trabalho que durou 20 anos. Como afirmou Laplace, sobre os logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos", pois estas tabelas facilitavam os cálculos de multiplicações, divisões e extração de raízes quadradas e cúbicas, sendo um dos objetivos deste trabalho, mostrar as duas primeiras aplicações.

É importante que se saiba que, ao que tudo indica, as tabelas até então comentadas eram utilizadas apenas pelos cientistas da época, afinal apenas as pessoas com maior poder econômico tinham acesso à educação e consequentemente às operações de multiplicação e divisão.

Segundo Augarten (1984, p.9), é possível que, por este motivo, Napier tenha lançado em 1617 (seu último ano de vida), um novo método de se realizar contas de multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas e cúbicas, que ficou conhecida como Barras de Napier ou Ossos de Napier em seu livro Rabdologia. Este método era acessível às pessoas não escolarizadas e também convertia produtos e divisões em somas e diferenças, de modo bastante simples.

• **Outra inovação: O uso da base decimal**

Henry Briggs, professor de geometria do Gresham College em Londres e mais tarde professor em Oxford, maravilhado com a publicação de Napier, o visita em Edimburgo. Briggs sugeriu que o novo sistema seria cômodo, se o logaritmo de 1 fosse 0 e o de 10 fosse 1, o que na essência significa trabalhar com logaritmos na base [3] 10. Isso traria, por utilizarmos sistema decimal de numeração, progresso em termos de cálculos numéricos. Dentre as vantagens da utilização da base 10, podemos considerar também que o logaritmo de qualquer número maior que um seria positivo e, além disso, a montagem de uma nova tabela seria menos demorada; a título de ilustração, se $log(x) = n$, $log(10x) = 1 + n$.

Briggs, que contou com a ajuda de Adriaen Vlacq (1600-1660), entregou-se ao trabalho de criação das novas tábuas de logaritmos, publicando em 1624 o Arithmetica Logarithmica que continha uma tábua logaritmica, com 14 casas decimais, dos números de 1 a 100000. Edmund Gunter (1581 – 1626), publicou uma tábua de logaritmos de senos e tangentes intervaladas de um em um minuto, com exatidão de sete casas decimais. Todo esse trabalho foi recentemente (entre 1924 e 1949) superado por longas tábuas logaritmicas com 20 casas decimais.

[3] Assim o sistema de logaritmos de Briggs seria crescente, diferentemente do sistema de Napier, além disso, com $log1 = 0$ e $log10 = 1$ seria mais simples de se relacionar os logaritmos com os ângulos das tabelas trigonométricas já existentes, contudo essas melhorias já haviam sido consideradas por Napier, mas por questões de saúde o matemático não as colocou em prática.

CAPÍTULO

3

A CONSTRUÇÃO DAS POTÊNCIAS COM EXPOENTES REAIS

O presente capítulo, o qual construiremos as potências de números positivos com expoentes reais e exploraremos suas propriedades, baseia-se no livro Muramaki, Iezzi e Dolce (2004).

3.1 Potências de expoentes inteiros

Consideremos $a \in \mathbb{R}^{+}$. Seja $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ o conjunto do números naturais.

Definimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a^n representa o produto de n fatores de valor a, ou seja,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

Decorre facilmente desta definição que se n, $m \in \mathbb{N}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{3.1}$$

uma vez que em ambos os membros da igualdade, temos o fator *"a"* repetindo-se a mesma quantidade de vezes, ou seja, $m+n$ vezes.

Com o intuito de manter esta propriedade será natural definir a^0 observando-se que se:

$$a = a^1 = a^{1+0} = a \cdot a^0$$

logo, para $a > 0$,

$$a^0 = \frac{a}{a} = 1$$

E assim definimos

$$a^0 = 1$$

Propriedades 3.1. : Sejam a, $b > 0$ e m,$n \in \{0,1,2,...\}$ temos:

- $P_0(\mathbb{N}) : a^n > 0$
- $P_1(\mathbb{N}) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $P_2(\mathbb{N}) : \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \geq n$
- $P_3(\mathbb{N}) : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $P_4(\mathbb{N}) : \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
- $P_5(\mathbb{N}) : (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração. Consideremos m e $a > 0$ fixos. Para as propriedades 3 e 4 o método utilizado será o de Indução Finita.

- $P_0(\mathbb{N})$:

Da definição temos que a^n é o o produto de n fatores positivos.

- $P_1(\mathbb{N})$:

Feito em (3.1).

- $P_2(\mathbb{N})$:

Suponha $m \geq n$, isto é, $m - n \geq 0$. Logo $a^m = a^{m-n+n} \overset{P_1(\mathbb{N})}{=} a^{m-n}a^n$. Logo $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.

- $P_3(\mathbb{N})$:

Base da indução: Para $n = 0$, temos que $(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$. Logo a propriedade é válida para $n = 0$.

Hipótese de indução: Suponhamos que a propriedade seja válida para algum para $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Assim, mostremos que a propriedade também é válida para $n + 1$:

$$(a \cdot b)^{n+1} = \underbrace{(a \cdot b)^n}_{\text{hipótese}} \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall n \in \{0,1,2,...\}$.

- $P_4(\mathbb{N})$:

Base da indução: Para $n = 0$, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{a^0}{b^0}$$

Logo, a propriedade é válida para $n = 0$.

Hipótese de indução: Suponhamos que a propriedade seja válida para algum n, ou seja, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Assim, mostremos que a propriedade também é válida para $n+1$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^n}_{\text{hipótese}} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^n \cdot a^1}{b^n \cdot b^1} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall n \in \{0,1,2,...\}$.

- $P_5(\mathbb{N})$:

De P_1, temos:

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot ... \cdot a^{n_m} = a^{n_1+n_2+...+n_m}$$

Contudo, se $n_1 = n_2 = n_3 = ... = n_m = n$, então $(a^n)^m = a^{nm}$.

□

Temos assim o conceito de potência natural para reais positivos e suas propriedades.

Vamos estender este conceito para potências inteiras de modo que tais propriedades continuem válidas.

Supondo que (3.1) continue válida para potências inteiras, teríamos:

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$$

Logo, faz sentido definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Note que tal expressão resulta no seguinte:

Definição 3.2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$.

Propriedades 3.3. : Sejam a, $b > 0$ e m,$n \in \mathbb{Z}$ temos:

- $P_0(\mathbb{Z}) : a^n > 0$
- $P_1(\mathbb{Z}) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $P_2(\mathbb{Z}) : \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $P_3(\mathbb{Z}) : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $P_4(\mathbb{Z}) : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
- $P_5(\mathbb{Z}) : (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração. Suponhamos m e $a > 0$ fixos.

- $P_0(\mathbb{Z})$: Sabemos por $P_0(\mathbb{N})$ que se a>0, então $a^n > 0$, $\forall n \in \{0,1,2,3,...\}$

Logo, se $n = -m$, com $m \in \mathbb{N}$, $a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m} > 0$

- $P_1(\mathbb{Z})$: a) Se $m, n \in \mathbb{N}$ temos $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ por $P_1(\mathbb{N})$.

b) Suponhamos $m = -p$ e $n = -q$, $p, q \in \{0,1,2,...\}$.

$$a^{m+n} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)} = \frac{1}{a^{p+q}} \overset{P_1(\mathbb{N})}{=} \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} \overset{Def.\ 3.2}{=} a^{-p} \cdot a^{-q} = a^m \cdot a^n$$

c) Suponhamos $m = p$ e $n = -q$, $p, q \in \{0,1,2,...\}$ e p-q$\geq$0. Então,

$$a^{m+n} = a^{p-q} \overset{P_2(\mathbb{N})}{=} \frac{a^p}{a^q} = a^p \cdot \frac{1}{a^q} = a^p \cdot a^{-q} = a^m \cdot a^n$$

d) Suponhamos $m = p$ e $n = -q$, $\in \{0,1,2,...\}$ e $p - q < 0$. Então,

$$a^{m+n} = a^{p-q} = a^{-(q-p)} \overset{Def.\ 3.2}{=} \frac{1}{a^{q-p}} \overset{c)}{=} \frac{1}{a^q \cdot a^{-p}} = \frac{1}{a^q} \cdot \frac{1}{a^{-p}} = a^{-q} \cdot a^p = a^m \cdot a^n$$

- $P_2(\mathbb{Z})$:

Por $P_1(\mathbb{Z})$: , temos que a^{m-n}=$a^{m+(-n)}$=$a^m \cdot a^{-n} \overset{Def.\ 3.2}{=} \frac{a^m}{a^n}$.

- $P_3(\mathbb{Z})$:

Por $P_3(\mathbb{N})$ temos que $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ para $n \in \{0,1,2,...\}$.

E se $n = -m$, com $m \in \{1,2,...\}$, temos

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-m} = \frac{1}{(a \cdot b)^m} \overset{P_3(\mathbb{N})}{=} \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} \overset{Def.\ 3.2}{=} a^{-m} \cdot b^{-m} = a^n \cdot b^n$$

- $P_4(\mathbb{Z})$:

Por $P_4(\mathbb{N})$, sabemos que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\forall n \in \{0,1,2,...\}$. Se $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \overset{P_4(\mathbb{N})}{=} \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{a^m} \cdot b^m = a^{-m} \cdot \frac{1}{b^{-m}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- $P_5(\mathbb{Z})$:

Por $P_5(\mathbb{N})$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ para m,$n \in \{0,1,2,...\}$

a) Assim, para $n = -q$, $q \in \mathbb{N}$ e $m \in \{0,1,2,...\}$, temos:

$$(a^m)^n = (a^m)^{-q} \overset{Def.\ 3.2}{=} \frac{1}{(a^m)^q} = \frac{1}{a^{m \cdot q}} = a^{-mq} = a^{m \cdot (-q)} = a^{m \cdot n}$$

b) Já se $n \in \{0,1,2,...\}$ e $m = -q$, $q \in \{1,2,...\}$, temos:

$$(a^m)^n = (a^{-q})^n \overset{Def.\ 3.2}{=} \left(\frac{1}{a^q}\right)^n \overset{P_4(\mathbb{N})}{=} \frac{1^n}{(a^q)^n} \overset{P_5(\mathbb{N})}{=} \frac{1}{a^{q \cdot n}} \overset{Def.\ 3.2}{=} a^{(-q) \cdot n} = a^{m \cdot n}.$$

c) E por fim, se $m = -q$ e $n = -p$, com p e $q \in \mathbb{N}$, temos:

$$(a^m)^n = (a^{-q})^{-p} \overset{Def.\ 3.2}{=} \frac{1}{(a^{-q})^p} \overset{b)}{=} \frac{1}{a^{-q \cdot p}} \overset{Def.\ 3.2}{=} a^{q \cdot p} = a^{m \cdot n}. \qquad \square$$

3.2 Potências de expoentes racionais

Queremos agora estender o conceito para potências racionais de reais positivos, sempre com o intuito de preservar as propriedades de P_0 a P_5.

Recordemos inicialmente o conceito de raiz enésima de reais positivos: Sabemos que dado real a>0 e $n \in \mathbb{N}$, $\exists$! b>0, tal que $b^n = a$. Este b é dito raiz enésima de a e é denotado por

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Note que desta definição temos que $\forall n > 0$, $a = (\sqrt[n]{a})^n$, além disso para $q \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ seguem as propriedades de R_1 a R_5:

- R_1 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot q]{a^{m\cdot q}}$
- R_2 $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- R_3 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$
- R_4 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- R_5 $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot q]{a}$

Demonstração. :

- R_1

Façamos $x = \sqrt[n]{a^m}$ e portanto $x^n = a^m$. Assim $x^{nq} = (x^n)^q = (a^m)^q = a^{mq}$. Logo $x = \sqrt[n\cdot q]{a^{m\cdot q}}$

- R_2

Façamos $x = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})$. Então,

$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$

- R_3

Consideremos $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Então, $x^n = a$ e $y^n = b$. Daí

$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Isto é, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- R_4

Chamemos $x = \sqrt[n]{a}$. Então $x^n = a$ e $x^m = (\sqrt[n]{a})^m$.

Assim $a^m = (x^n)^m = x^{n\cdot m} = (x^m)^n$. Finalmente, $x^m = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

- R_5

Façamos $x = \left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)$

$x^q = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x^q)^n = a \Rightarrow x = \sqrt[q\cdot n]{a}$

$\square$

Assim com o intuito de preservar as propriedades de $P_1(Z)$ a $P_5(Z)$, em especial $P_5(Z)$, note que se $r = \frac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in N$ então $rq = p$. Logo $a^p = a^{rq} = (a^r)^q$, assim faz sentido definir:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \tag{3.2}$$

Note que não há ambiguidade nesta definição, pois se $r = \frac{p}{q}$=$\frac{mp}{mq}$, $m \in \mathbb{N}$, temos de R_1 que $a^r = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{mp}}$

Propriedades 3.4. : Sejam $a, b > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ e $s \neq 0$.

Então,

- P_0 ($\mathbb{Q}$): a^r >0
- P_1 ($\mathbb{Q}$): $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- P_2 ($\mathbb{Q}$): $a^{r-s} = \dfrac{a^r}{a^s}$
- P_3 ($\mathbb{Q}$):$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- P_4 ($\mathbb{Q}$):$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$
- P_5 ($\mathbb{Q}$):$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Demonstração. $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $s = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

- P_0 ($\mathbb{Q}$):

$r \cdot q = p \Rightarrow a^{r \cdot q} = a^p > 0$, pois vale P_0 ($\mathbb{Z}$).

Mas da definição de raiz quadrada, $\exists! b > 0$ tal que $b = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^r$.

- P_1 ($\mathbb{Q}$)

$a^r \cdot a^s = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q \cdot n]{a^{p \cdot n}} \cdot \sqrt[q \cdot n]{a^{m \cdot q}} = \sqrt[nq]{a^{p \cdot n} \cdot a^{m \cdot q}} = \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p + m \cdot q}}$
$= a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}} = a^{r+s}$

- P_2 ($\mathbb{Q}$)

$\forall$ r, s $\in \mathbb{Q} \Rightarrow r - s \in \mathbb{Q}$. Logo, de P_1 ($\mathbb{Q}$), temos:

$a^{r-s} = a^{r+(-s)} = \dfrac{a^r}{a^s}$

- P_3 ($\mathbb{Q}$)

$(a \cdot b)^r = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot b^r$

- P_4 ($\mathbb{Q}$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} \overset{R_3}{=} \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^r}{b^r}$$

• P_5 ($\mathbb{Q}$)

$$(a^r)^s = (a^{\frac{p}{q}})^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^{\frac{p}{q}})^m} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^{pm}}} = \sqrt[qn]{a^{pm}} = a^{\frac{p \cdot m}{q \cdot n}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}} = a^{r \cdot s}$$

□

Os próximos resultados têm o objetivo de nos fazer concluir que se r, $s \in \mathbb{Q}$ e $r < s$, então se $a > 1$, teremos $a^r < a^s$ e $0 < a < 1$, então $a^r > a^s$.

Propriedade 3.5. : Seja $a > 1$

a) Se $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

b) Se $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.

c) Se $n < 0 \Rightarrow a^n < 1$.

Demonstração.

a) Por indução sobre n:

$a = a^1 > 1$. Suponhamos $a^n > 1$. Então, $a^{n+1} = a^n \cdot a^1 > 1 \cdot 1 = 1$.

b) Por definição $a^0 = 1$.

c) Se $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, então:

$$a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m} \overset{a)}{<} 1.$$

□

Corolário 3.6. Se $0 < a < 1$. Então:

a) se $n > 0$, $0 < a^n < 1$

b) se $n = 0$, $a^0 = 1$

c) se $n < 0$, $a^n > 1$

Demonstração. Como $0 < a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 1$. Aplicando-se os resultados da Propriedade 3.5 sobre $\frac{1}{a}$ temos os resultados requeridos. □

Observação 4. Note que destes resultados concluímos que:

Se $a^n > 1$ e $n > 0 \Rightarrow a > 1$ bem como, se $0 < a^n < 1$ e $n > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$.

Lema 3.7. Sejam $a > 1$ e $q \in \mathbb{N}$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. E se $0 < a < 1$ e $q \in \mathbb{N}$, então $0 < a^{\frac{1}{q}} < 1$.

Demonstração. Basta observar que $a \overset{P_5(\mathbb{Q})}{=} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$.

Logo, da Observação 4, concluímos os resultados. □

Propriedade 3.8. Sejam $a > 1$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in N$

a) Se $p > 0$, isto é, $r = \dfrac{p}{q} > 0$, então $a^r > 1$.

b) Se $p = 0$, isto é, $r = 0$, então $a^0 = 1$.

c) Se $p < 0$, isto é, $r = \dfrac{p}{q} < 0$, então $0 < a^r < 1$.

Demonstração.

a) Se $a > 1$ e $p > 0$, temos $a^p > 1$ (pela Propriedade 3.5 a). Logo, segue do Lema 3.7 que:

$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} > 1$

b) Demonstração trivial.

c) Segue da Propriedade 3.5c. □

Corolário 3.9. Sejam $0 < a < 1$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

a) Se $p > 0$ e $r = \dfrac{p}{q}$, então $0 < a^r < 1$.

b) Se $p = 0$, então $a^0 = 1$.

c) Se $p < 0$ e $r = \dfrac{p}{q}$, então $a^r > 1$

Demonstração. a) Basta notar que $\frac{1}{a} > 1$, assim de $P_4(\mathbb{Q})$, $a^r < 1$ e de $P_0(\mathbb{Q})$, $a^r > 0$, logo $0 < a^r < 1$.

b) trivial

c) Se $p < 0$, então $r < 0$. Logo, do Corolário 3.6 c, $a^r > 1$.

□

Observação 5. Novamente, segue destes resultados que se $a^{\frac{p}{q}} > 1$ e $\dfrac{p}{q} > 0 \Rightarrow a > 1$. Bem como, se $0 < a^{\frac{p}{q}} < 1$ e $\dfrac{p}{q} < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$.

Com isso estamos prontos para provar:

Teorema 3.10. Se $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$ e $a > 1$, então $a^r < a^s$. Já se $0 < a < 1$, então $a^r > a^s$.

Demonstração. a) Seja $a > 1$,

$a^r = a^{r-s+s} \overset{P_1(\mathbb{Q})}{=} a^{r-s} \cdot a^s$. Mas pela Propriedade 3.8, como $r - s < 0$ temos que $0 < a^{r-s} < 1$ e portanto $a^{r-s} \cdot a^s < a^s$. Logo, $a^r < a^s$.

b) Seja $0 < a < 1$ e $r - s < 0$, então pelo Corolário 3.9 c, $a^{r-s} > 1$. Isto é, $\dfrac{a^r}{a^s} > 1 \Rightarrow a^r > a^s$.

$\square$

3.3 Potências de expoentes reais

Agora desejamos estender o conceito de potências com expoentes reais, não necessariamente racionais. Para isto, nos apoiaremos nos lemas seguintes, sendo que os dois primeiros podem ser encontrados em Guidorizzi (2001, pp. 515-517). e o último foi baseado em Lima (2014, p.153).

Lema 3.11. Seja $a > 1$ um real dado. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$.

Demonstração. Pela Desigualdade de Bernoulli (ver Morgado e Carvalho (2015, p. 17)), temos:

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon$$

Tomando n tal que $1 + n \cdot \varepsilon > a$, resulta:

$$(1+\varepsilon)^n > a \Rightarrow (1+\varepsilon) > a^{\frac{1}{n}}$$

Assim $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$

$\square$

Lema 3.12. Sejam $a > 1$ e x dois reais dados. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem r, $s \in \mathbb{Q}$, com $r < x < s$, tais que $a^s - a^r < \varepsilon$

Demonstração. Seja ε >0 , tomemos inicialmente $x < t$, $t \in \mathbb{Q}$. Então, pelo Lema 3.11, $\exists n \in N$ tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \cdot a^{-t}$ e portanto:

$$a^t \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon \quad \text{(I)}$$

Tomemos então r, $s \in \mathbb{Q}$, com $r < x < s$ e $s - r < \frac{1}{n}$ (II)

Do Teorema 3.10 $a^r < a^t$ e $a^{s-r} < a^{\frac{1}{n}}$. Logo:

$$a^s - a^r = a^r \cdot (a^{s-r} - 1) < a^t \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon.$$

Portanto, $a^s - a^r < \varepsilon$.

$\square$

Lema 3.13. Seja $a > 1$.

a) Para todo $x \in \mathbb{R}\ \exists! \gamma \in \mathbb{R}_+$ tal que $a^r < \gamma < a^s$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$.

b) Se $x \in \mathbb{Q}$, $\gamma = a^x$.

Demonstração.

a) Seja $A = \{a^r; r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\}$.

A é o conjunto não vazio e se $s \in \mathbb{Q}$ e $x < s$ tem-se que $r < x < s$. Mas pelo Teorema 3.10, $a^r < a^s$. Assim, A também é um conjunto limitado superiormente.

Logo, A tem supremo, isto é, $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, tal que:

• $a^r \leq \gamma\ \forall\ r < x,\ r \in \mathbb{Q}$.

• Se $a^r \leq M\ \forall\ a^r \in A$, então $\gamma \leq M$.

Com isso, temos que para todo $s \in \mathbb{Q}$, tal que $x < s$:

$$a^r \leq a^s\ \forall\ a^r \in A.$$

Logo

$$a^r \leq \gamma \leq a^s,\ \forall r, s \in \mathbb{Q}, \text{ tal que } r < x < s. \tag{3.3}$$

Na realidade as desigualdes em (3.3) são estritas. De fato, suponha por absurdo que $\exists r_0 \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $r_0 < x < s$ e tal que $a^{r_0} = \gamma$.

Da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ sabemos que $\exists\ r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $r_0 < r_1 < x$. Mas do Teorema 3.10 concluimos que $a^{r_0} < a^{r_1}$. Além disso,

$$r_1 < x < s \Rightarrow a^{r_1} \in \text{A} \Rightarrow a^{r_1} \leq \gamma = a^{r_0}.$$

Então $a^{r_0} < a^{r_1} \leq a^{r_0}$, absurdo.

$\therefore a^r < \gamma,\ \forall\ r < x,\ r \in \mathbb{Q}$.

Do mesmo modo concluímos que:

$\gamma < a^s\ \forall\ x < s$.

Assim, quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{Q}$, satisfazendo

$$r < x < s \Rightarrow a^r < \gamma < a^s \tag{3.4}$$

Além disso, γ é único. De fato, suponha por absurdo que exista $\overline{\gamma} \neq \gamma$, tal que $a^r < \overline{\gamma} < a^s$ para $r < x < s$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\gamma < \overline{\gamma}$. Então,

$$a^r < \gamma < \overline{\gamma} < a^s \tag{3.5}$$

Mas pelo Lema 3.12, dado $\varepsilon = \frac{\overline{\gamma}-\gamma}{2} > 0$ existem r, $s \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $r < x < s$ e tais que $a^s - a^r < \varepsilon$.

Logo, de (3.5) temos que

$\overline{\gamma} - \gamma < a^s - a^r < \frac{\overline{\gamma}-\gamma}{2}$ o que é um absurdo.

Logo, dado $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$ existe um único $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $a^r < \gamma < a^s$ para quaisquer r, s $\in \mathbb{Q}$ satisfazendo $r < x < s$.

Note ainda que γ >0 já que $a^r > 0$ $\forall r \in \mathbb{Q}$.

b) Veja que se $x \in \mathbb{Q}$, $\gamma = a^x$.

De fato, sabemos do Teorema 3.10 que se $r < x < s$, com r, x, $s \in \mathbb{Q}$ temos:

$$a^r < a^x < a^s$$

Mas pela parte a) $\exists!$ $\gamma > 0$ tal que se $\forall$ $r < x < s$, $a^r < \gamma < a^s$.

Assim, da unicidade de γ temos:

$\gamma = a^x$, para $x \in \mathbb{Q}$.

$\square$

Corolário 3.14. Seja $0 < a < 1$.

a) Para todo $x \in \mathbb{R} \exists! \gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $a^r > \gamma > a^s$ para quaisquer r, $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x < s$.

b) Se $x \in \mathbb{Q}$ então $\gamma = a^x$.

Demonstração. a) Se $0 < a < 1 \Rightarrow a^{-1} > 1$.

Logo, pelo Lema 3.13 para todo $x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $\gamma^{-1} > 0$ tal que $(a^{-1})^r < \gamma^{-1} < (a^{-1})^s$ para todo r, $s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$.

Logo, por $P_5(\mathbb{Q})$:

a^r>γ>a^s $\forall$ r, $s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$.

b) Em particular se $x \in \mathbb{Q}$, γ^{-1}=$(a^{-1})^x \Rightarrow \gamma = a^x$.

$\square$

Com base nestes fatos estamos prontos para definir a função exponencial.

CAPÍTULO

4

FUNÇÃO EXPONENCIAL

4.1 Definição e propriedades

Teorema 4.1. Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, existe uma única função contínua f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que para $x \in \mathbb{Q}$ tem-se $f(x)$=a^x. Além disso:

a) Se $a > 1$ então $f(x)$ é crescente, isto é, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

b) Se $0 < a < 1$ então $f(x)$ é decrescente, isto é, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Demonstração.

a) Sendo $a > 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos $f(x) = \gamma$, γ dado pelo Lema 3.13, e portanto f está bem definida. Além disso, segue também do Lema 3.13 e de $P_0(\mathbb{Q})$ que para cada x tem-se que se $r \in \mathbb{Q}$ e $r < x$. Então $\gamma > a^r > 0$. Logo, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Assim, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$, temos da densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ que existem r_1, r_2 e $s_2 \in \mathbb{Q}$ tais que

$$r_1 < x_1 < r_2 < x_2 < s_2$$

Logo, do Lema 3.13

$a^{r_1} < f(x_1) < a^{r_2} < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, isto é, f é crescente.

b) Análogo ao caso a).

Com relação a continuidade de f segue do Lema 3.12 se $a > 1$, dado $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{R}$ existem r, $s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < p < s$ e $a^s - a^r < \varepsilon$.

Assim, tomemos $\delta > 0$ tal que $r < p - \delta < p + \delta < s$. Então, como f é crescente, para todo x, tal que $|x - p| < \delta$ tem-se:

$$|f(x) - f(p)| < a^s - a^r < \varepsilon$$

isto é, dado ε >0 $\exists$ δ >0 tal que se $|x - p| < \delta$ então $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Portanto, f é contínua.

O caso $0 < a < 1$ segue de modo análogo, lembrando que neste caso $f(x) = a^x$ será uma função decrescente. □

Notação: Denominaremos tal função de exponencial de x com base a e passaremos a denotá-la por

$$f(x) = a^x.$$

Observação 6. Note que $\forall a > 0$ e $a \neq 1$ tem-se que $f(x) = a^x$ é injetiva já que para $a > 1$ ela é crescente e para $0 < a < 1$ ela é decrescente.

• A função exponencial é ilimitada superiormente:

Lema 4.2.

a) Se $a > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

b) Se $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Demonstração.

a) Como $a > 1$, $\exists\, h > 0$ tal que $a = 1 + h$

Pela desigualdade de Bernoulli:

$$(1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty.$$

b) Como $0 < a < 1$ $\exists\, h > 0$ tal que $a = \frac{1}{1+h}$.

Assim, $0 < a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}$ e consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

□

Teorema 4.3.

a) Se $a > 1$ então $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

b) Se $0 < a < 1$ então $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.

Demonstração.

a) Vimos no Lema 4.2 que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Logo, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0$ tal que se $n \geq n_0$, então $a^n > \varepsilon$.

Mas $f(x) = a^x$ é crescente. Assim, se $x > n_0$ temos $a^x > \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0$ tal que se $x \geq n_0$ tem-se $f(x) = a^x > \varepsilon$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

Por outro lado, temos do Lema 4.2 que se $0 < b < 1$ então $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$. Assim, se $b = a^{-1}$ temos $\lim_{n\to\infty} (a^{-1})^n = 0$, o que equivale a dizer que dado $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0$ tal que se $n \leq -n_0$, $0 < a^n < \varepsilon$. Mas $f(x)$ é crescente. Logo, se $x \leq n_0$, então $0 < a^x < \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0\ \exists -n_0$ tal que se $x < -n_0$ temos $0 < a^x < \varepsilon$, isto é, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

b) Segue de modo análogo ao item a).

$\square$

• **A função exponencial é bijetiva:**

Teorema 4.4. Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e β >0 dois reais quaisquer. Então existe um único γ real tal que:

$$a^\gamma = \beta,$$

isto é. f é bijetiva.

Demonstração. Suponhamos $a > 1$.

Dado β>0, como f é contínua e $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, então $\exists d \in \mathbb{R}$ tal que $a^d > \beta$.

Mas $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Portanto, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $a^c < \beta$.

Logo dado $\beta > 0$ existem c e d, com $c < d$, tais que $a^c < \beta < a^d$.

Como a^x é contínua na reta, em particular também é contínua para $x \in [c,d]$.

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\exists \gamma \in$ (c,d) tal que

$$f(\gamma) = \beta \text{ ou } a^\gamma = \beta$$

Assim, f é sobrejetiva.

A unicidade de γ segue do fato de f ser estritamente crescente. Sendo assim, f é injetiva e, consequentemente, bijetiva.

O caso $0 < a < 1$ é análogo. $\square$

Vejamos agora que tal função preserva as propriedades já demonstradas para expoentes racionais.

Propriedades 4.5. Seja a, $b > 0$ com $a \neq 1$, então:

$\bullet P_0$ $(\mathbb{R})$: $a^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_1$ $(\mathbb{R})$: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_2$ $(\mathbb{R})$: $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_3$ $(\mathbb{R})$: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_4$ $(\mathbb{R})$: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_5$ $(\mathbb{R})$: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $x, y \in R$ e $x_n, y_n \in Q$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

$\bullet P_0$ $(\mathbb{R})$: Segue do Teorema 4.1.

$\bullet P_1$ $(\mathbb{R})$: Como $f(x) = a^x$ é contínua leva sequência convergente em sequência convergente. Assim como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$.

E por outro lado $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^x \cdot a^y$.

Logo, segue de $P_1(Q)$ que $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

$\bullet P_2$ $(\mathbb{R})$: $a^x = a^{x-y+y} \overset{P_1(\mathbb{R})}{=} a^{x-y} \cdot a^y$

Portanto, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_3$ $(\mathbb{R})$: $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot b)^{x_n} = (a \cdot b)^x$

Mas, $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot b)^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot b^{y_n} = a^x \cdot b^x$

Portanto, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$\bullet P_4$ $(\mathbb{R})$: $a^x = \left(\dfrac{a}{b} \cdot b\right) \overset{P_3(\mathbb{R})}{=} \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot b^x$.

Portanto, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

•P_5 ($\mathbb{R}$): Sabemos que $f(x) = a^x$ é contínua, qualquer que seja $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Então $\lim\limits_{n\to\infty} r \cdot x_n = r \cdot x \;\; \forall r \in Q$ e portanto:

$a^{r \cdot x_n} \to a^{r \cdot x}$.

Mas $\lim\limits_{n\to\infty} a^{rx_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a^r)^{x_n} = (a^r)^x$.

$$\text{Portanto, } (a^r)^x = a^{rx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q} \tag{4.1}$$

Mas $a^{x_n} \to a^x$ e $h(y) = y^r$ é contínua $\forall\, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Portanto } (a^{x_n})^r \to (a^x)^r \tag{4.2}$$

Como $a^{r \cdot x_n} = (a^r)^{x_n} = (a^{x_n})^r$, segue de (4.1) e (4.2), que:

$$a^{rx} = (a^r)^x = (a^x)^r \qquad \forall r \in \mathbb{Q} \quad e \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Logo, se $y_n \to$ y $\in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{Q}$ temos para todo x, $y \in \mathbb{R}$

$a^{x \cdot y_n} \to a^{x \cdot y}$

$(a^x)^{y_n} \to (a^x)^y$

Logo, de (4.3) temos:

$$a^{xy} = (a^x)^y, \text{ para todo } x, y \in R, \text{ como queríamos.}$$

□

4.2 Caracterização da função exponencial

Teorema 4.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva. São equivalentes as afirmações:

(1) $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$ e $0 < a \neq 1$.

(2) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x$, $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

(1) $\rightarrow$ (2): Segue da Propriedade $P_1(\mathbb{R})$.

(2) $\rightarrow$ (1): Como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ segue que $f(1) > 0$. Além disso, $f(1) = f(1+0) = f(1) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$. Mas $f(x)$ é injetiva. Suponhamos f crescente.

Então, $f(1) > f(0) = 1$. Chamemos $f(1) = a$:

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{n vezes}}) = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1)}_{\text{n vezes}} = a^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

• Vamos estender aos Inteiros ($\mathbb{Z}$):

Como $f(0) = 1$:

$f(0) = f(-1+1) = f(-1) \cdot f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{a} = a^{-1}$

Assim, para $n \in \mathbb{N}$:

$$f(-n) = f[\underbrace{(-1)+(-1)+...+(-1)}_{\text{n vezes}}] = \underbrace{f(-1) \cdot f(-1) \cdot ... \cdot f(-1)}_{\text{n vezes}} = (a^{-1})^n = a^{-n}.$$

• Vamos estender aos Racionais ($\mathbb{Q}$):

Para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $nr = m$. Logo $[f(r)]^n = f(nr) = f(m) = [f(1)]^m$. Então, $[f(r)]^n = [f(1)]^m \Rightarrow f(r) = [f(1)]^{\frac{m}{n}} = [f(1)]^r = a^r$, assim temos:

$$f(r) = a^r, \qquad \forall r \in \mathbb{Q}$$

• Vamos estender aos Reais ($\mathbb{R}$):

Suponhamos por absurdo que $\exists x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ tal que $a^x \neq f(x)$. Sem perda de generalidade tomemos $f(x) < a^x$. Seja a sequência de racionais $r_n < x$ e tal que $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. Mas $g(x) = a^x$ é crescente e portanto $a^{r_n} < a^x$. Além disso, $g(x) = a^x$ é contínua, logo dado $\varepsilon = a^x - f(x) > 0$ $\exists$ r_n tal que $a^x - a^{r_n} < \varepsilon = a^x - f(x)$.

Assim, $\exists$ racional $r_n < x$ tal que:

$$f(x) < a^{r_n} < a^x$$

Mas f é crescente e $f(r_n) = a^{r_n}$. Logo, $a^{r_n} = f(r_n) < f(x) < a^{r_n}$ o que é uma contradição.

Para $f(x) > a^x$ basta repetir o raciocínio com $r_n > x$.

Logo $f(x) = a^x$ para todo x real. Analogamente trata-se o caso $0 < a < 1$.

$\square$

Definição 4.7. Função do Tipo Exponencial

Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é classificada como do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$ e $b \neq 0$.

Note que uma função do tipo exponencial é tal que o quociente $\dfrac{g(x+h)}{g(x)}$, onde x, $h \in \mathbb{R}$, depende apenas do acréscimo h, mas não de x, como abaixo:

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^x} = a^h$$

4.3 Outra caracterização da função exponencial

Vejamos abaixo o teorema que fornece uma segunda caracterização dessa função:

Teorema 4.8. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ injetiva. Suponhamos que exista função $\varphi(h)$ tal que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ para todo $x, h \in \mathbb{R}$. Então $g(x)$ é do tipo exponencial, isto é $g(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $b > 0$ e $0 < a \neq 1$.

Demonstração. Mostremos que $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$. Observemos que como g é injetiva e positiva temos $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

Seja $f(x) = \dfrac{1}{b} \cdot g(x)$. Assim f também é injetiva, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e satisfaz $\dfrac{f(x+h)}{f(x)} = \varphi(h)$, $\forall x, h \in \mathbb{R}$. Em particular $f(0) = 1$ e $f(h) = \dfrac{f(0+h)}{f(0)} = \varphi(h)$.

Portanto $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ $\forall x, h \in \mathbb{R}$.

Logo pelo teorema anterior $f(x) = c^x$ onde $0 < c \neq 1$.

Assim $g(x) = b \cdot f(x)$ e $g(1) = b \cdot f(1)$. Portanto $\dfrac{g(1)}{b} = \dfrac{g(1)}{g(0)} = a$.

Logo $g(x) = b \cdot a^x$ onde $b = g(0) > 0$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$ como queríamos.

Observação 4.9. Se no teorema anterior tivermos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ teremos que $g(x) = ba^x$ onde $b = g(0) < 0$.

□

CAPÍTULO

5

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Com base no fato da função $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$ ser uma função $f : R \to R^+$ bijetiva, faz sentido a seguinte definição:

Definição 5.1. Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de *logaritmo de x ($x > 0$) na base a*, o número y tal que $a^y = x$. Denotaremos y por:

$$\text{y=}\log_a x$$

O número a é a base do logaritmo, x o logaritmando e y o logaritmo. Além disso, da definição, $a^{\log_a x} = x$.

E assim definimos a função inversa da exponencial de base a por:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Esta função chamada *logaritmo de x na base a*, associa a cada número real x positivo, o número real $\log_a x$.

5.1 Propriedades de logaritmos

Propriedade 5.2. (Multiplicação) Para todo a, m, n positivos com $a \neq 1$ tem-se:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Demonstração. Como a exponencial é uma função bijetiva, existem reais u, v, t tais que:

$$m = a^u \Rightarrow u = \log_a m$$

$$n = a^v \Rightarrow v = \log_a n$$

$$m \cdot n = a^t \Rightarrow t = \log_a (m \cdot n)$$

Segue que:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v} = a^t \Rightarrow u + v = t$$

então, $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$. □

Propriedade 5.3. (Divisão): Para todo real positivo a, m, n com $a \neq 1$ temos:

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Demonstração. Novamente da bijeção da exponencial decorre que:

$$m = a^u \Rightarrow u = \log_a m$$

$$n = a^v \Rightarrow v = \log_a n$$

$$\frac{m}{n} = a^s \Rightarrow s = \log_a \left(\frac{m}{n}\right)$$

Segue que:

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} = a^s \Rightarrow u - v = s$$

então,

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

□

Propriedade 5.4. (Potência): Seja $0 < a \neq 1$, para todo $m > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\log_a m^k = k \cdot \log_a m$$

Demonstração.

Sejam $u = \log_a m$ e $v = \log_a m^k$. Então, $a^u = m$ e $a^v = m^k$.

Assim, $a^{u \cdot k} = m^k = a^v \Rightarrow v = u \cdot k$, isto é:

$$log_a m^k = k \cdot log_a m$$

□

Teorema 5.5. Seja $0 < a \neq 1$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = log_a(x)$. Então:

a) Se $a > 1$ tem-se que f é crescente.

b) Se $0 < a < 1$ tem-se que f é descrecente.

c) f é função contínua.

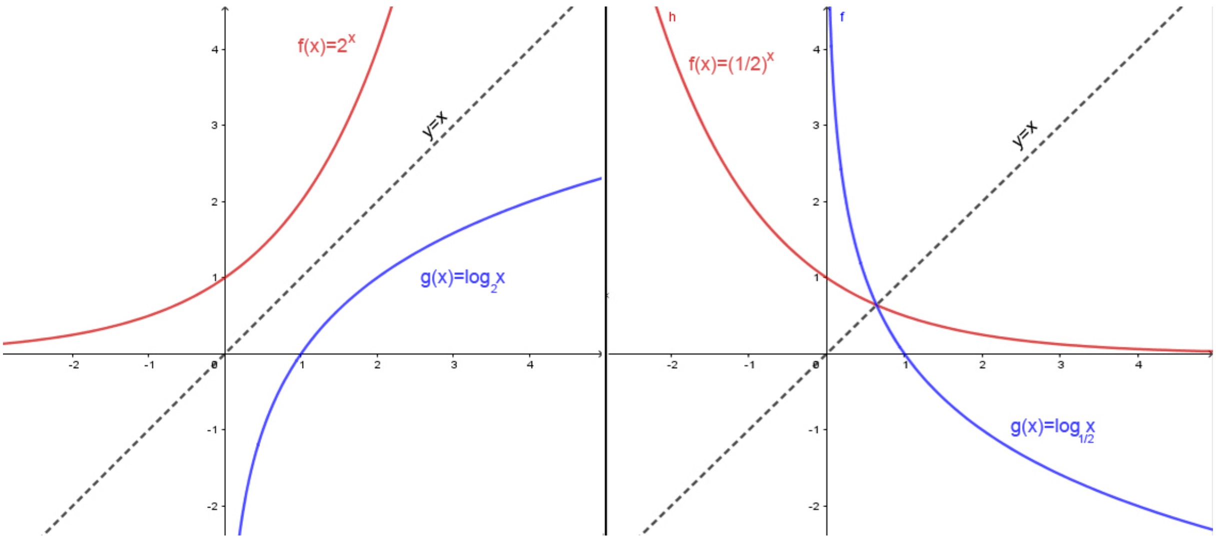
Não demonstraremos estes resultados. Mas todos são consequência do fato de $f(x) = a^x$ ser monótona e contínua.

Observação 5.6. Veja que a exponencial assim definida vai de encontro ao que Briggs desejava, já que $log_a 1 = 0$.

Observação 5.7. Para $a > 1$ e como $log_a 1 = 0$ temos que valores maiores que 1 terão logaritmos positivos, enquanto que para $0 < a < 1$ serão negativos.

Na Figura 10 apresentaremos exemplos de funções logaritmicas com base maior que 1 e menor que 1, ambas com suas respectivas funções inversas.

Figura 10 – Gráficos de funções exponenciais e logaritmicas



Fonte – Arquivo - Geogebra

Se as bases dos gráficos apresentados na figura anterior fossem, ao invés de 2 ou 1/2, quaisquer valores maiores que 1 ou entre 0 e 1, estes possuiriam o mesmo aspecto (formato) que os gráficos representados acima, como veremos na Propriedade seguinte.

Propriedade 5.8. (Mudança de base): A igualdade $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, é válida para quaisquer valores de a, b e x dentro da condição de existência de um logaritmo (ver Definição 5.1).

Demonstração.

Sejam $u = \log_a x$, $v = \log_b x$ e $c = \log_a b$. Segue que $a^u = x$, $b^v = x$ e $a^c = b$, logo:

$$x = a^u = b^v = (a^c)^v = a^{c \cdot v}$$

Como $u = c \cdot v$, então vale a igualdade:

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \Rightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

□

Assim, comparando-se funções logaritmicas de bases distintas vemos que estas diferem apenas por um fator multiplicativo e portanto seus gráficos terão, essencialmente, a mesma forma.

5.2 Caracterização das funções logaritmicas

Teorema 5.9. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. São equivalentes as afirmações:

(1) $f(x) = \log_a x$, para algum $a > 0$ e $a \neq 1$.

(2) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. $(1) \to (2)$ segue da Propriedade 5.2. $(2) \to (1)$ Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente.

Como $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2 \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

a) Consideremos inicialmente que existe $a > 0$ com $f(a) = 1$. Observe que como f é crescente e $f(1) = 0$ temos que $a > 1$. Pela unicidade da função inversa, basta mostrar que $f(a^x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Note que, se $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(a^m) = \underbrace{f(a) + f(a) + \ldots f(a)}_{\text{m vezes}} = m \cdot f(a) = m.$$

Como,

$$0 = f(1) = f(a^{m-m}) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m})$$

Então,

$$f(a^{-m}) = -f(a^m) \Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Logo,

$$f(a^m) = m, \forall m \in \mathbb{Z}$$

• Vamos estender aos Racionais ($\mathbb{Q}$): Seja $r = \frac{m}{n}$, tal que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, isto é: $m = n \cdot r$. Assim sendo,

$$m = f(a^m) = f(a^{n \cdot r}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

Portanto,

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r$$

• Vamos estender aos Reais ($\mathbb{R}$):

Seja $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e sejam r, $s \in \mathbb{Q}$, tais que $r < x < s$. Mas $a > 1$, logo $a^r < a^x < a^s$ e como f é crescente teremos:

$$f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$$

Note então que

$$r < x < s \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Logo tomando-se sequências de números racionais r_n e s_n tais que $r_n < x < s_n$ e tais que $\lim_{n\to\infty} r_n = x = \lim_{n\to\infty} s_n$, concluímos que $f(a^x) = x$.

Portanto, $f(x) = log_a x$,$\forall x \in \mathbb{R}^+$.

b) Suponhamos agora não conhecer $a > 0$ tal que $f(a) = 1$. Assim continuamos com f crescente, $f : R^+ \to R$ e $f(xy) = f(x) + f(y)$. Já vimos que $f(1) = 0$ e como f é crescente $f(2) = b > 0$ para algum b real.

Construímos então $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$. Então $g : R^+ \to R$ e $g(xy) = g(x) + g(y)$. Além disso $g(2) = 1$. Logo satisfaz a) e portanto $g(x) = log_2(x) = \dfrac{f(x)}{b}$.

Assim $x = 2^{g(x)} = 2^{\frac{f(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{f(x)}$ o que nos dá

$$f(x) = log_{2^{\frac{1}{b}}} x, \text{ como queríamos.}$$

$\square$

CAPÍTULO

6

DERIVADAS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS E O NÚMERO e

O presente capítulo se apoia em Guidorizzi (2001, pp. 119, 120, 133).

• **O número e:**

Antes de definir o número e, vejamos uma situação onde ele vai aparecer.

Suponhamos que uma dada aplicação bancária ofereça juro anual real de 1% ao ano. Suponha que este juro seja capitalizado anualmente. Caso seja aplicado um montante M, em um ano, qual será o montante resultante? Então, após um ano, teremos:

$$M_1 = M + \frac{1}{100} \cdot M = M\left(1 + \frac{1}{100}\right) = M \cdot (1 + 1\%) = 1{,}01M$$

Suponhamos agora, que este financiamento seja capitalizado semestralmente. Em seis meses, teremos:

$$M_1 = M + \frac{M \cdot 1\%}{2} = M \cdot \left(1 + \frac{1\%}{2}\right)$$

Após 12 meses

$$M_2 = M_1 + \frac{M_1 \cdot 1\%}{2} = M_1 \cdot \left(1 + \frac{1\%}{2}\right) = M\left(1 + \frac{1\%}{2}\right)^2 = 1{,}010025M$$

Suponhamos que a capitalização seja quadrimestral. Após 4 meses, teríamos:

$$M_1 = M\left(1 + \frac{1\%}{3}\right)$$

Após 8 meses, teríamos:

$$M_2 = M_1 \cdot \left(1 + \frac{1\%}{3}\right) = M\left(1 + \frac{1\%}{3}\right)^2$$

Após 12 meses, teríamos:

$$M_3 = M_2 \cdot \left(1 + \frac{1\%}{3}\right) = M \cdot \left(1 + \frac{1\%}{3}\right)^3 \approx 1{,}010033M$$

Continuando este raciocínio deduzimos que se a capitalização for em n etapas no ano, o montante final após 1 ano será:

$$M_n = M \cdot \left(1 + \frac{1\%}{n}\right)^n = M \cdot \left(1 + \frac{1}{n \cdot 100}\right)^n = M \left[\left(1 + \frac{1}{n \cdot 100}\right)^{n \cdot 100}\right]^{\frac{1}{100}}$$

Fazendo m = 100n, obtemos:

$$M_n = M \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{100}}$$

Veja que se imaginarmos que estas capitalizações sejam feitas continuamente no tempo, o que pode ser representado por $n \to \infty$, o montante após um ano seria:

$$\overline{M} = \lim_{n \to \infty} M_n \overset{m=100n}{=} \lim_{m \to \infty} M \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{100}} \tag{6.1}$$

Vejamos a tabela abaixo para se ter uma noção sobre o possível valor deste limite:

Tabela 6 – Aproximando-se do número e

n	m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$
1/100	1	2
2/100	2	2,25
1	100	2,7048
2	200	2,7115
3	300	2,7137

Fonte – Próprio autor

Com os valores encontrados percebemos que parece tratar-se de uma tabela com valores crescendo com n. Será que crescerá infinitamente? Esta questão interessava aos banqueiros do século XVIII, que imaginavam que poderiam obter lucros maiores – e até infinitos – em empréstimos se tornassem o período de capitalização de juros cada vez menor.

Assim, é possível imaginar que uma financiadora mal-intencionada, ao praticar capitalização diária, horária, ou até em periodicidade infinitesimal (contínua), encontraria uma fonte inesgotável de Juro (dinheiro). Contudo, esse aumento tende a um limite (é finito) relacionado ao número e, que verificaremos em seguida.

Teorema 6.1. Segundo limite fundamental: Existe $e > 0$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Para mostrar este resultado precisamos dos seguintes lemas:

Lema 6.2. Se a_n é uma sequência limitada superiormente e crescente, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ isto é, } a_n \text{ converge para algum } a.$$

Demonstração. Ver demonstração em Figueiredo (1996, p. 27) □

Lema 6.3. $2^n \leq (n+1)!$, para $n \geq 1$:

Demonstração. Faremos a demonstração usando o Método da indução finita.

$n = 1$: $2 = 2!$

Hipótese de indução: $2^n \leq (n+1)!$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \leq 2 \cdot (n+1)! < (n+2)(n+1)! = (n+2)!$

Portanto, $2^n \leq (n+1)!$ quando $n \geq 1$. □

Assim, podemos obter o seguinte resultado que será importante a frente:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}, \forall\, n \geq 1$$

□

Lema 6.4. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, para $n \geq 1$.

Demonstração. Recordemos inicialmente que a série geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2.$$

Observe que usando o Binômio de Newton temos que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \tag{6.2}$$

Mas,

$$0 < \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k+1)}{n} < 1$$

Então, usando o Lema 6.3, temos:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 = 3$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Lema 6.5. Se $m > n$, então $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, isto é, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente

Demonstração. $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m}$, isto é, $\frac{n-1}{n} < \frac{m-1}{m}$

$$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{m}$$

$$... \qquad ...$$

$$0 < 1 - \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{n-1}{m}$$

daí,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} < \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m \cdot (m-1)}{m^2} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} < \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{m^3} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

E assim sucessivamente obtemos

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k} <$$

$$< 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot (m-k+1)}{m^k}$$

Segue então de (6.2) que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

□

Demonstração. Prova do Teorema 6.1

Pelos Lemas 6.4 e 6.5 temos que $0 < a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para $n \geq 1$ é crescente e limitada superiormente.

Logo, pelo Lema 6.2 existe $0 < e \in \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

□

Mais do que isso, temos:

Teorema 6.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, onde $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideremos $n \leq x < n+1$. Então:

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}+1$$

Como vimos no Teorema 4.1, sabemos que se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente. Logo se $0 < a < b$ então $\left(\frac{b}{a}\right)^x > \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1$ para $x > 0$. Portanto, $a^x < b^x$ para $x > 0$. Com essas considerações concluímos que:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Assim,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

.

Observemos que como $n \leq x < n+1$ temos que $n \to \infty \Leftrightarrow x \to \infty$. Assim,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = e$$

O que nos dá:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

□

Corolário 6.7. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Demonstração. Fazendo $x = -(t+1)$, com $t > 0$, vem:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{t+1}{t}\right)$$

Mas $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$, assim:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{t+1}{t}\right) = e.$$

$\square$

Corolário 6.8. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}.$

Demonstração. Se $x = -t$, temos:

$$x \to \infty \Leftrightarrow t \to -\infty.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t} = \left[\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-1} = e^{-1}.$$

$\square$

Voltando a situação descrita no início do capítulo, vimos que o montante obtido em um ano, com capitalizações contínuas, seria dado por:

$$\overline{M} = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{m\to\infty} M \cdot \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{100}}$$

Logo, pelo Teorema 6.1 concluímos que:

$$\overline{M} = M \cdot e^{\frac{1}{100}}$$

Assim, mesmo com capitalização contínua, embora M_n seja crescente, o montante acumulado em um ano $\overline{M}$ não será infinito.

• **Derivando as funções** $f(x) = e^x$ **e** $f(x) = \ln(x)$**:**

a) $f(x) = e^x$

Vimos que $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ e que $f(x)$ é contínua. Além disso, $e = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ onde, em particular, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente com n. Assim, como $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ então $e > 2,25 > 1$. Logo, $e > 1$ e portanto $f(x) = e^x$ é função crescente.

b) Denotaremos $log_e(x)$ por $ln(x)$. Assim temos que $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e é a inversa de $f(x) = e^x$. Logo também é uma função crescente.

Vamos agora calcular suas derivadas. Mas para isso, precisaremos dos seguintes fatos:

Lema 6.9. Temos válidos os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right) = 1.$

Demonstração. a) Seja $x = \dfrac{1}{h}$. Logo,

$h \to 0^+ \Leftrightarrow x \to +\infty$, e

$h \to 0^- \Leftrightarrow x \to -\infty$, daí:

$$\lim_{h \to 0^+} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = e. \text{ Bem como,}$$

$$\lim_{h \to 0^-} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = e.$$

Portanto,

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

b) Façamos $u = e^h - 1 \Rightarrow h = \ln(1 + u)$. Daí, vem que :

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{ln(1 + u)} = \frac{1}{ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

,

Mas $h \to 0 \Rightarrow u \to 0$

Assim:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}} \overset{a)}{=} \frac{1}{ln(e)} = 1$$

□

Teorema 6.10. Se $f(x) = e^x$, então $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\right) = e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \overset{\text{Lema } 6.9b}{=} e^x \cdot 1 = e^x.$$

Portanto,

$$f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

□

Teorema 6.11. Se $g(x) = ln(x), \forall\, x > 0$, então $\dfrac{dg(x)}{dx} = g'(x) = \dfrac{1}{x}, \forall\, x > 0$.

Demonstração. Seja $g(x) = ln(x)$ para $x > 0$.

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{ln\left(\frac{x+h}{h}\right)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{x}{h}\right) \overset{u=\frac{h}{x}}{=} \lim_{u\to 0} ln(1+u)^{\frac{1}{x\cdot u}} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{u\to 0} ln(1+u)^{\frac{1}{u}} \overset{\text{Lema } 6.9a)}{=} \frac{1}{x}.$$

Portanto,

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

□

Corolário 6.12. Seja $h(x) = a^x$, onde $0 < a \neq 1$. Então, $h'(x) = (ln(a))\cdot a^x$

Sabemos pela Definição 5.1, que $e^{ln(a)}$=a. Então,

$$a^x = e^{ln(a)\cdot x}$$

E lembrando que, pela Regra da Cadeia, se temos funções deriváveis $f : B \to C$ e $g : A \to B$, então $h(x) = f(g(x))$ é derivável para todo x em A e $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$. Assim, fazendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = (ln(a))\cdot x$, temos que $h(x) = a^x = f(g(x))$ e portanto:

$$h'(x) = e^{(lna)x}\cdot(lna) = ln(a)\cdot a^x$$

As expressões $ln(x)$ e e^x, estudadas anteriormente, aparecerão naturalmente em algumas aplicações que mostraremos adiante.

CAPÍTULO

7

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos no Corolário 6.12 que se $y(t) = e^{kt} = (e^k)^t$, com k fixo, então $y'(t) = \left[ln(e^k)\right] \cdot e^{kt} = k \cdot e^{k \cdot t}$. Logo,

$$y'(t) = k \cdot y(t) \tag{7.1}$$

De modo geral, se $y(t) = M \cdot e^{k \cdot t}$, com M e k fixos, também vale (7.1).

Assim, uma quantidade descrita através de uma função exponencial ou múltipla dela, tem a propriedade de que:

Sua taxa de variação, em qualquer ponto, é proporcional à própria quantidade naquele ponto.

Segue do Teorema de Existência-Unicidade, ver Zill (2003, capítulo 4), que para k real e t_0, y_0 reais dados, existe uma única função derivável $y = y(t)$, solução do problema :

$$(P) : \begin{cases} y' = k \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Como se pode ver facilmente,

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)} = M \cdot e^{kt} \tag{7.2}$$

é tal solução.

Assim, veremos alguns fenômenos que são modelados através da equação (7.1).

Mas antes de descrevê-los vejamos algumas terminologias que estão comumente atreladas a tais fenômenos.

Primeiramente observemos que se $M, k > 0$ e $y(t) = M \cdot e^{kt}$ vemos que $y(t)$ crescerá com o tempo e assim $y'(t)$ fornece a taxa de crescimento de $y(t)$.

Já se $M, k > 0$ e $y(t) = M \cdot e^{-kt}$, $y(t)$ decrescerá com o tempo e $y'(t)$ fornecerá a taxa de decrescimento de y(t).

Definimos então:

a) *Meia vida*, que é o tempo necessário para uma certa quantidade reduzir-se à metade. Assim, se tal quantidade no instante t é

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}, \text{ com } k > 0 \text{ e } y_0 \neq 0$$

buscamos $\bar{t}$ tal que

$$y(\bar{t} + t) = \frac{y(t)}{2}$$

o que nos dá

$$y_0 \cdot e^{-k(\bar{t}+t-t_0)} = \frac{y_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}}{2}$$

Logo, $e^{-k\bar{t}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -k\bar{t} = -ln2$ e portanto

$$\bar{t} = \frac{ln2}{k} \tag{7.3}$$

Observe que não importa a partir de qual momento t tenhamos medido a tal quantidade e nem o valor dessa quantidade, que sempre levará $\bar{t}$ unidades de tempo para uma quantidade se reduzir à metade. Matematicamente falando, não importa y_0, t_0 ou t que $\bar{t}$ sempre será o mesmo, para uma mesma taxa k.

b) *Tempo de duplicação* é o tempo necessário para que uma certa quantidade dobre de valor. Logo, se tal quantidade, num instante t, é dada por $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$, com y_0, $k > 0$, queremos encontrar $\bar{\bar{t}}$ tal que $y(t + \bar{\bar{t}}) = 2 \cdot y(t)$, isto é, $y_0 \cdot e^{k(t+\bar{\bar{t}}-t_0)} = 2 \cdot y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$.

Logo, $e^{k \cdot \bar{\bar{t}}} = 2$, o que nos dá:

$$\bar{\bar{t}} = \frac{ln(2)}{k} \tag{7.4}$$

Como no caso anterior $\bar{\bar{t}}$ é o mesmo, quaisquer que sejam y_0, t_0 e t.

Vistos estes conceitos, vejamos então alguns fenômenos com propriedades exponenciais.

1) Dinâmica Populacional (Modelo de Malthus)

Neste modelo, o economista Thomas Malthus previu que a taxa de crescimento de uma população é proporcional à própria população.

Assim, se $y(t)$ é uma dada população no instante t, então $\exists\ k > 0$ tal que:

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

2) Decaimento radioativo

A taxa de decaimento radiativo de uma certa substância radioativa é proporcional a massa desta substância.

Assim, se $y(t)$ é a massa desta substância no instante t, então $\exists -k < 0$ tal que

$$y'(t) = -k \cdot y(t)$$

3) Decaimento de fármaco na corrente sanguínea

Se uma certa quantidade de fármaco for administrado num indivíduo, a taxa de decaimento desta quantidade será proporcional a própria quantidade.

Assim, se $y(t)$ é a quantidade de fármaco presente num indivíduo num instante t, existe $-k < 0$ tal que

$$y'(t) = -k \cdot y(t)$$

4) Juros compostos continuamente

Se $r\%$ é a taxa de juros de uma certa aplicação e esta for aplicada continuamente, a taxa de crescimento do montante aplicado é proporcional ao montante. Assim, se $y(t)$ é o montante no instante t:

$$y' = \frac{r}{100} \cdot y$$

5) Fenômeno de resfriamente de Newton

A lei empírica de Isaac Newton para resfriamente de corpos, nos diz que a taxa de decrescimento da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente em que o corpo se encontra.

Assim, se $y(t)$ é a temperatura do corpo no instante t e T_0 é a temperatura ambiente, existe $-k < 0$ tal que

$$y' = -k \cdot (y - T_0)$$

Em particular, se $T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$, temos:

$$y' = -k \cdot y$$

Exploraremos tais fenômenos nos problemas a seguir.

7.1 Dinâmica populacional (Modelo de Malthus)

Questões relativas ao crescimento populacional, especialmente aquelas que buscam estudar o convívio do ser humano como sociedade, historicamente, costumavam ser levantadas no meio das Ciências Humanas. Contudo, no século XVIII, o economista Thomas Robert Malthus, considerado como o precursor da ciência demográfica, argumentou que o crescimento em ritmo exponencial da população mundial superaria a oferta de alimentos – que cresceria aritmeticamente, o que traria como consequência, a miséria. Assim, criou um modelo matemático que supostamente iria corroborar com seus argumentos. A teoria Malthusiana pressupõe que a taxa de crescimento da população de um país, em um dado instante, é proporcional a população total deste, naquele instante. Considerando P(t) como a população total no instante t, o modelo seria:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P, \quad k > 0$$

Assim, se no tempo t_0 tivermos $P(t_0) = P_0$ concluímos que:

$$P_{(t)} = P_0 \cdot e^{k \cdot (t - t_0)}, t > t_0$$

Hoje se sabe que o modelo se mostra confiável em populações que possuem poucos, ou nenhum agente limitante natural para o crescimento destas, como escassez de alimentos, espaço limitado ou variação de temperatura, por exemplo. Por isso, este pode ser um bom modelo matemático quando se trata do crescimento de pequenas populações, ou populações em estágio inicial e em pequenos intervalos temporais, pois quanto maior a população mais se nota a existência de agentes limitadores. A seguir, para o estudo de um exemplo envolvendo o modelo Malthusiano, consideraremos um exemplo com a bactéria Escherichia Coli, uma das maiores responsáveis pela contaminação por infecções alimentares em seres humanos, segundo Fujita (2019).

Esta bactéria possui, geralmente, tempo de duplicação entre 15 e 30 minutos. Suponhamos, neste exemplo, que o tempo de duplicação seja de 20 minutos. Analisando o gráfico a seguir destacamos as seguintes fases no desenvolvimento de tal população:

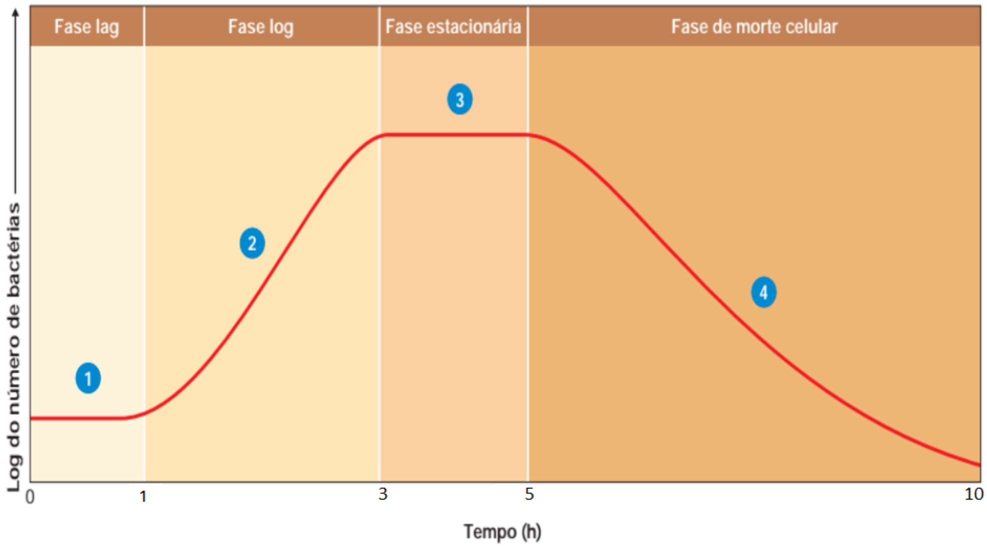
Fase lag (1): Fase de adaptação metabólica ao ambiente.

Fase log(2): Fase log ou fase exponencial é a fase na qual as bactérias crescem em ritmo exponencial.

Fase estacionária(3): Fase em que o crescimento diminui drasticamente devido às condições limitantes do meio.

Fase de morte celular(4): Fase em que a taxa de divisão celular torna-se menor que a taxa de morte celular, assim, decrescem exponencialmente até completa eliminação.

Figura 11 – Curva de crescimento bacteriano



Fonte – Adaptado de IFRS – Concurso Público Edital 21/2018 – Caderno de Provas

Assim, com base nesta figura, vamos supor que após a fase de adaptação ao ambiente tenhamos uma cultura com 10^2 bactérias. Logo, se $P(t)$ é o número de bactérias em t horas, então $P(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} P' = k \cdot P & ,k > 0 \\ P(1) = 10^2 \end{cases}$$

E de (7.2) segue que $P(t) = 10^2 \cdot e^{k\cdot(t-1)}$, com t medido em horas.

Observe ainda que como o tempo de duplicação é de 20 minutos, isto é, em $\frac{1}{3}$ de hora temos de (7.4) que:

$$\frac{1}{3} = \bar{\bar{t}} = \text{tempo de duplicação} = \frac{ln(2)}{k}$$

Portanto $k = 3 \cdot ln(2)$

Assim, $P(t) = 10^2 \cdot e^{3ln2\cdot(t-1)} = 10^2 \cdot 8^{t-1}$

Com base nessas informações, qual a quantidade de bactérias nessa cultura para que o meio limite o crescimento destas?

Pelo gráfico, a fase exponencial termina em $t = 3$, logo:

$$P(3) = 10^2 \cdot 8^2 = 6400 \text{ bactérias}$$

Portanto, a quantidade de bactérias para que se chegue ao limiar de entrar na fase estacionária é de 6400 bactérias.

7.2 Decaimento exponencial

7.2.1 Acidente radioativo

Segundo Armbruster e Kostelich (1996, p. 80), o decaimento de um isótopo radioativo pode ser modelado por uma função exponencial, para a qual o tempo de redução, mais comumente chamado de tempo meia-vida, caracteriza a taxa de decaimento. O instante preciso no qual um átomo radioativo decai é, em essência, aleatório, mas a probabilidade de decaimento por unidade de tempo é igual para qualquer átomo. Em muitas aplicações práticas, uma amostra de alguns isótopos pode conter na ordem de 10^{20} átomos ou mais. Uma aproximação precisa e contínua da taxa de decaimento de um conjunto tão grande pode ser declarada como segue:

A taxa em que a massa do isótopo diminui é proporcional ao tamanho atual da massa.

Podemos expressar essa relação como a equação diferencial:

$$m'(t) = -k \cdot m(t),\, k > 0$$

onde $m(t)$ é a massa no instante t e k é a constante que fornece a taxa de decaimento.

Como exemplo, utilizaremos o Césio-137, que possui meia-vida de 30 anos. Este isótopo foi protagonista de um acidente radioativo ocorrido em Goiânia, 1987, quando uma amostra de aproximadamente 19 gramas foi encontrada, por catadores de lixo, dentro de um aparelho de tratamento para câncer abandonado. Seu brilho verde-azulado chamou atenção de muitos populares que quiseram conferir de perto o suposto objeto valioso. O item brilhante ficou conhecido na região como "brilho da morte", pois em poucos dias matou 4 pessoas e deixou centenas contaminadas.

Suponhamos ter uma amostra de 200mg e que queiramos saber:

a) Qual a massa remanescente após t anos?

b) Qual a massa remanescente após 600 anos?

Solução:

a) Seja $m(t)$ a massa remanescente após t anos, então $m(t)$ é solução do problema:

$$\begin{cases} m'(t) = -k \cdot m \\ m(0) = 200mg \end{cases}$$

Assim, de (7.2):

$$m(t) = 200 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Para determinarmos a constante k, utilizaremos o fato de que a meia vida do césio é de 30 anos. Logo, de (7.3)

$$30 = \bar{t} = \frac{ln2}{k} \Rightarrow k = \frac{ln2}{30}$$

Concluímos que após t anos, a massa remanescente é:

$$m(t) = 200 \cdot e^{-\frac{ln2}{30} \cdot t}$$

b) Para o cálculo da massa remanescente após 600 anos:

$$m(600) = 200 \cdot e^{-\frac{ln(2)}{30} \cdot 600} = 200 \cdot e^{-ln(2) \cdot 20} \approx 0,00019.$$

Assim, após 600 anos, a massa remanescente é de, aproximadamente, 0,00019mg.

7.2.2 Datação de achados arqueológicos

Para que se entenda o modo de vida de nossos antepassados faz-se necessário, dentre outros aspectos, a datação de fósseis. Segundo Farias (2002), no geral, o carbono presente na Terra é composto por dois isótopos estáveis, o Carbono-12 (98,9%) e o Carbono-13 (1,1%). No entanto, todo ser vivo contém traços do isótopo radioativo Carbono-14 (na proporção de 1 átomo de Carbono-14 para cada 10^{12} átomos de Carbono-12), pois o absorvemos por meio da alimentação ou fotossíntese, no caso das plantas.

Ao morrer, um ser vivo deixa de absorver Carbono-14. Uma vez que este elemento possui tempo de meia-vida de 5730 anos, é possível descobrir, utilizando técnicas modernas, que basicamente medem a razão entre Carbono-14 e Carbono-12, a idade de um achado orgânico. Assim, segundo Interessante (2011), em 5730 anos, uma certa quantidade de carbono 14 ficará reduzida à metade, sendo a outra metade transformada em carbono 12. Dessa forma, basta que se examine a razão Carbono-14/Carbono-12 para se determinar a porcentagem de Carbono-14 remanescente em relação a original e, finalmente, descobrir a idade do achado.

Contudo, o método possui suas limitações. Um objeto com 100 anos de idade não poderia ser adequadamente datado, pois a quantidade de radiação beta emitida terá diminuído muito pouco e, dessa maneira, a incerteza na medida será de $\pm$ 100 anos. Analogamente, objetos com mais de 7 “meias-vidas” (aproximadamente 40000 anos) não podem ser datados com precisão, uma vez que após esse tempo a quantidade de radiação emitida tende a zero.

Em 1989, três laboratórios em Oxford, Zurique e Tucson, analisaram uma amostra do "Sudário de Turim", o tecido de linho que supostamente seria o Santo Sudário (manto utilizado para cobrir o corpo de Jesus após a crucificação), fora analisado através da técnica do Carbono-14. Segundo, Cohen e Henle (2005, p. 203), a medição constatou que a quantidade de Carbono-14 encontrada no tecido era de 92% da quantidade existente em tecidos do mesmo tipo produzido por plantas atuais de mesma espécie. Por se tratar de um problema de tempo de meia-vida e sendo $C_{14}(t)$ a quantidade de Carbono-14 no tempo t medido em anos, temos que $C_{14}(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} C_{14}' = -k \cdot C_{14} \quad ,k > 0 \\ C_{14}(0) = C_{14} \end{cases}$$

Onde $t_0 = 0$ indica o ano em que o Sudário de Turin fora confeccionado e C_{14} é a quantidade original de Carbono-14 da amostra. Assim segue de (7.2) que $C_{14}(t) = C_{14} \cdot e^{-k \cdot t}$, $k > 0$.

Podemos então responder aos itens que seguem:

a) Qual o valor de k?

b) Estime a data do achado.

a) Segue de (7.3) que $5730 = \bar{t} = \frac{ln2}{k} \Rightarrow$

$$k = \frac{ln2}{5730} = 0,00012096809.$$

b) Seja t_1 tal que $C_{14}(t_1) = \frac{92}{100} \cdot C(0) = 0,92 \cdot C_{14}$, então:

$$0,92 \cdot C_{14} = C_{14} \cdot e^{-k \cdot t_1} \Rightarrow e^{-k \cdot t_1} = 0,92 \Rightarrow t_1 = \frac{ln(0,92)}{-k}$$

Portanto, $t_1 = 689,3$ anos.

No entanto, segundo estudos mais atuais como o de Raymond Roger, como consta em Globo (2005, p. 31), o sudário seria mais antigo do que aponta o teste de 1989, pois o pano utilizado para o teste foi, supostamente, um pedaço de remendo feito na idade Média para reparar um dano provocado por um incêndio, ocorrido exatamente na época e no local onde o tecido estava guardado, sendo assim, existe a chance de que este tecido seja o que, supostamente, cobriu o corpo de Jesus Cristo.

7.2.3 Decaimento de fármaco

Os cientistas da União Soviética que fizeram parte da força-tarefa que possuía como objetivo atenuar as consequências do acidente nuclear ocorrido em Chernobyl em 1986, afim de evitar câncer na tireoide ou outros tipos de câncer ocasionados pela contaminação da tireóide, ingeriram pastilhas de iodo ao desconfiar do acidente. Isso pode parecer contraditório, uma vez que, em um acidente nuclear, o iodo radioativo (Iodo-131) é uma das –primeiras– substâncias que escapam da usina, causando os supracitados tipos de câncer.

Contudo, o iodo contido nas pastilhas não é o radioativo, mas sim o iodeto de potássio, que em doses adequadas é inofensivo. Assim, administrando-se corretamente, a glândula tireoide fica sobrecarregada e não mais armazena qualquer forma de iodo, seja ele radioativo ou não. Desse modo, o Iodo-131 que for absorvido pela pele, alimentos ou ar será, em tese, eliminado pelos rins. Todavia, a pastilha de Iodeto de Potássio não protege contra todos os materiais radioativos que podem escapar em um acidente nuclear.

Mesmo que acima tenha sido descrito como vilão, o iodo-131 possui grande utilidade médica. Como exemplo, denomina-se Iodoterapia a técnica indicada em alguns casos, como no tratamento de algumas doenças que causam hipertireoidismo, câncer de tireoide, entre outras, segundo Barretos (2015).

O tempo de meia-vida do iodo-131 é de 8 dias. Suponhamos que tenham sido administrados, 10 mg a um paciente.

a) Qual será o volume restante após 2 meses da primeira aplicação?

b) Suponhamos que a quantidade de Iodo-131 recomendável na corrente sanguínea de uma pessoa em tratamento seja de, no mínimo, 3 mg. Assim, após a primeira dose, em quanto tempo o paciente deverá receber outra, supondo que esta nova dose deva ser administrada ao se constatar que a quantidade de Iodo-131 esteja próxima a mínima?

Solução:

a) Seja $m(t)$ a massa de iodo no tempo t, medido em dias, dentro do organismo da pessoa. Então,

$$\begin{cases} m' = -k \cdot m \quad ,k > 0 \\ m(0) = 10mg \end{cases}$$

Consequentemente $m(t) = 10 \cdot e^{-k \cdot t}$, $k > 0$. Como a meia vida do iodo-31 é de 8 dias, temos de (7.3) que

$$8 = \bar{t} = \frac{ln2}{k} \Rightarrow k = \frac{ln2}{8} = 0,087$$

Assim, $m(t) = 10 \cdot e^{-0,087t}$

Logo, após 2 meses, $m(60) = 10 \cdot e^{-0,087 \cdot 60} \approx 0,006mg$

b) Queremos saber para qual tempo t, $m(t) = 3mg$.

$$10 \cdot e^{-0,087 \cdot t} = 3 \Rightarrow -0,087t = ln\frac{3}{10} \Rightarrow t \approx 14.$$

Assim, para que a dosagem no sangue se mantenha próxima à mínima necessária, nova administração deverá ser feita em 14 dias.

7.3 Juros compostos continuamente

a) Suponha que uma dada aplicação bancária ofereça juros mensais de r=1% capitalizados continuamente. Se um investidor aportar R$10.000,00, quanto tempo levará para que seu capital evolua a R$15.000,00 ?

b) Um anúncio na internet promete a investidores um rendimento de 100% sobre o valor investido em 6 meses. Se o anúncio não for uma fraude, qual a taxa de juros aproximada (supondo capitalização contínua) ofertada nesta aplicação?

Solução

a) Se m_0 é o capital aplicado inicialmente e $m(t)$ é o montante após o tempo t, dado em meses, tem-se

$$\begin{cases} m'(t) = k \cdot m(t) \quad ,k = r\% \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

Assim, sendo $m_0 = 10^4$, segue de (7.2) que

$$m(t) = m_0 \cdot e^{r \cdot t} \Rightarrow m(t) = 10^4 \cdot e^{10^{-2} \cdot t}$$

Então, para $m(t) = 1,5 \cdot 10^4$, temos:

$$1,5 \cdot 10^4 = 10^4 \cdot e^{10^{-2} \cdot t} \Rightarrow 10^{-2} \cdot t = ln(1,5) \Rightarrow t \approx 40,55.$$

Assim, após cerca de 40,55 meses, isto é, 3 anos e 4 meses, terá o montante desejado.

b) Sendo $m(t) = m_0 \cdot e^{k \cdot t}$, com t medido em meses, concluímos pelo enunciado que 6 meses é o tempo necessário para o valor aplicado inicialmente duplicar, uma vez que nesse tempo haverá retorno de 100% do investimento.

Logo, por (7.4):

$$6 = \bar{t} = \frac{ln2}{k} \Rightarrow k = \frac{ln2}{6} \approx 0,1155 = 11,55\%$$

Assim, $r \approx 11,55\%$ ao mês.

Observação: Em tempos onde a inflação é cerca de 4% ao ano, certamente este anúncio é uma fraude.

7.4 Fenômeno de resfriamento de Newton

Suponha que uma torta seja colocada num freezer que seja mantido na temperatura de $0°C$.

Se sua temperatura média encontra-se a $69°C$ e após duas horas estava com $23°C$, quanto tempo levará para sua temperatura atingir $10°C$?

Solução:

Seja $T(t)$ a temperatura média no tempo t, com t em horas.

$$(I)\begin{cases} T' = -k \cdot T, \quad k > 0 \\ T(0) = 69 \end{cases}$$

Logo, $T(t) = 69 \cdot e^{-k \cdot t}$

$$T(2) = 69 \cdot e^{-k \cdot 2} = 23 \Rightarrow e^{-k \cdot 2} = \frac{1}{3} \Rightarrow -2k = -ln3 \Rightarrow k \approx 0,55.$$

Portanto, $T(t) = 69 \cdot e^{-0,55 \cdot t}$

Logo,

$$T(t) = 10 = 0,69 \cdot e^{-0,55 \cdot t} \Rightarrow -0,55 \cdot t = ln\left(\frac{10}{69}\right) \Rightarrow t \approx 3,512.$$

Assim, em aproximadamente três horas e meia a torta estará a $10°C$

Caso a temperatura do freezer fosse diferente de $0°C$, digamos T_0, neste caso a equação diferencial que regeria o problema seria

$$(II)\begin{cases} T' = -k \cdot (T - T_0), \quad k > 0 \\ T(0) = 69 \end{cases}$$

Fazendo $y(t) = T(t) - T_0$ temos que $y'(t) = T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_0) = -k \cdot y(t)$ e $y(0) = T(0) - T_0 = 69 - T_0$.

Assim $y(t)$ satisfaria o problema

$$(II)\begin{cases} y' = -k \cdot y, \quad k > 0 \\ y(0) = 69 - T_0 \end{cases}$$

Como antes concluiríamos que $y(t) = (69 - T_0) \cdot e^{-0,55t}$ e portanto a solução de (II) será $T(t) = T_0 + (69 - T_0) \cdot e^{-0,55t}$.

CAPÍTULO

8

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

8.1 Sequência didática I

Título: Explorando logaritmos através da tabela de Henry Briggs.

Conteúdo: Tabela de logaritmos de Henry Briggs; mantissa, característica e propriedades de logaritmos.

Ano/ Série: 3^o do Ensino Médio

Bimestre: 4^o

Tempo previsto: 6 horas/aula.

Materiais necessários: lousa, tabelas de logaritmos (Anexo) e lista de exercícios de sala (página 105) impressas.

Metodologia: aula expositiva e resolução de exercícios.

Objetivos:

Fazer o uso de propriedades dos logaritmos e operar com a tabela de Henry Briggs para então transformar operações de multiplicações e divisões em, respectivamente, somas e diferenças.

Competências e habilidades da BNCC BRASIL (2017, pp. 265, 317, 537):

Competência específica 1 (Ensino Fundamental): Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Competência específica 3 (Ensino Médio): Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades:

(EF09MA03): Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04): Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(EM13MAT313): Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

Conceitos prévios: Professor(a), é importante que seus alunos tenham conhecimento prévio de todos os itens a serem apresentados . Procure relembrá-los na ordem sugerida abaixo.

1) Propriedades de exponenciais: Seja $0 < a \neq 1$**, então**

•$P_0 : a^x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

•$P_1 : a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

•$P_2 : a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

•$P_3 : (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

•$P_4 : \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

•$P_5 : (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Além disso é importante também relembrar as seguintes propriedades envolvendo expoentes racionais:

• $R_1.\ \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot q}}$

• $R_2.\ \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

• $R_3.\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, b \neq 0$

• $R_4.\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

• $R_5.\ \sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot q]{a}$

Revise que se $r = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in N^*$, então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

2) Definição e propriedades de logaritmos :

Definição de logaritmos: Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de *logaritmo de x ($x > 0$) na base a*, o número y tal que $a^y = x$. Denotaremos y por:

$$\text{y=}\log_a x$$

O número a é a base do logaritmo, x o logaritmando e y o logaritmo. Além disso, da definição, $a^{\log_a x} = x$.

Faz-se necessário também a revisão das três propriedades logaritmicas que seguem. Sugere-se revisar o assunto por meio dos exemplos abaixo, usando para isso as seguintes aproximações: $\log_{10} 2 \approx 0,3$, $\log_{10} 3 \approx 0,48$ e $\log_{10} 7 \approx 0,85$.

(2.1) Propriedade da multiplicação: Para todo a, m, n positivos com $a \neq 1$ tem-se:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Exemplo: Calcule $\log_{10} 6$:

Resolução: $\log_{10} 6 = \log_{10}(3.2) = \log_{10} 3 + \log_{10} 2 = 0,3 + 0,48 = 0,78.$

(2.2) Propriedade da divisão: Para todo real positivo a, m, n com $a \neq 1$ temos:

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Exemplo: Calcule $\log_{10} \left(\frac{14}{3}\right)$

Resolução: $\log_{10} \left(\frac{14}{3}\right) = \log_{10} 14 - \log_{10} 3 = \log_{10}(7.2) - log_{10} 3 = \log_{10} 7 + \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = 0,85 + 0,3 - 0,48 = 0,67.$

(2.3) Propriedade da potência: Seja $0 < a \neq 1$, para todo $m > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\log_a m^k = k \cdot \log_a m$$

Exemplo: Calcule $\log_{10} \sqrt{5}$

Resolução: $\log_{10} \sqrt{5} = \log_{10} 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{10} 5 = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{10}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = \frac{1}{2}(1 - 0,3) = 0,35.$

3) Notação científica:

Professor(a), relembre com seus alunos a definição de notação científica, ou seja:

$$x = a \cdot 10^n, \text{ onde } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Lembre-se de enfatizar o intervalo ao qual a pertence e que n é um número inteiro.

Trabalhe com exemplos como os abaixo:

a) 278346

Resolução: 278346 = 2,78346.10^5

b) 1250.10^5

Resolução: $1250.10^5 = 1,250.10^8$

c) $0,00367.10^{-4}$

Resolução: $0,00367.10^{-4} = 3,67.10^{-7}$

DESENVOLVIMENTO:

1) Definição de mantissa e característica (com uso de propriedade da multiplicação):

Com tempo estimado de uma aula, o professor deve apresentar aos alunos a definição de mantissa e característica de logaritmos, podendo usar para isso o próprio conteúdo da sequência didática. Para tanto, é importante que os alunos tenham familiaridade com notação científica.

2) Explicação da tabela:

Com tempo estimado de 3 aulas, sugere-se primeiramente que o professor entregue impressa aos alunos a tabela de logaritmos de Henry Briggs e então apresente o raciocínio de construção dessa tabela. Contudo, é importante que os alunos tenham familiaridade com as propriedades de logaritmos.

Em seguida, resolva em lousa os exercícios 1, 2, 3 e 4 da lista, os quais têm a função de explorar a tabela no sentido de se calcular logaritmos decimais.

3) Uso da tabela para cálculo de produtos e divisões:

Mesmo que os alunos já possuam afinidade com a tabela, estima-se duas aulas para mostrar-lhes como a tabela era utilizada para o cálculo de produtos e divisões. Para tanto, sugerimos a resolução do exercício 5 da seguinte forma: Primeiramente o professor explica aos alunos o passo a passo para o cálculo de multiplicação e divisão, detalhado no próprio exercício e, em seguida, ofereça um tempo para que os alunos resolvam os itens a e b deste exercício. Finalmente estes devem ser corrigidos em lousa.

PARTE TEÓRICA

Abaixo segue um texto que mostra como a tabela de Henry Briggs, com o uso das propriedades de logaritmos, fora contruída.

As tábuas de logaritmos que são utilizadas em livros didáticos, são as tábuas de Henry Briggs, criadas basicamente para facilitar ainda mais as multiplicações e divisões – na época, eram feitas por meio das geniais tabelas de Napier. Para que se entenda o funcionamento das tabelas de Briggs, comentaremos brevemente os conceitos de característica e mantissa. Como bem sabemos, um número x, em notação científica pode ser escrito como:

$$x = a \cdot 10^n, \text{ onde } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Dessa maneira, Briggs notou que:

$$log(x) = log(a \cdot 10^n) = log(a) + log(10^n) = log(a) + n$$

Com isso, para todo x em notação científica, poder-se-ia escrever:

$$log(x) = log(a) + n$$

Como o logaritmo de qualquer número em notação científica ficará em função de a, basta conhecermos os logaritmos dos números a, com $1 \leq a < 10$. Henry Briggs denominou o $log(a)$ de mantissa do logaritmo de x e n de característica do logaritmo de x. Sendo assim:

$$log(x) = log(a) + n = \text{mantissa} + \text{característica}$$

Portanto, no nosso exemplo,

$$log(3476,7) = log(3,4767 \cdot 10^3) = log(3,4767) + log(\ 10^3) \approx 0{,}5412 + 3.$$

Logo, $log(3,4767) \approx 0{,}5412$ é a mantissa e $log(10^3) = 3$ é a característica.

Para construir sua tábua, começou, segundo Avila (2019), extraindo a raiz quadrada de 10 e, em seguida, a raiz quadrada dos resultados subsequentes, 54 vezes. Todos os cálculos com aproximação de 30 casas decimais. Isso equivale a calcular o resultado de cada termo da sequência:

$$\sqrt{10},\ \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2^2]{10},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \sqrt[2^3]{10},\ ...,\ \sqrt[2^{54}]{10}.$$

Obteve assim, o logaritmo de vários números, como ilustrado na seguinte tabela:

Tabela 7 – Logaritmos de algumas raízes n-ésimas de 10

x	**log(x)**
$\sqrt{10}$ = 3,16228	0,50000
$\sqrt[2^2]{10} = \sqrt[4]{10}$ = 1,77828	0,25000
$\sqrt[2^3]{10} = \sqrt[8]{10}$ = 1,33521	0,12500
$\sqrt[2^4]{10} = \sqrt[16]{10}$ = 1,15478	0,06250
$\sqrt[2^5]{10} = \sqrt[32]{10}$ = 1,07461	0,03125
$\sqrt[2^6]{10} = \sqrt[64]{10}$ = 1,03663	0,01563
$\sqrt[2^7]{10} = \sqrt[128]{10}$ = 1,01815	0,00781
$\sqrt[2^8]{10} = \sqrt[256]{10}$ = 1,00904	0,00391
$\sqrt[2^9]{10} = \sqrt[512]{10}$ = 1,00450	0,00195
$\sqrt[2^{10}]{10} = \sqrt[1024]{10}$ = 1,00225	0,00097
$\sqrt[2^{11}]{10} = \sqrt[2048]{10}$ = 1,00112	0,00048
$\sqrt[2^{12}]{10} = \sqrt[4096]{10}$ = 1,00056	0,00024
$\sqrt[2^{13}]{10} = \sqrt[8192]{10}$ = 1,00028	0,00012
...	...
$\sqrt[2^{54}]{10}$ = 1,00000	0,00000

Fonte – Próprio autor

Os logaritmos de números pares foram encontrados utilizando-se o $log(2)$. Para encontrá-lo, fez-se o seguinte processo, segundo Sampaio (2010):

Começou procurando, na tabela, a raiz n-ésima de 10, menor que 2, e mais próxima possível desse último número, encontrando assim $\sqrt[4]{10}$. Então realizou o cálculo :

$$\frac{2}{\sqrt[4]{10}} = 1,12468 \Rightarrow 2 = \sqrt[4]{10} \cdot 1,12468$$

Procurou, então, a maior raiz n-ézima de 10 menor que 1,12468, encontrando $\sqrt[32]{10}$ e então:

$$\frac{1,12468}{\sqrt[32]{10}} = 1,04659 \Rightarrow 1,12468 = \sqrt[32]{10} \cdot 1,04659$$

Seguindo o mesmo processo até que chegasse no número 1, obteve:

$$\frac{1,04659}{\sqrt[64]{10}} = 1,00961 \Rightarrow 1,04659 = \sqrt[64]{10} \cdot 1,00961$$

$$\frac{1,00961}{\sqrt[256]{10}} = 1,00056 \Rightarrow 1,00961 = \sqrt[256]{10} \cdot 1,00056$$

$$\frac{1,00056}{\sqrt[4096]{10}} = 1,00000 \Rightarrow 1,00056 = \sqrt[4096]{10}.$$

Em posse dessas igualdades, concluiu:

$$2 = \sqrt[4]{10} \cdot 1,12468 = \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[32]{10} \cdot 1,04659 = \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[32]{10} \cdot \sqrt[64]{10} \cdot 1,00961 =$$

$$= \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[32]{10} \cdot \sqrt[64]{10} \cdot \sqrt[256]{10} \cdot 1,00056 =$$

$$= \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[32]{10} \cdot \sqrt[64]{10} \cdot \sqrt[256]{10} \cdot \sqrt[4096]{10} =$$

$$= 10^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}} \Rightarrow 2 = 10^{0,30103}.$$

E, finalmente

$$\boxed{log(2) = 0,30103}$$

E dessa forma foi aumentando ainda mais os dados de sua tabela utilizando as propriedades de logaritmos. Valores como, por exemplo, log(5), log(8), entre outros, podem ter sido obtidos por meio dos seguintes cálculos:

$$log(5) = log\left(\frac{10}{2}\right) = log(10) - log(2) = 1 - 0,30103 = 0,69897 \Rightarrow \boxed{log(5) = 0,69897}.$$

$$log(8) = log2^3 = 3 \cdot log(2) = 3 \cdot 0,30103 = 0,90309 \Rightarrow \boxed{log(8) = 0,90309}.$$

Bem como, utilizando outros resultados já obtidos:

$$log(10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{4}}) = log(10^{\frac{1}{2}}) + log(10^{\frac{1}{4}}) \Rightarrow$$

$$log(3,16228 \cdot 1,77828) = 0,5 + 0,25 = 0,75 \Rightarrow \boxed{log(5,62342) = 0,75.}$$

Neste exemplo, Briggs obteria o log(5,62342). Já para calcular valores entre log(5) e log(5,62342), usaria o raciocínio de média geométrica entre dois números. Como sabemos, a média geométrica entre dois números A e B está entre esses dois valores, isto é, se $A,B,C > 0$, onde $B > A$ e $C = \sqrt{A \cdot B}$, então, $A < C < B$ e consequentemente $log(A) < log(C) < log(B)$, ou seja:

$$log(C) = log(\sqrt{A \cdot B}) = \frac{log(A) + log(B)}{2}.$$

Logo,

$$log(\sqrt{5,00000 \cdot 5,62342}) = log(5,30255) = \left(\frac{log(5,00000) + log(5,62342)}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{0,69897 + 0,75}{2}\right) = 0,72448.$$

Portanto,

$$\boxed{log(5,30255) = 0,72448}.$$

E dessa forma, calculou logaritmos intermediários aos já calculados pelas propriedades anteriores. Posteriormente organizou sua tábua de logaritmos.

A seguir, um modelo simplificado da tábua obtido em Pecorari (2013), para aplicação da atividade em sala de aula:

Figura 12 – Tábua de Logaritmos - Parte 1

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0606	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1039	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900

Figura 13 – Tábua de Logaritmos - Parte 2

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5443	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6281	0,6294	0,6301	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7788	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8337	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506

Figura 14 – Tábua de Logaritmos - Parte 3

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9529	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9667	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9719	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

A tabela acima possui, em sua primeira coluna, valores compreendidos de 1,0 a 9,9, espaçados de 0,1 em 0,1. Enquanto que na primeira linha encontram-se os números de 0,01 a 0,09 espaçados de 0,01 em 0,01. Assim, caso queiramos saber o logaritmo de 2,35, por exemplo, devemos procurar, na primeira coluna, o valor 2,3 e, na primeira linha, o valor 0,05. A célula da tabela que está na intersecção da linha do valor 2,3 e coluna do valor 0,05 corresponde ao logaritmo de 2,35, ou seja, log(2,3 + 0,05). Assim, no exemplo, $log(2,35) \approx 0,3711$. Além disso, a célula da tabela que contém o valor 0,3711 pode ser interpretada como o expoente que na base 10 resulta em 2,35, isto é, $10^{0,3711} = 2,35$.

Observação 7. Se $1 \leq x < 10$, então as características de $log(x)$ são nulas. Como $log(x) =$ mantissa + característica $\Rightarrow log(x) =$ mantissa + $0 =$ mantissa . Por este motivo a tabela acima pode ser chamada de tabela de mantissas. Veja pela tabela que as mantissas de $log(x)$ variam no intervalo $[0; 0,9996]$.

LISTA DE EXERCÍCIOS A SEREM TRABALHADOS EM SALA DE AULA

Utilizando a Tábua apresentada anteriormente, responda aos exercícios abaixo:

Exercício 1) Responda, fazendo uso da tabela, ao que se pede:

a) Encontre o valor aproximado de $log(3,41)$.

b) Como $0,341 = 3,41 \cdot 10^{-1}$, encontre o valor aproximado de $log(0,341)$.

c) Qual o valor aproximado de $log(341)$?

d) Calcule o valor aproximado de $10^{0,5328}$.

Exercício 2) Responda ao que se pede, por meio da tabela:

a) Qual o valor de $log(62,8)$?

b) Encontre o valor de $log(0,00000628)$.

c) Qual o valor de $10^{5,7980}$?

Exercício 3) Sabendo-se que 653 é um número primo, responda usando as aproximações da tabela o valor de $log5877$.

Exercício 4 Uma técnica para contarmos a quantidade de algarismos de uma potência, é escrevê-lo em notação científica. Assim, consideremos o número x em notação científica, ou seja, $x = a \cdot 10^n$, onde $1 \leq a < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, o número de algarismos de x é $(n+1)$. Por exemplo, suponhamos $x = 520000$, que em notação científica fica $x = 5,2 \cdot 10^5$. Temos então, que o número de algarismos de x é (5+1), portanto 6, como se poderia ter notado logo de início. Isso vale para qualquer número real escrito em notação científica. Com relação ao enunciado acima, responda:

a) Qual a quantidade de algarismos do número $0,00541 \cdot 10^{12}$?

b) Consultando a tabela, encontre o valor de $\log 2$ e responda qual a quantidade de algarismos do número 2^{200}.

Exercício 5) Observe por meio dos passos abaixo como calcular a multiplicação e a divisão entre dois números (95499000 e 3710).

Observação: A tabela disponibilizada aqui possui logaritmandos com apenas duas casas decimais. As tabelas de Briggs, possuiam mais casas decimais, conferindo mais exatidão aos cálculos.

a) Multiplicação entre 95499000 e 3710:

i) Calcule o logaritmo da multiplicação (com os fatores em notação científica), usando para isso a propriedade da multplicação e a tabela (quando necessário):

$$log(9,55 \cdot 3,71 \cdot 10^7 \cdot 10^3) = log(9,55) + log(3,71) + log10^{10} =$$

$$= 0,9800 + 0,5694 + 10 \Rightarrow log(9,55 \cdot 3,71 \cdot 10^7 \cdot 10^3) = 11,5494.$$

ii) Repare que a multiplicação pode ser escrita em base 10:

$$9,55 \cdot 3,71 \cdot 10^7 \cdot 10^3 = 10^{11,5494}$$

iii) Separe a parte inteira da parte não inteira do expoente do 2^o membro da igualdade acima, obtendo os fatores:

$$10^{11} \cdot 10^{0,5494}$$

iv) Encontre o valor aproximado da potência de base 10 cujo expoente não é inteiro usando a tabela. Em seguida multiplique pelo outro fator, encerrando o processo.

$$10^{11} \cdot 3,54$$

Logo, $95.499.000 \cdot 3710 = 10^{11} \cdot 3,54$.

b) Divisão entre 95.499.000 e 3.710:

i) Calcule o logaritmo da divisão (com numerador e denominador em notação científica), usando para isso a propriedade da divisão e a tabela (quando necessário):

$$log\left(\frac{9,55 \cdot 10^7}{3,71 \cdot 10^3}\right) = log\left(\frac{9,55 \cdot 10^4}{3,71}\right) = log(9,55) - log(3,71) + log(10^4) =$$

$$= 0,98 - 0,5694 + 4 = 4,4106 \Rightarrow log\left(\frac{9,55 \cdot 10^4}{3,71}\right) = 4,4106.$$

ii) Repare que a divisão pode ser escrita em base 10:

$$\left(\frac{9,55 \cdot 10^7}{3,71 \cdot 10^3}\right) = 10^{4,4106}$$

iii) Separe a parte inteira da parte não inteira do expoente do 2^o membro da igualdade acima, obtendo os fatores:

$$10^4 \cdot 10^{0,4106}$$

iv) Calcule o valor aproximado da potência de base 10 cujo expoente não é inteiro usando a tabela. Em seguida multiplique pelo outro fator, encerrando o processo:

$$10^4 \cdot 2,57$$

Logo, $\left(\dfrac{95499000}{3710}\right) \approx 10^4 \cdot 2,57.$

Entendido o método, realize os cálculos abaixo:

a) $896123 \cdot 9121$

b) $\dfrac{896123}{9121}$

RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1

a) $log 3,41 = 0,5328$.

b) $log 0,341 = log(3,41 \cdot 10^{-1}) = log 3,41 + log 10^{-1} = -0,4672$.

c) $log 341 = log(3,41 \cdot 10^{2}) = log 3,41 + log 10^{2} = 2,5328$.

d) Seja $10^{0,5328} = x$, assim:

$log(x) = 0,5328$. Como $10^0 < x < 10^1$, 0,5328 é a própria mantissa do $log(x)$ (ver Observação 7).

Portanto, $x = 3,41$.

Exercício 2

a) $log 62,8 = log 6,28 \cdot 10 = log 6,28 + log 10 = 0,7980 + 1 = 1,7980$.

b) $log 0,00000628 = log(6,28 \cdot 10^{-6}) = 0,7980 - 6 = -5,202$.

c) $10^{5,7980} = 10^5 \cdot 10^{0,7980}$. Procedendo como no exercício anterior temos que se $x = 10^{0,7980}$ então $log(x) = 0,7980$. Portanto $10^{5,7980} = 10^5 \cdot 6,28 = 628000$.

Exercício 3

Duas resoluções são possíveis:

1^a: Da fatoração de 5877 vemos que $5877 = 653 \cdot 9$. Portanto,

$log 5877 = log(653 \cdot 9) = log 6,53 + log 10^2 + log 9 = 3,7691$.

2^a: Sem utilizar a fatoração podemos considerar $log 5877 \approx log(5,88 \cdot 10^3)$. Assim encontraríamos o valor de $log 5,88$ na tabela, ficando:

$log 5877 \approx log(5,88 \cdot 10^3) = log 5,88 + 3 = 3,7694$.

Exercício 4

a) $0,00541 \cdot 10^{12} = 5,41 \cdot 10^9$. Portanto são 10 algarismos.

b) Como $log 2 = 0,301 \Rightarrow 2 = 10^{0,301}$. Assim,

$2^{200} = (10^{0,301})^{200} = 10^{60,2} = 10^{60} \cdot 10^{0,2}$.

Por $10^0 < 10^{0,2} < 10^1$, então $10^{0,2} \cdot 10^{60}$ está na forma de notação científica. Logo são 61 algarismos.

Exercício 5

Primeiramente vejamos que $896.123 \approx 8,96 \cdot 10^5$ e $9121 \approx 9,12 \cdot 10^3$.

a) $log(8,96 \cdot 9,12 \cdot 10^8) = log 8,96 + log 9,12 + 8 = 9,9123$.

Então, $8,96 \cdot 9,12 \cdot 10^8 = 10^{9,9123} = 10^9 \cdot 10^{0,9123} \approx 10^9 \cdot 8,17$.

b) $log\left(\dfrac{8,96 \cdot 10^2}{9,12}\right) = log 8,96 - log 9,12 + 2 = 1,9932$.

Então, $\dfrac{8,96 \cdot 10^2}{9,12} = 10^{1,9932} = 10 \cdot 10^{0,9932} \approx 10 \cdot 9,84 = 98,4$.

8.2 Sequência didática II

Título: Sugestão de problemas concretos usando funções exponenciais.

Conteúdo: Funções exponenciais e suas propriedades e equações exponenciais.

Ano/ Série: 3^o do Ensino Médio.

Bimestre: 4^o .

Tempo previsto: 2 horas/aula.

Materiais necessários: lousa e tabelas de logaritmos (Anexo) ou calculadora.

Metodologia: aula expositiva e resolução de exemplos (página 113).

Objetivos: Estudar problemas concretos e contemporâneos que envolvam quantidades descritas por funções exponenciais, utilizando suas propriedades e a relação com a função logaritmica.

Competências e habilidades da BNCC BRASIL (2017, pp. 535-536):

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades:

EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.

EM13MAT305: Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Conceitos prévios: Propriedades de exponenciais e logaritmos.

Desenvolvimento: Com tempo previsto de 2 aulas, o professor pode trabalhar a parte teórica a seguir e também realizar a resolução de dois exemplos, com o auxílio da tabela (ou da calculadora), que envolvem equações logaritmicas e exponenciais e cujos temas são: Decaimento radioativo e achados arqueológicos.

Assim, sugerimos que o professor resolva-os em conjunto com os alunos, pois entendemos que o objetivo deve ser, além de mostrar quantidades concretas descritas por exponenciais, que a resolução de uma equação exponencial necessita da função logaritmica e suas propriedades(extrapolando o uso desta função para além da conversão de multiplicação e divisão em somas e diferenças).

Avaliação:

Sugere-se que o professor indique alguns (ou todos) exercícios da Lista Extra contida imediatamente após essa sequência didática, que contém exercícios recorrentes em exames vestibulares, como forma do aluno praticar exercícios pós sala de aula.

PARTE TEÓRICA

Funções e equações exponenciais e tempo de meia-vida:

Suponha que uma certa quantidade varie com o tempo e que a função que descreve esta situação seja:

$y(t) = Ae^{kt}$ onde $k < 0$ e $A \in \mathbb{R}$ são dados e t é a unidade de tempo.

Suponha que no tempo t tenhamos a quantidade $y(t)$. Pergunta-se: Depois de quanto tempo $\bar{t}$ esta quantidade se reduzirá a metade?

Aqui devemos levar os alunos a concluírem que matematicamente esta pergunta se reduz a determinar um tempo $\bar{t}$ tal que:

$$y(t+\bar{t}) = \frac{y(t)}{2}.$$

Usando que $y(t) = Ae^{kt}$ temos:

$$y(t) = A \cdot e^{kt}, \text{ com } k < 0 \text{ e } A \neq 0$$

buscamos $\bar{t}$ tal que

$$y(\bar{t}+t) = \frac{y(t)}{2}$$

o que nos dá

$$A \cdot e^{k(\bar{t}+t)} = \frac{A \cdot e^{kt}}{2}$$

Logo, $e^{k\bar{t}} = \frac{1}{2} \Rightarrow k\bar{t} = -ln2$ e portanto

$$\bar{t} = \frac{-ln2}{k}$$

Observação 8. Note que $\bar{t}$ é positivo, pois k é negativo. O que era de se esperar ja que $\bar{t}$ indica um tempo futuro.

Essa demonstração não precisa, necessariamente, ser trabalhada em sala de aula. Mas se feita, é interessante notar que não importa a partir de qual momento t tenhamos medido a tal quantidade e nem o valor dessa quantidade, que sempre levará $\bar{t}$ unidades de tempo para uma quantidade se reduzir à metade. Matematicamente falando, não importa o valor de A ou t que $\bar{t}$ sempre será o mesmo. Se não for feita a demonstração, o valor de k ou $\bar{t}$ será obtido repetindo-se o raciocínio acima, mas em problemas específicos (como no exercício a seguir).

Sugerimos fazer os exemplos que seguem com o objetivo de relembrar equações exponências e logaritmicas e dar significado ao conceito de tempo de meia-vida.

EXEMPLOS PARA SEREM TRABALHADOS EM SALA DE AULA

Exemplo 1) Para que se entenda o modo de vida de nossos antepassados faz-se necessário, dentre outros estudos o de datação de fósseis. Todo ser vivo possui em seu organismo dois isótopos estáveis, o Carbono-12 $(98,9\%)$ e o Carbono- 13 $(1,1\%)$, além de traços do isótopo radioativo Carbono-14 presente no ar e alimentos. Ao morrer, todo ser vivo deixa de absorver o isótopo radioativo, com tempo de meia-vida de 5730 anos.

Em 1989, três laboratórios em Oxford, Zurique e Tucson, analisaram uma amostra do "Sudário de Turim", o tecido de linho que supostamente seria o Santo Sudário (manto utilizado para cobrir o corpo de Jesus após a crucificação); a medição constatou que a quantidade de Carbono-14 encontrada na amostra de tecido era de 92% da quantidade existente em tecidos do mesmo tipo produzido por plantas de mesma espécie que vivem atualmente.

Assim, conhecendo-se o tempo de meia-vida do Carbono-14, e que a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $C_{14}(t) = C14 \cdot e^{k \cdot t}$, onde $C14$ é a massa inicial e k uma constante negativa, calcule:

a) O valor da constante k. Use a aproximação $e \approx 2,72$ (se julgar necessário). Além disso, use o tempo de meia-vida do Carbono-14 (5730 anos) e a tábua logaritmica apresentada anteriormente (ou a calculadora) para encontrar os valores de logaritmos que surgirão nos cálculos.

b) Qual a data da amostra testada? Utilize, para isso, a porcentagem de Carbono-14 encontrada na amostra.

Exemplo 2) (ENEM 2013 - Adaptado) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

a) Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do Césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial? Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

b) Encontre o valor da constante negativa k (constante de decaimento), explicando qual o seu significado no contexto do exercício. Considere 0,43 como aproximação para $\log_{10} 2,7$.

RESOLUÇÃO DOS EXEMPLOS

Exemplo 1:

a) Professor, observe que $C_{14}(t) = C14 \cdot e^{k \cdot t}$ e que $k < 0$ pois a função $C_{14}(t)$ deve ser decrescente.

Observando-se que $C_{14}(5730) = \dfrac{C14}{2}$, teremos:

$C_{14}(5730) = C14 \cdot e^{k \cdot 5730} = \dfrac{C14}{2}$.

Usando $e \approx 2,72$, como sugere o enunciado, divindo os dois membros por $C14$ e aplicando logaritmo em base 10 , temos:

$\log 2,72^{k \cdot 5730} = \log \frac{1}{2} \Rightarrow -\log 2 = k \cdot 5730 \cdot \log 2,72 \Rightarrow k \approx -0,000120871$.

Ou usando diretamente a fórmula do tempo de meia-vida:

$5730 = \bar{t} = -\dfrac{ln2}{k} \Rightarrow k = -\dfrac{ln2}{5730} \approx -0,00012096809$.

b) Seja t_1 tal que $C_{14}(t_1) = \dfrac{92}{100} \cdot C14 = 0,92 \cdot C14$, então:

$$0,92 \cdot C14 = C14 \cdot e^{k \cdot t_1} \Rightarrow e^{k \cdot t_1} = 0,92 \Rightarrow t_1 = \frac{ln(0,92)}{k}$$

Portanto, $t_1 = 689,3$ anos.

Exemplo 2:

a) Pelos dados do exercício temos que $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$ e que $\log_{10} 2 = 0,3$. Queremos encontrar t tal que $M(t) = 10\% \cdot A$.

Como a meia-vida do Césio é de 30 anos, então:

$$M(30) = \frac{A}{2} \Rightarrow A \cdot 2,7^{k \cdot 30} = \frac{A}{2} \Rightarrow 2,7^{k \cdot 30} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2,7^k = 2^{\frac{-1}{30}}$$

Assim, tomando 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$, vem:

$M(t) = 0,1 \cdot A \Rightarrow A \cdot (2,7^k)^t = 0,1 \cdot A$.

Como $2,7^k = 2^{\frac{-1}{30}}$, então

$\left(2^{\frac{-1}{30}}\right)^t = 10^{-1} \Rightarrow \left(2^{\frac{-t}{30}}\right) = 10^{-1} \Rightarrow \log_{10} 2^{\frac{-t}{30}} = \log_{10} 10^{-1} \Rightarrow \dfrac{t}{30} \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{t}{30} \cdot 0,3 = 1 \Rightarrow t = 100$ anos.

Portanto, o tempo necessário para que reste 10% da massa inicial de Césio é de 100 anos.

b) Queremos encontrar o valor da constante negativa k.

Sabemos que $M(100) = 0,1 \cdot A$.

Assim,

$A \cdot 2,7^{k \cdot 100} = 0,1 \cdot A \Rightarrow 2,7^{k \cdot 100} = 0,1.$

Usando a aproximação $\log_{10} 2,7 \approx 2,43$ e aplicando *log* na base 10 em ambos os membros da equação acima, obtemos:

$\log_{10} 2,7^{k \cdot 100} = \log_{10} 0,1 \Rightarrow k \cdot 100 \cdot \log_{10} 2,7 = \log_{10} 10^{-1} \Rightarrow k \cdot 100 \cdot 0,43 \approx -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \approx \dfrac{-1}{43} \approx -0,0233.$

Observe que uma vez que se espera que a massa de Césio, $M(t)$, diminua com o tempo e que $M(t) = A \cdot e^{kt}$ com $A > 0$, de fato k deve ser negativo.

Caso queira encontrar o valor de k por outra forma, lembre-se que:

$$\bar{t} = \frac{-ln2}{k}$$

onde $\bar{t}$ é o tempo de meia-vida (30, nesse caso). Todavia, o valor de $ln2 \approx 0,69$ deve ser fornecido ao aluno.

Lista extra de exercícios

1. (Unicamp 2013) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740°C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40°C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-t/12} + T_{AR}$$

sendo *t* o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140°C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) $12[\log(7) - 1]$ minutos. b) $12[1 - \log(7)]$ minutos. c) $12\log(7)$ minutos.

d) $[1 - \log(7)]/12$ minutos.

2. (Insper 2014) Analisando o comportamento das vendas de determinado produto em diferentes cidades, durante um ano, um economista estimou que a quantidade vendida desse produto em um mês (Q), em milhares de unidades, depende do seu preço (P), em reais, de acordo com a relação

$$Q = 1 + 4 \cdot (0,8)^{2P}.$$

No entanto, em Economia, é mais usual, nesse tipo de relação, escrever o preço P em função da quantidade Q. Dessa forma, isolando a variável P na relação fornecida acima, o economista obteve

a) $P = \log_{0,8}\sqrt{\frac{Q-1}{4}}$. b) $P = \log_{0,8}\left(\frac{Q-1}{8}\right)$. c) $P = 0,5 \cdot \sqrt[0,8]{\frac{Q-1}{4}}$. d) $P = \sqrt[0,8]{\frac{Q-1}{8}}$.

e) $P = 0,5 \cdot \log_{0,8}\left(\frac{Q}{4} - 1\right)$.

3. (Ufpr 2012) Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em lumens, a uma profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08x$$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de 12,5 cm?
a) 150 lumens. b) 15 lumens. c) 10 lumens. d) 1,5 lumens. e) 1 lúmen.

4. (Pucpr 2015) O número de bactérias N em um meio de cultura que cresce exponencialmente pode ser determinado pela equação $N = N_0 e^{kt}$ em que N_0 é a quantidade inicial, isto é, $N_0 = N(0)$ e k é a constante de proporcionalidade. Se inicialmente havia 5000 bactérias na cultura e 8000 bactérias 10 minutos depois, quanto tempo será necessário para que o número de bactérias se torne duas vezes maior que o inicial?

(Dados: $\ln 2 = 0,69$ $\quad \ln 5 = 1,61$)

a) 11 minutos e 25 segundos. b) 11 minutos e 15 segundos. c) 15 minutos.

d) 25 minutos. e) 25 minutos e 30 segundos.

5. (Unesp 2015) No artigo “Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?”, o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0) \cdot e^{k \cdot t}$, em que $D(t)$ representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, $D(0)$ a área de desmatamento no instante inicial $t = 0$, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja $0{,}6\%$ e usando a aproximação $\ell n\, 2 \cong 0{,}69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente
a) 51. b) 115. c) 15. d) 151. e) 11.

6. (Ufsm 2015) Quando um elemento radioativo, como o Césio 137, entra em contato com o meio ambiente, pode afetar o solo, os rios, as plantas e as pessoas. A radiação não torna o solo infértil, porém tudo que nele crescer estará contaminado.

A expressão

$$Q(t) = Q_0 e^{-0{,}023t}$$

representa a quantidade, em gramas, de átomos radioativos de Césio 137 presentes no instante t, em dias, onde Q_0 é a quantidade inicial.

O tempo, em dias, para que a quantidade de Césio 137 seja a metade da quantidade inicial é igual a

Use $\text{In } 2 = 0{,}69$
a) 60. b) 30. c) 15. d) 5. e) 3.

7. (Ufrgs 2013) Dez bactérias são cultivadas para uma experiência, e o número de bactérias dobra a cada 12 horas. Tomando como aproximação para $\log 2$ o valor $0{,}3$, decorrida exatamente uma semana, o número de bactérias está entre
a) $10^{4{,}5}$ e 10^5. b) 10^5 e $10^{5{,}5}$. c) $10^{5{,}5}$ e 10^6. d) 10^6 e $10^{6{,}5}$. e) $10^{6{,}5}$ e 10^7.

8. (Uerj 2013) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez T(x), após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$T(x) = T_0 \cdot (0{,}5)^{0{,}1x}$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.
Sendo log 2 = 0,3, o valor de D é igual a:
a) 30 b) 32 c) 34 d) 36

9. (Unesp 2012) Em 2010, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realizou o último censo populacional brasileiro, que mostrou que o país possuía cerca de 190 milhões de habitantes. Supondo que a taxa de crescimento populacional do nosso país não se altere para o próximo século, e que a população se estabilizará em torno de 280 milhões de habitantes, um modelo matemático capaz de aproximar o número de habitantes (P), em milhões, a cada ano (t), a partir de 1970, é dado por:

$$P(t) = \left[280 - 190 \cdot e^{-0,019 \cdot (t-1970)}\right]$$

Baseado nesse modelo, e tomando a aproximação para o logaritmo natural

$$\ln\left(\frac{14}{95}\right) \cong -1,9$$

a população brasileira será 90% da suposta população de estabilização aproximadamente no ano de:
a) 2065. b) 2070. c) 2075. d) 2080. e) 2085.

10. (Unesp 2013) Todo número inteiro positivo n pode ser escrito em sua notação científica como sendo $n = k \cdot 10^x$, em que $k \in R^*$, $1 \leq k < 10$ e $x \in Z$. Além disso, o número de algarismos de n é dado por (x + 1).
Sabendo que $\log 2 \cong 0,30$, o número de algarismos de 2^{57} é
a) 16. b) 19. c) 18. d) 15. e) 17.

GABARITO:

1: [C] **2:** [A] **3:** [D] **4:** [C] **5:** [B] **6:** [B] **7:** [B] **8:** [C] **9:** [B] **10:** [C]

CAPÍTULO

9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frequentemente algumas indagações são feitas aos professores como *onde vou usar isso*, *de onde veio essa fórmula*, entre outras . Consideramos fundamental que estas perguntas sejam apropriadamente respondidas, pois acreditamos que estas respostas fomentam o aprendizado. A presente dissertação trouxe ao professor algumas minúcias históricas e alguns exercícios contextualizados que não são facilmente encontradas em livros didáticos, dando assim base para que o professor pudesse responder àquelas perguntas com segurança. Sendo assim, mostrar ao aluno que um — tão temido — conceito matemático, como o conceito de logaritmos, tem uma história belíssima e ainda por cima tem aplicação na resolução de problemas do mundo real, faz com que a compreensão do conceito seja mais ampla e interessante.

Foi o que notou-se através da aplicação da sequência didática, em aulas para o 3^o ano do Colégio COC localizado em Rio Claro-SP. Pudemos perceber o interesse dos alunos através de uma maior participação destes com as atividades em sala de aula e com a resolução de exercícios extras que foram entregues voluntariamente por vários alunos, para que fossem corrigidas. Isto é algo que não costuma ocorrer em uma aula onde simplesmente se aborda o conceito e ignora-se o contexto histórico ou aplicado dos mesmos. Assim, a presente pesquisa foi de fundamental importância para a minha formação e o meu conhecimento enquanto educador.

REFERÊNCIAS

ARMBRUSTER, D.; KOSTELICH, E. J. **Introductory differential equations**. Califórnia: ADDISON-WESLEY, 1996. Citado na página 84.

AUGARTEN, S. **Bit by bit: an illustrated history of computers**. New York: Ticknor and Fields, 1984. Citado na página 42.

AVILA, G. Como se constói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática**, n. 26, 2019. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm>. Acesso em: 03.08.2019. Citado na página 98.

BARRETOS, H. de Câncer de. Iodoterapia. 2015. Disponível em: <https://www.hcancerbarretos.com.br/iodoterapia-2>. Acesso em: 19/07/2019. Citado na página 88.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC**, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20.06.2018. Citado nas páginas 93 e 110.

BURTON, D. **The history of mathematics: an introduction**. Nova York: McGraw-Hill, 2011. Citado nas páginas 23 e 24.

COHEN, D. W.; HENLE, J. M. **Calculus: the language of change**. Ontário: Jones and Bartlett Learning, 2005. Citado na página 86.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. Michigan: Springer-Verlag New York, 1979. Citado na página 31.

EVES, H. **Introdução à história da matemátca**. Campinas: Editora Unicamp, 2005. Citado nas páginas 23, 30 e 42.

FARIAS, R. F. de. A química do tempo: carbono-14. **Química nova na escola**, 2002. Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf>. Acesso em: 15/07/2019. Citado na página 86.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise 1**. Rio de Janeiro: LTC, 1996. Citado na página 73.

FUJITA, L. Intoxicação alimentar atinge 13 mil pessoas anualmente. **Portal Drauzio Varella**, 2019. Disponível em: <https://drauziovarella.uol.com.br/geral/intoxicacao-alimentar-atinge-13-mil-pessoas-anualmente/>. Acesso em: 21/07/2019. Citado na página 82.

GLOBO. Sudario seria mais antigo do que apontou teste. **O GLOBO**, 2005. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/397435/noticia.htm?sequence=1>. Acesso em: 13/07/2019. Citado na página 87.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. São Paulo: LTC, 2001. Citado nas páginas 53 e 71.

INTERESSANTE, S. Como é determinada a idade de um fóssil? **Super Interessante**, 2011. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-e-determinada-a-idade-de-um-fossil/>. Acesso em: 13/07/2019. Citado na página 86.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado na página 53.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado na página 53.

MURAMAKI, C.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar 2 - Logarítmos**. São Paulo: Atual editora, 2004. Citado na página 45.

NAPIER, J. **Mirifici logarithmorum canonis descriptio**. Edinburgh: Andrew Hart, 1614. Citado na página 32.

PECORARI, M. **Logaritmos e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — UNESP - Campus Rio Claro, 2013. Citado na página 101.

ROEGEL, D. Napier's ideal construction of the logarithms. 2010. Citado na página 42.

SAMPAIO, J. C. V. John napier, henry briggs e a invenção dos logarítmos. **Departamento de Matemática - UFSCAR**, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>. Acesso em: 04.06.2018. Citado na página 99.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Thomson, 2003. Citado na página 79.

ANEXO

A

TABELA DE LOGARITMOS

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0606	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1039	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5443	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6281	0,6294	0,6301	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7788	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8337	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9529	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9667	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9719	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

ICMC USP
SÃO CARLOS