UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Caio Leonardo Duarte Bargas

Uma perspectiva sobre o Ensino de Funções Bijetivas e Cardinalidade no Ensino Médio

Campinas
2020

Caio Leonardo Duarte Bargas

Uma Perspectiva sobre o Ensino de Funções Bijetivas e Cardinalidade no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani.

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Caio Leonardo Duarte Bargas e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas
2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B238p

Bargas, Caio Leonardo Duarte, 1995-
Uma perspectiva sobre o ensino de funções bijetivas e cardinalidade no ensino médio / Caio Leonardo Duarte Bargas. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conjunto finito. 2. Conjunto infinito. 3. Função bijetiva. 4. Cardinalidade. 5. Ensino Médio. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A perspective about the teaching of bijective funcions and cardinality in high school
Palavras-chave em inglês:
Finite set
Infinite set
Bijective function
Cardinality
High school
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Pedro Jose Catuogno
Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno
Data de defesa: 27-07-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-6534-2509
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/9360178080959197

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 27 de julho de 2020 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSE CATUOGNO

Prof(a). Dr(a). LUÍS FELIPE CESAR DA ROCHA BUENO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente e sobretudo, ao meu orientador, Roberto Andreani, pela orientação e por toda ajuda durante o processo de escrita e apresentação deste trabalho. Em segundo lugar, à minha mãe Elisabete Vieira Duarte, à minha tia Iraci Vieira Duarte, ao meu tio Luís Carlos Duarte, ao meu avô Antônio Vieira Duarte e à toda minha família por todo apoio e incentivo aos meus estudos.

Agradeço em especial aos meus amigos Jean Medeiros, Letícia Amor, Evilásio Júnior, Tiago Fonseca e Letícia Melo pela contribuição direta a este trabalho.

Agradeço meus colegas de graduação e pós-graduação por todo o convívio: Alexandre Soares, Alfredo Vitorino, Ana Cláudia Piau, Bruno Tafarello, Camila Takeuti, Chang Yi Jen, Claudia Meneghin, Diego Valero, Fábio Simon, Fernanda Oliveira, Gustavo Batista, Guilherme Laranja, Isabela Marton, Larissa Castro, Mayara Duarte, Raul Cid, Rodrigo Palma, Rodrigo Takashi e Yudi Bombarda.

Agradeço também aos amigos que marcaram minha trajetória não necessariamente dentro da universidade: Alison Lopes, Bruno Soares, João Marcos Nunes, João Gabriel Martins, Luana Rodrigues, Lucas Silva, Lucas Araújo, Paula Mazzaro e outros tantos.

Por fim, agradeço às minhas queridas professoras Maristela Polidoro e Silvia Tagliassachi por serem minha inspiração para ingressar nos cursos de graduação e pós-graduação em matemática.

[...] A universidade não é patrimônio de ninguém e pertence somente ao povo [...].
Ernesto Guevara (1928 - 1967)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar formalmente o conceito de conjuntos finitos e infinitos, bem como propor uma sequência de atividades para que o Professor de matemática do Ensino Médio possa introduzir este tema de maneira investigativa a seus alunos. O conceito de infinito foi formalizado apenas no século XIX por Dedekind e Cantor, sendo este último aquele que merece maior destaque no desenvolvimento deste segmento da matemática. Foi Cantor o primeiro matemático a perceber a existência de diferentes tipos de infinito e a precisar quais são os instrumentos rigorosos para o estudo destes objetos. Com a finalidade de compreender esta teoria, o texto desta dissertação apresenta em seus primeiros capítulos as definições fundamentais de conjuntos e funções. A partir destes objetos serão definidas as ideias de conjuntos finitos e infinitos, além das noções de enumerabilidade e não-enumerabilidade. Para fechar o desenvolvimento teórico do texto é exposta a definição de cardinalidade e os resultados decorrentes de seu estudo, sendo o mais notável deles a existência de uma infinidade de infinitos. O produto final deste trabalho é a proposição de três atividades didáticas para o Ensino Médio: A primeira versa sobre a comparação de números de elementos de conjuntos finitos através de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; a segunda trata de apresentar a anedota do Hotel de Hilbert para estudar certas propriedades de conjuntos infinitos; a última tem por objetivo definir enumerabilidade de conjuntos e demonstrar que os conjuntos dos números inteiros e racionais são enumeráveis. Estas propostas contribuem para que o estudante do Ensino Médio se familiarize com o conceito de infinito e para que estimule sua criatividade a respeito desse assunto.

Palavras Chave: Conjunto finito; Conjunto infinito; Função injetiva; Função sobrejetiva; Função bijetiva; Cardinalidade; Ensino Médio.

Abstract

The objective of this work is to formally present the concept of finite and infinite sets, as well as to propose a didatic sequence of activities so that the Mathematics High School teacher is able to introduce this topic to the students in an investigative manner. The concept of the infinite was formalized only in the XIX century by Dedekind and Cantor, the latter being that the one who deserves more prominence in the development of this segment of mathematics. Cantor was the first mathematician to perceive the existence of different kinds of infinite and to specify which are the rigorous instruments to study these objects. For the purpose of understanding this teory, the dissertation presents the fundamental definitions of sets and functions in the first chapters. Having these objects as a starting point, we are going to define the ideas of finite and infinite sets and also the notions of enumerability and non-enumerability. In order to conclude the theoric development of the text, we expose the cardinality definition and the results of its study, being the most notable of them the existence of an infinity of infinities. The final product of this work is the proposition of three didactic activities for High School level students: the first one is about the comparison of the number of elements of finite sets by the injectives, surjectives and bijectives functions; the second aims to present the anecdote of Hilbert's Hotel to study some properties of infinite sets; the last has the objective of defining enumerability of sets and prove that the sets of integers and rationals numbers are enumerable. These proposals contribute to the familiarization of the high school student with the concept of infinite and also to stimulate their criativity on this subject.

Key-Words: Finite set; Infinite set; Injective function; Surjective function; Bijective function; Cardinality; High School.

Lista de Figuras

1 Richard Dedekind. 13

2 Georg Cantor. 14

3 Exemplo 4.5 40

4 Um caminho diferente. 40

5 Lista de todas as frações positivas e suas diagonais. 48

6 Caminho que passa por todas as frações da lista uma única vez. 49

7 Exemplificando o caso particular da sétima fração. 50

8 Exemplificando o caso particular da décima-segunda fração. . 51

9 Fim das diagonais pares e ímpares pelo caminho. 52

10 Observando $f(7)$ a fim de conjecturar uma fórmula para o caso em que α é ímpar e $r \neq 0$. 52

11 Analisando $f(11)$ para determinar uma fórmula no caso em que α é par e $r \neq 0$ 53

12 Caminhos utilizados para demonstrar a enumerabilidade das frações que se encontram na região triangular superior e na região triangular inferior da matriz. 61

13 Observando $f(6)$ para determinar uma fórmula para o caso em que α é ímpar e $r - 0$ 63

14 Observando $f(8)$ para determinar uma expressão para o caso em que α é ímpar e $r \neq 0$. 64

15 Visualização gráfica da demonstração do *Teorema 35 - (ii).* . . 70

16 Conjuntos e funções do Exercício 1. 82

17 Uma ilustração para o Hotel de Hilbert. 87

18 Lista de todas as frações positivas. 97

19 Lista de todas as frações positivas e suas diagonais. 98

20 Uma possível solução para o *item a)* do Exercício 3. 100

Lista de Tabelas

1 Cardápio de uma lanchonete. 27

2 Fórmula para a determinação da *n-ésima* fração da lista segundo o caminho pelas diagonais. 54

3 Fórmula para a determinação da *n-ésima* fração da região triangular superior segundo o caminho proposto. 64

Sumário

1 Introdução **12**

1.1 O Paradoxo de Zeno 12

1.2 Georg Cantor, o pai do infinito 13

1.3 Objetivos 19

2 Conjuntos **21**

3 Funções **26**

4 Contagem e Número de Elementos de Conjuntos Finitos **34**

5 Conjuntos Enumeráveis **45**

5.1 Enumerabilidade 45

5.2 Operações entre Conjuntos Enumeráveis 56

6 Conjuntos Infinitos **61**

6.1 Cardinalidade 61

6.2 Operações entre Conjuntos Quaisquer 76

7 Uma proposta para o Ensino Médio **80**

7.1 Atividade 1: Função injetivas, sobrejetivas, bijetivas e comparação de números de elementos 81

7.2 Atividade 2: O Hotel de Hilbert e conjuntos infinitos 86

7.3 Atividade 3: Enumerabilidade dos Racionais 94

8 Considerações Finais **102**

Referências **103**

1 Introdução

Durante a História da Matemática muitas foram as vezes em que o *infinito* foi citado direta ou diretamente. Em princípio, uma definição formal de *infinito* não foi precisada, de tal modo que pode-se admitir que esse tema foi abordado de maneira ingênua na maior parte da história. Uma das primeiras aparições de tal ideia na Grécia ocorreu por volta do século quinto a.C., através de um filósofo chamado Zeno.

1.1 O Paradoxo de Zeno

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [3].

Em torno de 450 a.C. viveu o filósofo Zeno, em Eleia. Seu nome foi muito marcado na história pelos paradoxos que propôs, sendo alguns deles conhecidos como *Dicotomia*, *Aquiles*, *Flecha* e o *Estágio*. É muito comum, em muitos autores, a troca do nome do paradoxo *Aquiles* por *Parádoxo de Zeno*. O faremos aqui da mesma forma.

O Paradoxo de Zeno consiste em uma aposta de corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Como a tartaruga é muito lenta, é natural que lhe seja concedida a chance de largar à frente do corredor, com alguma vantagem. Em uma notação mais moderna, suponha, para fins didáticos, que a corrida se dá em linha reta e que Aquiles parte de s_0 e a tartaruga de s_1, com $s_1 > s_0$.

O paradoxo decorre de que, por mais veloz que seja Aquiles e por mais lenta que seja a tartaruga, quando ele chegar a s_1, ela terá avançado um pouco e chegado em $s_2 > s_1$. Do mesmo modo, quando Aquiles chegar em s_2, a tartaruga terá se movido a $s_3 > s_2$. E assim sucessivamente, quando Aquiles chegar a s_i, ela terá se movido a $s_{i+1} > s_i$, de tal modo que nunca haverá ultrapassagem. Com essa *infinidade* de subdivisões do movimento, Aquiles sempre ficará atrás da tartaruga, algo que empiricamente sabemos que não é verdade.

Deste paradoxo, conclui-se a impossibilidade do movimento, algo que gerou grande perplexidade na comunidade intelectual da época.

Desde então, muitos matemáticos fizeram descobertas relacionadas de alguma forma com o *infinito*. Por exemplo, *Euclides*, em *Os Elementos*, mostra que existe uma *infinidade* de *números primos*, fato de extrema importância na *Teoria dos Números*. Além dele, pode-se citar outros matemáticos como Galileu, Bolzano e Weierstrass que viveram durante e pós o período do Renascimento e acabaram por abordar este tema com uma visão mais próxima da que se tem hoje. Em realidade, grande parte do entendimento atual a respeito do *infinito* deve-se a Georg Cantor, matemático do século XIX.

1.2 Georg Cantor, o pai do infinito

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [3], [12], [15].

No século XIX o conceito de *infinito* começa a ser formalmente definido. Em 1888, Dedekind tomou a seguinte definição de infinito:

Diz-se que um sistema S é infinito quando ele é semelhante a uma parte própria dele mesmo; caso contrário, S se diz sistema finito.

Figura 1: Richard Dedekind.

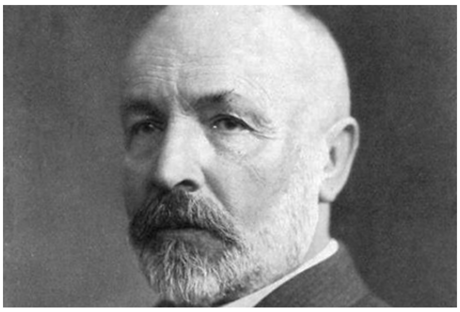
Fonte: Página sobre Dedekind no Wikipedia

Nos termos atuais, tal definição pode ser refraseada como:

Dizemos que um conjunto A é infinito se ela está em bijeção com um de seus subconjuntos próprios. Caso contrário, A é finito.

O principal expoente matemático no estudo do infinito é, certamente, Georg Cantor. Cantor nasceu na Rússia, em São Peterburgo, em 3 de março de 1845. Quando fez 11 anos, Cantor mudou-se para a Alemanha. Apesar de seu pai desejar que fizesse engenharia, Cantor seguiu a carreira de matemático, obtendo seu grau de doutado em 1867, pela Universidade de Berlim, sob orientação de E. Kummer (1810 - 1893) com uma tese na área de *Teoria dos Números.*

Figura 2: Georg Cantor.



Notícias IMPA.

Começou a lecionar matemática em 1869 na Universidade de Halle, instituição de prestígio moderado em relação a outras da Alemanha. A partir de seu ingresso em Halle, Cantor desvia sua área de interesse para a análise, ao ser convidado por seu colega de trabalho H. E. Heine (1821 - 1881) a estudar um problema complexo sobre séries trigonométricas. Em 1872, Cantor faz amizade com Dedekind. Essa amizade foi determinante para o que posteriormente viria a ser a parte mais relevante seu trabalho, uma vez que ambos possuíam área de estudo semelhante e também porque Dedekind foi responsável por encorajar suas ideias que muitas vezes foram rejeitadas pela comunidade matemática da época.

O ano de 1874 foi fundamental para a vida de Cantor. Primeiro, foi nesta data que casou-se com Vally Guttmann comemorando sua lua de mel em Interkalen, na Suíça, onde reencontrou Dedekind. Ademais, também neste ano Cantor publicou um de seus artigos mais revolucionários, sob o título de *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, em que é apresentada uma prova sobre a não-enumerabilidade do conjunto dos números reais. Neste artigo, o resultado mais denso, do qual os demais são decorrência, trata-se de uma propriedade que qualquer intervalo da reta possui: dada qualquer sequência de números reais e qualquer intervalo de números reais $[a, b]$ existe um elemento $x \in [a, b]$ que não faz parte da sequência.

No sentido do que começava a ser desenvolvido neste artigo, o conceito atual de bijeção para determinar a *cardinalidade* de conjuntos começa a aparecer mais latentemente, de tal modo que ele se consolida em 1877 e é publicado em 1878. Vale lembrar que dois conjuntos tem a mesma *cardinalidade* se existe bijeção entre eles. A exemplo disto, uma carta de Cantor a Dedekind datada de 5 de março de 1874 tem o seguinte escrito:

"É possível uma superfície com sua fronteira, digamos um quadrado, ser identificado com uma reta, digamos um segmento de reta incluindo seus extremos, de tal modo que cada ponto da superfície corresponda a um ponto da reta e vice-versa? Responder tal pergunta parece ser um trabalho difícil, embora a resposta pareça ser NÃO e uma prova seria desnecessária."

Este trecho, além de mostrar que Cantor já começava a se debruçar sobre questões de bijeções entre conjuntos infinitos, também é responsável por elucidar o quanto seu trabalho foi relevante. À época os resultados obtidos por ele eram fatos extremamente contra-intuitivos de tal modo que aparentemente não mereciam atenção, como o próprio coloca. A originalidade e revolucionariedade de seu trabalho acabaram por incomodar boa parte dos matemáticos da época em tal grau que H. Poincaré (1854 - 1912) chamou a teoria que estava sendo desenvolvida de uma "enfermidade" que a Matemática havia de se curar algum dia. Também nessa direção, o matemático alemão L. Kronecker (1823 - 1891) chegou a se opor à publicação das ideias de Cantor, apelando ao ataque pessoal e chamando-o de renegado, charlatão e corruptor da juventude.

Apesar de tal oposição e desencorajamento por grande parte da comunidade matemática da época, Cantor não desistiu de seguir com a publicação das ideias e da teoria que começara a desenvolver. Em 1883 ele publica sua obra fundamental, entitulada *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, onde os cardinais transfinitos adquirem caráter definitivo de números. Além disso, nesta mesma obra, Cantor escreve, como resposta às oposições ao seu trabalho : "A essência da matemática reside principalmente na liberdade de criação, limitada apenas pelo requisito de que as teorias dela derivadas sejam consistentes, livres de contradições e confiem em conceitos previamente aceitos, mas acima de tudo livres de influências metafísicas.".

Em consonância com o ímpeto de divulgação de sua teoria e de suas súplicas por liberdade na produção de teorias matemáticas, Cantor participou da fundação de uma união independente de matemáticos alemães denominada *Deustche Matematiker Vereinigung* no início de 1890, instituição da qual ele viria a ser o primeiro presidente. Uma das finalidades dessa associação era de proporcionar um fórum aberto onde poderia-se discutir resultados matemáticos sem o perigo de censura por parte dos demais membros.

Além de formalizar o caráter de números para os cardinais transfinitos, Cantor foi também responsável por criar uma relação de ordem entre esses números em termos de funções injetivas e sobrejetivas. Provou teoremas importantes, dentre os quais destaca-se aquele cujo resultado mostra que não existe bijeção entre um conjunto e seu conjunto das partes. Tal fato foi responsável por elucidar a existência de infinitos números cardinais transfinitos. Uma importante conjectura nesta teoria em que ele havia começado a formalizar em 1883 é a *Hipótese do Contínuo*, que estabelece não haver um número transfinito entre o cardinal dos números naturais e o cardinal dos números reais. Inicialmente, Cantor imaginou que tal conjectura fosse, em realidade, um teorema de fácil demonstração, mas com o passar do tempo e apesar de inúmeros esforços não conseguiu prová-la, de tal modo que este fato ganhou *status* de axioma.

Ao final do século XIX e início do século XX, mais precisamente em 1897, Cesare Burali-Forti (1861 - 1931) escreveu o primeiro dos paradoxos que versam sobre a ideia de um "conjunto de todos os conjuntos", fato de extrema importância para o desenrolar a Teoria de Conjuntos. Inicialmente, tal paradoxo, conhecido como *Paradoxo de Burali-Forti*, não incide frontalmente na teoria de números transfinitos de Cantor. Anos mais tarde, porém, Cantor descobre seu próprio paradoxo que deriva daquele descoberto por Burali-Forti: Qual o cardinal do conjunto T formado por todos os conjuntos? Se esse cardinal existesse, deveria ser o maior de todos, mas já se havia provado que o cardinal do conjunto 2^T é maior que o cardinal de T.

Finalmente, B. Russel (1872 - 1970) e E. Zermelo (1871 - 1953) descobrem, independentemente, o seguinte paradoxo: Ao se definir $A = \{X : X \notin X\}$, será que $A \in A$? Ora, se $A \in A$, segue que $A \notin A$, gerando uma contradição. Por outro lado, se $A \notin A$, tem-se $A \in A$, obtendo-se um igual absurdo. Como tal conjunto, no sistema de Cantor, estava bem-definido, este parodoxo serviu para elucidar que as premissas utilizadas por ele para definir sua Teoria de Conjuntos produzia inconsistências, de tal modo este pilar da matemática carecia de ser reformulado.

A partir deste momento alguns matemáticos e lógicos da época se propuseram a "consertar" tal incosistência, reformulando a Teoria de Conjuntos proposta por Cantor. Nesse sentido, a saída do paradoxo que recebeu maior destaque na História da Matemática é a Teoria de Conjuntos estruturada em 1908 por E. Zermelo, que formulou um sistema de axiomas seguro e que posteriomente foi modificado por A. Fraenkel (1891 - 1965). Este sistema axiomático ficou conhecido como Z-F, em homagem a estes matemáticos que o construíram.

Cantor se aposentou no início do século XX, em 1913, e viveu na pobreza durante a Primeira Guerra Mundial. Veio a falecer em 6 de janeiro de 1918 em um sanatório em Halle, vítima de ataque cardíaco fatal, após um intenso período de luta contra doenças depressivas aprofundadas pela morte de um de seus filhos em 1899. Apesar de ter lidado com muita oposição ao seu trabalho durante a maior parte da sua vida, lentamente Cantor começou a receber maior reconhecimento, de tal modo que foi nomeado membro honorário da *London Mathematical Society*, eleito membro correspondente da Sociedade de Ciências em Göttingen e, em 1904, homenageado com uma medalha pela *Royal Society of London*. A fim de exemplificar o reconhecimento que Cantor ganhou por seu trabalho, segue uma célebre frase proferida pelo matemático David Hilbert (1862 - 1943), considerado por muitos como o maior matemático do século XX:

"Ninguém poderá nos expulsar do paraíso de Cantor criou."

O mesmo matemático também escreveu, a respeito da teoria desenvolvida por Cantor, o seguinte:

"O produto mais surpreendente do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio dos puramente inteligíveis."

1.3 Objetivos

Este trabalho foi elaborado com o intuito de apresentar as ideias iniciais e fundamentais da teoria que começou a ser desenvolvida por Cantor, de modo que professores e alunos do Ensino Médio possam adentrar no paraíso que este matemático criou. Nesse sentido, o texto conta não só com uma parte teórica que versa a respeito dos conceitos de finito, infinito, enumerabilidade e não-enumerabilidade, mas também com uma proposta de abordagem deste assunto em aulas do Ensino Médio, em específico em sua primeira série. Vale lembrar que é neste estágio da formação matemática que o aluno se depara com o conceito de função, que é fundamental para o estudo de finitude e infinitude. Tal tema, embora seja em aparência complexo, já faz parte do imaginário do aluno, uma vez que, por exemplo, já lhe foram apresentados os conjuntos numéricos que possuem uma quantidade infinita de elementos. Deste modo, este material serve de apoio para professores e alunos, do Ensino Médio ou Ensino Superior, que tenham interesse pelo assunto e desejem ter um contato inicial com esse tema.

O texto foi estruturado em capítulos que foram pensados de modo a criar uma sequência lógica dos conceitos necessários para se tratar do tema da *cardinalidade* de conjuntos quaiquer. O primeiro capítulo tratará, de maneira ingênua, do conteúdo de conjuntos, suas principais definições e exemplos. No segundo capítulo será apresentado formalmente o conceito de função que, embora esteja intimamente ligado à temática de conjuntos, merece um capítulo a parte pela larga utilização na estruturação das teorias matemáticas. Em seguida, no terceiro capítulo será explorada a ideia de *contagem* dos elementos de um conjunto finito, esboçando aqui a importância das funções bijetivas, injetivas e sobrejetivas para o trato desse assunto. O capítulo seguinte será dedicado ao estudo do comportamento de um determinado tipo de conjuntos que se denominam *conjuntos enumeráveis*, buscando compreender quais objetos conhecidos fazem ou não parte desse grupo. Posteriormente, no capítulo 5 é definida a noção de *cardinalidade* para conjuntos quaisquer, passando por uma breve introdução aos números transfinitos e Hipótese do Contínuo e finalizando com uma discussão sobre a *cardinalidade* em face de certas operações entre conjuntos. Os cinco primeiros capítulos compõem a parte teórica do trabalho, enquanto que o sexto capítulo é reponsável por propor três atividades designadas a alunos do 1º Ano do Ensino Médio onde são expostas algumas ideias explanadas neste trabalho, com a finalidade de que os estudantes compreendam a importância do uso de funções injetivas, bijetivas e sobrejetivas para o trato da *cardinalidade* de conjuntos.

2 Conjuntos

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [4], [6]

Um conjunto, de maneira informal, é uma coleção de objetos, denominados *elementos*. Ao longo do texto, conjuntos serão denotados majoritariamente por letras maiúsculas. Em geral, com raras exceções, conjuntos serão representados entre chaves. Por exemplo, o conjunto das vogais do alfabeto vigente no Brasil é apresentado do seguinte modo

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

onde as letras a, e, i, o, u são os elementos do conjunto V das vogais.

Um conjunto pode ser expresso tomando-se a *lista* completa de seus elementos ou através de uma *propriedade* P da qual seus elementos gozam. Neste último caso, o conjunto será expresso do seguinte modo:

$$A = \{x : x \text{ goza da propriedade } P\}$$

A relação básica entre conjunto e elemento é a relação de *pertinência*. Se a é um elemento de certo conjunto X, diz-se que *a pertence* a X e escreve-se

$$a \in X$$

Se, por outro lado, a não for um elemento do conjunto X, é dito que *a não pertence* a X e denota-se

$$a \notin X$$

Exemplo 2.1. O conjunto A dos cinco primeiros números naturais pode ser listado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou pode ser enunciado através de uma propriedade que seus elementos gozam $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 5\}$.

Exemplo 2.2. Nem todos os conjuntos podem ser expressos através de uma lista completa de seus elementos. Como exemplo tem-se o conjunto dos números pares $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 2.3. Os elementos de um conjunto podem ser outros conjuntos. De fato, como $A = \{1\}$ e 1 são objetos distintos, o conjunto $B = \{\{1\}\}$ é distinto de $A = \{1\}$. O conjunto B tem A como seu único elemento, ao passo que o conjunto A tem 1 como seu único elemento. O conjunto B é um exemplo de conjunto cujos elementos são também conjuntos.

Definição 2.1. O conjunto que não possui elementos é denominado conjunto *vazio* e será denomado pelo símbolo $\emptyset$.

Definição 2.2. Diz-se que o conjunto A está *contido* em um conjunto B se todo elemento de A é também elemento de B. Neste caso, escreve-se $A \subset B$. Diz-se também, nessas condições, que A é *subconjunto* de B.

Observação. Dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos. Para mostrar a igualdade de dois conjuntos A e B, é necessário e suficiente mostrar as inclusões $A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplo 2.4. O conjunto T de todos os triângulos do plano é subconjunto de P, o conjunto de todos os polígonos do plano.

Exemplo 2.5. O conjunto de todos os indivíduos que nasceram em Campinas está contido no conjunto de todos os cidadãos brasileiros.

Exemplo 2.6. O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é subconjunto do conjunto dos *números algébricos*, isto é, dos números que são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. De fato, dado um número $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, tem-se que $\frac{p}{q}$ é raiz de $u(X) = qX - p$. Note que $\sqrt{2}$ é um número algébrico visto que é raiz de $v(X) = X^2 - 2$.

É possível criar conjuntos a partir de outros, tomando-se certas operações entre conjuntos. A seguir serão apresentadas de *união, intersecção, diferença* e *produto cartesiano* entre conjuntos.

Definição 2.3. Dados dois conjuntos A e B define-se a *união* destes dois conjuntos denotada por $A \cup B$ do seguinte modo

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Esta operação, portanto, constrói o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P_1 (relativa à A) ou da propriedade P_2 (relativa à B).

Exemplo 2.7. Seja $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ e $I = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ $= \{1, 3, 5, \ldots\}$. Tem-se $P \cup I = \mathbb{N}$.

Exemplo 2.8. Seja T_I o conjunto de todos os triângulos isósceles do plano e T_E o conjunto de todos os triângulos escalenos. Tem-se que $T_I \cup T_E = T$, onde T é o conjunto de os triângulos do plano.

Definição 2.4. Dados dois conjuntos A e B define-se a *intersecção* destes dois conjuntos denotada por $A \cap B$ do seguinte modo

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Através dessa operação constrói um conjuntos cujos elementos gozam das propriedades P_1 e P_2 (relativas à A e B, respectivamente).

Exemplo 2.9. Sejam A o conjunto de todas as seleções de futebol masculino da América do Sul e C o conjunto de todas as seleções de futebol masculino que participaram da Copa do Mundo de Futebol realizada em 2018 na Rússia. Tem-se que

$$A \cap C = \{\text{Argentina, Brasil, Colômbia, Uruguai}\}$$

Exemplo 2.10. Seja R o conjunto de todos os retângulos do plano e L o conjunto de todos os losangos do plano. Tem-se que $R \cap L = Q$, onde Q é o conjunto de todos os quadrados do plano.

Exemplo 2.11. Seja X o conjunto dos números múltiplos de 2 e Y o conjuntos dos números múltiplos de 3. Tem-se que $X \cap Y = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$, isto é, o conjunto dos múltiplos de 6.

Definição 2.5. Dados dois conjuntos A e B, define-se a *diferença* entre A e B e denota-se por $A - B$ o seguinte conjunto

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Em resumo, essa operação consiste em excluir, dentro os elementos de A, aqueles que fazem parte de B. Com isso, constró-se o conjuntos dos elementos qe gozam da propriedade P_1 (relativa à A) e não gozam da propriedade P_2 (relativa a B).

Exemplo 2.12. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e A o conjunto dos números algébricos, isto é, o conjunto dos números que são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Tem-se que $\mathbb{R} - A = T$, onde T é denominado *conjunto dos números transcentes.* Dois ilustres representantes desse conjunto são π e e. Uma discussão mais aprofundada a respeito desse conjunto numérico pode ser encontrada em [6].

Definição 2.6. Dados dois conjuntos A e B define-se o *produto cartesiano* entre estes conjuntos denotado por $A \times B$ do seguinte modo

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Em resumo, trata-se do conjunto dos *pares ordenados* formados por A e B.

Exemplo 2.13. Considere o experimento aleatório de lançar um dado de seis faces duas vezes e observar, em cada lançamento, o valor da face virada para cima. Utilizando a notação $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o conjunto de todos os resultados possíveis para tal experimento é dado por $I_6 \times I_6$.

Exemplo 2.14. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. O conjunto $\mathbb{C}$, dos números complexos, é definido através do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Assim, o número $z = 1 + 2i$ é identificado com o par ordenado $(1, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De uma maneira geral, identifica-se o número $a + bi \in \mathbb{C}$ com o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 2.7. Dado um conjunto X o *conjunto das partes de* X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, é definido do seguinte modo

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

isto é, o conjunto dos subconjuntos de X.

Exemplo 2.15. Como exemplo, seja $X = \{\{1\}, 1, \emptyset\}$. Tem-se que

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{1\}, \{\emptyset\}, \{\{1\}, 1\}, \{\{1\}, \emptyset\}, \{1, \emptyset\}, \{\{1\}, 1, \emptyset\}\}$$

3 Funções

Este capítulo foi elaborado a partir da seguinte referência bibliográfica: [4]

Definição 3.1. Dados dois conjuntos A e B, uma *relação binária* R de A em B é um subconjunto de $A \times B$. Deste modo, toda relação binária é um conjunto formado por pares ordenados.

Exemplo 3.1. Considere $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$. Tem-se

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

Logo, $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$ é uma relação de A em B, visto que $R \subset A \times B$.

Definição 3.2. Dados dois conjuntos A, B e uma relação f de A em B, dizemos que a terna-ordenada (A, B, f) é uma função se satisfaz as seguintes condições:

(i) $(\forall\ x), (x \in A \Longrightarrow \exists\ y \in B$ tal que $(x, y) \in f)$

(ii) $(\forall\ x, y, z), ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Longrightarrow y = z)$

os conjuntos A e B são denominados, respectivamente, por *domínio* e *contradomínio* da função (A, B, f).

A condição *(i)* diz que para cada elemento (x) do conjunto A deve existir elemento (y) do conjunto B associado a ele por f. A condição *(ii)* diz que esse elemento (y) deve ser único.

Exemplo 3.2. Sejam A, B e R como no exemplo anterior. A terna (A, B, R) não é função, visto que $(1, 3) \in R$, $(1, 4) \in R$ e, no entanto, $3 \neq 4$, não satisfazendo a condição *(ii)*. Considerando $g = \{(1, 3)\}$, segue que (A, B, g) também não é função, uma vez que para o elemento $2 \in A$ não existe elemento $y \in B$ tal que $(2, y) \in g$, falhando a condição *(i)*. Por outro lado, se $f = \{(1, 3), (2, 3)\}$, obtém-se que (A, B, f) é função.

Exemplo 3.3. Considere o seguinte cardápio de uma lanchonete:

Tabela 1: Cardápio de uma lanchonete.

Produto	Valor
X-Búrguer	10 reais
X-Bacon	12 reais
X-Egg	12 reais
X-Tudo	18 reais
Suco de Laranja	6 reais
Refrigerante Lata	4 reais

Fonte: O autor.

O cardápio acima trata-se de uma função. De fato, tomando P como o conjunto dos produtos, V como o conjunto dos valores e

$$g = \{(\text{X-Búrguer}, 10), (\text{X-Bacon}, 12), (\text{X-Egg}, 12), \ldots, (\text{Refrigerante Lata}, 4)\}$$

Segue que (P, V, g) é função pois cada produto está associado a um valor (i) e esse valor é único (ii), como é de se esperar (não faz sentido uma mesma mercadoria ter dois valores distintos). Não há conflito com a definição em haver dois lanches com o mesmo valor, assim como não é conflitante haver dois elementos do domínio associados a um elemento do contra-domínio (dois produtos distintos podem ter o mesmo preço).

Definição 3.3. Seja (A, B, f) uma função. O conjunto

$$Im(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in f\}$$

é denominado *imagem* da função. Além disso, se $(x, y) \in f$, escreve-se $y = f(x)$, dizendo, deste modo, que y é a imagem de x por f.

Em outras palavras, a *imagem* de uma função é o subconjunto do contra-domínio formado pelos objetos que estão relaciodos com algum elemento no domínio (isto é, que são "atingidos" pela função).

Exemplo 3.4. A função $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, s)$ tal que $s(n) = n + 1$ é denominada *função* *sucessor*, uma vez que associa cada natural n ao seu sucessor $n+1$. A imagem desta função é

$$Im(s) = \mathbb{N} - \{1\} = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

pois o único natural que não é sucessor de qualquer outro é o número 1. Este é o único valor não "atingido" por s.

Definição 3.4. Seja (A, B, f) uma função. Diz-se que esta função é *injetiva* se $f(x) = f(x')$ implicar $x = x'$. Além disso, diz-se que a função é *sobrejetiva* se $Im(f) = B$. Finalmente, se a função for tanto injetiva, como sobrejetiva, diz-se que ela é *bijetiva*.

De maneira equivalente como foi acima definido, uma função é injetiva quando a ocorrência $x, x' \in A$, com $x \neq x'$ implicar que $f(x) \neq f(x')$. Em outras palavras, para que uma função seja injetiva, elementos distintos devem possuir imagens distintas.

Exemplo 3.5. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$. Sejam, ainda

$$f = \{(1, -1), (2, 0), (3, 0)\}$$

$$g = \{(1, 1), (2, 0), (3, -1)\}$$

A função (A, B, f) não é injetiva, pois $f(2) = f(3)$ e no entanto $2 \neq 3$. Além disso, também não é sobrejetiva, pois 1 não está na imagem de f.

Por outro lado, a função g é injetiva, uma vez que elementos distintos do domínio tem sempre imagens diferentes no contradomínio. É também sobrejetiva, pois todos os elementos do contradomínio estão associados com algum elemento do domínio. Deste modo, g é bijetiva.

No decorrer do texto, referir-se-á à função (A, B, f) como simplesmente f.

Além disso, (A, B, f) será por vezes apresentada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

onde $x \longmapsto y$ significa $y = f(x)$.

Definição 3.5. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas funções. A função $g \circ f : A \longrightarrow C$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

é denominada *composição* entre as funções g e f.

Exemplo 3.6. Seja $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $d(n) = 2n$ e $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $s(n) = n + 1$. A função $s \circ d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é tal que

$$(s \circ d)(n) = s(d(n)) = s(2n) = 2n + 1$$

A função s leva um natural em seu *sucessor* e a função d leva um natural em seu *dobro*. A função $s \circ d$ leva um natural no *sucessor de seu dobro*.

Exemplo 3.7. Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Tem-se que função $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

onde $|x|$ é a função *módulo*. Assim, a composição de funções permite criar novas funções (de grande importância) a partir de outras mais simples. A função módulo, por exemplo, tem grande relevância nas disciplinas de Análise e de Cálculo.

Definição 3.6. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Diz-se que a função $g : B \longrightarrow A$ é a *função inversa* de f se

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall \ x \in A$$

e

$$(f \circ g)(y) = y, \ \forall \ y \in B$$

É importante observar que nem toda função possui inversa. Existe uma condição necessária e suficiente para que uma função possua inversa.

Exemplo 3.8. Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tx$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x}{t}$, com $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ fixo. Tem-se

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(tx) = \frac{tx}{t} = x$$

e

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{t}\right) = t \cdot \frac{x}{t} = x$$

mostrando que a inversa da função multiplicação por t é a função divisão por t.

Teorema 1. *Seja $f : A \longrightarrow B$. A função f admite inversa se, e somente se, for bijetiva.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que f admite inversa f^{-1}. Provar-se-á que f é bijetiva.
Com efeito, suponha $f(x) = f(y)$. Aplicando f^{-1} em ambos os membros da igualdade:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \Longrightarrow x = y$$

provando a injetividade de f.
Por outro lado, dado $y \in B$, seja $x = f^{-1}(y)$. Daí que $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$, provando a sobrejetividade de f.

($\Longleftarrow$) Suponha que f é bijetiva. Assim, para cada $y \in B$, existe único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Define-se, então, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. É certo que f^{-1} está bem-definida, pois a sobrejetividade de f garante que todo elemento de B esteja asssociado a algum elemento em A por f^{-1}, cumprindo a condição *(i)* da definição de função. Por outro lado, a injetividade de f garante que cada $y \in B$ está associado a um único elemento $x \in A$ por f^{-1}, respeitando a condição *(ii)*. Por fim:

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

e

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

provando que f^{-1} é a inversa de f.

□

Exemplo 3.9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. É intituivo pensar que a função inversa de f é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. No entanto, $f^{-1}(f(-1)) = 1 \neq -1$. Deste modo, fica claro que f não admite inversa. É claro que isso se deve ao fato de que f não é bijetiva. No entanto, fazendo uma restrição no domínio e contradomínio de f é possível torna-lá bijetiva. Definindo $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $g(x) = x^2$, segue que $g^{-1} = \sqrt{x}$. De fato:

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \geq 0$$

e

$$g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Teorema 2. *Seja $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções injetivas. Então, $g \circ f : A \longrightarrow C$ é injetiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in A$ tais que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Então $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g é injetiva, tem-se que $f(x) = f(y)$. Além disso, como f é injetiva, obtém-se que $x = y$. Portanto, $g \circ f$ é injetiva. □

O teorema acima diz que ao se compor duas funções injetivas, a composta permanece com a propriedade de ser injetiva.

Teorema 3. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções sobrejetivas. Então, $g \circ f : A \longrightarrow C$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Dado $z \in C$, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$, uma vez que a função g é sobrejetiva. Além disso, para este $y \in B$, há $x \in A$ de tal modo que $f(x) = y$. Logo, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, provando a sobrejetividade. $\square$

Em outros palavras, a sobrejetividade é preservada pela composição de funções.

Teorema 4. *Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são funções bijetivas, então $g \circ f : A \longrightarrow C$ é bijetiva.*

Demonstração. Como a composição preserva tanto a injetividade, como a sobrejetividade, ela deverá preservar a bijetividade. Assim, $g \circ f$ é bijetiva, pois cada uma das funções f e g são bijetivas. $\square$

Definição 3.7. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e $X \subset A$. O conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

é denominado *imagem direta* de X segundo f.

Exemplo 3.10. Seja $f : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(\frac{a}{b}) = \frac{b}{a}$. Sendo $X = \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$, tem-se que $X \subset \mathbb{Q}^*$ e

$$f(X) = \left\{\frac{k}{1} : k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}$$

Definição 3.8. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e $Y \subset B$. O conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

é denominado *imagem inversa* de Y segundo f.

Teorema 5. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos em A. Então*

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

Demonstração. Seja $y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Então, existe $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $y = f(x)$. Assim, há $i_0 \in I$ tal que $y = f(x) \in f(A_{i_0})$. Como $f(A_{i_0}) \subset$

$\bigcup_{i\in I} f(A_i)$, segue que $y = f(x) \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, provando a inclusão $f(\bigcup_{i\in I} A_i) \subset \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

Por outro lado, dado $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, tem-se que há $i_o \in I$ tal que $y \in f(A_{i_0})$. Deste modo, há $x \in A_{i_0}$ tal que $y = f(x)$. Além disso, como $x \in A_{i_0}$, vale que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, donde $y = f(x) \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$, mostrando a outra inclusão. $\square$

4 Contagem e Número de Elementos de Conjuntos Finitos

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [10], [7], [13], [14]

O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..\}$ é utilizado para, em certas condições, contar os elementos de um dado conjunto. Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m\} = \{1, \ldots, m\}$$

é responsável por fazer tal *contagem*, quando possível. A seguir, serão apresentados resultados que demonstram o porquê da escolha destes conjuntos para contar.

Teorema 6. *Seja $X \subset I_n$. Se $\varphi : I_n \longrightarrow X$ é bijeção, então $X = I_n$.*

Demonstração. O resultado será provado por indução em n. Com efeito, se $n = 1$, segue que $I_1 = \{1\}$ e logo $X = \emptyset$ ou $X = I_1$. Como não existe função em que o contra-domínio é o conjunto vazio (se o domínio for não-vazio), segue que $X = I_1$.

Mostremos agora que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, isto é, que supondo verdadeira a tese para certo natural n, a mesma também será verdadeira para seu sucessor. Sejam $\varphi : I_{n+1} \longrightarrow X$ uma bijeção e $x_0 = \varphi(n+1)$, onde $X \subset I_{n+1}$. Tem-se duas possbilidades: ou $X - \{x_0\} \subset I_n$ ou $X - \{x_0\} \not\subset I_n$.

No primeiro caso, como a restrição de φ a I_n é uma bijeção entre I_n e $X - \{x_0\}$, segue, pela hipótese de indução, que $X - \{x_0\} = I_n$, donde $x_0 = n + 1$ e $X = I_{n+1}$.

Por outro lado, se $X - \{x_0\} \not\subset I_n$, segue que $x_0 \neq n + 1$ e $n + 1 \in X$. Logo, existe $p \in I_n$ tal que $\varphi(p) = n + 1$. Considere a seguinte função

$\psi : I_{n+1} \longrightarrow X$ tal que :

$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \neq p \text{ e } x \neq n+1$$

além de $\psi(p) = \varphi(n+1)$ e $\psi(n+1) = \varphi(p) = n+1$. Tem-se que $X - \{n+1\} \subset I_n$ e também que ψ é bijeção I_{n+1} e X. Deste modo, como $\psi(n+1) = n+1$, segue que para todo $y \in X - \{n+1\}$ existe único $x \in I_{n+1} - \{n+1\} = I_n$ tal que $\psi(x) = y$. Em outras palavras, a restrição de ψ a I_n é bijeção deste conjunto em $X - \{n+1\}$, donde, pela hipótese de indução, $X - \{n+1\} = I_n \Longrightarrow X = I_{n+1}$. □

Teorema 7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que existe bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow I_m$. Então, $m = n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade é possível supor que $I_m \subset I_n$. Pelo Teorema 1, tomando $X = I_m$, como φ é bijeção, segue que $I_m = I_n$, donde $m = n$. □

Estes dois últimos teoremas são de suma importância para definir o conceito de número de elementos de certos tipos de conjuntos, que será feita através de bijeções.

Definição 4.1. Seja X um conjunto tal que existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$. Define-se, nessa situação, o *número de elementos* de X como sendo o número natural n. Além disso, a função φ é definida como uma *contagem* dos elementos de X. Ademais, convenciona-se que o número de elementos do conjunto-vazio é 0.

Os teoremas demonstrados anteriormente nesta seção garantem que o número de elementos está bem-definido. Em outras palavras, eles garantem que, independentemente de qual seja a contagem feita, o número de elementos não se altera. Isso pode mais facilmente ser diagnosticado com o seguinte teorema:

Teorema 8. *Seja X um conjunto tal que existem bijeções $\varphi : I_n \longrightarrow X$ e $\psi : I_m \longrightarrow X$. Então, $m = n$.*

Demonstração. Basta notar que $\psi^{-1} \circ \varphi$ é bijeção e com isso $m = n$. $\square$

Exemplo 4.1. Dado o conjunto $X = \{\dagger, \otimes, \oplus\}$, são contagens de seus elementos as funções $\varphi : I_3 \longrightarrow X$ e $\psi : I_3 \longrightarrow X$ tais que:

$$\varphi(1) = \dagger, \varphi(2) = \otimes, \varphi(3) = \oplus$$

$$\psi(1) = \dagger, \psi(2) = \oplus, \psi(3) = \otimes$$

uma vez que ambas são bijeções. Segue pelo discutido que o número de elementos do conjunto X é 3.

De fato, a definição de contagem munida dos teoremas acima é responsável por formalizar aquilo que é intuitivo: se dois sujeitos distintos efetuarem a contagem dos elementos de um conjunto X, poderão o fazer de modo distinto, mas chegarão no mesmo resultado.

Inicialmente a contagem está definida para certo tipo particular de conjuntos, os conjuntos ditos *finitos*. Para tanto, é necessário precisar o que é um conjunto finito.

Definição 4.2. Um conjunto X que é vazio ou é tal que existe uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$ para algum $n \in \mathbb{N}$ é denominado *conjunto finito*. Caso contrário, será denominado *conjunto infinito*.

Teorema 9. *Seja X um conjunto finito e Y um conjunto tal que existe uma função bijetiva $\varphi : X \longrightarrow Y$. Então $\#(X) = \#(Y)$.*

Demonstração. Como X é finito, então existe $\psi : I_n \longrightarrow X$ bijetiva para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\varphi \circ \psi : I_n \longrightarrow Y$ é bijeção, donde $\#(X) = n = \#(Y)$. $\square$

O resultado acima elucida que contar significa, sobretudo, estabelecer bijeções. Nem sempre utilizou-se o conjunto dos números naturais para se efetuar contagem. Realmente, em tempos anteriores a humanidade já se utilizou de pedras e outros objetos para contar números de elementos de conjuntos, baseando-se, ainda que de maneira puramente intuitiva, no estabelecimento de bijeções.

Em geral, não é necessário exibir a função contagem para determinar o número de elementos de um determinado conjunto. Em realidade, para resolver problemas de contagem, são utilizados os resultados a seguir.

Teorema 10. *Sejam X e Y conjuntos finitos e disjuntos tais que $\#X = m$ e $\#Y = n$. Então, $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y = m + n$*

Demonstração. Por hipótese, existem $\varphi : I_m \longrightarrow X$ e $\psi : I_n \longrightarrow Y$ bijetivas. Defina $f : I_{m+n} \longrightarrow X \cup Y$ tal que

$$f(i) = \begin{cases} \varphi(i), \text{ se } 1 \leq i \leq m \\ \psi(i - m), \text{ se } m + 1 \leq i \leq m + n \end{cases}$$

A função f é uma bijeção. De fato, se $f(i) = f(j)$, então $f(i) \in X$ ou $f(i) \in Y$. Se ocorre que $f(i) \in X$, então $f(j) \in X$, visto que X e Y são disjuntos, donde $f(i) = \varphi(i) = \varphi(j) = f(j) \Longrightarrow i = j$. Analogamente tem-se $i = j$ se $f(i) \in Y$, mostrando que f é injetiva.

Por outro lado, dado $a \in X \cup Y$, tem-se $a \in X$ ou $a \in Y$. Se $a \in X$, então $a = \varphi(i)$ para algum $i \in I_m$, donde $a = \varphi(i) = f(i)$. Analogamente tem-se $a = f(i)$ para algum $i \in I_{m+n} - I_m$ se $a \in Y$, provando que f é sobrejetiva. Deste modo, f é uma bijeção e o resultado segue. □

Este teorema é conhecido como *Princípio Aditivo da Contagem.* Informalmente, ele quer dizer que se um evento X pode ocorrer de m maneiras distintas e um evento Y pode ocorrer de n maneiras distintas, de tal modo que X e Y são eventos mutuamente exclusivos (não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou a ocorrência de um implica na não ocorrência do outro), então o número de maneiras de ocorrer o evento X ou o evento Y é $m + n$.

Exemplo 4.2. Como exemplo, suponha que uma pessoa possua 5 calças, 3 shorts e 4 saias. De quantos modos essa pessoa pode se vestir? Ora, pelo princípio aditivo da contagem e supondo não haver sobreposição de roupas, tal pessoa pode se vestir de $5 + 3 + 4 = 12$ modos distintos.

Teorema 11. *Sejam A e B conjuntos tais que $\#A = m$ e $\#B = n$. Então, $\#(A \times B) = m \cdot n$.*

Demonstração. Sejam $\varphi : I_m \longrightarrow A$ e $\psi : I_n \longrightarrow B$ bijeções. Como se deseja mostrar que o número de elementos do produto cartesiano é $m \cdot n$, faz sentido tentar estabelecer uma bijeção deste conjunto com $I_m \times I_n$, tendo como ferramentas as funções φ e ψ por hipótese. Com efeito, seja $f : I_m \times I_n \longrightarrow A \times B$ dada por $f(i, j) = (\varphi(i), \psi(j))$. De fato, tal função é bijeção pois, se $f(i, j) = f(i', j')$, segue que $\varphi(i) = \varphi(i')$ e $\psi(j) = \psi(j')$, donde $i = i'$ e $j = j'$, provando a igualdade do par ordenado e a injetividade da função. Além disso, dado $(a, b) \in A \times B$, existem $i_0 \in I_m$ e $j_0 \in I_n$ tais que $\varphi(i_0) = a$ e $\psi(j_0) = b$, seguindo que $f(i_0, j_0) = (a, b)$ e provando a sobrejetividade de f. Resta mostrar, ainda, que $\#(I_m \times I_n) = m \cdot n$. Para tanto, basta observar que o conjunto $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (i, n)\}$ possui n elementos e que $I_m \times I_n$ é constituído por m conjuntos disjuntos do tipo $\{(i, 1), (i, 2), \ldots (i, n)\}$ de tal modo que para efetuar a contagem (pelo Princípio Aditivo) basta tomar a soma de m parcelas iguais a n, resultando em $m \cdot n$. $\square$

O resultado acima é conhecido como *Princípio Multiplicativo da Contagem*. De maneira mais prática, este princípio estabelece que se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas e se para cada possibilidade de ocorrência do evento A o evento B puder ocorrer de n modos, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$

Exemplo 4.3. Considere o seguinte problema: Uma determinada copa de futebol possui uma chave com 4 times, digamos a, b, c e d. Estes times se enfrentam duas vezes: uma em seu campo e outra com mando do adversário. Quantos são os jogos realizados dentro dessa chave? Muitas são as formas de contar. Uma possível contagem é produzida tomando-se a lista completa de todos os jogos de maneira ordenada como a seguir:

$$(a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (a, d); (d, a)$$

$$(b, c); (c, b); (b, d); (d, b)$$

$$(c, d); (d; c)$$

concluindo que haverá 12 jogos entre esses 4 times. Outro modo de efetuar tal contagem é determinar quantos pares (x, y) podem ser formados, com $x \neq y$, onde x e y são elementos do conjunto $\{a, b, c, d\}$. Com isso, basta observar que existem 4 possibilidades para escolher a ordenada x e 3 possibilidades para escolher a ordenada y, visto que $x \neq y$. Com isso, tem-se que o total de jogos é $4 \cdot 3 = 12$. Novamente, independentemente de como a contagem é efetuada, se for feita de maneira correta, sempre será obtido o mesmo número natural. É possível observar que o segundo método para efetuar a contagem faz uso do princípio multiplicativo, uma vez que subdivide o problema em duas tomadas de decisões (ou eventos) e enumera as possibilidades para cada uma das etapas.

Exemplo 4.4. (OBMEP - 2ª fase) Dois números naturais formam um *casal* quando têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, os números 22 e 77 formam um casal. Quantos são os casais de números de dois algarismos?

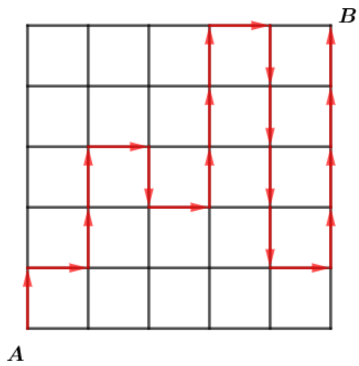
Formulando na linguagem de conjuntos, o intuito deste problema é contar o número de elementos do conjunto

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x > y, 10 \leq x, y \leq 99 \text{ e } x + y = 99\right\}$$

Tomando $x = AB = A \cdot 10 + B$, com A e B algarismos, seu par fica determinado como $y = (9 - A) \cdot 10 + (9 - B)$. No entanto, deve-se ter $1 \leq A$ e $1 \leq 9 - A \iff A \leq 8$, uma vez que ambos os números devem ser maiores do que ou iguais a 10. Logo, para determinar $N = AB$ há $8 \cdot 10 = 80$ modos. Contudo, ao efetuar a contagem deste modo, obtém-se o dobro do número de pares, uma vez que cada elemento do par é considerado individualmente. Portanto, há 40 pares de números que formam um casal.

Exemplo 4.5. De quantas maneiras pode-se ir do ponto A ao ponto B sobre a seguinte malha sem passar duas vezes pelo mesmo local e sem poder mover-se para a esquerda? A seguir é exibido um possível caminho.

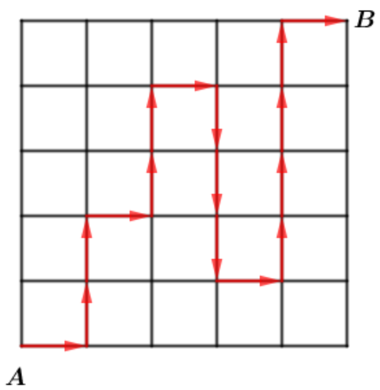
Figura 3: Exemplo 4.5



Fonte: O autor.

Para se definir um caminho, basta, em cada coluna de quadrados, definir em qual posição será feito o movimento para a direita. Por exemplo, se na primeira coluna o movimento para a direita for feito na 1ª posição, na segunda coluna o movimento for feito na 3ª posição, na terceira coluna for feito na 5ª posição, na quarta coluna for feita na 2ª posição e na última coluna for escolhida a 6ª posição, o caminho será o seguinte:

Figura 4: Um caminho diferente.



Fonte: O autor.

Observando isso, é possível perceber que há $6^5 = 7776$ caminhos possíveis, uma vez que em cada uma das cinco colunas pode-se escolher o movimento para a direita de seis maneira distintas.

Teorema 12. *Se X é finito e $Y \subset X$, então Y é finito.*

Demonstração. A prova será feita por indução no número de elementos de X. Se $\#(X) = 0$, então $X = Y = \emptyset$, donde conclui-se que Y é finito, pois o conjunto vazio é finito por definição.

Agora, suponha $\#(X) = n + 1$. Tem-se que $Y = X$ ou $X - Y \neq \emptyset$. Se $Y = X$, então Y é finito. Se, por outro lado, $X - Y \neq \emptyset$, então existe $x' \in X$ tal que x' não é elemento de Y. Neste caso, $Y \subset X - \{x'\}$ e como $\#(X - \{x'\}) = n$, tem-se, pela hipótese de indução, que Y é finito. □

Teorema 13. *Seja X um conjunto finito e $Y \subset X$, com $Y \neq X$. Então, $\#Y < \#X$.*

Demonstração. Se $Y = \emptyset$ nada tem a se demonstrar. Como $X - Y$ é finito, existe bijeção de I_p em $X - Y$. Com isso, seja $X - Y = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Como Y é também finito, considere $\psi : I_m \longrightarrow Y$ uma bijeção e defina $\varphi : I_{m+p} \longrightarrow X$ do seguinte modo:

$$\varphi(i) = \psi(i) \text{ para } i = 1, \ldots, m$$

$$\varphi(m + j) = x_j \text{ para } j = 1, \ldots, p$$

Afirma-se que φ é bijeção entre I_{m+p} e X. De fato, se $x \in X$, segue que $x \in Y$ ou $x \in X-Y$. Se $x \in Y$, então existe $i \in I_m$ tal que $x = \psi(i) = \varphi(i)$. Se, por outro lado, $x \in X - Y$, então $x = x_j$ para algum $j \in I_p$ e logo $x = \varphi(m+j)$, provando que φ é sobrejetiva. A injetividade segue do fato de que as restrições de φ a I_m e $I_{m+p}-I_m$ são injetivas, além de suas imagens $\varphi(I_m)$ e $\varphi(I_{m+p}-I_m)$ serem disjuntas. Logo, $\#(X) = m + p > m = \#(Y)$. □

O teorema acima diz que se X é um conjunto finito e Y é um subconjunto próprio de X, então não existe bijeção entre os elementos de X e Y (pois isso implicaria na igualdade entre o número de elementos). Segue da contra-positiva dessa observação que se existir bijeção entre um conjunto X e um subconjunto próprio $Y \subset X$, então X é um conjunto *infinito*.

Exemplo 4.6. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, considere o subconjunto próprio $X = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ dos números pares. A função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ definida por $\varphi(n) = 2n$ é uma bijeção. De fato, dado $x \in X$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2n$ e logo $x = \varphi(n)$, o que prova a sobrejetividade. Por outro lado, se $n, n' \in \mathbb{N}$ são tais que $\varphi(n) = \varphi(n')$, segue que $2n = 2n' \Longrightarrow n = n'$, provando a injetividade. Com isso, foi exibida uma bijeção entre um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$, concluindo a prova da afirmação feita.

Já é fato conhecido que se há uma função bijetiva entre dois conjuntos X e Y finitos, então eles tem o mesmo número de elementos. O que se pode afirmar quanto ao número de elementos de dois conjuntos finitos, porém, quando é possível estabelecer uma função injetiva ou sobrejetiva entre eles? Os dois resultados seguintes tem por objetivo responder a esse questionamento.

Teorema 14. *Sejam X, Y conjuntos tais que $\varphi : X \longrightarrow Y$ é injetiva. Se Y é finito, então $\#(X) \leq \#(Y)$.*

Demonstração. A função φ, por ser injetiva, estabelece bijeção entre X e $\varphi(X)$. Como $\varphi(X) \subset Y$ com Y finito, temos que $\#(X) = \#[\varphi(X)] \leq \#(Y)$. □

Teorema 15. *Sejam X e Y conjuntos tais que $\varphi : X \longrightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é finito, então $\#X \geq \#Y$.*

Demonstração. Como a função φ é sobrejetiva, para cada $y \in Y$ o conjunto $I(y) = \{x \in X : y = \varphi(x)\}$ é não-vazio. Assim, dado $y \in Y$ seja $x(y)$ um elemento em $I(y)$ fixo, porém arbitrário. Defina $\psi : Y \longrightarrow X$ tal que $\psi(y) = x(y)$. A função ψ está bem-definida porque cada $I(y)$ é não-vazio e é injetiva porque φ é função. Logo, existe bijeção entre Y e $\psi(Y) \subset X$, donde $\#Y = \#\psi(Y) \leq \#X$, pois X é finito. □

Os teoremas acima permitem mostrar um fato bastante intuitivo para conjuntos finitos : *O todo é maior que qualquer parte própria.* Em termos mais precisos, o seguinte teorema tem por objetivo enunciar formalmente este fato e prová-lo.

Teorema 16. *Seja X um conjunto finito e Y um subconjunto próprio de X. Então, não existe $\varphi : X \longrightarrow Y$ injetiva.*

Demonstração. Suponha que exista tal função. Então ocorre que $\#(X) \leq \#(Y)$. Como Y é subconjunto próprio de X, tem-se que $\#(Y) < \#(X)$, produzindo um absurdo. Logo, tal função não existe. $\square$

A contra-positiva deste último teorema estabelece, ainda, um critério ainda mais preciso para determinar se um conjunto é finito ou infinito. Basta verificar se existe função injetiva (e não mais bijetiva) entre ele e um de seus subconjuntos próprios.

Exemplo 4.7. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é infinito. De fato, seja considere a função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{1\}$ tal que

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^a \cdot 3^b$$

Tal função é injetiva pois, se $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(\frac{c}{d})$, então $2^{a-c} = 3^{d-b}$ que ocorre apenas se $a - c = d - b = 0$, implicando $a = c$ e $b = d$. Assim, pelo teorema anterior, como existe função injetiva deste conjunto em um de seus subconjuntos próprios, o resultado segue.

Para finalizar este capítulo, os três teoremas seguintes buscam compreender o que ocorre com o número de elementos de conjuntos finitos ao se tomar a *união* (não necessariamente disjunta, como no Princípio Aditivo) e o *conjunto das partes*.

Teorema 17. *Se X é finito e $Y \subset X$, então $\#X = \#Y + \#(X - Y)$*

Demonstração. Como $Y \subset X$, vale que $X = Y \cup (X - Y)$. Deste modo. como os conjuntos Y e $X - Y$ são disjuntos, pelo teorema anterior, tem-se

$$\#X = \#(Y \cup (X - Y)) = \#Y + \#(X - Y)$$

$\square$

Teorema 18. *Se X e Y são conjuntos finitos, então $\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#X + \#Y$.*

Demonstração. Utilizando a identidade $X \cup Y - X \cap Y = (X - X \cap Y) \cup (Y - X \cap Y)$ e teoremas anteriores, visto que $(X - X \cap Y)$ e $(Y - X \cap Y)$ são disjuntos, tem-se

$$\#(X \cup Y) - \#(X \cap Y) = \#X - \#(X \cap Y) + \#Y - \#(X \cap Y)$$

donde segue que $\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#X + \#Y$. $\square$

Observação. É possível generalizar a expressão obtida acima para o número de elementos da *união* de n conjuntos finitos quaisquer. Tal fórmula pode ser encontrada em [14].

Teorema 19. *Seja X um conjunto finito. Então, $\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$.*

Demonstração. A prova será feita por indução no número de elementos do conjunto X. Se $\#X = 0$, então $X = \emptyset$, donde $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ e logo $\#\mathcal{P}(X) = 1 = 2^0 = 2^{\#X}$. Suponha agora que se $\#Y = n$, então $\#\mathcal{P}(Y) = 2^n$ como hipótese de indução e considere X tal que $\#X = n + 1$. Seja $a \in X$. Utilizando a partição $X = (X - \{a\}) \cup \{a\}$ para efetuar a contagem, observa-se que cada subconjunto de X é obtido através da inclusão ou não de a em cada subconjunto de $X - \{a\}$. Deste modo, o conjunto das partes de X tem o dobro de elementos do conjunto das partes de $X - \{a\}$ e logo

$$\#\mathcal{P}(X) = 2 \cdot \#\mathcal{P}(X - \{a\}) = 2 \cdot 2^{\#(X - \{a\})} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{\#X}$$

$\square$

5 Conjuntos Enumeráveis

Este capítulo foi elaborado a partir das referências bibliográficas: [10], [11]

Neste capítulo será definido o conceito de conjuntos enumeráveis. Tal conceito é importante pois, para conjuntos enumeráveis, é possível estabelecer certa relação, quando conveniente, de "primeiro elemento do conjunto", "segundo elemento do conjunto", ... "n-ésimo elemento do conjunto", tal qual se faz com o conjunto dos números naturais. Neste sentido, em tais conjuntos é possível definir uma posição entre seus elementos.

5.1 Enumerabilidade

Definição 5.1. Um conjunto X é dito *enumerável* se é finito ou se existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Exemplo 5.1. Como exemplo, vamos mostrar que $\mathbb{Z}$ é um conjunto enumerável. De fato, a seguinte função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é bijetiva. Ela associa o conjunto dos números pares ao conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e os números ímpares aos inteiros negativos.

Teorema 20. *Todo subconjunto dos naturais é enumerável.*

Demonstração. Nada se deve mostrar com relação aos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
Seja X um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Definir-se-á uma função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bijetiva por indução. Como X é subconjunto de $\mathbb{N}$, possui menor elemento x_1. Seja $\varphi(1) = x_1$. Suponha agora definidos $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ satisfazendo às seguintes condições

(i) $\varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(n)$

(ii) Definindo $X_{n+1} = X - \{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\}$, $\varphi(n) < x$ para todo $x \in X_{n+1}$

A partir disso, defina $\varphi(n+1) = \inf(X_{n+1})$. Deste modo $\varphi(n+1)$ cumpre as condições *(i)* e *(ii)*, tendo em vista que $\varphi(n+1) \in X_{n+1}$ (e logo $\varphi(n+1) > \varphi(n)$) e, ainda, $\varphi(n+1)$ o menor elemento de X_{n+1} (e logo $x > \varphi(n+1)$ para todo $x \in X_{(n+1)+1}$). Está assim definida a função φ por indução. A injetividade de tal função vem da condição *(i)* (é uma função crescente). Para provar que φ é sobrejetiva, suponha que $\exists\ x \in X$ tal que $x \notin \varphi(\mathbb{N})$. Então deve valer que $x \in X_{n+1} - \{\varphi(n+1)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, absurdo, pois $\varphi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

O teorema a seguir utiliza o escólio da demonstração anterior. De fato, utilizando-se a enumerabilidade de um dos conjuntos é estabelecida uma ordem análoga a dos naturais.

Teorema 21. *Se X é um conjunto enumerável e $Y \subset X$, então Y é enumerável.*

Demonstração. Se $Y \subset X$ é finito, nada tem a se demonstrar. Portanto, vamos considerar Y infinito. Como X é enumerável, existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Deste modo, $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ onde $x_j = \varphi(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, considerando a relação de ordem total em X:

$$x_i \preceq x_j \text{ se } i \leq j$$

define-se a bijeção $f : X \longrightarrow Y$ do mesmo modo como foi definida a bijeção no teorema anterior. Em seguida, observa-se que $f \circ \varphi$ é bijeção de $\mathbb{N}$ em Y.

Resta demonstrar, portanto, que $\preceq$ é de fato uma relação de ordem total em X. Com efeito,

(i) $x \preceq x$ para todo $x \in X$, pois $x = x_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e como $i \leq i$, segue que $x = x_i \preceq x_i = x$

(ii) Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ para $x, y \in X$, então $x = y$. De fato, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $x = x_i$ e $y = y_j$. Das duas condições acima tem-se que $i \leq j$ e $j \leq i$, donde $i = j$ e $x = x_i = x_j = y$.

(iii) Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, conclui-se que $x \preceq z$. Realmente, como $x = x_i$, $y = y_j$ e $z = z_k$, segue das hipóteses acima que $i \leq k$, donde $x = x_i \preceq x_k = z$.

Logo, $\preceq$ define uma relação de ordem total em X. □

A definição de enumerabilidade faz uso de funções bijetivas. O que se pode dizer sobre a enumerabilidade de dois conjuntos ao se estabelecer funções injetivas ou sobrejetivas? Os dois teoremas que se seguem demonstram duas importantes relações da enumerabilidade com estes dois tipos de funções.

Teorema 22. *Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é injetiva com Y enumerável, então X é enumerável.*

Demonstração. O caso em que Y é finito foi demonstrado no *Teorema 14*. Por outro lado, se Y é um conjunto infinito enumerável, a função φ estabelece uma bijeção entre X e $\varphi(X)$. Como, $\varphi(X) \subset Y$, segue que esta imagem é enumerável, pelo teorema anterior. Assim, definindo $\varphi^{-1} : \varphi(X) \longrightarrow X$ dada por $\varphi^{-1}(y) = x$ quando $y = \varphi(x)$, tem-se que φ^{-1} é bijeção. Por fim, sendo $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \varphi(X)$ bijetiva, tem-se que $\varphi^{-1} \circ \psi$ é também uma bijeção, concluindo que X é enumerável. □

Exemplo 5.2. O conjunto $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para observar a veracidade de tal fato, não é necessário exibir uma função bijetiva de $\mathbb{N}^2$ em $\mathbb{N}$. Utilizando o resultado anterior e a unicidade da fatoração em primos prova-se tal enumerabilidade através $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(m, n) = 5^m \cdot 3^n$$

uma vez que f é injetiva (pela unicidade da fatoração em primos) e $\mathbb{N}$ é enumerável.

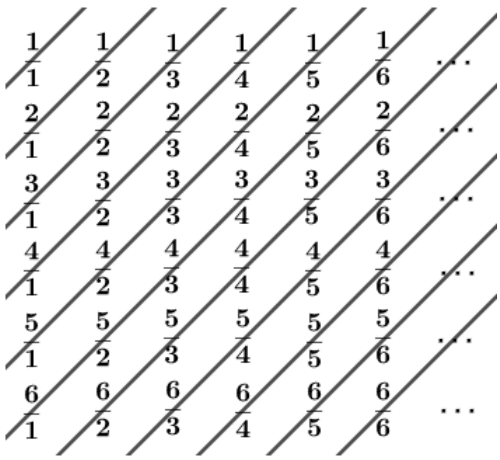
Teorema 23. *Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva e X é enumerável, então Y é enumerável.*

Demonstração. Como φ é sobrejetiva, para cada $y \in Y$ o conjunto $I(y) = \{x \in X : y = f(x)\}$ é não-vazio. Logo, para cada $y \in Y$ seja $x(y)$ um elemento fixo, porém arbitrário, de $I(y)$. Com isso, defina $\psi : Y \longrightarrow X$ tal que $\psi(y) = x(y)$. Deste modo, mostra-se que Y é enumerável, pois ψ está bem-definida e é injetiva.

$\square$

Exemplo 5.3. Há uma demonstração clássica, realizada por Cantor, sobre um fato extremamente contra-intuitivo: a enumerabilidade de $\mathbb{Q}_+^*$. De fato, esta demonstração consiste em tomar a lista de todas as frações (incluindo as ambiguidades como $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$) e transformá-la em uma tabela, de tal modo que na *i-ésima* linha se encontrem as frações com numerador i e na *j-ésima coluna* as frações com denominador j. Em seguida, considera-se todas as diagonais desta matriz, com a finalidade de se construir um caminho que passe por cada uma das frações desta lista uma única vez. A seguir é ilustrada uma figura que exibe o objeto supracitado.

Figura 5: Lista de todas as frações positivas e suas diagonais.



Fonte: O autor.

O caminho (ou sequência) pelas diagonais pode assim ser definido: o primeiro elemento desta sequência será a fração $\frac{1}{1}$ e o segundo será $\frac{2}{1}$. Em seguida, aplica-se o seguinte método para determinar o próximo passo do caminho:

Se um elemento encontra-se na primeira linha e em

(a) uma coluna par, então o próximo elemento da sequência será aquele que está a sua direita.

(b) uma coluna ímpar, então o próximo elemento da sequência será aquele que se encontra em sua diagonal esquerda.

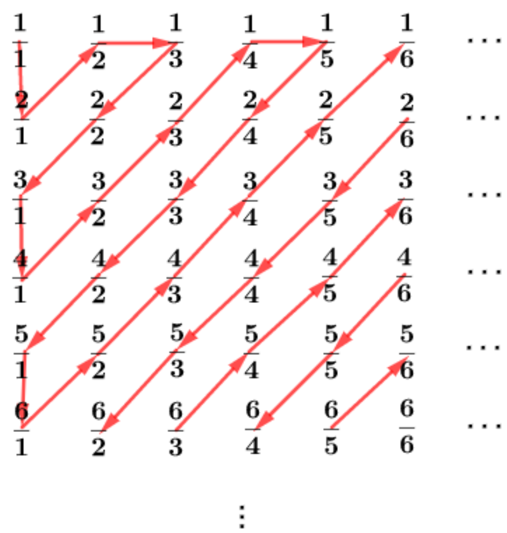
Se pertencer a coluna 1 e a

(a) uma linha par, então o próximo elemento da sequência será aquele que se encontra em sua dinagonal direita.

(b) uma linha ímpar, então o próximo elemento da sequência será aquele que está imediantamente abaixo.

Nos demais casos, para determinar o próximo passo do caminho, basta seguir a diagonal da tabela em que se encontra. A seguir é ilustrado o caminho resultante desse processo.

Figura 6: Caminho que passa por todas as frações da lista uma única vez.

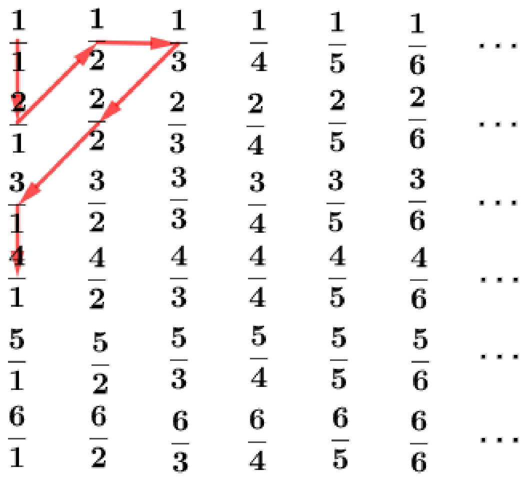


Fonte: O autor.

Através de tal sequência é possível definir uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+^*$ colocando $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}, f(3) = \frac{1}{2} \ldots$; isto é, $f(n)$ é igual ao n-*ésimo* elemento deste caminho. Com isso, o conjunto $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerado, pois f é sobrejetiva e $\mathbb{N}$ é enumerável.

É possível estabelecer uma "fórmula" para essa função. Para determinar $f(n)$, é necessário primeiramente determinar em qual diagonal tal imagem se encontra. Diante disso, é preciso descobrir quantas diagonais já foram percorridas na tabela até se chegar à fração de número n. As diagonais são percorridas de maneira sequencial, de modo que primeiro se percorre toda a diagonal número 1, depois percorre-se toda a diagonal número 2 e assim sucessivamente. Por exemplo, para calcular $f(7)$, é necessário percorrer 1+2+3 frações para finalizar as três primeiras diagonais até que com mais um passo chega-se à sétima fração

Figura 7: Exemplificando o caso particular da sétima fração.

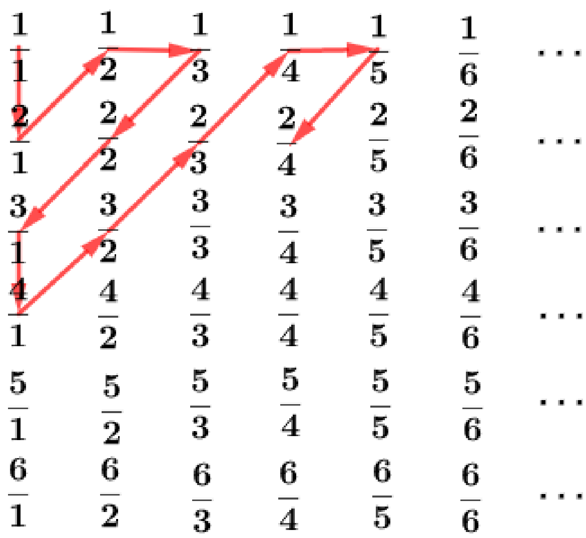


Fonte: O autor.

É possível perceber que para varrer a primeira diagonal é necessário passar por 1 fração; para percorrer as duas primeiras diagonais é necessário passar por $1 + 2$ frações; de uma maneira geral, para percorrer as α primeiras diagonais é necessário passar por $1 + 2 + \ldots + \alpha = \sum_{i=1}^{\alpha} i$ frações. Deste modo, para determinar quantas diagonais foram percorridas até se chegar a n-*ésima* fração, há de se determinar o número α tal que $\sum_{i=1}^{\alpha} i$ esteja o mais próximo possível de n, sem passá-lo.

A fim de exemplificar, quantas diagonais são percorridas até se chegar à 12ª fração? Ora, basta perceber que $12 - (1 + 2 + 3 + 4) = 2 > 0$ e $12-(1+2+3+4+5) = -3 < 0$. Assim, foram percorridas $\alpha = 4$ diagonais e, portanto, a 12ª fração segundo o caminho definido por Cantor se encontra na 5ª diagonal.

Figura 8: Exemplificando o caso particular da décima-segunda fração.



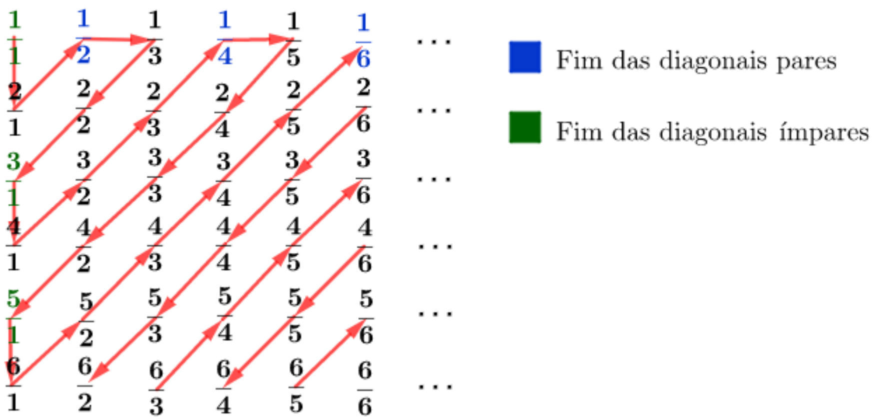
Fonte: O autor.

Portanto, para se descobrir quantas diagonais foram varridas até chegar a *n-ésima* fração, é necessário descobrir $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\alpha} i \leq n < \sum_{i=1}^{\alpha+1} i$$

Além disso, o número $r = n - \sum_{i=1}^{\alpha} i$ determina quantas frações foram percorridas após se chegar ao fim da diagonal α. Assim, se $r = 0$, $f(n)$ encontra-se justamente sobre o final de alguma diagonal. Nesse momento, é importante perceber que diagonais pares terminam em frações do tipo $\frac{1}{2k}$, uma vez que são percorridas de cima para baixo, ao passo que diagonais ímpares terminam em frações do tipo $\frac{2k-1}{1}$(ver Figura 9).

Figura 9: Fim das diagonais pares e ímpares pelo caminho.

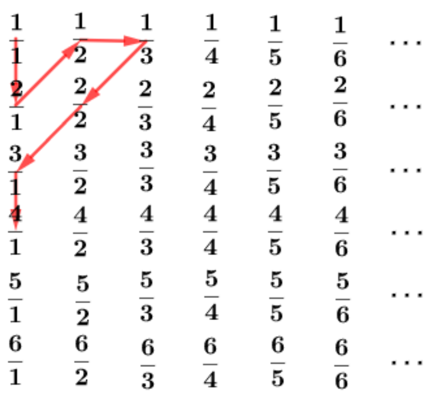


Fonte: o autor.

Deste modo, se α for par e $r = 0$, então $f(n)$ encontra-se no fim de uma diagonal par e tem valor $f(n) = \frac{1}{\alpha}$. Por outro lado, se α é ímpar e $r = 0$, $f(n) = \frac{\alpha}{1}$, uma vez que encontra-se sobre o fim de uma diagonal ímpar.

E se $r \neq 0$? Ora, se isso ocorre, $f(n)$ encontra-se sobre a posição r da diagonal $\alpha + 1$. No caso particular de $f(7)$, tem-se que $\alpha = 3$ e $r = 1$, concluindo que a 7ª fração se encontra na primeira posição da quarta diagonal e tem valor $f(7) = \frac{3+1}{1} = \frac{\alpha+1}{1} = \frac{\alpha+(2-r)}{r}$.

Figura 10: Observando $f(7)$ a fim de conjecturar uma fórmula para o caso em que α é ímpar e $r \neq 0$.

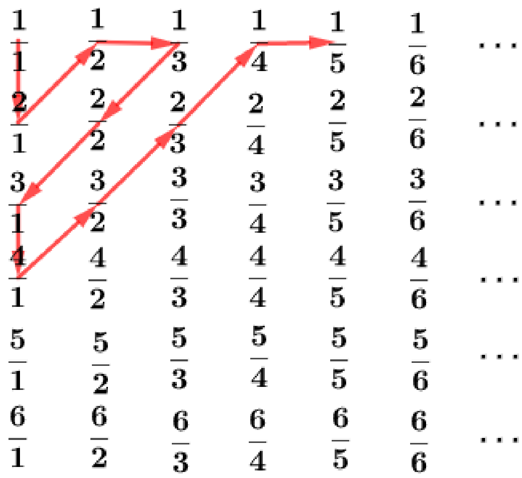


Fonte: O autor.

A última igualdade estabelece uma fórmula para calcular $f(n)$ se α é ímpar e $r > 0$. De fato, neste caso $f(n)$ encontra-se na posição r de uma diagonal par (a diagonal $\alpha + 1$). As diagonais pares são percorridas de baixo para cima de tal modo que o denominador de $f(n)$ é justamente r. Como a soma do numerador com o denominador das frações em qualquer diagonal $\alpha + 1$ é constante e vale $\alpha + 2$, segue que o numerador de $f(n)$ é $\alpha + 2 - r$, donde $f(n) = \frac{\alpha+2-r}{r}$

Por fim, e se α é par e $r > 0$? Para isto, vamos analisar $f(11)$, em que $\alpha = 4$ e $r = 1$.

Figura 11: Analisando $f(11)$ para determinar uma fórmula no caso em que α é par e $r \neq 0$



Fonte: O autor.

Nesse caso, $f(11)$ encontra-se na primeira posição da 5ª diagonal. Observa-se que $f(11) = \frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{r}{\alpha+(2-r)}$. Agora, como uma diagonal ímpar é percorrida de cima para baixo, os numeradores de $f(n)$ nesse caso coincidem com r. Além disso, como a soma do numerador com o denominador é constante e vale $\alpha + 2$, segue que o denominador de $f(n)$ é $\alpha + 2 - r$, concluindo que $f(n) = \frac{r}{\alpha+2-r}$.

A Tabela 2 apresenta uma fórmula para $f(n)$ utilizando o caminho de Cantor.

Tabela 2: Fórmula para a determinação da *n-ésima* fração da lista segundo o caminho pelas diagonais.

α	r	$f(n)$
par	$\neq 0$	$f(n) = \frac{r}{\alpha+2-r}$
ímpar	$\neq 0$	$f(n) = \frac{\alpha+2-r}{r}$
par	$= 0$	$f(n) = \frac{1}{\alpha}$
ímpar	$= 0$	$f(n) = \frac{\alpha}{1}$

Fonte: O autor.

Como exemplo de aplicação dessa fórmula, calcular-se-á $f(25)$. Fazendo $25-1-2-3-4-5-6=4$, segue que $\sum_{i=1}^{6} i \leq 25 < \sum_{i=1}^{7} i$, donde $\alpha = 6$ e $r = 4$. Como α é par e $r \neq 0$, segue que $f(25) = \frac{4}{6+2-4} = \frac{4}{4}$.

Há um outro modo de se demonstrar a enumerabilidade do conjunto dos racionais. Ele faz uso do seguinte teorema, que enuncia um importante resultado sobre a relação entre enumerabilidade e produto cartesiano:

Teorema 24. *Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Como X e Y são enumeráveis, existem $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ bijetivas. Com isso, defina $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow X \times Y$ tal que

$$f(m,n) = (\varphi(m), \psi(n))$$

Assim definida, tal função é bijetiva. Com efeito, se $f(m,n) = f(m',n')$, segue que $\varphi(m) = \varphi(m')$ e $\psi(n) = \psi(n')$, donde $m = m'$ e $n = m'$ (pois ambas as funções são injetivas), mostrando que $(m,n) = (m',n')$ e que f é injetiva. Por outro lado, dado $(x,y) \in X \times Y$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $x = \varphi(m)$ e $y = \psi(n)$, donde $(x,y) = f(m,n)$, provando a sobrejetividade de f. Deste modo, como $\mathbb{N}^2$ é enumerável, $X \times Y$ também o é. $\square$

Exemplo 5.4. O resultado acima permite mostrar de maneira mais indireta a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$. Como já foi mostrado que $\mathbb{Z}$ é enumerável, obtém-se que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ também o é. Assim, basta definir função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ de tal

modo que
$$f(a,b) = \frac{a}{b}$$
Dado que esta função sobrejetiva, pois $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$, conclui-se a prova.

Exemplo 5.5. Nem todos os conjuntos são enumeráveis. Por exemplo, o intervalo $(0,1)$ dos números reais não é enumerável, fato novamente contra-intuitivo dada a enumerabilidade dos racionais. Segue uma prova: Suponha, por absurdo, que tal intervalo é enumerável, isto é, que existe uma função bijetiva $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$. Considere a representação decimal de cada $y \in (0,1)$ isto é, $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$, com $x_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Com isto, a suposta enumerabilidade deste intervalo constrói a sequência

$$\begin{gathered} y_1 = 0, x_{(1,1)} x_{(1,2)} x_{(1,3)} \dots \\ y_2 = 0, x_{(2,1)} x_{(2,2)} x_{(2,3)} \dots \\ y_3 = 0, x_{(3,1)} x_{(3,2)} x_{(3,3)} \dots \\ \vdots \end{gathered}$$

Agora, seja $y = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ tal que

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ se } x_{(j,j)} \neq 1 \\ 0, \text{ se } x_{(j,j)} = 1 \end{cases}$$

Tem-se que $y \in (0,1)$ e $y \neq y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que $x_k \neq x_{(k,k)}$. Logo, y não pertence à imagem de φ, produzindo um absurdo, uma vez que esta função é bijetiva. Portanto, o intervalo $(0,1)$ não pode ser enumerável.

Exemplo 5.6. O conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$ não é enumerável. De fato, suponha que esta afirmação é falsa. Como $(0,1) \subset \mathbb{R}$, e $\mathbb{R}$ supostamente é enumerável, seguiria que $(0,1)$ é enumerável, produzindo um absurdo. Logo, a afirmação feita no início deste exemplo é verdadeira.

5.2 Operações entre Conjuntos Enumeráveis

Esta seção busca estudar o que ocorre ao se tomar *operações* entre *conjuntos enumeráveis*. Como já foi exibido anteriormente, nem todos os conjuntos são enumeráveis. Com isto, surge a pergunta: Como é afetada a enumerabilidade ao se tomar *uniões, produtos cartesianos* e *diferenças* entre conjuntos enumeráveis?

O primeiro resultado dessa seção tem por objetivo entender o que ocorre ao se tomar a *reunião* entre dois tipos de conjuntos enumeráveis: um infinito e outro finito.

Teorema 25. *Seja A um conjunto infinito enumerável e B um conjunto finito. Então $A \cup B$ é infinito enumerável.*

Demonstração. Nada se tem a mostrar se $B = \emptyset$. Por hipótese, portanto, existem funções $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ e $g : I_m \longrightarrow B$ bijetivas, para algum $m \in \mathbb{N}$. Para demonstrar o teorema, é necessário e suficiente exibir uma função $h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ bijetiva. Os ingredientes para construir tal função são f e g. Deste modo, defina:

$$h(i) = \begin{cases} g(i), \text{ se } 1 \leq i \leq m \\ f(i-m) \text{ se } i \geq m+1 \end{cases}$$

Resta agora mostrar que h é sobrejetiva. De fato, dado $x \in A \cup B$, tem-se $x \in A$ ou $x \in B$. No primeiro caso, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x = f(i) = f(i+m-m) = h(i+m)$. No segundo, existe $j \in I_m$ tal que $x = g(j) = h(j)$. Com isso, o resultado é provado, visto que h é sobrejetiva e seu domínio é enumerável □

Ou seja, ao se incluir um conjunto finito em outro infinito e enumerável, nada se altera com relação a enumerabilidade. Em realidade, há um resultado pouco mais geral, como se segue

Teorema 26. *Seja A um conjunto infinito enumerável e $B_1, \ldots B_n$ conjuntos finitos. Então $A \cup B_1 \ldots \cup B_n$ é infinito enumerável.*

Demonstração. A prova será feita por indução. O caso base para $n = 1$ foi mostrado no teorema anterior. Agora, admitindo como hipótese indução que o resultado vale para n conjuntos finitos, vamos mostrar que vale para o caso de $n+1$ conjuntos finitos. Com efeito sejam $B_1, \ldots, B_n, B_{n+1}$ cojuntos finitos e A um conjunto infinito enumerável. É desejado mostrar que $A \cup B_1 \ldots \cup B_n \cup B_{n+1}$ é infinito enumerável. Usando a identidade

$$A \cup B_1 \ldots \cup B_n \cup B_{n+1} = (A \cup B_1 \ldots \cup B_n) \cup B_{n+1}$$

observa-se que $A \cup B_1 \ldots \cup B_n$ é infinito enumerável pela hipótese de indução e, portanto, pelo caso base, segue que $(A \cup B_1 \ldots \cup B_n) \cup B_{n+1}$ é infinito e enumerável também, concluindo a demonstração. □

O resultado mais geral sobre união de conjuntos enumeráveis é o que se segue, visto que o enunciado trata de conjuntos infinitos.

Teorema 27. *Sejam $A_1, \ldots A_k$ conjuntos infinitos e enumeráveis. Então o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

é infinito e enumerável.

Demonstração. Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, dado $m \in \mathbb{N}$, existe, para cada $d \in \mathbb{N}$, únicos números q e r inteiros não-negativos tais que

$$m = qd + r, \text{ com } r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

Por hipótese, existem bijeções $f_j : \mathbb{N} \longrightarrow A_j$ para todo j entre 1 e k. Assim, defina $f : \mathbb{N} \longrightarrow \cup_{i=1}^{k} A_i$ tal que

$$\begin{aligned} f([q-1]k+1) &= f_1(q) \\ f([q-1]k+2) &= f_2(q) \\ &\vdots \\ f(qk) &= f_k(q) \end{aligned}$$

para todo $q \in \mathbb{N}$.
Agora, resta mostrar que f é sobrejetiva. Dado $x \in \cup_{i=1}^{k} A_i$, então $x \in A_i$ para algum $1 \leq i \leq k$ natural. Daí que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_i(m) = f([m-1]k+i)$, como queríamos demonstrar. □

Ou seja, ao se tomar *uniões finitas* de conjuntos infinitos enumeráveis, obtém-se um novo conjunto enumerável. Os próximos teoremas versam a respeito do produto cartesiano de conjuntos enumeráveis. Espera-se resultados análogos àqueles obtidos para união. De fato, é exatamente isso que se segue.

Teorema 28. *Sejam A um conjunto infinito enumerável e B um conjunto finito. Então o conjunto $A \times B$ é infinito e enumerável.*

Demonstração. Com efeito, existem funções $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ e $g : I_m \longrightarrow B$ bijetivas, para algum m natural. Definir-se-á uma função sobrejetiva de $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$ do seguinte modo:

$$h(i,j) = \begin{cases} (f(i), g(j)), \text{ se } (i,j) \in \mathbb{N} \times I_m \\ (a_0, b_0) \text{ se } (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} - (\mathbb{N} \times I_m) \end{cases}$$

onde (a_0, b_0) é um ponto fixo, porém arbitrário, de $A \times B$.
Para mostrar que tal função é sobrejetiva assim se procede: dado $(a,b) \in A \times B$, existem $i \in \mathbb{N}$ e $j \in I_m$ tais que $a = f(i)$ e $b = g(j)$, donde $(a,b) = (f(i), g(j)) = h(i,j)$. □

Teorema 29. *Seja A um conjunto infinito e enumerável e $B_1, \ldots, B_n$ conjuntos finitos. Então $A \times B_1 \ldots \times B_n$ é enumerável.*

Demonstração. A prova é feita por indução de maneira análoga ao resultado obtido para a união destes mesmos conjuntos. □

Teorema 30. *O conjunto $\mathbb{N}^k$ (produto cartesiano de k conjuntos iguais a $\mathbb{N}$), com $k \in \mathbb{N}$, é enumerável.*

Demonstração. Esta demonstração é muito parecida com aquela utilizada na prova da enumerabilidade de $\mathbb{N}^2$. Para tanto, sejam $p_1, \ldots, p_k$ primos distintos (cuja existência é garantida pela infinidade de números primos). Defina a função $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(i_1, \ldots, i_l) = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}$$

tal função é injetiva pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Logo, como $\mathbb{N}$ é enumerável, $\mathbb{N}^k$ também o é. □

Este resultado é importante porque é usado para provar o seguinte resultado, o mais sobre produto cartesiano de conjuntos enumeráveis.

Teorema 31. *Sejam $A_1, \ldots A_k$ conjuntos infinitos enumeráveis. Então, $A_1 \times \ldots \times A_k$ é enumerável.*

Demonstração. Como hipótese, existem funções $f_j : \mathbb{N} \longrightarrow A_j$ bijetivas para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Com isso, define-se $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow A_1 \times \ldots \times A_k$ do seguinte modo

$$f(i_1, \ldots, i_k) = (f_1(i_1), \ldots f_k(i_k))$$

Como tal função é sobrejetiva e o teorema anterior mostra que $\mathbb{N}^k$ é enumerável, o resultado segue. □

Exemplo 5.7. Decorre imediatamente do teorema acima que o conjunto $\mathbb{Q}^k$ é enumerável. Realmente, basta tomar $A_i = \mathbb{Q}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, uma vez que o conjunto dos numeros racionais é enumerável. Este fato é extremamente contra-intuitivo. Em aparência o conjunto $\mathbb{Q}^k$ é "maior" do que $\mathbb{Q}$. Os resultados anteriores são responsáveis por elucidar que, ao se tratar de conjuntos infinitos, nossa intuição por vezes falha: todos estes conjuntos ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^k$) podem ser postos em bijeção e, além disso, estão em bijeção com $\mathbb{N}$.

O que é possível acontecer ao se considerar a diferença entre dois conjuntos enumeráveis? Os dois seguintes exemplos mostram que esta pergunta tem resposta diferente daquelas obtidas para *união* e produto cartesiano de conjuntos enumeráveis.

Exemplo 5.8. Seja $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ o conjunto dos números pares. O conjunto $\mathbb{N} - P = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ é infinito e enumerável.

Exemplo 5.9. Seja $X_k = \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\}$ o conjunto dos números naturais maiores do que ou iguais a k. O conjunto $\mathbb{N} - X_k = \{1, 2, \ldots, k - 1\}$ é finito e tem $k - 1$ elementos.

Estes exemplos mostram, portanto, que ao se tomar a diferença entre dois conjuntos enumeráveis, diferentes coisas podem acontecer. No primeiro exemplo, da diferença resultou um conjunto infinito e enumerável, ao passo que da segunda resultou um conjunto finito com k elementos. É possível variar $k \in \mathbb{N}$ de tal modo a concluir que este conjunto finito pode possuir qualquer número elementos.

6 Conjuntos Infinitos

Este capítulo foi elaborado a partir das referências bibliográficas [10], [11], [9], [1].

Como foi mostrado no capítulo anterior, nem sempre existe bijeção entre dois conjuntos infinitos. Isso sugere a existência de diferentes tipos de infinitos. Tomando como referência aquilo que ocorre com conjuntos finitos, define-se a ideia de cardinalidade para conjuntos quaisquer.

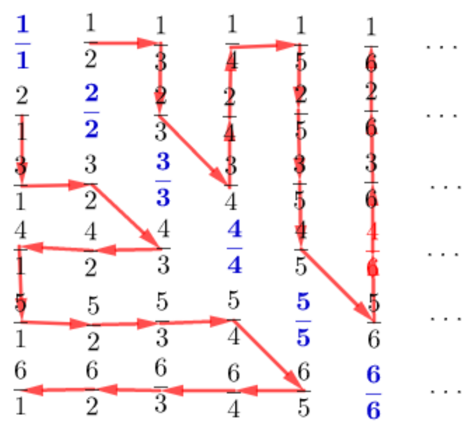
6.1 Cardinalidade

Definição 6.1. Sejam X e Y dois conjuntos. Se existe $\varphi : X \longrightarrow Y$ bijetiva, diz-se que os conjuntos X e Y tem a mesma *cardinalidade* e escreve-se $\#X = \#Y$.

Exemplo 6.1. Daquilo que foi discutido na seção anterior, segue que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$. Além disso, $\#\mathbb{N} \neq \#(0,1)$.

Exemplo 6.2. Retornando à tabela formada por todas as frações, é possível mostrar que existe bijeção entre as frações situadas na parte triangular superior e as situadas na região triangular inferior utilizando o caminho proposto na figura a seguir.

Figura 12: Caminhos utilizados para demonstrar a enumerabilidade das frações que se encontram na região triangular superior e na região triangular inferior da matriz.



Fonte: O autor.

O conjunto das frações situadas na região triangular superior pode ser descrito como $S = \left\{ \frac{a}{b} : a < b; a, b \in \mathbb{N} \right\}$ e o das frações posicionadas na parte triangular inferior como $I = \left\{ \frac{a}{b} : a > b; a, b \in \mathbb{N} \right\}$. Feita essa observação, defina $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$ seguindo o caminho proposto para a parte superior, isto é: $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{1}{3}$; $f(3) = \frac{2}{3}$; $f(4) = \frac{3}{4} \ldots$; e assim sucessivamente. O caminho proposto pode ser assim definido

(i) Se a fração se encontra na margem da tabela em uma coluna par (isto é, se é do tipo $\frac{1}{2k}$), então o próximo movimento é ir para a fração imediatamente à direita (isto é, a fração $\frac{1}{2k+1}$)

(ii) Se a fração encontra-se em uma coluna ímpar e existe fração triangular inferior abaixo dela, então o movimento próximo movimento é de descida.

(iii) Se a fração encontra-se em uma coluna ímpar e margeando a diagonal da tabela, o próximo movimento é ir para a sua diagonal direita mais próxima (ou seja, ao se encontrar na fração $\frac{2k}{2k+1}$, o próximo movimento é deslocar-se para $\frac{2k+1}{2k+2}$.

(iv) Caso a fração se encontre em uma coluna par e exista fração acima dela, o próximo movimento é de subida.

Com isso, é possível perceber, que o conjunto S das frações triangulares superiores está em bijeção com os naturais. Assim como no caso da enumerabilidade de $\mathbb{Q}_+^*$, pode-se estabeceler uma fórmula para este função.

Para isso, é preciso observar que neste caso as *colunas* são percorridas sequencialmente. Primeiro é percorrida toda a coluna 2, depois toda a coluna 3 e assim por diante. A primeira coluna a ser percorrida possui uma fração; a segunda coluna a ser varrida possui duas frações; a *k-ésima* coluna possui k frações.

Deste modo, para determinar $f(n)$, é necessário determinar quantas colunas se percorreu até a *n-ésima* fração. Basta determinar, assim como no caso da enumerabilidade dos racionais positivos, o número α tal que

$$\sum_{i=1}^{\alpha} i \leq n < \sum_{i=1}^{\alpha+1} i$$

E, do mesmo modo, o número $r = n - \sum_{i=1}^{\alpha} i$ determina quantas frações foram percorridas após se chegar ao fim da coluna $\alpha + 1$. Convém observar, também, que na coluna k o denominador sempre será k (*) e que na posição j de qualquer coluna o numerador sempre será j (**). Feitas essas observações, ao se considerar, por exemplo, $f(6)$, tem-se $\alpha = 3$ e $r = 0$. Ou seja, $f(6)$ encontra-se sobre a última posição na coluna 4. Note que $f(6) = \frac{1}{4} = \frac{1}{\alpha+1}$.

Figura 13: Observando $f(6)$ para determinar uma fórmula para o caso em que α é ímpar e $r - 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\[4pt]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\[4pt]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\[4pt]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\[4pt]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\[4pt]
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \cdots
\end{array}$$

Fonte: O autor.

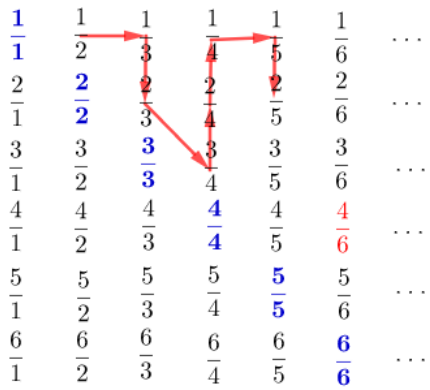
De um modo geral, se α é ímpar e $r = 0$, o percurso encontra-se sobre a primeira fração da coluna $\alpha + 1$ (visto que colunas pares são percorridas de baixo para cima), de tal modo que $f(n) = \frac{1}{\alpha+1}$.

Por outro lado, se α é par e $r = 0$, o caminho está sobre a última fração da coluna $\alpha + 1$ antes da diagonal da tabela. Como esta fração situa-se imediatamente acima da diagonal na coluna $\alpha + 1$, tem-se $f(n) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.

Com a finalidade de analisar o caso em $r > 0$ e α é ímpar, vamos considerar

$f(8)$, em que $\alpha = 3$ e $r = 2$. Neste exemplo, a oitava fração encontra-se na segunda posição da quinta coluna e com isso tem-se $f(8) = \frac{2}{5} = \frac{r}{\alpha+2}$.

Figura 14: Observando $f(8)$ para determinar uma expressão para o caso em que α é ímpar e $r \neq 0$.



Fonte: O autor.

Logo, neste caso a *n-ésima* fração encontra-se sobre a posição r da coluna $\alpha + 2$ (uma vez que colunas ímpares são percorridas de cima para baixo) e com isso, por (*) e (**) tem-se $f(n) = \frac{r}{\alpha+2}$.

Por fim, se α é par e $r > 0$, a *n-ésima* fração encontra-se sobre a posição $\alpha + 2 - r$ da coluna $\alpha + 2$, uma vez que estará situada r unidades acima da diagonal da tabela. Por (*) e (**), tem-se $f(n) = \frac{\alpha+2-r}{\alpha+2}$ neste caso.

Segue, deste modo, a tabela para determinação de $f(n)$

Tabela 3: Fórmula para a determinação da *n-ésima* fração da região triangular superior segundo o caminho proposto.

α	r	$f(n)$
par	$\neq 0$	$f(n) = \frac{\alpha+2-r}{\alpha+2}$
ímpar	$\neq 0$	$f(n) = \frac{r}{\alpha+2}$
par	$= 0$	$f(n) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$
ímpar	$= 0$	$f(n) = \frac{1}{\alpha+1}$

Fonte: O autor.

De modo análogo ao qual foi definida a função f, é possível definir $g : \mathbb{N} \longrightarrow I$ bijetiva. Portanto, a função $g \circ f^{-1} : S \longrightarrow I$ representa uma bijeção entre esses dois conjuntos. Porém, o conjunto S é o conjunto de todas as frações entre 0 e 1, ao passo que o conjunto I é formado por todas as frações maiores do que 1. Assim chega-se a conclusão de uma fato extremamente contra-intuitivo: existe mesma quantidade de frações (no sentido da cardinalidade) entre 0 e 1 do que frações maiores do que 1!

Exemplo 6.3. Todos os intervalos fechados e não degenerados de $\mathbb{R}$ tem mesma cardinalidade. Com efeito, exibir-se-á uma bijeção de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em $[c, d] \subset \mathbb{R}$ (com $a < b$ e $c < d$). Para construir tal função, considere $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ tal que

$$f(a) = c$$

e

$$f(b) = d$$

isto é, os extremos inferiores e superiores dos intervalos são associados. Esta condição satisfeita por f permite, intuitivamente, modelar tal bijeção por uma função afim, uma vez que, garantida a correspondência entre os extremos, é de se esperar que os pontos interiores aos intervalos também estejam devidamente associados. Adotando tal modelo, tem-se $f(x) = mx+n$. Definindo $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = c$ e $y_2 = d$ e utilizando a *fórmula de interpolação de Lagrange* para determinar $f(x)$, obtém-se:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{2} y_j \cdot \prod_{k \neq j} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) = y_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Logo, $f(x) = \left(\frac{c-d}{a-b}\right) x + \frac{ad-bc}{a-b}$. Para mostrar que f é sobrejetiva, dado $x_0 \in [c, d]$, tem-se que $x_0 = f(\frac{x_0(a-b)-ad+bc}{c-d})$. Além disso, $\frac{x_0(a-b)-ad+bc}{c-d} \in [a, b]$, pois

$$\frac{x_0(a-b) - ad + bc}{c-d} = \frac{b(x_0 - c) + a(d - x_0)}{d-c} \leq \frac{b(x_0 - c) + b(d - x_0)}{d-c} = b$$

e

$$\frac{x_0(a-b)-ad+bc}{c-d}=\frac{b(x_0-c)+a(d-x_0)}{d-c}\geq\frac{a(x_0-c)+a(d-x_0)}{d-c}=a$$

mostrando que f é sobrejetiva. Como f é estritamente crescente, segue que é injetiva, provando a bijetividade. Analogamente mostra-se que todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ tem mesma cardinalidade.

Exemplo 6.4. Os intervalos $[0,1]$ e $(0,1)$ tem mesma cardinalidade. Considere a função $f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$ definida do seguinte modo: $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{3}$. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{5}$ ...; nos demais pontos f será definida como a identidade. Deste modo

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ se } x=0\\ \frac{1}{k+2}, \text{ se } x\in\left\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{N}\right\}\\ x, \text{ se } x\in[0,1]-\left(\left\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\right)\end{cases}$$

Assim definida, tal função é bijetiva. De fato, em cada uma das três partições do intervalo $[0,1]$ utilizadas acima, a função f é injetiva, além de que as imagens destas partições são disjuntas, mostrando que a função é injetiva em todo seu domínio. A função f é também sobrejetiva, uma vez que dado $y\in(0,1)$, tem-se que $y\in\left\{\frac{1}{k+1}:k\in\mathbb{N}\right\}$ (1º caso) ou $y\in(0,1)-\left\{\frac{1}{k+1}:k\in\mathbb{N}\right\}$ (2º caso). No primeiro caso, tem-se que $y\in f(\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{N}\right\})$ e no segundo $y\in f((0,1)-\left\{\frac{1}{k+1}:k\in\mathbb{N}\right\})$.

Com esse fato em mãos, é possível perceber que todos intervalos, abertos ou (não-degenerados), possuem mesma cardinalidade, pois $\#[a,b]=\#[0,1]=\#(0,1)=\#(c,d)$. Em realidade, este fato também é válido para intervalos semi-abertos.

Exemplo 6.5. Todos os intervalos não-degenerados (abertos ou fechados) de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade igual à de $\mathbb{R}$. De fato, a função $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\text{tg}(x)$ é uma bijeção. Deste modo, $\#(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\#\mathbb{R}$. Além disso, pelo exemplo anterior, como $\#[c,d]=\#(a,b)=\#(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, o resultado segue.

Definição 6.2. Sejam X e Y conjuntos. Se existe $\varphi : X \longrightarrow Y$ injetiva, diz-se que $\#X \leq \#Y$. Além disso, se existir $\psi : X \longrightarrow Y$ sobrejetiva, diz-se que $\#X \geq \#Y$. Se $\#X \leq Y$ e não vale que $\#X = \#Y$, diz-se que $\#X < \#Y$. Do mesmo modo define-se $\#X > \#Y$.

Exemplo 6.6. A função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = n$ é injetiva. Assim, $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{R}$. Como a igualdade não é válida, tem-se que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Exemplo 6.7. Em realidade, o resultado é mais geral do que o apresentado acima. Se X é um conjunto infinito, então $\#\mathbb{N} \leq \#X$. Para provar tal fato, é necessário e suficiente exibir/construir uma função injetiva $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Com efeito, seja $A \subset X$ não-vazio. Escolhendo $x_A \in A$, defina $\varphi(1) = x_A$. A seguir, φ será definida por indução. Suponha $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ definidos. Para definir $\varphi(n+1)$, seja $A_{n+1} = X - \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Tem-se que A_{n+1} é não vazio, uma vez que X é finito. Com isso, escolhendo $x_{n+1} \in A_{n+1}$, defina $\varphi(n+1) = x_{n+1}$. Isto termina a definição de φ por indução. Agora, resta mostrar que tal função é injetiva. De fato, seja $m \neq n$, com $m < n$ (sem perda de generalidade). Tem-se que $\varphi(n) \in X - \{\varphi(1), \ldots, \varphi(m)\}$, pela construição de φ. Logo, $\varphi(n) \neq \varphi(m)$, provando a injetividade.

Este exemplo permite finalizar uma caracterização para conjuntos infinitos. No fim do Capítulo sobre conjuntos finitos foi mostrado, por contrapositiva, que se existe uma função injetiva de um conjunto X em um subconjunto $Y \subset X$ próprio, então X é infinito. Isso, não mostra, no entanto, que se um conjunto é infinito existe uma função injetiva em algum subconjunto próprio. Em outras palavras, vale a recíproca do teorema apresentado no Capítulo 4? A resposta é sim e esta é uma equivalência importantíssima para conjuntos infinitos.

Teorema 32. *Se X é um conjunto infinito, então existe função bijetiva de X em um de seus subconjuntos próprios.*

Demonstração. Como X é infinito, pelo exemplo anterior, tem-se que existe função injetiva $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Seja $\varphi(\mathbb{N}) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Além disso, seja $Y = X - \{x_1\}$. Será mostrado que existe função $\psi : X \longrightarrow Y$ bijetiva.

Para isso, defina $\psi(x) = x$, se $x \in X - \varphi(\mathbb{N})$ e $\psi(x_n) = x_{n+1}$ se $x_n \in \varphi(\mathbb{N})$. Completada a definição de ψ, resta provar a bijetivadade. Para isto, basta ver que as restrições de ψ a $\varphi(\mathbb{N})$ e $X - \varphi(\mathbb{N})$ são injetivas, além de suas imagens serem disjuntas, concluindo a demonstração da injetividade desta função. Além disso, dado $x \in Y$, ou $x = x_n$ para $n \geq 2$ natural e com isso $x = x_n = \psi(x_{n-1})$; ou $x \in X - \varphi(\mathbb{N})$, donde $x = \psi(x)$, mostrando a sobrejetividade de ψ. Como Y é subconjunto próprio de X, o resultado está demonstrado. □

Teorema 33. *Sejam X e Y conjuntos infinitos. Então, $\#X \leq \#Y$ se e somente se $\#Y \geq \#X$.*

Demonstração. Apesar de ser um resultado intuitivo do ponto de vista da notação, o modo como tal relação entre cardinalidades foi definida faz o resultado carecer de demonstração.

$\Longrightarrow$ Como $\#X \leq \#Y$, existe $\varphi : X \longrightarrow Y$ injetiva. Como $Y = \varphi(X) \cup [Y - \varphi(X)]$ e essa união é disjunta, defina $\psi : Y \longrightarrow X$ do seguinte modo: (i) se $y \in \varphi(X)$, então $\psi(y) = x$, onde $\varphi(x) = y$; (ii) se $y \in Y - \varphi(X)$, então $\psi(y) = x_0$, com x_0 fixo em X. Deste modo, está bem-definida a função ψ sobrejetiva, pois dado $x \in X$, se $y = \varphi(x)$ tem-se $x = \psi(y)$. Logo $\#Y \geq X$.

$\Longleftarrow$ Como $\#Y \geq \#X$, existe função φ sobrejetiva de Y em X. Logo, para cada $x \in X$, o conjunto $I(x) = \{y \in Y : x = \varphi(y)\}$ é não-vazio. Assim, para cada $x \in X$ seja $b(x)$ uma escolha de elemento em $I(x)$. Defina $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que $\psi(x) = b(x)$ para todo $x \in X$. Assim, ψ está bem-definida e é injetiva pelo fato de φ ser função.

□

Teorema 34. *Sejam X,$\hat{X}$, Y, $\hat{Y}$ conjuntos tais que $X \cap \hat{X} = Y \cap \hat{Y} = \emptyset$. Se existem bijeções $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$, então existe bijeção $f : X \cup \hat{X} \longrightarrow Y \cup \hat{Y}$.*

Demonstração. Defina $f : X \longrightarrow Y$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in X \\ \psi(x), & \text{se } x \in \hat{X} \end{cases}$$

Tal função é injetiva pois as suas restrições a X e $\hat{X}$ são injetivas, além de suas imagens serem disjuntas. Por outro lado, a sobrejetividade vem do fato que $\varphi(X) = Y$ e $\psi(\hat{X}) = \hat{Y}$, donde $f(X \cup \hat{X}) = f(X) \cup f(\hat{X}) = \varphi(X) \cup \varphi(\hat{X}) = Y \cup \hat{Y}$. □

Teorema 35. *Se X, Y e Z são conjuntos infinitos, então:*

(i) $\#X \leq \#X$.

(ii) Se $\#X \leq \#Y$ e $\#Y \leq \#X$, então $\#X = \#Y$.

(iii) Se $\#X \leq \#Y$ e $\#Y \leq \#Z$, então $\#X \leq \#Z$.

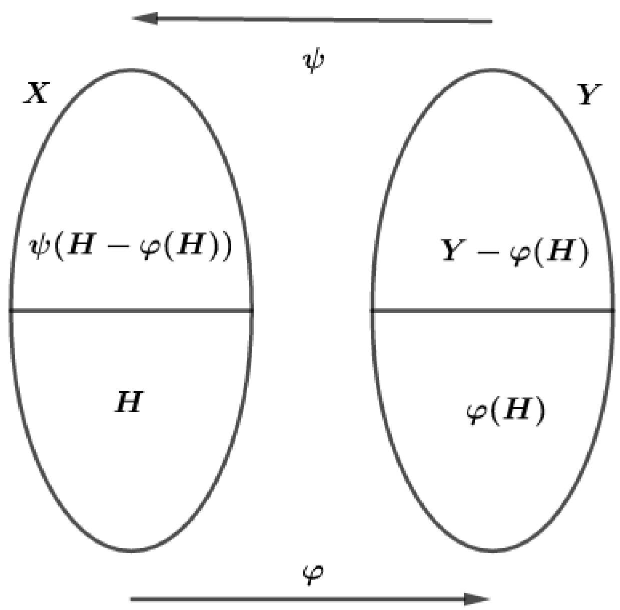
Demonstração. *(i)* A função $I : X \longrightarrow X$ dada por $id(x) = x$ é bijetiva. Logo, é injetiva e portanto $X \leq X$.

(ii) Este resultado é conhecido como *Teorema Cantor-Bernstein-Schröder*. Faz-se necessário um breve comentário a fim de se compreender a demonstração. Por hipótese, há funções $\varphi : X \longrightarrow Y$ e $\psi : Y \longrightarrow X$ injetivas. Deseja-se buscar uma bijeção entre X e Y com base nessas funções. Para isso, no espírito do *Teorema 34*, buscar-se-á particionar o conjunto X em duas partes que estão em bijeção com duas partes complementares do conjunto Y.

Dado qualquer conjunto $H \subset X$, tem-se que há bijeção entre H e $\varphi(H)$, uma vez que φ é injetiva. Além disso, os conjuntos $\varphi(H)$ e $Y - \varphi(H)$ são complementares em Y. Também vale que há bijeção entre $Y - \varphi(H)$ e $\psi(Y - \varphi(H))$, independentemente de qual seja $H \subset X$. Logo, o problema desta demonstração reside em determinar H de tal modo que H e $\psi(Y - \varphi(H))$ sejam complementares em X, pois, uma vez que isso aconteça, tem-se pelo *Teorema 34* que há bijeção entre

$X = H \cup \psi(Y - \varphi(H))$ e $Y = \varphi(H) \cup [Y - \varphi(H)]$. O esquema da Figura 15 ilustra a ideia apresentada.

Figura 15: Visualização gráfica da demonstração do *Teorema 35 - (ii).*



Fonte: O autor.

Para determinar H, considere a função $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f(A) = X - \psi(A - \varphi(A))$. Com isso, H é o valor de f tal que $f(H) = H$. Assim, seja $\mathcal{A} = \{B \subset X : B \subset f(B)\}$. Afirma-se que

$$H = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

De fato, tem-se

$$H = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} f(B) = f(\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B) = f(H)$$

e

$$H \subset f(H) \Longrightarrow f(H) \subset f(f(H)) \Longrightarrow f(H) \in A \Longrightarrow f(H) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

Como $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = H$, obtém-se que $f(H) \subset H$, concluindo $f(H) = H$. Portanto, o resultado segue.

(iii) Por hipótese, existem funções $\varphi : Y \longrightarrow X$ e $\psi : Z \longrightarrow Y$ sobrejetivas. A função $\varphi \circ \psi : Z \longrightarrow X$ é sobrejetiva. Com efeito, dado $x \in X$, existem $y \in Y$ tal que $x = \varphi(y)$ e $z \in Z$ tal que $y = \psi(z)$. Deste modo, $x = \varphi(y) = \varphi(\psi(z)) = (\varphi \circ \psi)(z)$.

□

Exemplo 6.8. Os conjuntos $(0,1) \times (0,1)$ e $(0,1)$ têm mesma cardinalidade. De fato, se $x, y \in (0,1)$ a representação decimal cada um é

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} = 0, x_1x_2x_3\ldots$$

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i} = 0, y_1y_2y_3\ldots$$

onde $x_i, y_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Com isso, é possível definir $\varphi : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$ injetiva do seguinte modo:

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^{2i-1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{10^{2j}} = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

Tal função é realmente injetiva pois se $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$, então:

$$0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots = 0, x_1'y_1'x_2'y_2'x_3'y_3'\ldots$$

donde $x_i = x_i'$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$ e $y_j = y_j'$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Deste modo, $x = x'$ e $y = y'$, mostrando a injetividade. Isso prova que $\#[(0,1) \times (0,1)] \leq \#(0,1)$. Por outro lado, a função $\psi : (0,1) \longrightarrow (0,1) \times (0,1)$ dada por $\psi(x) = (x, 0.5)$ é também injetiva, concluindo que $\#(0,1) \leq \#[(0,1) \times (0,1)]$. Do teorema acima segue que $\#[(0,1) \times (0,1)] = \#(0,1)$

Exemplo 6.9. Do mesmo modo como feito para os intervalos de $\mathbb{R}$, segue que $\#[(a,b) \times (c,d)] = \#[(a',b') \times (c',d')]$ para quaisquer retângulos em $\mathbb{R}^2$. Em particular, $\#[(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})] = \#[(0,1) \times (0,1)]$. Além disso, a função $\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x,y) = (\mathrm{tg}(x), \mathrm{tg}(y))$ é bijetiva, mostrando que $\#\mathbb{R} = \#(0,1) = \#[(0,1) \times (0,1)] = \#[(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})] =$

$\#\mathbb{R}^2$.

Exemplo 6.10. Do exemplo anterior segue que $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^2 = \#\mathbb{C}$.

Definição 6.3. Para qualquer conjunto A, indica-se

$$2^A = \{f|\ f : A \longrightarrow \{1, 0\}\}$$

isto é, o conjunto 2^A é formado por todas as funções com domínio em A e contradomínio em $\{0, 1\}$.

A notação para esta definição advém do número de elementos para este conjunto de funções. Se A é finito, para cada elemento $a \in A$ há duas maneiras de se definir a imagem $f(a)$ ($f(a) = 0$ ou $f(a) = 1$). Segue, nesse caso, que existem $2^{\#A}$ funções no conjunto 2^A

Teorema 36. *Para qualquer conjunto A tem-se $\#2^A = \#\mathcal{P}(A)$.*

Demonstração. Para provar tal fato, basta definir uma função $\varphi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow 2^A$ bijetiva. Para cada $B \in \mathcal{P}(A)$, seja $f_B : A \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$f_B(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B \\ 0, & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

Com isso, definindo $\varphi(B) = f_B$ constrói-se a bijeção desejada.

Para mostrar que φ é injetiva, sejam $B, B' \subset A$ tais que $\varphi(B) = \varphi(B')$. Dado $b \in B$, como $f_B = f_{B'}$, tem-se que $1 = f_B(b) = f_{B'}(b)$. Como $f_{B'}(b) = 1$, tem-se $b \in B'$, donde $B \subset B'$. Do mesmo modo mostra-se $B' \subset B$, donde $B = B'$.

Por outro lado, a fim de provar a sobrejetivadade, dada $f \in 2^A$ seja $B = \{a \in A : f(a) = 1\}$. É fácil ver que $B \subset A$ e que $\varphi(B) = f$. Assim, φ é bijetiva, concluindo a demonstração do teorema. $\square$

A igualdade $\#2^A = \#\mathcal{P}(A)$ não constitui grande novidade para o caso em que A é um conjunto finito, uma vez que foi mostrado no Capítulo 4 que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$ nestas condições. No entanto, é importante observar que a igualdade se preserva (e se generaliza) no caso que A é um conjunto infinito, dando certa ideia da cardinalidade do conjunto das partes no caso não-finito.

Exemplo 6.11. Os conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$ têm mesma cardinalidade. Para tanto, considere a representação binária de cada número $x \in [0,1)$. Isto é, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, onde $x_j \in \{0,1\}$ $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Assim, definir-se-á $\varphi : [0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ injetiva do seguinte modo:

$$\varphi(x) = \{i \in \mathbb{N} : x_i = 1\}$$

ou seja, a função associa cada número no intervalo [0,1) a um subconjunto de $\mathbb{N}$ de tal modo que os elementos deste subconjunto são justamente os ordinais das posições onde o número real é igual a 1. Por exemplo, o número $x_0 = 0,625 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0,101_2$ é tal que $\varphi(x_0) = \{1,3\}$. Tal função é injetiva pela unicidade da representação binária de um número real. Isto mostra que $\#[0,1) \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Por outro lado, seja $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1)$ tal que $\psi(A) = x$, onde $x_i = 0$ se $i \notin A$ e $x_i = 1$ se $i \in A$. Por exemplo, $\psi(\{1,2,4\}) = 0,1101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0,8185$. Esta função é injetiva pois, se dois subconjuntos de $\mathbb{N}$ tem mesma imagem, então as representações binárias das imagens são iguais e, por sua unicidade, tem 1 e 0 nas mesmas posições, seguindo que os subconjuntos são iguais. Assim, $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \#[0,1)$, donde $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#[0,1) = \#\mathbb{R}$.

Teorema 37. *Não existe função sobrejetiva de X em $\mathcal{P}(X)$.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então não existe função de X em $\mathcal{P}(X)$. Por outro lado, se $X \neq \emptyset$, seja $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função. Mostrar-se-á que f não pode ser sobrejetiva. Com efeito, seja $B = \{x \in X : x \in X - f(x)\}$ Note que $f(x) \in \mathcal{P}(X) \implies f(x) \subset X \implies X - f(x) \subset X$. Deste modo, B está bem-definido e $B \subset X$. Tem-se que $B \notin f(X) \subset \mathcal{P}(X)$. De fato, suponha por absurdo que exista $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = B$. Com isso, pela definição do conjunto B:

$$x_0 \in B \iff x_0 \in X - f(x_0) \iff x_0 \in X - B$$

gerando o absurdo esperado. Logo $B \notin f(X)$ e f não é sobrejetiva. $\square$

O teorema acima mostra que $\#X < \#\mathcal{P}(X)$, visto que não vale que $\#\mathcal{P}(X) \leq X$, tampouco $\#\mathcal{P}(X) = \#X$. Neste sentido, é possível perceber que existem *infinitas cardinalidades* de conjuntos infinitos. De fato, basta tomar a sequência $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\ldots$, onde, pelo teorema anterior, as cardinalidades crescem a cada tomada do conjunto das partes.

Além disso, tal noção é responsável por expandir os horizontes com relação ao estudo das cardinalidades, dada sua infinidade. Pelo bom comportamento com relação à ordem, faz sentido agora pensar em cardinalidades enquanto *números transfinitos*, isto é, números cardinais de conjuntos infinitos. Para lidar com tais números, utiliza-se a primeira letra do alfabeto hebreu ($\aleph$).

À cardinalidade do conjunto dos números naturais será associado o símbolo $\aleph_0$, de tal modo que fica subentendido que trata-se da menor cardinalidade infinita, como já foi mostrado anteriomente. Um questionamento surge naturalmente: Existe a menor cardinalidade maior que $\aleph_0$? Em outras palavras, há um conjunto X tal que $\#\mathbb{N} < \#X \leq \#Y$ para todo Y tal que $\#\mathbb{N} < \#Y$? De fato, a existência de tal cardinalidade está intimamente associada à *Hipótese do Contínuo*, que será discutida posteriormente. Assumindo a validade desta hipótese, define-se $\aleph_1$ como sendo a segunda menor cardinalidade associada a um conjunto infinito e assim sucessivamente, de tal modo que $\aleph_j$ representa a $j+1$-ésima menor cardinalidade infinita. Portanto, estão definidas infinitas cardinalidades

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 \ldots$$

No entanto, mais uma pergunta surge: Quais conjuntos possuem cardinalidade $\aleph_1$? Algum exemplo é conhecido? Como obter um conjunto com cardinalidade $\aleph_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$? Sabe-se que $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Isso implica $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, pela definição de $\aleph_1$. No entanto, tal fato não dá a noção exata de onde se localiza $2^{\aleph_0}$. É interessante observar que existe a possibilidade, até o momento, que $\aleph_n \leq 2^{\aleph_0}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

A fim de resposder a esses questionamentos, Cantor conjecturou que *não existe um cardinal entre os cardinais de* $\mathbb{N}$ *e de* $\mathbb{R}$. Em outros palavras, $\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Tal conjectura é conhecida como *Hipótese do Contínuo* de Cantor. De uma maneira mais geral, a *Hipótese do Contínuo Generalizada* conjectura

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

Ou seja, para obter-se $\aleph_n$, basta tomar n vezes o conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

A discussão acerca da *Hipótese Generalizada do Contínuo* suscita uma questão de boa-definição. Isto é, ao se conjecturar $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, com $2^{\aleph_\alpha} = \#\mathcal{P}(A)$ onde $\#A = \aleph_\alpha$, está implicítico que se dois conjuntos tem mesma cardinalidade, então seu conjunto das partes também terá (caso contrário tal hipótese dependeria do representante de $\aleph_\alpha$). Será isso realmente verdade? A fim de exemplificar, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ tem mesma cardinalidade, mas será que ocorre o mesmo para $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$? A resposta à essa pergunta é dada no seguinte teorema:

Teorema 38. *Sejam A e B conjuntos tais que $\#A = \#B$. Então, $\#\mathcal{P}(A) = \#\mathcal{P}(B)$.*

Demonstração. Como os dois conjuntos tem mesma cardinalidade, existe função $\varphi : A \longrightarrow B$ bijetiva. Com isso em mãos, é possível definir $\psi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ tal que $\psi(X) = \varphi(X)$. Ou seja, a função ψ associa um conjunto $X \subset A$ à sua imagem por φ. Isto é, $\psi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$. A função ψ assim definida é bijetiva. De fato, sejam $X, Y \subset A$ tais que $\psi(X) = \psi(Y)$. Suponha,

por absurdo, que $X \neq Y$. Com isso, seja $a \in X$ tal que $a \notin Y$. Logo, tem-se $\varphi(a) \notin \varphi(Y)$, absurdo pois $\varphi(a) \in \varphi(X) = \varphi(Y)$. Assim, $X = Y$, provando a injetividade. A sobrejetividade vem de que, dado $Y \in B$, tem-se $\varphi^{-1}(Y) \subset A$, donde $\varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y$. Portanto, o resultado segue. $\square$

6.2 Operações entre Conjuntos Quaisquer

Já é conhecido o fato de que existem infinitas cardinalidades. Como essas cardinalidades se comportam ao se tomar *uniões* e *produtos cartesianos* entre os conjuntos? O que ocorre com conjuntos enumeráveis já é conhecido, mas todos estes conjuntos tem apenas cardinalidade igual a $\aleph_0$, isto é, ainda existe uma *infinidade* de infinitos a serem analisadas.

Os resultados desta seção tentam responder, em alguma medida, ao questionamento feito no parágrafo anterior. Não se trata, no entanto, de uma teoria geral para conjuntos de quaisquer cardinalidades. Em realidade, serão apresentados teoremas preliminares cujo objetivo é mostrar como a cardinalidade é afetada ao se efetuar *uniões* e *produtos cartesianos* entre conjuntos com cardinalidade $\aleph_1$ e $\aleph_0$.

Teorema 39. *Seja X um conjunto infinito. Então $\#(X \cup \{a\}) = \#X$, onde $\{a\}$ é um subconjunto unitário.*

Demonstração. Se $a \in X$, nada se tem a mostrar. Se $a \notin X$, é fato que existe bijeção $\varphi : X \longrightarrow X - \{x_0\}$ para algum $x_0 \in X$. Basta definir, então, $\psi : X \cup \{a\} \longrightarrow X$ do seguinte modo: $\psi(x) = \varphi(x)$, se $x \in X$ e $\psi(a) = x_0$. Naturalmente, ψ é injetiva, pois φ o é e não possui x_0 em sua imagem. Ela é também sobrejetiva, uma vez que dado $x \in X$, tem-se que ou $x = x_0$, o que implica $x = \psi(a)$; ou $x \neq x_0$, o que implica que existe $y \in X$ tal que $x = \varphi(y) = \psi(y)$. Como tal função é bijetiva, as cardinalidades destes conjuntos são iguais. $\square$

Este resultado é necessário para se mostrar o que se segue, um teorema mais geral: ao se tomar a união de um conjunto infinito com outro finito, a cardinalidade não se altera.

Teorema 40. *Seja X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Então $\#(X \cup Y) = \#X$.*

Demonstração. O teorema será provado por indução na cardinalidade do conjunto Y. O resultado é válido para a base da indução (no caso em que $\#Y = 0$), pois tem-se, nesse caso, $Y = \emptyset$ e logo $X \cup Y = X \cup \emptyset = X$. Supondo, agora, a validade do teorema no caso em que o conjunto finito tem n elementos, mostra-se que ele também é válido no caso em que o conjunto tem $n + 1$ elementos. De fato, se $\#Y = n + 1$, tem-se que $Y \subset X$ ou $Y \not\subset X$. Na primeira possibilidade nada se deve demonstrar. Na segunda, seja $y_0 \in Y - X$. Daí que $\#[X \cup (Y - \{y_0\})] = \#X$, pela hipótese de indução. Pelo teorema anterior, tem-se $\#X = \#[X \cup (Y - \{y_0\})] = \#[(X \cup (Y - \{y_0\})) \cup \{y_0\}] = X \cup Y$, seguindo o resultado. □

Seguindo na escala de aumentar o tamanho dos conjuntos ao se tomar a reunião, o próximo conjunto com menor cardinalidade é $\mathbb{N}$. O que ocorre ao se tomar a união de um conjunto infinito com $\mathbb{N}$? A resposta reside no teorema a seguir:

Teorema 41. *Se X é um conjunto infinito, então $\#(X \cup \mathbb{N}) = \#X$.*

Demonstração. Sendo X um conjunto infinito, existe função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ injetiva. Logo, $\varphi(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Tendo em vista tal função, defina $\psi : X \cup \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que $\psi(n) = x_{2n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$; $\psi(x_n) = x_{2n}$, para $x_n \in \varphi(\mathbb{N}) - \mathbb{N}$ e $\varphi(x) = x$, para $x \in X - \varphi(\mathbb{N}) - \mathbb{N}$. A função ψ é injetiva, pois sua restrição às três partições do conjunto $X \cup \mathbb{N}$ é injetiva, além das respectivas imagens serem disjuntas. Logo $\#X \cup \mathbb{N} \leq \#X$ e como $\#X \leq \#X \cup \mathbb{N}$, o resultado está provado. □

Em outras palavras, a cardinalidade de um conjunto infinito não se altera ao se reunir um conjunto enumerável a ele.

Teorema 42. *Sejam X e Y conjuntos tais que $\#X = \#Y = \#\mathbb{R}$. Então, $\#X \cup Y = \#\mathbb{R}$.*

Demonstração. Como ambos os conjuntos X e Y tem cardinalidades iguais à de $\mathbb{R}$, então $\#X = \#Y = \#[a,b]$. Com isso, sejam $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b < c < d$. Existem funções bijetivas $\varphi : [a,b] \longrightarrow X$ e $\psi : [c,d] \longrightarrow Y$. Defina $f : [a,b] \cup [c,d] \longrightarrow X \cup Y$ tal que

$$f(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{se } z \in [a,b] \\ \psi(z), & \text{se } z \in [c,d] \end{cases}$$

A função f é sobrejetiva. De fato, dado $t \in X \cup Y$, tem-se $t \in X$ ou $t \in Y$. Se $t \in X$, então existe $z \in [a,b]$ tal que $t = \varphi(z) = f(z)$. Se $t \in Y$, então há $z \in [c,d]$ tal que $t = \psi(z) = f(z)$. Logo, $\#(X \cup Y) \leq \#\mathbb{R}$, visto que $\#[a,b] \cup [c,d] = \#\mathbb{R}$. Também ocorre $\#(X \cup Y) \geq \#\mathbb{R}$, donde conclui-se a igualdade. □

O teorema mostra resultado semelhante àquele para conjuntos enumeráveis. Ao se tomar a reunião de dois conjuntos com cardinalidades iguais a de $\mathbb{R}$, a cardinalidade permanece inalterada. O mesmo ocorria com a reunião de conjuntos enumeráveis.

Teorema 43. *Seja X um conjunto tal que $\#X = \#\mathbb{R}$. Então, $\#(X \times \mathbb{N}) = \#X$.*

Demonstração. Sejam $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $a < b < c < d$. Por hipótese, existem funções sobrejetivas $\varphi : [a,b] \longrightarrow X$ e $\psi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{N}$. A partir destas funções, basta definir $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow X \times \mathbb{N}$ sobrejetiva como se segue

$$f(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$$

Assim, tem-se $\#(X \times \mathbb{N}) \leq \#([a,b] \times [c,d]) = \#\mathbb{R}$. Como é fato que existe função injetiva de $\mathbb{R}$ para $X \times \mathbb{N}$, o teorema está provado. □

Diante de tal resultado, é possível generalizar este fato para um conjunto enumerável qualquer. Ou seja, ao se tomar o produto cartesiano de dois conjuntos - um deles com cardinalidade igual a de $\mathbb{R}$ e o outro igual ao de $\mathbb{N}$ - então a cardinalidade deste produto é igual à de $\mathbb{R}$.

Em realidade, é possível generalizar os resultados obtidos aqui para conjuntos com cardinalidades quaisquer. Este fato é motivador da teoria que se hoje recebe o nome de *Aritmética Cardinal*. Tendo em vista os resultados mais gerais sobre como a cardinalidade é afetada pelo emprego das operações supracitadas, é possível definir *adição*, *multiplicação* e até mesmo *exponenciação* de números cardinais transfinitos. Um estudo mais aprofundado nesse sentido pode ser encontrado em [9].

7 Uma proposta para o Ensino Médio

Este capítulo foi elaborado a partir das referências bibliográficas: [5], [8], [2].

A partir dos conceitos apresentados neste trabalho, foram elaboradas três atividades destinadas a alunos do Ensino Médio que buscam mostrar como os conceitos de *injetividade, sobrejetividade* e *bijetividade* se relacionam com os conjuntos finitos e infinitos do ponto de vista da cardinalidade.

Neste capítulo serão apresentadas as atividades propostas, que tem como público-alvo estudantes do 1º ano do Ensino Médio, uma vez que é neste momento da formação matemática que estes conteúdos são apresentados ou retomados, como sugerem as referências [5], [8], [2].

Vale ressaltar que estas atividades se configuram como uma aplicação de tais conceitos que, em geral, passa quase despercebida até mesmo em nossos materiais didáticos do PNLD de 2018. A ideia de se exibir a relação entre as noções de função injetiva, bijetiva e sobrejetiva com a determinação do número cardinal de um conjunto é mencionada apenas em [5] como uma curiosidade.

Deste modo, espera-se que esta proposta didática possa contribuir de maneira a enriquecer o ensino destas ideias sobre funções - cuja abordagem ocupa-se em geral na apresentação e resolução de exercícios de fixação - , além de estimular a criatividade dos estudantes mediante a exposição do conceito de infinito e suas implicações contra-intuitivas que serão mencionadas no decorrer das aulas.

7.1 Atividade 1: Função injetivas, sobrejetivas, bijetivas e comparação de números de elementos

Objetivo: Ao fim desta aula, espera-se que o aluno compreenda uma das principais aplicações da injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções: a comparação entre o número de elementos de conjuntos finitos. É esperado que esse conceito seja construído de maneira investigativa, de modo que os exercícios conduzam à formulação de tal ideia, cabendo ao professor lapidá-la.

Série: 1º ano do Ensino Médio.

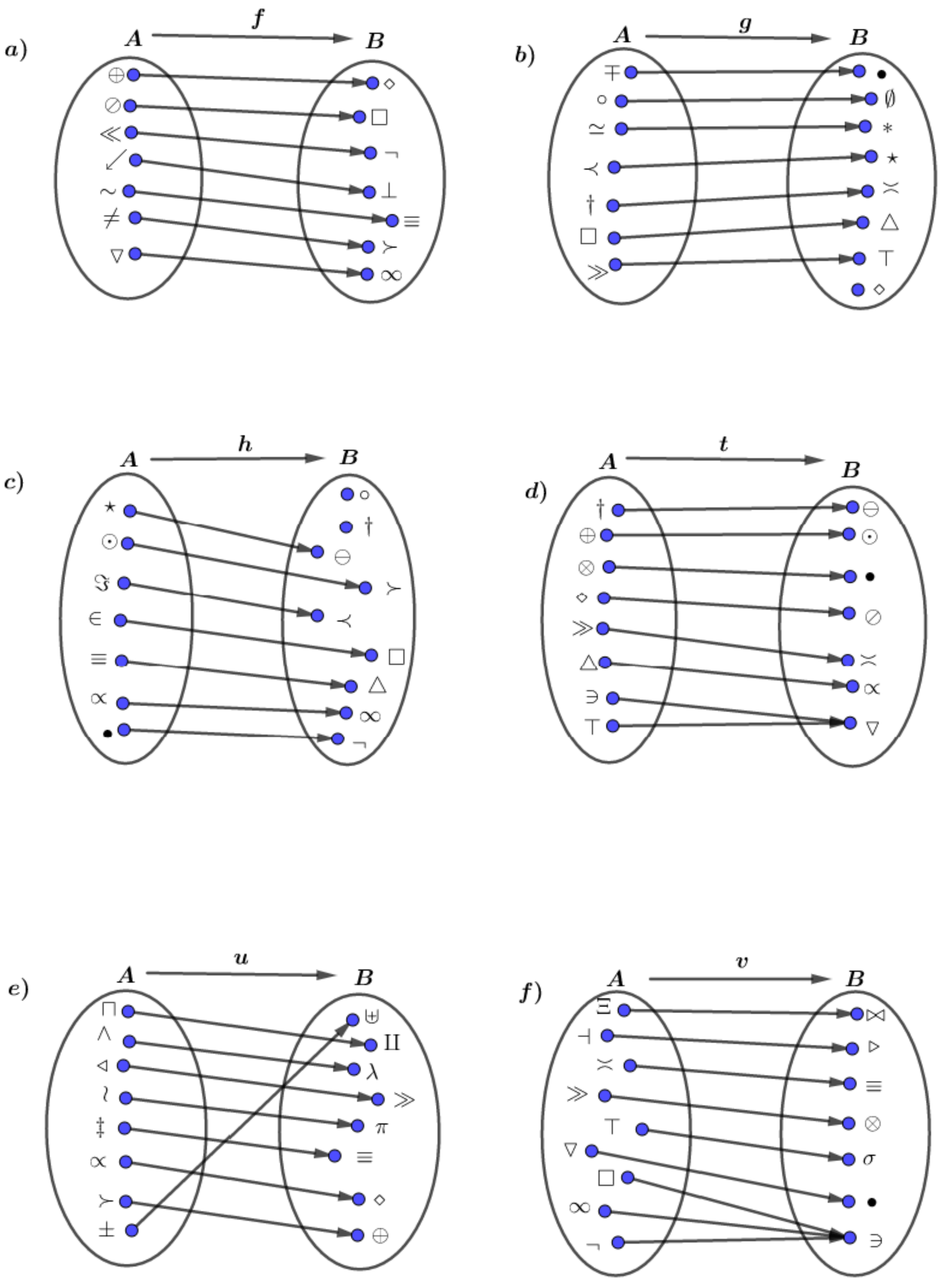
Tempo de duração: Uma aula de 50 minutos.

Pré-requisitos: O aluno já deve ter tomado contato com os conceitos de *função injetiva, sobrejetiva* e *bijetiva.* Também já deve ter estudado a representação de funções via diagrama de flechas.

Introdução: Inicialmente, o Professor dividirá a sala em duplas, de maneira pré-estabelecida ou não, a fim de que haja discussão durante a resolução do primeiro exercício. Em seguida, entregará a cada dupla uma folha que contém o *Exercício 1.* Feito isso, lerá o exercício com os alunos e *salientará* que não devem efetuar a contagem com números naturais para responder ao problema, mas sim buscar diferentes estratégias para identificar o conjunto com maior número de elementos. Então, deverá deixar com que os alunos resolvam este primeiro problema por 15 minutos.

Exercício 1: Em cada item, determine se a função é *apenas injetiva*, *apenas sobrejetiva* ou *bijetiva.* Em seguida, sem efetuar contagem, diga qual dos conjuntos possui o maior número de elementos.

Figura 16: Conjuntos e funções do Exercício 1.



Fonte: O autor.

Após a Resolução do Exercício 1: Neste momento, o professor pedirá às duplas que socializem seus resultados para cada um dos itens, bem como as estratégias utilizadas para comparar o número de elementos dos conjuntos em cada caso.

Comentário para o Professor: É esperado que surjam, entre muitos grupos, as seguintes ideias ao revelarem suas estratégias:

(i) Este conjunto *aparenta* ter mais elementos que aquele.

(ii) É impossível *não contar* para responder esse problema.

Tais respostas não são absurdas, tampouco atrapalharão o andamento da atividade. Em realidade, não é necessário que todos os grupos estabeleçam um raciocínio para se comparar os conjuntos. É precisamente por este motivo que a socialização se faz importante: os grupos aprendem uns com os outros.

Após a socialização: O Professor deve, então, partir das respostas do(s) grupo(s) que mais se aproximou (aproximaram) da relação do número de elementos com *bijetividade, injetividade* e *sobrejetividade*, do seguinte modo:

(a) Nesse caso, o Professor deverá observar que cada elemento do conjunto A está identificado com um único elemento do conjunto B e vice-versa, de tal modo, que estão em *correspondência 1 a 1* como costuma-se dizer. Portanto, os conjuntos A e B possuem o mesmo número de elementos.

(b) Para este item, deve-se observar que todos elementos de A estão associados a elementos distintos de B e, ainda assim, sobra um elemento em B, concluindo que há mais elementos em B.

(c) Idêntico ao anterior, sobrando agora dois elementos em B.

(d) Aqui, todos os elementos de B estão associados a algum elemento de A. Além disso, dois elementos de A estão ligados a um mesmo elemento de B. Deste modo, o conjunto A tem mais elementos que o conjunto B.

(e) Novamente a função estabelece um correspondência 1 a 1, mostrando que os conjuntos tem mesma quantidade de elementos.

(f) Análogo ao item (d), havendo, no entanto, três elementos de A associados a um mesmo elemento em (c)

Estima-se cerca de 20 minutos para a socialização e discussão posterior. Em seguida, o Professor distribuirá uma segunda folha com o *Exercício 2* e deixará os alunos o resolvendo por 5 minutos, alertando-os para que respondam às perguntas tendo em vista o exercício e a discussão anterior. É necessário que o professor faça uma intervenção sobre o *item c)*, uma vez que os alunos possivelmente não entenderão o que significa um subconjunto próprio.

Exercício 2: Responda às perguntas:

a) Se existir uma função bijetiva entre dois conjuntos A e B finitos, o que se pode afirmar em relação ao número de elementos desses conjuntos?

b) Se existir uma função $f : A \longrightarrow B$ que é apenas injetiva, o que se pode dizer quanto ao número de elementos desses conjuntos? E se a função for apenas sobrejetiva?

c) É possível existir uma função bijetiva de um conjunto finito A em um de seus subconjuntos próprios (subconjuntos que não são o próprio A)?

Após Exercício 2: Dados os 5 minutos, o Professor formalizará nos instantes finais da aula os resultados obtidos no *Exercício 1* que são retomados no *Exercício 2* como se segue.

(a) Se há uma função bijetiva entre dois conjuntos finitos, então eles têm o mesmo número de elementos, pois estarão em correspondência 1 a 1.

(b) Se há função injetiva, mas não sobrejetiva do conjunto A para o conjunto B, então o conjunto A possui menor número de elementos, pois mesmo utilizando todos seus elementos para varrer o conjunto B, ainda sobram objetos. Por outro lado, se há função sobrejetiva, mas não injetiva de A para B, o conjunto A possui mais elementos, tendo em vista que é possível relacionar todos os objetos de B com os elementos de A, mas não é possível fazer isso de forma 1 a 1, sendo necessário que ao menos um objeto possua duas pré-imagens.

(c) Este item está intimamente ligado com o *item (a)*. Se fosse possível existir bijeção entre um conjunto finito A e um de seus subconjuntos próprios, então os dois teriam o mesmo número de elementos, produzindo um absurdo. Também deve-se comentar que, ao tentar estabelecer uma correspondência 1 a 1, sobrariam elementos de A sem imagem, de tal modo que a função perderia a injetividade ao atribuir imagens para esses elementos restantes no domínio.

7.2 Atividade 2: O Hotel de Hilbert e conjuntos infinitos

Objetivo: Ao fim desta aula, espera-se que o aluno compreenda a diferença entre os comportamentos de conjuntos finitos e infinitos no que diz respeito às funções bijetivas. Em particular, o estudante deverá perceber que, diferentemente do que ocorre para conjuntos finitos, pode haver bijeção entre um conjunto infinito e uma de suas partes próprias (a parte pode estar em correspondência 1 a 1 com o todo). Por fim, deseja-se fazer com que alunos tomem contato com o belo problema do Hotel de Hilbert, o qual tem muita importância dentro da História da Matemática, a fim de estimular a criatividade de cada um no trato com conjuntos infinitos enumeráveis.

Série: 1º ano do Ensino Médio.

Tempo de duração: Uma aula-dupla de 1 hora e 40 minutos.

Pré-requisitos: O aluno já deve ter realizado e compreendido a *Atividade 1* desta dissertação.

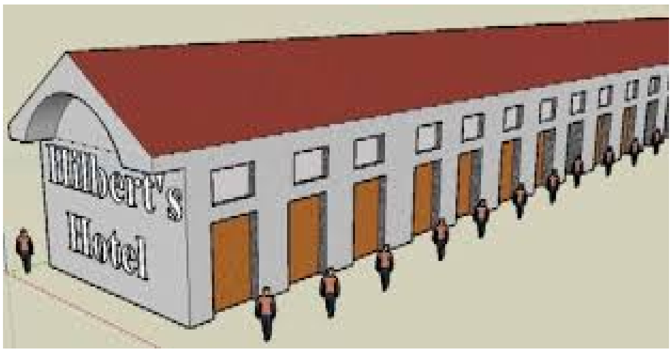
Introdução: Com o intuito de estimular a discussão entre os alunos, o Professor dividirá a sala de aula em duplas. Em seguida, deverá entregar a folha que contém o texto inicial (exibido a seguir) sobre a apresentação do Hotel de Hilbert a cada dupla, fazendo a leitura do texto com os estudantes e buscando explicar as eventuais dúvidas decorrentes do paradoxo em questão, a fim de que se tenha a compreensão do que é o Hotel de Hilbert e como se resolve o problema inicial da entrada de um novo hóspede. Estima-se cerca de 15 minutos para finalizar esta etapa inicial.

O Hotel de Hilbert

O *Hotel de Hilbert* é um grandioso hotel que possui infinitos quartos, todos numerados: o quarto 1, o quarto 2, o quarto 3 e assim sucessivamente.

Este hotel possui infinitos hóspedes e encontra-se com todos os quartos ocupados. Seu gerente é o alemão David Hilbert, um dos maiores matemáticos do século XX.

Figura 17: Uma ilustração para o Hotel de Hilbert.



Referência [9]

Certo dia, pela manhã, um viajante chega ao Hotel e pergunta se há uma vaga. A recepcionista prontamente responde:
- O hotel está lotado, senhor. Não há como acomodá-lo.
Ao ouvir a recepcionista dizer isso, o gerente surge e diz:
- É possível acomodá-lo, sim. Prepare meu microfone, pois darei um recado aos nossos hóspedes.
Ao microfoone, ele discursa:
- Bom dia, caros hóspedes! Para acomodar um novo viajante, cada um de vocês deverá deslocar-se para o quarto que vem logo em seguida do qual ocupam agora: o hóspede do quarto 1 deverá se deslocar para o quarto 2; o hóspede do quarto 2 deverá ir para o quarto 3; o hóspede do quarto 3 vai para o quarto 4 e assim sucessivamente.
Após o recado, todos os hóspedes prontamente se deslocaram para o próximo quarto, como pedido pelo gerente. O quarto 1 ficou vago, e Hilbert finalmente disse ao viajante que ali se encontrava:
- Há uma vaga para o senhor. Dirija-se ao quarto de número 1.
Depois disso, o hotel voltou a sua situação inicial de lotação.

Após a leitura e discussão preliminar do texto: O Professor, então, deverá observar junto aos alunos que a solução dada pelo gerente ao problema de alocar um novo viajante sugere uma função. Com a finalidade de incentivar a participação dos alunos para tentar construir a função em conjunto com o Professor, aconselha-se que ele vá ao quadrado e escreva:

$$
\begin{aligned}
1 &\longrightarrow 2\\
2 &\longrightarrow 3\\
3 &\longrightarrow 4\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Em seguida, questionará os alunos sobre qual conjunto pode ser o domínio dessa função e qual pode ser o contradomínio que melhor se encaixa (a fim de que a função seja bijetiva). Espera-se que os alunos obtenham a resposta que o domínio de tal função é $\mathbb{N}$ e o contradomínio $\{2, 3, 4 \ldots\}$, uma vez que esse conjunto representa as novas posições dos quartos ocupados pelo hóspede após a chegada do novo viajante. Feito isso, é importante que o Professor formalize no quadro a função:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 3, 4 \ldots\}$$

$$f(n) = n + 1$$

Explicando que a regra da função associa a cada natural n o seu sucessor $n+1$.

Feito isso, o professor questionará aos estudantes se essa função estabelece ou não uma bijeção entre o domínio e o contradomínio. Após a resposta dos alunos, ele deverá oficializar que a função é bijetiva e questionar o que há de estranho nisso. Se os alunos não se manifestarem, é importante relacionar tal fato com os conjuntos finitos, questionando-os se é possível haver bijeção entre um conjunto e um de seus subconjuntos próprios. Nesse momento, espera-se que os alunos observem que a função f estabelece bijeção entre $\mathbb{N}$ e um de seus subconjuntos próprios (aquele que não possui apenas o número

1). No momento em que os estudantes chegarem a esse conclusão, o Professor deverá dirá que isso é justamente a característica mais contra-intuitiva entre os conjuntos infinitos: *a parte pode estar em bijeção com o todo.*

Para finalizar esta parte inicial da aula, resta ao Professor destacar que isso rompe com a intuição de que $\mathbb{N}$ *é maior* que seu subconjunto $\{2, 3, 4, \ldots\}$, uma vez que seus elementos podem ser postos de correspondência 1 a 1 de modo a conseguir comportar mais uma pessoa no Hotel de Hilbert. Vale comentar que nas condições de existência de bijeção entre dois conjuntos, finitos ou não, diz-se que eles têm a mesma *cardinalidade*. Estima-se que a discussão mais aprofundada do que ocorre na solução dada por Hilbert dure 20 minutos.

Terminando esta etapa o Professor deverá entregar às duplas uma folha contendo o *Problema 1*. Estima-se necessários 20 minutos para que as duplas resolvam o problema.

Problema 1: Imaginem que no século XXI vocês se tornaram gerentes do *Hotel de Hilbert*. Novamente, o Hotel encontra-se lotado e agora, no entanto, chegam:

a) 2 viajantes. Como vocês fariam para acomodá-los? Descreva, se possível, a função bijetiva que a solução dada pela sua dupla sugere.

b) 3 viajantes. Como vocês fariam para acomodá-los? Descreva, se possível, a função bijetiva que a solução dada pela sua dupla sugere.

c) k (um número natural qualquer) viajantes. Como vocês os acomodariam?

Após a resolução do Problema 1: Os estudantes deverão socializar suas soluções para alocação dos viajantes em cada item. As soluções são esperadas são as seguintes:

(a) Espera-se que as duplas cheguem ao seguinte raciocínio: o hóspede do quarto 1 deverá ir para o quarto 3; o do quarto 2 deverá ir ao quarto 4; o hóspede que se encontra no quarto 3 deverá ir ao quarto 5; de uma maneira geral, cada hóspede deverá avançar dois quartos a frente do que se encontra atualmente (o hóspede do quarto n deverá se dirigir ao quarto $n + 2$). Após a socialização das soluções deste item, o Professor formalizará no quadro que a função bijetiva que esta solução sugere é a que se segue:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{3, 4, 5, \ldots\}$$

$$f(n) = n + 2$$

Antes de formalizá-la, porém, pode ser interessante ao Professor escrever o esquema com flechas ($1 \longrightarrow 3$; $2 \longrightarrow 4$; $3 \longrightarrow 5$ etc) no quadro assim como o fez para explicar o caso em que há apenas 1 viajante que necessita de vaga. Além desta solução, é possível que existam duplas que dêem a seguinte solução: utilizando a estratégia dada por Hilbert, aloca-se o primeiro dos viajantes; em seguida, iterando novamente o algoritmo de Hilbert, aloca-se o segundo viajante. Caso essa solução não apareça, é importante ao Professor comentá-la logo após a formalização da função, com a finalidade de estimular a criatividade dos alunos.

(b) A solução é análoga à do *item (a)*. Do mesmo modo, a atuação do Professor após a socialização dos alunos para esse item deve ser a mesma. Faz-se necessário, porém, caso não tenha surgido uma solução no sentido de iterar o raciocínio utilizado por Hilbert, questionar os estudantes sobre como encontrar a solução para esse item desse modo.

(c) A solução aqui esperada é a generalização das soluções anteriores. Terminada a socialização desse item, o Professor deverá comentar que esse problema sugere uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\{k + 1, k + 2, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} : x > k\}$. Ou seja, esse item permite intuir que ao se retirar um conjunto com k elementos dos naturais (nesse caso, o conjunto extraído dos naturais é $\{1, 2, \ldots, k\}$), ainda assim é possível se estabelecer uma bijeção com $\mathbb{N}$. Como k pode ser qualquer número natural, não importa o tamanho do conjunto finito que se extrai dos naturais: a cardinalidade não se altera.

Estima-se um tempo necessário de 25 minutos para se encerrar esse momento da aula (socialização e intervenção do Professor). Após a resolução deste primeiro exercício, o Professor deverá distribuir uma nova folha às duplas, aquela que contém o *Problema 2*. Os alunos terão 30 minutos para resolver esse problema.

Problema 2: O Hotel novamente encontra-se lotado. Uma excursão chega com o objetivo de conhecer suas acomodações, uma vez que sua fama aumenta a cada semana, tamanha a destreza de seus gerentes em acomodar novos hóspedes. No ônibus da excursão, no entanto, há infinitos viajantes: o viajante 1; viajante 2; viajante 3 e assim sucessivamente. Como vocês poderão, agora, acomodar essas novas pessoas?

Comentário para o Professor: Neste ônibus há um infinito enumerável de viajantes, caso contrário seria impossível alocar todos estes novos hóspedes. Além disso, este é um problema considerado difícil, por isso é importante dar todo esse tempo para os estudantes discutirem e resolverem. Por conta de sua dificuldade, algumas intervenções do Professor são necessárias para os alunos não se desestimularem. A **primeira intervenção** deverá ser feita ao fim dos primeiros 5 minutos e o Professor deverá orientar que os alunos dividam os naturais em pares e ímpares. A **segunda intervenção** acontecerá ao fim dos 10 primeiros minutos e seu conteúdo deve direcionar os alunos no sentido de que os quartos ímpares devem ficar vagos. Terminados os primeiros quinze primeiros minutos, o Professor deverá escrever no quadro a seguinte informação:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Após os próximos 5 minutos, o Professor terá de relacionar cada número do conjunto que se encontra em cima no quadro ao seu dobro no conjunto que se encontra embaixo. Por fim, terminados os 25 minutos iniciais, a seguinte questão deverá ser levantada: como alocar os viajantes nos quartos ímpares?

Após a resolução do Problema 2: Nos quinze minutos finais da aula, o Professor deverá fazer a resolução do *Problema 2* no quadro. A solução é a seguinte:

Inicialmente, os gerentes deverão pedir para que cada hóspede se desloque para o quarto cujo número é o dobro daquele em que ele se encontra nesse exato momento. Assim, o hóspede que se encontra no quarto 1, deverá se dirigir ao quarto 2; o hóspede que se encontra no quarto 2 se deslocará para o quarto 4; o do quarto 3 deverá ir para o quarto 6; de uma maneira geral, quem se encontra no quarto n será deslocado para o quarto $2n$. É conveniente que o Professor escreva no quadro:

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 4 \\ \vdots \end{array}$$

Deste modo, os quartos ímpares ficarão vagos. Então, o gerente deverá comandar que o primeiro viajante da excursão se aloque no quarto de primeiro número ímpar (1); que o segundo viajante se aloje no quarto cujo número é o segundo ímpar (3); que o terceiro viajante vá para o quarto de número igual ao terceiro ímpar (5). Ou seja, o viajante de número n deverá se hospedar no *n-ésimo* quarto ímpar. Pode-se também escrever no quadro:

$$\begin{gathered} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 5 \\ \vdots \end{gathered}$$

Assim, todos os viajantes serão alocados nos quartos ímpares. Para finalizar a aula, o Professor deverá comentar que essas duas maneiras de manejar os hóspedes (que foram postas no quadro) sugerem duas bijeções:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, 3, 5, 7 \ldots\}$$

Ou seja, os números pares e ímpares estão em bijeções com os naturais. Ainda que, em aparência, existam *infinitos elementos a menos*, a bijeção continua. Ou seja, os naturais, pares e ímpares possuem todos a mesma cardinalidade, são passíveis de ser postos em correspondência 1 a 1.

7.3 Atividade 3: Enumerabilidade dos Racionais

Objetivo: Ao fim desta aula, espera-se que o aluno compreenda o conceito de enumerabilidade, bem como sua importância para determinar uma ordem em conjuntos enumeráveis. Expecta-se também que os estudantes concluam que os conjuntos dos números inteiros e dos racionais são conjuntos enuméraveis.

Série: 1º ano do Ensino Médio.

Tempo de duração: Uma aula-dupla de 1 hora e 40 minutos.

Pré-requisitos: O aluno já deve ter realizado e compreendido as atividades 1 e 2 presentes nesta dissertação. Também deve ter estudado o conteúdo de *conjuntos numéricos*.

Introdução: Inicialmente a sala deverá ser organizada em duplas pelo Professor. Feito isso, o Professor entregará aos alunos uma folha cujo conteúdo é como o que se segue: definição de enumerabilidade e dois exemplos de conjuntos enumeráveis (um finito, o outro infinito). Realizada a entrega, o Professor fará a leitura do texto com os alunos, explicando eventuais dúvidas que possam surgir.

Conjuntos Enumeráveis

Existem dois tipos de conjuntos que são chamados de *conjuntos enumeráveis.*

O *primeiro gênero* é formado por *conjuntos finitos.* Todo conjunto com um número finito de elementos é enumerável.

Exemplo: O conjunto $\{\dagger, \diamond, \triangle\}$ é exemplo de um conjunto finito (pois têm 3 elementos) e, portanto, enumerável.

O *segundo gênero* é formado por conjuntos infinitos que podem ser colocados em correspondência 1 a 1 (funções bijetivas) com os naturais ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$).

Exemplo: O conjunto dos números pares $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ é um conjunto enumerável, pois ele é um conjunto infinito que pode ser colocado em bijeção os naturais como vocês viram na aula anterior. A função bijetiva é a seguinte:

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 4 \\ 3 \longrightarrow 6 \\ \vdots \end{array}$$

Uma característica importante de conjuntos enumeráveis é que se pode estabelecer certa *ordem* entre seus elementos através da função bijetiva. Por exemplo, no conjunto dos números pares pode-se dizer que o número 2 é o primeiro par; que o número 4 é o segundo par; que o número 6 é o terceiro par e assim por diante. No caso do conjunto finito, pode-se dizer que † é seu *primeiro elemento*, enquanto que $\diamond$ e $\triangle$ são, respectivamente, seus segundo e terceiro elementos.

Após a leitura do texto: O professor deve, então, questionar os alunos sobre um outro exemplo de conjunto infinito e enumerável que foi visto na aula passada. Espera-se, feito o questionamento, que os alunos se recordem dos números ímpares. A fim de finalizar essa parte inicial da aula, o Professor deverá enfatizar que a enumerabilidade estabelece a possibilidade de se falar de certa ordem no conjunto dos números ímpares (1 é o primeiro ímpar; 3 é o segundo ímpar; 5 é o terceiro ímpar etc). Estima-se 10 minutos necessários para que o Professor leia o texto com os alunos e intervenha no sentido de pedir outro exemplo de conjunto infinito enumerável.

Findada essa discussão, ele entregará aos alunos uma folha com o seguinte *Exercício 1* e os deixará resolvendo a tarefa por 10 minutos.

Exercício 1: O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dos números inteiros é enumerável. Existe função bijetiva dos naturais em $\mathbb{Z}$. Encontrem uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Durante a resolução do Exercício 1: O Professor deverá analisar a situação em que se anda a resolução do exercício por parte dos alunos até os 5 primeiros minutos. Caso haja muita dificuldade, é importante que ele faça uma intervenção escrevendo no quadro os quatro conjuntos como se segue:

$$\begin{array}{cc} \{2, 4, 6, 8, 10\ldots\} & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \\ \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} & \{-1, -2, -3, -4. -5, \ldots\} \end{array}$$

Dizendo que uma possível função bijetiva pode ser encontrada dividindo os naturais em pares e ímpares e os inteiros em não-negativos e negativos.

Após a Resolução do Exercício 1: O Professor solicitará que os estudantes socializem suas resposta. A solução esperada é a que associa os números pares aos inteiros não-negativos e os números ímpares aos inteiros negativos. Vale a pena o Professor comentar que há uma lei para essa função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ como se segue:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ilustrando, inclusive, o cálculo da função para alguns números naturais. O tempo para esta intervenção do Professor é estimado em 10 minutos.

Após a socialização e discussão do *Exercício 1*, o Professor deverá distribuir uma folha contendo o *Exercício 2*. Os alunos deverão resolver este exercício por 10 minutos.

Exercício 2: O Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$) é o conjunto de todos os números que podem ser escritos como fração em que tanto o numerador, como o denominador são números inteiros. A seguir são listadas todas as frações positivas

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \cdots \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Figura 18: Lista de todas as frações positivas.

a) Nesta lista há ambiguidades. Por exemplo, a fração que está na primeira linha e segunda coluna ($\frac{1}{2}$) é igual à fração situada na segunda linha e quarta coluna ($\frac{2}{4}$), pois $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Outro exemplo é obtido pelo número $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Encontrem duas frações que resultam em $1,5$ e digam a qual linha e coluna cada uma pertece.

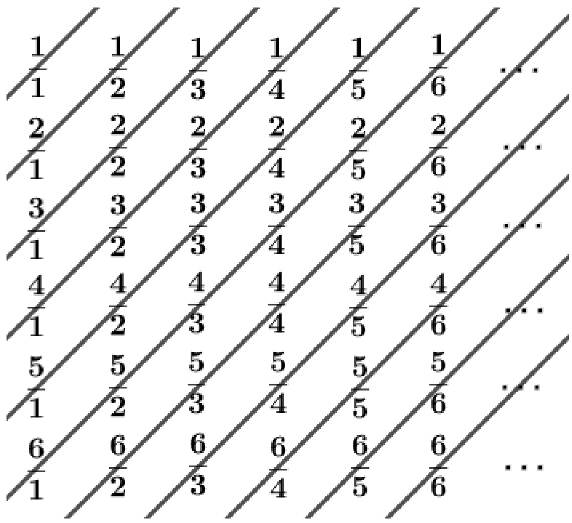
b) O número $0,333\ldots$ está representado na tabela, por exemplo, pelas frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$. Encontre duas frações que representam o número $1,666\ldots$ e diga onde elas se localizam na lista.

Após a resolução do Exercício 2: Este exercício serve para familiarizar os alunos com a lista de todas as frações positivas, além de apresentar suas ambiguidades na representação dos números racionais. Terminado o tempo de 10 minutos para a resolução, o Professor deverá fazer a correção em conjunto com a sala por não mais do que 10 minutos. Este exercício também tem por objetivo retomar os conteúdos de transformação da forma decimal para a fracionária e fração geratriz de uma dízima periódica.

Feita a correção do *Exercício 2*, o Professor deverá entregar a cada dupla o último exercício proposto nesta atividade cujo objetivo é demonstrar a enumerabilidade dos racionais. Os alunos deverão resolver o problema durante 35 minutos. Convém que o Professor leia atentamente o *Exercício 3* com os estudantes com a finalidade de esclarecer as eventuais dúvidas decorrentes do enunciado (sobretudo do *item a)*).

Exercício 3: A seguir são traçadas as diagonais na lista de todas as frações positivas. Através das diagonais, é possível construir um caminho pela lista, partindo da fração $\frac{1}{1}$, que passe por todas as frações uma única vez.

Figura 19: Lista de todas as frações positivas e suas diagonais.



Fonte: O autor.

a) Construam um caminho como o citado acima. Para construí-lo, basta unir as diagonais nos lugares corretos, de modo a formar uma grande trajeto contínuo que passa por toda a lista.

b) Ao se escrever

$$\begin{aligned} f(1) &= \text{primeira fração do caminho}\\ f(2) &= \text{segunda fração do caminho}\\ f(3) &= \text{terceira fração do caminho}\\ &\vdots \end{aligned}$$

é estabelecida uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+^*$ (ou seja, uma função que associa os números naturais às frações positivas). O que se pode dizer dessa função? É injetiva? Sobrejetiva? Bijetiva?

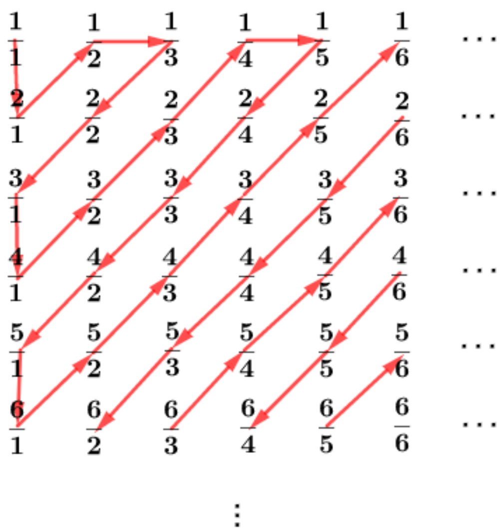
c) É possível fazer utilizar a mesma ideia para enumerar uma lista de todas as frações negativas. Como, então, construir uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ sobrejetiva?

Durante a resolução do Exercício 3: O professor deverá atentamente observar a resolução de cada item pelas duplas. Em dependência do andamento da tarefa, é importante que o Professor intervenha na resolução do exercício em três momentos: decorridos 5, 15 e 25 minutos do início da resolução do *Exercício 3*. A **primeira intervenção** é começar o caminho que varre o conjunto dos números racionais positivos, de tal modo que os alunos consigam generalizar o caminho inicial feito pelo Professor; a **segunda segunda intervenção** diz respeito à função proposta no *item b*, onde o Professor deve alertar os alunos sobre ambiguidade que a lista contém (essa observação tem o intuito de fazer com que os alunos percebam que a função não é injetiva); a **terceira e última intervenção** está relacionada com o *item c)*, onde o Professor deverá orientar os alunos que separem o naturais em pares e ímpare, de modo muito parecido como se deu a enumerabilidade de $\mathbb{Z}$.

Finalizada a resolução do Exercício 3: O Professor deverá, então, fazer a correção do *Exercício com os alunos* como a seguir:

(a) Uma das possíveis maneiras de passar por todas as funções da lista uma única vez é que se segue. O Professor deve questionar os estudantes se houve algum caminho diferente seguindo pelas diagonais, visto que há outra possibilidade.

Figura 20: Uma possível solução para o *item a)* do Exercício 3.



Fonte: O autor.

(b) A função não é injetiva, pois há ambiguidades dentro da própria lista. No caso do caminho acima, pode-se ver que $f(1) = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = f(5)$. A função é sobrejetiva, pois todas as frações positivas estão na lista e o caminho passa por cada uma delas. Não é bijetiva, pois não é injetiva.

(c) A ideia para se estabelecer a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ é associar os pares à lista de funções positivas e os ímpares às frações negativas

$$\begin{array}{ll} f(1) = -\dfrac{1}{1} & f(2) = \dfrac{1}{1} \\ f(3) = -\dfrac{2}{1} & f(4) = \dfrac{2}{1} \\ f(5) = -\dfrac{1}{2} & f(6) = \dfrac{1}{2} \\ f(7) = -\dfrac{1}{3} & f(8) = \dfrac{1}{3} \\ & \vdots \end{array}$$

onde a associação acima leva em conta o caminho proposto na solução do *item a)*. O Professor deve comentar que é possível estabelecer que é possível incluir o número 0 na imagem dessa função alocando-o 0 em seu início e realocando as demais frações ($\hat{f}(1) = 0$, $\hat{f}(3) = -\frac{1}{1}$, $\ldots$). Para finalizar, questionará aos alunos sobre o que se pode dizer quando há funções sobrejetivas no caso de conjuntos finitos e irá comentar que, nesse caso, o fato de haver função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$ mostra que ambos tem mesma cardinalidade uma vez que não pode ser válido que $\mathbb{N}$ tem cardinalidade maior. Tendo mesma cardinalidade, segue que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

8 Considerações Finais

Com base neste estudo é possível perceber que toda a teoria inicial desenvolvida por Cantor a fim de compreender e expandir a noção de infinito se assenta no conceito de função. Todas as definições, teoremas e demonstrações fundamentam-se, em última análise, no emprego de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Até mesmo resultados mais profundos como o Teorema de Cantor, que permite vislumbrar a existência de infinitos números transfinitos, utilizam em sua demonstrações e enunciados estas funções.

Nesse sentido, uma vez que funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas constituem as ferramentas diárias de trabalho dos Professor de matemática do Ensino Médio, a parte teórica deste trabalho serve como uma referência inicial para os educadores que tenham interesse por esse tema, por seu caráter introdutório e de simples acesso.

Ademais, a abordagem de tal contéudo no contexto do Ensino Médio faz-se totalmente válida, uma vez que é precisamente nesta etapa da Educação Básica que os estudantes se deparam com as ideias de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções quaisquer. Deste modo, as atividades propostas se configuram como uma aplicação destas funções em um conteúdo extremamente lúdico, que permeia o imaginário de todos os seres humanos, ainda que de maneira informal.

Diante dos fatos supracitados, espera-se que a presente dissertação sirva como um estímulo aos estudantes do Ensino Médio e como um suporte pedagógico aos docentes de matemática, a fim de que estes dois grupos possam adentrar neste paraíso criado por Cantor e perpetuar suas ideias que objetivam uma matemática criativa.

Referências

[1] ANDRADE, M. G. C. Um breve passeio ao infinito real de cantor. Universidade Federal da Paraíba, p. 10.

[2] BALESTRI, R. D. *Matemática: Interação e Tecnologia*, 2 ed., vol. 1. Leya.

[3] BOYER, CARL B. E MERZBACH, U. C. *História da Matemática*, 3 ed. Blucher.

[4] CAMARGO, B. A. D. Explorando o infinito de cantor e apresentando-o ao ensino médio.

[5] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações.*, 3 ed., vol. 1. Ática, São Paulo.

[6] FIGUEIREDO, D. G. Números irracionais e transcendentes. 3a edição. *Rio de Janeiro. SBM* (2002).

[7] HOLANDA, B. E CHAGAS, E. A. *Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra*, 1 ed., vol. 1. IMPA.

[8] LEONARDO, F. M. D. *Conexões com a Matemática*, 3 ed., vol. 1. Moderna.

[9] LEÃO, A. M. C. Noções básicas de infinito e números cardinais.

[10] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, 15 ed., vol. 1. IMPA.

[11] MOREIRA, CASSIO NERI E CABRAL, M. A. P. *Curso de Análise Real*, 2 ed.

[12] O'CONNOR, JOHN E ROBERTSON, E. Georg ferdinand ludwig philipp cantor.

[13] PINTO, R. C. Introdução à análise combinatória.

[14] SANTOS, J. P. E MELLO, M. *Introdução à Análise Combinatória*, 4 ed. Ciência Moderna.

[15] Steider, G. G. Georg cantor, ese corruptor de la juventud. 10.