



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - UNIRIO

CENTRO DE CIÊNCIAS E EXATAS E TECNOLOGIA - CCET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRUNO TENORIO PINHEIRO

**UMA PROPOSTA DE PLANOS DE AULA PARA INTRODUÇÃO ÀS
FUNÇÕES DO LIVRO ABERTO: O CONCEITO DE FUNÇÃO**

**RIO DE JANEIRO - RJ
2020**

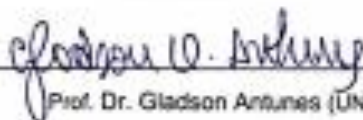
BRUNO TENORIO PINHEIRO

**UMA PROPOSTA DE PLANOS DE AULA PARA INTRODUÇÃO ÀS
FUNÇÕES DO LIVRO ABERTO: O CONCEITO DE FUNÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Programa de Pós-
graduação em Matemática PROFMAT
da UNIRIO, como requisito para a
obtenção do grau de Mestre em
Matemática.

Orientador: Gladson Antunes
Doutor em Matemática – UNIRIO
Coorientador: Michel Cambrinha
Doutor em Matemática – UNIRIO

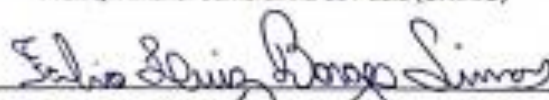
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Gladson Antunes (UNIRIO)



Prof. Dr. Michel Cambrinha de Paula (UNIRIO)



Prof. Dr. Fábio Luiz Borges Simas (UNIRIO)



Prof. Dr. Leonardo Silveira (UFF)

RIO DE JANEIRO – RJ

2020

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

T654 TENORIO PINHEIRO, BRUNO
UMA PROPOSTA DE PLANOS DE AULA PARA
INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES DO LIVRO ABERTO: O CONCEITO DE
FUNÇÃO / BRUNO TENORIO PINHEIRO. -- Rio de Janeiro,
2020.
63

Orientador: GLADSON OCTAVIANO ANTUNES.
Coorientador: MICHEL CAMBRAINHA DE PAULA.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do
Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, 2020.

1. Planejamento de aula. 2. A importância das
Funções. 3. Modelagem Matemática. 4. Garantia de
aprendizagem. I. ANTUNES, GLADSON OCTAVIANO,
orient. II. DE PAULA, MICHEL CAMBRAINHA, coorient.
III. Título.

RESUMO

O ato de planejar é uma atividade que está no dia a dia do professor e exige dele um trabalho de reflexão sobre o processo de ensino aprendizagem. O planejamento de uma aula no ensino da matemática constitui um valioso instrumento para professores e alunos, pois busca antecipar uma reação, por meio de um conjunto de teorias da aprendizagem. Nessa perspectiva buscamos, por meio de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, reflexões, que foram delineando nosso olhar sobre o que é o planejamento de aula como função docente essencial. O Projeto Livro Aberto de Matemática serviu de base teórica para a elaboração dos planos de aula. Sobre o Planejamento, percebemos que o objetivo e a avaliação são características necessárias para que um plano de aula possa atender às expectativas de aprendizagem. A Modelagem Matemática em Três Atos, de Dan Meyer, foi utilizada como uma alternativa não convencional de elaborar questões matemáticas que despertassem o interesse e envolvimento dos alunos nas atividades.

Palavras-chave: Planejamento de aula. A importância das Funções. Modelagem Matemática. Garantia de aprendizagem.

ABSTRACT

The act of Planning is an activity that is in the teacher's daily life and requires him to reflect on the process of teaching and learning. Planning a class in math education is a valuable tool for teachers and students, as it seeks to anticipate a reaction through a set of learning theories. From this perspective, we sought, through a qualitative research of bibliographic nature, reflections, which were delineating our look on what is the planning of the class as an essential teaching function. The Open Book Project of Mathematics, served as theoretical basis for the elaboration of the lesson plans. About Planning, we realize that the goal and assessment are necessary characteristics for a lesson plan to meet learning expectations. Dan Meyer's Mathematical Modeling in Three Acts was used as an unconventional alternative to elaborate mathematical questions that arouse students' interest and involvement in the activities. With this we can propose the Lesson Plans as a revealing instrument of the guarantee of learning.

Keywords: Class planning. The importance of Functions. Mathematical modeling. Guaranteed learning.

LISTA DE FIGURAS

Imagem 1 - Comparação entre o PIB do Brasil e o da Argentina entre 1982 e 2017.....	12
Imagem 2 - Será que vai bater o aro?.....	17
Imagem 3 - Slide Inicial.....	20
Imagem 4 - Representação situação cotidiana.....	21
Imagem 5 - Representação situação cotidiana.....	22
Imagem 6 - Representação situação cotidiana.....	23
Imagem 7 - Representação situação cotidiana.....	23
Imagem 8 - Representação situação cotidiana.....	24
Imagem 9 - Representação situação cotidiana.....	26
Imagem 10 - Representação situação cotidiana.....	26
Imagem 11 - Representação situação cotidiana.....	27
Imagem 12 - Slide Inicial.....	27
Imagem 13 - Representação situação cotidiana.....	28
Imagem 14 - Representação situação cotidiana.....	29
Imagem 15 - Representação situação cotidiana.....	29
Imagem 16 - Representação situação cotidiana	30
Imagem 17 - Representação situação cotidiana	31
Imagem 18 - Representação situação cotidiana	32
Imagem 19 - Representação situação cotidiana	32
Imagem 20 - Representação situação cotidiana	33
Imagem 21 - Representação situação cotidiana	34
Imagem 22 - Representação situação cotidiana	35
Imagem 23 - Representação situação cotidiana	36
Imagem 24 - Representação situação cotidiana	37
Imagem 25 - Representação situação cotidiana	38
Imagem 26 - Representação situação cotidiana	38
Imagem 27 - Slide Inicial.....	39
Imagem 28 - Representação situação cotidiana	40
Imagem 29 - Representação situação cotidiana	41
Imagem 30 - Representação situação cotidiana	41

Imagem 31 - Representação situação cotidiana	42
Imagem 32- Representação situação cotidiana	42
Imagem 33 - Ilustração Quadro Negro	43
Imagem 34 - Representação situação cotidiana	43
Imagem 35 - Representação situação cotidiana	44
Imagem 36 - Representação situação cotidiana	44
Imagem 37 - Representação situação cotidiana	45
Imagem 38 - Representação situação cotidiana	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EPUB	Publicação Eletrônica
HTML	Linguagem de Marcação de Hipertexto
IMPA	Instituto de matemática pura e aplicada
LATEX	Sistema de edição de texto
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PDF	Formato Portátil de Documento

Sumário

INTRODUÇÃO	10
O CONCEITO DE FUNÇÃO.....	11
PROJETO LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA	14
O PLANEJAMENTO DA AULA	15
INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES NO LIVRO ABERTO	17
NOSSA PROPOSTA DE PLANOS DE AULA.....	19
ESTRUTURA DO PLANO DE AULA	21
OS PLANOS DE AULA: EXPLORANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE EXEMPLOS COTIDIANOS	22
Aula 1.....	25
Aula 2.....	34
Aula 3.....	39
Aula 4.....	51
CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
REFERÊNCIAS.....	61

INTRODUÇÃO

A matemática é considerada uma ciência em que a lógica é relacionada a situações habituais, utilizada pelo homem como forma de facilitar e organizar a vida em sociedade. Foi usada por vários povos antigos como os egípcios, babilônios e gregos, possuindo estreita relação com outras ciências, tais como: arquitetura, informática, medicina, química, física, entre outras (SANTOS, 2015). No campo da aprendizagem, a matemática contribui para desenvolver habilidades como criatividade, iniciativa pessoal, capacidade de trabalhar em grupos e resolver problemas, inserindo assim o aluno no mundo da relação social (MIRANDA, 2015).

Segundo Schewtschik (2019), um grande desafio para os professores nos dias atuais é prender a atenção dos alunos para a aula, que não parece ser o melhor lugar para eles. Pensando nisso, é necessário garantir o processo de ensino-aprendizagem, com aulas preparadas e planejadas, de modo a despertar o interesse do aluno pelo conteúdo, tornando-as estimulantes. Dessa forma, o uso de planos de aula é fundamental nesse processo de aprendizagem dos alunos. Além de orientar e organizar o trabalho em sala de aula é, também, um momento de aprendizagem do professor, pois leva à pesquisa, ao estudo e à reflexão. Sem planejamento, não sabemos onde queremos chegar e quais caminhos iremos percorrer (MANSANI, 2017). Dorta e Franco (2013) consideram que ainda hoje, de uma forma geral, o ato de planejar é difícil para alguns professores. Porém, o que há de ser previsto, são as consequências que a falta de planejamento pode trazer para os sujeitos envolvidos.

O livro didático também se coloca como parte fundamental durante o processo de planejamento do professor. Segundo Lajolo (1996), esse fato fica ainda mais evidente no Brasil, “onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele [o livro didático] acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina.” (p.4)

Durante o curso de mestrado tomei conhecimento do Projeto Livro Aberto de Matemática, uma iniciativa que visa o desenvolvimento de livros didáticos de matemática, com licença aberta e produzidos a partir de um trabalho colaborativo envolvendo matemáticos e estatísticos, professores universitários e professores da educação básica. Um dos princípios desse projeto é que os materiais produzidos sejam fortemente baseados em pesquisa científica na área de Ensino de Matemática. A partir de conversas com os professores Michel Cambrainha e Gladson Antunes - que colaboram com o Projeto Livro Aberto de Matemática, elaborando e coordenando a elaboração do livro de Funções - surgiu o meu interesse em desenvolver o trabalho de conclusão de curso sobre esse tema. Os autores têm percebido, a partir de oficinas com professores e estudantes do Ensino Médio e Ensino Superior e do uso do material, que sua adoção por parte da comunidade de professores da educação básica não é trivial. De certa forma, esse é um aspecto já previsto pelo projeto, tendo em vista sua natureza inovadora e o fato do conteúdo ser pautado por atividades. A oferta de planos de aula pode ser um dos caminhos que facilitem a utilização desse material em sala de aula.

Nesse contexto, apresento neste trabalho uma proposta de planos de aula com o objetivo de introduzir o conceito de função, elaborados a partir da primeira metade do capítulo Introdução às Funções, do projeto Livro Aberto de Matemática, escrito pelos professores Gladson e Michel. Este trabalho foi desenvolvido juntamente com o colega Rafael Gustavo que aborda o conceito de gráfico que está na segunda metade do mesmo capítulo do Livro Aberto.

O CONCEITO DE FUNÇÃO

O conceito de função é um dos mais importantes não somente para a matemática, mas para toda a ciência, desde o século XVII. Seus conceitos estão presentes desde a realização das coisas mais simples do nosso cotidiano (ULISBOA, 2000) até nos algoritmos mais complicados dos avanços mais recentes da computação, passando pelas ciências biomédicas e humanas. Esse caráter unificador faz com que esse conceito ganhe destaque no currículo de matemática da escola básica. Contudo, o que se observa em diversos livros

didáticos é uma abordagem superficial e abstrata do conceito seguindo uma tradição que foi apontada por Bourbaki em 1939, que apoia a definição de função em outra definição, a de relação. Assim, uma função é um tipo especial de relação que goza de características específicas (REZENDE & SILVA, 1999).

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f , a um único elemento de B .
Adotaremos a notação $f: A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B .

Fonte: Matemática vol 1. Manoel Paiva. 2ª ed., ed. Moderna, 2010

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

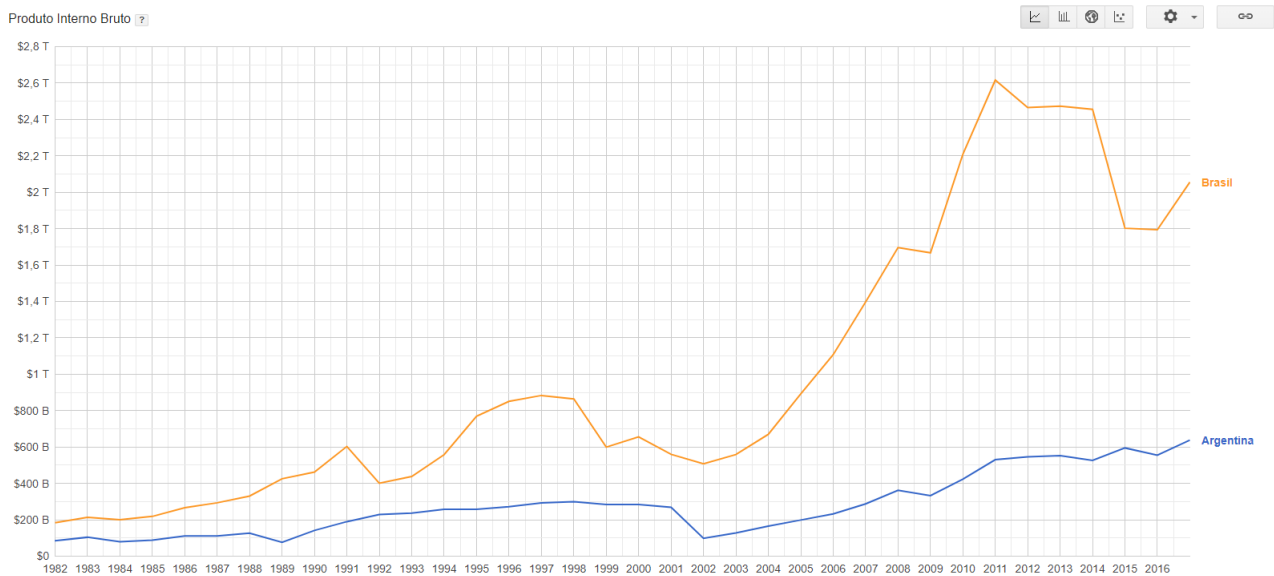
Fonte: Matemática vol único, parte 1. L. Roberto Dante. Projeto Voaz., ed. Ática, 2012

Para a melhor compreensão do conceito de função, é importante que o professor aborde diversas maneiras de interpretá-lo e de representá-lo, bem como ofereça aos estudantes subsídios para que sejam capazes de transitar entre as diversas representações. Silva e Rezende (1999) organizam as definições históricas do conceito de função em três “interpretações básicas”: relação entre quantidades variáveis, relação entre conjuntos (ou correspondência entre elementos) e transformação. Eles destacam que a primeira interpretação tem um caráter dinâmico, que vem da própria maneira como o conceito surge na física quantitativa, em contraponto com o caráter estático que a segunda abordagem apresenta - sendo esta a que podemos identificar de maneira mais presente nos livros didáticos de matemática.

Basicamente o conceito de função nos livros didáticos do ensino básico está apoiado sobre dois tipos de representações principais: algébrica e gráfica. A primeira essencialmente considera as fórmulas ou “leis” de associação entre conjuntos numéricos, enquanto a segunda engloba tabelas, gráficos cartesianos, séries temporais, etc. Ainda assim, há pesquisas que apontam que os estudantes em geral têm dificuldades em fazer conversões entre representações

(SIERPINSKA, 1992, URSINI & TRIGUEIROS, 1992, EISENBERG, 1992). Essa deficiência se torna ainda mais evidente nos dias atuais em que há um grande volume de dados que precisa ser tratado e, em boa parte dos casos, a visualização permite extrair informações importantes sobre as variáveis envolvidas.

Imagem 1- comparação entre o PIB do Brasil e o da Argentina entre 1982 e 2017.



Fonte: www.google.com/publicdata.

Os livros didáticos para a Educação Básica abordam o assunto na maioria das vezes de forma abstrata, deixando à margem possíveis aplicações do cotidiano, voltados para o contexto do aluno. O Projeto Livro Aberto de Matemática, representa uma contribuição para elaboração dos conceitos matemáticos, com uma sequência didática que conduz o aluno ao domínio progressivo de um determinado assunto. O layout dos capítulos é atrativo, instigando a curiosidade e o desejo de aprender, um ótimo artifício para alunos com desejo de conhecimento e para professores que queiram um material diferenciado, pensado por professores, para professores e alunos.

PROJETO LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA

Conforme descrito por Fábio Simas, um dos idealizadores do Projeto Livro Aberto de Matemática e Leticia Rangel (SIMAS E RANGEL, 2019), o Projeto Livro Aberto de Matemática¹ é uma iniciativa da OBMEP/IMPA que objetiva produzir materiais didáticos para o ensino de Matemática, com licença aberta (*Creative Commons BY-SA*²), a partir de um trabalho colaborativo envolvendo professores do ensino superior de Matemática e de Estatística e professores da Educação Básica. As principais características dos materiais produzidos no âmbito do projeto são (i) proposta pedagógica ancorada e acompanhada por pesquisa científica em Ensino de Matemática; (ii) está conectada e reconheça os saberes advindos da prática da Educação Básica; (iii) contribua para a formação e o desenvolvimento profissional de professores e (iv) aponte avanços no uso de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Em particular, destaca-se o entendimento do potencial do projeto para enfrentar um reconhecido desafio do ensino de Matemática: estreitar o diálogo entre a realidade, as demandas próprias da prática docente e a formação acadêmica do professor. O próprio desenvolvimento desse trabalho pode ser visto como uma comprovação de tal potencial.

Todo o material desenvolvido está disponível em uma plataforma digital, desenvolvida exclusivamente para o projeto. Além disso, esse ambiente virtual dá apoio ao processo de elaboração do livro, oferece acesso público ao material à medida que está sendo elaborado, permite que visitantes façam sugestões de alteração e que criem suas próprias versões do livro. O material disponível pode ser acessado pelos visitantes em PDF, HTML ou em código LaTeX e toda comunidade pode colaborar postando considerações sobre os resultados obtidos do uso em sala de aula, correções, comentários e também produzindo conteúdo.

A redação do livro, composto pelo *livro do aluno* e pelo *manual do professor*, é feita simultaneamente pelo grupo de professores participantes, identificados como autores. O *livro do aluno* é organizado por temas em capítulos.

¹ <https://www.umlivroaberto.com/wp/>

² <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/br/>, garante direito de visualização, distribuição e derivação do material, exigindo-se a atribuição e que o material derivado tenha a mesma licença.

O *manual do professor*, diferente do que é tradicionalmente observado nos livros didáticos brasileiros, é entrelaçado ao texto destinado ao aluno.

No processo de elaboração de cada capítulo, estão previstos: (i) a *realização de oficinas* que envolvam professores da Educação Básica. Essas oficinas têm como objetivos oferecer aos autores uma avaliação preliminar do material, incluindo o texto destinado ao professor e contribuir para a formação continuada; (ii) a *revisão* por professores de Matemática de diversas regiões do Brasil do Ensino Superior e da Educação Básica, que não sejam vinculados ao projeto, com a finalidade de avaliar e revisar o material e oferecer um panorama da percepção do material pela comunidade; (iii) testes do material em salas de aula de escolas públicas do país. Esses testes prevêm uma avaliação crítica realizada pelos alunos e professores diretamente envolvidos. Assim, são esperadas sugestões, identificação de eventuais dificuldades no uso do livro, indicação de correções, etc. (SIMAS E RANGEL, 2019)

O PLANEJAMENTO DA AULA

Segundo Veiga (2008, p.267), “a aula, lugar privilegiado da vida pedagógica, refere-se às dimensões do processo didático – ensinar, aprender, pesquisar e avaliar – preparado e organizado pelo professor e seus alunos”. É onde ocorre o processo de ensino aprendizagem, cujo o qual o professor transmite aos seus alunos conhecimentos específicos, experiências de vida e meios para a construção de seu próprio conhecimento.

Ao planejar uma aula, o professor deve se atentar para quais os objetivos daquela aula, e para o que é de grande relevância naquele momento. A estrutura didática do plano de aula tem como finalidade proporcionar um trabalho bem elaborado para a transmissão de conhecimentos, assim, proporcionando maior direcionamento do processo e uma orientação mais eficaz para os alunos (SOUZA, 2013).

Os planejamentos de aula são compostos por itens que possuem especificidades que devem ser consideradas: os objetivos, os conteúdos, os

métodos de ensino e a avaliação. De acordo com Schewtschik (2017, p.10666), os objetivos são assim definidos:

Os objetivos são caracterizados por verbos no infinitivo e designam o produto final da nossa aula, aquilo que queremos que seja aprendido; precisam expressar a habilidade que será desenvolvida naquela aula e a razão pela qual ela deve ser desenvolvida.

Não há prática educativa sem objetivos, uma vez que estes integram o ponto de partida, as premissas gerais para o processo pedagógico (LIBÂNEO, 1994 apud SOUZA, 2013). Ou seja, os objetivos são o foco da atividade pedagógica, ele orienta a prática docente, sem estes essa prática não existiria.

Outro item essencial ao planejamento da aula é o conteúdo a ser ensinado. Segundo Libâneo (2013, apud SCHEWTSCHIK, 2017, p.10667),

os conteúdos são um conjunto de conhecimentos, habilidades, hábitos, modos valorativos e atitudinais de atuação histórico-social, organizados pedagogicamente e didaticamente em matérias de ensino, tendo em vista o processo de construção do conhecimento pelos alunos e suas relações com o contexto vivido.

Os conteúdos devem incluir vivência dos alunos para se tornarem mais significativos, de modo que os alunos possam assimilá-los de forma consciente e não representar uma mera seqüência lógica a ser transmitida.

Para que se atinja os objetivos do trabalho docente em relação aos conteúdos específicos, é necessário encontrar caminhos, que são os métodos de ensino.

Araújo (2008) diz

que Ela [a aula] é feita de prévias e planejadas escolhas de caminhos, que são diversos do ponto de vista dos métodos e técnicas de ensino; [...] também se constrói, em sua operacionalização, por percalços, que implicam correções de rota na ordem didática, bem como mudanças de rumo; [...] está sujeita a improvisos, porque não foram previstos, mas não pode constituir-se por improvisações (ARAÚJO, 2008, p.60-62).

O ensino deve ser direcionado em busca da aprendizagem, do melhor caminho a ser percorrido, refletindo no planejamento de aula as escolhas determinadas, não deixando de considerar os improvisos, mas não se baseando somente neles.

E por fim, para um bom planejamento, temos a avaliação. A avaliação no plano de aula é a última etapa da aula, momento em que o professor irá verificar se os objetivos foram atingidos. Segundo Libâneo (2013 apud SCHEWTSCHIK, 2017), a avaliação está diretamente ligada aos objetivos de aprendizagem, é por meio dela que se tem maior clareza do que se quer atingir, permitindo inclusive um replanejamento das ações.

“A avaliação é concebida como processo/instrumento de coleta de informações, sistematização e interpretação das informações, julgamentos de valor do objeto avaliado através das informações tratadas e decifradas. (...) A avaliação cruza o trabalho pedagógico desde seu planejamento até a sua execução, coletando dados para melhor compreensão da relação entre o planejamento, o ensino e a aprendizagem e poder orientar a intervenção didática para que seja qualitativa e contextualizada” (SILVA, 2003).

O plano de aula é um documento no qual o professor, ao planejar o que será lecionado, registra qual o tema da aula, qual objetivo dela, a metodologia que será utilizada, como irá avaliar o aprendizado dos alunos, as referências bibliográficas e muitas outras informações. É através do plano de aula e suas propriedades que ocorre o diferencial importante para guiar o aprendizado dos estudantes, além de levar o professor à reflexão e à pesquisa.

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES NO LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA

O Capítulo Introdução às Funções no Livro Aberto de Matemática foi concebido com o objetivo de desenvolver nos estudantes as seguintes habilidades:

(LAF1) Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

(302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

As habilidades (302) e (404) fazem parte da versão final da BNCC e a (LAF1) é uma habilidade proposta pela equipe de desenvolvimento do Projeto Livro Aberto de Matemática.

Os capítulos do Livro Aberto são estruturados em seções denominadas *explorando*, *organizando* e *praticando*. Nosso foco neste trabalho recai sobre a primeira metade do capítulo de Introdução às Funções, que é dedicada à introdução do conceito de função. Nosso objetivo é apresentar uma proposta de plano de aula contemplando o conteúdo dessa parte do capítulo. Esse trabalho complementa o trabalho desenvolvido pelo colega Rafael Gustavo, que aborda a segunda parte do capítulo.

O assunto é tratado de forma intuitiva no material e faz o leitor reconhecer em diversas situações cotidianas, matemáticas ou não, as ideias fundamentais para a construção do conceito de função.

O capítulo combate alguns dos principais distratores relacionados com o assunto e apontados pelas pesquisas científicas da área de Ensino e Educação Matemática, a saber: fazer a ligação entre as diferentes representações de funções (fórmulas, gráficos, diagramas, descrição por palavras); interpretar gráficos, manipular expressões algébricas e reconhecer os diferentes papéis que as variáveis (letras) representam nas expressões algébricas.

NOSSA PROPOSTA DE PLANOS DE AULA

Os Planos de Aula propostos no presente trabalho são baseados no Capítulo de Introdução às Funções, voltado para o Ensino Médio e desenvolvido para o Projeto Livro Aberto de Matemática. A metodologia da Modelagem Matemática em Três Atos, de Dan Meyer, foi usada como inspiração e não vai ser seguida em sua integralidade.

Segundo Dan Meyer, o ensino da matemática precisa ser reformulado. Os livros, em especial os de matemática propõem questões semelhantes, mudando apenas um dado ou outro, tornando-as repetitivas e transformando o ensino da matemática em algo pouco estimulante.

O currículo de matemática de hoje está ensinando os alunos a decodificar um livro-texto, tirando dos alunos a habilidade de formular o problema. A proposta de Dan Meyer através dos três atos é encorajar a intuição dos alunos, para que os mesmos procurem ferramentas para "desvendar aquele problema" e não buscar uma fórmula somente.

O exemplo a seguir ilustra a proposta de Dan Meyer, onde num primeiro momento os alunos são instigados a prever se o arremesso de uma bola de basquete, em direção à cesta, será ou não assertivo com base apenas em uma imagem e intuição. Num segundo momento, analisam a foto usando modelagem quadrática e atualizam suas previsões, obtendo a resposta, por fim (BLOGDANMEYER, 2016).

Imagem 2: Será que vai bater no aro?



Fonte: Blog.mrmeyer, 2016.

Em seguida descrevemos os três atos que mostram como construir atividades que engajam e colocam o aluno como ator principal:

Ato Um: O primeiro ato tenta diminuir as barreiras à entrada. É visual e requer pouca alfabetização do aluno (MEYER, 2013). É nesse momento que se abre espaço para que os alunos façam perguntas sobre a atividade apresentada. Os alunos são convidados a estimar uma resposta correta e a decidir como seria uma resposta incorreta.

Ato Dois: O protagonista/aluno supera obstáculos, procura recursos e desenvolve novas ferramentas. No segundo ato, o educador deixa que o aluno procure recursos para resolver seus conflitos, é quando o professor "pressiona" o aluno para esclarecer exatamente o que estão buscando (MEYER, 2013). As ferramentas utilizadas neste segundo ato foram geradas no primeiro ato, com a ajuda do professor, ao mostrar suas necessidades.

Ato Três: O terceiro ato compensa o trabalho duro do segundo ato e a motivação do primeiro. Em geral, o terceiro ato é onde a matemática é formalizada e

consolidada. É nesse momento que o aluno recebe a resposta e reconhece possíveis fontes de erro, podendo explicá-las com modelos melhores e mais novos. (MEYER, 2013).

ESTRUTURA DO PLANO DE AULA

Os planos de aula foram estruturados com atividades do Livro Aberto de Matemática. Tais atividades englobam diferentes representações de funções, entre elas gráficos, tabelas, diagramas e representações algébricas. As atividades como “Ação Promocional”, disposta no Livro Aberto de Matemática, uniram a linguagem utilizada no meio virtual, de fácil compreensão com a linguagem matemática, tornando o aprendizado mais “suave”.

Linguagem algébrica, expressar a relação entre grandezas, modelar situações - problema, construir modelos descritivos de fenômenos e estabelecer conexões dentro e fora da matemática são questões que têm espaço nos materiais propostos pelo Livro Aberto de Matemática e dispostos nos planos de aulas, podendo ser explorados pelo professor em sala de aula de forma a colaborar com a integração do conceito de funções e suas diversas representações.

Para o plano de aula, inicialmente foram organizadas as ideias apresentando o conceito de função num primeiro momento, passando pelo reconhecimento de uma relação de dependência entre grandezas a partir da sua representação gráfica e interpretação de tabelas que representam relação de dependência entre variáveis. Seguindo o estudo, num segundo momento, foram utilizadas atividades exploradoras com o intuito de identificar a definição do conceito de função através da resolução de problemas. Foi abordado o reconhecimento de dependência de variáveis em diagrama de flechas, como também em um plano cartesiano, além de distinguir que nem toda relação é uma função em diferentes contextos.

OS PLANOS DE AULA: EXPLORANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE EXEMPLOS COTIDIANOS

No Livro Aberto de Matemática, o capítulo se inicia com três atividades que visam destacar as ideias fundamentais da noção de função. O objetivo comum dessas atividades é o reconhecimento das relações de dependência entre as grandezas envolvidas nas diferentes situações, bem como as formas de representação de suas variações.

O capítulo é extenso e faz com que o professor naturalmente tenha que selecionar algumas das atividades propostas, adequando-se ao tempo em sala de aula e a realidade da turma. A partir da nossa experiência, julgamos mais adequado iniciar o assunto com imagens cotidianas que mostrassem alguma relação com o conceito de função e, a partir delas, suscitar discussões que favoreçam a formalização do conceito de função, que será definido na aula 1(um).

As atividades selecionadas foram: “Arranha – céu”, “Pluviometria no sistema Cantareira”, “Colorindo o mapa”, “É função?”, “A família”, “Enchendo o cone”, “Uniformemente variado”, que através de sua relação com o cotidiano facilita a compreensão do conceito de função e também na interação com outros alunos, através dos seus questionamentos, que pode ser trabalhados em grupos.

As atividades citadas acima foram nomeadas nos planos de aula como: Atividade disparadora, atividade exploradora e atividade avaliadora, visando nortear o docente sobre cada parte da construção do processo de ensino - aprendizagem do aluno.

As atividades definidas como disparadoras têm como finalidade incentivar o interesse do aluno pelo conteúdo proposto, já as atividades exploradoras visam, de maneira ativa, que o aluno participe de forma individualizada ou em grupo da construção do conceito abordado e as atividades avaliadoras se destinam aos docentes, a fim de verificar se o conceito abordado foi assimilado de maneira significativa pelos discentes.

Os planos de aula serão disponibilizados nos formatos PDF e PPTX, neste último contendo orientações e sugestões que



podem nortear o docente durante a exposição da aula. (acesse clicando neste [link](#)³ ou pelo código QR ao lado).

Neste trabalho, os planos de aulas serão apresentados com os slides e as suas respectivas orientações e sugestões e serão subdivididos por aulas, de acordo com o quadro abaixo:

Aula	Slide	Atividade	Tempo (50 minutos)
Aula 1	1	Objetivo	2
	2	Situação cotidiana 1	
	3	Situação cotidiana 2	
	4 - 5	Atividade disparadora	
	6	Discussão da solução	
	7 – 8	Atividade avaliadora	
	9	Discussão da solução	
Aula 2	1	Objetivo	2
	2	Experimento 1	
	3	Definição de função	
	4	Experimento 2	
Aula 3	1	Objetivo	4
	2 - 5	Atividade disparadora	
	6	Discussão da solução	
	7 - 8	Atividade exploradora 1	
	9	Discussão da solução	
	10	Atividade exploradora 2	
	11	Discussão da solução	
	12	Atividade avaliativa 1	
	13	Discussão da solução	
	14	Atividade avaliativa 2	
15	Discussão da solução		
Aula 4	1	Objetivo	
	2	Atividade exploradora	

³ <https://drive.google.com/drive/folders/1cFIMeLfefxnpvXfHFiCbZJZM6ttjbHV?usp=sharing>

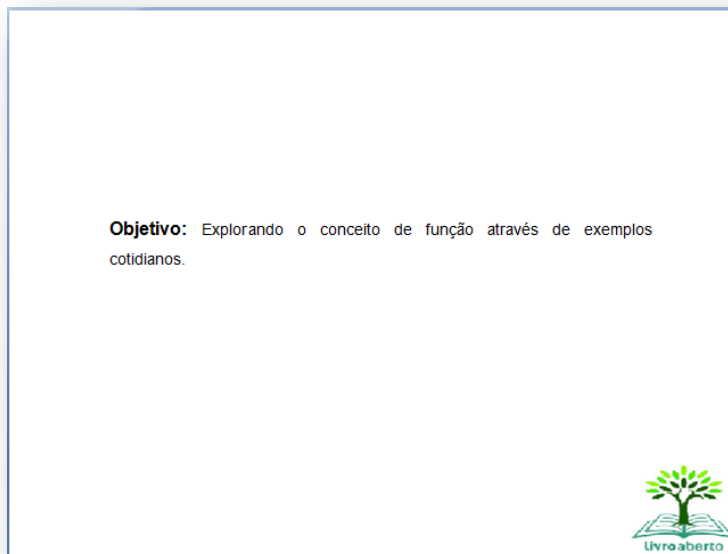
	3	Discussão da solução	2
	4 - 5	Atividade avaliativa	
	6	Discussão da solução	

O conjunto de planos de aula que será abordado abaixo foi construído a partir do seguinte planejamento:

<p>Habilidade da BNCC</p> <p>EM11MT06 - Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.</p> <p>EF09MA06 - Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.</p>
<p>Objetivos Específicos</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Interpretar representações gráficas de relações de dependência entre grandezas; ● Reconhecer uma relação de dependência entre grandezas a partir da sua representação gráfica; ● Reconhecer a univocidade em uma relação de dependência entre grandezas.
<p>Conceito-chave</p> <p>Relação de dependência, a existência de correspondência e a univocidade.</p>
<p>Conhecimentos que a turma deve dominar</p> <p>Apontar a variação de grandezas que sejam diretamente proporcionais e resolver situações-problemas, envolvendo o conceito de proporcionalidade direta usando diferentes estratégias.</p>

Recursos necessários

Caneta, Lápis, papel e borracha.

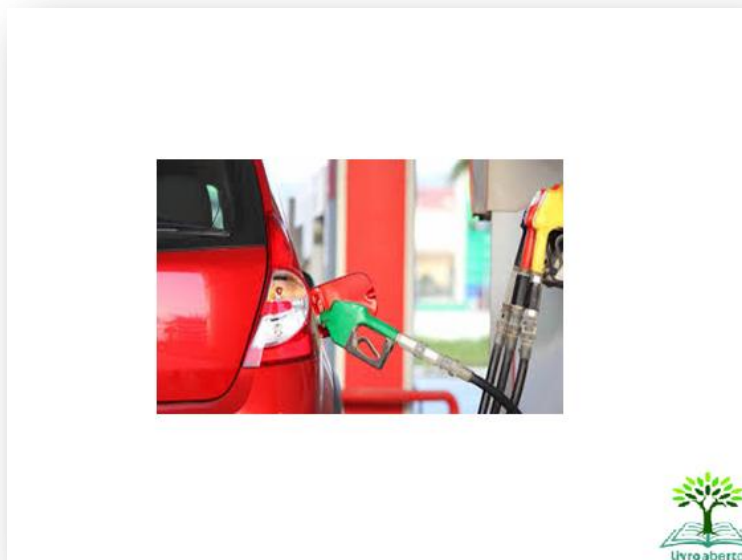
Aula 1**Imagem 3: Slide Inicial**

Fonte: Própria, 2019.

Situação Cotidiana 1	
Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Aborde com a sua turma os exemplos citados nos slides e faça com que eles desenvolvam o raciocínio sobre a dependência de variáveis, observando como a variação de uma ou mais grandezas afeta a variação de outras.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> • Ao abastecer um automóvel num posto de combustíveis, como saber se o valor a pagar mostrado no

	<p>visor da bomba de combustível é o correto?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Quais as grandezas estão se relacionando? • Existe uma dependência de uma variável em relação a outra?
--	---

Imagem 4: Representação - Situação cotidiana

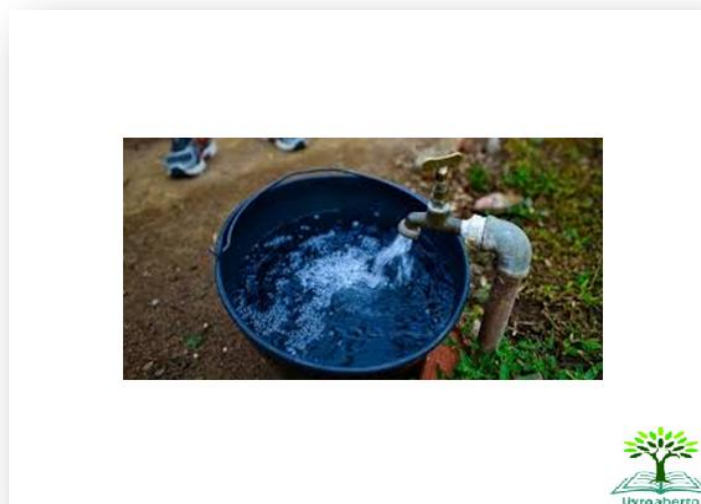


Fonte: Blogrodobens, 2016.

Situação Cotidiana 2	
Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Aborde com a sua turma os exemplos citados nos slides e faça com que eles desenvolvam o raciocínio sobre a dependência de variáveis, observando como a variação de uma ou mais grandezas afeta a variação de outras.

Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none">• Ao abrir uma torneira, como saber o tempo necessário para que seja possível encher todo o balde?• Quais as grandezas estão se relacionando?• Existe uma dependência de uma variável em relação a outra?
---------------------	---

Imagem 5: Representação - Situação cotidiana



Fonte: Época, 2014.

Atividade Disparadora 1	
Tempo	20 minutos.

sugerido	
Orientação	A escolha dessa atividade se apoia no fato de que os estudantes têm familiaridade com a noção de proporcionalidade, que é explorada em álgebra e em geometria, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Deseja-se, entretanto, que os estudantes levem em conta o contexto do problema.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Existe outra estratégia que possa ser utilizada? ● Na relação entre as variáveis “andar” e “altura”, é possível perceber que uma variável é dada em função da outra? ● É possível estabelecer alguma lei de formação?
Propósito:	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer uma relação de dependência entre variáveis apresentada em forma de tabela. ● Interpretar tabela que representa relação de dependência entre variáveis.

Imagem 6: Representação – Atividade disparadora

Arranha - céu

Imagine um arranha-céu de 4040 andares cujas diferentes alturas que correspondem a alguns andares estão representadas na tabela abaixo.

Número do Andar	Garagem (0)	1	2	3	4		10		
Altura (metros)	-1	3	7	11	15				91

Considere que a altura de um andar é medida a partir do nível da rua até o piso desse andar e que a altura entre os andares seja sempre a mesma, conforme o esquema do próximo slide.



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 7: Representação – Atividade disparadora



- Qual a altura entre os andares?
- Qual a altura do 10º andar?
- O que significa o sinal negativo do andar da garagem?
- A que andar corresponde a altura de 91 m?
- Qual é a altura total desse prédio?
- Realize uma pesquisa na internet e descubra o maior arranha-céu brasileiro atualmente. Dividindo a altura total desse arranha-céu pela quantidade de andares, determine a altura média de um andar.



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 1

Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Após os alunos trocarem as estratégias entre eles, discuta com os alunos a relação existente da altura de um andar para o outro e o andar desejado do prédio , após indague-os se há alguma lei de formação que fornecerá a altura em que se está de acordo com o andar.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> • Peça que os alunos apresentem suas respostas, comparem com a de outros colegas; • Como podemos representar essa situação num diagrama?
Propósito:	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar a relação entre grandezas e a dependência entre elas.

Imagem 8: Representação – Discussão da solução

a) 4 metros.


b) 39 metros.

c) Significa que a garagem está abaixo do nível da rua.

d) 23º andar.

e) O 40º andar está localizado a 159 metros do solo, e como cada andar possui altura 44 metros, a altura total do prédio é 163 metros.

f) A resposta depende do período em que a pesquisa for realizada. Em setembro de 2017 o maior arranha-céu brasileiro é o Millennium Palace, localizado em Balneário Camboriú, Santa Catarina, com 177 metros de altura e 46 andares.



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade Avaliadora 1

Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	De forma individual, peça que os alunos façam a análise do gráfico proposto e solicite que eles respondam o questionário proposto após a análise gráfica. Em seguida, discuta com a turma, lembrando o conceito de proporcionalidade e dispondo-se para inserir o conceito de dependência de variáveis. Em seguida, deixe que discutam com um colega suas soluções. Disponha 10 minutos para um debate coletivo e deixe que as duplas compartilhem o que foi discutido.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● A turma percebeu alguma relação de dependência? ● De que forma podemos interpretar a relação de dependência das variáveis?
Propósito:	<ul style="list-style-type: none"> ● Interpretar representações gráficas de relações de dependência entre grandezas; ● Reconhecer uma relação de dependência entre grandezas a partir da sua representação gráfica; ● Reconhecer a univocidade em uma relação de dependência entre grandezas.

Pluviometria no Sistema Cantareira

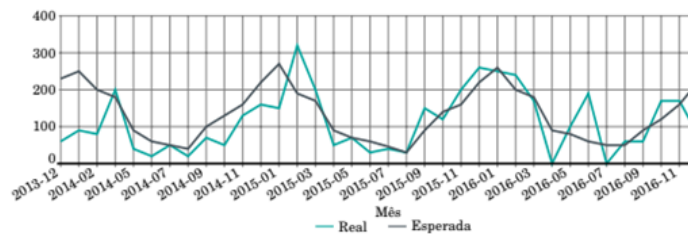
As chuvas são a principal fonte de água para os reservatórios que abastecem as grandes cidades. Com base em dados passados, constrói-se uma média mensal esperada de chuvas. Em períodos em que a chuva real é menor do que o esperado pode-se observar uma diminuição da quantidade de água armazenada no sistema.

O gráfico a seguir apresenta a variação pluviométrica (em milímetros) da chuva real e da chuva esperada no Sistema Cantareira, que abastece a região metropolitana de São Paulo, no período de dezembro de 2013 (2013-12) a novembro de 2016 (2016-11).



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 10: Representação – Atividade avaliadora



De acordo com o gráfico acima:

- Que grandezas estão sendo relacionadas?
- Em que mês e ano houve a maior incidência de chuvas? E a menor?
- Em que período(s) a diferença entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade real de chuva superou 100mm?
- Houve algum mês em que não foi registrada chuva na região do Sistema Cantareira?
- O que pode ser observado nos meses de agosto de 2015 e março de 2016?



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 2

Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Sugira aos alunos que leiam a atividade e a realizem de forma individual. Dê um tempo razoável para que eles respondam as perguntas e peça que eles compartilhem suas respostas com a turma. A atividade avaliadora é um momento para se avaliar os alunos a fim de verificar se os mesmos tiveram êxito na aprendizagem do determinado conceito.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> • Peça que os alunos apresentem suas respostas e comparem com a de outros colegas; • Como podemos representar essa situação num diagrama?
Propósito:	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar a relação entre grandezas e a dependência entre elas.

Imagem 11: Representação – Discussão da solução


a) Há duas relações: uma envolvendo tempo e volume de chuva real e a outra tempo e o volume de chuva esperado.

b) De acordo com os dados apresentados no gráfico, a maior e a menor incidência de chuvas ocorreram em fevereiro de 2015 e em abril de 2016, respectivamente.

c) Em dezembro de 2013, janeiro e fevereiro de 2014, janeiro e fevereiro de 2015 e junho de 2016.

d) Sim, nos meses de abril e julho do ano de 2016.

e) Houve uma coincidência entre a quantidade de chuva esperada e a que realmente caiu sobre a região do Sistema Cantareira.



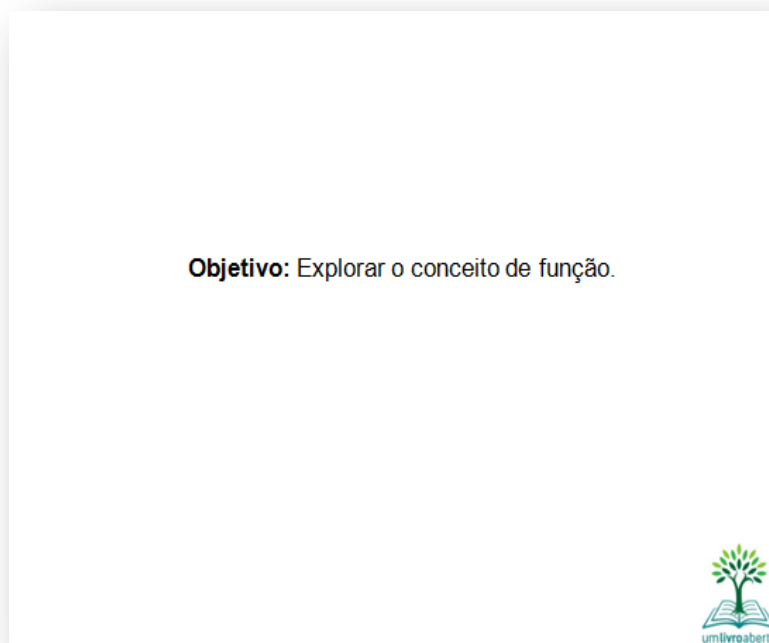
Fonte: Livro Aberto, 2017.

Tempo	05 minutos.
-------	-------------

sugerido	
Objetivo	Aplicar o conceito de função através da resolução de exercícios.
Orientação	Projete ou leia.
Propósito:	<ul style="list-style-type: none"> • Explorar com os alunos a definição do conceito de função através da resolução de problemas.

Aula 2

Imagem 12: Slide Inicial

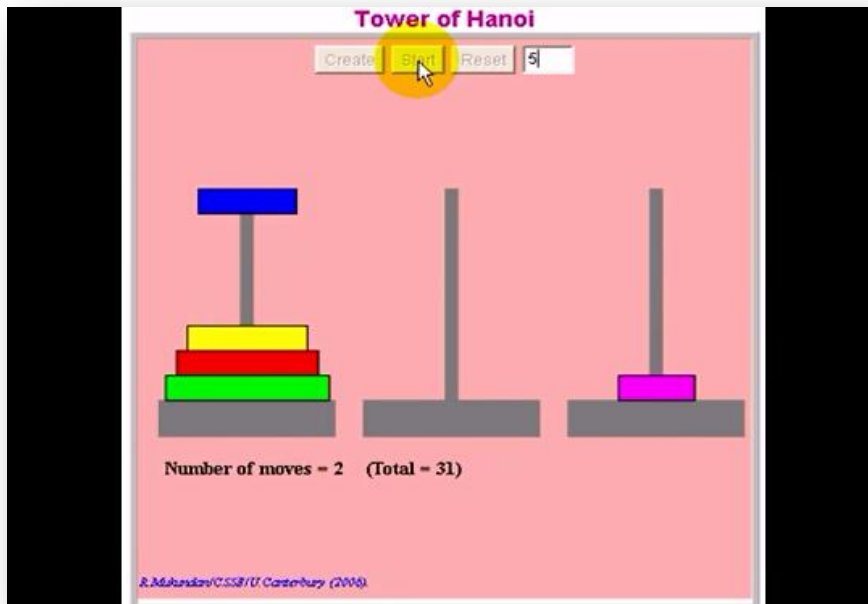


Fonte: Próprio, 2019.

Experimento 1	
Tempo sugerido	20 minutos.

Orientação	<ul style="list-style-type: none">• Aborde com a sua turma o experimento abordado no vídeo faça com que eles desenvolvam o raciocínio sobre a dependência de variáveis, observando como o número de discos está relacionado com o número mínimo de movimentos.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none">• As regras propostas no jogo da “torre de hanói”.• Existe uma dependência de uma variável em relação a outra e quais são essas variáveis?• É possível representar esta relação através de diagramas?
OBS	<ul style="list-style-type: none">• Peça a turma um voluntário para mostrar no quadro branco esse experimento através de diagramas, nomeando os conjuntos envolvidos.• É possível sintetizar o experimento por uma fórmula algébrica?

Imagem 13: Slide Inicial



Fonte: You tube, 2019.

Definição de função	
Tempo sugerido	30 minutos.
Orientação	Defina com a sua turma o conceito de função usando como referência o experimento abordado no vídeo. Defina os dois conjuntos que representaram as variáveis: “o número de discos o número mínimo de movimentos”, fazendo as correspondência necessárias.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Utilizando o diagrama que o aluno fez no quadro, defina com a turma, o conjunto que representa o número de discos por A e o conjunto que representa o número mínimo de movimentos por B. ● Pergunte a turma se existe a possibilidade de ser ter

	<p>duas quantidades distintas de discos com o mesmo número mínimo de movimentos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Faça a definição formal de funções, usando a linguagem de conjuntos. • Construa com turma, a relação entre as variáveis relacionadas de forma recursiva. • Pergunte a turma, se é possível estabelecer uma fórmula fechada, envolvendo as variáveis “n° de discos e n° mínimo de movimentos”.
--	--

Imagem 14: Representação - Definição de função



Experimento 2	
Tempo sugerido	20 minutos.

Orientação	<p>Oriente a sua turma a perceber que o experimento mostrado no vídeo envolve o conceito de função. Peça que eles interpretem o experimento, utilizando um diagrama de conjuntos, envolvendo as grandezas “tempo decorrido e espaço percorrido” e que compartilhe com os seus colegas todas as situações percebidas por eles no experimento.</p>
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Pergunte-os sobre quais as variáveis envolvidas no experimento. ● Questione-os sobre a possibilidade de se ter o mesmo espaço percorrido em tempos decorridos distintos. ● Peça que eles definam a função abordada, usando as grandezas envolvidas no experimento, utilizando diagramas. ● Questione-os, sobre a possibilidade de ter uma lei de correspondência entre as grandezas tempo decorrido e espaço percorrido.

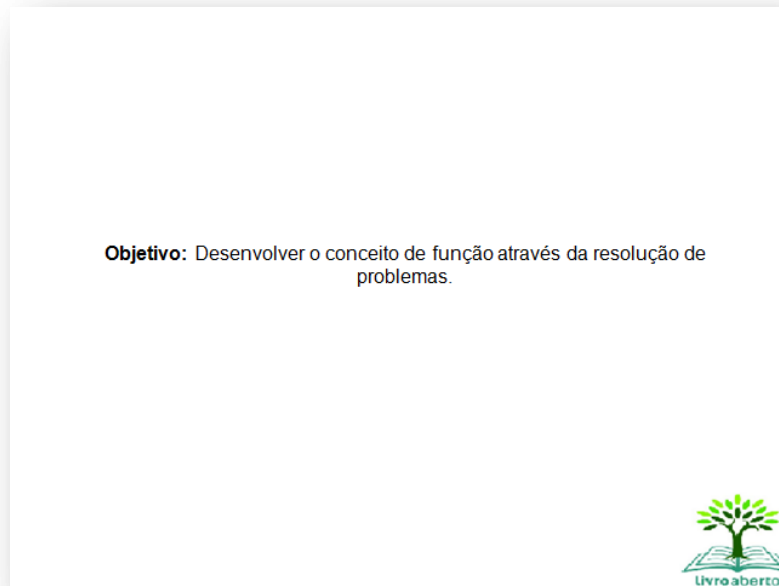
Imagem 15: Representação – Experimento 2



Fonte: You tube, 2019.

Aula 3

Imagem 12: Slide Inicial

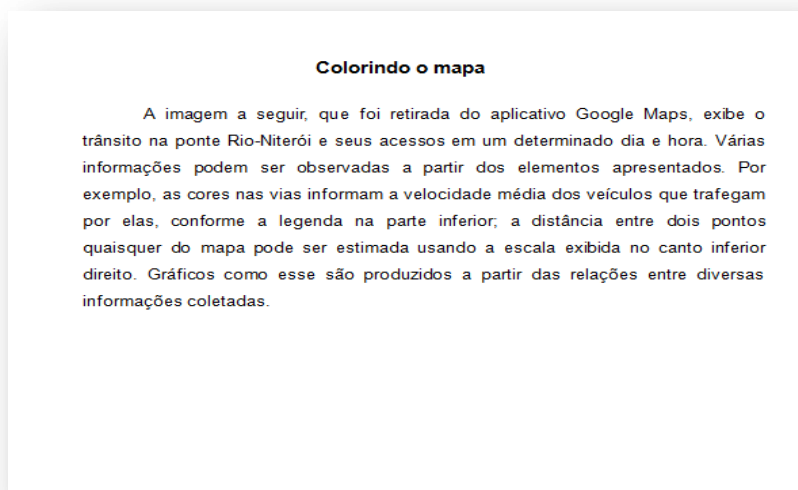


Fonte: Próprio, 2019.

Atividade Exploradora 1	
Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	<p>Nem todos os estudantes vão usar o mesmo critério para a distribuição das cores. Incentive-os a usarem as quatro cores e, no momento da discussão do item (b), chame a atenção para o fato de não haver uma única resposta correta para o item (a).</p> <p>Deixamos a seu critério a escolha da unidade para a velocidade média. Os valores obtidos em km/min podem causar certa estranheza, uma vez que na maioria das situações cotidianas a velocidade é apresentada em km/h.</p> <p>Caso haja tempo, aproveite para fazer uma breve discussão sobre como a Matemática está em diferentes ferramentas</p>

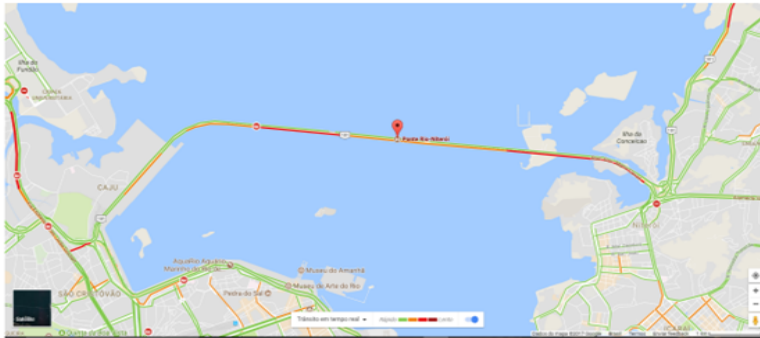
	tecnológicas que facilitam o nosso dia a dia, como o Google Maps®.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Pergunte-os se eles sabem como associar o tamanho real com o tamanho exposto no mapa dado, usando a escala adotada; ● Peça que eles identifiquem as diferentes relações de dependência entre os conjuntos dados; ● Pergunte-os sobre a univocidade (ou não) de uma relação. ● Toda relação entre duas grandezas é uma função? ● É sempre possível estabelecer a relação entre duas grandezas por uma lei de associação?

Imagem 13: Representação – Atividade exploradora



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 14: Representação – Atividade exploradora



A tabela a seguir mostra os dados coletados sobre o tempo gasto pelos veículos (em média) para atravessar a ponte, ao longo de um dia.

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 15: Representação – Atividade exploradora

Período do Dia	Tempo (min)	Cor	Velocidade Média (km/min)
5:00 - 7:00	13		
7:00 - 9:00	18		
9:00 - 11:00	15		
11:00 - 13:00	15		
13:00 - 15:00	16		
15:00 - 17:00	16		
17:00 - 19:00	23		
19:00 - 21:00	14		
21:00 - 23:00	13		

a) Tomando como referência a ilustração anterior e utilizando a escala de cores a seguir, complete a terceira coluna da tabela com a cor que a ponte deveria estar colorida em cada período do dia destacado. Descreva os critérios que você utilizou na escolha de cada uma das cores e compare com os critérios dos seus colegas.

RÁPIDO verde laranja vermelho marrom LENTO

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 16: Representação – Atividade exploradora

- b) Você precisou associar uma mesma cor para para períodos diferentes do dia. Por quê?
- c) Sabendo que a ponte Rio-Niterói tem aproximadamente 13 km de extensão complete a quarta coluna da tabela com a velocidade média registrada em cada um dos períodos do dia.
- d) É possível que uma mesma velocidade média esteja associada a dois tempos de travessia diferentes? Por quê?

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 3	
Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Peça aos alunos para compartilharem as suas respostas com outros colegas e que discutam diferentes tipos de respostas.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Indague-os sobre quais as grandezas envolvidas na relação; ● É possível representar essa situação em um diagrama de flecha?

Imagem 17: Representação – Discussão da solução

- a) Uma resposta possível é: associar a cor verde aos tempos de 13 e 14 minutos, a cor laranja aos tempos de 15 e 16 minutos, vermelha ao tempo de 18 minutos e a cor vinho ao tempo de 23 minutos.
- b) Isso se deu pelo fato de haver somente 4 cores disponíveis e, na tabela, haver 6 tempos diferentes de travessia.
- c) A velocidade média é determinada pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. Assim, os valores das velocidades médias nos diferentes períodos do dia são, pela ordem em que aparecem na tabela: 1,00 km/min, 0,72 km/min, 0,87 km/min, 0,87 km/min, 0,81 km/min, 0,81 km/min, 0,56 km/min, 0,93 km/min e 1,00 km/min.
- d) Não. Como a velocidade média é calculada efetuando-se a divisão da distância percorrida pelo tempo gasto no percurso, uma vez que o trecho considerado é o mesmo, diferentes tempos de travessia da ponte irão resultar em velocidades médias diferentes.

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade Exploradora 2	
Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	Esta é a oportunidade para reforçar as condições que garantem que uma relação é função, em particular, a univocidade.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> ● Existe outra estratégia que possa ser utilizada? ● Na relação entre as variáveis “tempo”, “cor” e “velocidade” é possível perceber que uma variável é dada em função da outra, ou não? ● É possível estabelecer alguma lei de formação?
Propósito	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer uma relação de dependência entre variáveis apresentadas em forma de diagrama de flechas; ● Mostrar que nem toda relação é uma função.

Imagem 18: Representação – Atividade exploradora

É função?

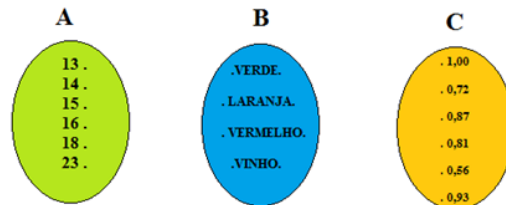
Na atividade anterior, observam-se diferentes relações entre os dados. Por exemplo, para cada tempo de travessia é possível associar uma única cor e uma única velocidade média. Da mesma maneira, a cada velocidade média está associada uma única cor e um único tempo de travessia. No entanto, a uma mesma cor é possível associar tempos diferentes e velocidades médias diferentes.

Nesse contexto são observados diferentes conjuntos de dados: O conjunto dos tempos de travessia da ponte, $A = \{ 13, 14, 15, 16, 18, 23 \}$; O conjunto das cores que compõem a escala, $B = \{ \text{VERDE, LARANJA, VERMELHO, VINHO} \}$; e o conjunto de velocidades médias obtidas designado por C. Considerando as diferentes relações de dependências estabelecidas entre esses conjuntos. Quais delas são funções?

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 19: Representação – Atividade exploradora

Faça as seguintes relações, utilizando o diagrama de flechas:



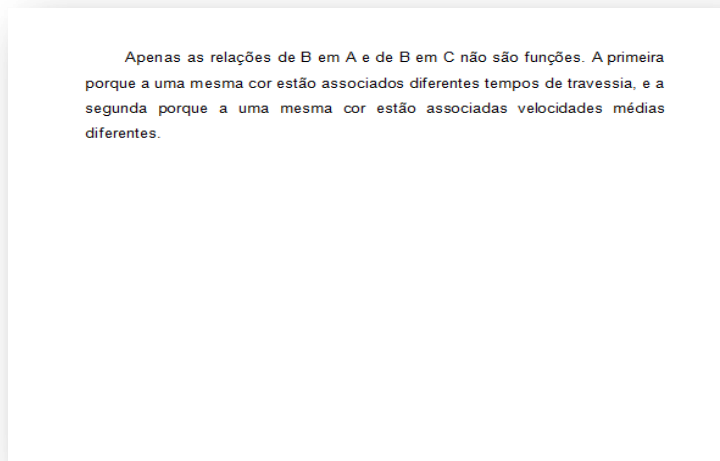
Agora, complete o quadro abaixo:

Relação	É função?	Se não, por quê?
De A em B		
De B em A		
De A em C		
De C em A		
De B em C		
De C em B		

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 3	
Tempo sugerido	10 minutos.
Orientação	Peça que os alunos compartilhem as suas respostas com o colega ao lado e discutam possíveis discordâncias.

Imagem 20: Representação – Discussão da solução

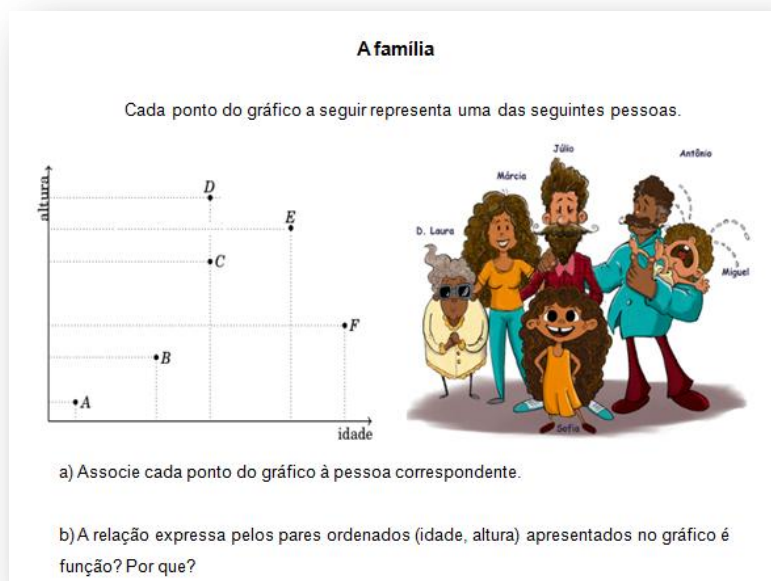


Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade Exploradora 3	
Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	No item (b) o objetivo é que os estudantes percebam que, como as pessoas representadas pelos pontos C (Márcia) e D (Júlio), têm a mesma idade, mas alturas diferentes. A relação apresentada no gráfico, que associa a idade com a altura nessa ordem, não é função.

Propósito	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconhecer uma relação de dependência entre variáveis apresentada num plano cartesiano; ● Reconhecer em um plano cartesiano que nem toda relação é uma função.
-----------	---

Imagem 21: Representação – Atividade exploradora



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 4	
Tempo sugerido	10 minutos.
Orientação	Peça que os alunos compartilhem as suas respostas com o colega ao lado e discutam possíveis discordâncias.

Imagem 22: Representação – Discussão da solução

- a) O ponto **A** representa o bebê Miguel, ponto **B** é Sofia, ponto **C** é Márcia, o ponto **D** é Júlio, o ponto **E** é Antônio e o ponto **F** é Dona Laura.
- b) Não é função, pois Márcia e Júlio tem a mesma idade mas alturas diferentes; no plano, os pontos **C** e **D** têm a mesma abscissa e ordenadas diferentes.

Fonte: Livro Aberto, 2017.

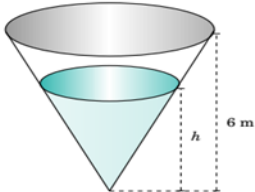
Atividade Exploradora 4	
Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	<p>É importante que o estudante identifique a relação existente entre a altura do nível da água no reservatório e o volume do mesmo.</p> <p>- Essa pode também ser uma oportunidade para explorar conversão de unidades. Sabemos que a expressão $V = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$ fornece o volume do cone em função do raio “R” e da altura “h” do nível de água, desde que o raio e altura estejam expressos na mesma unidade. A partir das dimensões dadas no enunciado tem-se que $R = \frac{h}{2}$ e, portanto, $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{4} \cdot \pi$ é o volume da água no reservatório, em metros cúbicos, correspondente a uma altura “h” metros. Considerando como 3 (três) a aproximação de π obtém que o volume, em m^3, é dado, aproximadamente por $V(h) = \frac{h^3}{4}$, o que equivale em litros a $V(h) = 250 \cdot h^3$.</p> <p>Destaque a “não proporcionalidade” da situação, observando, por exemplo, que 2 é a metade de 4,</p>

	mas 2000 não é a metade de 16000.
Propósito	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar valores da imagem (respectivamente, do domínio) de uma função a partir da sua expressão analítica e de ponto do domínio (respectivamente, da imagem). • Interpretar valores do domínio e da imagem de uma função dada que modela uma situação real específica.

Imagem 23: Representação – Atividade exploradora

Enchendo o cone

O reservatório representado a seguir tem a forma de um cone cuja altura é 6m e a base é um círculo de raio 3m. O volume V em litros de água no reservatório pode ser estimado a partir altura do nível da água h (em metros) de acordo com a seguinte expressão:

$$V(h) = 250h^3$$


a) Determine $V(2)$, $V(3)$ e $V(4)$ e explique os seus significados no contexto.

b) Quais os volumes de água, mínimo e máximo, que o reservatório comporta?

c) A que altura do nível da água corresponde o volume igual a 3456 litros?

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 5	
Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	Peça que os alunos compartilhem as suas respostas com os colegas de turma e discutam possíveis discordâncias em relação aos cálculos encontrados.

Imagem 24: Representação – Discussão da solução

- a) $V(2)$, $V(3)$ e $V(4)$ são, respectivamente iguais 2000, 6750 e 16000 litros e correspondem aos volumes quando a altura da água no reservatório é igual 2, 3 e 4 metros, respectivamente.
- b) O menor volume observado é $V = 0$ litros, que corresponde a $h = 0$ metros, e o maior volume é $V(6) = 54.000$ litros.
- c) Corresponde a uma altura de 2,4 metros.

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade Exploradora 5	
Tempo sugerido	15 minutos.
Orientação	<ul style="list-style-type: none"> Chamar atenção do estudante para o importante papel que as funções desempenham na Física, em especial na Mecânica Clássica, relacionando grandezas como tempo, deslocamento, velocidade e aceleração.
Propósito	<ul style="list-style-type: none"> Compreender funções a partir de sua representação analítica, relacionando-a ao contexto descrito pelo problema.

Imagem 25: Representação – Atividade exploradora


Uniformemente variado

A posição S (em quilômetros), medida a partir de um referencial, de um veículo que se desloca segundo um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é dada em função do tempo t (medido em horas) pela seguinte expressão:

$$S(t) = 2t^2 - 4t + 2$$

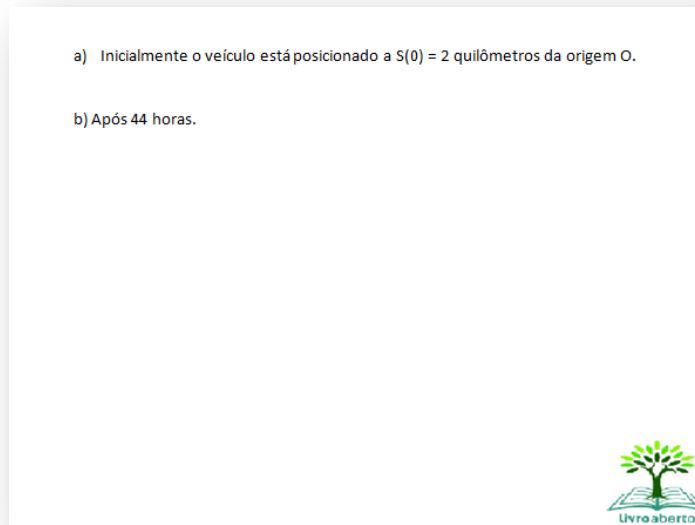
a) Determine a posição inicial do veículo. Explique o significado desse resultado a partir do contexto.

b) Após quanto tempo o veículo estará a 18km da origem?

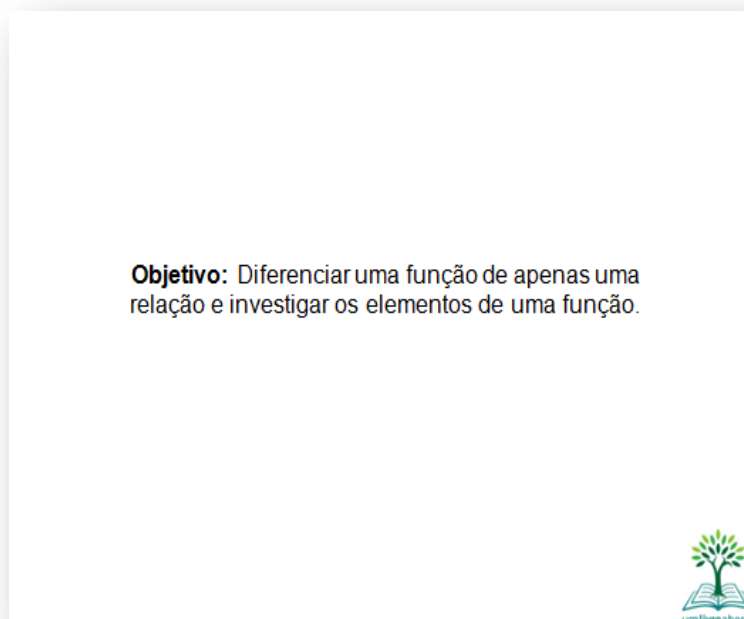


Fonte: Livro Aberto, 2017.

Discussão da Solução 6	
Tempo sugerido	10 minutos.
Orientação	Peça que os alunos compartilhem as suas respostas com os colegas de turma e discutam possíveis discordâncias em relação aos cálculos encontrados.

Imagem 26: Representação – Discussão da solução

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Aula 4**Imagem 27: Representação – Slide inicial**

Fonte: Livro Aberto, 2017.

Objetivo	
Tempo sugerido	5 minutos.
Orientação	Projete ou leia.
Propósito	Mostrar aos alunos quando uma relação é também uma função e como encontrar o conjunto domínio e o conjunto imagem de uma função.

Imagem 28: Representação - Atividade exploradora

Por que não é função?

Vimos que para que uma relação de A em B seja uma função não pode haver:


(I) Elementos no conjunto A sem correspondente em B ;
 (II) Ambiguidade na determinação de correspondente em B .

Determine se cada uma das relações apresentadas a seguir é função. Justifique suas respostas a partir das condições (I) e (II).

a) Seja P o conjunto de todas as pessoas e considere a relação de P em P , que a cada "pessoa" associa "irmão da pessoa".

b) Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e considere a relação de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que a cada "número real x " associa "raiz quadrada do número real x ".

c) Sejam \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos e T o conjunto de todos os triângulos. Considere a relação de \mathbb{R}^+ em T que a cada "número real positivo x " associa "triângulo de área x ".



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade Exploradora 1	
Tempo sugerido	25 minutos.
Orientação	<ul style="list-style-type: none"> • Procure incentivar os estudantes a se manifestem verbalmente, expressando seu entendimento sobre a relação dada. Para a primeira relação, por exemplo, sugerimos que seja considerado, em um primeiro momento, o conjunto formado por todos os estudantes da sala. Possivelmente haverá estudantes sem irmãos e estudantes com mais de um irmão. • No item (b) relembre com os alunos que a raiz quadrada é sempre um valor positivo. Por exemplo, $\sqrt{4}=2$. Apesar de a equação $x^2=4$ ter duas soluções: 2 e -2.
Propósito	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar em contextos mais variados por que uma dada relação não define uma função.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> • Tome como exemplo, uma relação entre dois conjuntos finitos e mostre aos alunos como verificar se uma relação entre esses conjuntos dados é ou não uma função, utilizando como recurso o diagrama de flechas.

Imagem 29: Representação – Discussão da solução



Discussão da solução	
Tempo sugerido	20 minutos.
Orientação	<ul style="list-style-type: none"> - Peça aos alunos para compartilharem as suas respostas com outros colegas e que discutam diferentes tipos de respostas. - Resolva os itens do questionário no quadro branco.
Discuta com a turma	<ul style="list-style-type: none"> - Indague-os sobre como diferenciar uma relação de uma função. - É possível representar essa situação em um diagrama de flecha ou tabela?

Respostas	<p>a) Como existem filhos únicos no mundo, e famílias com mais do que dois filhos, existem “pessoas” no conjunto P que não têm irmão e pessoas que têm mais do que um irmão. Portanto, pela relação dada, há no conjunto P elementos sem correspondente bem como elementos com mais do que um correspondente. Por isso, a relação dada não é função.</p> <p>b) Como não existe em R raiz quadrada de número negativo a relação dada não se aplica aos números reais negativos, isto é, por exemplo o número real -1 não pode ser associado à $\sqrt{-1}$, uma vez que $\sqrt{-1}$ não pertence ao conjunto dos números reais. Portanto, haverá elementos (todos os números reais negativos) sem correspondente. Por isso, a relação dada não é função. Observe que, no entanto, a mesma relação considerada apenas para os números reais não negativos, ou seja, com domínio no conjunto dos números reais nulo e positivos, seria uma função.</p> <p>c) Considerando, por exemplo, o número real 15 é possível construir dois triângulos distintos ambos com área igual a 15. Basta considerar para o primeiro base e altura iguais a 5 e 6 e para o segundo base e altura iguais a 10 e 3, que claramente não são triângulos congruentes. Dessa forma, haverá ambigüidade na determinação de correspondentes. Por isso, a relação dada não é função.</p>
-----------	--


Imagem 30: Representação – Atividade avaliativa

Domínio e imagem

Considere a seguinte lista de expressões algébricas.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $J(t) = \frac{1}{t+8}$ g) $g(u) = 5u^2 + 8$
 b) $G(z) = \sqrt{z-5}$ e) $T(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 c) $h(s) = \frac{1}{3-s}$ f) $R(x) = (x-2)^2 + 7$ h) $F(x) = (x+1)^2 - 3$

Veja que, em algumas das expressões, a variável independente não pode assumir alguns valores, por exemplo, na letra (a), x não pode assumir valores negativos. Complete a tabela do próximo slide com o maior conjunto domínio possível que cada uma das funções pode ter e o correspondente conjunto imagem.




Fonte: Livro Aberto, 2017.

Atividade avaliativa	
Tempo sugerido	30 minutos.
Orientação	<ul style="list-style-type: none"> - É necessário que os alunos saibam o conceito de intervalo real, tais como: intervalo real fechado, aberto e semi-aberto. - É importante que o estudante perceba as restrições para a escolha de x impostas por algumas das expressões dadas.
Propósito	<ul style="list-style-type: none"> - Indague-os sobre como diferenciar uma relação de uma função. - É possível representar essa situação em um diagrama de flecha ou tabela?

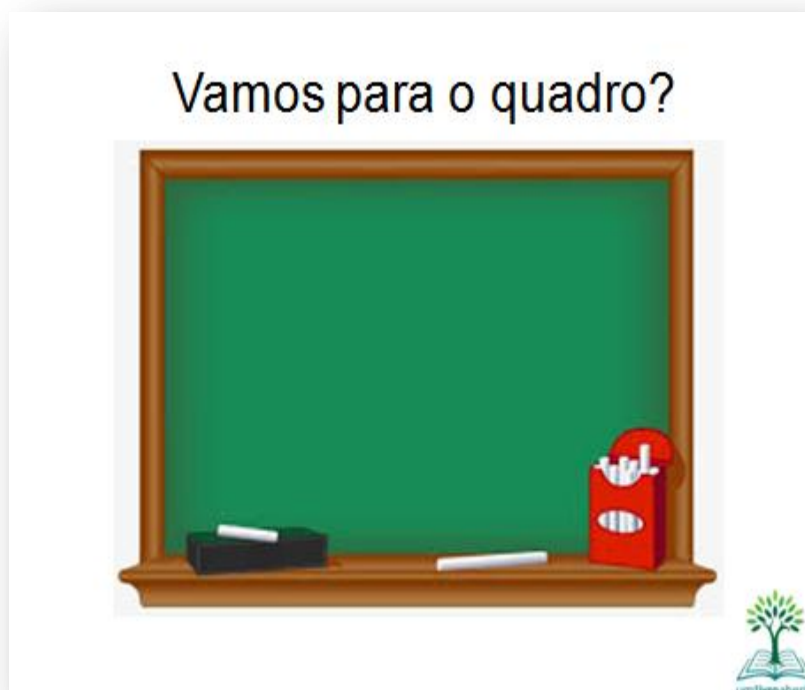
Imagem 31: Representação – Atividade avaliativa

Expressão	domínio A	Imagem
(a)	\mathbb{R}^+	
(b)		
(c)		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
(d)	$\mathbb{R} \setminus \{-8\}$	
(e)		
(f)		$[7, +\infty[$
(g)		
(h)		



Fonte: Livro Aberto, 2017.

Imagem 32: Representação – Discussão da solução



Discussão da solução	
Tempo sugerido	30 minutos.
Orientação	<ul style="list-style-type: none">- Peça aos alunos para compartilharem as suas respostas com outros colegas e que discutam diferentes tipos de respostas.- Complete o quadro do slide anterior no quadro branco, utilizando o recurso dos intervalos reais expressos de forma geométrica.- Utilize “pilot” de cores distintas na construção dos intervalos reais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho de conclusão de curso teve como principal objetivo elaborar uma proposta de planos de aula a partir do Capítulo de Introdução às funções do Projeto Livro Aberto de Matemática. Durante o desenvolvimento do trabalho, nos confrontamos com diversos questionamentos acerca da importância dos planos de aula e em que medida eles de fato são utilizados pelo professor. Não restam dúvidas sobre a importância do planejamento para a preparação de uma aula e é nesse momento que nos deparamos com perguntas do tipo: que objetivos deverão ser alcançados; qual a melhor estratégia didática a ser adotada com a turma e qual o conteúdo a ser ensinado. Por outro lado, nas conversas que tivemos com os professores Michel Cambrinha e Gladson Antunes - autores do capítulo de Introdução às Funções do Livro Aberto de Matemática e orientadores desse trabalho - ficou clara a preocupação dos mesmos com a forma como o capítulo poderia ser utilizado na sala de aula.

Como o material é extenso, naturalmente ao preparar a aula, o professor deverá fazer algum tipo de recorte ou seleção de atividades. O que apresentamos aqui é um recorte possível do Capítulo Introdução às funções do Projeto Livro Aberto de Matemática, com a escolha de atividades que remetem o dia a dia do aluno, tornando mais acessíveis e aplicáveis as competências e habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois ela prevê que os alunos tenham a capacidade de aplicar o conhecimento adquirido em sala de aula no dia a dia.

Ao pensarmos em uma proposta de Planos de Aula como peça chave para aprimorar a prática pedagógica docente, buscamos uma proposta que fosse diferenciada, de modo que o professor pudesse ter a garantia de que seus alunos teriam acesso a um material de qualidade e que pudesse contribuir significativamente para o aprendizado sobre funções. Tendo em vista a confiabilidade do material disponível pelo Projeto Livro Aberto de Matemática e o fato de que ele é baseado em pesquisas científicas, para nós pareceu a escolha mais adequada. As atividades escolhidas foram disponibilizadas no Plano de Aula, de acordo com suas características e classificadas como atividades disparadoras, avaliadoras ou exploradoras, visando proporcionar uma maneira *ativa* dos alunos

alcançarem o conhecimento sobre funções, pois requer destes a interação com o grupo, comparando soluções, discutindo possíveis discordâncias em relação aos cálculos, refletindo sobre outros caminhos a serem tomados, proporcionando a troca de informações dentro desse processo de ensino aprendizagem.

Ao se traçar um Planejamento, deve-se respeitar a realidade dos alunos e buscar a aprendizagem significativa como objetivo principal de suas ações. Levando essas reflexões em consideração, entendemos que os Planos de aula baseados no Projeto Livro Aberto de Matemática configuram uma metodologia facilitada, no qual sem dúvidas poderá influenciar nos futuros resultados de ensino - aprendizagem em que professores e alunos serão submetidos.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, José Carlos Souza. **Disposição da aula: os sujeitos entre a tecnia e a polis.** In: VEIGA, I. P.A. (Org.) **Aula: gênese, dimensões, princípios e práticas.** Campinas: Papyrus, 2008. p. 45-72.

Centro Universitário Internacional UNINTER. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/26724_13673.pdf>. Acesso em 05 de ago. de 2019.

DORTA, Greice Cristina da Ailva; FRANCO, Sandra Aparecida Pires. **A Influência do Plano de Aula na Práxis Docente: Uma Abordagem no Ensino Superior.** 2013. – Curso de Especialização em Docência na Educação Superior, Universidade Estadual de Londrina, Paraná. Disponível em: <<http://www.uel.br/eventos/jornadadidatica/pages/arquivos/II%20Jornada%20de%20Didatica%20e%20I%20Seminar%20de%20Pesquisa%20do%20CEMAD%20%20Docencia%20na%20educacao%20Superior%20caminhos%20para%20uma%20praxis%20transformadora/A%20INFLUENCIA%20DO%20PLANO%20DE%20AULA%20NA%20PRAXIS%20DOCENTE.pdf>>. Acesso em 05 de ago. de 2019.

EISENBERG, T.: **On the development of a sense for functions.** In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, USA, p. 153–174. 1992.

Funções: Um pouco de história. Universidade de Lisboa. 2000. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/hist.htm>>. Acesso em 06 de ago. de 2019.

LAJOLO, Marisa. **Livro didático: um (quase) manual de usuário.** Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996

LIMA, Dylan Lopes. **A história da função.** Aquiculto. Disponível em: <<http://aquiculto.blogspot.com/2014/05/a-historia-da-funcao.html>>. Acesso em 07 de ago. de 2019.

MANSANI, Mara. **Como aprendi a fazer planos de aula**. Nova Escola. 2017. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/6746/blog-alfabetizacao-como-fazer-plano-de-aula>>. Acesso em 05 de ago. de 2019.

MEYER, Dan. **Ensinar com tarefas de três atos: Ato três e sequência**. Disponível em:<<https://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-three-sequel/>>. Acesso em 18 de ago. de 2019.

MEYER, Dan. **Ensinar com tarefas de três atos: ato um**. Disponível em:<<https://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-one/>>. Acesso em 18 de ago. de 2019.

MEYER, Dan. **Ensinar com tarefas de três atos: segundo ato**. Disponível em:<<https://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-two/>>. Acesso em 18 de ago. de 2019.

MIRANDA, Danielle de. **Estratégias de Ensino Aprendizagem**. Brasil Escola. Ano. Disponível em: <<https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/matematica.htm>>. Acesso em 05 de ago. de 2019.

Projeto do IMPA propõe livro didático aberto e colaborativo. IMPA. 2018. Disponível em:<<https://impa.br/noticias/projeto-do-impa-propoe-livro-didatico-aberto-e-colaborativo/>>. Acesso em 08 de ago. de 2019.

REZENDE, Wanderley. SILVA, Maria Helena Morais. **Análise Histórica do Conceito de Função**. Caderno Dá Licença. UFF. Número 2 - ano 2. 1999.

SANTOS, Soraiva Oliveira dos. **Práticas Inovadoras na Sala de Aula de Matemática: Um Exemplo com a Geometria Plana no Ensino Fundamental II**. 2015. 31 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) Centro de Ensino do Seridó, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, 2015.

SCHEWTSCHIK, Annaly. **O Planejamento de Aula: Um Instrumento de Garantia de Aprendizagem**. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/26724_13673.pdf>. Acesso em 16 de ago. de 2019.

SIERPINSKA, Anna.: **On understanding the notion of function.** In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, USA, p. 25-58. 1992.

SILVA. Janssen. Felipe da. **Introdução: Avaliação do Ensino da Aprendizagem numa Perspectiva Formativa Reguladora.** IN: SILVA, J. F; HOFFMANN, J; ESTEBAN, M. T. (org.) *Práticas avaliativas e aprendizagens significativas em diferentes áreas do currículo.* 3. Ed. Porto Alegre: Mediação, 2003. p. 7-18.

SIMAS, F.L.B, RANGEL, L.G., *Metodologia de desenvolvimento de um livro didático aberto e colaborativo,* XIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, Mato Grosso, 2019.

SOUZA, Mayane Leite da Silva. **O Processo Didático Educativo: Uma Análise Reflexiva sobre o Processo de Ensino e a Aprendizagem.** 2013. Disponível em:< <https://meuartigo.brasilecola.uol.com.br/pedagogia/processo-didatico-educativo-analise-reflexiva-sobre-processo-ensino-aprendizagem.htm> >. Acesso em 16 de ago. de 2019.

URSINI S. & TRIGUEIROS M.: **A model for the uses of variable in elementary algebra.** In M. van den Heuvel-Panhuizen(Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* V. 4, p. 327-334. Utrecht: Utrecht University. 1992.

VEIGA, Ima Passos Alencastro. **Aula: Gênese, Dimensões, Princípios e Práticas.** 2008. Disponível em:< https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3205897/mod_resource/content/3/Cap%C3%ADtulollmaPassosAlencastroVeiga.pdf>. Acesso em 11 de ago. de 2019.