



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Diogo Pacheco de Sousa

Investigações em geometria com ênfase na resolução de problemas

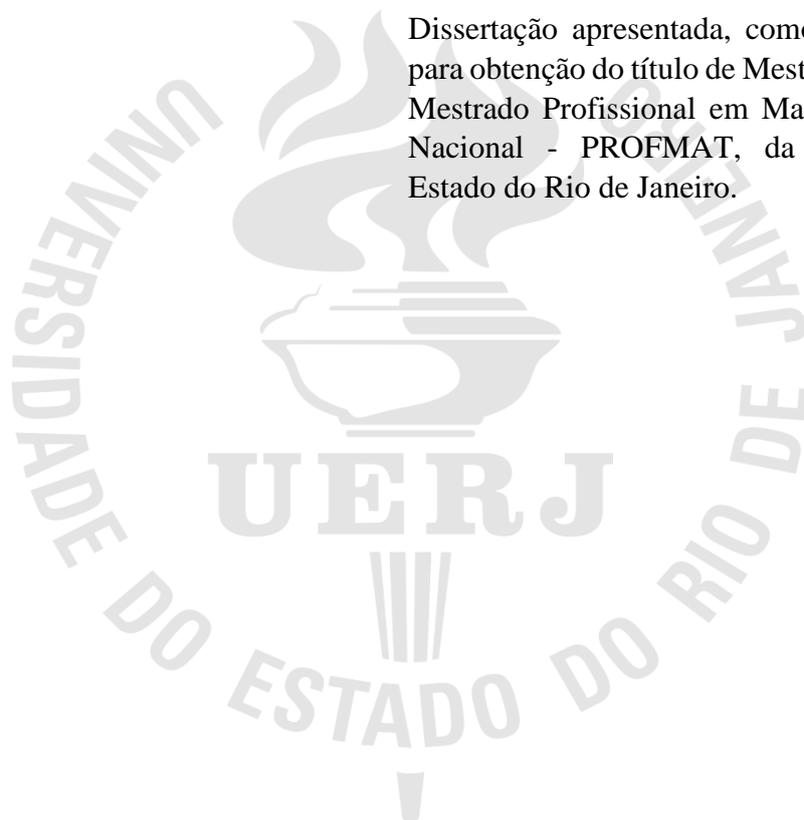
Rio de Janeiro

2019

Diogo Pacheco de Sousa

Investigações em geometria com ênfase na resolução de problemas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientadores: Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva

Prof. Dr. Raphael Constant da Costa

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S725 Sousa, Diogo Pacheco de.
Investigações em geometria com ênfase na resolução de problemas / Diogo Pacheco de Sousa. – 2019.
159 f. : il.

Orientadora: Patrícia Nunes da Silva.
Coorientador: Raphael Constant da Costa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria – Estudo e ensino 2. Geometria – Problemas, exercícios, etc. I. Silva, Patrícia Nunes da. II. Costa, Raphael Constant da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514:37

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Diogo Pacheco de Sousa

Investigações em geometria com ênfase na resolução de problemas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora

Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Raphael Constant da Costa

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - UERJ

Prof.^a Dra. Gabriela dos Santos Barbosa

Faculdade de Educação da Baixada Fluminense - UERJ

Prof. Dr. André Luiz Cordeiro dos Santos

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, aos colegas de turma e aos professores que constituíram toda minha formação, pois sem eles não chegaria tão longe.

AGRADECIMENTOS

O caminho percorrido durante minha formação acadêmica até aqui, foi sem dúvida, tanto prazeroso quanto difícil, e graças a Deus pude contar com pessoas que foram fundamentais nesta difícil empreitada.

Agradeço a Deus pela motivação concedida, afim de que pudesse superar os percalços que a rotina diária naturalmente já impõe.

Agradeço minha esposa, a qual teve toda paciência nos momentos de turbulência corroborando para que tivesse forças nas adversidades.

Agradeço a minha família, por me incentivar desde o início em meus estudos.

Aos professores que fizeram a diferença cada um na sua individualidade, por acreditarem que a educação forma cidadãos melhores e conseqüentemente um país melhor.

Agradeço ao professor Raphael, pelo engajamento e dedicação com preciosos conselhos.

Agradeço a Patrícia por toda a paciência do mundo e dedicação, o seu empenho, serenidade e sabedoria na forma de conduzir as adversidades nos assuntos abordados, serviram de inspiração para que eu buscasse constantemente ser uma pessoa e um aluno melhor.

A imaginação importa mais que o conhecimento.

Albert Eisntein

RESUMO

SOUSA, Diogo Pacheco de. Investigações em geometria com ênfase na resolução de problemas. 2019. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

A geometria explora diversas áreas do conhecimento. Ela exige uma crescente sistematização do pensamento, capacidade argumentação, até alcançar o campo da abstração, onde muitas das vezes torna-se fundamental buscar um caminho incomum ao pensamento habitualmente proposto. Ela começa nas séries iniciais e permeia durante toda escalada estudantil do ciclo básico. No entanto, o desenvolvimento do pensamento geométrico não é natural nem plenamente alcançado ao final deste processo de formação. Fornecer tanto aos alunos quanto aos professores ferramentas que possam de certa forma ampliar seus conhecimentos e permitir ultrapassarem aplicações básicas, a fim de promover melhora e consistência no ensino de geometria, que vem chegando a níveis insatisfatórios, torna-se o objeto central deste texto. Através de resoluções de problemas dos mais simples aos mais elaborados, apresentando comentários sutis, e rigorosamente justificados com uma ampla gama de figuras que ilustram os raciocínios empregados, busca-se instigar o leitor a desenvolver suas habilidades cognitivas inerentes ao pensamento geométrico.

Palavras-chave: Geometria. Ensino. Resolução de problemas.

ABSTRACT

SOUSA, Diogo Pacheco de. Investigations in geometry with emphasis on problem solving. 2019. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Geometry explores several areas of knowledge. It requires a growing systematization of thought, argumentative capacity, until it reaches the field of abstraction, where it is often essential to seek an unusual path to the commonly proposed thought. It begins in the early grades and permeates throughout the student climb of the basic cycle. However, the development of geometric thinking is neither natural nor fully achieved at the end of this process of formation. Providing both students and teachers with tools that can somehow broaden their knowledge and allow them to surpass basic applications, in order to promote improvement and consistency in the teaching of geometry, which has been reaching unsatisfactory levels, becomes the central object of this text. Through problem solving from the simplest to the most elaborate, presenting subtle comments, and rigorously justified with a wide range of figures illustrating the reasoning employed, the reader is encouraged to develop his cognitive skills inherent in geometric thinking.

Keywords: Geometry. Teaching. Troubleshooting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Problema 1.1, Seção 1.1.	20
Figura 2 –	Problema 1.2 seção 1.1.	21
Figura 3 –	Problema 1.3 seção 1.1.	21
Figura 4 –	Ponto <i>D</i> problema 1.3 seção 1.1.	22
Figura 5 –	Ponto <i>B</i> problema 1.3 seção 1.1.....	22
Figura 6 –	Problema 1.4 seção 1.1.....	22
Figura 7 –	Problema 1.4 seção 1.1.....	23
Figura 8 –	Problema 1.5 seção 1.1.....	24
Figura 9 –	Problema 2.5, seção 1.2.....	25
Figura 10 –	Problema 2.6, seção 1.2.....	26
Figura 11 –	Problema 2.7, seção 1.2.....	26
Figura 12 –	Problema 2.7, seção 1.2.....	27
Figura 13 –	Resolução do exercício 2.8, seção 1.2.....	28
Figura 14 –	Resolução do exercício 2.8, seção 1.2.....	28
Figura 15 –	Problema 2.9, seção 1.2.....	29
Figura 16 –	Triângulos congruentes que não podem ser movidos rigidamente.....	32
Figura 17 –	Problema 2.1, seção 2.2. Triângulo <i>ABC</i>	33
Figura 18 –	Construção do problema 2.1, seção 2.2.....	33
Figura 19 –	Construção do problema 2.2, seção 2.2.....	34
Figura 20 –	Construção da altura <i>CH</i> do problema 2.3.....	35
Figura 21 –	Construção do problema 2.4, seção 2.2.....	36
Figura 22 –	Triângulo isósceles <i>ABC</i> do problema 2.8.....	36
Figura 23 –	Caso 1 do problema 2.9.....	38
Figura 24 –	Caso 2 do problema 2.9.....	38
Figura 25 –	Ilustração da primeira parte da demonstração do problema 2.10.....	39

Figura 26 –	Ilustração da segunda parte da demonstração do problema 2.10.....	39
Figura 27 –	Referência do problema 3.1, seção 2.3.....	40
Figura 28 –	Triângulo <i>CBF</i> gerado através de movimentos rígidos.....	40
Figura 29 –	Triângulo <i>ABC</i> do problema 3.2.....	41
Figura 30 –	Caso 1 do problema 3.3.....	42
Figura 31 –	Caso 2 do problema 3.3.....	42
Figura 32 –	Caso 3 do problema 3.3.....	43
Figura 33 –	Referência do problema 3.4.....	44
Figura 34 –	Retas paralelas, problema 3.5.....	44
Figura 35 –	Referência do problema 3.6.....	45
Figura 36 –	Referência da resolução da parte A do problema 3.6.....	45
Figura 37 –	Referência para parte B da resolução do problema 3.6.....	46
Figura 38 –	Referência para problema 3.7.....	46
Figura 39 –	Referência para o problema 3.8.....	47
Figura 40 –	Referência para o problema 3.9.....	47
Figura 41 –	Estrela de cinco pontas, problema 3.10.....	48
Figura 42 –	Referência para resolução do problema 3.10.....	48
Figura 43 –	Referência para o item (c) do problema 3.11.....	50
Figura 44 –	Referência para o problema 3.12.....	50
Figura 45 –	Referência para resolução do problema 3.13.....	51
Figura 46 –	Referência para resolução do problema 3.15.....	52
Figura 47 –	Referência para o problema 3.16.....	52
Figura 48 –	Construção do problema 3.17.....	54
Figura 49 –	Referência para o problema 3.18.....	55
Figura 50 –	Referência para o problema 3.19.....	55

Figura 51 –	Referência para o problema 3.20 (a).....	56
Figura 52 –	Referência do problema 3.20 (b).....	57
Figura 53 –	Referência para o problema 3.21.....	58
Figura 54 –	Construção do problema 3.22.....	58
Figura 55 –	Referência do problema 4.4.....	60
Figura 56 –	Referência para o problema 4.7.....	61
Figura 57 –	Referência para o problema 4.8.....	61
Figura 58 –	Referência para o problema 4.9.....	62
Figura 59 –	Esboço do problema 4.9.....	62
Figura 60 –	Referência para o problema 4.10.....	63
Figura 61 –	Referência para o problema 4.11.....	64
Figura 62 –	Referência para o problema 5.1.....	66
Figura 63 –	Referência para o problema 5.2.....	66
Figura 64 –	Referência para o problema 5.3.....	67
Figura 65 –	Referência para o problema 5.5.....	68
Figura 66 –	Referência para o problema 5.6.....	69
Figura 67 –	Referência para o problema 5.7.....	70
Figura 68 –	Referência para o problema 5.8.....	71
Figura 69 –	Referência para o problema 5.9.....	71
Figura 70 –	Referência para o problema 5.10.....	72
Figura 71 –	Referência para o problema 5.13.....	73
Figura 72 –	Referência para o problema 5.14.....	73
Figura 73 –	Construção auxiliar do problema 5.15 parte (a).....	74
Figura 74 –	Construção auxiliar do problema 5.15 parte (b).....	75
Figura 75 –	Construção auxiliar do problema 5.15 parte (c).....	76
Figura 76 –	Referência para o problema 5.16.....	76
Figura 77 –	Construção do problema 1.1(i), seção 3.1.....	78

Figura 78 –	Construção do problema 1.1(ii), seção 3.1.....	79
Figura 79 –	Construção 1.2, seção 3.1.....	79
Figura 80 –	Construção do problema 1.3, seção 3.1.....	80
Figura 81 –	Construção do problema 1.4, seção 3.1.....	80
Figura 82 –	Referência para o problema 1.5, seção 3.1.....	81
Figura 83 –	Construção do problema 1.10, seção 3.1.....	82
Figura 84 –	Construção do problema 1.12, seção 3.1.....	83
Figura 85 –	Construção de ABC , problema 1.13, seção 3.1.....	84
Figura 86 –	Esboço da estratégia, problema 1.13, seção 3.1.....	84
Figura 87 –	Referência para o problema 1.14, seção 3.1.....	85
Figura 88 –	Circuncentro, problema 2.1, seção 3.2.....	86
Figura 89 –	Construção do triângulo ABC , problema 2.2, seção 3.2.....	87
Figura 90 –	Construção do problema 2.3, seção 3.2.....	87
Figura 91 –	Construção do problema 2.4 (primeiro caso), seção 3.2.....	88
Figura 92 –	Construção do problema 2.4 (segundo caso), seção 3.2.....	89
Figura 93 –	Referência para o item (i) do problema 2.5(ida), seção 3.2.....	89
Figura 94 –	Referência para o item (i) do problema 2.5(volta), seção 3.2.....	90
Figura 95 –	Referência para o item (ii) do problema 2.5(ida), seção 3.2.....	90
Figura 96 –	Referência para o item (ii) do problema 2.5(volta), seção 3.2.....	91
Figura 97 –	Referência para o item (iii) do problema 2.5(ida), seção 3.2.....	91
Figura 98 –	Referência para o item (iii) do problema 2.5(volta), seção 3.2.....	92
Figura 99 –	Círculos tangentes, problema 3.6, seção 3.3.....	93
Figura 100 –	Círculos Exteriores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.....	94
Figura 101 –	Círculos Interiores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.....	94
Figura 102 –	Círculos Secantes, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.....	94
Figura 103 –	Círculos tangentes exteriores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.....	95
Figura 104 –	Círculos tangentes interiores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.....	95

Figura 105 –	Referência para problema 3.7 item (e), seção 3.3.....	97
Figura 106 –	Referência para problema 3.10, seção 3.3.....	98
Figura 107 –	Problema 3.11, seção 3.3.....	98
Figura 108 –	Referência para problema 3.11, seção 3.3.....	99
Figura 109 –	Referência para problema 3.12, seção 3.3.....	100
Figura 110 –	Referência para problema 3.14, seção 3.3.....	100
Figura 111 –	Referência para problema 3.15, seção 3.3.....	101
Figura 112 –	Referência para problema 3.21, seção 3.3.....	101
Figura 113 –	Referência para problema 3.28, seção 3.3.....	102
Figura 114 –	Referência para o problema 4.2, seção 3.4.....	103
Figura 115 –	Referência para o problema 4.3, seção 3.4.....	104
Figura 116 –	Referência para o problema 4.5, seção 3.4.....	104
Figura 117 –	Referência para o problema 4.6, seção 3.4.....	105
Figura 118 –	Referência para o problema 4.7, seção 3.4.....	106
Figura 119 –	Referência para o problema 4.8, seção 3.4.....	106
Figura 120 –	Referência para o problema 4.9, seção 3.4.....	107
Figura 121 –	Referência para o problema 4.8, seção 3.4.....	108
Figura 122 –	Referência para problema 5.1, seção 3.5.....	109
Figura 123 –	Referência para o problema 5.4, seção 3.5.....	110
Figura 124 –	Referência para o problema 5.5, seção 3.5.....	111
Figura 125 –	Referência para o problema 5.8, seção 3.5.....	111
Figura 126 –	Referência para o problema 1, seção 4.1.....	113
Figura 127 –	Referência para o problema 2, seção 4.1.....	113
Figura 128 –	Referência para o problema 4, seção 4.1.....	114
Figura 129 –	Referência para o problema 5, seção 4.1.....	114
Figura 130 –	Referência para o problema 9, seção 4.1.....	116
Figura 131 –	Referência para o problema 10, seção 4.1.....	116

Figura 132 –	Referência para o problema 11, seção 4.1.....	117
Figura 133 –	Referência para o problema 13, seção 4.1.....	118
Figura 134 –	Referência para o problema 15, seção 4.1.....	119
Figura 135 –	(I) Região Convexa e (II) Região não convexa.....	123
Figura 136 –	Semiplanos determinados pela reta r	124
Figura 137 –	Ângulo Convexo e não convexo.....	124
Figura 138 –	Ângulo formado por semirretas opostas.....	125
Figura 139 –	Classificação dos ângulos.....	125
Figura 140 –	Ângulos Opostos pelo Vértice.	126
Figura 141 –	(1) Três pontos não colineares e (2) triângulo ABC (ΔABC).....	126
Figura 142 –	Triângulo ABC (ΔABC).....	127
Figura 143 –	Triângulos Equilátero, Isósceles e Escaleno da esquerda para a direita...	127
Figura 144 –	Polígono $ABCDE$	128
Figura 145 –	Triângulos congruentes.....	129
Figura 146 –	Triângulos congruentes. Caso LAL	129
Figura 147 –	Triângulos congruentes. Caso ALA	130
Figura 148 –	Triângulos congruentes. Caso LLL	130
Figura 149 –	Bissetriz de um ângulo.....	131
Figura 150 –	M ponto médio de AB	131
Figura 151 –	A mediana EM	132
Figura 152 –	Retas perpendiculares r e s	132
Figura 153 –	Altura relativa ao lado BC	133
Figura 154 –	Construção das alturas externas de um triângulo obtusângulo.....	133
Figura 155 –	Paralelogramo $ABCD$. $AB // CD$ e $AD // BC$	135
Figura 156 –	MN base média de ABC	135
Figura 157 –	Triângulo Medial MNP	136
Figura 158 –	Trapézio $ABCD$. $AB \parallel CD$	136

Figura 159 –	Base média Bm	137
Figura 160 –	$GH = m_e$ mediana de Euler. G e H são pontos médios das diagonais....	137
Figura 161 –	Retângulo ABCD.....	138
Figura 162 –	Losango ABCD.....	138
Figura 163 –	Referência para observação D16.....	138
Figura 164 –	Distância entre r e s.....	139
Figura 165 –	Mediana relativa à hipotenusa.	139
Figura 166 –	Quadrado ABCD.....	140
Figura 167 –	Circunferência π . $AO = r \leftrightarrow A \in \pi$	140
Figura 168 –	Retas paralelas $s, s' \parallel r$	141
Figura 169 –	Mediatriz de AB, t mediatriz $\rightarrow AM = BM$ e $t \perp AB$	141
Figura 170 –	OC bissetriz de AOB. \vec{OC} bissetriz $\leftrightarrow d(P, \vec{OA}) = d(P, \vec{OB})$	142
Figura 171 –	Referência para a proposição 3.9.....	142
Figura 172 –	Ortocentro O dos triângulos ABC conforme sua natureza.....	143
Figura 173 –	Ortocentro O do triângulo medial MNP.....	143
Figura 174 –	Referência para proposição 3.14.....	144
Figura 175 –	Reta r tangente ao círculo. P ponto de tangencia.....	144
Figura 176 –	Referência para a proposição 3.19.....	145
Figura 177 –	Referência para o exemplo 3.16.....	145
Figura 178 –	Construção do exemplo 3.16.....	146
Figura 179 –	Ângulo central AOB ($\theta = \widehat{AB}$).....	146
Figura 180 –	Referência para o exemplo 3.18.....	147
Figura 181 –	Ângulo inscrito BAC.....	147
Figura 182 –	Triângulo retângulo de hipotenusa AB.....	148
Figura 183 –	Ângulo de segmento θ	148
Figura 184 –	Ângulo Excêntrico Interno θ	149

Figura 185 –	Ângulo Excêntrico Externo θ	149
Figura 186 –	Arcos capazes de α	150
Figura 187 –	Arcos capazes da observação 3.29.....	150
Figura 188 –	Tangentes ao círculo por P.....	151
Figura 189 –	Circuncentro O, centro do círculo circunscrito a ABC.....	151
Figura 190 –	Corolário 3.34.....	152
Figura 191 –	Incentro I de ABC.....	152
Figura 192 –	Ex-incentro relativo ao vértice A.....	153
Figura 193 –	Círculos tangentes ao triângulo ABC.....	153
Figura 194 –	Referência para proposição 3.38.....	154
Figura 195 –	Proposição 3.39.....	155
Figura 196 –	Quadrilátero Inscrito.....	155
Figura 197 –	Quadrilátero ABCD.....	156
Figura 198 –	Triângulo órtico MNP.....	156
Figura 199 –	Referência para a proposição 3.43.....	157
Figura 200 –	Triângulo pedal DEF.....	157
Figura 201 –	Triângulo degenerado DFE.....	158
Figura 202 –	A reta r será a reta de Sinson-Wallace.....	158
Figura 203 –	Quadrilátero inscrito ABCD.....	159

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS	20
1.1	Problemas – Seção 1.1 (Introdução).....	20
1.2	Problemas – Seção 1.2 (Ângulos).....	24
1.3	Problemas – Seção 1.3 (Polígonos).....	30
2	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	32
2.1	Problemas – Seção 2.1 (Os casos LAL, ALA e LLL).....	32
2.2	Problemas – Seção 2.2 (Aplicações de congruência).....	33
2.3	Problemas – Seção 2.3 (Paralelismo).....	40
2.4	Problemas – Seção 2.4 (Desigualdade triangular).....	59
2.5	Problemas – Seção 2.5 (Quadriláteros notáveis).....	66
3	LUGARES GEOMÉTRICOS	78
3.1	Problemas – Seção 3.1 (Lugares geométricos básicos).....	78
3.2	Problemas – Seção 3.2 (Pontos notáveis de um triângulo).....	86
3.3	Problemas – Seção 3.3 (Tangência e ângulos no círculo).....	93
3.4	Problemas – Seção 3.4 (Círculos associados a um triângulo).....	103
3.5	Problemas – Seção 3.5 (Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis).....	109
4	PROBLEMAS PROPOSTOS	113
4.1	Problemas – Seção 4.1	113
	CONCLUSÃO	121
	REFERÊNCIAS	122
	ANEXO A – CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS	123
	ANEXO B – CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	129
	ANEXO C – LUGARES GEOMÉTRICOS	140

INTRODUÇÃO

“Os números governam o mundo.”

Lema da escola Pitagórica.

A geometria nasceu da necessidade do homem se relacionar com a natureza que o cercava. Desde os tempos primitivos, tornava-se necessária a interação e melhor aproveitamento do que a natureza dispunha a serviço de quem melhor soubesse aproveitar. Com esta premissa, saber compreender e descrever certas situações fundamentava a ideia de que entender determinadas leis que regiam a natureza a partir de observações empíricas poderia produzir satisfatórios avanços para o desenvolvimento do homem. Contudo, certamente não foi este o pensamento que permeava as ações na época, e sim descobrir maneiras de poupar tempo, esforço e principalmente demarcar território. Sendo assim, os primeiros passos rumo ao desenvolvimento da geometria nasceram da necessidade de se medir as coisas, o espaço que elas ocupavam, como poderiam dividir terras de forma igualitária ou obedecendo a determinadas condições, isto é, de necessidades do cotidiano. Essas observações e análises forçaram o homem a criar entes matemáticos como o ponto, a reta e o plano, que foram utilizados posteriormente para formalizar os resultados conhecidos permitindo gerar e descobrir propriedades das figuras observadas.

De acordo com Lumbreras (2008, p.19), os primeiros registros de que dispomos sobre a formalização do pensamento geométrico são creditados a Tales de Mileto (aproximadamente 625-547 a. C.). Tales utilizava conhecimentos teóricos para soluções de problemas do cotidiano, tais como: a medição da altura de pirâmides a partir de sua sombra, calcular distâncias e muitas outras necessidades. Posteriormente, Pitágoras de Samos (aproximadamente 580-500 a. C.), grande matemático que cede nome a um dos teoremas mais famosos da geometria, daria continuidade ao desenvolvimento da geometria. Fundador da Escola Pitagórica, ajudou a perpetuar a cultura da formalização, que evoluiu até os dias atuais culminando na matemática moderna. Euclides de Alexandria (aproximadamente 300 a. C.) outro grande matemático que merece destaque na síntese do pensamento geométrico, é considerado o pai da geometria devido a sua obra **Elementos**, a qual serviu como única referência durante dois mil anos por ser o único livro de geometria escrito até então. Segundo Freudenthal (1973, p.403), a Geometria de alguma

forma axiomáticamente organizada é certa parte da Matemática que, por algumas razões, é chamada Geometria. Contudo, apesar de tão grande relevância histórica e prática, observamos que o ensino de geometria vem sendo negligenciado, seja nas práticas docentes, ou até mesmo na forma como é classificado do ponto de vista de sua relevância. Assim, nem mesmo a grande força que possui sendo um dos pilares em olimpíadas de matemática, nacionais ou internacionais, tem gerado um movimento contrário à sua disseminação inadequada. O próprio cálculo diferencial integral, disciplina extremamente importante na formação do professor de matemática, com alto grau de reprovação, necessita de um domínio razoável sobre geometria, assim como em diversas outras disciplinas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) ressaltam a importância do pensamento geométrico. Clemente e Bedim (2015) apontam para a deficiência na formação do professor de Matemática para o ensino de geometria e para a dificuldade em desenvolver nos alunos o pensamento geométrico. De uma maneira geral, o ensino de geometria desenvolve mais habilidades mecânicas do que reflexivas. Estudar geometria, deveria provocar a curiosidade investigativa. A forma como são apresentadas as soluções de muitos problemas, não trazem reflexões, somente uma sequência de implicações que nos levam a um resultado, porém não refletem o raciocínio que foi amplamente desenvolvido. Onde está o pensamento crítico? Como ajudar a desenvolver no professor a abstração necessária, tendo como premissa que a geometria implica no desenvolvimento do pensamento abstrato, em busca do concreto?

Entende-se que “**procedimentos mágicos**” constituem um dos obstáculos do aprendizado de geometria durante a formação do professor de matemática. O objetivo geral do trabalho, diante do exposto, é desmistificar estes procedimentos e através de resoluções comentadas de problemas propiciar que o professor se aproprie de ferramentas que ampliem sua capacidade de resolução de problemas e desenvolvam seu pensamento geométrico, na certeza de que poderá render frutos notáveis na forma de pensar do docente. Sendo assim, em muitos casos faz-se necessário além de entregar uma resolução, observar algumas indagações e escolhas, tais como: o que motivou o ponto de partida, intuição, a presença de entes geométricos notáveis.

No primeiro capítulo, serão apresentados problemas sobre conceitos geométricos básicos, tais como: segmentos, ângulos e polígonos, com observações notáveis do ponto de vista da escrita e na sua forma de argumentação, visando modelar um encadeamento lógico e cauteloso até as conclusões. No segundo capítulo, serão explorados diversos problemas de congruência de triângulos, desigualdade triangular e quadriláteros notáveis, dos quais

começarão a figurar alguns com grau de dificuldade mais elevado, onde existirá também a preocupação em justificar algumas escolhas dando ênfase notadamente, a motivar o leitor que não existe bola de cristal. No terceiro capítulo, serão tratados alguns lugares geométricos notáveis, que poderão propiciar grande riqueza argumentativa. No que segue, buscou-se amplamente explorar, umas das principais características da geometria, a visual. Os capítulos discorrem com uma riqueza de figuras cuidadosamente editadas afim de promover um melhor entendimento. Para o quarto capítulo, serão propostos alguns problemas que visam promover uma afirmação do que se propõe a leitura que o antecede. Por fim, para um melhor aproveitamento, notas teóricas sobre todo conteúdo contemplado serão apresentadas como anexo. Os exercícios discutidos nos três primeiros foram retirados Muniz (2013) e foi mantida a numeração lá apresentada. O conteúdo do anexo, também retirado de Muniz (2013), foi incluído no presente texto para facilitar o acesso a definições e resultados utilizados nas resoluções.

1. CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

1.1 Problemas – Seção 1.1 (Introdução)

1.1. Sejam A, B, C e D pontos sobre uma reta r . Quantas são as semirretas contidas na reta r e tendo por origem um de tais pontos?

A Figura 1 ilustra uma possível distribuição dos pontos A, B, C e D em r . Se consideramos o ponto B como origem, há duas semirretas contidas na reta r que o tem por origem, a saber \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BD} . Para determinar o número total de semirretas contidas em r que tenha por origem um dos pontos A, B, C ou D , é importante perceber que cada ponto define duas semirretas. Seja n ($1 \leq n \leq 4$), a quantidade de pontos distintos de r definidos por A, B, C e D . Assim, precisamos o total de semirretas pedido é igual a $2 \cdot n$.

Figura 1: Problema 1.1, Seção 1.1.



Fonte: O autor, 2019.

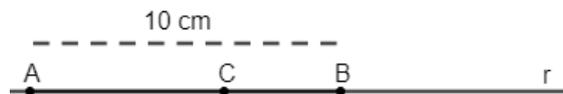
O Problema 1.1 é um problema conceitual. Poderíamos ter sido tentados a contar mais semirretas do que realmente há, ao, por exemplo, partindo do ponto B como origem, ter considerado associadas a B , três semirretas \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{BD} e não apenas duas. Podíamos também ter pensado que associadas a A , teríamos \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} . Essa situação ilustra dois tipos de erro. Um deles está associado ao não entendimento da semirreta como um certo subconjunto de r . Ao cometer este erro conceitual, não percebemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. A escolha de um ponto de r como origem, determina completamente as duas únicas semirretas associadas a ele. Na notação, o outro ponto é importante para caracterizar a qual dos dois subconjuntos estamos nos referindo, mas não está unicamente determinado. O segundo erro está menos ligado ao conceito em si e sim a um mau hábito ao resolvermos problemas. Apesar do problema não exigir que utilizássemos os demais pontos para gerar as semirretas pedidas, somos tentados a fazê-lo! Com isto, deixamos de contar uma das semirretas que tem A como origem, pois não dispomos de pontos dados “à esquerda” de A para defini-la. Este erro pode ser considerado

grosseiro, mas ele é emblemático de uma situação não pouco usual em problemas de geometria em que nosso esboço nos induz a um erro...

1.2. Os pontos A, B e C estão todos situados sobre uma mesma reta r , com $C \in \overline{AB}$. Se $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ e $\overline{AC} = 4\overline{BC}$, calcule \overline{AC} .

Tracemos r com A, B , e $C \in r$, tal que $C \in \overline{AB}$, isto é, C está entre A e B .

Figura 2: Problema 1.2 seção 1.1.

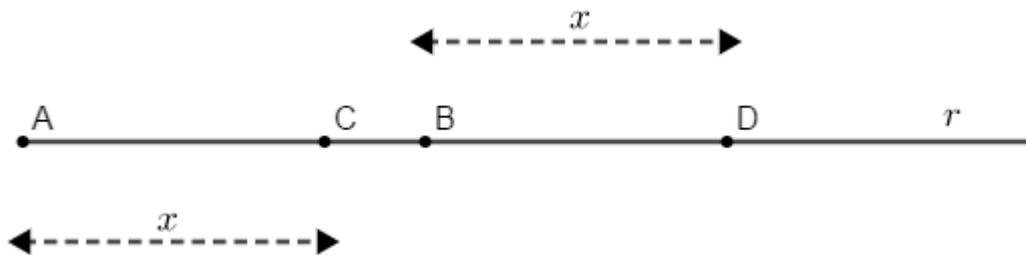


Fonte: O autor, 2019.

Dado que $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 4\overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, temos $10 = 5\overline{BC}$. Logo, $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$. Como $\overline{AC} = 4\overline{BC}$, concluímos que $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$.

1.3. Sejam A, B, C e D pontos de uma reta r , tais que $D \in \overrightarrow{AC}$, $B \in \overrightarrow{DC}$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$. Prove que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

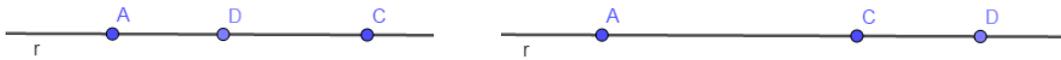
Figura 3: Problema 1.3 seção 1.1.



Fonte: O autor, 2019.

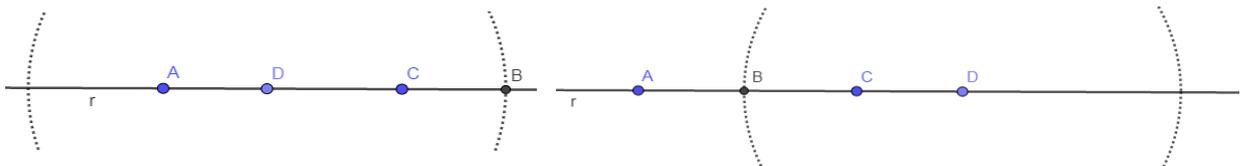
Dada a construção do problema nas notações da Figura 3, temos que $\overline{AD} = \overline{AB} + x = \overline{CD} + x \therefore \overline{AB} = \overline{CD}$.

Uma dificuldade neste tipo de problema é estabelecer uma configuração em que a posição relativa dos pontos atenda às propriedades descritas no enunciado. É importante ser sistemático e identificar as hierarquias e dependências entre os objetos. Começamos posicionando em r , os pontos A e C . Como $D \in \overrightarrow{AC}$, temos duas possibilidades de escolha para D : $D \in AC$ e $D \notin AC$ (veja Figura 3).

Figura 4: Ponto D problema 1.3 seção 1.1.

Fonte: O autor, 2019.

Posicionado o ponto D , as hipóteses feitas no enunciado determinam unicamente o ponto B . A condição $\overline{AC} = \overline{BD}$ exige que B pertença ao círculo centrado em D e de raio \overline{AC} . Como ele também pertence à reta, há apenas duas possibilidades. Um erro comum no momento de resolver este problema ocorre no momento de posicionar o ponto B , pois a semirreta \overrightarrow{DC} , indica o sentido de D para C e não de C para D . Apenas uma das interseções do círculo com a reta garante $B \in \overrightarrow{DC}$ (veja Figura 4).

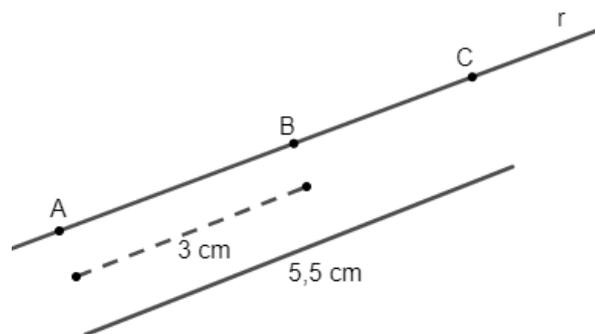
Figura 5: Ponto B problema 1.3 seção 1.1.

Fonte: O autor, 2019.

Observe que a resolução apresentada só se aplica ao caso em que $D \notin AC$. Mais ainda, o caso $D \in AC$ nos mostra que o problema está mal formulado!

1.4. Sobre uma reta r estão marcados três pontos A, B e C , tais que B está entre A e C , $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ e $\overline{AC} = 5,5 \text{ cm}$. Usando somente um compasso, marque sobre r um ponto D entre A e B , tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

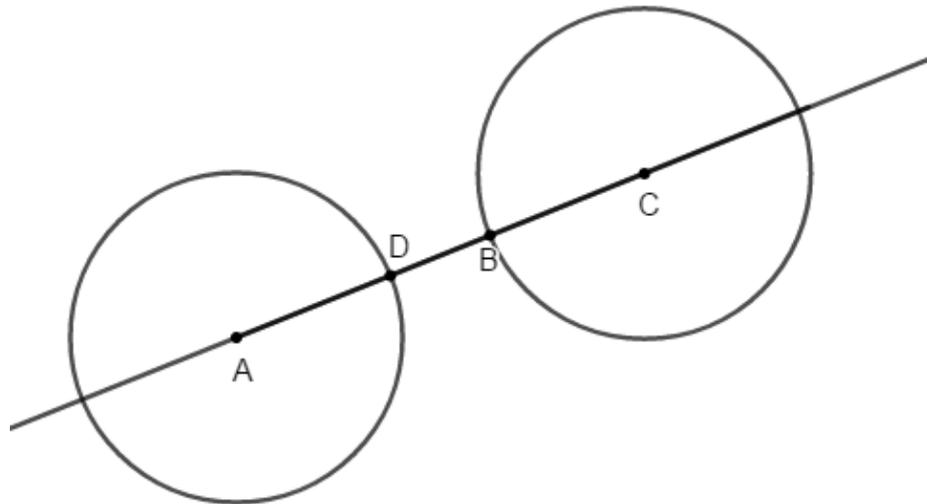
Figura 6: Problema 1.4 seção 1.1.



Fonte: O autor, 2019.

- 1) Com a ponta do compasso em B , fixemos sua extremidade em C .
- 2) Com o compasso calibrado, fixemos sua ponta em A ; A circunferência determinada de raio \overline{BC} intersecta r em dois pontos, dos quais um deles será $D \in \overline{AB}$.

Figura 7: Problema 1.4 seção 1.1.



Fonte: O autor, 2019.

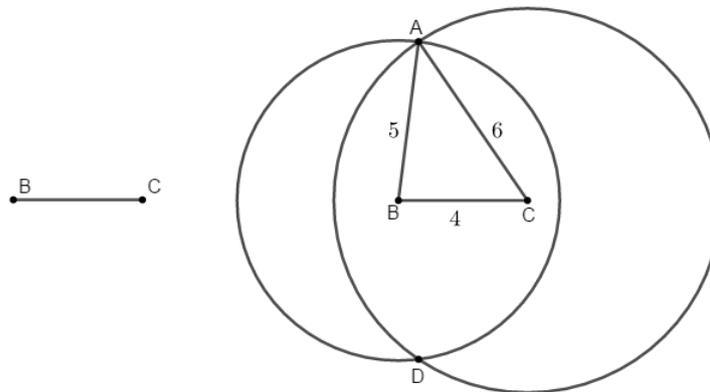
1.5. Marque no plano, com o auxílio de uma régua e compasso, três pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ e $\overline{BC} = 4\text{cm}$.

Descrição dos passos:

- 1) Com a régua façamos o segmento $\overline{BC} = 4\text{cm}$.
- 2) Com a ponta do compasso em B tracemos o círculo de raio 5cm .
- 3) Com a ponta do compasso em C tracemos o círculo de raio 6cm .
- 4) O ponto A será a interseção dos círculos descritos acima.

Nota: Existem dois pontos de interseção. Ambos atendem às condições.

Figura 8: Problema 1.5 seção 1.1.



Fonte: O autor, 2019.

Ainda que o problema tenha pedido apenas que exibíssemos três pontos do plano satisfazendo a três condições, é importante destacar que o procedimento adotado na resolução é exaustivo no sentido de ilustrar que a única configuração de três pontos do plano que satisfazem às condições dadas é aquela em que os pontos A , B e C são vértices de um triângulo em que $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ e $\overline{BC} = 4\text{cm}$. Essa conclusão é fruto de um argumento que será recorrente na resolução de diversos problemas e que está aqui antecipado: o uso dos chamados lugares geométricos. Uma vez escolhido o segmento BC , ao traçarmos o círculo de raio 5cm centrado em B , estamos restringindo nossa atenção a todos os pontos do plano que distam 5cm de B . Como queremos escolher A de modo que $\overline{AB} = 5\text{cm}$, vemos que A deve necessariamente pertencer a este círculo. Analogamente, como queremos $\overline{AC} = 6\text{cm}$, A deve necessariamente pertencer ao círculo de raio 6cm centrado em C . Assim, A fica determinado pela interseção desses dois círculos.

1.2 Problemas – Seção 1.2 (Ângulos)

2.1. Se a interseção de duas regiões convexas de um plano não for o conjunto vazio, prove que ela também é uma região convexa.

Sejam α e β duas regiões convexas tais que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Sejam $X, Y \in \beta$. Como α e β são regiões convexas, temos que $XY \subset \alpha$ e $XY \subset \beta$, portanto $XY \subset (\alpha \cap \beta)$. Assim, concluímos que $\alpha \cap \beta$ também será uma região convexa.

2.2. Calcule a medida do ângulo que, somado ao triplo de seu complemento, dá 210° como resultado.

Se β é um ângulo tal que $\beta + 3(90^\circ - \beta) = 210^\circ$, então $\beta = 30^\circ$.

2.3. Calcule as medidas de dois ângulos complementares, sabendo que o complemento do dobro de um deles é igual à terça parte do outro.

Se α e β são complementares, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$. Do enunciado sabemos também que $90^\circ - 2\beta = \frac{1}{3}\alpha$. Consequentemente, $\alpha = 270^\circ - 6\beta$.

Assim, temos o sistema:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha = 270^\circ - 6\beta \end{cases}$$

Logo, $\alpha = 54^\circ$ e $\beta = 36^\circ$.

2.4. Os ângulos α e β são opostos pelo vértice (OPV) e suas medidas em graus são expressas por $9x - 2$ e $4x + 8$, respectivamente. Calcule, também em graus, a medida de $\alpha + \beta$.

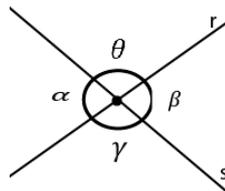
Do enunciado, temos: $\alpha = 9x - 2$ e $\beta = 4x + 8$. Como α e β são OPV, temos $\alpha = \beta$.

Assim, $9x - 2 = 4x + 8$. Isto é, $x = 2$. Então concluímos, $\alpha + \beta = 32^\circ$.

2.5. Se duas retas se intersectam, prove que um dos ângulos por elas formados é igual a 90° se, e só se, os quatro ângulos o forem.

Sejam r e s duas retas que se intersectam.

Figura 9: Problema 2.5, seção 1.2.



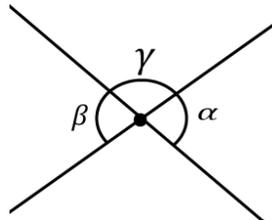
Fonte: O autor, 2019.

(\Rightarrow) Suponhamos $\beta = 90^\circ$. Assim, como α e β são OPV, temos: $\alpha = \beta = 90^\circ$. Como $\alpha + \theta = 180^\circ$, temos $90^\circ + \theta = 180^\circ$. Logo, $\theta = 90^\circ$. Temos que θ e γ são OPV, assim $\theta = \gamma = 90^\circ$. Portanto, todos os ângulos formados pela interseção possuem medidas iguais a 90° .

(\Leftarrow) Na recíproca, não há o que demonstrar. Se duas retas se intersectam e cada um dos quatro ângulos por elas formados é igual a 90° , um deles também é.

2.6. Na figura abaixo, o ângulo α mede a sexta parte do ângulo γ mais a metade do ângulo β . Calcule a medida de α .

Figura 10: Problema 2.6, seção 1.2.



Fonte: MUNIZ, 2013.

Do enunciado, temos:

$$\alpha = \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{2}\beta \quad (1)$$

Da figura podemos escrever:

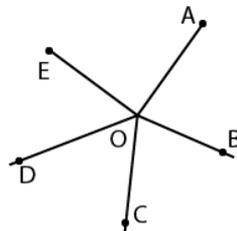
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 180^\circ & (2) \\ \alpha = \beta & (3) \end{cases}$$

Substituindo-se (2) e (3) em (1), temos: $\alpha = 45^\circ$.

2.7. Cinco semirretas, de mesma origem O , formam cinco ângulos que cobrem todo o plano e têm medidas em graus proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6. Calcule a medida do maior de tais ângulos.

Sejam as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} e \overrightarrow{OE} .

Figura 11: Problema 2.7, seção 1.2.

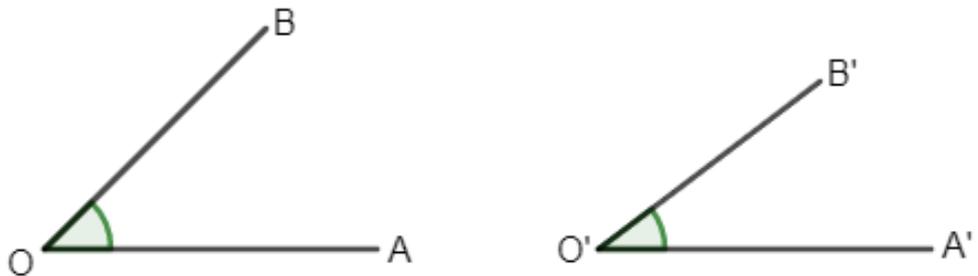


Fonte: O autor, 2019.

Os ângulos formados conforme o enunciado, proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6 podemos representar por $2a$, $3a$, $4a$, $5a$ e $6a$, respectivamente, onde “ a ” é a constante de proporcionalidade. Como cobrem todo o plano, podemos escrever: $2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 360^\circ$. Logo, $a = 18$. Assim, o maior dos ângulos será $6a = 108^\circ$.

2.8. Construa, com régua e compasso, um ângulo cuja medida seja igual à soma das medidas dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ da figura abaixo:

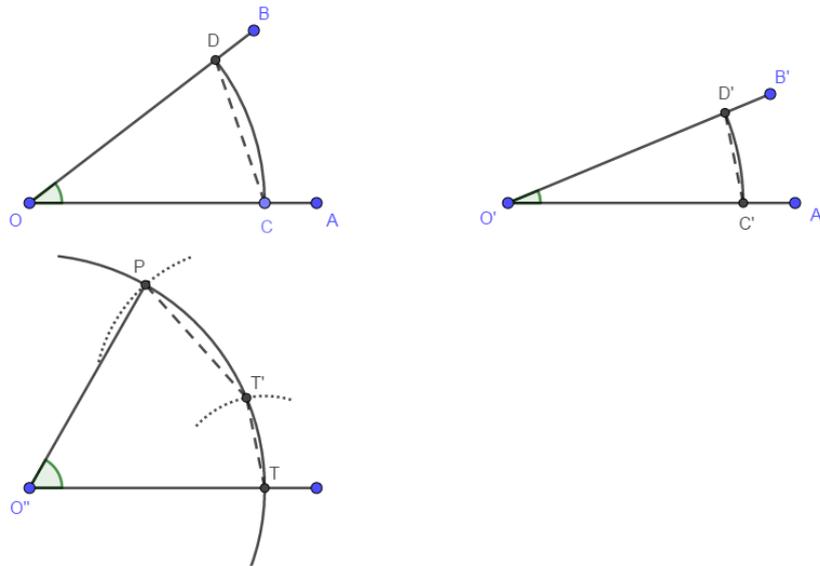
Figura 12: Problema 2.7, seção 1.2.



Fonte: MUNIZ, 2013.

- 1) Com a ponta do compasso em O , e com a extremidade sobre a semirreta OA , fixemos um raio R e rotacionamos o compasso no sentido anti-horário até a semirreta OB .
- 2) Os pontos C e D serão as interseções do arco gerado com as semirretas OA e OB .
- 3) Com a régua determinemos o comprimento do segmento CD .
- 4) Analogamente, repetiremos os passos anteriores para o ângulo $\angle A'O'B'$.
- 5) Seja P um ponto de um círculo Γ centrado em O'' de raio R .
- 6) Seja T' um ponto de um círculo Γ tal que $\overline{T'T'} = \overline{C'D'}$.
- 7) Seja P um ponto de um círculo Γ tal que $\overline{T'P} = \overline{CD}$.
- 8) $\angle PO''T = \angle AOB + \angle A'O'B'$.

Figura 13: Resolução do exercício 2.8, seção 1.2.



Fonte: O autor, 2019.

A Figura 14 ilustra um erro na resolução do exercício 2.8 devido obtenção do ângulo pedido através da soma do comprimento das cordas CD e $C'D'$ ao invés de sua transferência.

Figura 14: Resolução do exercício 2.8, seção 1.2.

1) Com a ponta do compasso em "O", e com a extremidade sobre a semirreta OA, fixemos um raio R e rotacionamos o compasso no sentido anti-horário até a semirreta OB.

2) Os pontos C e D serão as interseções do arco gerado pela rotação com as semirretas OA e OB.

3) Com a régua determinemos o comprimento do segmento CD.

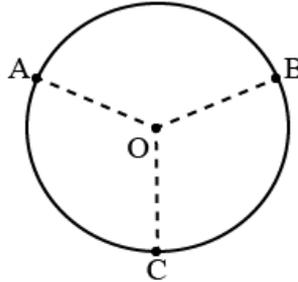
4) Analogamente, repetiremos os passos anteriores para o ângulo $A'O'B'$.

5) Agora tracemos um arco de origem O' , raio R e uma corda de comprimento $PT = CD + C'D'$.

Fonte: O autor, 2019.

2.9. Sobre um círculo de centro O marcamos três pontos A, B e C , tais que $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AC}$, onde os arcos a que nos referimos são os arcos menores correspondentes. Calcule as medidas dos ângulos $\angle AOB, \angle BOC$ e $\angle AOC$.

Figura 15: Problema 2.9, seção 1.2.



Fonte: O autor, 2019.

Como os ângulos cobrem todo o plano, temos:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{AOC} = 360^\circ \quad (1)$$

e sabemos que

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \quad (2)$$

Assim, $\widehat{AOB} = \frac{360}{3} = 120^\circ$.

2.10. Calcule a medida de um ângulo agudo, sabendo que a mesma excede a medida de seu complemento em 76° .

Se θ é o referido ângulo, então $\theta = (90^\circ - \theta) + 76^\circ$. Logo $2\theta = 166^\circ$, portanto $\theta = 83^\circ$.

2.11. Três semirretas de mesma origem O formam três ângulos que cobrem todo o plano. Mostre que ao menos um desses ângulos mede pelo menos 120° e ao menos um mede no máximo 120° .

Sejam θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos que cobrem todo o plano e são formados pelas três semirretas de mesma origem O . Daí $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 360^\circ$. Suponha, por absurdo, que todos os ângulos são menores do que 120° . Temos

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ,$$

o que é uma contradição. Portanto deve haver um ângulo medindo pelo menos 120° . De maneira similar mostramos que deve haver um ângulo medindo no máximo 120° .

1.3 Problemas – Seção 1.3 (Polígonos)

3.1. Prove a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo (Proposição 1.14) por indução sobre o número de lados do mesmo.

Para um polígono convexo de n lados, o número de diagonais é dado por $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Observando que $n \geq 3$, temos:

1) *Caso Base:* Para $n = 3$, temos $\frac{3(3-3)}{2} = 0$. O que é verdade já que os triângulos não possuem diagonais.

2) *Hipótese de Indução:* Suponhamos que a fórmula seja válida para todo polígono com n lados. Verifiquemos que a mesma é válida para um polígono de $n + 1$ lados. De fato, sejam A_1, A_2, \dots, A_{n+1} os vértices de um polígono P de $n + 1$ lados. Podemos caracterizar as diagonais de P como aquelas que partem de A_{n+1} e aquelas que não partem de A_{n+1} . Existem $n + 1 - 3 = n - 2$ diagonais do primeiro tipo. Por outro lado, uma diagonal do segundo tipo ou bem é uma diagonal do polígono de n lados com vértices A_1, A_2, \dots, A_n ou é o segmento A_1A_n . Pela hipótese de indução, existem $1 + \frac{n(n-3)}{2}$ diagonais do segundo tipo, de forma que o número total de diagonais de P é dado por

$$n - 2 + 1 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}.$$

Observando que $\frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2}$, temos que a fórmula é válida para $n + 1$.

3.2. A partir de um dos vértices de um polígono convexo podemos traçar tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Encontre o número de lados do polígono.

De cada vértice podemos traçar $n - 3$ diagonais e o número de diagonais de um hexágono é 9. Assim, $n - 3 = 9$ o que implica $n = 12$.

3.3. Três polígonos convexos têm número de lados iguais a três naturais consecutivos. Sabendo que a soma dos números de diagonais dos polígonos é 133, calcule o número de lados do polígono com maior número de diagonais.

Seja n o natural cujos lados dos polígonos são $n - 1, n, n + 1$. Assim, teremos:

$$\frac{(n - 1)(n - 1 - 3)}{2} + \frac{n(n - 3)}{2} + \frac{(n + 1)(n + 1 - 3)}{2} = 133,$$

portanto $n = 11$ ou $n = -8$ (não convém).

O polígono com mais diagonais é aquele que possui mais lados, portanto $n + 1$ lados. Assim, o número de lados do polígono procurado será 12.

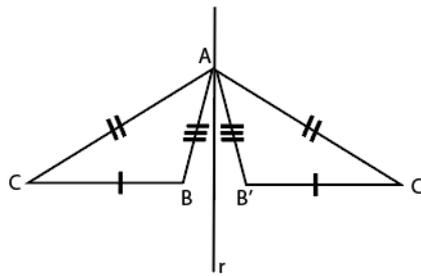
2. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

2.1 Problemas – Seção 2.1 (Os casos LAL, ALA e LLL)

1.1. (a) Dê um exemplo mostrando dois triângulos congruentes para os quais não seja possível mover rigidamente (i.e., sem deformar) um deles no plano até fazê-lo coincidir com o outro.

Consideremos uma reta r . Sobre r seja o ponto A e seja o ΔABC tal que B e C fiquem no mesmo semiplano dentro os dois determinados por r . Consideremos agora o $\Delta AB'C'$ tal que as distâncias de B e B' e C e C' sejam iguais em relação a r , isto é, B, B' e C, C' são simétricos em relação a r . Assim, os triângulos ABC e $AB'C'$ (Figura 16) serão congruentes, porém não podem ser movidos rigidamente no plano de modo que se superponham.

Figura 16: Triângulos congruentes que não podem ser movidos rigidamente.



Fonte: O autor, 2019.

(b) Em que diferem os dois triângulos congruentes do item (a) que justifique não podermos fazer tal movimento no plano?

Seus vértices correspondentes precisam ser simétricos em relação a uma reta genérica. Note que não necessariamente o ponto A do exemplo acima precisaria estar sobre r .

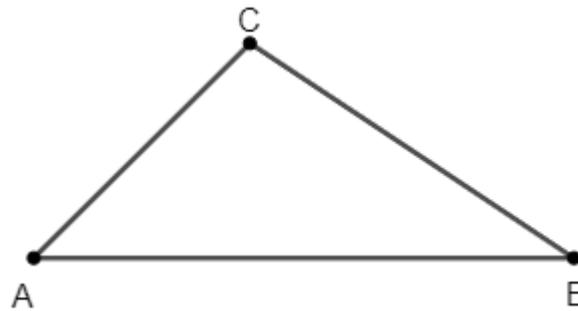
(c) Para o exemplo do item (a), mostre como mover rigidamente um dos triângulos no espaço até fazê-lo coincidir com o outro.

Através de uma rotação de 180° em relação a reta r .

2.2 Problemas – Seção 2.2 (Aplicações de congruência)

2.1. Construa com régua e compasso as bissetrizes internas do triângulo ABC da Figura 17.

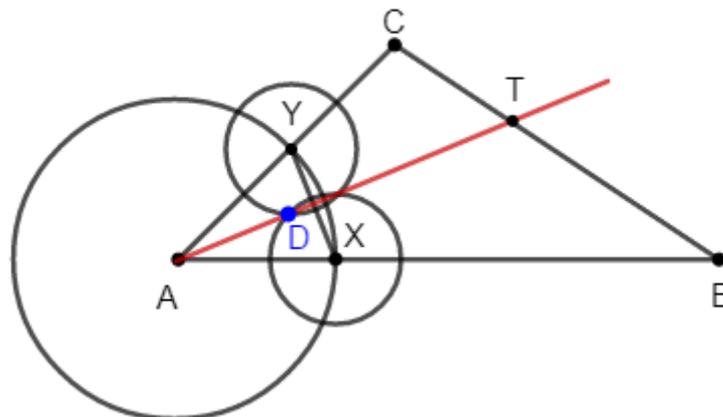
Figura 17: Problema 2.1, seção 2.2. Triângulo ABC .



Fonte: MUNIZ, 2013.

- 1) Centrando o compasso no vértice A , fixemos um raio r e marquemos os pontos X e Y sobre os lados AB e AC , que são as interseções do círculo de raio r com os lados.
- 2) Tracemos os círculos de raio s centrados em X e Y , tais que $s \geq \frac{XY}{2}$. Denote por D um ponto de interseção destes círculos.
- 3) Observe que os triângulos ADX e ADY por LLL são congruentes. Portanto, $\widehat{XAD} = \widehat{YAD}$ e a bissetriz do ângulo A será a porção \overline{AT} da semirreta AD . Segue análogo para as demais.

Figura 18: Construção do problema 2.1, seção 2.2.



Fonte: O autor, 2019.

2.2. Construa com régua e compasso as medianas do triângulo ABC da Figura 19.

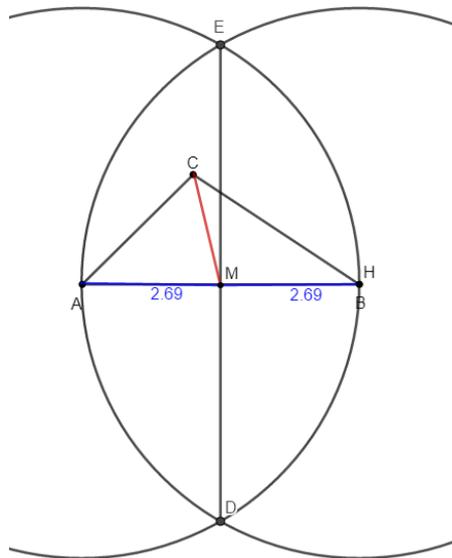
Primeiramente precisamos traçar o ponto médio do lado AB . Os demais seguem de forma análoga.

1) Tracemos os círculos de raio $r = \overline{AB}$ centrados em A e B .

2) Os círculos intersectam-se nos pontos D e E .

3) A interseção entre os segmentos AB e DE será o ponto médio de AB , uma vez que, os triângulos DBE e DAE são congruentes por LLL . Portanto, $A\hat{E}M = B\hat{E}M$. O critério LAL aplicado aos triângulos AEM e BEM nos mostra que BM e AM são congruentes.

Figura 19: Construção do problema 2.2, seção 2.2.



Fonte: O autor, 2019.

2.3. Construa com régua e compasso as alturas do triângulo ABC da Figura 17.

Construção das alturas

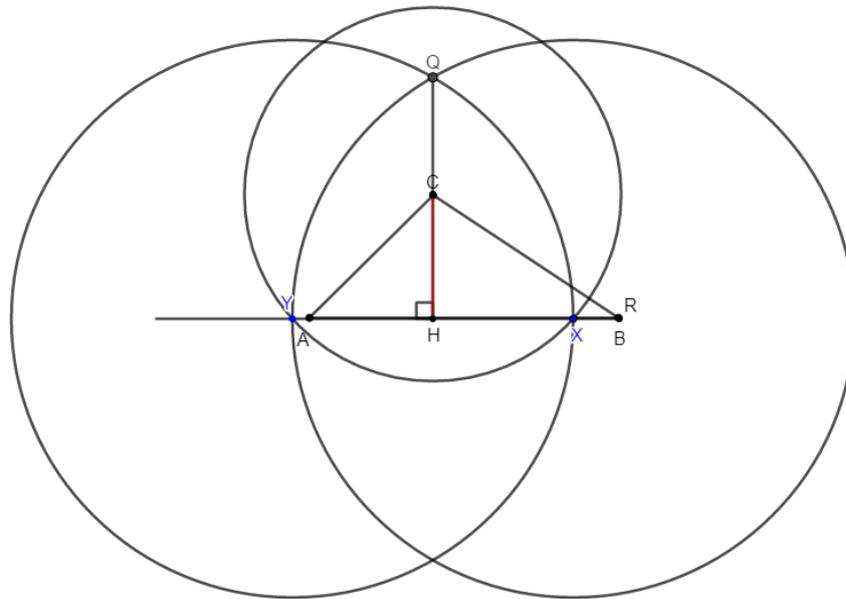
1) Com o compasso centrado em C , tracemos um círculo que intercepte \overline{AB} nos pontos X e Y .

2) Tal como no Exercício 2.2, tracemos H o ponto médio do segmento XY .

3) \overline{CH} será a altura relativa ao lado AB . De fato, $\overline{HX} = \overline{HY}$, assim os triângulos XHC e YHC , por LLL , serão congruentes, portanto $A\hat{H}C = Y\hat{H}C = X\hat{H}C = B\hat{H}C = 90^\circ$ (ângulos suplementares). Mais geralmente, $\overline{AB} \perp \overline{CH}$.

Analogamente, segue para as demais alturas.

Figura 20: Construção da altura CH do problema 2.3.



Fonte: O autor, 2019.

Note que como consequência da construção da altura apresentada no Problema 2.3, podemos concluir que se ABC é um triângulo isósceles de base BC e M é ponto médio de BC , então AM é mediana e altura relativas a BC . Este resultado será explorado no próximo problema para construir uma reta perpendicular a uma reta dada e que passe por um ponto externo a ela.

2.4. Sejam dados, no plano, um ponto A e uma reta r , com $A \notin r$. Dizemos que um ponto A' é o simétrico de A em relação à reta r quando $\overline{AA'} \perp r$ e r passar pelo ponto médio do segmento AA' . Mostre como construir A' com régua e compasso.

Pela definição de simetria, o ponto A' deve pertencer à reta que passa por A e é perpendicular à reta r . Além disso, ele deve ser um ponto da reta perpendicular que equidiste de r .

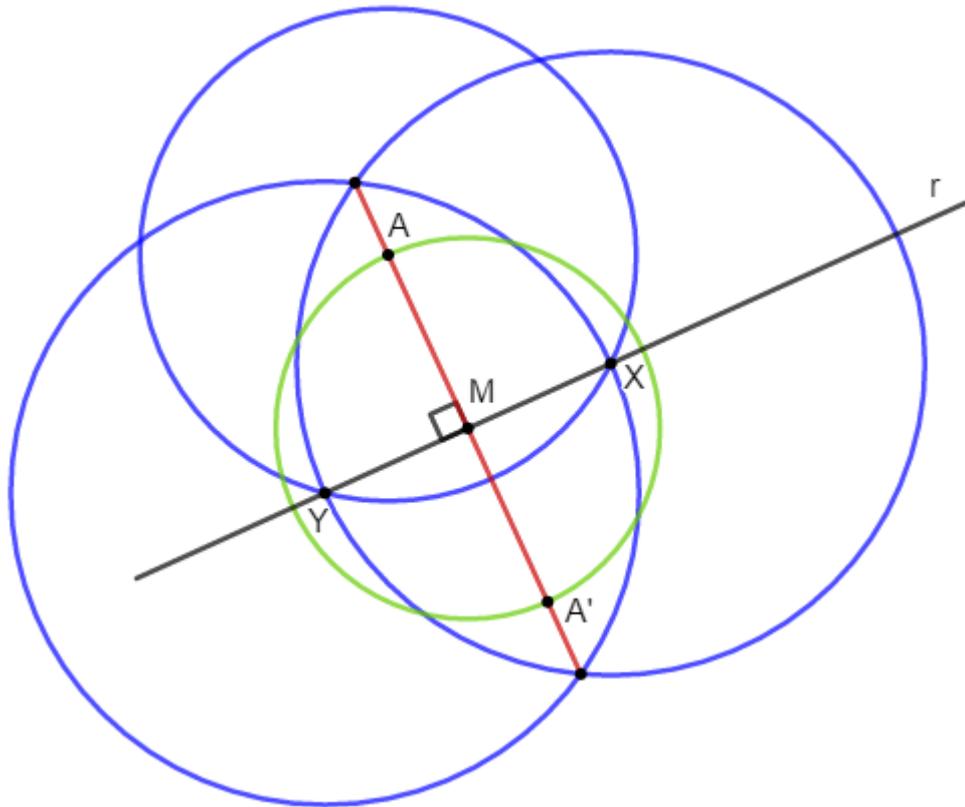
Reta perpendicular a r que passa por A :

- 1) Com o compasso centrado em A , tracemos o círculo que intercepte r nos pontos X e Y .
- 2) Tracemos o ponto M médio de \overline{XY} .
- 3) Seja t a reta suporte de AM . A reta t é perpendicular a r .

Determinação de A'

- 4) Calibrando o compasso centrado em M , tracemos o círculo de raio \overline{MA} .
- 5) As interseções deste círculo e a reta que contém A e M serão os pontos A e A' simétricos em relação a r .

Figura 21: Construção do problema 2.4, seção 2.2.

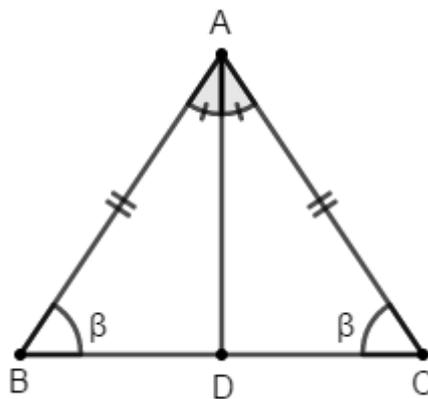


Fonte: O autor, 2019.

2.8. Se ABC é um triângulo isósceles de base BC , prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem.

Seja o ΔABC , isósceles de base BC (ver Figura 22). Tracemos a bissetriz interna AD relativa à base BC .

Figura 22: Triângulo isósceles ABC do problema 2.8.



Fonte: O autor, 2019.

Como o triângulo ABC é isósceles de base BC , temos que $\hat{A}CD = \hat{A}BD = \beta$ (ver Proposição 2.8). Assim, temos que os triângulos ACD e ABD são congruentes pelo caso ALA. Neste caso, da congruência extraímos que $CD = BD$, portanto AD também seria a mediana relativa à BC . Por outro lado, da mesma congruência temos que $\hat{C}DA = \hat{B}DA$, no entanto estes ângulos são suplementares, donde concluímos que $\hat{C}DA = \hat{B}DA = 90^\circ$, portanto AD também será altura relativa à BC .

Na resolução do Problema 2.8, é importante observar que exploramos a equivalência entre o problema original e a congruência dos triângulos ABD e ACD . Tendo agora este objetivo em mente, como o triângulo ABC é isósceles de base BC , sabemos que $AB = AC$ e $\hat{A}CD = \hat{A}BD = \beta$. A resolução apresentada suscita uma pergunta: há alguma vantagem assumir que AD é bissetriz? O conhecimento de um ângulo e um lado de ABC nos remete aos casos de congruência ALA ou LAL. Vemos que partir da bissetriz nos permite aplicar o primeiro deles e que se considerássemos AD mediana¹, obteríamos a congruência desejada. É importante, observar que partir de AD como altura relativa ao vértice A exige uma etapa intermediária. Como $\hat{C}DA = \hat{B}DA = 90^\circ$ e $\hat{A}CD = \hat{A}BD = \beta$, temos $\hat{B}AD = \hat{C}AD = 90^\circ - \beta$. Portanto, AD é bissetriz interna relativa à base BC e pelo caso ALA, deduzimos a congruência desejada. No entanto, nesta altura do livro de Muniz (2013), ainda não dispomos da Proposição 2.16 sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e não poderíamos deduzir que $\hat{B}AD = \hat{C}AD = 90^\circ - \beta$.

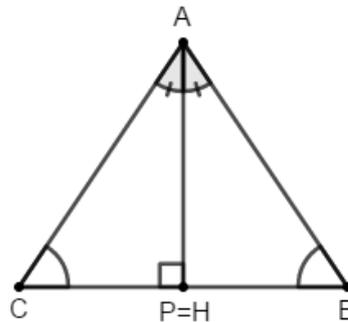
2.9. Sejam ABC um triângulo e P, M e H respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e altura relativas ao lado BC . Se P e H ou M e H coincidirem, prove que ABC é isósceles de base BC .

Caso 1) P e H coincidindo.

Sejam ABC um triângulo em que AP e AH representem respectivamente a bissetriz interna e altura relativas a BC . Suponha que $AP = AH$ (ver Figura 23).

¹ No caso da mediana, poderíamos ter usado também o caso LLL.

Figura 23: Caso 1 do problema 2.9.



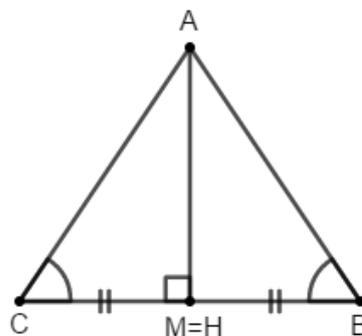
Fonte: O autor, 2019.

Desde que AH seja bissetriz interna e altura, temos $\widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ e $\widehat{HAC} = \widehat{HAB}$. Como os triângulos AHC e BHA compartilham o lado AH , pelo critério ALA , concluímos que são congruentes. Assim $AC = AB$, portanto o triângulo ABC será isósceles de base BC .

Caso 2) M e H coincidindo.

Sejam ABC um triângulo em que AM e AH representem respectivamente a mediana e altura relativas a BC . Suponha que $AM = AH$ (ver Figura 56).

Figura 24: Caso 2 do problema 2.9.



Fonte: O autor, 2019.

Desde que AH seja altura e mediana, teremos $\widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ e $HC = HB$. Como os triângulos AHC e AHB compartilham o lado AH , então pelo caso LAL serão congruentes. Sendo assim $AC = AB$, portanto o triângulo ABC será isósceles de base BC .

No Problema 2.8, provamos que se um triângulo é isósceles, as cevianas mediana, altura e bissetriz relativas a sua base coincidem. É interessante investigar se vale a recíproca. O Problema 2.9 nos mostra que basta que duas destas cevianas coincidam para que o triângulo

seja isósceles. Curiosamente, ele não considerou o caso em que a bissetriz e a mediana coincidem. Este caso será tratado mais adiante quando discutirmos os lugares geométricos.

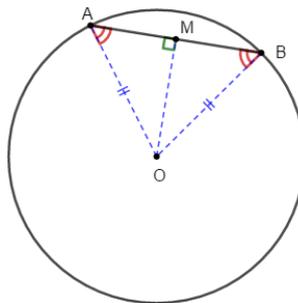
2.10. Seja Γ um círculo de centro O e AB uma corda de Γ . Se M é um ponto sobre AB , prove que

$$\overline{OM} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}.$$

Seja Γ um círculo de centro O e AB uma corda de Γ . Temos $\overline{OB} = \overline{OA}$, pois são raios de Γ . Isto é, ABO é isósceles de base AB .

(\Rightarrow) Suponha $M \in \overline{AB}$ e $\overline{OM} \perp \overline{AB}$. Como ABO é isósceles de base AB e OM é a altura relativa à base, pelo Problema 2.8, OM também é mediana. Consequentemente, $\overline{AM} = \overline{BM}$.

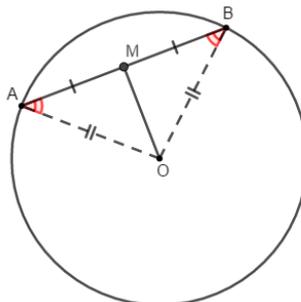
Figura 25: Ilustração da primeira parte da demonstração do problema 2.10.



Fonte: O autor, 2019.

(\Leftarrow) Desde que $\overline{AM} = \overline{MB}$, verificamos que os triângulos OBM e OAM são congruentes pelo critério LLL, já que compartilham o lado \overline{OM} e $\overline{OB} = \overline{AO}$. Assim, os ângulos correspondentes $\angle AMO$ e $\angle BMO$ serão retos, uma vez que são congruentes e suplementares.

Figura 26: Ilustração da segunda parte da demonstração do problema 2.10.

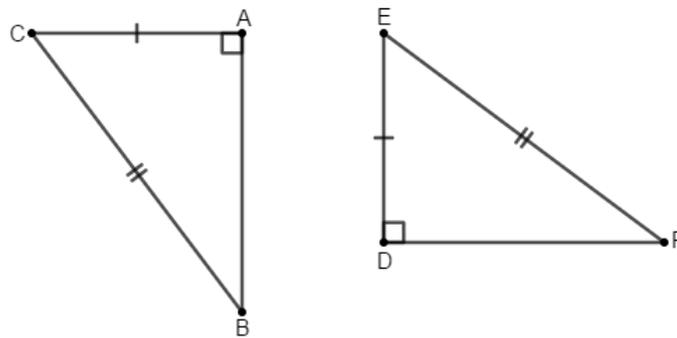


Fonte: O autor, 2019.

2.3 Problemas – Seção 2.3 (Paralelismo)

3.1. Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, prove que os triângulos são congruentes.

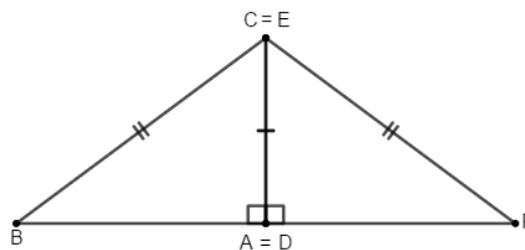
Figura 27: Referência do problema 3.1, seção 2.3.



Fonte: O autor, 2019.

Consideremos os triângulos ABC e DEF , retângulos respectivamente em A e em D e tais que $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DE}$. Com movimentos rígidos, como $\overline{AC} = \overline{DE}$ (Figura 28) e $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 90^\circ$, podemos formar o triângulo CBF fazendo coincidir os vértices C e E e A e D .

Figura 28: Triângulo CBF gerado através de movimentos rígidos.



Fonte: O autor, 2019.

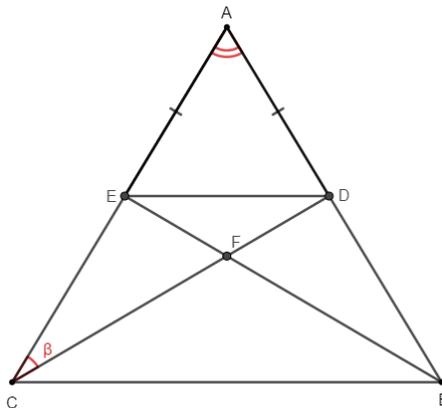
Assim, no triângulo CBF isósceles de base BF , temos que CD será sua altura relativa a base, portanto será mediana também com $\overline{BD} = \overline{DF}$. Pelo critério LLL concluímos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Convém aqui observar o argumento apresentado para resolução do Problema 2.8 nos mostra que em um triângulo isósceles as cevianas mediana, altura e bissetriz relativas a sua base coincidem. Além disso, elas dividem o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos congruentes. Este último aspecto foi explorado na resolução do Problema 3.1

3.2. ABC é um triângulo isósceles de base BC e $D \in AB, E \in AC$ são pontos tais que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Sendo F o ponto de interseção dos segmentos CD e BE , mostre que $\overline{BF} = \overline{CF}$.

Seja ΔABC (Figura 29) um triângulo isósceles de base BC e tal que $DE \parallel BC$. Como ABC é isósceles, temos $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \theta$.

Figura 29: Triângulo ABC do problema 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

Como $DE \parallel BC$, temos $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \theta$, portanto² $AE = AD$. Assim, concluímos que $\Delta ACD \equiv \Delta ABE$ já que $\overline{AC} = \overline{AB}, \overline{AD} = \overline{AE}$ e ambos compartilham o ângulo do vértice A . Denotando $\widehat{ACD} = \beta$, temos que $\widehat{ABE} = \beta$. No entanto, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \theta$, e podemos escrever $\widehat{EBC} = \widehat{DCB} = \theta - \beta$. Assim, concluímos que o triângulo FBC é isósceles de base BC , portanto $\overline{BF} = \overline{CF}$.

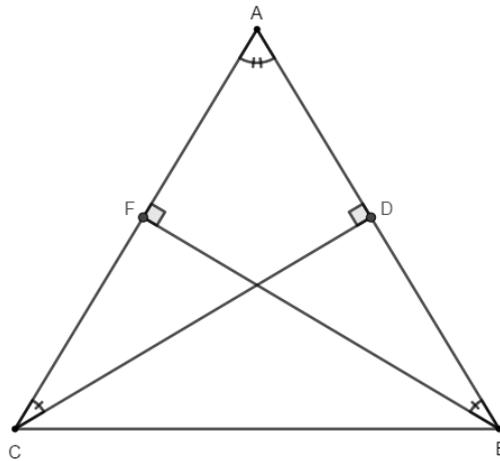
3.3. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC . Prove que as alturas, medianas e bissetrizes internas relativas aos lados AB e AC têm comprimentos iguais.

1) Alturas

² Aqui estamos usando a validade da recíproca da Proposição 2.10: Se no triângulo ABC , temos $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, então ABC é isósceles de base BC . Para provar tal resultado, basta usar o caso LAAo (Corolário 2.19).

Sejam CD e BF respectivamente as alturas relativas aos lados AB e AC . Como os triângulos ACD e ABF compartilham $\angle A$ e possuem um ângulo reto, então $\widehat{ACD} = \widehat{ABF}$. Assim, por ALA concluímos que $\Delta ACD \equiv \Delta ABF$, portanto $\overline{BF} = \overline{CD}$.

Figura 30: Caso 1 do problema 3.3.

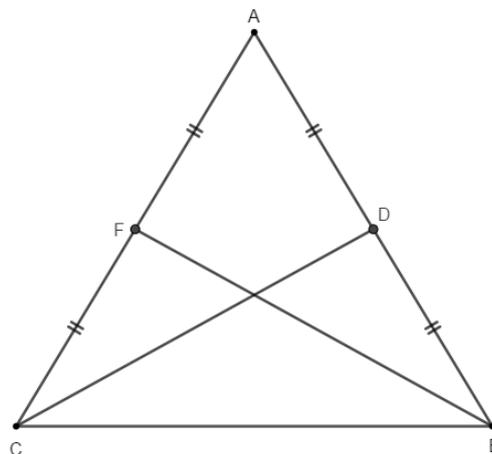


Fonte: O autor, 2019.

2) Medianas

Sejam CD e BF respectivamente as medianas relativas aos lados AB e AC . Como $\overline{AC} = \overline{AB}$, por LAL concluímos que $\Delta ACD \equiv \Delta ABF$, portanto $\overline{BF} = \overline{CD}$.

Figura 31: Caso 2 do problema 3.3.

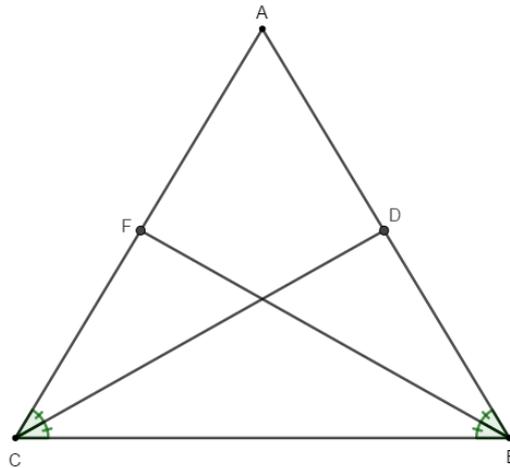


Fonte: O autor, 2019.

3) Bissetrizes

Sejam CD e BF respectivamente as bissetrizes relativas aos lados AB e AC . Como ABC é isósceles de base BC , temos $\hat{C} = \hat{B}$, portanto as bissetrizes CD e BF determinam quatro ângulos congruentes. Assim, como $\overline{AB} = \overline{AC}$, temos pelo critério ALA que $\Delta ACD \equiv \Delta ABF$ já que compartilham $\angle A$.

Figura 32: Caso 3 do problema 3.3.



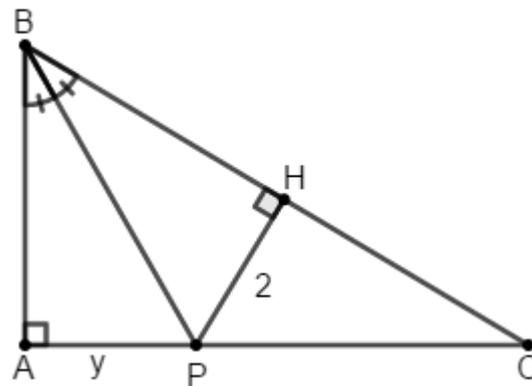
Fonte: O autor, 2019.

3.4. Em um triângulo ABC temos $\hat{A} = 90^\circ$. Sendo $P \in AC$ o pé da bissetriz interna relativa a B e sabendo que a distância de P ao lado BC é igual a 2cm, calcule o comprimento do segmento AP .

Desde que \overline{BP} é bissetriz de B , então $\hat{ABP} = \hat{PBH}$, onde $H \in BC$ é o pé da perpendicular a BC que passa por P .

Os triângulos ABP e BPH são congruentes, pois do Teorema Angular de Tales (Proposição 2.16), $\hat{APB} = \hat{HPB}$, portanto pelo critério ALA (Compartilham PB) concluímos a congruência. Assim, AP e PH são lados correspondentes congruentes e $y = 2$.

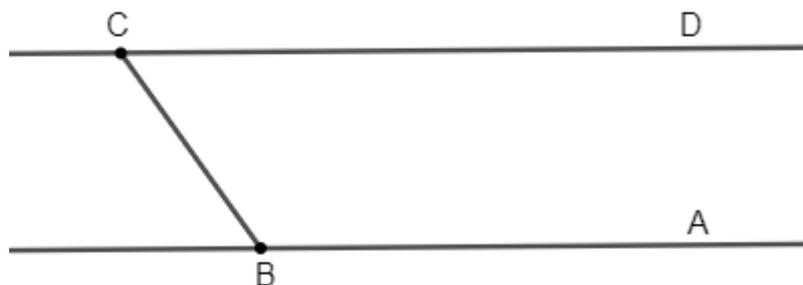
Figura 33: Referência do problema 3.4.



Fonte: O autor, 2019.

3.5. Na figura abaixo, as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} são paralelas. Sabendo que as medidas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são respectivamente iguais a $3x - 20^\circ$ e $x + 40^\circ$, calcule o valor de x em graus.

Figura 34: Retas paralelas, problema 3.5.



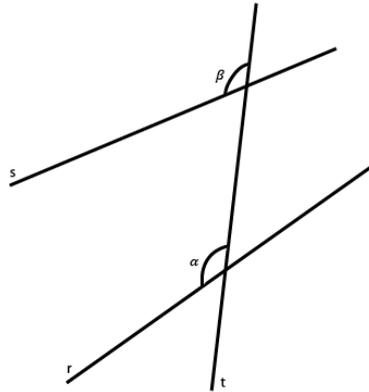
Fonte: MUNIZ, 2013.

Como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, então $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são suplementares. Assim, $3x - 20^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$ logo $x = 40^\circ$.

O Corolário 2.15 estabelece uma relação entre o paralelismo e a igualdade de pares de ângulos alternos internos ou colaterais internos. No Problema 3.6, mostraremos que há também uma relação análoga para os chamados ângulos correspondentes.

3.6. Na figura 35 abaixo, prove que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (os ângulos α e β são denominados correspondentes).

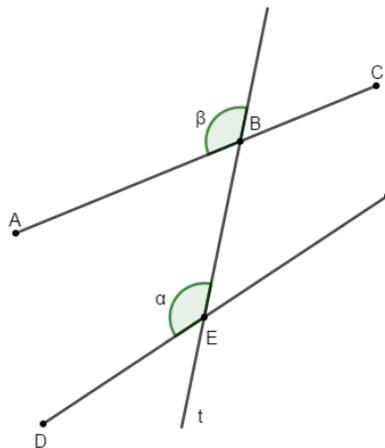
Figura 35: Referência do problema 3.6.



Fonte: MUNIZ, 2013.

(\Rightarrow) Suponha $r \parallel s$. Considere os pontos $A, B, C \in s$ e $D, E, F \in r$, conforme Figura 68.

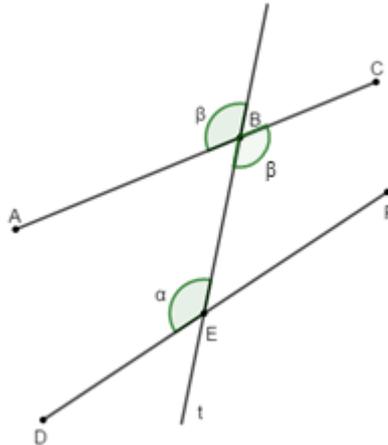
Figura 36: Referência da resolução da parte A do problema 3.6.



Fonte: MUNIZ, 2013.

Assim, $\widehat{CBE} = \beta$ pois são OPV. Como α e \widehat{CBE} são alternos internos, pelo Corolário 2.15, temos $\alpha = \widehat{CBE} = \beta$. Logo, $\alpha = \beta$.

Figura 37: Referência para parte B da resolução do problema 3.6.



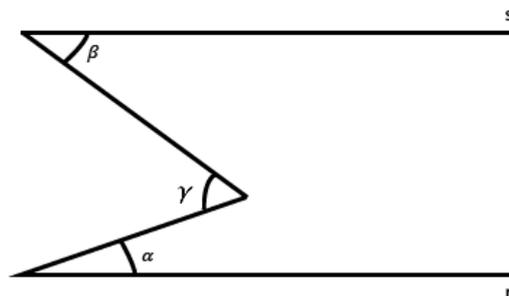
Fonte: O autor, 2019.

(\Leftarrow) Suponha $\alpha = \beta$. Considere os pontos $A, B, C \in s$ e $D, E, F \in r$, conforme Figura 37. Para provar a recíproca, usaremos novamente o Corolário 2.15: deduziremos que r e s são paralelas, mostrando que dois ângulos alternos internos têm mesma medida.

Da figura, $\widehat{CBE} = \beta$, pois são OPV. Note que ângulos $\angle CBE$ e $\angle BED$ são alternos internos. Da hipótese, temos $\alpha = \beta$. Assim, $\widehat{CBE} = \beta = \alpha = \widehat{BED}$ e $r \parallel s$.

3.7. Na figura 70, se $r \parallel s$, prove que $\alpha + \beta = \gamma$.

Figura 38: Referência para problema 3.7.



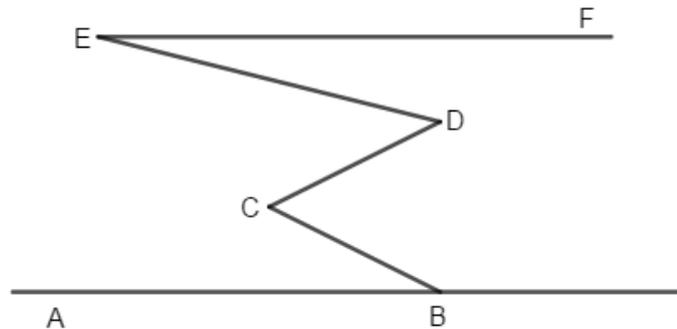
Fonte: MUNIZ, 2013.

Seja $t \parallel s \parallel r$ passando pelo vértice de γ .

Assim, explorando os conceitos de ângulos alternos internos, teremos $\gamma = \alpha + \beta$.

3.8. Na Figura 39, temos $\widehat{ABC} = 20^\circ$, $\widehat{BCD} = 60^\circ$, $\widehat{DEF} = 25^\circ$. Sabendo que as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{EF} são paralelas, calcule a medida do ângulo $\angle CDE$.

Figura 39: Referência para o problema 3.8.

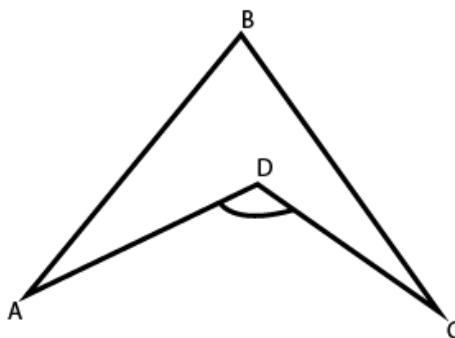


Fonte: MUNIZ, 2013.

Trace por D e C, respectivamente, as retas r e s paralelas a EF e AB. Assim, usando raciocínio análogo ao problema 3.7 teremos $\theta = 25^\circ + 40^\circ = 65^\circ$.

3.9. Na Figura 40, prove que $\widehat{ADC} = \widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD}$.

Figura 40: Referência para o problema 3.9.

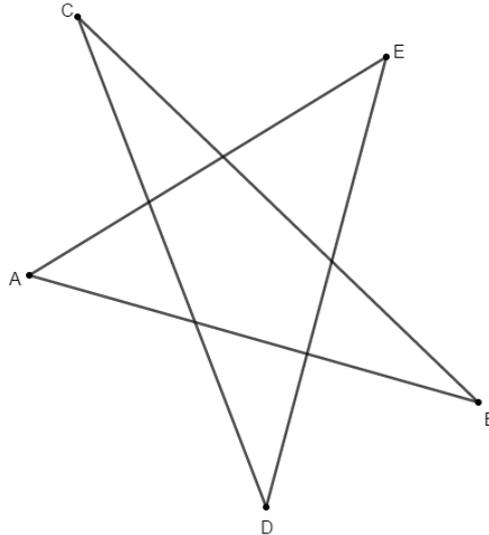


Fonte: MUNIZ, 2013.

Usaremos duas vezes o teorema do ângulo externo (Corolário 2.18) para estabelecer a igualdade pedida. Prolongue AD até interceptar BC em E. Assim, DEC será externo do triângulo ABE, portanto $\widehat{DEC} = \widehat{DAB} + \widehat{ABC}$. Por sua vez, ADC é externo do triângulo CDE, portanto $\widehat{ADC} = \widehat{DEC} + \widehat{DCE} = \widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD}$.

3.10. Calcule a soma dos ângulos nos vértices A, B, C, D e E da estrela de cinco pontas da Figura 41.

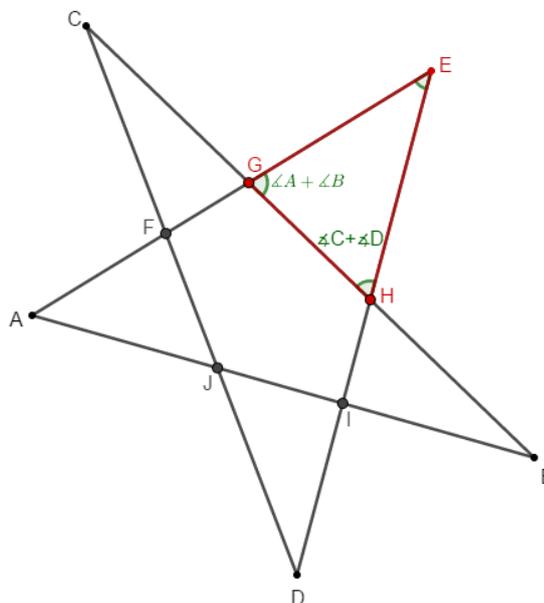
Figura 41: Estrela de cinco pontas, problema 3.10.



Fonte: MUNIZ, 2013.

Sejam os pontos F, G, H, I e J marcados na Figura 42. Os ângulos $\angle BGE$ e $\angle CHE$ são externos dos triângulos ABG e CDH respectivamente. Pelo teorema do ângulo externo (Corolário 2.18), temos, $\widehat{BGE} = \widehat{A} + \widehat{B}$ e $\widehat{CHE} = \widehat{C} + \widehat{D}$. No triângulo EGH , temos: $\widehat{E} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Figura 42: Referência para resolução do problema 3.10.



Fonte: O autor, 2019.

3.11. Dado um n -ágono convexo, faça os seguintes itens:

(a) Prove que o polígono pode ser particionado em $n - 2$ triângulos, utilizando-se para tanto $n - 3$ diagonais que só se intersectam em vértices do mesmo.

(b) Conclua que a soma dos ângulos internos do polígono é $S_i = 180^\circ(n - 2)$.

(c) Conclua que a soma de seus ângulos externos (um por vértice) do polígono é $S_e = 360^\circ$.

(a) *Seja o polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$. Mostremos por indução que dado um polígono convexo de n lados, este poderá ser dividido em $n - 2$ triângulos utilizando-se para tanto $n - 3$ que só se intersectam em vértices do mesmo.*

Seja T_n o número de triângulos formados em um polígono de n lados utilizando-se para tanto $n - 3$ que só se intersectam em vértices do mesmo. Para um polígono de 4 lados, é imediato que $T_4 = 4 - 2 = 2$ satisfazendo assim a hipótese o caso base para $n = 4$. Suponhamos agora, que para algum natural $n \geq 4$, tenhamos $T_n = n - 2$. Consideremos então, um polígono de $n + 1$ lados. Primeiramente, podemos observar que ao acrescentarmos um vértice a um polígono aumentamos em uma unidade o número de triângulos (utilize a Figura 76 para verificar esta afirmação), isto é, podemos escrever que:

$$T_4 = 2$$

$$T_5 = 2 + 1 = T_4 + 1$$

$$T_6 = 3 + 1 = T_5 + 1$$

⋮

$$T_n = T_{n-1} + 1$$

$$T_{n+1} = T_n + 1.0$$

Mas, pela hipótese temos $T_n = n - 2$, logo $T_{n+1} = T_n + 1 = (n - 2) + 1$. Assim, concluímos a hipótese ser válida para todo natural $n \geq 4$.

(b) *Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e cada polígono de n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos, concluímos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados será $S_i = 180^\circ(n - 2)$.*

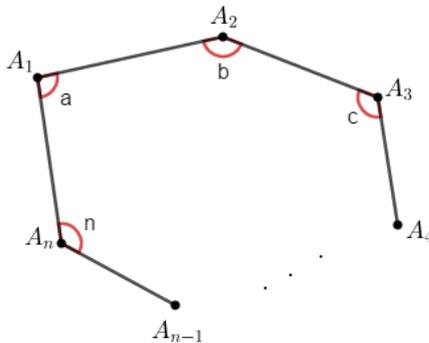
(c) *Dada a Figura 43, sabemos que $a + b + c + \dots + n = 180(n - 2)$ e cada ângulo externo será $180^\circ - a_i$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.*

Portanto, a soma S_e do ângulos externos será dada por $S_e = (180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) + \dots + (180^\circ - n) = 180^\circ \cdot n - (a + b + c + \dots + n)$.

Substituindo no segundo membro da equação a soma dos ângulos internos, teremos:

$$S_e = 180^\circ n - [180^\circ(n - 2)] = 360^\circ.$$

Figura 43: Referência para o item (c) do problema 3.11.

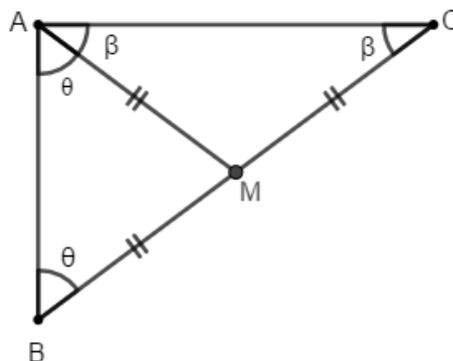


Fonte: O autor, 2019.

3.12. Em um triângulo ABC , seja M o ponto médio do lado BC . Se $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, mostre que $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Como M é ponto médio de BC então $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AM}$. Assim, pela Proposição 2.10, $\widehat{MBC} = \widehat{MAB} = \theta$ e $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = \beta$. Pela Lei Angular de Tales (Proposição 2.16), temos $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Assim, $(\theta + \beta) + \theta + \beta = 180^\circ$. Isto é, $\theta + \beta = 90^\circ$. Portanto, $\widehat{BAC} = \theta + \beta = 90^\circ$.

Figura 44: Referência para o problema 3.12.

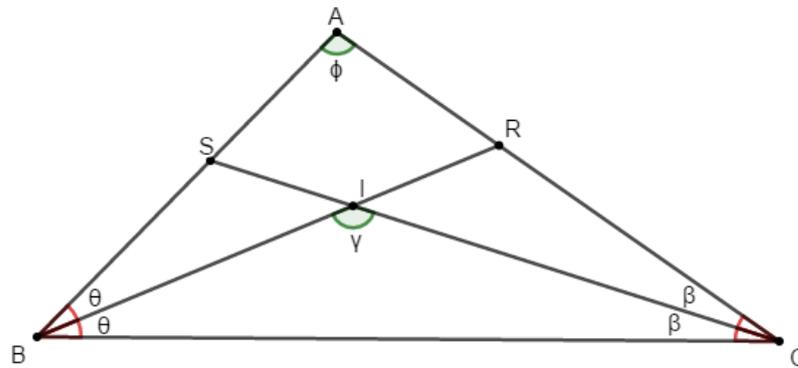


Fonte: O autor, 2019.

3.13. Se I é o ponto de interseção das bissetrizes internas traçadas a partir dos vértices B e C de um triângulo ABC , prove que $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

Sejam $2\beta = \angle ACB$, $2\theta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BIC$ e $\phi = \angle BAC$. Sendo BI e CI bissetrizes internas, no triângulo BIC teremos, $\theta + \gamma + \beta = 180^\circ$ (I). No triângulo ABC , temos: $2\theta + 2\beta + \phi = 180^\circ$ (II). De (I) e (II), temos: $\gamma = 90^\circ + \frac{\phi}{2}$.

Figura 45: Referência para resolução do problema 3.13.



Fonte: O autor, 2019.

3.14. Em um triângulo ABC , sabemos que $\angle A$ é igual à oitava parte da medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes internas dos vértices B e C . Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

Seja I a interseção das bissetrizes de B e C no triângulo ABC .

Do resultado anterior, Problema 3.13, temos:

$$\gamma = 90^\circ + \frac{\phi}{2} \quad (I)$$

Do enunciado, temos:

$$\phi = \frac{\gamma}{8} \quad (II)$$

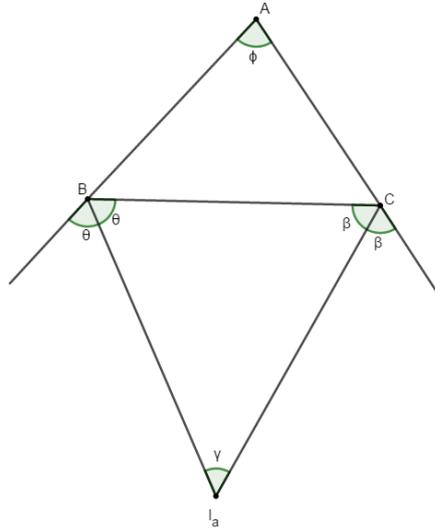
Assim, de (I) e (II), temos:

$$8\phi = 90^\circ + \frac{\phi}{2}.$$

Logo, $\phi = 12^\circ$.

3.15. Em um triângulo ABC , seja I_a o ponto de interseção das bissetrizes externas relativas aos vértices B e C . Prove que $\widehat{BI_aC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.

Figura 46: Referência para resolução do problema 3.15.



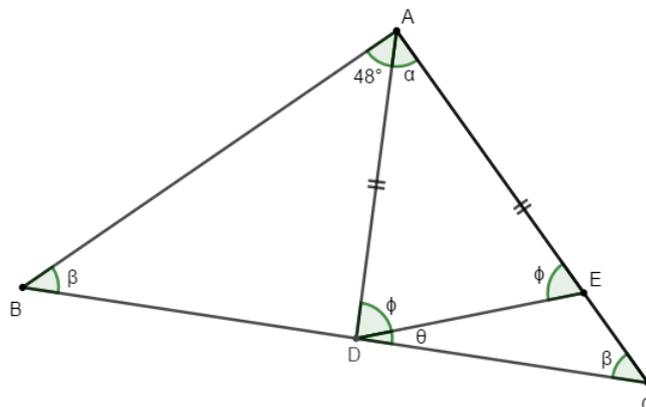
Fonte: O autor, 2019.

Da figura 80, temos: $\gamma + \theta + \beta = 180^\circ$ (I). No triângulo ABC , temos $\widehat{B} = 180^\circ - 2\theta$, $\widehat{C} = 180^\circ - 2\beta$ e $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Logo, $\phi + 180^\circ = 2(\theta + \beta)$ (II). De (I) e (II), temos: $\gamma = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$.

3.16. Um triângulo ABC é isósceles de base BC . Os pontos D sobre BC e E sobre AC são tais que $\overline{AD} = \overline{AE}$ e $\widehat{BAD} = 48^\circ$. Calcule \widehat{CDE} .

Na figura 47, temos o ABC triângulo isósceles de base BC , portanto $AB = AC$ e $\widehat{B} = \widehat{C} = \beta$.

Figura 47: Referência para o problema 3.16.



Fonte: O autor, 2019.

Do enunciado, temos $AD = AE$ e $\hat{B}AD = 48^\circ$.

Uma vez que, $\overline{AD} = \overline{AE}$, então $\hat{A}DE = \hat{D}EA = \phi$.

Assim, no triângulo ABC , temos: $2\beta + 48 + \alpha = 180^\circ$ (I).

No triângulo ADE , temos: $2\phi + \alpha = 180^\circ$ (II).

No triângulo CDE , ϕ é externo, então $\phi = \theta + \beta$ (III).

De (I) e (II), temos: $\theta - \beta = 24^\circ$ (IV).

De (III) e (IV), temos: $\theta = 24^\circ$.

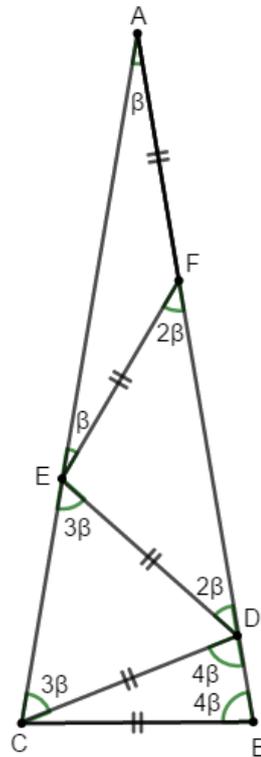
No Problema 3.16, a grande quantidade de incógnitas pode nos levar a estabelecer uma grande quantidade de equações na tentativa de determinar o valor de θ . Uma resolução mais simples envolve duas aplicações do teorema do ângulo externo (Corolário 2.18). Chegamos a ela se nos concentrarmos inicialmente em relações que envolvam diretamente θ . No triângulo CDE , temos $\theta + \beta = \phi$ (i). No triângulo ABD , temos $\theta + \phi = 48^\circ + \beta$ (ii). Segue de (i) e (ii) que $\theta = \phi - \beta = 48^\circ - \theta$. Logo, $\theta = 24^\circ$.

3.17. O triângulo ABC é isósceles de base BC . Os pontos D e F sobre o lado AB e E sobre o lado AC são tais que $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$. Calcule a medida do ângulo $\angle BAC$.

Neste problema iremos explorar sistematicamente o fato de que triângulos isósceles possuem dois ângulos iguais, como também o teorema do ângulo externo. Uma dificuldade muito recorrente em problemas de geometria está no fato de que muitas das vezes nos atentamos para as figuras óbvias e fechamos os olhos para outras figuras que fazem parte do mesmo problema. Assim, olhar para o triângulo AED , e perceber que o ângulo $\angle DEC$ é externo deste, muitas das vezes passa despercebido, pois ficamos tentados a olhar para o triângulo DEF .

Do enunciado, construímos a figura 48, com $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$. Como ABC é isósceles de base BC , temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\hat{C} = \hat{B}$.

Figura 48: Construção do problema 3.17.



Fonte: O autor, 2019.

Seja $\hat{A} = \beta$, temos no triângulo AEF que $\hat{AEF} = \beta$. O ângulo $\angle EFD$ é externo do triângulo AEF , então $\hat{EFD} = 2\beta$.

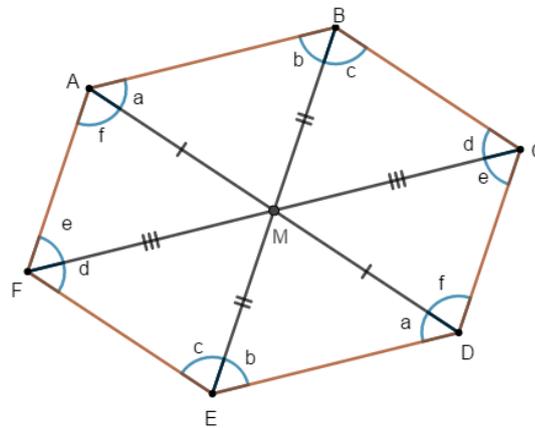
Analogamente, completamos a figura até $\hat{B} = 4\beta$. Pela Lei Angular de Tales, temos no triângulo ABC que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, assim $9\beta = 180^\circ$, logo $\beta = 20^\circ$.

3.18. $ABCDEF$ é um hexágono tal que as diagonais AD , BE e CF passam todas por um mesmo ponto M , que as divide ao meio. Prove que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$.

Pelo caso de congruência LAL , temos que $\triangle CMD \equiv \triangle AMF$, $\triangle CMB \equiv \triangle FME$ e $\triangle AMB \equiv \triangle DME$.

Assim, denotemos seus ângulos conforme a Figura 49, para os triângulos AMB , BMC e CMD . Verificando as congruências, observamos as igualdades dos ângulos correspondentes. Como a soma dos ângulos internos de um polígono é $S_i = 180(n - 2)$ então $S_i = 720^\circ = a + b + c + d + e + f = 360^\circ$. Assim, $(a + f) + (b + c) + (d + e) = 360^\circ$, portanto $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$.

Figura 49: Referência para o problema 3.18.

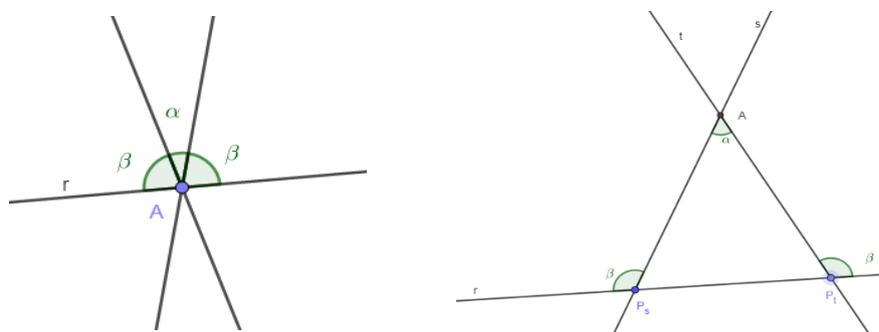


Fonte: O autor, 2019.

3.19. Dados, no plano, uma reta r e um ponto A , prove que há exatamente uma reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

Suponhamos que existam as retas s e t tais que $A \in s, A \in t$ e $s, t \perp r$. Assim, teremos que $s \cap t = \{A\}$. Vamos considerar dois casos: $A \in r$ e $A \notin r$. Além disso, vamos supor por absurdo, que $s \neq t$. Neste caso, elas são concorrentes em A e a medida α do ângulo entre s e t é diferente de 0° . Vamos denotar por β a medida do ângulo entre s e t e r . Se $A \in r$ (veja Figura 50), temos $2\beta + \alpha = 180^\circ$ e $2\beta = 180^\circ$. Isto é, $\alpha = 0^\circ$. Absurdo! Logo, $s = t$. Se $A \notin r$ (veja Figura 50), sejam $P_s = r \cap s$ e $P_t = r \cap t$. Como, s e t são concorrentes em A , $P_s \neq P_t$. Temos $2(180^\circ - \beta) + \alpha = 180^\circ$ e $2\beta = 180^\circ$. Isto é, $\alpha = 0^\circ$. Absurdo! Logo, $s = t$.

Figura 50: Referência para o problema 3.19.



Fonte: O autor, 2019.

No Problema 3.20, nos apropriaremos de técnicas que envolvem traçar segmentos com propriedades notáveis, tais como paralelas e perpendiculares. Salientamos que na resolução de um determinado problema pode-se traçar segmentos ou cevianas de qualquer natureza. Contudo

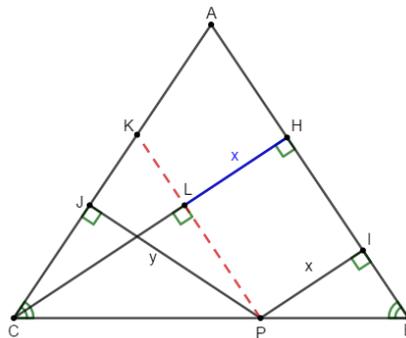
nem todas trarão sucesso e continuar a investigação fará parte no desenvolvimento do pensamento geométrico. Vale ressaltar que sempre será interessante iniciar uma investigação buscando elementos notáveis. A experiência conduzirá ao encurtamento das escolhas até o sucesso.

3.20. Em um triângulo ABC , isósceles de base BC , as alturas relativas aos lados iguais medem 10cm cada.

(a) Sendo P um ponto qualquer sobre a base BC , calcule a soma das distâncias de P aos lados AB e AC .

Seja H o pé da altura relativa a AB no triângulo ABC isósceles de base BC . Sejam x e y as distâncias de P aos lados AB e AC , respectivamente.

Figura 51: Referência para o problema 3.20 (a).



Fonte: O autor, 2019.

(a) Tracemos $PK \parallel AB$. Assim, obtemos $\overline{LH} = \overline{PI} = x$ e também o triângulo CPK que será isósceles de base CP , uma vez que CPK e PBA são ângulos correspondentes. Notemos que no triângulo CPK , CL e PJ representam alturas relativas aos lados que são iguais, portanto $\overline{CL} = \overline{PJ} = y$ (veja Problema 3.3 da Seção 2.3). Assim, como $\overline{CH} = \overline{CL} + \overline{LH}$, temos $x + y = 10\text{cm}$.

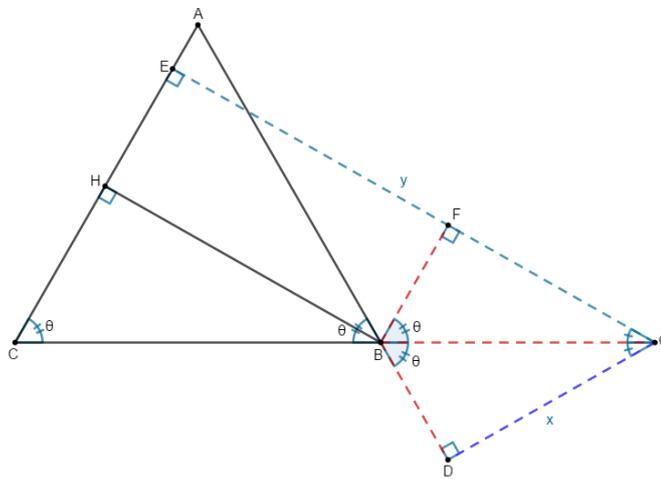
Nota: Pelo fato do ponto P ser qualquer, ele poderia coincidir com os vértices B ou C . Assim, umas das distâncias seria a própria altura e a outra seria zero.

(b) Sendo Q um ponto qualquer sobre a reta \overleftrightarrow{BC} mas não situado sobre a base BC , calcule a diferença das distâncias de Q às retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} .

Dado que ABC é isósceles de base BC , então $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\hat{C} = \hat{B}$. Seja Q um ponto de \overline{BC} que não pertence à base BC . Assim, $\overline{QE} = y$ e $\overline{QD} = x$ serão as distâncias de Q às retas \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Conforme o enunciado a altura $\overline{BH} = 10$.

Seja F o pé da perpendicular a QE que passa por B , conforme a Figura 86. Assim, teremos $\overline{BH} = \overline{EF}$. Da Temos, $\hat{CBA} = \hat{QBD} = \theta$ pois são OPV e $\hat{QBF} = \theta$ já que é correspondente ao ângulo BCA . Assim, por ALA concluímos que $\triangle BCA \equiv \triangle BQF$, portanto $\overline{QD} = \overline{QF} = x$. Assim, $\overline{QE} - \overline{QD} = y - x = \overline{EF} = 10\text{cm}$.

Figura 52: Referência do problema 3.20 (b).



Fonte: O autor, 2019.

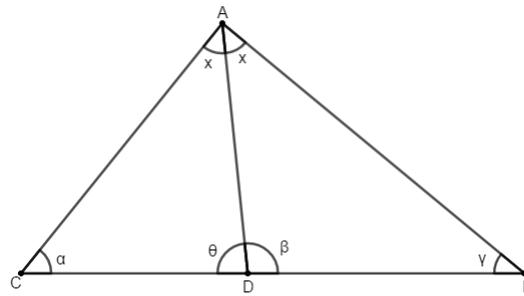
3.21. No triângulo ABC , o ponto $D \in BC$ é o pé da bissetriz interna relativa a A . Prove que $\hat{ADC} - \hat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

Usando a notação da Figura 53, queremos provar que $\theta - \beta = \gamma - \alpha$. Como AD é bissetriz, então: $\hat{CAD} = \hat{BAD} = x$. Nos triângulos ACD e ADB temos, respectivamente, que

$$\begin{cases} x + \alpha + \theta = 180^\circ & (I) \\ x + \beta + \gamma = 180^\circ & (II) \end{cases}$$

De (I) e (II), temos $\alpha + \theta = \beta + \gamma$, ou equivalentemente $\theta - \beta = \gamma - \alpha$.

Figura 53: Referência para o problema 3.21.



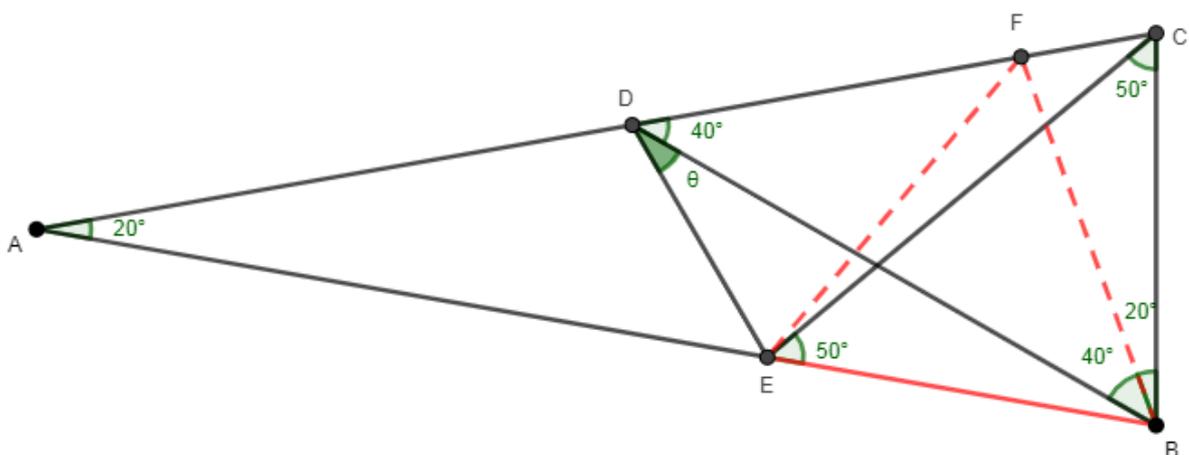
Fonte: O autor, 2019.

Na geometria, encontrar relações ou figuras notáveis na resolução de um problema constitui uma ferramenta poderosa para os casos mais elaborados, pois pelo fato de serem notáveis fornecem uma gama de informações e resultados já conhecidos. O Problema 3.22, devido às congruências nos permite vislumbrar a possibilidade de encontrar um triângulo equilátero.

3.22. O triângulo ABC , isósceles de base BC , é tal que $B\hat{A}C = 20^\circ$. Marcamos pontos $D \in AC$ e $E \in AB$ tais que $\angle DBC = 60^\circ$ e $E\hat{C}B = 50^\circ$. Calcule a medida de $\angle BDE$.

Queremos calcular o ângulo θ na Figura 54. Vamos explorar triângulos isósceles presentes ou construídos em ABC . Dado que ABC é isósceles de base BC , então $\hat{C} = \hat{B} = 80^\circ$. Consequentemente: (i) em BCE , temos $C\hat{E}B = 50^\circ$ e ele é isósceles de base CE e $\overline{BE} = \overline{BC}$; (ii) em BCD , temos $B\hat{D}C = 40^\circ$; e $D\hat{B}E = 20^\circ$.

Figura 54: Construção do problema 3.22.



Fonte: O autor, 2019.

Seja BF , com $F \in AC$ tal que o triângulo BFD seja isósceles de base BD . Assim, teremos $\overline{DF} = \overline{BF}$, com $\widehat{FDB} = \widehat{FBD} = 40^\circ$. Consequentemente, $\widehat{CFB} = 80^\circ$ e o triângulo CFB é isósceles de base CF . Portanto, $\overline{BF} = \overline{BC}$. Como $\widehat{FBE} = 60^\circ$, teremos que o triângulo FBE será equilátero, pois $\overline{BC} = \overline{BE} = \overline{BF}$, portanto $\overline{EF} = \overline{DF}$. No triângulo DFE isósceles de base ED , teremos $40^\circ + \theta + 40^\circ + 40^\circ + \theta = 180^\circ$. Assim, $\theta = 30^\circ$.

2.4 Problemas – Seção 2.4 (Desigualdade triangular)

4.1. Se dois lados de um triângulo isósceles medem 38cm e 14cm, calcule seu perímetro.

Temos duas possibilidades para os lados do triângulo:

a) 38, 14 e 14 $\therefore 38 < 14 + 14 = 28$ (absurdo!)

b) 38, 38 e 14 $\therefore 38 < 38 + 14 = 52$

Assim, o $2p = 38 + 38 + 14 = 90\text{cm}$.

4.2. Encontre o intervalo de variação de x no conjunto dos reais, sabendo que os lados de um triângulo são expressos em centímetros por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

$$x + 10 < 2x + 4 + 20 - 2x \therefore x < 14$$

$$2x + 4 < x + 10 + 20 - 2x \therefore x < \frac{26}{3}$$

$$20 - 2x < 2x + 4 + x + 10 \therefore x > \frac{6}{5}$$

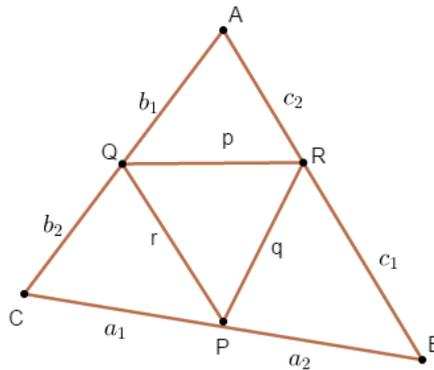
Assim, $\frac{6}{5} < x < \frac{26}{3}$.

4.3 Em um triângulo ABC , o lado AB tem por comprimento um número inteiro de centímetros. Calcule o maior valor possível para \overline{AB} , sabendo que $\overline{AC} = 27\text{cm}$, $\overline{BC} = 16\text{cm}$ e que $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$.

Seja $\overline{AB} = c$, $c \in \mathbb{N}$. Como $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$, pela Proposição 2.20, $c < 16 < 27$. Como queremos o maior valor inteiro para c , então $c = 15\text{cm}$.

4.4. Em um triângulo ABC , escolhemos aleatoriamente pontos $P \in BC$, $Q \in AC$ e $R \in AB$, todos diferentes dos vértices de ABC . Prove que o perímetro do triângulo PQR é menor que o perímetro do triângulo ABC .

Figura 55: Referência do problema 4.4.



Fonte: O autor, 2019.

No triângulo PQR : $p < b_1 + c_1$ (1)

No triângulo PQC : $r < a_1 + b_2$ (2)

No triângulo PBR : $q < c_1 + a_2$ (3).

De (1)+(2)+(3), temos:

$p + r + q < (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$ equivalente a $\overline{QR} + \overline{PQ} + \overline{RP} < \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}$.

4.5. Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $|b - c| < a$.

Da desigualdade triangular, temos $b < a + c$, logo $b - c < a$ e $c < a + b$, logo $c - b < a$.

Assim, $|b - c| < a$.

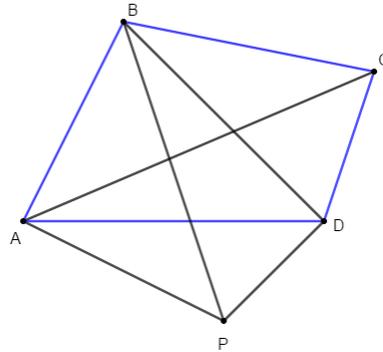
4.6. Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

Temos que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Como $a + b > c$, então $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) > c(a^2 - ab + b^2) = c[(a + b)^2 - 3ab] = c(c^2 - 3ab) = c^3 - 3abc$.

Assim, $a^3 + b^3 > c^3 - 3abc$ equivalente a $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

4.7. Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que o ponto P do plano para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínima é o ponto de concurso das diagonais de $ABCD$.

Figura 56: Referência para o problema 4.7.

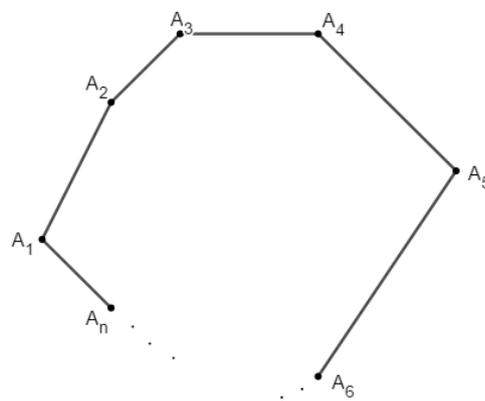


Fonte: O autor, 2019.

A estratégia aqui será explorar sistematicamente a desigualdade triangular e o fato de termos nela igualdade apenas quando há colinearidade. Seja P um ponto do plano (ver Figura 56). Analisando os pontos P, B e D , temos $\overline{PB} + \overline{PD} \geq \overline{BD}$ (1), e a igualdade ocorre somente quando P pertence ao segmento BD . Analisando os pontos P, A e C , temos $\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC}$ (2), e a igualdade ocorre somente quando P pertence ao segmento AC . Assim, segue de (1) e (2) que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} \geq \overline{BD} + \overline{AC}$, e a igualdade ocorre somente quando ocorrem as igualdades em (1) e (2), ou seja, quando P é o ponto de interseção das diagonais.

4.8. Seja $n \geq 3$ um inteiro dado. Prove que, em todo n -ágono convexo, o comprimento de cada lado é menor que a soma dos comprimentos de $n - 1$ lados restantes.

Figura 57: Referência para o problema 4.8.



Fonte: O autor, 2019.

Seja o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Utilizaremos a prova por indução:

Para $n = 3$, pela desigualdade triangular (Proposição 2.23), temos $A_1A_2 < A_2A_3 + A_1A_3$.

Supondo que seja válida para algum n que, $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$.

Consideremos o polígono de $n + 1$ lados, representado por $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$.

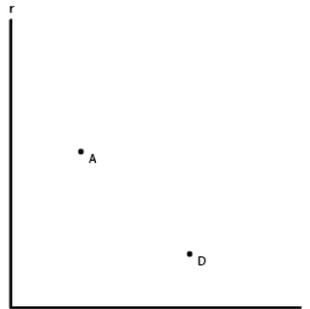
Assim, o vértice $n + 1$ formará o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$. Aplicando-se a desigualdade triangular

neste triângulo teremos $A_1A_{n+1} < A_1A_n + A_nA_{n+1} \therefore A_1A_{n+1} - A_nA_{n+1} < A_1A_n < A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n \therefore A_1A_{n+1} < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1}$.

Portanto, a hipótese será válida para todo $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

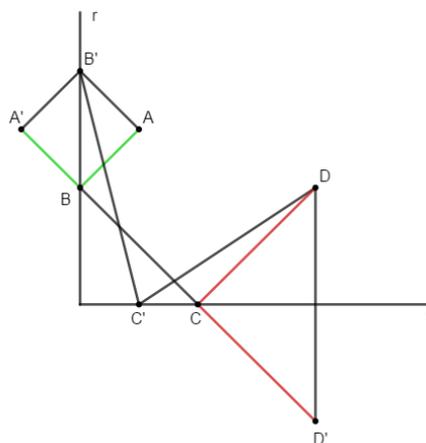
4.9. Na Figura 58, as semirretas r e s são perpendiculares. Construa com régua e compasso os pontos $B \in r$ e $C \in s$ para os quais a soma $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ seja a menor possível.

Figura 58: Referência para o problema 4.9.



Fonte: MUNIZ, 2013.

Figura 59: Esboço do problema 4.9.



Fonte: O autor, 2019.

Sejam A' e D' , respectivamente simétricos de A e D em relação as retas r e s .

Sejam B e C as interseções de $A'D'$ com r e s respectivamente.

Por construção, a soma $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ coincide com o comprimento do segmento $A'D'$. Resta provar que esta escolha nos dá a menor soma possível. Note que

Consideremos os pontos B' e C' , pertencentes a r e s , respectivamente, tais que $B' \neq B$ e $C' = C$. Da figura, temos $AB' = A'B'$. Podemos escrever, também $AB + BC = A'B + BC = A'C$.

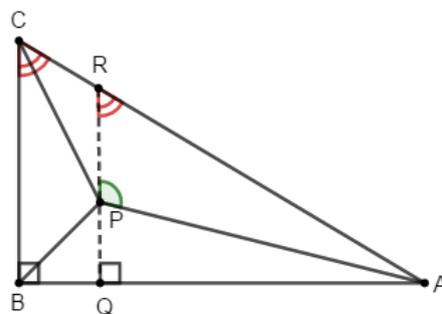
No triângulo $A'B'C$, temos $A'C < A'B' + B'C \therefore A'C < AB' + B'C$, mas $A'C = AB + BC$ então $AB + BC < AB' + B'C$.

De forma análoga podemos concluir para o restante do problema. Assim, os pontos B e C satisfazem que $AB + BC + CD$ seja mínimo. Vale ressaltar que B' e C' são pontos quaisquer e, suas posições não influenciam nas conclusões.

4.10. Seja ABC um triângulo retângulo em B e tal que $\overline{AB} > \overline{BC}$. Dado um ponto P no interior de ABC , prove que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

Neste problema, exploramos inicialmente uma técnica importante, que consiste em traçar um segmento paralelo a um dos lados do triângulo. Está técnica nos permite obter ângulos congruentes através de retas paralelas cortadas por transversal e, futuramente será útil também quando dispusermos dos conhecimentos de semelhança de triângulos. Contudo, o problema após esta ferramenta aplicada discorre certa dificuldade na continuidade da resolução que força a comparar comprimentos de segmentos através da desigualdade triangular, como também lembrar que num triângulo o maior lado fica oposto ao maior ângulo.

Figura 60: Referência para o problema 4.10.



Fonte: O autor, 2019.

No triângulo ABC , temos $AB > BC$. Queremos provar que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

Seja $QR \parallel BC$, com $Q \in AB$, $R \in AC$ e $P \in QR$.

O ângulo $\widehat{A\hat{P}R}$ é externo ao triângulo APQ . Consequentemente, ele é um ângulo obtuso. Assim, no triângulo APR , $\widehat{A\hat{R}P} < \widehat{A\hat{P}R}$ e $\overline{PA} < \overline{AR}$ (1).

No triângulo PRC , temos: $\overline{PC} < \overline{PR} + \overline{CR}$ (2).

No triângulo PBQ , temos: $\overline{PB} < \overline{BQ} + \overline{QP}$ (3).

De (1), (2) e (3), temos:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AR} + \overline{BQ} + \overline{QP} + \overline{PR} + \overline{CR} = \overline{AR} + \overline{BQ} + \overline{QR} + \overline{CR} \quad (4)$$

Como $AB > BC$, temos que: $\widehat{B\hat{A}C} < \widehat{A\hat{C}B} = \widehat{A\hat{R}Q}$. Portanto $\overline{QR} < \overline{AQ}$ (5).

De (4) e (5), temos:

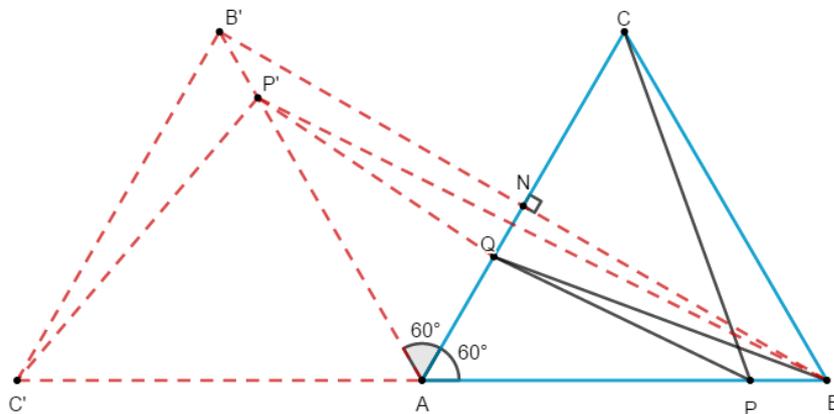
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AR} + \overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{CR} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

No Problema 4.11, utilizamos a estratégia de fazer aparecer o comprimento $2l$, pois o enunciado faz menção a este. Assim, reproduzir um novo triângulo equilátero compartilhando um vértice conforme a Figura 61 nos permitiu encontrar o triângulo $BC'P'$ cujo lado será $\overline{C'B} = 2l$. Muitas vezes será de grande valia construir objetos que não estejam no problema inicial, mas que sejam congruentes aos citados no problema.

4.11. Seja ABC um triângulo equilátero de lado l . Se P e Q são pontos situados respectivamente sobre AB e AC , distintos dos vértices de ABC , prove que $\overline{BQ} + \overline{PQ} + \overline{CP} > 2l$.

Seja o triângulo ABC equilátero. Prolongando-se BA , de um comprimento $\overline{AC'} = \overline{AB}$, podemos construir o triângulo $AC'B'$ também equilátero, com B' no mesmo semiplano que C em relação a \overline{AB} .

Figura 61: Referência para o problema 4.11.



Fonte: O autor, 2019.

Dada a construção (ver Figura 61), temos:

B' simétrico de B em relação AC ;
 C' simétrico de C em relação a AB' .

Dada a construção, P' o simétrico de P em relação a AC , pertencerá a AB' . Esta simetria vem da congruência de triângulos. Identifique! Utilize argumentos análogos aos vistos até aqui em outras resoluções. Nunca dê um passo adiante sem saber justificar o anterior, imagine sempre que esta pergunta poderá surgir durante uma explicação.

Temos também, que $\overline{C'P'} = \overline{CP}$, uma vez que $\Delta C'P'A \equiv \Delta APC$.

No triângulo $C'P'B$, temos $\overline{BC'} = 2l < \overline{BP'} + \overline{C'P'} = \overline{BP'} + \overline{CP}$ (1).

No triângulo $QP'B$, temos $\overline{BP'} < \overline{P'Q} + \overline{BQ} = \overline{PQ} + \overline{BQ}$ (2).

De (1) e (2), temos:

$$2l < \overline{BP'} + \overline{CP} < \overline{BQ} + \overline{PQ} + \overline{CP}.$$

4.12. Em um país, certo dia um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.

Se na cidade A , aterrissam aviões provenientes das cidades B e C , temos que

$$\begin{cases} \overline{BC} > \overline{AB} \\ \overline{BC} > \overline{AC} \end{cases}$$

pois a cidade A deverá ser a mais próxima de ambas e as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas.

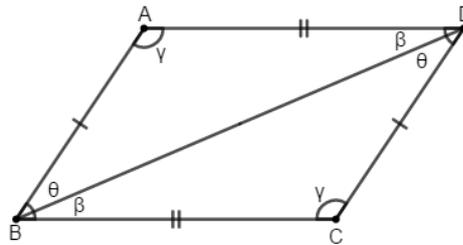
Seja $\widehat{CAB} = \theta$, $\widehat{ACB} = \beta$ e $\widehat{ABC} = \gamma$, teremos $\theta > \beta$ e $\theta > \gamma$, logo $2\theta > \beta + \gamma$, mas $\theta + \beta + \gamma = 180^\circ$, que equivale a $\beta + \gamma = 180^\circ - \theta$, daí $\theta > 60^\circ$. Suponhamos que pelo menos seis aviões aterrissaram na cidade A , no mesmo dia. Consideremos as cidades B, C, D, E, F e G . Como mostrado no caso do triângulo ABC citado anteriormente, teríamos que os ângulos formados por estas cidades duas a duas com a cidade A deverá ser maior que 60° sejam quais forem as cidades tomadas. Como esses ângulos cobrem todo o plano, sejam eles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$ e θ teríamos $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \rho + \theta > 360^\circ$ o que seria um absurdo. Portanto, concluímos que não podem aterrissar na mesma cidade mais de cinco aviões no mesmo dia.

Um problema interpretativo que apresenta um grau de dificuldade elevado sobretudo na forma como iniciar a solução.

2.5 Problemas – Seção 2.5 (Quadriláteros notáveis)

5.1. Se dois segmentos são iguais e paralelos, prove que suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

Figura 62: Referência para o problema 5.1.

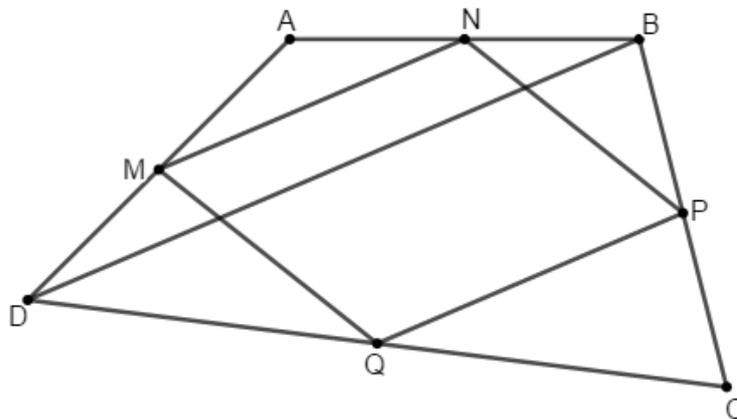


Fonte: O autor, 2019.

Sejam AB e CD , tais que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $AB \parallel CD$. Assim tracemos AD e BC . Seja BD a diagonal de $ABCD$. Desde que $AB \parallel CD$, então $\angle BDC = \angle DBA = \theta$, portanto por LAL, temos que os triângulos ABD e BCD são congruentes e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Assim, $\widehat{BDC} = \widehat{BDA} = \beta$ e $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \gamma$. No triângulo ABD , $\theta + \beta + \gamma = 180^\circ$. Sendo assim, temos em $ABCD$ que $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$, portanto seus lados opostos além de iguais são paralelos, logo, pela Proposição 2.28, $ABCD$ é paralelogramo.

5.2. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

Figura 63: Referência para o problema 5.2.

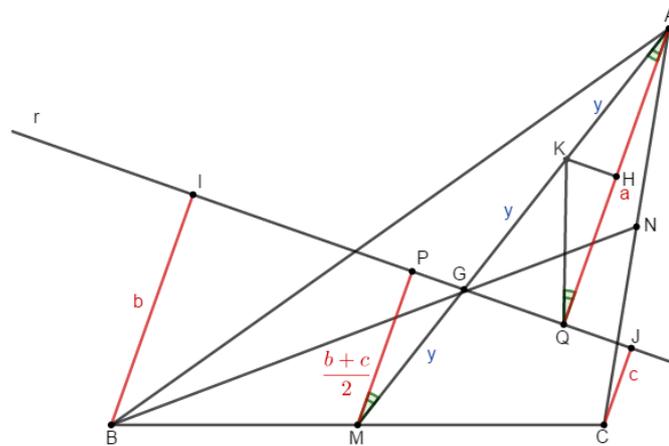


Fonte: O autor, 2019.

Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e M, N, P e Q pontos médios de seus lados, conforme Figura 63. Tracemos a diagonal BD . Nos triângulos ABD e BCD , teremos \overline{MN} e \overline{PQ} bases médias, respectivamente. Assim, pela Proposição 2.34, $\overline{MN} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{PQ}$ o implica $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$. Analogamente, provamos que $\overline{NP} \parallel \overline{MQ}$. Portanto, $MNPQ$ será paralelogramo.

5.3. Uma reta r passa pelo baricentro G de um triângulo ABC e deixa o vértice A de um lado e os vértices B e C do outro. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual à distância de A a r .

Figura 64: Referência para o problema 5.3.



Fonte: O autor, 2019.

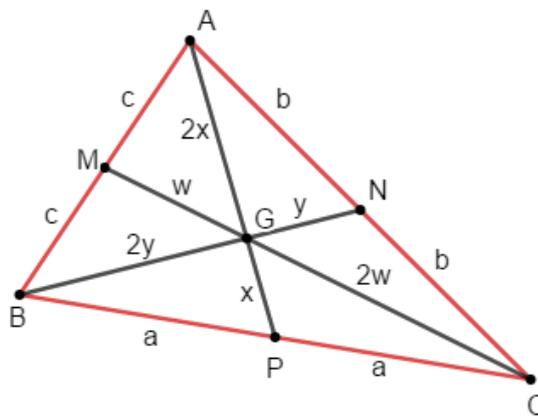
Seja o triângulo ABC , \overline{AM} e \overline{BN} suas medianas relativas aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, com $\{G\} = \overline{AM} \cap \overline{BN}$. Por G , tracemos a reta r e sejam \overline{MP} , $\overline{AQ} = a$, $\overline{CJ} = c$ e $\overline{BI} = b$, perpendiculares baixadas sobre r . Assim, temos $CJ \parallel MP \parallel BI$ e PM será base média de $BICJ$, logo, pela Proposição 2.38, $\overline{PM} = \frac{b+c}{2}$. Nos triângulos MPG e AQG , temos $\widehat{PMG} = \widehat{QGA}$, opostos pelo vértice, e $\widehat{PMG} = \widehat{GQA}$, pois são alternos internos. Desde que G é baricentro, então $\overline{AG} = 2\overline{GM} = 2y$. Tomando-se K médio de \overline{AG} , temos $\overline{KQ} = y$, pois será mediana relativa à hipotenusa, assim $\widehat{KQA} = \widehat{QAK}$. Seja \overline{KH} a altura relativa a base no triângulo KQA isósceles. Assim, os triângulos PMG , QKH e HKA são congruentes, logo $\overline{HQ} = \overline{AH} = \overline{PM} = \frac{b+c}{2}$. Portanto, $a = b + c$.

Exploramos neste problema um resultado importante (Corolário 2.42) sobre a mediana relativa a hipotenusa, pois esta mediana será a metade da hipotenusa, em muitos casos poderemos utilizar esta técnica, teoremas clássicos sobre figuras notáveis (aqui referimo-nos ao triângulo retângulo) sempre devem passar por nossa investigação em problemas mais elaborados. Podemos observar também o quão importante é saber encontrar triângulos congruentes, uma

ferramenta poderosa pouco explorada no ensino de geometria. Um vício comum que atrapalha em muitos casos a resolução de problemas mais elaborados, consiste no fato de carregarmos a figura com informações muita das vezes desnecessárias, por exemplo, neste problema traçar as três medianas atrapalhariam a visualização dos triângulos importantes, já que bastariam duas medianas para determinar o baricentro.

5.5. Prove que, em todo triângulo, a soma dos comprimentos das medianas é menor que $\frac{3}{2}$ do perímetro e maior que $\frac{3}{4}$ do perímetro do triângulo.

Figura 65: Referência para o problema 5.5.



Fonte: O autor, 2019.

Seja o triângulo ABC de medianas \overline{AP} , \overline{BN} , \overline{CM} e baricentro G . Assim, $\overline{AG} = 2x$ e $\overline{GP} = x$, $\overline{BG} = 2y$ e $\overline{GN} = y$ e $\overline{CG} = 2w$ e $\overline{GM} = w$. Denotando-se $\overline{AB} = 2c$, $\overline{BC} = 2a$ e $\overline{AC} = 2b$,

nos triângulos AGN , CGP e BGM , teremos, respectivamente

$$\begin{cases} 2x + y < b \\ 2w + x < a \\ 2y + w < c \end{cases}$$

desigualdades, temos: $3(x + y + w) < a + b + c$. Logo,

$$\overline{AP} + \overline{BN} + \overline{CP} < \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}).$$

Por outro lado, nos triângulos ABG , AGC e BGC , teremos respectivamente:

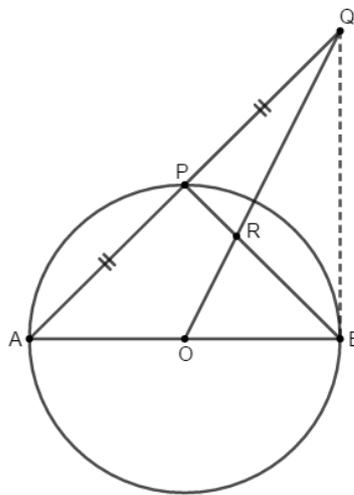
$$\begin{cases} 2c < 2x + 2y \\ 2b < 2x + 2w \\ 2a < 2y + 2w \end{cases}$$

Somando as desigualdades, temos: $2a + 2b + 2c < 4(x + y + w)$, como $2a + 2b + 2c = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ e $3(x + y + w) = \overline{AP} + \overline{BN} + \overline{CP}$, então $\overline{AP} + \overline{BN} + \overline{CP} > \frac{3}{4}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$.

5.6. (Inglaterra) Considere um círculo de centro O e diâmetro AB . Prolongue uma corda qualquer AP até um ponto Q , tal que P seja o ponto médio de AQ . Se $OQ \cap BP = \{R\}$, calcule a razão entre os comprimentos dos segmentos RQ e RO .

Se um problema envolve cevianas notáveis (medianas, alturas e bissetrizes), procure observar se existem interseção entre duas delas, caso positivo, você poderá concluir que esta interseção será um ponto notável e utilizar as propriedades decorrentes deles.

Figura 66: Referência para o problema 5.6.



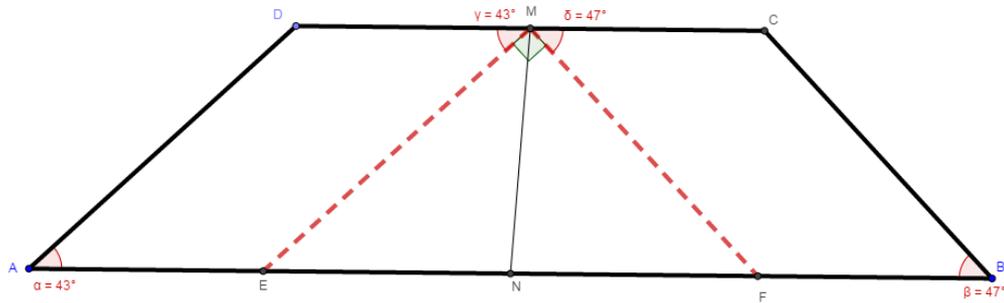
Fonte: O autor, 2019.

Seja o círculo de centro O dado na figura acima. Desde que O é o centro, então $\overline{AO} = \overline{OB}$, pois representam o raio. No triângulo ABQ , podemos observar que R é o baricentro, portanto $\overline{QR} = 2\overline{RO}$, logo $\frac{\overline{RQ}}{\overline{RO}} = 2$.

5.7. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $AB = 7\text{cm}$ e $CD = 3\text{cm}$ e lados não paralelos AD e BC . Se $\hat{A} = 43^\circ$ e $\hat{B} = 47^\circ$, calcule a distância entre os pontos médios das bases do trapézio.

Neste problema, ao observar que $43^\circ + 47^\circ = 90^\circ$ verificamos que poderemos formar um triângulo retângulo dentro do trapézio. Note que novamente recaímos num triângulo importante que são conhecidas algumas propriedades, por exemplo, da mediana relativa à hipotenusa.

Figura 67: Referência para o problema 5.7.



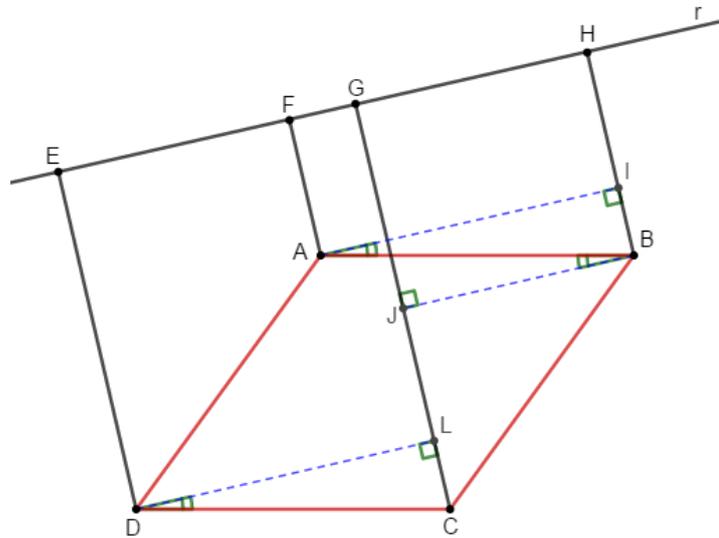
Fonte: O autor, 2019.

Dado o trapézio $ABCD$, de bases AB e CD . Sejam M e N pontos médios de CD e AB respectivamente. Trace por M paralelas aos lados AB e BC . Denote respectivamente por E e F , as interseções destas retas com AB , formaremos o triângulo MEF . Uma vez que, $\hat{A} = 43^\circ$ e $\hat{B} = 47^\circ$, então $\hat{M} = 90^\circ$. Além disso, pela Proposição 2.29, $\overline{AE} = \overline{DM} = \overline{CM} = \overline{FB}$. Assim, no triângulo MEF , o segmento MN será mediana relativa a hipotenusa, portanto $MN = \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

5.8. São dados no plano um paralelogramo $ABCD$, de diagonais AC e BD , e uma reta r que não intersecta $ABCD$. Sabendo que as distâncias dos pontos A , B e C à reta r são respectivamente iguais a 2, 3 e 6 centímetros, calcule a distância de D a r .

Uma classe de quadriláteros importantes, são os paralelogramos, pois possuem lados opostos paralelos e congruentes e muitas das vezes nos permitem comparar segmentos contidos em figuras mais complexas. Note que no problema temos um pentágono $CBHED$ e com os segmentos traçados observamos alguns paralelogramos (ver Figura 68) antes de recair numa congruência de triângulos. Procure verificar em problemas mais trabalhosos se existem paralelogramos disponíveis. Provavelmente serão de grande valia.

Figura 68: Referência para o problema 5.8.

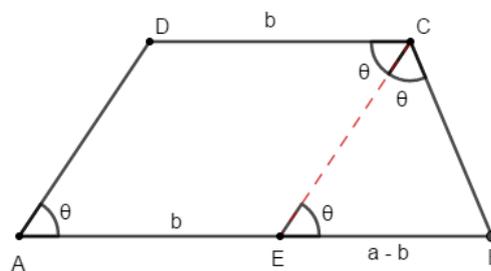


Fonte: O autor, 2019.

Sejam o paralelogramo $ABCD$ e E, F, G e H os pés das perpendiculares, traçadas a partir de D, A, C e B , respectivamente sobre r . A partir de A trace a perpendicular AI sobre HB , a partir de B , a perpendicular BJ sobre CG e a partir de D a perpendicular DL sobre CG . Da construção, temos $\overline{GL} = \overline{ED} = d$ e $\overline{BI} = 1$, pois $\overline{BI} = \overline{BH} - \overline{AF}$. Desde que, $AI \parallel BJ \parallel DL$, temos³ $\widehat{IAB} = \widehat{JBA} = \widehat{LDC}$. Assim, concluímos, pelo critério LAAo, que os triângulos ABI e CDL são congruentes portanto $\overline{CL} = \overline{BI} = 1$. Logo, $\overline{GC} = 6 = d + 1 \therefore d = 5$.

5.9. As bases AB e CD de um trapézio tem comprimentos a e b , respectivamente, com $a > b$. Se os lados não paralelos são AD e BC e $\widehat{BCD} = 2 \cdot \widehat{DAB}$, prove que $\overline{BC} = a - b$.

Figura 69: Referência para o problema 5.9.



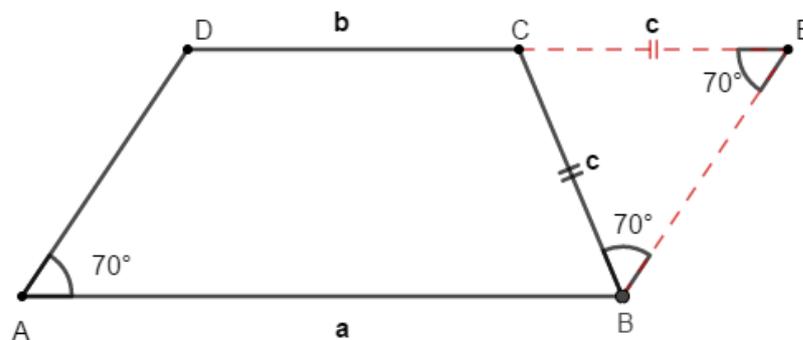
Fonte: O autor, 2019.

³ Para obter $\widehat{JBA} = \widehat{LDC}$, considere a igualdade de ângulos alterno internos formados pelas retas paralelas \overline{AB} e \overline{CD} e a transversal \overline{BJ} e, em seguida, a igualdade de ângulos correspondentes formados pelas retas paralelas \overline{BJ} e \overline{DL} e a transversal \overline{CD} .

Seja $CE \parallel AD$, onde E pertence à base AB . Assim, $ACDE$ será um paralelogramo, portanto, pela Proposição 2.28, $\widehat{DCE} = \theta$. O que nos leva a $\widehat{ECB} = \theta$. Desde que $AD \parallel CE$, então $\angle DAE = \angle CEB = \theta$ (veja o Problema 3.6). Assim, o triângulo BEC será isósceles de base EC , portanto $BC = BE = a - b$.

5.10. Seja $ABCD$ um trapézio no qual o comprimento da base maior AB é igual ao comprimento da base menor CD somado ao comprimento do lado não paralelo BC . Se o ângulo em A medir 70° , calcule o ângulo $\angle C$.

Figura 70: Referência para o problema 5.10.



Fonte: O autor, 2019.

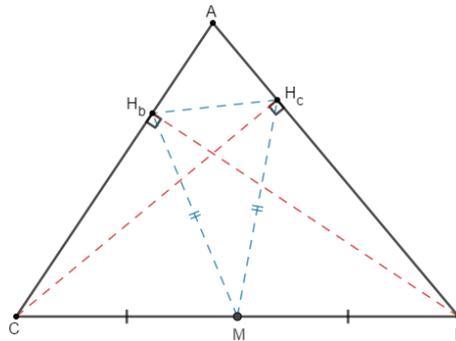
Do enunciado, temos $a = b + c$. Prolongando-se DC , até encontrar a paralela a AD , traçada por B , teremos o paralelogramo $ABDE$. Como $\overline{AB} = \overline{DE}$, teremos $\overline{CE} = c$. Assim, $\hat{A} = \hat{E} = 70^\circ = \widehat{EBC}$, portanto $\widehat{BCD} = 140^\circ$.

5.12. Um triângulo ABC é retângulo em A e tal que $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$. Calcule as medidas em graus de seus ângulos.

Seja AM a mediana relativa a BC , assim, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = y$. Portanto, o triângulo ABM é equilátero e $\hat{B} = 60^\circ$, logo $\hat{C} = 30^\circ$.

5.13. Em um triângulo ABC , sejam M o ponto médio do lado BC e H_b e H_c , respectivamente, os pés das alturas relativas a AC e AB . Prove que o triângulo MH_bH_c é isósceles.

Figura 71: Referência para o problema 5.13.



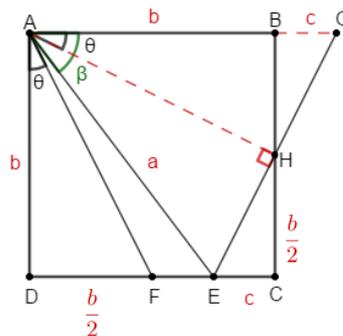
Fonte: O autor, 2019.

Desde que M é médio de BC , então $\overline{CM} = \overline{BM}$. Nos triângulos BCH_b e BCH_c , temos que H_bM e H_cM são medianas relativas a hipotenusa BC , portanto $\overline{H_bM} = \overline{CM} = \overline{H_cM}$. Assim, concluímos que o triângulo MH_bH_c é isósceles de base H_bH_c .

5.14. Sejam $ABCD$ um quadrado de diagonais AC e BD e E um ponto sobre o lado CD , tal que $AE = AB + CE$. Sendo F o ponto médio do lado CD , prove que $E\hat{A}B = 2 \cdot F\hat{A}D$.

Utilizaremos o fato da mediana relativa à base de um triângulo isósceles também ser altura e bissetriz interna. Também buscamos transferir segmentos a fim de fazê-los pertencer a um mesmo triângulo que notadamente seria isósceles. Esta desconfiância de que o triângulo isósceles seria útil motivou traçar o segmento \overline{AG} como mostra a solução abaixo.

Figura 72: Referência para o problema 5.14.



Fonte: O autor, 2019.

Sejam $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = a$ e $\overline{CE} = c$. Do enunciado, temos $a = b + c$. Prolongando-se AB até G , tal que $\overline{BG} = c$, o triângulo AGE será isósceles de base GE e $GE \cap BE = \{H\}$ será médio de BC , pois os triângulos BHG e ECH serão congruentes por LAA_0 . Portanto, $AH \perp GE$, pois a mediana relativa a base também é altura. Assim, por LAL , os triângulos AHG e AHE são congruentes. Por outro lado, por LAL , temos que os triângulos ADF e ABH são congruentes, logo $\widehat{DAF} = \widehat{HAG} = \theta$. Assim, $\widehat{EAB} = \beta = 2\theta \therefore \widehat{EAB} = 2 \cdot \widehat{FAD}$, dado que AH também é bissetriz.

5.15. (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um retângulo de diagonais AC e BD e M, N, P e Q pontos situados respectivamente sobre os lados AB, BC, CD e AD , todos distintos dos vértices do retângulo. Mostre que o perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é maior ou igual que o dobro da diagonal do retângulo. Quando a igualdade ocorre?

Neste problema, problema iremos utilizar um raciocínio análogo ao utilizado na resolução do Problema 4.11 da seção 2.4, isto é, faremos uma construção auxiliar que contemple um segmento de comprimento igual ao dobro da diagonal BD (por exemplo). Considere o retângulo $BHGE$ de diagonais HE e BG congruente a $ABCD$ tal que os pontos A, B e H sejam colineares (ver Figura 73). Assim, teremos $\overline{DG} = 2 \cdot \overline{BD}$.

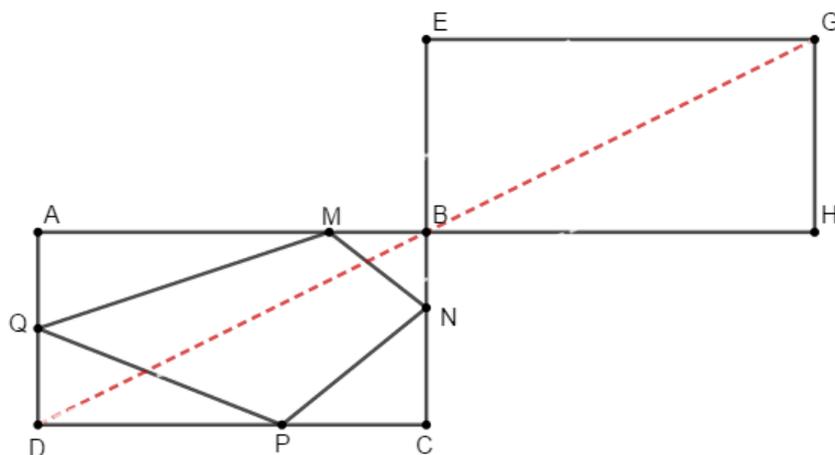
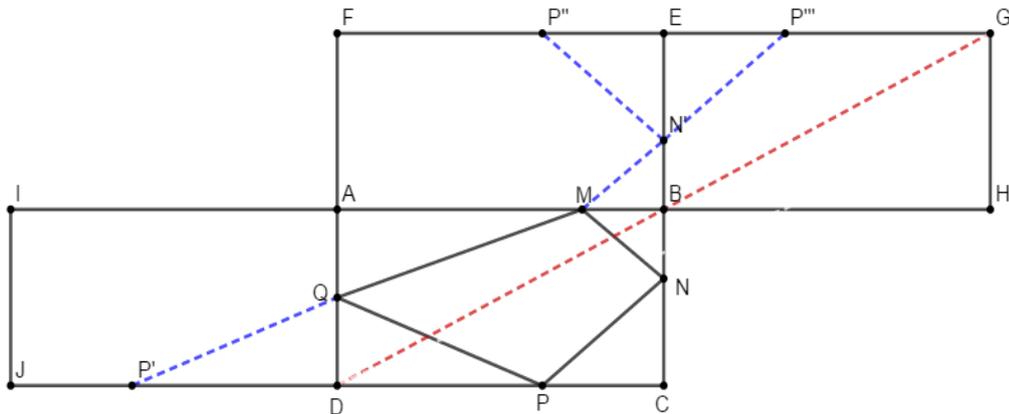


Figura 73: Construção auxiliar do problema 5.15 parte (a).

Consideremos ainda os seguintes passos:

- i) Seja o ponto P' simétrico de P em relação a D ;
- ii) Seja N' simétrico de N em relação a B ;
- iii) Seja P'' simétrico de P em relação a \overleftrightarrow{AB} ;
- iv) Seja P''' simétrico de P'' em relação a E (ver Figura 74).

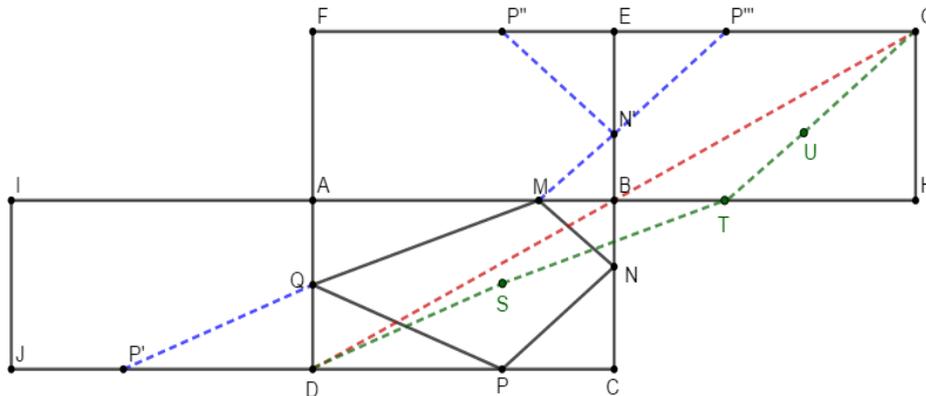
Figura 74: Construção auxiliar do problema 5.15 parte (b).



Fonte: O autor, 2019.

Observando a Figura 74, através de congruência de triângulos temos, $\overline{QP'} = \overline{QP}$, $\overline{MN} = \overline{MN'}$ e $\overline{P'N'} = \overline{PN} = \overline{N'P''}$. Portanto, concluímos que a poligonal $P'QMN'P'''$ tem comprimento igual a $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{QP} + \overline{MQ}$, isto é, igual ao perímetro do quadrilátero $MNPQ$. Ao fazermos coincidir P' com D , ou seja, deslocando P' a uma distância $\overline{P'D}$, podemos perceber que $\overline{P'D} = \overline{P'''G}$ (utilize as congruências verificadas para concluir), portanto ao deslocar a poligonal inteira obedecendo a distância percorrida por P' como descrito os pontos P' e P''' coincidirão com os pontos D e G , respectivamente (ver Figura 75).

Figura 75: Construção auxiliar do problema 5.15 parte (c).



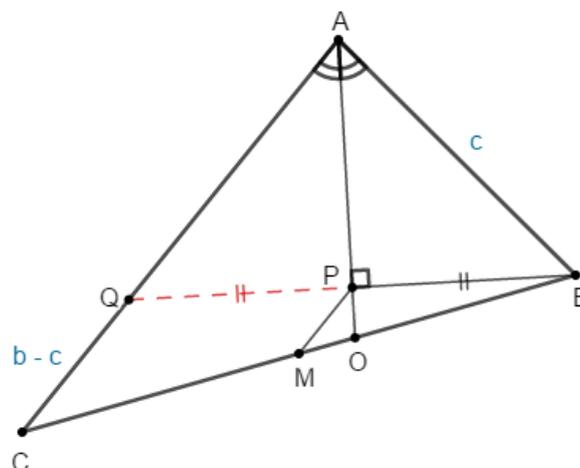
Fonte: O autor, 2019.

Assim, como a menor distância entre dois pontos no plano, é um segmento de reta, então concluímos que $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{QP} + \overline{MQ} \geq 2\overline{BD}$, ocorrendo a igualdade quando os pontos P', Q, M, N' e P'' forem colineares. Este fato ocorrerá, quando M, N, P e Q forem pontos médios dos lados do retângulo $ABCD$.

5.16. (Hungria) Em um triângulo ABC , sejam M o ponto médio do lado BC e P o pé da perpendicular baixada de B à bissetriz interna relativa ao vértice A . Prove que

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{AC}|.$$

Figura 76: Referência para o problema 5.16.



Fonte: O autor, 2019.

Suponhamos $\overline{AB} < \overline{AC}$ com $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$. Prolongando-se BP até AC , tal que $\overline{BP} \cap \overline{AC} = \{Q\}$. Observe que no triângulo ABQ , sua altura é também bissetriz, pelo Problema 2.9, Seção 2.2, ABQ é isósceles. Portanto, pelo Problema 2.8, Seção 2.2, AP será mediana também, assim $\overline{PB} = \overline{PQ}$. Note também que de $\overline{AB} = \overline{AQ} = c$ segue que $\overline{QC} = b - c$. Desde que P e M são pontos médios, então PM será base média do triângulo BQC , portanto $\overline{PM} = \frac{QC}{2} = \frac{b-c}{2} \therefore \overline{PM} = \frac{AC-AB}{2}$. Analogamente, prova-se para $\overline{AB} > \overline{AC}$.

3 LUGARES GEOMÉTRICOS

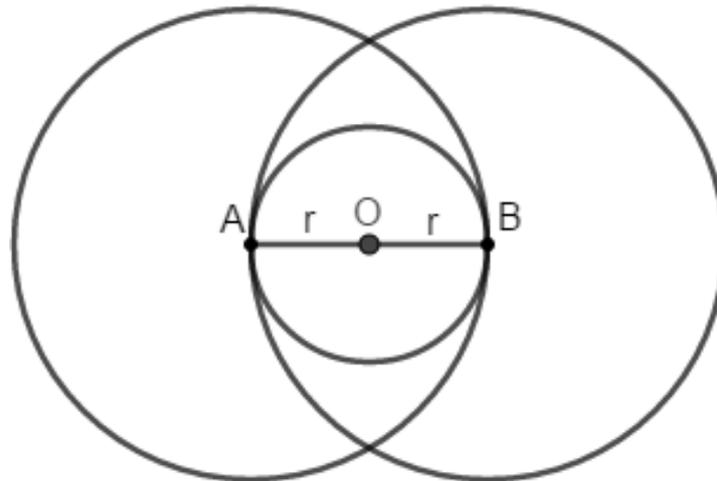
3.1 Problemas – Seção 3.1

1.1. Construa um círculo de raio dado r , que passe por dois pontos dados A e B . Sob que condições há solução?

Sejam os pontos A e B no plano. O círculo que desejamos construir deverá ter raio r e admitir o segmento AB como corda. Assim, seja O o centro do círculo, este deverá pertencer a mediatriz de AB . Além disso, o centro também deve pertencer aos círculos de raio r centrados em A e em B .

(i) Se $\overline{AB} = 2r$, O será médio de AB , portanto haverá uma única solução.

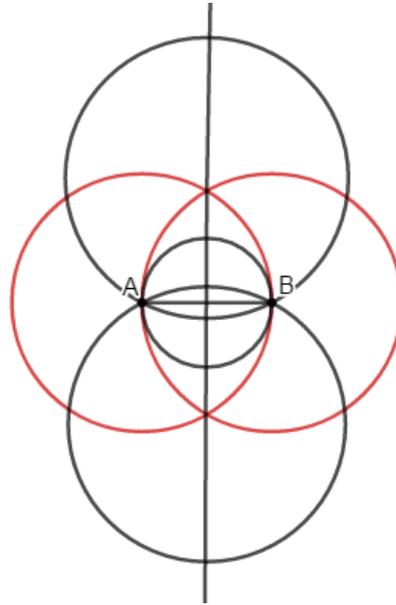
Figura 77: Construção do problema 1.1(i), seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

(ii) Se $\overline{AB} < 2r$, haverá duas soluções.

Figura 78: Construção do problema 1.1(ii), seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

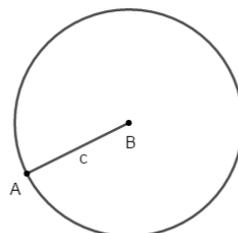
(iii) Se $\overline{AB} > 2r$, não existe solução, pois o comprimento de AB supera o maior comprimento possível para uma corda de um círculo de raio r .

1.2. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG do vértice A de um segmento AB , conhecida a posição do vértice B e o comprimento c de AB .

Será a circunferência Γ de centro B e raio $r = c$. De fato, se $A \in \Gamma$, então $\overline{AB} = r = c$. Se $\overline{AB} = c$, então $A \in \Gamma$.

Com o compasso calibrado com $r = c$, trace o círculo centrado em B , a circunferência obtida será o LG procurado.

Figura 79: Construção 1.2, seção 3.1.

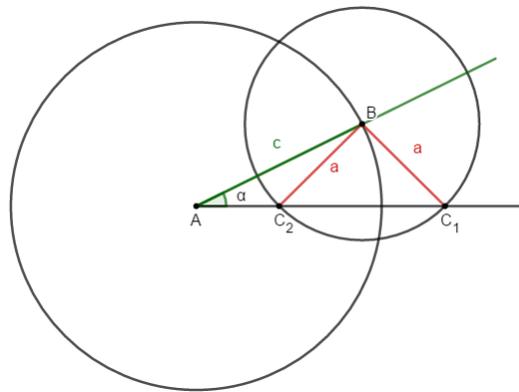


Fonte: O autor, 2019.

1.3. Construa com régua e compasso um triângulo ABC , conhecidos os comprimentos c do lado AB , a do lado BC e a medida α do ângulo $\angle BAC$.

Queremos determinar A, B e C tais que $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Seja A um ponto do plano. calibre o compasso e trace o círculo centrado em A de raio c . Seja B um ponto deste círculo. calibre o compasso e trace o círculo de raio a e centro em B . Considere o ponto X tal que $B\hat{A}X = \alpha$. As interseções do último círculo com a semirreta \overrightarrow{AX} serão as soluções para o vértice C . Nota: Observe que LLA não estabelece um critério de congruência.

Figura 80: Construção do problema 1.3, seção 3.1.

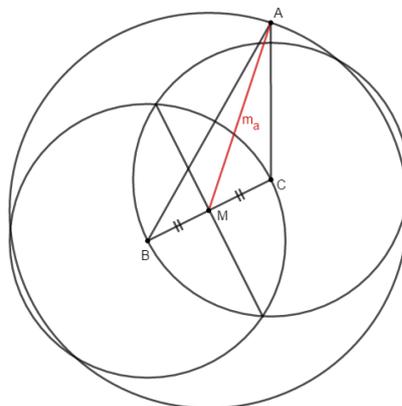


Fonte: O autor, 2019.

1.4. Identifique o LG do vértice A do triângulo ABC , conhecidas as posições dos vértices B e C e o comprimento m_a da mediana relativa ao lado BC .

Seja M o ponto médio de BC . O vértice deverá estar sobre o círculo de centro M e raio m_a , excluindo-se os pontos que são interseção do círculo com o diâmetro que contém B e C .

Figura 81: Construção do problema 1.4, seção 3.1.

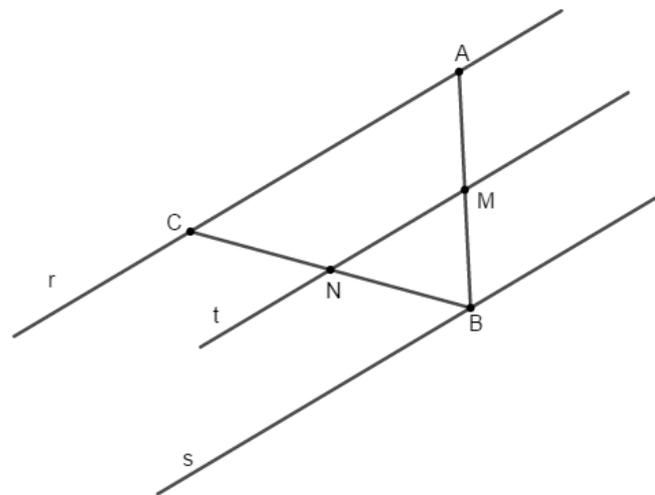


Fonte: O autor, 2019.

1.5. Identifique e construa com régua e compasso o LG dos pontos do plano equidistantes de duas retas paralelas dadas r e s .

Sejam os pontos, tais que $A \in r, B \in s$ e $C \in r, C \neq A$. Seja M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC . A reta $t = \overleftrightarrow{MN}$ será equidistante das retas r e s . Observe que $t \parallel r, s$.

Figura 82: Referência para o problema 1.5, seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

Considere respectivamente H_r e H_s os pés da perpendicular baixada por M a r (e a s). Como $r \parallel s$, temos $\hat{B} = \hat{C}$. Pelo critério LAAo, temos $\overline{MH_r} = \overline{MH_s}$.

Seja $P \in t$. Se $P = M$, P equidista de r e s . Se $P \neq M$, sejam H_r e H_s os pés da perpendicular baixada por P a r (e a s)

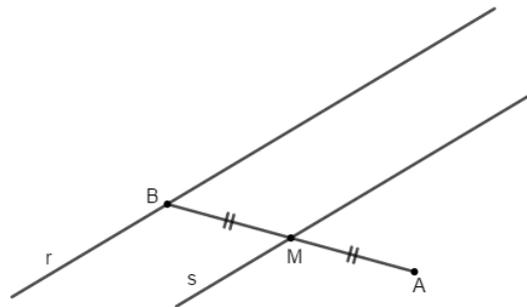
Seja $S = s \cap \overleftrightarrow{H_rM}$. Pelo teorema da base média (Proposição 2.34) aplicado ao triângulo H_sH_rS , P é ponto médio de H_sH_r . Logo, P equidista de r e s . Suponha agora que P é um ponto do plano equidistante das retas paralelas r e s . Se $P = M$, não há o que demonstrar. Se $P \neq M$, considere respectivamente H_r e H_s os pés da perpendicular baixada por P a r (e a s). Considere respectivamente R_M e S_M pés da perpendicular baixada por M a r (e a s). A Proposição 2.38 aplicada ao trapézio $H_sH_rR_MS_M$ nos diz que $\overleftrightarrow{PM} \parallel r, s$. Consequentemente, pelo Postulado 2.14, P pertence à reta t que passa por M e é paralela a r (e a s).

1.10. São dados no plano uma reta e um ponto A , com $A \notin r$. O ponto B varia em r . Encontre, com justificativa, o LG descrito pelo ponto médio do segmento AB .

O LG dos pontos médios de AB com A fixo, $A \notin r$ e B variável sobre r será uma reta s paralela a r , tal que cada um de seus pontos é ponto médio de AB para algum $B \in r$.

Sejam $B \in r$ e M , ponto médio de AB . Considere a reta s que passa por M e é paralela a r . Seja $B' \in r$, $B' \neq B$, no triângulo ABB' , como M é médio de AB e $s \parallel r$, a Proposição 2.34 nos diz que $M' = s \cap AB'$ é médio de AB' .

Figura 83: Construção do problema 1.10, seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

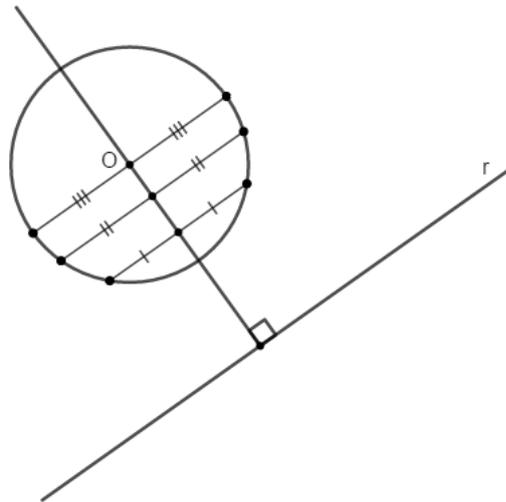
1.11. Em uma folha de papel está desenhado um círculo α , mas seu centro não está marcado. Mostre como obter a posição do mesmo com régua e compasso.

Dada uma corda AB , seja M seu ponto médio. Considere a corda CD tal que $AB \perp CD$ e $M \in CD$. Pelo Problema 2.10, Seção 2.2, o centro do círculo pertence a CD . Isto é, CD é diâmetro. Assim, o ponto O médio de CD será o centro de α .

1.12. Temos no plano do papel um círculo Γ , de centro O , e uma reta r que não intersecta Γ . Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos médios das cordas de Γ que são paralelas à reta r .

O LG dos pontos médios das cordas paralelas a reta r está contido na reta s perpendicular a r que contém o centro de Γ .

Figura 84: Construção do problema 1.12, seção 3.1.



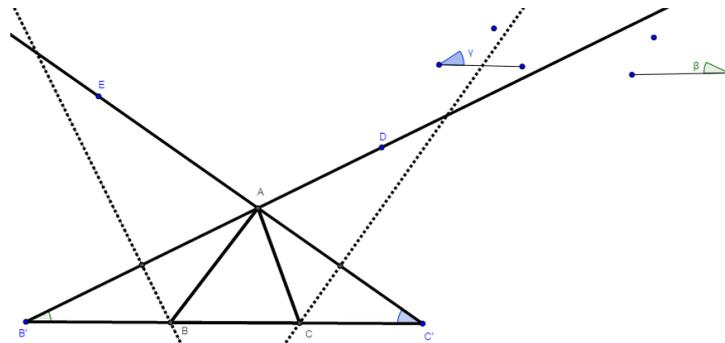
Fonte: O autor, 2019.

Seja s a reta que passa por O e é perpendicular a r . Sejam A e B os pontos de interseção de Γ com a reta s . O interior do segmento AB é o LG pedido. De fato, se $C \in AB, C \neq A, B$, então a corda de Γ que contém C e é paralela a r é ortogonal a AB . Pelo Problema 2.10, Seção 2.2, C é ponto médio da corda. Seja CD uma corda de Γ tal que $CD \parallel r$. Seja M o ponto médio de CD . Pelo Problema 2.10, Seção 2.2, $CD \perp OM$. Portanto, pelo Problema 3.19, M pertence a s . Como é interior ao círculo, $M \in AB$.

1.13. Construa o triângulo ABC , conhecendo o semiperímetro p do mesmo e as medidas β e γ dos ângulos B e C , respectivamente.

Considere o segmento $B'C'$ tal que $B'C' = 2p$. Considere pontos D e E (pertencentes a um mesmo semiplano determinado por AB) tais que $\widehat{C'B'D} = \frac{\beta}{2}$ e $\widehat{B'C'E} = \frac{\gamma}{2}$. Seja $A = \overrightarrow{B'D} \cap \overrightarrow{C'E}$. Seja $B \in B'C'$ obtido pela interseção da reta que passa pelo ponto médio de AB' e perpendicular a AB' . Pelo Problema 2.9, o triângulo $AB'B$ é isósceles de base AB' . Analogamente, obtenha o vértice C de modo que o triângulo $AC'C$ seja isósceles de base AC' . Pelo teorema do ângulo externo, temos $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \gamma$ e, além disso, ABC tem semiperímetro p .

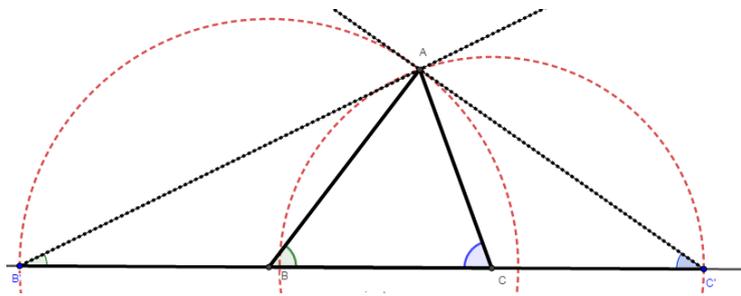
Figura 85: Construção de ABC , problema 1.13, seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

No Problema 1.13, usamos uma estratégia bastante útil em problemas de construção. Vamos admitir inicialmente que conhecemos um triângulo ABC com as propriedades descritas (Figura 86).

Figura 86: Esboço da estratégia, problema 1.3, seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

Seja ABC um triângulo cujo semiperímetro é p e tal que $\widehat{B} = \beta$ e $\widehat{C} = \gamma$. Vamos “abrir” o triângulo: sejam $B' \in \overrightarrow{CB}$, $\overline{B'B} = \overline{AB}$ e $C' \in \overrightarrow{BC}$, $\overline{C'C} = \overline{AC}$. Note que $\overline{B'C'}$ é igual ao perímetro de ABC e que como os triângulos $AB'B$ e $AC'C$ são isósceles, o teorema do ângulo externo nos diz que $\widehat{BB'A} = \frac{\beta}{2}$ e $\widehat{CC'A} = \frac{\gamma}{2}$. Deste modo, vemos como é possível determinar os vértices A , B e C a partir do conhecimento do semiperímetro e dos ângulos \widehat{B} e \widehat{C} . Essa estratégia consiste em partir do “problema resolvido” para identificar elementos que possam ser explorado na construção. Observe que partindo de um segmento $B'C'$ tal que $\overline{B'C'} = 2p$, construímos os ângulos de medidas $\frac{\beta}{2}$ e $\frac{\gamma}{2}$ com vértices respectivamente em B' e C' e podemos então determinar o vértice A . O vértice B é obtido pela construção de um triângulo isósceles $AB'B$ de base AB' . Analogamente para o vértice C .

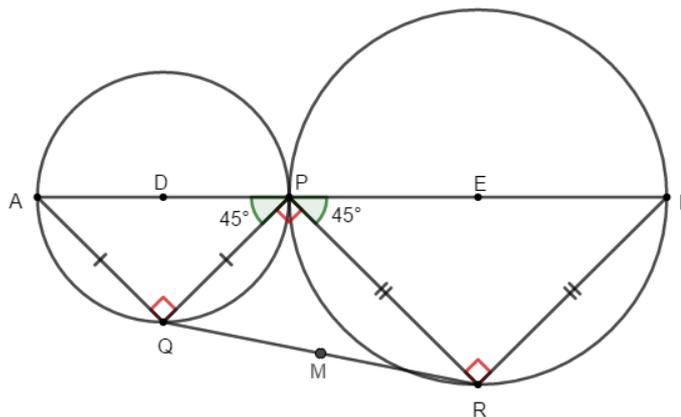
1.14. (Holanda) É dado no plano um segmento AB e um ponto P sobre ele. De um mesmo lado da reta AB , construímos os triângulos retângulos isósceles APQ e BPR , de hipotenusas AP e BP , respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio M do segmento QR . Encontre o LG descrito pelo ponto M , à medida que P varia sobre o segmento AB .

Dado que os triângulos APQ e BPR são retângulos isósceles, então seus ângulos agudos serão iguais a 45° . Podemos observar também que as alturas traçadas a partir de Q e R sobre AP e BP , respectivamente, serão medianas relativas as hipotenusas, pois os triângulos APQ e BPR são isósceles de bases AP e BP . Seja d a distância de M a AB . Como $QD \parallel RE$, então d será a medida base média do trapézio $QDER$. Logo, d será constante, pois

$$d = \frac{\overline{QD} + \overline{RE}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{EB}}{2} = \frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{4} = \frac{\overline{AB}}{4}.$$

Deste modo, o LG pedido está contido na reta r paralela a AB que dista dele d . Para entender mais precisamente a que subconjunto estamos nos referindo é importante observar o que acontece quando P se aproxima dos extremos do intervalo AB . Se P se aproxima de A , Q também se aproxima de A e formamos apenas um triângulo retângulo e isósceles ARB de base AB . Além disso, M é ponto médio de AR . A análise para o outro extremo é análoga. Sejam F e G os pontos de interseção de r com o triângulo ARB . O LG pedido coincide com o segmento FG .

Figura 87: Referência para o problema 1.14, seção 3.1.



Fonte: O autor, 2019.

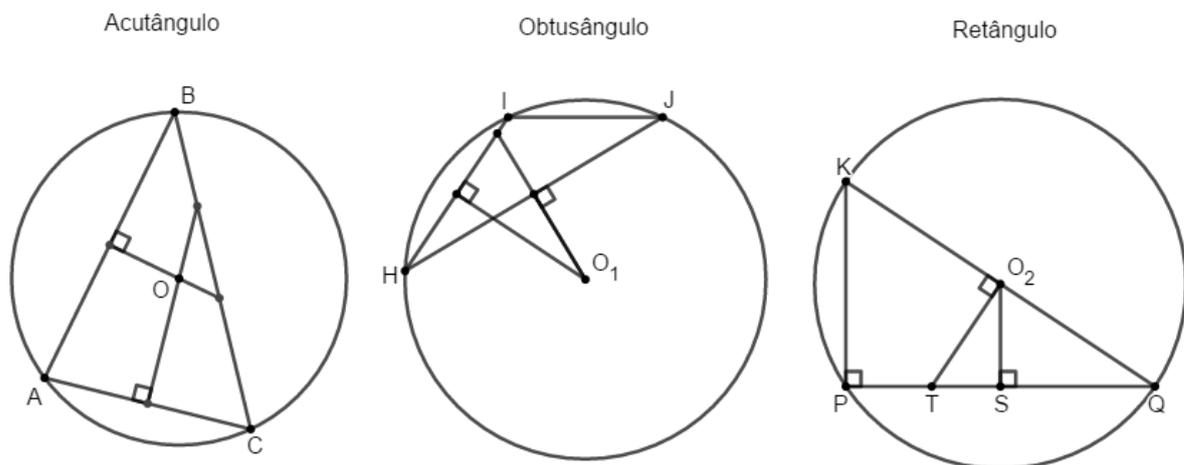
3.2 Problemas - Seção 3.2

2.1. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C e do circuncentro O . Explique porque a posição do vértice A não fica determinada.

Como o circuncentro é equidistante aos vértices, então O será o centro de uma circunferência de raio $OA = OB = OC$. Assim, o vértice A poderá ser qualquer ponto da circunferência desde que seja distinto de B e C .

Se o triângulo for acutângulo, obtusângulo ou retângulo, o circuncentro será interior, exterior ou o vértice do ângulo reto, respectivamente do mesmo.

Figura 88: Circuncentro, problema 2.1, seção 3.2.



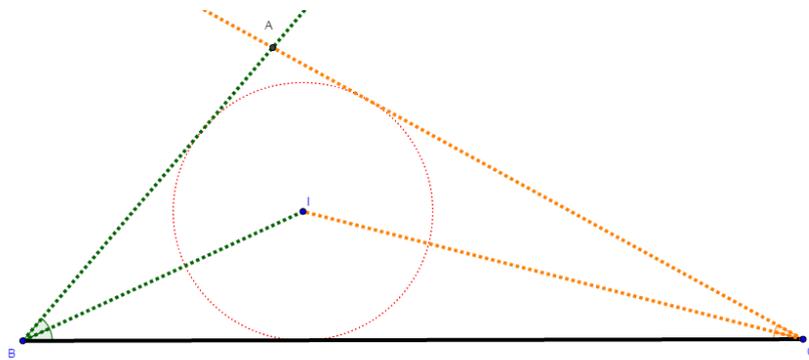
Fonte: O autor, 2019.

2.2. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C e do incentro I . Construa, com régua e compasso, o vértice A .

Seja I o incentro de ABC . Então:

i) Trace uma semirreta \overrightarrow{BD} tal que $D\hat{B}C = 2 \cdot I\hat{B}C$. No mesmo semiplano em relação a BC construa outra semirreta \overrightarrow{CE} tal que $E\hat{C}B = 2 \cdot I\hat{C}B$. A interseção destas semirretas será o vértice A .

Figura 89: Construção do triângulo ABC , problema 2.2, seção 3.2.



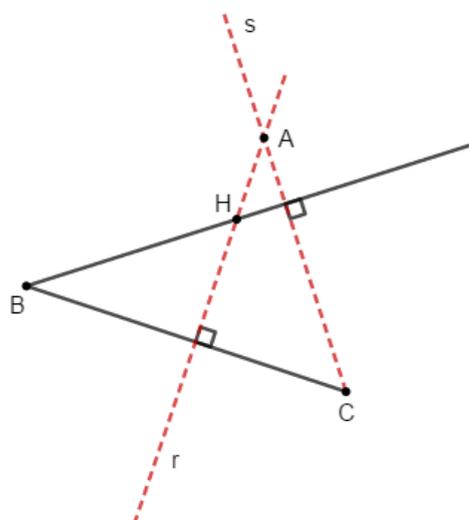
Fonte: O autor, 2019.

2.3. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C e do ortocentro H . Construa com régua e compasso, o vértice A .

Observe que A deve pertencer à reta r que passa por H e é perpendicular a BC . Além disso, a reta suporte do lado AC é perpendicular a \overleftrightarrow{BH} . Assim, A deve pertencer a interseção de r com a reta s que passa por C e é perpendicular a \overleftrightarrow{BH} .

- i) Trace $r \perp BC$, tal que $H \in r$.
- ii) Trace $s \perp BH$, tal que $C \in s$.
- iii) $s \cap r = \{A\}$.

Figura 90: Construção do problema 2.3, seção 3.2.



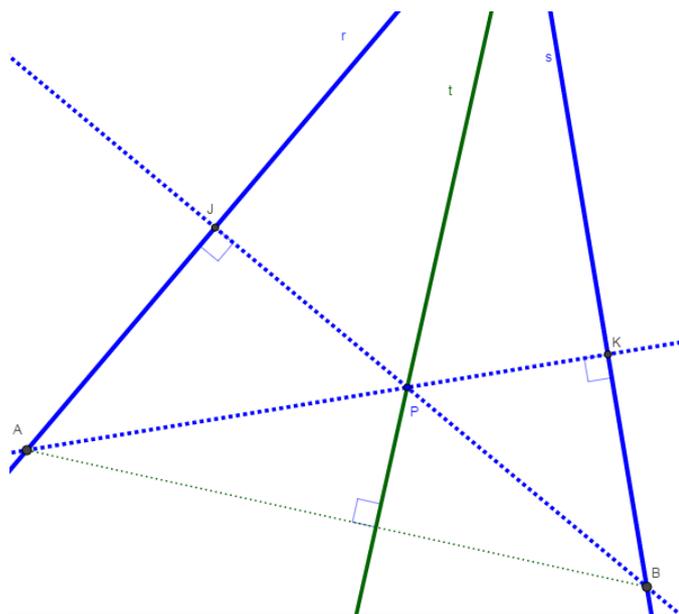
Fonte: O autor, 2019.

2.4. Numa folha de papel estão desenhadas duas retas concorrentes r e s . Ocorre que, devido ao tamanho da folha, o ponto de interseção de r e s não pode ser marcado no papel. Seja P um ponto no papel, tal que as perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas r e s intersectem as retas s e r (também respectivamente) em pontos situados na folha do desenho. Mostre como construir, com régua e compasso, uma reta t , passando por P e concorrente simultaneamente com r e s .

Se P pertencer a r ou s , considere t igual a r ou s . Suponha que P não pertence nem a r nem a s . Sejam $M = r \cap s$ e J e K , respectivamente, as interseções das retas que passam por P e são perpendiculares a r e a s . Vamos considerar dois casos: P pertence ao ângulo convexo determinado por \overrightarrow{MJ} e \overrightarrow{MK} ou não. No segundo caso, vamos construir a reta pedida de modo que ela seja a reta suporte do lado PM de um triângulo cujo ortocentro seja $N = s \cap \overrightarrow{PJ}$. No primeiro caso, ela será a reta suporte da altura relativa a M de um triângulo cujo ortocentro seja P .

Primeiro caso. Sejam $A = \overrightarrow{PK} \cap r$ e $B = \overrightarrow{PJ} \cap s$. Considere t a reta que passa por P e é perpendicular a AB . Note que P é ortocentro de ABM . Assim, esta reta encontrará o vértice $\{M\} = r \cap s$.

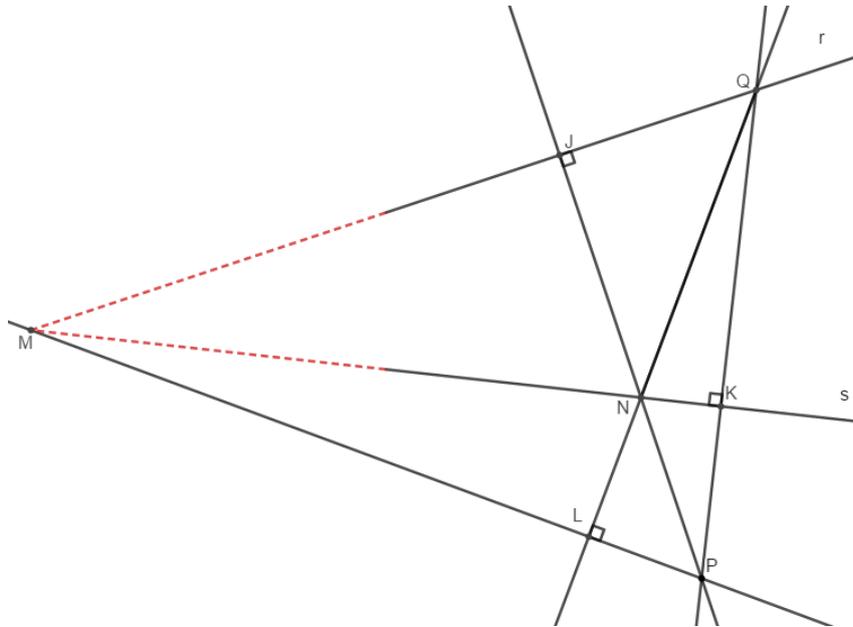
Figura 91: Construção do problema 2.4 (primeiro caso), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

Segundo caso. Vamos construir a reta pedida de modo que ela seja a reta suporte do lado PM de um triângulo PMQ cujo ortocentro seja $N = s \cap \overleftrightarrow{P\vec{J}}$. Seja $Q = r \cap \overleftrightarrow{P\vec{K}}$. Seja t a reta que passa por P e é perpendicular $\overleftrightarrow{Q\vec{N}}$. Esta reta encontrará o vértice $\{M\} = r \cap s$.

Figura 92: Construção do problema 2.4 (segundo caso), seção 3.2.

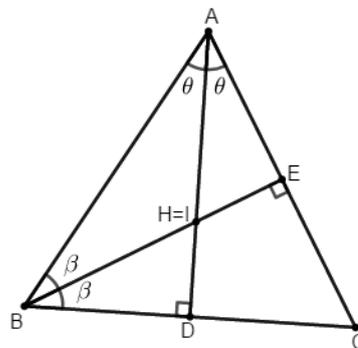


Fonte: O autor, 2019.

2.5. Seja ABC um triângulo de ortocentro H , incentro I e circuncentro O . Mostre que ABC é equilátero se, e só se, dois quaisquer dos pontos H, I e O coincidirem.

Iremos dividir a solução em três partes.

Figura 93: Referência para o item (i) do problema 2.5(ida), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

i) Seja o triângulo ABC , com $H = I$.

Nas notações da figura, no triângulo ABD , temos:

$$\theta + 2\beta = 90^\circ \quad (1)$$

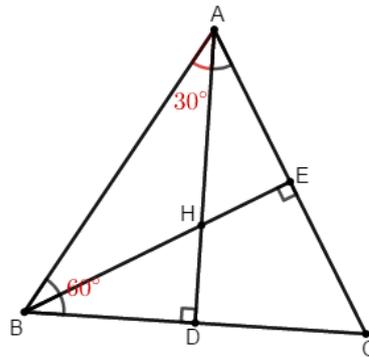
No triângulo ABE , temos:

$$\beta + 2\theta = 90^\circ \quad (2)$$

De (1) e (2), $\theta = \beta = 30$. Assim, $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ \therefore \hat{C} = 60^\circ$, donde concluímos ABC ser equilátero.

Reciprocamente, seja ABC um triângulo equilátero, tal que AD e BE sejam alturas. Como $\hat{B} = 60^\circ$ então $B\hat{A}D = 30^\circ$, logo $C\hat{A}D = 30^\circ$, assim AD será bissetriz. Portanto, $H = I$.

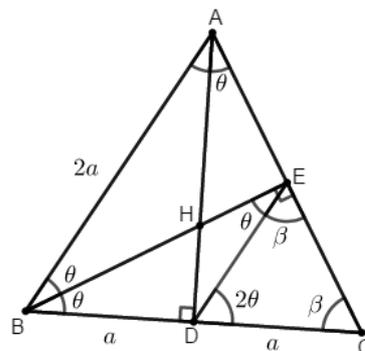
Figura 94: Referência para o item (i) do problema 2.5(volta), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

ii) Seja o triângulo ABC , suponhamos que $H = O$.

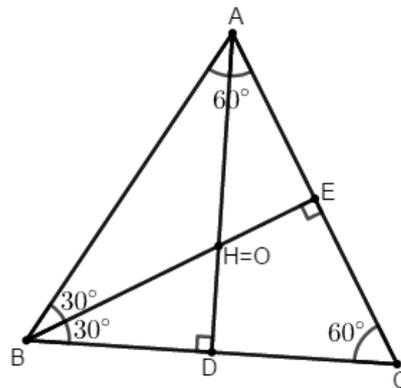
Figura 95: Referência para o item (ii) do problema 2.5(ida), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

Assim, teremos $AD \perp BC, BE \perp AC, \overline{AE} = \overline{CE}$ e $\overline{BD} = \overline{CD}$. Seja $D\hat{A}C = \theta, D\hat{C}B = \beta$ então, pelo Problema 3.12, Seção 2.3, $C\hat{B}E = \theta$ e $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Pela Proposição 2.34, $DE \parallel AB$, pois é base média. Logo, teremos $D\hat{B}E = D\hat{E}B = \theta, D\hat{E}C = \beta, D\hat{C}E = \beta$, devido os triângulos BDE e CDE serem isósceles e $E\hat{D}C = 2\theta$, pois é externo do triângulo BDE . Como $DE \parallel AB$, então $A\hat{B}E = \theta$ e $\overline{BC} = 2\overline{DE}$, portanto o triângulo ABC é isósceles com $\overline{AB} = \overline{BC}$. Analogamente prova-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Assim, o triângulo ABC será equilátero.

Figura 96: Referência para o item (ii) do problema 2.5(volta), seção 3.2.

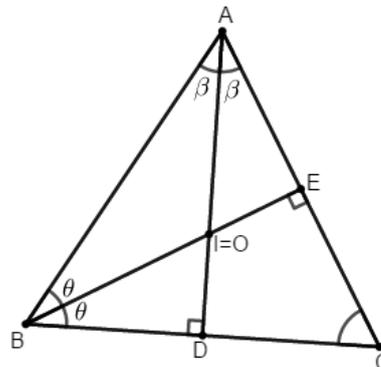


Fonte: O autor, 2019.

Reciprocamente, seja o triângulo ABC equilátero, AD e BE suas alturas. É imediato que, os triângulos ABE e BEC são congruentes. Portanto $\overline{AE} = \overline{EC}$. Analogamente, temos $\overline{BD} = \overline{CD}$, portanto $H = O$.

iii) Seja o triângulo ABC , com $I = O$.

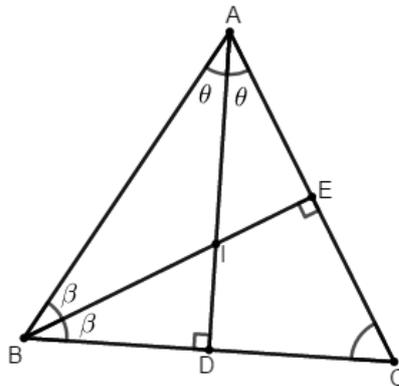
Figura 97: Referência para o item (iii) do problema 2.5(ida), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

Teremos que os triângulos ABE e BCE , por ALA, são congruentes. Assim, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Analogamente, ABD e ACD são congruentes, logo $\overline{AB} = \overline{AC}$. Portanto $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, donde concluímos que ABC é equilátero.

Figura 98: Referência para o item (iii) do problema 2.5(volta), seção 3.2.



Fonte: O autor, 2019.

Reciprocamente, seja o triângulo ABC equilátero, AD e BE bissetrizes internas. Como ABC é equilátero, então $\widehat{BAE} = 60^\circ$, $\widehat{ABE} = 30^\circ$, portanto $BE \perp AC$. Dado que os triângulos ABE e CBE são congruentes, então $\overline{AE} = \overline{CE}$ portanto \overline{BE} é mediatriz de AC . Analogamente, prova-se que \overline{AD} é mediatriz de BC . Assim, $I = O$.

3.3 Problemas – Seção 3.3

3.1. Dados no plano um círculo Γ e um ponto P sobre o mesmo, mostre que a reta tangente a Γ em P é única.

Seja r tangente a Γ de centro O no ponto P , como sabemos $\overrightarrow{OP} \perp r$. Da unicidade de retas perpendiculares num ponto dado, segue que r é única.

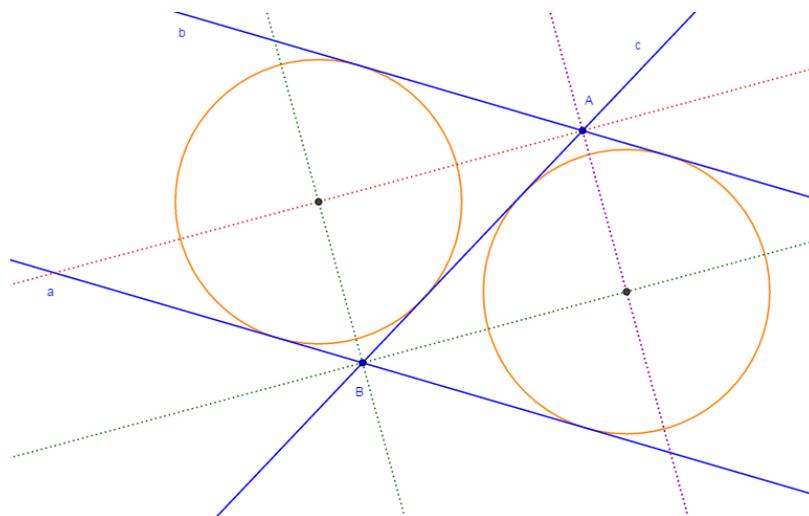
3.2. São dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \in r$. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos do plano que são centros dos círculos tangentes à reta r no ponto A .

O LG procurado é $s - \{A\}$, onde s é a reta tal que $s \perp r$ no ponto A .

3.6. Sejam a, b e c três retas dadas no plano, com $a \parallel b$ e c concorrente com a e b . Construa, com régua e compasso, os círculos tangentes a a, b e c .

Sejam $a \cap c = \{B\}$, $b \cap c = \{C\}$, $A \in a$, $D \in b$ sendo A e D num mesmo semiplano determinado por c . O centro I do círculo tangente a b, c e a pertencerá a interseção das bissetrizes dos ângulos ABC e BCD . Seja m a mediatriz de BC , o raio do círculo terá comprimento igual a \overline{IM} , onde $m \cap c = \{M\}$. Existem duas soluções para tal problema.

Figura 99: Círculos tangentes, problema 3.6, seção 3.3.

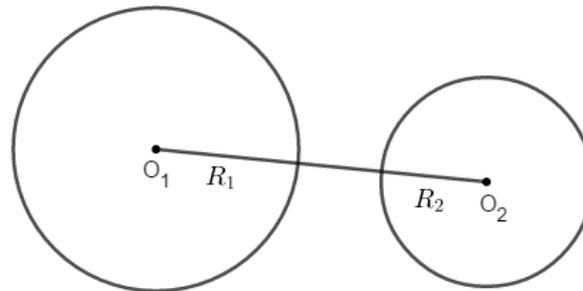


Fonte: O autor, 2019.

Para os problemas 3.7 a 3.9, dizemos que dois círculos são:

- **exteriores** se não tiverem pontos comuns e tiverem interiores disjuntos;

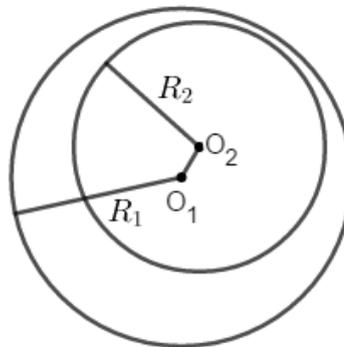
Figura 100: Círculos Exteriores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.



Fonte: O autor, 2019.

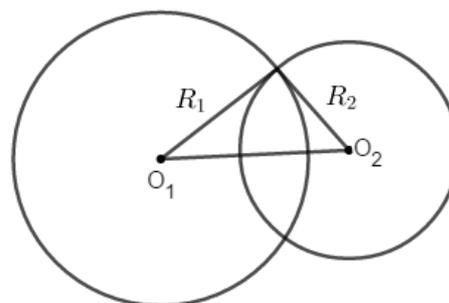
- **interiores** se não tiverem pontos comuns mas o interior de um deles contiver o outro;

Figura 101: Círculos Interiores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.



- **secantes** se tiverem dois pontos em comum;

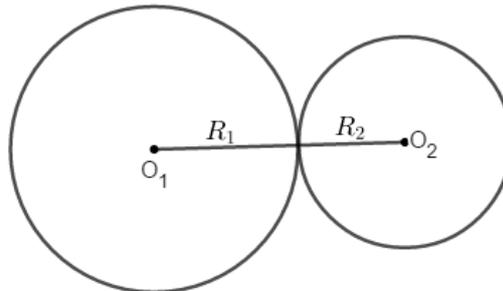
Figura 102: Círculos Secantes, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.



Fonte: O autor, 2019.

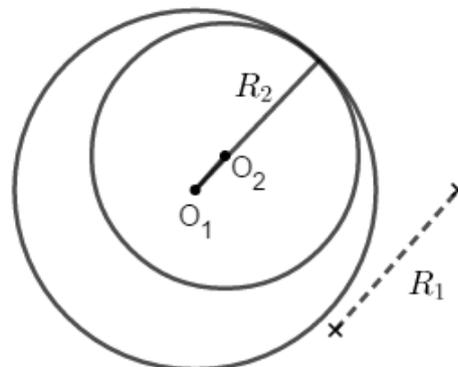
- **tangentes** se tiverem um único ponto comum; nesse último caso, os círculos são **tangentes exteriormente** se tiverem interiores disjuntos e **tangentes interiormente** caso contrário.

Figura 103: Círculos tangentes exteriores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 104: Círculos tangentes interiores, problemas 3.7 a 3.9, seção 3.3.



Fonte: O autor, 2019.

Para resolver o Problema 3.7, vamos usar a equivalência:

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow |R_1 - R_2| \leq \overline{O_1 O_2} \leq R_1 + R_2 \quad (*)$$

3.7. Dados círculos $\Gamma_1(O_1; R_1)$ e $\Gamma_2(O_2; R_2)$, prove que Γ_1 e Γ_2 são:

(a) exteriores se, e só se, $\overline{O_1 O_2} > R_1 + R_2$.

Se os círculos são exteriores, temos $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ e os interiores destes círculos não têm pontos em comum. Por (*), $\overline{O_1 O_2} > R_1 + R_2$ ou $\overline{O_1 O_2} < |R_1 - R_2|$. A segunda desigualdade não ocorre pois se fosse verdadeira, teríamos O_1 ponto interior de Γ_2 ou O_2 ponto interior de Γ_1 , contrariando o fato de os interiores destes círculos não ter pontos em comum. Assim, $\overline{O_1 O_2} > R_1 + R_2$.

Reciprocamente, se $\overline{O_1O_2} > R_1 + R_2$ e P é tal que $PO_1 \leq R_1$ e $PO_2 \leq R_2$, pela desigualdade triangular, teríamos $R_1 + R_2 < \overline{O_1O_2} \leq R_1 + R_2$. Absurdo! Consequentemente, nenhum ponto do plano pode pertencer simultaneamente aos círculos ou aos seus interiores. Isto é, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ e os interiores destes círculos não têm pontos em comum. Portanto, Γ_1 e Γ_2 são exteriores.

(b) tangentes exteriormente se, e só se, $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$.

Seja P o ponto em comum, então $\overline{PO_1} = R_1$ e $\overline{PO_2} = R_2$, portanto $\overline{PO_1} + \overline{PO_2} = R_1 + R_2$. Consequentemente, $P \in \overline{O_1O_2}$.

Reciprocamente, se $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$, a desigualdade triangular nos mostra que se $P \notin O_1O_2$, então $P \notin \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Seja $P \in O_1O_2$ tal que $\overline{PO_1} = R_1$. Temos $\overline{PO_2} = R_2$ e $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Nenhum outro ponto de O_1O_2 pertence à interseção. Portanto, Γ_1 e Γ_2 são tangentes exteriormente.

Uma informação importante para este problema será observar que, traçando-se uma reta r tangente a $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ em P , teremos que $\overline{PO_1} \perp r$ em P e $\overline{PO_2} \perp r$ em P , portanto P, O_1 e O_2 serão colineares, de onde extraímos que $\overline{PO_1} + \overline{PO_2} = \overline{O_1O_2}$.

(c) secantes se, e só se, $|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$.

Desde que os círculos são secantes, então existem os pontos P e P' que são os pontos em comum destes círculos. Assim, O_1O_2P e O_1O_2P' formam triângulos onde $\overline{PO_1} = R_1$ e $\overline{PO_2} = R_2$. Utilizando-se a desigualdade triangular, temos $|\overline{PO_1} - \overline{PO_2}| < \overline{O_1O_2} < \overline{PO_1} + \overline{PO_2}$ o que implica $|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$.

Reciprocamente, se dados dois círculos de raios R_1 e R_2 de centros O_1 e O_2 , respectivamente, são tais que $|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$, então existe um triângulo cujos lados medem $\overline{O_1O_2}$, R_1 e R_2 . Construindo um triângulo O_1O_2P tal que $\overline{O_1P} = R_1$ e $\overline{O_2P} = R_2$, vemos que $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Tomando-se P' simétrico de P em relação a $\overline{O_1O_2}$ também teremos $P' \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

(d) tangentes interiormente se, e só se, $\overline{O_1O_2} = |R_1 - R_2|$.

Dados Γ_1 e Γ_2 , suponhamos que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Como Γ_1 e Γ_2 são tangentes interiores, então existe um ponto $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, tal que $\overline{PO_1} = R_1$ e $\overline{PO_2} = R_2$. O_1, O_2 e P são colineares (caso contrário, não haveria um único ponto na interseção dos círculos). $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, temos $O_1 \in PO_2$. Assim

$\overline{PO_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{PO_1}$ o que implica $\overline{O_1O_2} = R_2 - R_1$. Analogamente, $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ nos conduzirá a $\overline{O_1O_2} = R_1 - R_2$. Assim, concluímos $\overline{O_1O_2} = |R_1 - R_2|$.

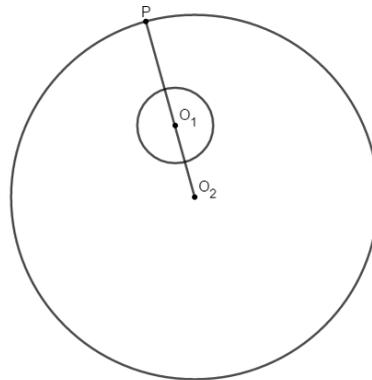
Se $\overline{O_1O_2} = R_1 - R_2$, é possível escolher $P \in \overline{O_1O_2}$ tal que $\overline{PO_1} = R_1$. Portanto, $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Se $Q \in \Gamma_2$, a desigualdade triangular nos mostra que Q pertence ao interior de Γ_1 ou coincide com P . Portanto, acarreta que ambas possuem um único ponto em comum e a de maior raio contém o interior da menor.

(e) interiores se, e só se, $\overline{O_1O_2} < |R_1 - R_2|$.

Sem perda de generalidade, iremos supor que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Logo, $R_1 < R_2$. Nas notações da figura, temos $P \in \Gamma_2 \cap \overline{O_1O_2}$. Assim, teremos $R_2 = \overline{PO_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{PO_1}$ que implica $\overline{O_1O_2} < R_2 - R_1$.

Analogamente, se $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{O_1O_2} < R_1 - R_2$.

Figura 105: Referência para problema 3.7 item (e), seção 3.3.

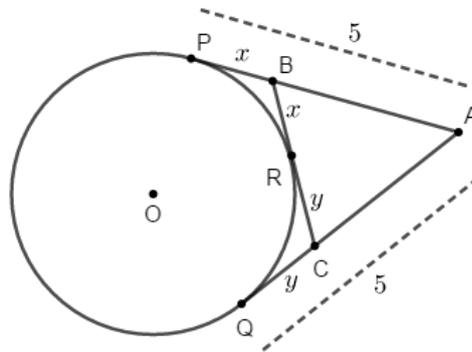


Fonte: O autor, 2019.

3.10. São dados, no plano, um círculo Γ , de centro O e raio R , e pontos A, P e Q , tais que $P, Q \in \Gamma$ e os segmentos AP e AQ tangenciam Γ e medem 5cm cada. Escolhemos pontos $B \in AP$ e $C \in AQ$ tais que BC também tangencia Γ . Calcule os possíveis valores do perímetro do triângulo ABC .

Seja R o ponto em que BC tangencia Γ . Nas notações da Figura 106, temos: $\overline{BP} = \overline{BR} = x$, $\overline{RC} = \overline{QC} = y$. Assim, $\overline{AB} = 5 - x$ e $\overline{AC} = 5 - y$. Portanto, $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ logo $2p = 10$.

Figura 106: Referência para problema 3.10, seção 3.3.

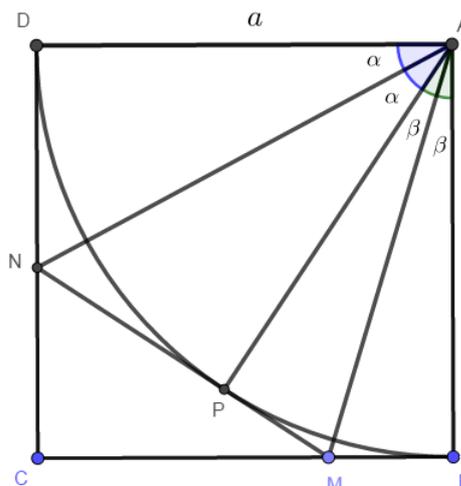


Fonte: O autor, 2019.

3.11. Sejam $ABCD$ um quadrado de lado a e Γ o círculo de centro A e raio a . Marcamos pontos M e N , respectivamente sobre BC e CD , tais que MN tangencia Γ . Quais os possíveis valores do ângulo $\angle MAN$?

Seja P o ponto de tangência de MN com Γ , teremos que $\overline{MP} = \overline{MB}$, $\overline{NP} = \overline{ND}$. Os triângulos ADN , APN , APM e ABM são retângulos. Pelo critério LLL, temos $ADN \cong APN$ e $APM \cong ABM$. Portanto, $D\hat{A}N = P\hat{A}N = \alpha$ e $P\hat{A}M = B\hat{A}M = \beta$. Consequentemente, $M\hat{A}N = \alpha + \beta = 45^\circ$.

Figura 107: Problema 3.11, seção 3.3.

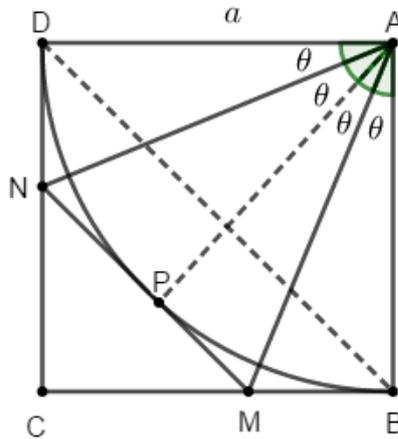


Fonte: O autor, 2019.

No Problema 3.11, é importante não fazer um esboço que possa nos levar a suposições equivocadas. Por exemplo, se partimos da Figura 108, somos levados a inferir equivocadamente que $\overline{MN} \parallel \overline{BD}$. Ainda que deduzamos corretamente $M\hat{A}N = 2\theta = 45^\circ$, o argumento não é

válido pois ele só considerou uma das possíveis configurações do segmento MN tangente ao círculo. Deste modo, não estaríamos autorizados a afirmar que tal ângulo sempre mede 45° .

Figura 108: Referência para problema 3.11, seção 3.3.

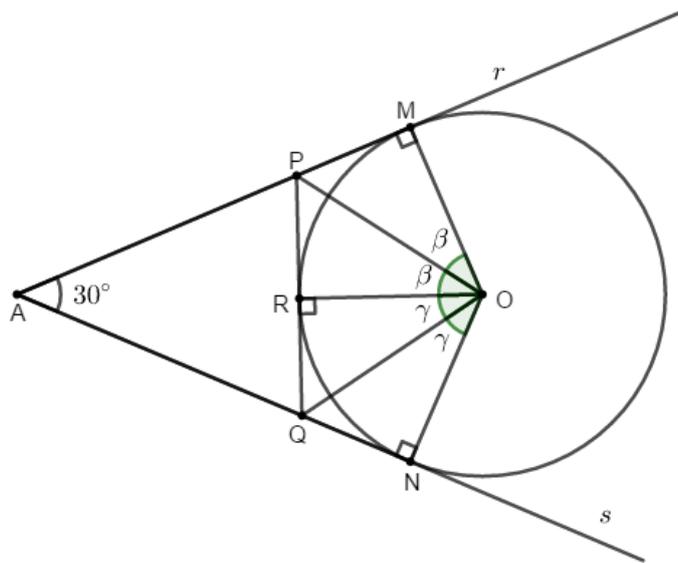


Fonte: O autor, 2019.

3.12. As retas r e s são concorrentes em A e tangentes a um círculo Γ , de centro O . Pontos $P \in r$ e $Q \in s$ são tais que \overline{PQ} tangencia Γ e deixa A e O em semiplanos opostos. Se $\widehat{PAQ} = 30^\circ$, calcule \widehat{POQ} .

Sejam M, N e R os pontos de tangência de r, s e PQ a Γ , respectivamente. Assim, nas notações da figura, temos por LLL as congruências entres os triângulos POM e POR assim como QOR e QON . Destas congruências podemos concluir que, $\widehat{MOP} = \widehat{POR} = \beta$ e $\widehat{ROQ} = \widehat{QON} = \gamma$. No quadrilátero $AMON$, temos que $30^\circ + 2(\beta + \gamma) + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ o que implica $\beta + \gamma = 75^\circ$. Como $\widehat{POQ} = \beta + \gamma = 75^\circ$.

Figura 109: Referência para problema 3.12, seção 3.3.

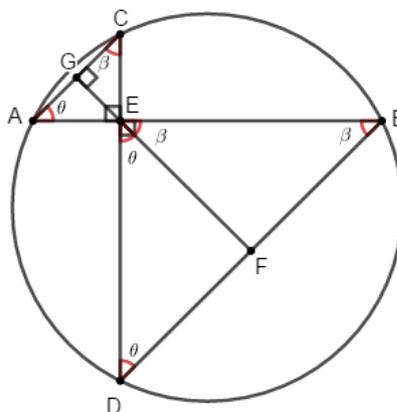


Fonte: O autor, 2019.

3.14. As cordas AB e CD de um círculo Γ são perpendiculares em E , um ponto situado no interior do círculo. A reta perpendicular a AC por E intersecta o segmento BD em F . Prove que F é o ponto médio de BD .

Seja G a interseção de EF com AC . Nas notações da figura, temos $\widehat{ACE} = \beta = \widehat{DBE}$ e $\widehat{CAE} = \widehat{BDE} = \theta$, pois são ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco. Note que $\theta + \beta = 90^\circ$, portanto $\widehat{GEC} = \theta = \widehat{DEF}$, logo $\overline{EF} = \overline{DF}$. Analogamente, $\widehat{FEB} = \beta$, portanto $\overline{EF} = \overline{BF}$ o que implica $\overline{DF} = \overline{BF}$.

Figura 110: Referência para problema 3.14, seção 3.3.

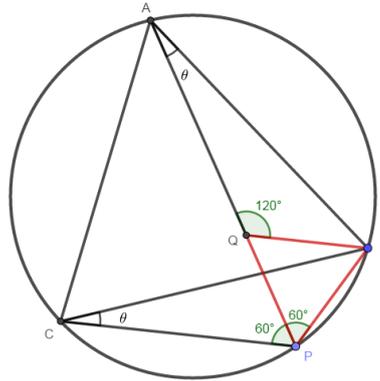


Fonte: O autor, 2019.

3.15. Sejam A, B e C pontos sobre um círculo Γ , tais que os arcos menores AB, AC e BC medem todos 120° . Se P é um ponto de Γ situado no arco menor BC , prove que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

Seja $Q \in AP$, tal que $\overline{PQ} = \overline{BP}$, o ângulo $\widehat{APB} = 60^\circ$, pois é inscrito, assim como $\widehat{APC} = 60^\circ$. O triângulo PQB é equilátero, portanto $\overline{PQ} = \overline{BP} = \overline{BQ}$. Uma vez que $\widehat{PAB} = \theta$, então $\widehat{PCB} = \theta$. Por LAA_0 , temos que os triângulos PCB e ABQ são congruentes, assim $\overline{AQ} = \overline{PC}$, portanto $\overline{PA} = \overline{AQ} + \overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

Figura 111: Referência para problema 3.15, seção 3.3.

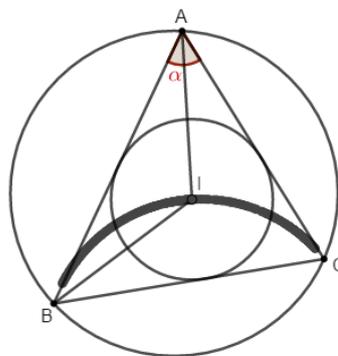


Fonte: O autor, 2019.

3.21. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C , a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β , dentre os determinados pela reta \overleftrightarrow{BC} , no qual está situado o vértice A . Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC , situado no semiplano β , encontre o LG descrito pelo incentro I de ABC .

Pelo Problema 3.13, Seção 2.3, o LG descrito pelo incentro I será o arco capaz de $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ em relação a BC contido no semiplano β .

Figura 112: Referência para problema 3.21, seção 3.3.

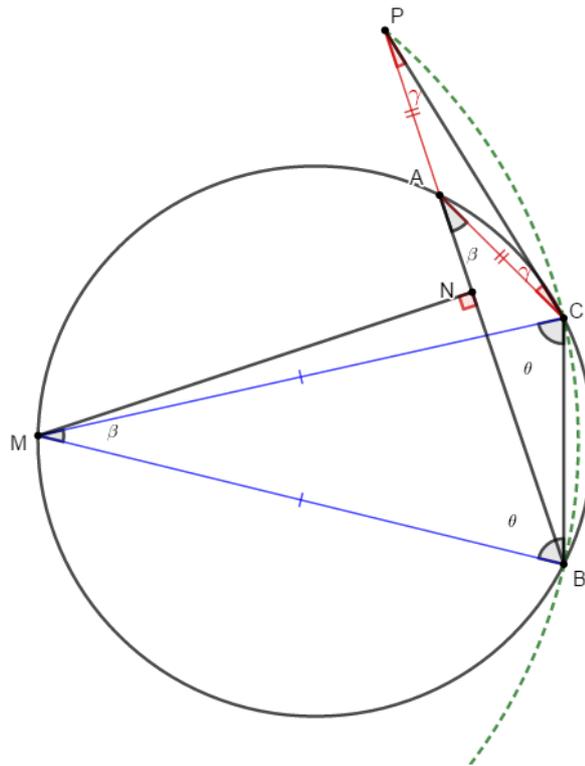


Fonte: O autor, 2019.

3.28. São dados um círculo Γ e pontos A, B e C sobre o mesmo, tais que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Marcamos o ponto médio M do arco BC que contém A , bem como N , pé da perpendicular baixada de M ao segmento AB . Prove que $\overline{BN} = \overline{AN} + \overline{AC}$.

Nas notações da Figura 113, temos que $M\hat{B}C = M\hat{C}B = \theta$ portanto $\overline{MC} = \overline{MB}$. No círculo Γ , temos que $B\hat{M}C = B\hat{A}C = \beta$, pois são inscritos relativos ao mesmo arco. Seja P a interseção de \overrightarrow{BA} e o círculo centrado em M de raio \overline{MB} . Pelo teorema do ângulo inscrito (Proposição 3.19), $B\hat{P}C = \frac{B\hat{M}C}{2} = \frac{\beta}{2}$. Note que $\beta = B\hat{A}C = A\hat{P}C + A\hat{C}P$, pois é ângulo externo do triângulo APC . Como $A\hat{P}C = B\hat{P}C = \frac{\beta}{2}$, o triângulo APC é isósceles de base PC . Como $MN \perp BP$ e MBP é isósceles, MN é mediatriz da corda BP , logo $\overline{BN} = \overline{AP} + \overline{AN} = \overline{AN} + \overline{AC}$.

Figura 113: Referência para problema 3.28, seção 3.3.



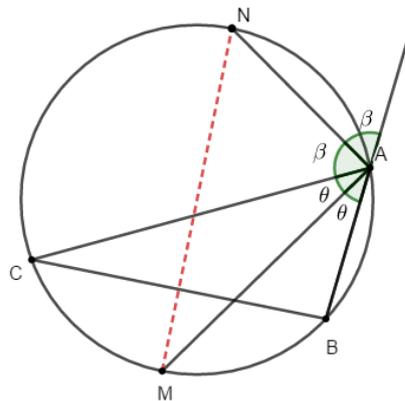
Fonte: O autor, 2019.

3.4 Problemas – Seção 3.4

4.2. Sejam ABC um triângulo qualquer e M e N , respectivamente, os pontos onde as bissetrizes interna e externa relativas ao vértice A intersectam o círculo circunscrito a ABC . Prove que MN é um diâmetro desse círculo.

Nas notações da Figura 114, temos $2(\theta + \beta) = 180^\circ$. Como $\widehat{NAC} = \beta$ e $\widehat{MAC} = \theta$, são inscritos, temos que $\widehat{NC} = 2\beta$ e $\widehat{MC} = 2\theta$, mas $\widehat{NC} + \widehat{MC} = 2(\theta + \beta) = 180^\circ$, portanto MN é um diâmetro do círculo circunscrito.

Figura 114: Referência para o problema 4.2, seção 3.4.

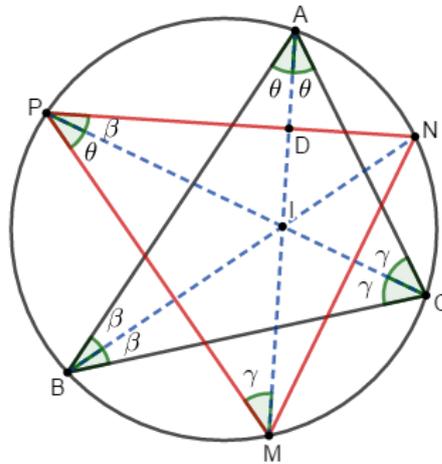


Fonte: O autor, 2019.

4.3. Sejam ABC um triângulo qualquer e M, N e P os pontos onde as bissetrizes internas de ABC , relativas respectivamente aos vértices A, B e C , intersectam o círculo circunscrito ao triângulo (com $M \neq A, N \neq B$ e $P \neq C$). Prove que o incentro de ABC é o ortocentro de MNP .

Nas notações da figura 115, temos $\widehat{PMA} = \gamma, \widehat{MPI} = \theta$ e $\widehat{CPN} = \beta$, pois são inscritos correspondentes aos ângulos $\widehat{PCA} = \gamma, \widehat{AC} = \theta$ e $\widehat{NBC} = \beta$, respectivamente. No triângulo ABC , temos $2(\theta + \beta + \gamma) = 180^\circ$, portanto $\theta + \beta + \gamma = 90^\circ$, logo $\widehat{PDM} = 90^\circ$ no triângulo MPD , sendo $PN \cap AM = \{D\}$. Isto é, MD é altura relativa ao vértice M no triângulo MNP . Analogamente, prova-se para as demais alturas.

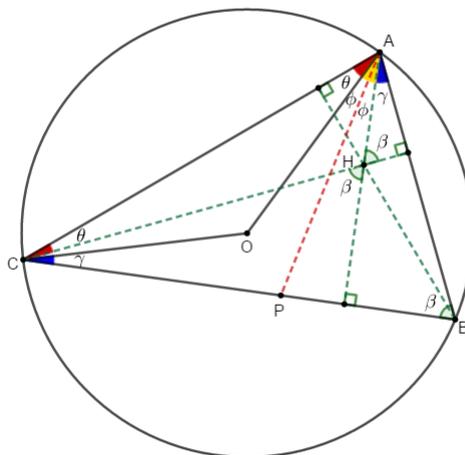
Figura 115: Referência para o problema 4.3, seção 3.4.



Fonte: O autor, 2019.

4.5. Seja um triângulo de ortocentro H e circuncentro O . Prove que a bissetriz interna relativa ao lado BC também bissecta o ângulo $\angle HAO$.

Figura 116: Referência para o problema 4.5, seção 3.4.



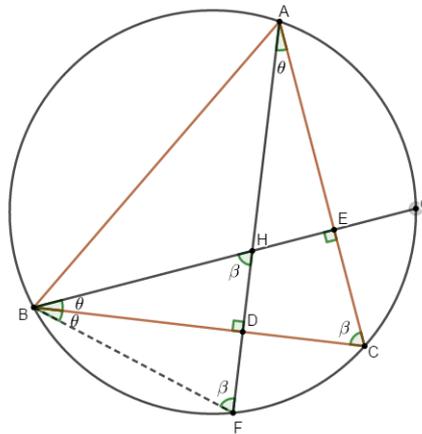
Fonte: O autor, 2019.

Vamos apresentar somente a resolução para ABC acutângulo. Nas notações da figura 116, temos $2\theta + \widehat{AOC} = 180^\circ$ o que implica $\theta = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}$. Como $\beta = \frac{\widehat{AOC}}{2}$, então $\theta = 90^\circ - \beta$. Dado que $\gamma + \beta = 90^\circ$, então $\gamma = 90^\circ - \beta = \theta$. Seja AP a bissetriz de $\angle OAH$, $P \in BC$ teremos $\widehat{BAP} = \widehat{PAC} = \theta + \phi$, logo a bissetriz de $\angle A$ também é bissetriz de $\angle OAH$.

4.6. Prove que, em todo triângulo, os simétricos do ortocentro em relação às retas suportes dos lados do triângulo estão situados sobre o círculo circunscrito ao mesmo.

Seja ABC um triângulo inscrito no círculo Γ . Tracemos suas alturas AD e BE que intersectam a circunferência de Γ em F e G , respectivamente. Considere ainda, H seu ortocentro. Pelo teorema do ângulo inscrito, temos $D\hat{A}C = C\hat{B}F = \theta$, $A\hat{C}D = B\hat{F}D = \beta$, além disso como $\theta + \beta = 90^\circ$, então $D\hat{H}B = \theta$ e $H\hat{D}B = \beta$, portanto por ALA, temos que os triângulos BHD e BDF são congruentes, logo $\overline{HD} = \overline{DF}$. Assim, o simétrico de H em relação a BC será F , que pertence a circunferência de Γ . Analogamente, segue para os demais casos.

Figura 117: Referência para o problema 4.6, seção 3.4.

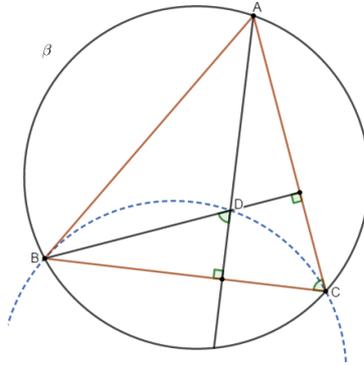


Fonte: O autor, 2019.

4.7. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C , a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β , dos determinados pela reta BC , ao qual pertence o vértice A . Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC , situado no semiplano β , qual a curva descrita pelo ortocentro H de ABC ?

Seja o triângulo ABC de ortocentro D . Do Problema 4.6, sabemos que o ponto E , simétrico de D em relação a BC , pertencerá ao círculo circunscrito a ABC . Portanto, E pertencerá ao arco BC no semiplano oposto a β . Assim, concluímos que D pertencerá ao arco simétrico de BC no semiplano β .

Figura 118: Referência para o problema 4.7, seção 3.4.

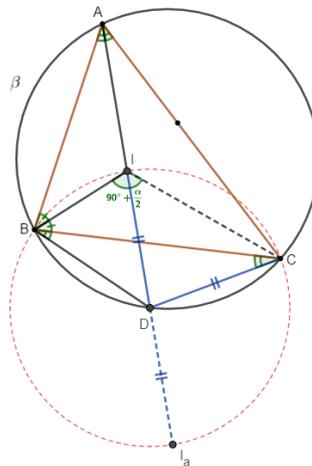


Fonte: O autor, 2019.

4.8. De um triângulo ABC , conhecemos as posições dos vértices B e C , a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β , dos determinados pela reta \overleftrightarrow{BC} , ao qual pertence o vértice A . Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC , situado no semiplano β , qual a curva descrita pelo ex-incentro I_a relativo a BC ?

Seja r a bissetriz de α do triângulo ABC inscrito no círculo Γ . Dado que $r \cap \Gamma = \{D\}$, sabemos que I_a é simétrico do incentro I de ABC em relação a D . Sabemos que, pela Proposição 3.38 que $ID = CD = I_aD$, assim, I_a percorrerá o arco BC no círculo de centro D e raio $\overline{I_aD} = \overline{ID} = \overline{CD}$ que está situado no semiplano oposto a β . Observe que pelo Problema 3.13, Seção 2.3, o LG coincide com um arco capaz $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ em relação a BC contido no semiplano oposto a β .

Figura 119: Referência para o problema 4.8, seção 3.4.

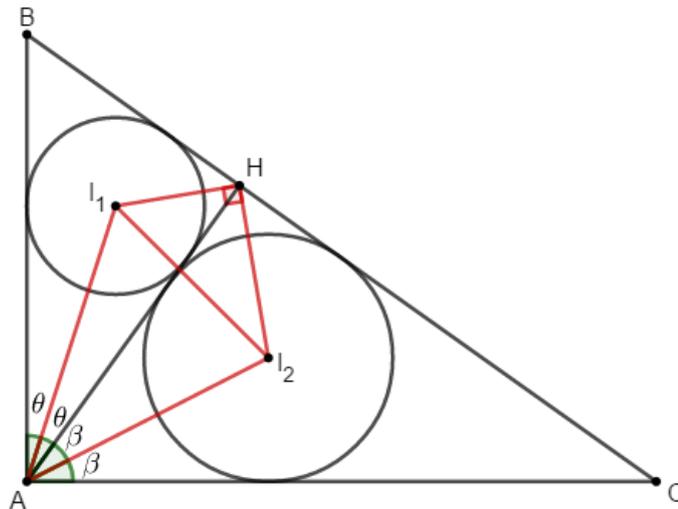


Fonte: O autor, 2019.

4.9. Seja ABC um triângulo retângulo em A e H o pé da altura relativa à hipotenusa BC . Sejam, ainda, I_1 e I_2 os incentros dos triângulos ABH e ACH . Prove que A é o ex-incentro do triângulo I_1HI_2 relativo ao lado I_1I_2 .

Nas notações da Figura 120, temos HI_1 e HI_2 bissetrizes, portanto $I_1\hat{H}A = 45^\circ = I_2\hat{H}A$. Portanto, $I_1\hat{H}I_2 = 90^\circ$ e AH é bissetriz de $\angle I_1HI_2$. Consequentemente, pela Proposição 3.38, sabemos que o ex-incentro I_a de I_1HI_2 relativo a I_1I_2 deverá pertencer a \overrightarrow{HA} . Por outro lado, do Problema 4.8, o ex-incentro I_a deverá pertencer ao arco capaz em relação a I_1I_2 de $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Como $\alpha = 90^\circ$, o ex-incentro pertencerá ao arco capaz de 45° no semiplano definido por I_1I_2 que não contém H . Para concluir que $A = I_a$, mostraremos que A pertence a este arco capaz. Desde que AI_1 e AI_2 são bissetrizes, então $B\hat{A}I_1 = I_1\hat{A}H = \theta$ e $C\hat{A}I_2 = I_2\hat{A}H = \beta$, mas $2(\theta + \beta) = 90^\circ$ o que implica $\theta + \beta = 45^\circ$. Logo, A é o ex-incentro do triângulo I_1HI_2 .

Figura 120: Referência para o problema 4.9, seção 3.4.

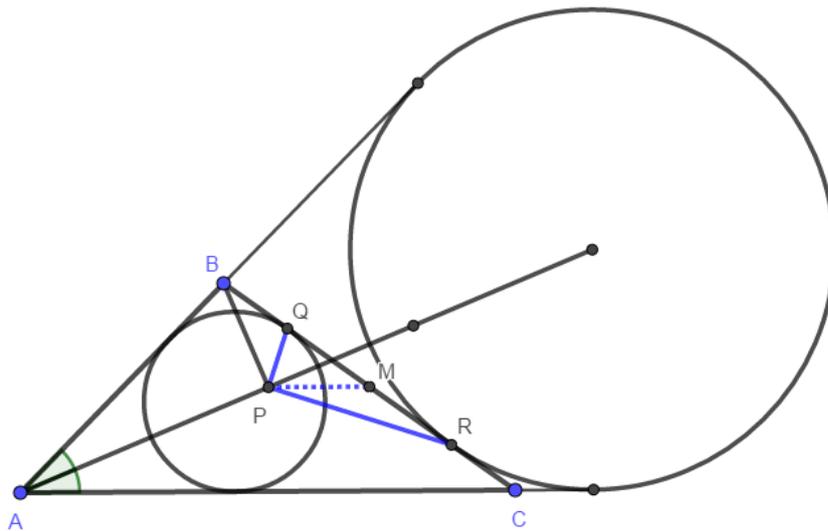


Fonte: O autor, 2019.

4.11. Em um triângulo ABC , marcamos os pontos Q e R , de tangência do lado BC respectivamente com o círculo inscrito em ABC e ex-inscrito a ABC em relação ao lado BC . Se P é o pé da perpendicular baixada de B à bissetriz interna de ABC relativa ao vértice A , mostre que $\widehat{Q\hat{P}R} = 90^\circ$.

Sem perda de generalidade, vamos supor $b > c$. Nas notações da Figura 121, pela Proposição 3.37, sabemos que $\overline{BQ} = p - b = \overline{CR}$, assim $p - b + \overline{QR} + p - b = a$ e concluímos que $\overline{QR} = b - c$. Seja M , ponto médio de BC . Como já sabemos⁴, $\overline{PM} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{AC}| = \frac{1}{2}|c - b| = \frac{b-c}{2}$. Assim, no triângulo PQR , temos que a mediana relativa a QR é a metade de QR , logo QR é hipotenusa do triângulo PQR , portanto $\widehat{Q\hat{P}R} = 90^\circ$.

Figura 121: Referência para o problema 4.11, seção 3.4.



Fonte: O autor, 2019.

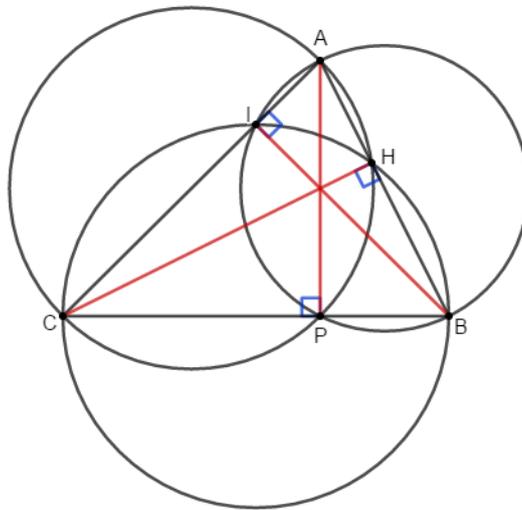
⁴ Ver Problema 5.16, Seção 2.5

3.5 Problemas – Seção 3.5

5.1 Sobre cada lado do triângulo ABC , construímos um círculo tendo o referido lado por diâmetro. Prove que tais círculos se intersectam dois a dois em seis pontos, três dos quais são os pés das alturas de ABC .

Seja o círculo de diâmetro AB e P a interseção deste círculo com \overleftrightarrow{BC} . Pelo teorema do ângulo inscrito, temos que $\widehat{APB} = 90^\circ$, portanto AP é altura relativa a BC . Analogamente, o círculo de diâmetro AC , intersecta \overleftrightarrow{BC} no ponto Q . Contudo $\widehat{AQC} = 90^\circ$ e AQ será altura relativa a BC , logo $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e P e Q pertencem à única reta que passa por A e é perpendicular a \overleftrightarrow{BC} . A posição relativa dos pontos na reta implicam $Q \equiv P$. Assim, os círculos intersectam-se nos vértices do triângulo ABC e nos pés das alturas, logo em seis pontos.

Figura 122: Referência para problema 5.1, seção 3.5.

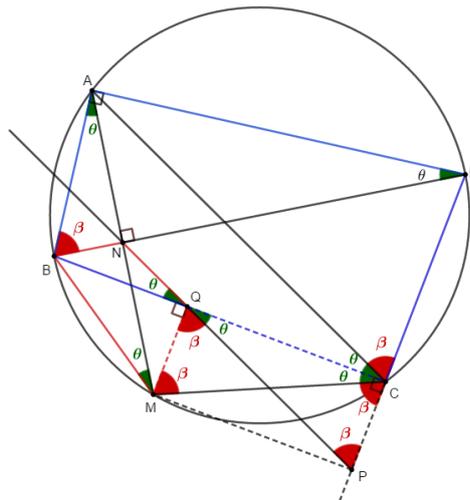


Fonte: O autor, 2019.

5.4. $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em um círculo Γ , de diâmetro BD . Sejam $M \in \Gamma$ tal que $M \neq A$ e $AM \perp BD$, e N o pé da perpendicular baixada de A a BD . Se a paralela à reta \overleftrightarrow{AC} por N intersecta \overleftrightarrow{CD} em P e \overleftrightarrow{BC} em Q , prove que o quadrilátero $CPMQ$ é um retângulo.

Nas notações da figura 123, temos $B\hat{C}A = B\hat{D}A = B\hat{M}A = \theta$ e $A\hat{B}D = A\hat{C}D = \beta$, pelo teorema do ângulo inscrito. Além disso, como $\overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, então $N\hat{Q}B = \theta$ e $Q\hat{P}C = \beta$. Além disso, $C\hat{Q}P = \theta$ pois é OPV . Assim, temos que o quadrilátero $BNQM$ é inscritível, portanto $B\hat{Q}M = M\hat{N}B = 90^\circ$, logo $M\hat{Q}C = 90^\circ$. Como BD é diâmetro, $D\hat{C}B = 90^\circ$. Logo, $\theta + \beta = 90^\circ$. No quadrilátero $MQCP$, temos $M\hat{Q}P = \beta = Q\hat{M}C = M\hat{C}P$. Portanto, o quadrilátero $MQCP$ é inscritível. Usando a Proposição 3.9, deduzimos que todos os ângulos internos do quadrilátero $MQCP$ são retos. Assim, $CPMQ$ é um retângulo.

Figura 123: Referência para o problema 5.4, seção 3.5.

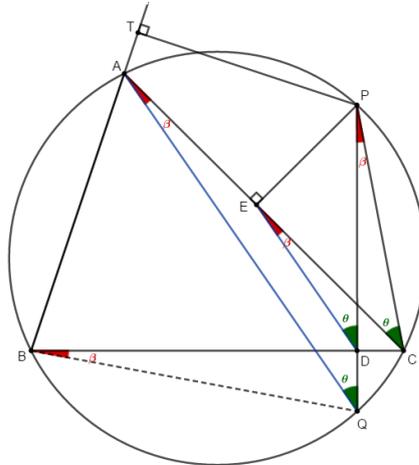


Fonte: O autor, 2019.

5.5. Dado um triângulo ABC com círculo circunscrito Γ , sejam P um ponto situado sobre o arco \widehat{AC} de Γ que não contém o vértice B e D o pé da perpendicular baixada de P à reta suporte do lado BC . Se $Q \neq P$ é o outro ponto de interseção da reta \overleftrightarrow{DP} com o círculo Γ e r denota a reta de Simson-Wallace de P em relação a ABC , prove que $r \parallel \overleftrightarrow{AQ}$.

Nas notações da figura 124, temos E o pé da perpendicular relativa a AC baixada de P . Pelo teorema do ângulo inscrito (Proposição 3.19), temos Desde que $A\hat{Q}P = A\hat{C}P = \theta$ e $Q\hat{A}C = Q\hat{B}C = Q\hat{P}C = \beta$. Como $C\hat{D}P = C\hat{E}P = 90^\circ$, pela Proposição 3.39, o quadrilátero $PEDC$ é inscritível, então $D\hat{P}C = D\hat{E}C = \beta$ e $E\hat{D}P = \theta$. Portanto $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AQ}$ o que implica $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AQ}$.

Figura 124: Referência para o problema 5.5, seção 3.5.

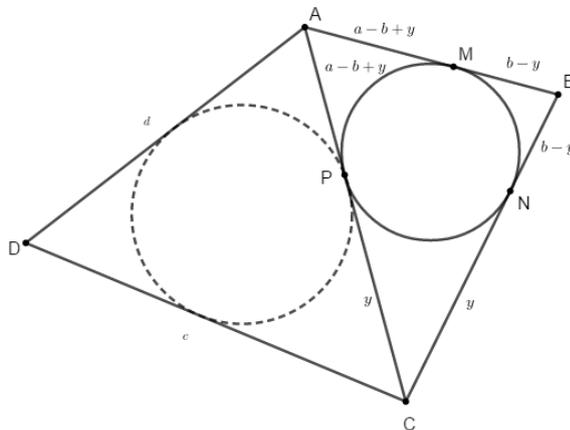


Fonte: O autor, 2019.

5.8. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Mostre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC , um mesmo ponto em comum.

Nas notações da figura 125, temos $a + c = b + d$, ($\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$) pelo teorema de Pitot (Teorema 3.42). Seja o círculo inscrito no triângulo ABC e seus pontos de tangência aos lados AB, BC e AC representados por M, N e P , respectivamente. Então $\overline{CP} = p - a$ e $\overline{AP} = p - b$. Isto é, $\overline{AP} - \overline{CP} = a - b$. Fazendo cálculos análogos no triângulo ACD , considerando P' o ponto de tangência do círculo inscrito com o lado AC teríamos $\overline{CP'} = p' - d$ e $\overline{AP'} = p' - c$. Isto é, $\overline{AP'} - \overline{CP'} = d - c$. Mas, como $P, P' \in AC$ e $a + c = b + d$ que equivale a $a - b = d - c$, concluímos $P \equiv P'$, logo ambas tangenciam AC no mesmo ponto.

Figura 125: Referência para o problema 5.8, seção 3.5.



Fonte: O autor, 2019.

5.11. Se um hexágono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_6$ é circunscritível, prove que

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_1}.$$

Sejam $\overline{A_1A_2} = a$, $\overline{A_2A_3} = b$, $\overline{A_3A_4} = c$, $\overline{A_4A_5} = d$, $\overline{A_5A_6} = e$, $\overline{A_6A_1} = f$ e os pontos D, E, F, G, H e I os pontos de tangência aos lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$ e $\overline{A_6A_1}$, respectivamente. Considerando $\overline{DA_2} = x$ e o fato de que os comprimentos dos segmentos compreendidos entre um ponto exterior a um círculo e os pontos de tangência que partem deste em relação ao mesmo círculo são iguais, chegamos a $f - e + d - c + b - x = a - x$ o que implica em $a + c + e = b + d + f$.

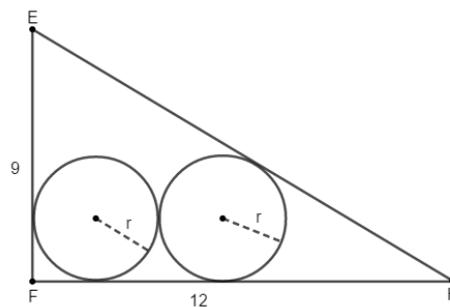
4 PROBLEMAS PROPOSTOS

4.1 Problemas – Seção 4.1

O intuito desta sessão, é propor alguns problemas de geometria plana, a fim de explorar toda experiência adquirida através das sessões anteriores. Em alguns casos, tais problemas serão sucedidos de preciosas dicas na esperança que conduzam à correta solução. Os tópicos contemplados nesta sessão em alguns casos excederão os abordados nas sessões anteriores, no entanto sem fugir do programa habitualmente lecionado.

1. **(Pará)** Calcule r sendo 9 e 12 catetos, e os círculos tangentes aos lados com que possuem contato.

Figura 126: Referência para o problema 1, seção 4.1.

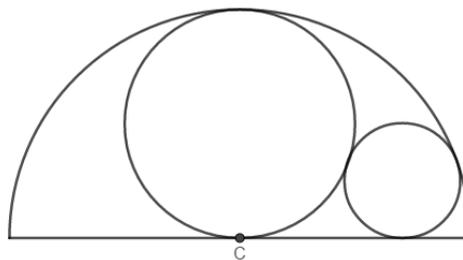


Fonte: O autor, 2019.

Dica: Ligar E aos centros e pensar nos pontos de tangência pode ser útil!

2. **(Winconsin)** Na figura, dois círculos são tangentes e estão inscritos em um semicírculo de raio 2. Se o círculo maior é tangente ao diâmetro do semicírculo no ponto C , determine o raio do menor círculo. (C é o centro do semicírculo).

Figura 127: Referência para o problema 2, seção 4.1.



Fonte: O autor, 2019.

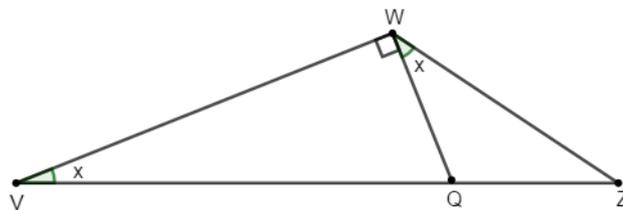
Dica: Buscar triângulos retângulos nos fornecem relações conhecidas! Teorema de Pitágoras!

3. **(Rússia)** Os centros de quatro círculos estão situados nos vértices de um quadrado de lado y ; os raios são iguais a y . Calcule a área da intersecção dos círculos.

Dica: Enxergue o quadrilátero curvilíneo! Triângulos equiláteros oferecem informações conhecidas!

4. Na figura, calcular x , se: $VQ = 2WZ$.

Figura 128: Referência para o problema 4, seção 4.1.

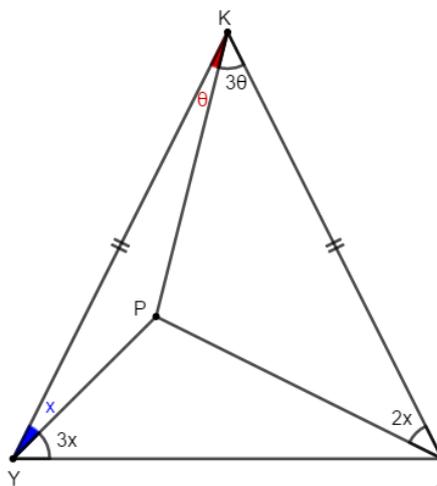


Fonte: O autor, 2019.

Dica: Cevianas notáveis podem oferecer resultados clássicos!

5. Na figura, calcular x .

Figura 129: Referência para o problema 5, seção 4.1.



Fonte: O autor, 2019.

Dica: Pontos notáveis (Incentro, baricentro, circuncentro, ortocentro, ex-incentro) oferecem generalização para cevianas de mesma natureza!

6. **(Rússia)** Seja ABC um triângulo acutângulo qualquer onde a distância entre o ortocentro e o vértice B é y . Calcule a distância do centro da circunferência circunscrita a ABC ao lado AC .

Dica: Observe o triângulo formado pelos pés das alturas relativas a AB e BC e o ortocentro de ABC e o triângulo formado pelos pontos médios dos lados AC e BC e o circuncentro de ABC .

7. **(Colégio Naval)** Unindo-se os pontos médios dos quatro lados de um quadrilátero L , obtém-se um losango. Pode-se afirmar que L

- (A) é um retângulo
- (B) tem diagonais perpendiculares
- (C) é um trapézio isósceles.
- (D) é um losango
- (E) tem diagonais congruentes

Dica: Preste atenção nas bases médias.

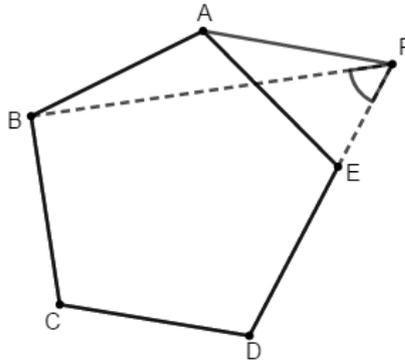
8. **(Colégio Naval)** Dois lados de um triângulo são iguais a 4 cm e 6 cm. O terceiro lado é um número inteiro expresso por $x^2 + 1$. O seu perímetro é:

- (A) 13cm
- (B) 14cm
- (C) 15cm
- (D) 16cm
- (E) 20 cm

Dica: Desigualdade triangular!

9.(Colégio Naval) O pentágono $ABCDE$ da figura abaixo é regular e de lado l . Sabendo que o segmento AF tem medida igual a l , pode-se afirmar que o ângulo $\angle BFE$ mede

Figura 130: Referência para o problema 9, seção 4.1.



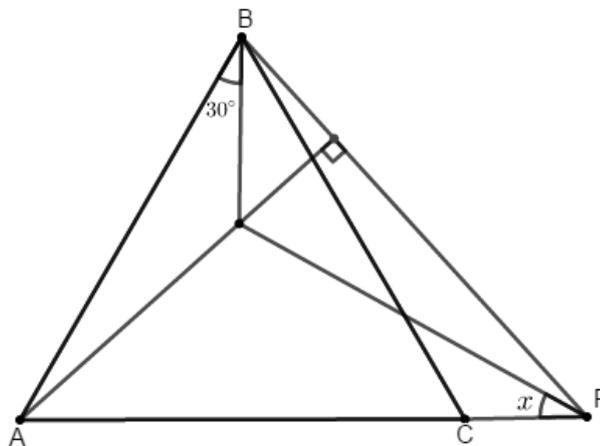
Fonte: O autor, 2019.

- a) 36° b) 45° c) 54° d) 60° e) 72°

Dica: Observe triângulos isósceles! Não afirme que D, E e F são colineares sem antes provar (caso sejam)!

10. Na figura, ABC é equilátero. Calcule x .

Figura 131: Referência para o problema 10, seção 4.1.



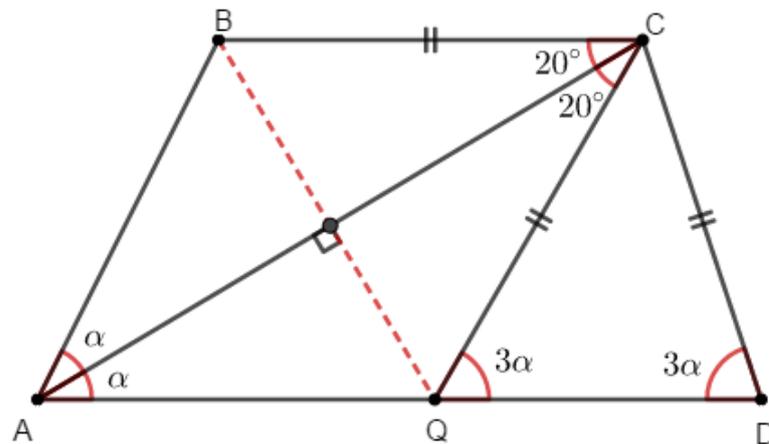
Fonte: O autor, 2019.

Dica: Enxergue um ponto notável importante.

11. Considere um trapézio de bases BC e AD e diagonais AC e BD . Sabe-se que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\widehat{BCA} = 20^\circ$, $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \theta$ e $\widehat{CDA} = 3\theta$. Determine θ .

Neste problema iremos nos apropriar do fato de que AC por se bissetriz nos levará a uma figura notável, a saber, um triângulo isósceles. Vale ressaltar que figuras notáveis são de extrema utilidade quando aparecem em problemas. Desde que AC é bissetriz de BAD , tracemos $BQ \perp AC$ tal que obtemos o triângulo ABQ isósceles de base BQ , então AC será mediatriz de BQ . Assim, $CB = CQ$ e $\angle ACQ = 20^\circ$. No triângulo QCD isósceles de base QD teremos $\angle CQD = 3\alpha$. Portanto $\angle CQD$ será externo do triângulo AQC , logo $3\alpha = \alpha + 20^\circ \therefore \alpha = 10^\circ$.

Figura 132: Referência para o problema 11, seção 4.1.



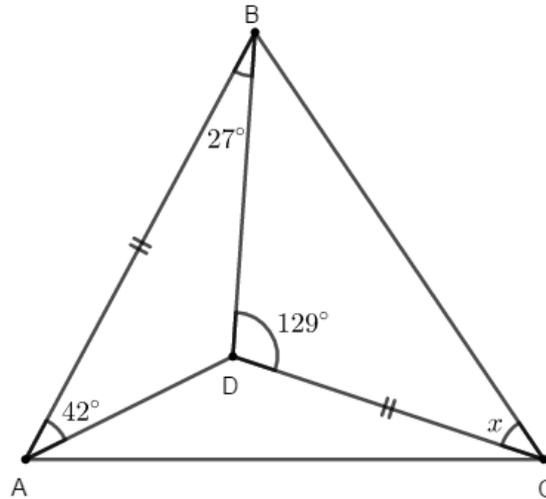
Fonte: O autor, 2019.

12. Seja um triângulo ABC tal que $\angle BAC = 2x$, $\angle ACB = x$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, onde $D \in \overline{AC}$. Determine a medida do ângulo $\angle CBD$.

Dica: Prolongue CA tal que $\widehat{BTA} = x$.

13. Calcular x na figura.

Figura 133: Referência para o problema 13, seção 4.1.



Fonte: O autor, 2019.

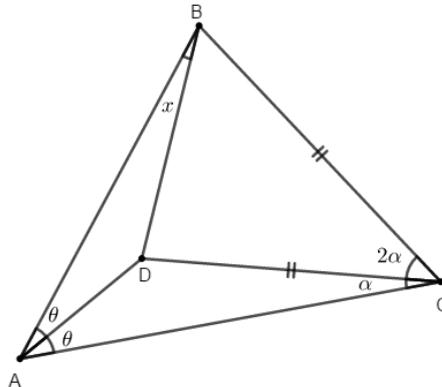
Dica: Prolongue AD e tome um ponto E sobre AD tal que $\widehat{DEB} = 42^\circ$. Preste atenção nos lados congruentes que irão aparecer. Por fim, enxergue um triângulo equilátero.

14. Dado um quadrilátero $ABCD$ com $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$, $\widehat{C} = \widehat{B}$ e $\widehat{A} = 60^\circ$. Determinar a medida do ângulo $\angle C$.

Dica: Trace BD e enxergue um triângulo equilátero.

15. Calcular x na figura.

Figura 134: Referência para o problema 15, seção 4.1.



Fonte: O autor, 2019.

Dica: Trace as alturas CH, DQ e DP nos triângulos BCD, ACD e ABD , respectivamente.

16. Em um triângulo obtusângulo ABC , obtuso em B , $AB = 2$ e $AC = 10$. Encontrar BC , sabendo que é um número inteiro.

Dica: Utilize desigualdade triangular e preste atenção nos ângulos.

17. Dado um triângulo isósceles ABC de base AC , tomam-se os pontos M sobre AB e N sobre BC , de modo que o triângulo MNC seja equilátero. Calcular a medida do ângulo $\angle NMB$ se $\widehat{ACM} = \alpha$.

Dica: Preste atenção no ângulo externo $\angle BMC$.

18. Em um triângulo ABC , a medida do ângulo externo relativo ao vértice B é o triplo do ângulo interno relativo ao vértice C . Sabe-se que a mediatriz de BC corta AC no ponto F . Se $\overline{FC} = 12$, calcular \overline{AB} .

Dica: Trace BF e conclua que o triângulo ABF é isósceles.

19. Em um triângulo ABC , reto em B , constrói-se exteriormente um triângulo isósceles DAC , reto em A . Seja $DE \perp BC$ (E pertence a BC), calcular DE dado que $BC = 13$ e $EC = 8$.

Dica: Prolongue AB até P tal que $AP \perp DP$.

20. No triângulo ABC ($\overline{AB} = \overline{BC}$), P pertence ao prolongamento de AC , tal que $\overline{BP} = \overline{AC}$, $2 \cdot \hat{A} - \hat{BPC} = 60^\circ$. Calcular a medida de $\angle B$.

Dica: Construa o triângulo equilátero AQC .

CONCLUSÃO

No estudo da geometria nos deparamos com muitos problemas que exigem caminhos mais elaborados em suas resoluções, necessitando de uma abstração que ultrapasse apenas as aplicações básicas. Encontrar relações ou figuras notáveis na resolução de um problema constitui uma ferramenta poderosa para os casos mais complexos, pois pelo fato de serem notáveis fornecem uma gama de informações e resultados já conhecidos. Em diversas situações vale desconfiar que determinado encaminhamento leva à solução de um problema e podemos tentar provar que o mesmo fornece os resultados esperados. Assim, aprimorar a abstração geométrica implica diretamente em boas justificativas dos passos a seguir e uma boa dose de intuição preconizados pelos resultados importantes já conhecidos. Buscar informações notáveis torna-se objeto de interesse quando um problema parece muito complexo, como por exemplo o aparecimento de paralelas, perpendiculares, triângulos equiláteros, isósceles e muitos outros.

Sendo assim, fornecer experiências ao estudante, seja professor ou aluno, através de resolução de problemas, de forma abrangente quanto ao nível de dificuldade, com a preocupação em tecer comentários considerados gatilhos para uma compreensão mais aprofundada do contexto quando pertinente, acreditamos ser uma poderosa ferramenta de entendimento e amadurecimento.

Esperamos, que esse texto sirva como uma ponte, visando corroborar com a disseminação do estudo de geometria, pois sabemos que muitas das vezes a falta de material adequado promove o afastamento de docentes, no que tange aprofundar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

BONATTI, Cristiane. Saberes Geométricos no Primeiro Ano do Ensino Fundamental: uma experiência tendo por base pressupostos teóricos de Vygotsky. Disponível em: < http://www.bc.furb.br/docs/DS/2015/360475_1_1.pdf > Acesso em: 07 jun. 2017

DIVERSOS, Geometria Uma Vision de la Planimetria., LUMBRERAS, 2008.

MARTINS, R. M. K. Matemática e História em Quadrinhos na Cultura Digital: A Educação matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7754/3561>.

MUNIZ NETO, A. C. Geometria. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

ANEXO A – Conceitos Geométricos Básicos

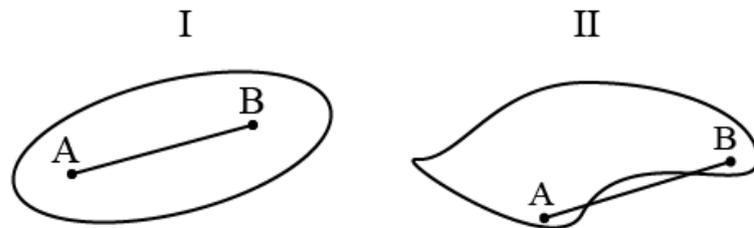
Notação

- Os **pontos** do plano serão denotados por letras latinas maiúsculas.
- As **retas**, por letras latinas minúsculas ou \overleftrightarrow{AB} .
- Uma **semirreta** de origem em A por \overrightarrow{AB} .
- Um segmento, por AB e seu comprimento, por \overline{AB} .
- Círculo de centro O e raio r , por $\Gamma(O, r)$ ou apenas Γ .

Ângulos

Definição 1.4. Uma região R do plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $\overline{AB} \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região não convexa.

Figura 135: (I) Região Convexa e (II) Região não convexa.

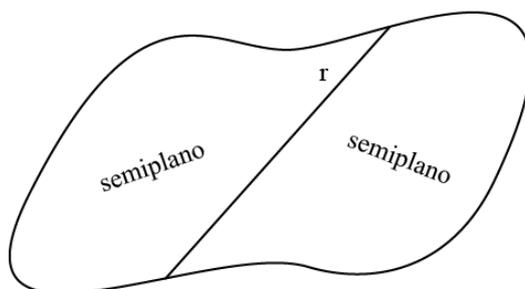


Fonte: O autor, 2019.

Observemos em (I) que, quaisquer dois pontos distintos marcados sobre a superfície plana delimitada, teremos o segmento AB contido inteiramente na região.

Definição D1. Uma reta r de um plano o divide em duas regiões convexas, os semiplanos delimitados por r .

Figura 136: Semiplanos determinados pela reta r .

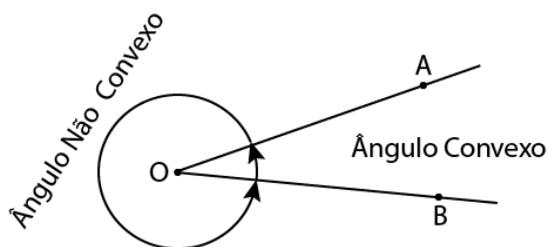


Fonte: O autor, 2019.

Observe que a figura acima é apenas representativa pois retas e planos possuem extensões infinitas.

Definição 1.5. Dados, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Figura 137: Ângulo Convexo e não convexo.



Fonte: O autor, 2019.

Observações 1.6.

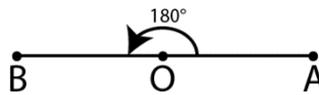
1) Diremos que dois ângulos são iguais se suas medidas forem iguais. A unidade usual adotada para se medir ângulos será o grau ($^\circ$). Notação: $\angle AOB$; $\hat{A}OB$.

2) Será muito comum adotar letras gregas minúsculas para representar ângulos. Ex.: $\angle AOB = \theta$.

3) Um círculo inteiro representará 360° .

Nota: Como o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, se tivermos um ângulo formado por semirretas opostas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , então $\angle AOB = 180^\circ$.

Figura 138: Ângulo formado por semirretas opostas, também conhecido como ângulo raso.

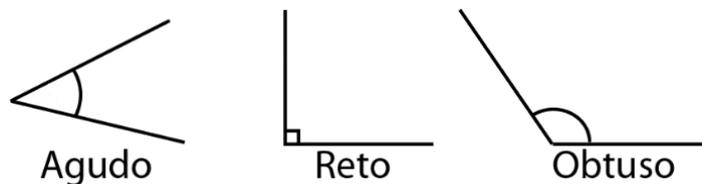


Fonte: O autor, 2019.

Dado um ângulo, existem algumas classificações que utilizamos comumente que doravante iremos adotar. Seja β um ângulo dado, temos que:

- Se $0^\circ < \beta < 90^\circ$, então β é um ângulo agudo.
- Se $90^\circ < \beta < 180^\circ$, então β é um ângulo obtuso.
- Se $\beta = 90^\circ$, então β é um ângulo reto.

Figura 139: Classificação dos ângulos.



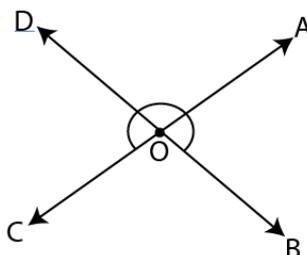
Fonte: O autor, 2019.

Quando comparamos dois ângulos, para determinadas situações utilizamos nomenclatura específica quando soma dos mesmos resulta em valores específicos, tais como: 90° , 180° e 360° . Sejam θ e β dois ângulos, temos:

- $\theta + \beta = 90^\circ$, são ângulos complementares.
- $\theta + \beta = 180^\circ$, são ângulos suplementares.
- $\theta + \beta = 360^\circ$, são ângulos replementares.

Definição 1.8. Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são opostos pelo vértice (abreviamos OPV) se seus lados forem semirretas opostas.

Figura 140: Ângulos Opostos pelo Vértice. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ pares de semirretas opostas.



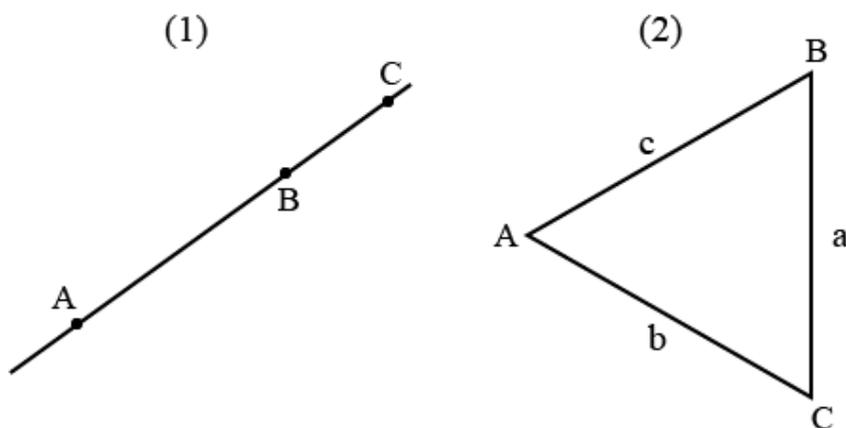
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 1.9. Dois ângulos OPV são iguais.

Polígonos

Definição D2. Três pontos são ditos colineares quando pertencem a mesma reta. Caso contrário formam um triângulo de lado $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e vértices A , B e C .

Figura 141: (1) Três pontos não colineares e (2) triângulo ABC (ΔABC).

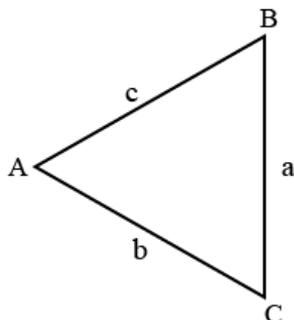


Fonte: O autor, 2019.

Observação: Esta notação para os lados de um ΔABC é genérica. O lado oposto ao ângulo $\angle A = \angle BAC$ costumamos representar por “a”.

Definição D3. Chamaremos de perímetro de um polígono a soma dos comprimentos de seus lados. Representaremos o perímetro de um triângulo por $2p = a + b + c$, sendo a, b e c as medidas de seus lados. O semiperímetro deste triângulo será denotado por $p = \frac{a+b+c}{2}$. Os ângulos $\angle A, \angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC são denominados seus ângulos internos.

Figura 142: Triângulo ABC ($\triangle ABC$).



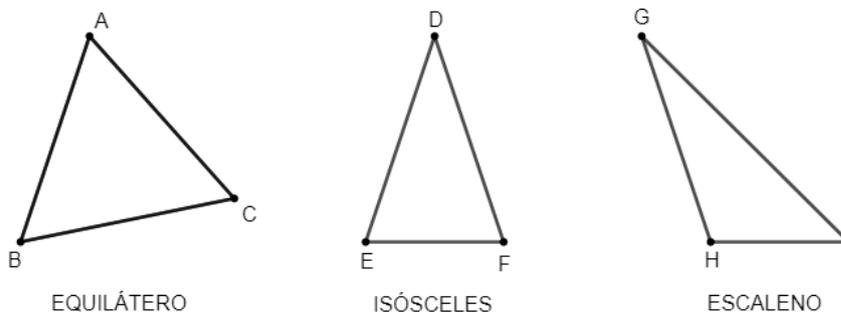
Fonte: O autor, 2019.

Os triângulos classificam-se basicamente em duas formas: quanto aos lados e ângulos. Por enquanto, falaremos apenas da classificação quanto o número de lados.

Definição 1.10. Um triângulo ABC é denominado:

- Equilátero, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.
- Isósceles, se ao menos dois dentre os lados $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ forem iguais.
- Escaleno, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

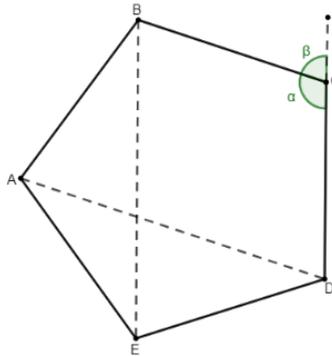
Figura 143: Triângulos Equilátero, Isósceles e Escaleno da esquerda para a direita.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 1.11. Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1 A_2 \dots A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overline{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$)

Figura 144: Polígono ABCDE.



Fonte: O autor, 2019.

Elementos do Polígono

Vértices: Os pontos distintos A_1, A_2, \dots, A_n , no caso da figura 30, temos A, B, C, D e E.

Lados: São segmentos obtidos quando ligamos dois pontos consecutivos. Na figura 30, temos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$.

Região Poligonal: Corresponde aos lados e o interior do polígono.

Diagonal: É o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Na figura 30, temos por exemplo: \overline{AD} e \overline{BE} .

Ângulo Interno: É o ângulo $0 < \alpha < 180^\circ$, da forma $\alpha = \angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$.

Ângulo Externo: O ângulo externo de um polígono é obtido pelo prolongamento do lado $\overline{A_i A_{i+1}}$ e o lado $\overline{A_{i+1} A_{i+2}}$, em outras palavras, é o ângulo formado pelo prolongamento de um lado e o lado consecutivo, seja no sentido horário ou anti-horário dependendo do prolongamento que seja feito. Na figura 30, β representa o ângulo externo. Neste caso, prologamos o lado DC e no sentido anti-horário seu consecutivo seria o lado CB.

Notação: Costumamos representar polígonos por letras latinas maiúsculas, geralmente distintas.

Proposição 1.12. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por $d =$

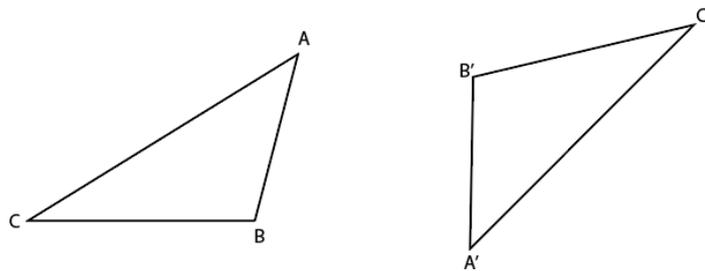
$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

ANEXO B – Congruência de triângulos

Os casos LAL, ALA e LLL

Definição D4. Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazer coincidi-lo com o outro, isto é, se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 145: Triângulos congruentes.



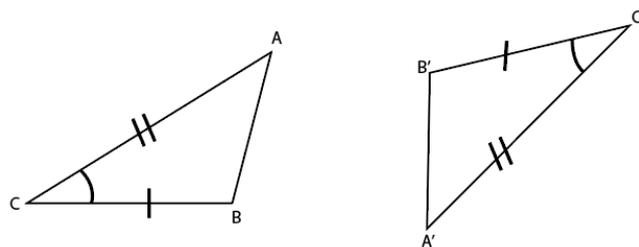
Fonte: O autor, 2019.

Na figura 145, temos dois triângulos congruentes. Assim,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}$$

Axioma (Critério de Congruência LAL): Se dois triângulos possuem dois lados respectivamente congruentes e o ângulo formado por estes lados também forem congruentes, então tais triângulos serão congruentes.

Figura 146: Triângulos congruentes. Caso LAL.



Fonte: O autor, 2019.

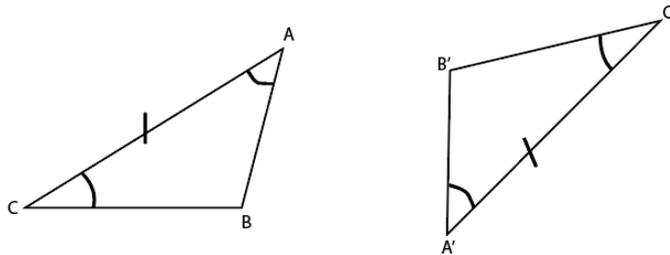
Em símbolos, temos:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \angle C = \angle C' \end{cases} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Dada a congruência vale salientar que os demais lados e ângulos correspondentes também serão congruentes. Assim, $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Axioma (Critério de Congruência ALA): Dados dois triângulos que possuem dois ângulos respectivamente congruentes e o lado compreendido entre tais ângulos também congruentes, então estes triângulos serão congruentes.

Figura 147: Triângulos congruentes. Caso ALA.



Fonte: O autor, 2019.

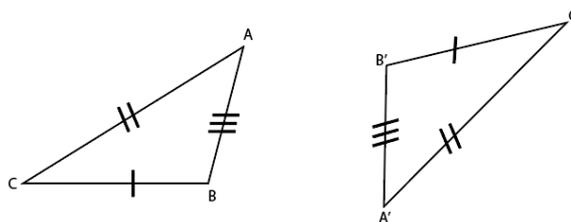
Em símbolos, temos:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \angle A = \angle A'; \angle C = \angle C' \end{cases} \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Dada a congruência vale salientar que os demais lados e ângulos correspondentes também serão congruentes. Assim, $\angle B = \angle B'$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Axioma (Critério de Congruência LLL): Se dois triângulos possuem seus lados respectivamente congruentes, então serão congruentes.

Figura 148: Triângulos congruentes. Caso LLL.



Fonte: O autor, 2019.

Em símbolos, temos: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ $\rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

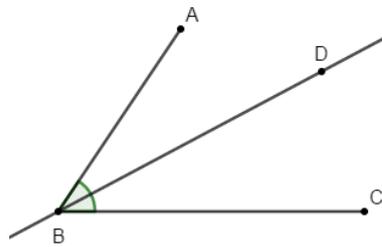
Dada a congruência vale salientar que os demais lados e ângulos correspondentes também serão congruentes. Assim, $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$.

Aplicações de congruência

Alguns resultados advindos da congruência são de notória aplicação na resolução de problemas diversos. Este fato, motiva nesta seção a exposição de tais resultados, afim de maior velocidade e entendimento na resolução de problemas dada a incidência da necessidade de tais recursos.

Definição 2.5 A bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice do ângulo que o divide em dois outros congruentes. Podemos dizer também, que a bissetriz bissecta o ângulo o qual ela divide.

Figura 149: Bissetriz de um ângulo.



Fonte: O autor, 2019.

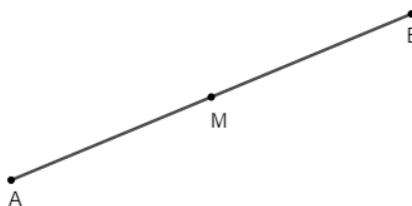
Na figura 149, a semirreta \overrightarrow{BD} é bissetriz. Assim,

$$\overrightarrow{BD} \text{ bissetriz de } \angle ABC \leftrightarrow \angle ABD = \angle DBC.$$

Dizemos que \overrightarrow{BD} bissecta o ângulo $\angle ABC$.

Definição D5. O ponto médio de um segmento AB será o ponto M sobre AB tal que $AM = MB$.

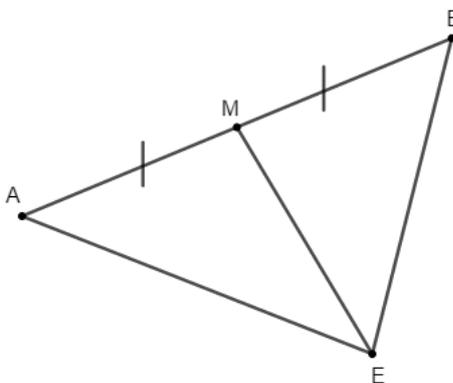
Figura 150: M ponto médio de AB.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D6. Dado um triângulo um triângulo ABC, o segmento de reta que une o vértice ao ponto médio do lado oposto será chamado de mediana relativa ao vértice de onde parte.

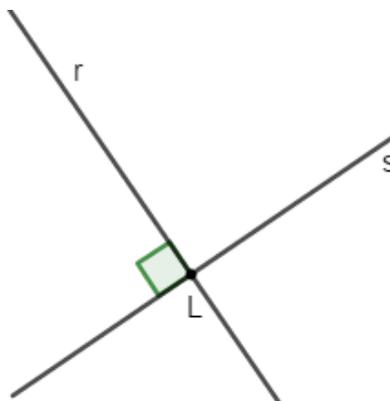
Figura 151: A mediana EM.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D7. Dados duas retas r e s no plano, diremos que r é perpendicular a s ou r perpendicular a s , quando tiverem um ponto em comum e o ângulo formado entre elas for reto.

Figura 152: Retas perpendiculares r e s .

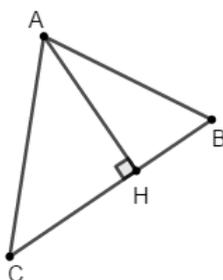


Fonte: O autor, 2019.

Utilizamos a seguinte notação para representar retas perpendiculares: $r \perp s$.

Definição D8. Dado um triângulo ABC, as interseções entre a reta suporte de um lado qualquer e a reta perpendicular a este lado que passa pelo vértice oposto, será o segmento de reta chamado de altura relativa ao lado tomado.

Figura 153: Altura relativa ao lado BC.

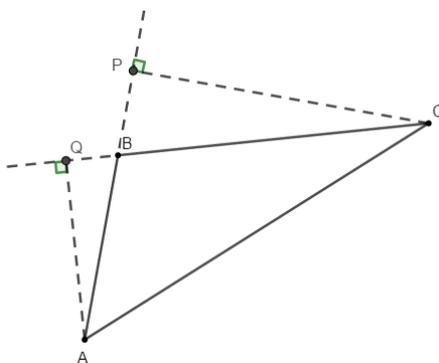


Fonte: O autor, 2019.

Observações:

- i) Todo triângulo possuirá três alturas, medianas e bissetrizes internas.
- ii) As alturas de um triângulo nem sempre serão internas ao mesmo. A saber, quando o triângulo for obtusângulo somente a altura que parte do vértice do ângulo obtuso será interna.

Figura 154: Construção das alturas externas de um triângulo obtusângulo.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 2.10. Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, então $\angle B = \angle C$.

Corolário 2.11. Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.

Paralelismo

Proposição 2.16. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Corolário 2.17. Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60° .

Desigualdade Triangular

Proposição 2.20. Dado um triângulo ABC , se $\angle B > \angle C$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Corolário 2.21 Se o triângulo ABC é tal que $\hat{A} \geq 90^\circ$, então BC é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo, a hipotenusa será o seu maior lado.

Corolário 2.22 Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Se $\angle BAC < \angle B'A'C'$, então $BC < B'C'$.

Proposição 2.23 (Desigualdade Triangular) Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Exemplo 2.24 Se P é um ponto situado no interior de um triângulo ABC , então:

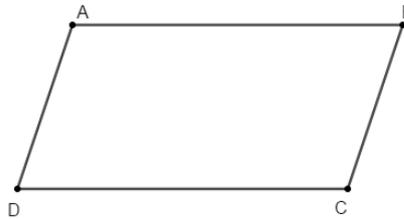
a) $PB + PC < AB + AC$

b) $PA + PB + PC < AB + AC + BC$

Quadriláteros Notáveis

Definição 2.27 Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Figura 155: Paralelogramo ABCD. $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.



Fonte: O autor, 2019.

$ABCD$ paralelogramo $\Leftrightarrow AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.

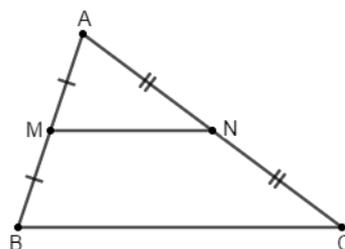
Proposição 2.28 Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.

Proposição 2.29 Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.

Proposição 2.30 Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Definição D9 Ao segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo chamaremos de base média.

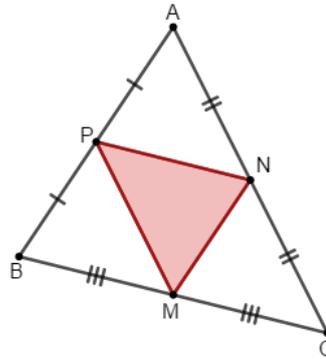
Figura 156: MN base média de ABC.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D10 Chamaremos de triângulo medial, ao triângulo formado pelas bases médias de um dado triângulo.

Figura 157: Triângulo Medial MNP.



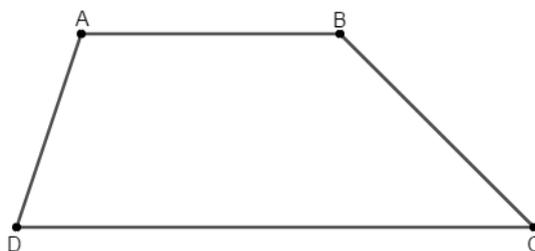
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 2.34 Se MN é base média relativa a BC do triângulo ABC , então $MN \parallel BC$. Reciprocamente, se por M médio de AB traçarmos uma paralela à BC , então esta interceptará AC em N médio de AC . Teremos também, que $MN = \frac{1}{2}BC$.

Proposição 2.36. Em todo triângulo, as três medianas intersectam-se no mesmo ponto, chamado baricentro. Se G é o baricentro do triângulo ABC , então G divide as medianas, a partir do vértice correspondente, na razão 2:1.

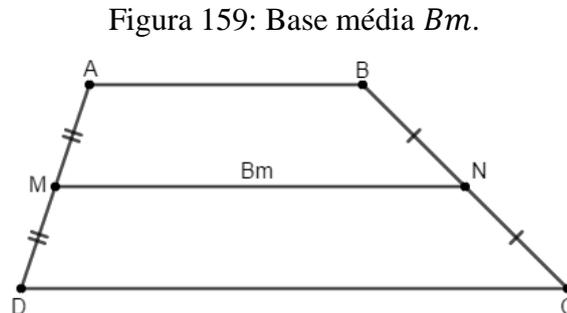
Definição D11 Um quadrilátero que possui dos lados opostos paralelos recebe o nome de trapézio. Os lados paralelos de um trapézio são chamados de bases e os lados não paralelos, quando existirem, de lados oblíquos. Caso os lados opostos sejam paralelos, em particular este trapézio será também paralelogramo. Admitiremos doravante, que toda vez mencionado o trapézio, este possuirá lados oblíquos.

Figura 158: Trapézio ABCD. $AB \parallel CD$.



Fonte: O autor, 2019.

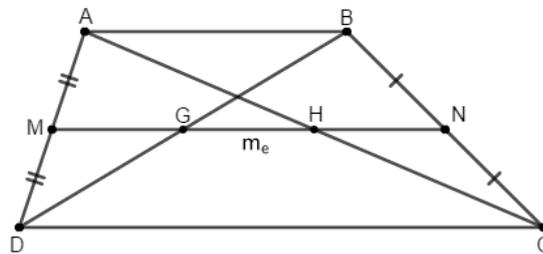
Definição D12 O segmento que une os pontos médios dos lados oblíquos de um trapézio será chamado de base média.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D13 O segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio será chamado de mediana de Euler.

Figura 160: $GH = m_e$ mediana de Euler. G e H são pontos médios das diagonais.



Fonte: O autor, 2019.

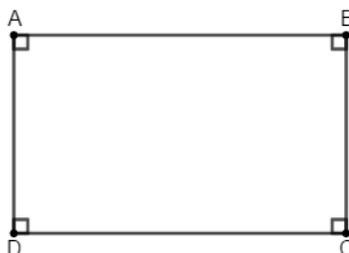
Proposição 2.38 Seja ABCD um trapézio de bases AB e CD, lados oblíquos BC e AD, com M e N pontos médios de AD e BC, respectivamente. Consideremos P e Q pontos médios das diagonais BD e AC, respectivamente. Então:

(a) M, N, P e Q são colineares e $MN \parallel AB \parallel CD$.

(b) $MN = \frac{AB+CD}{2}$ e $PQ = \frac{|AB-CD|}{2}$.

Definição D14 O quadrilátero convexo que possui os ângulos internos iguais, recebe o nome de retângulo. A saber seus ângulos serão iguais a 90° .

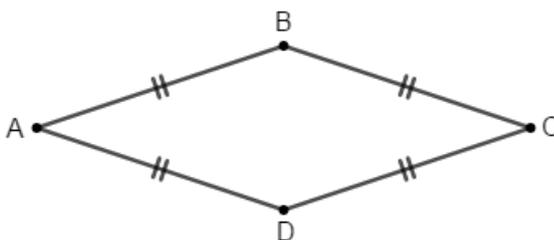
Figura 161: Retângulo ABCD.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D15 O quadrilátero que possui seus lados iguais, recebe o nome de losango.

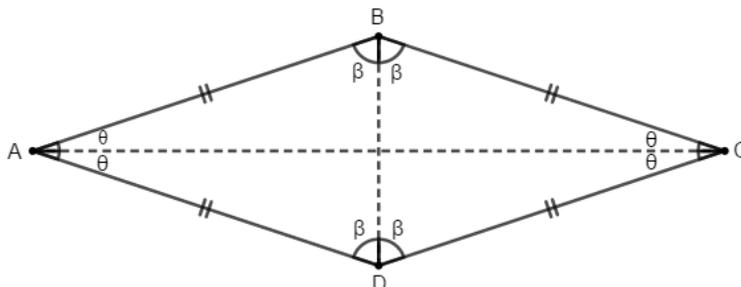
Figura 162: Losango ABCD.



Fonte: O autor, 2019.

Observação D16 Como os lados opostos do retângulo são paralelos, então este será também paralelogramo. Dado o losango ABCD da figura 117, temos que os triângulos ABC e ACD são congruentes, assim, $2\theta + 2\beta = 180^\circ$, portanto $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$. Assim, concluímos que o losango também será paralelogramo.

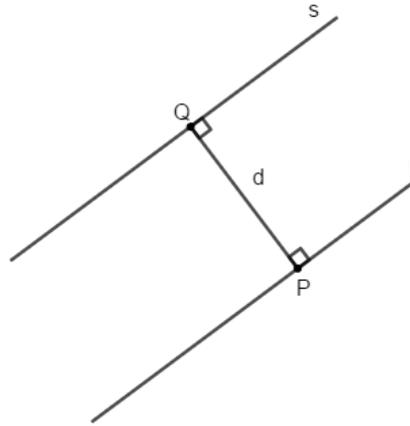
Figura 163: Referência para observação D16.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 2.39 Se r e s são retas paralelas, a distância entre r e s é o comprimento de qualquer segmento PQ tal que $P \in r, Q \in s$ e $PQ \perp r, s$.

Figura 164: Distância entre r e s .

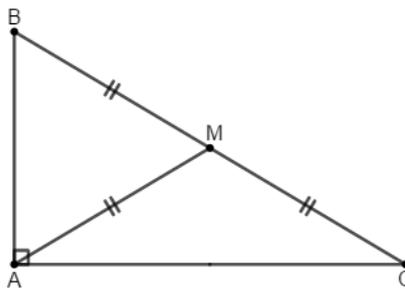


Fonte: O autor, 2019.

Proposição 2.41 Um paralelogramo é um retângulo se, e só se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.

Corolário 2.42 A mediana relativa à hipotenusa é a metade desta.

Figura 165: Mediana relativa à hipotenusa. $AM = \frac{BC}{2}$.

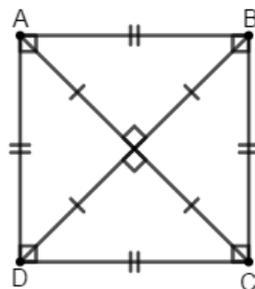


Fonte: O autor, 2019.

Proposição 2.44 Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.

Definição D17 Ao quadrilátero convexo que for simultaneamente losango e retângulo daremos o nome de quadrado.

Figura 166: Quadrado ABCD.



Fonte: O autor, 2019.

Observação 2.44 As diagonais de um quadrado são bissetrizes. Seja ABCD um quadrado de diagonais BD e AC. Como $AC = BD$, AC perpendicular BD e ambas concorrem nos seus pontos médios, então $PD = PC = PA = PB$ ($P = BD \cap AC$). Assim, o triângulo PCD será retângulo e isósceles portanto, $\angle PDC = \angle PCD = 45^\circ$. Analogamente, concluímos para os demais vértices.

ANEXO C - Lugares Geométricos

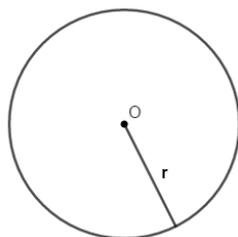
Lugares Geométricos

Definição 3.1 Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (abreviamos LG) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- Todo ponto de L possui a propriedade P .
- Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L .

Exemplo 3.2 A circunferência é o lugar geométrico dos pontos de α que estão a uma distância r ($r > 0$) de um ponto fixo O .

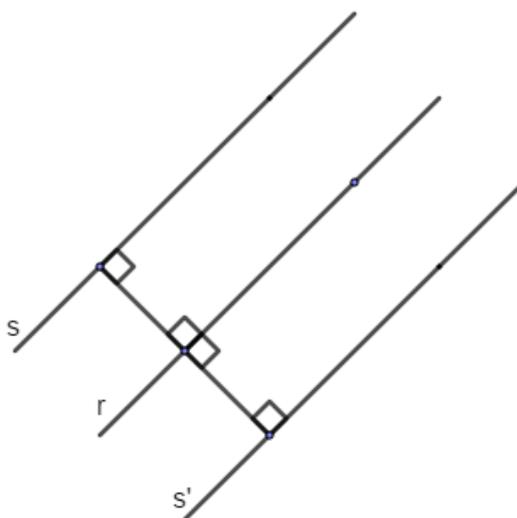
Figura 167: Circunferência π . $AO = r \leftrightarrow A \in \pi$.



Fonte: O autor, 2019.

Exemplo 3.3 O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância d de uma reta r é a união das retas s e s' , paralelas a r e situadas, cada uma, à distância d de r .

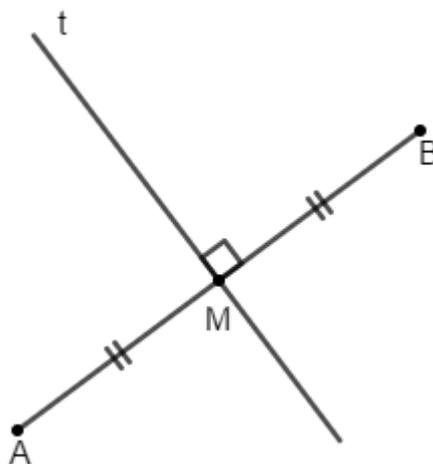
Figura 168: Retas paralelas $s, s' \parallel r$.



Fonte: O autor, 2019.

Definição D18 A mediatriz de um segmento será a reta perpendicular a este, tal que a interseção entre ambas seja no ponto médio do segmento dado.

Figura 169: Mediatriz de AB, t mediatriz $\rightarrow AM = BM$ e $t \perp AB$.

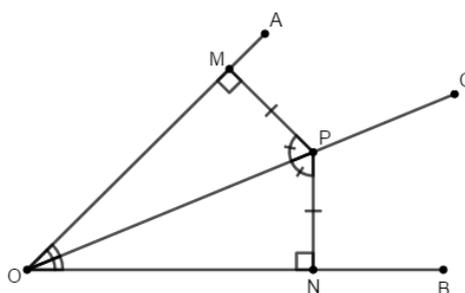


Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.5 Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e B.

Proposição 3.6 A bissetriz de um ângulo é o lugar é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes das semirretas suportes dos lados destes ângulos.

Figura 170: OC bissetriz de AOB. \overrightarrow{OC} bissetriz $\leftrightarrow d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$

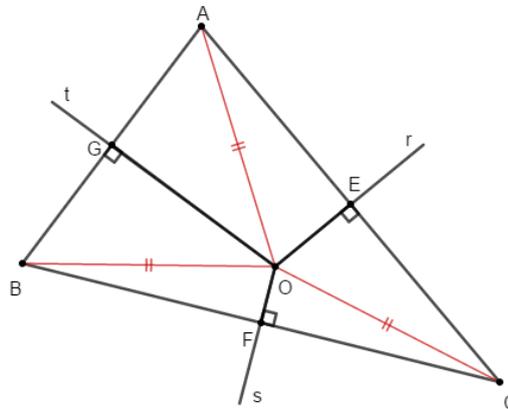


Fonte: O autor, 2019.

Pontos notáveis de um triângulo

Proposição 3.9. Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas pelo mesmo ponto, chamado circuncentro. Nas notações da figura, como O é equidistante aos vértices de ABC , teremos que O será o centro do círculo circunscrito a ABC .

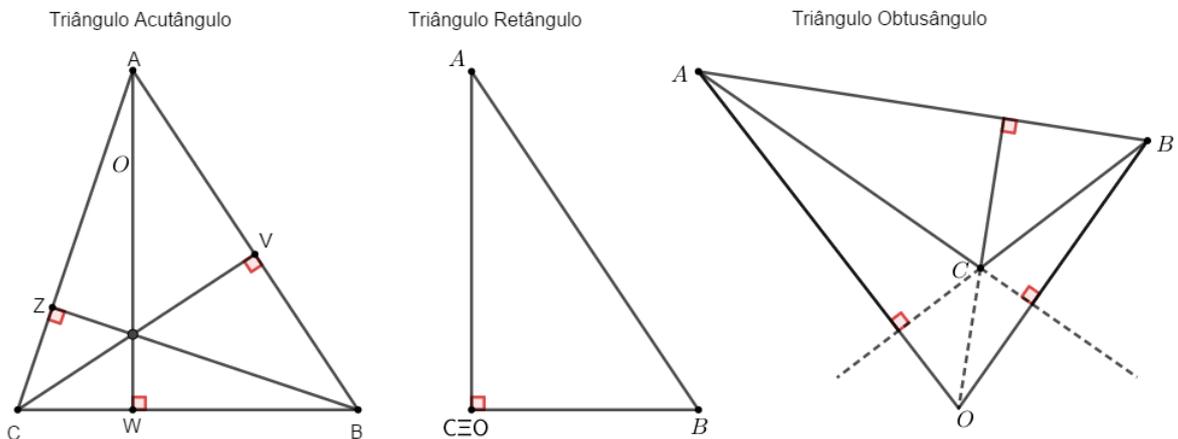
Figura 171: Referência para a proposição 3.9.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.11. Em todo triângulo, as três alturas se intersectam no mesmo ponto, chamado ortocentro.

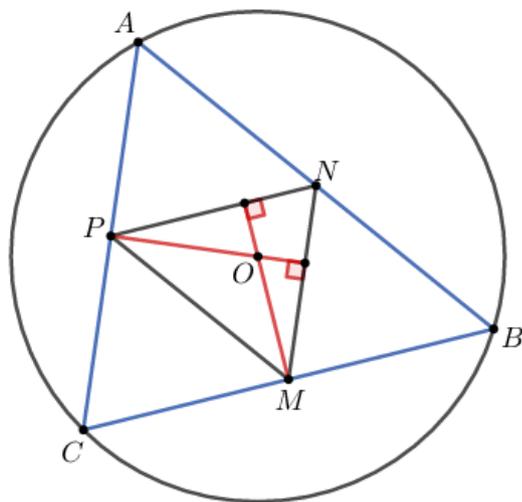
Figura 172: Ortocentro O dos triângulos ABC conforme sua natureza.



Fonte: O autor, 2019.

Corolário 3.12 O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

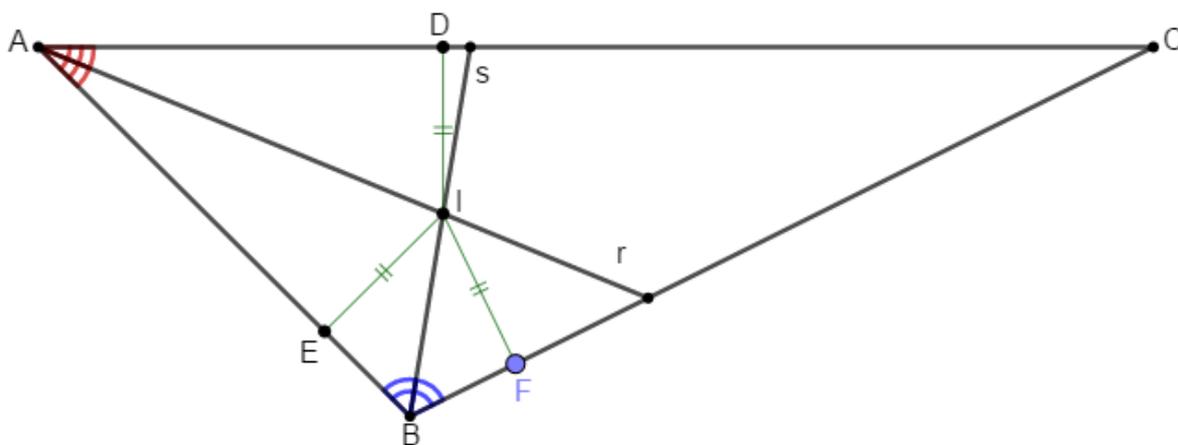
Figura 173: Ortocentro O do triângulo medial MNP .



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.13 As bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um único ponto chamado incentro do triângulo. Observe que o incentro é equidistante dos lados do ABC na figura.

Figura 174: Referência para proposição 3.14.

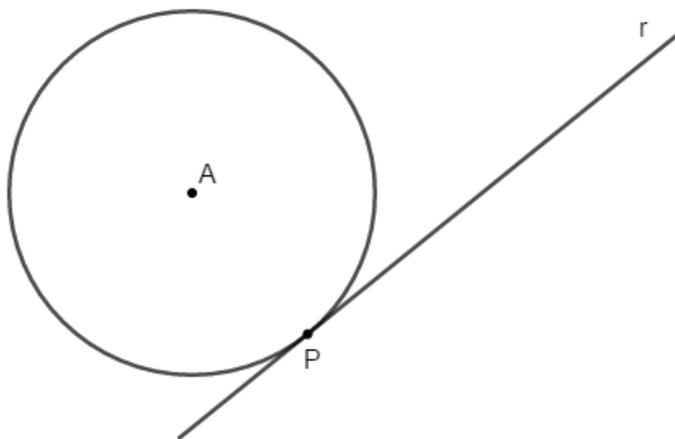


Fonte: O autor, 2019.

Tangência e ângulos no círculo

Definição 3.14 Uma reta será tangente a um círculo, se ambas tiverem exatamente um ponto em comum.

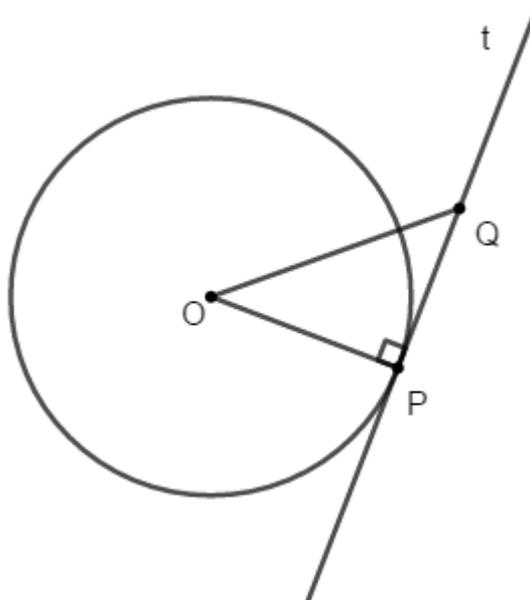
Figura 175: Reta r tangente ao círculo. P ponto de tangencia.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.15 Seja um círculo de centro O e P um ponto pertencente ao círculo dado. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a OP , então t é tangente ao círculo dado.

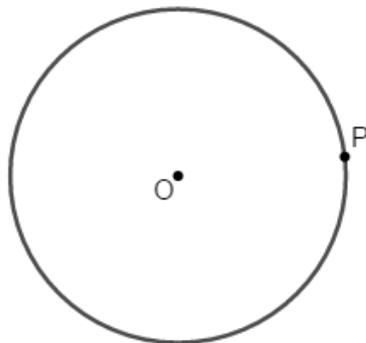
Figura 176: Referência para a proposição 3.15.



Fonte: O autor, 2019.

Exemplo 3.16 Nas notações da figura 177, construa com régua e compasso, uma reta r , tangente ao círculo em P .

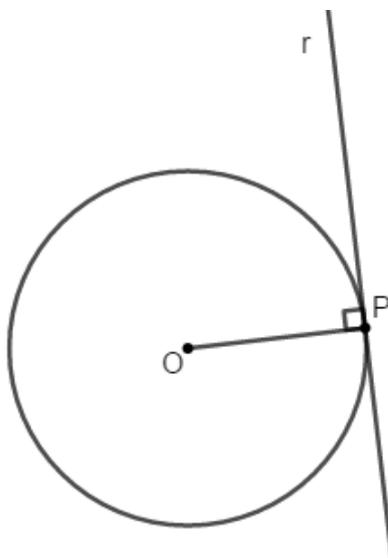
Figura 177: Referência para o exemplo 3.16.



Fonte: O autor, 2019.

Basta traçar uma reta perpendicular a OP , passando por P .

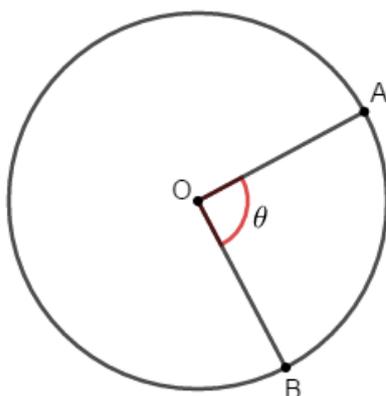
Figura 178: Construção do exemplo 3.16.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 3.17 Dado um círculo de centro O , chamaremos de ângulo central, ao ângulo formado pelos raios AO e OB . Por definição a medida do ângulo AOB será igual a medida do arco \widehat{AB} correspondente.

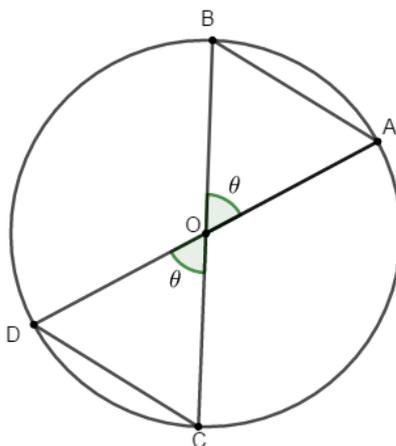
Figura 179: Ângulo central AOB ($\theta = \widehat{AB}$).



Fonte: O autor, 2019.

Exemplo 3.18 Se A, B, C e D são pontos sobre um círculo de centro O , tais que os ângulos centrais AOB e COD são iguais, então $AB = CD$.

Figura 180: Referência para o exemplo 3.18.

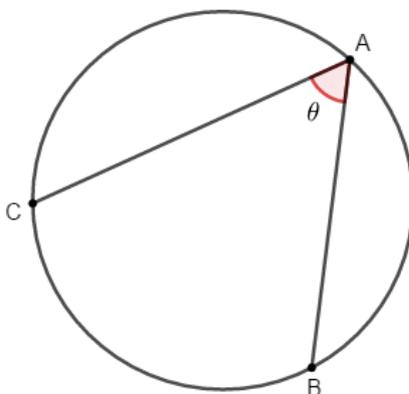


Fonte: O autor, 2019.

Sejam os triângulos OAB e OCD . Como $AO = BO = CO = DO = R$, então por LAL concluímos que os triângulos OAB e OCD são congruentes. Assim, $AB = CD$.

Definição 3.19 Ao ângulo formado por duas cordas, tal que ambas tenham um ponto em comum sobre a circunferência, recebe o nome de ângulo inscrito.

Figura 181: Ângulo inscrito BAC.



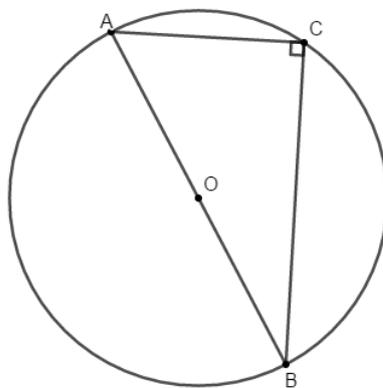
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.20 A medida do ângulo inscrito é igual a metade da medida do arco que o subtende.

$$\theta = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

Observação 3.21 Seja um triângulo ABC, tal que AB seja um diâmetro de um círculo e C seja um ponto pertencente ao mesmo. Assim, teremos que o triângulo ABC será retângulo de hipotenusa AB.

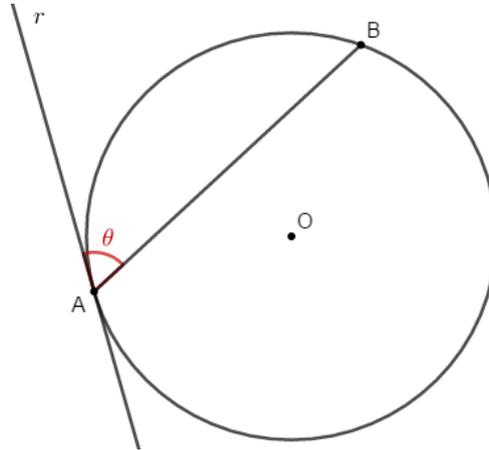
Figura 182: Triângulo retângulo de hipotenusa AB.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 3.22 Seja um ângulo formado por uma corda AB e a reta r tangente ao mesmo círculo, tal que o ponto de tangência seja um dos extremos desta corda (por exemplo A). A este ângulo damos o nome ângulo de segmento.

Figura 183: Ângulo de segmento θ .



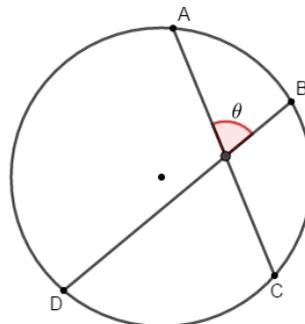
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.23 O ângulo de segmento é a metade do arco correspondente. Nas notações da Figura 188, temos

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

Definição 3.24 Ao ângulo formado por duas cordas, que se intersectam no interior do círculo, damos o nome de excêntrico interno.

Figura 184: Ângulo Excêntrico Interno θ .



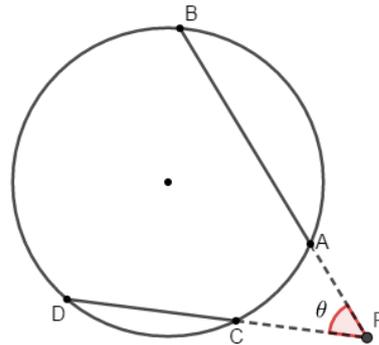
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.25 A medida do ângulo excêntrico interno é igual a média aritmética dos arcos subtendidos pelo mesmo, isto é, nas notações da figura teremos

$$\theta = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}.$$

Definição 3.26 Ao ângulo formado por duas cordas que se intersectam no exterior do círculo dado, damos o nome de excêntrico externo.

Figura 185: Ângulo Excêntrico Externo θ .



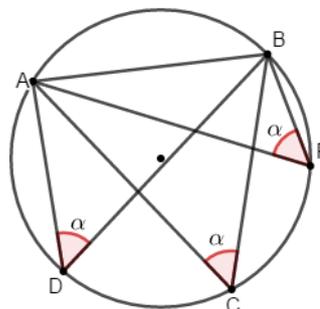
Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.27 A medida do ângulo excêntrico externo é igual a semidiferença dos arcos subtendidos, isto é,

$$\theta = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}.$$

Proposição 3.28 Dado um segmento AB e um ângulo α , com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o LG dos pontos P do plano tais que $\widehat{APB} = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os arcos capazes de α em relação a \overline{AB} .

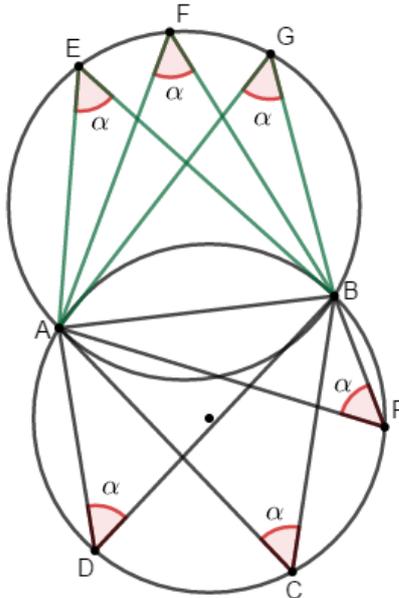
Figura 186: Arcos capazes de α .



Fonte: O autor, 2019.

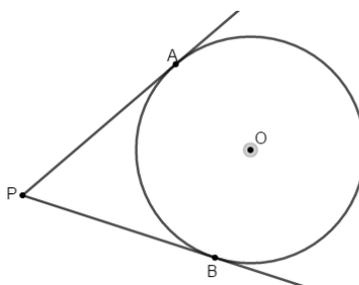
Observação 3.29 Para cada semiplano limitado por AB, podemos construir um arco capaz do mesmo ângulo.

Figura 187: Arcos capazes da observação 3.29.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.30 Por um ponto P exterior a um círculo no plano, existem exatamente duas tangentes ao mesmo que passam por P .

Figura 188: Tangentes ao círculo por P .

Fonte: O autor, 2019.

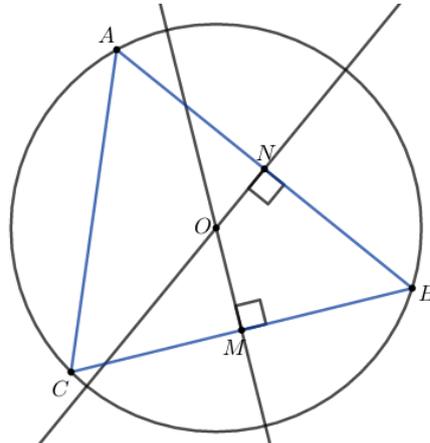
Proposição 3.31 Sejam as tangentes \overline{PA} e \overline{PB} a um círculo de centro O , então:

- (a) $\overline{PA} = \overline{PB}$.
- (b) \overline{PO} é mediatriz de \overline{AB} .
- (c) \overline{PO} é bissetriz de $\angle AOB$ e $\angle APB$.
- (d) $\overline{PO} \perp \overline{AB}$.

Círculos associados a um triângulo

Proposição 3.32 Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro deste. O círculo circunscrito também recebe o nome de circuncírculo.

Figura 189: Circuncentro O , centro do círculo circunscrito a ABC .

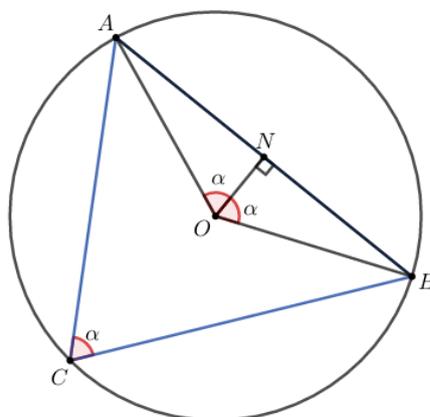


Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.33 Se ABC é um triângulo de circuncentro O , então O está no seu interior (respectivamente, sobre um lado, exterior) de ABC se, e só se, ABC for acutângulo (retângulo, obtusângulo).

Corolário 3.34 Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O . Se M é o ponto médio do lado AB , então $\angle AOM = \angle BOM = \angle ACB$.

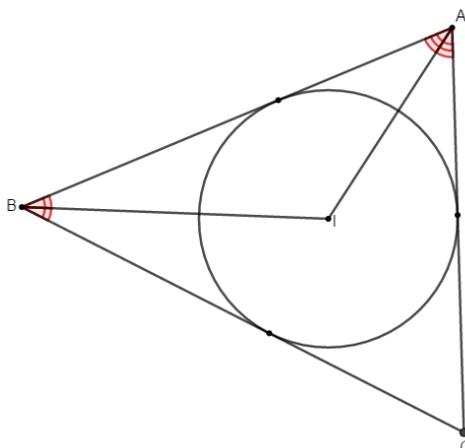
Figura 190: Corolário 3.34.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.35 Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Tal círculo é dito inscrito no triângulo e seu centro é o incentro do triângulo. O círculo inscrito também recebe o nome de incírculo.

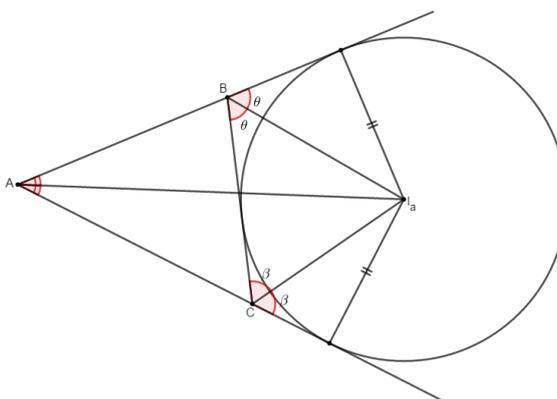
Figura 191: Incentro I de ABC.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.36 Em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC. Tal círculo recebe nome de ex-inscrito ao lado BC e seu centro será chamado de ex-incentro de ABC relativo à BC (ou ao vértice A). Tal centro será o ponto de encontro das bissetrizes externas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ com a bissetriz interna de $\angle A$.

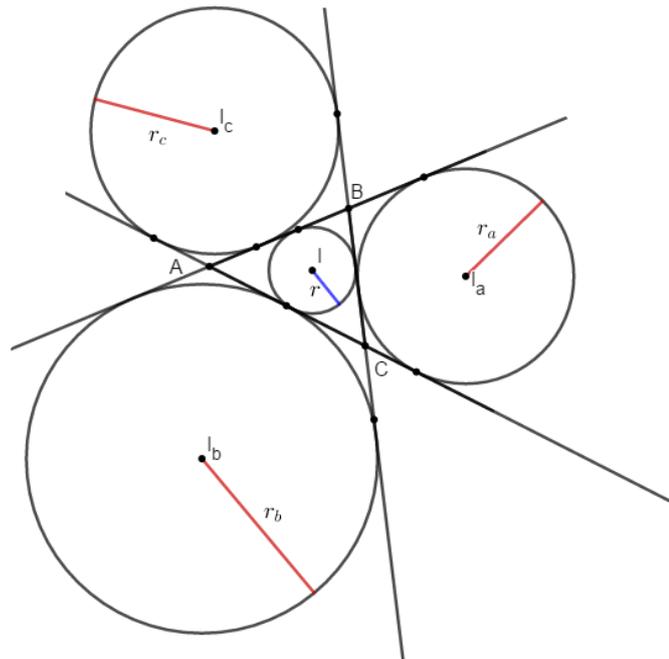
Figura 192: Ex-incentro relativo ao vértice A.



Fonte: O autor, 2019.

Observação 3.37 Todo triângulo admite quatro círculos tangentes aos seus lados.

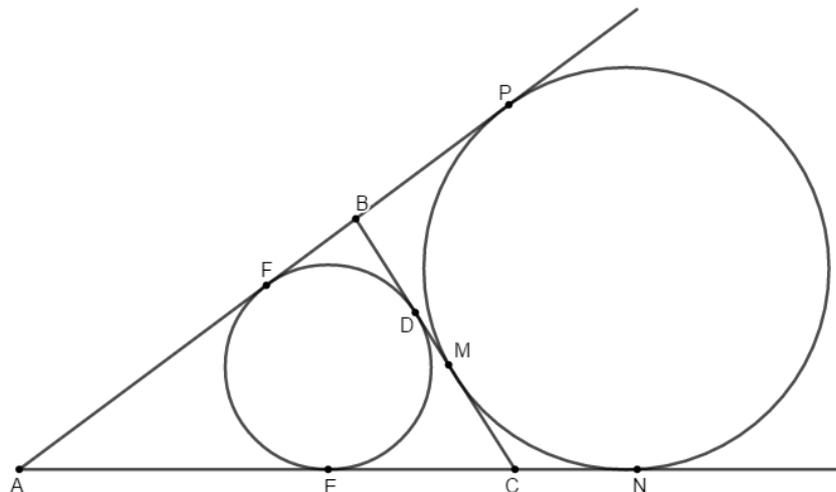
Figura 193: Círculos tangentes ao triângulo ABC.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.38 Seja ABC um triângulo de lados $AB = c, BC = a, CA = b$ e semiperímetro p . Sejam D, E e F os pontos onde o círculo inscrito em ABC tangencia os lados BC, CA e AB , respectivamente, e suponha, ainda que o círculo ex-inscrito a BC tangencia tal lado em M e os prolongamentos de AC e AB , respectivamente em N e P . Então:

Figura 194: Referência para proposição 3.38.



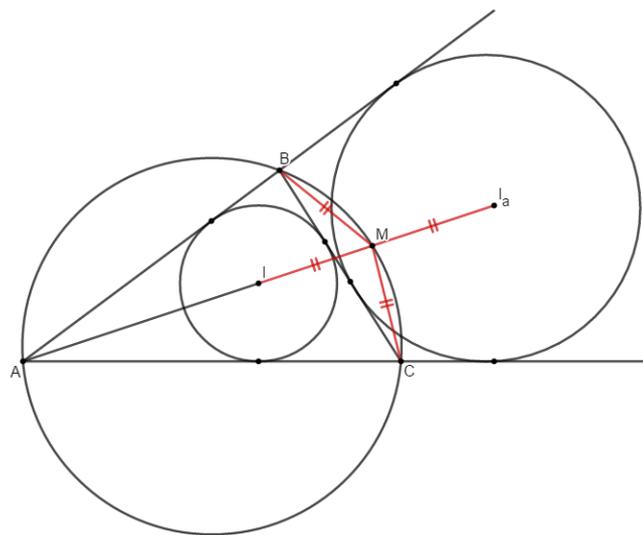
Fonte: O autor, 2019.

(a) $BD = BF = p - b, CD = CE = p - c, AF = AE = p - a$.

- (b) $AN = AP = p$.
- (c) $BM = BP = p - c, CM = CN = p - b$.
- (d) $En = FP = a$.
- (e) O ponto médio de BC também é o ponto médio de DM.

Proposição 3.39 Sejam um triângulo qualquer, I seu incentro, I_a seu ex-incentro relativo à BC e M o ponto onde o círculo circunscrito a ABC intersecta o segmento II_a . Então M é o ponto médio do arco BC que não contém A e $MB = MC = MI = MI_a$.

Figura 195: Proposição 3.39.

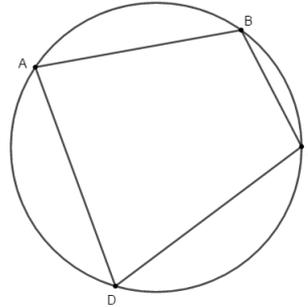


Fonte: O autor, 2019.

Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis

Definição 3.40 Um círculo é dito circunscrito a um quadrilátero (convexo) quando a circunferência deste contém todos os vértices do quadrilátero.

Figura 196: Quadrilátero Inscrito.

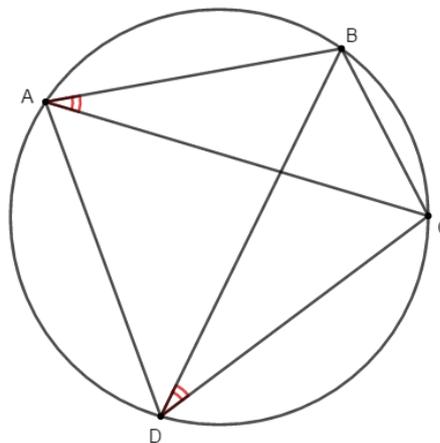


Fonte: O autor, 2019.

Podemos também, dizer que ABCD está inscrito no círculo. A unicidade do círculo circunscrito a um triângulo, torna imediata a unicidade do círculo circunscrito a um quadrilátero.

Proposição 3.41 Um quadrilátero convexo ABCD (ver figura 197), de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e somente se, uma qualquer das condições a seguir for satisfeita:

Figura 197: Quadrilátero ABCD.



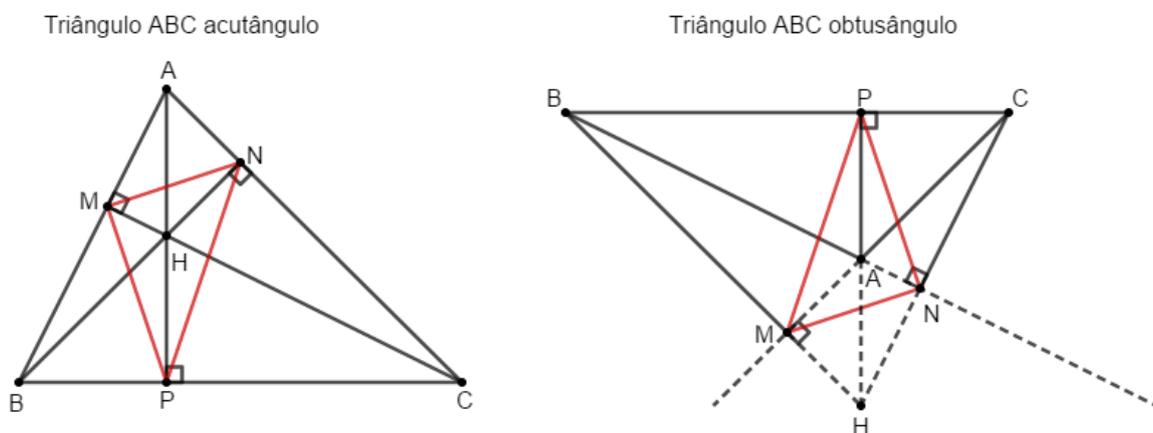
Fonte: O autor, 2019.

(a) $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$.

(b) $\angle BAC = \angle BDC$.

Definição 3.42 Um triângulo formado pelos pés das alturas de um triângulo não retângulo, chama-se órtico.

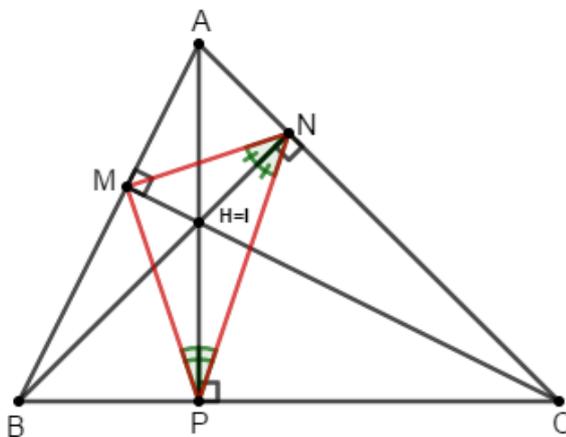
Figura 198: Triângulo órtico MNP.



Fonte: O autor, 2019.

Proposição 3.43 Em todo triângulo acutângulo, o ortocentro coincide com o incentro do triângulo órtico.

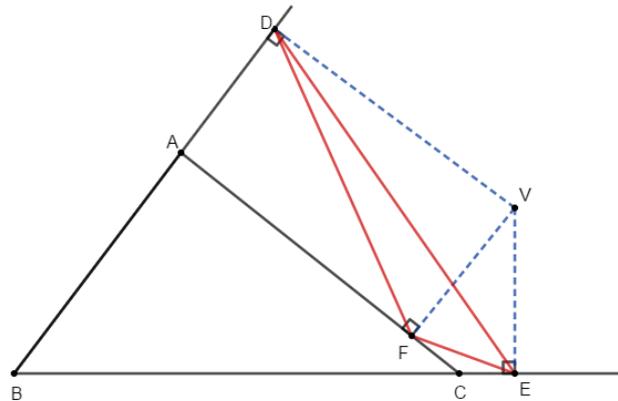
Figura 199: Referência para a proposição 3.43.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 3.44 Dado o triângulo ABC e P , tal que $P \notin \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$. Sejam D, E e F os pés das perpendiculares baixadas de P sobre as retas suportes $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} . Ao triângulo DEF dá-se o nome de triângulo pedal de P em relação à ABC .

Figura 200: Triângulo pedal DEF.

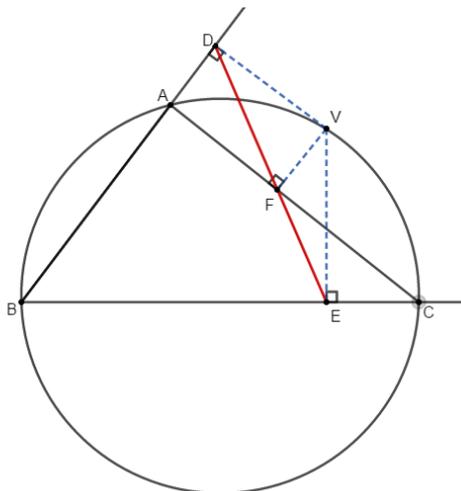


Fonte: O autor, 2019.

Observação 3.45 O triângulo pedal será degenerado quando D, E e F forem colineares.

Proposição 3.46 (Sinson-Wallace) Dados um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes de seus lados, o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado se, e só se, P estiver sobre o círculo circunscrito a ABC.

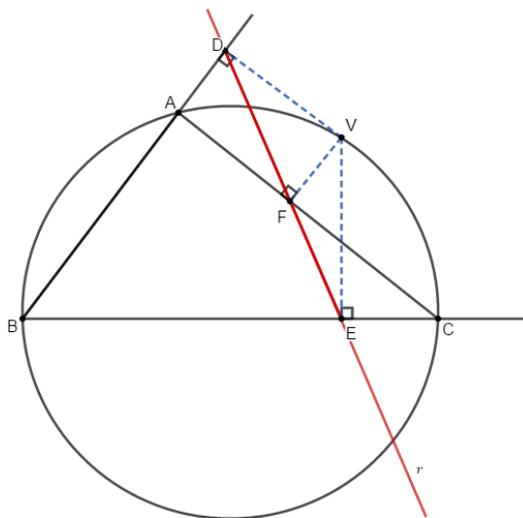
Figura 201: Triângulo degenerado DFE.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 3.47 Nas discussões da proposição 3.46 a reta que contém os pontos D, E e F é chamada de reta de Sinson-Wallace.

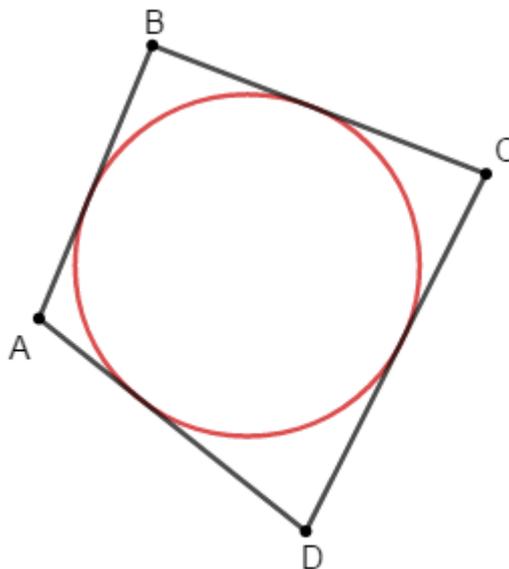
Figura 202: A reta r será a reta de Sinson-Wallace.



Fonte: O autor, 2019.

Teorema 3.48 (Teorema de Pitot) Um quadrilátero convexo será circunscritível se, e só se, a soma de seus lados opostos forem iguais.

Figura 203: Quadrilátero inscrito $ABCD$.



Fonte: O autor, 2019.

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$