Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Edil Pereira Lopes Junior

A história da equação do 2º grau ao longo dos séculos

Rio de Janeiro

2019

Edil Pereira Lopes Junior

A história da equação do 2º grau ao longo dos séculos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Coorientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

L864 Lopes Junior, Edil Pereira
A História da Equação do 2º grau ao longo dos séculos / Edil Pereira Lopes Junior. – 2019.
115f. : il.

Orientador: Helvécio Rubens Crippa.
Coorientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Equações quadráticas – História - Teses. 2. Matemática – História – Teses. I. Crippa, Helvécio Rubens II. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 511.342(091)

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Edil Pereira Lopes Junior

A história da equação do 2º grau ao longo dos séculos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 06 de setembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Lucia Maria Aversa Villela
Colégio Pedro II

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus e a toda minha família, em especial a minha mãe Selma Pereira Lopes e a meu pai Edil Pereira Lopes (*in memoriam*) e a todos os professores que, com empenho e seriedade, fazem a diferença na vida de seus alunos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor de todas as coisas, sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, Edil Pereira Lopes (*in memoriam*) e Selma Pereira Lopes e irmão, Rodrigo Pereira Lopes, que me ajudaram sempre da forma que podiam e me educaram mudando para sempre minha vida com suas correções e conselhos.

A minha esposa, Catia, que sempre me incentivou desde os tempos de faculdade com palavras de encorajamento e compreensão nos momentos difíceis.

Aos professores do PROFMAT, pelas aulas e discussões que muito me enriqueceram, em especial ao meu orientador Prof. Helvécio Rubens Crippa e coorientador, Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.

Aos meus alunos, que despertam em mim a vontade de sempre melhorar. E que não fazem ideia do quanto me ensinam.

A todos os professores que tive ao longo da minha formação. Cada um deles deixou contribuições valiosas.

Aos meus amigos de turma no mestrado, sou grato pelo companheirismo, pelos emails, pela motivação. Por fazerem esta caminhada menos árdua e muito mais divertida.

Agradeço também a banca examinadora e à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação e implantação do PROFMAT no Brasil.

A todos que de alguma maneira me ajudaram a chegar nesse momento tão importante da minha vida.

Se experimentar prazer com a Matemática,
não a esquecerá facilmente e haverá, então,
uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais:
uma ocupação favorita,
uma ferramenta profissional,
a própria profissão,
ou uma grande ambição.

George Pólya

RESUMO

LOPES JUNIOR, Edil Pereira. *A história da equação do 2º grau ao longo dos séculos*. 2019. 115f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Fator essencial para a aprendizagem de um conteúdo é a forma como ele é apresentado. O presente texto tem como objetivo apresentar alguns fatos de cunho histórico acerca da equação quadrática, conteúdo ensinado no nono ano do ensino fundamental. Passando pelas Idades Antiga, Média e Contemporânea, tentou-se contextualizar o tema nessas eras, visando fornecer subsídios para que o professor de Matemática possa enriquecer e motivar aulas sobre equações quadráticas, mostrando como a abordagem mudou ao longo do tempo e em diversas culturas. Tendo como referência trabalhos impressos e também as disponíveis em ambientes virtuais, tratou-se de alguns momentos, que consideramos importantes, dessa riquíssima história. Isso com a expectativa de vermos esses momentos inseridos na rotina escolar brasileira, visando maior comprometimento com o conteúdo, maior vínculo com a importância social que o conteúdo teve e continua tendo e, também, maior compreensão da própria aplicação dos métodos de resolução. Relacionamos esse conteúdo com sua parte histórica no decorrer dos séculos, usando alguns problemas citados pelos matemáticos de cada civilização e com um breve relato sobre estes matemáticos que deixaram contribuições importantes sobre esse assunto.

Palavras-chave: Equação do segundo grau. Resolução de Alguns Problemas de Equações do Segundo Grau. Fórmula de Bhaskara. História da Matemática.

ABSTRACT

LOPES JUNIOR, Edil Pereira. The history of the equation of the second degree throughout the centuries. 2019.115f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

An essential factor for learning a content is how it is presented. The present text aims to present some historical facts about quadratic equations, a content taught in the ninth year of elementary school. Passing through the Old, Middle and Contemporary Ages, we tried to contextualize the theme in these eras, aiming to provide subsidies so that the mathematics teacher can enrich and motivate his class on quadratic equations, showing how the approach has changed over time and in different cultures. Using both printed and virtual references, we considered some particularly important moments of this rich history. We hope to see these moments inserted in the Brazilian school routine, aiming for a greater commitment to the content, a greater link with the social importance that the content had and continues to have, and also a better understanding of the application of the resolution methods themselves. We relate this content to its historical part, through some problems mentioned by the mathematicians of each civilization and with a brief report on these mathematicians who left contributions on this subject

Keywords: Second degree equation. Resolution of some Problems of Equations of the Second Degree. Formula of Bhaskara. History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Hoje em dia o modo como ensinamos um conteúdo ao aluno é estático, o que é errado, pois temos que acompanhar as mudanças na sociedade e refleti-las em sala de aula. É essencial que estimulemos o aluno a criticar, a saber o porquê disto ou daquilo, pois só assim se compreende a Matemática. É importante que os alunos desenvolvam seu raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas e que saibam escolher o melhor caminho para a solução, que consigam realizar uma análise crítica. No caso do assunto "equação do segundo grau", não basta que os alunos saibam repetir uma "fórmula de Bhaskara" decorada. É preciso mostrar onde e como surgiu essa fórmula, o porquê do seu surgimento, quais foram as suas etapas para seu surgimento ao longo dos séculos, para que esse assunto não fique tão solto na cabeça do aluno, que não o deixemos com a pergunta: "Pra que esse "cara" inventou essa fórmula? Não vai me servir pra nada!!!!". É preciso mostrar aos alunos a sua aplicação nos dias de hoje, como por exemplo, nos faróis de carros, antenas parabólicas, lançamento de objetos, entre outras aplicações. É preciso mostrar também aos alunos a história deste assunto, que hoje é tratado com pobreza de detalhes, que com certeza trariam um enriquecimento ímpar para as salas de aula. Nesta dissertação vamos fazer uma viagem histórica na evolução das equações quadráticas, desde o seu surgimento até aos dias de hoje, de como ela chegou até nós. Vamos ver vários modos de se interpretar e resolver uma equação do 2º grau. E demonstrar a validade das resoluções em problemas geométricos, aritméticos ou algébricos. Associada à resolução das equações do 2º grau temos dois caminhos a seguir: uma de ordem geométrica e outra de forma aritmética. Veremos como estes dois caminhos se relacionaram desde as primeiras civilizações que deixaram trabalhos escritos neste âmbito até à matemática moderna do séc. XVIII.

Este trabalho está dividido em 7 capítulos, seguindo a evolução das resoluções das equações do 2º grau, desde a mais básica até a mais complexa, mostrando como cada uma dessas civilizações resolvia tais equações ou problemas do segundo grau.

O primeiro capítulo deste trabalho fala como as civilizações egípcia e mesopotâmica (babilônica) resolviam problemas do segundo grau. Tanto no Egito como na Mesopotâmia esses problemas surgiram das necessidades práticas do quotidiano, na maioria dos casos relacionados com a medição. Assim, apenas as soluções positivas dos problemas eram consideradas.

Veremos no segundo capítulo a forma como a civilização grega abordava os problemas do 2° grau, numa atmosfera de racionalismo que colocava não só a questão *como*, mas também a questão *porquê*. Podemos distinguir duas épocas diferentes: a via de inspiração geométrica através de áreas e a via de inspiração aritmética com Diofanto (séc. III d.C).

O terceiro capítulo é dedicado à civilização árabe. Eles foram responsáveis pela tradução do grego para o árabe de alguns importantes escritos científicos conhecidos, entre eles o: Almagesto, de Ptolomeu e os Elementos, de Euclides. Assim, os matemáticos árabes juntaram a habilidade algébrica dos babilônios com o rigor científico dos gregos para serem os primeiros a sistematizar a resolução das equações do 2º grau. Como ainda não eram aceitas soluções e coeficientes negativos, havia a necessidade de dividir as equações do 2º grau em vários tipos, existindo, assim, diferentes algoritmos de resolução.

O quarto capítulo é dedicado à civilização hindu. A equação quadrática ganha nova roupagem, pois alguns matemáticos introduziram a utilização do número zero e também dos sinais negativos, ambos não considerados até então pelos gregos, babilônios e árabes. A Matemática hindu produziu grandes personagens, dentre os quais destacam-se Sridhara, Bramagupta e Bhaskara de Akaria. Sridhara foi o primeiro a estabelecer uma fórmula matemática para a resolução das equações quadráticas e biquadradas, pois Bramagupta e Bhaskara de Akira trabalhavam utilizando textos. Foram os primeiros a dar uma fórmula para resolver as equações do segundo grau, no século XII.

O quinto capítulo é dedicado aos chineses. Em 1303, um importante matemático chinês, Chu Shih-Chied, apresenta na obra Ssu-yiian yú-chien (Precioso espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para resolução da equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método fan-fan, que foi apresentado de forma retórica e chega a uma única raiz real.

No sexto capítulo fazemos referência a alguns matemáticos europeus que deram contribuições nesta área. Girard, que já aceitava as soluções negativas, Viète, que modernizou a Álgebra, com a introdução de símbolos e letras, e Descartes, pelo fato das demonstrações geométricas apresentadas para os problemas algébricos que se propunha resolver serem originais em relação ao modo habitual de resolução característico do seu tempo. Por fim, refiro-me a MacLaurin, um matemático britânico que apresentou no séc. XVIII a resolução das equações do 2º grau de uma forma geral e cuja demonstração é a base daquela que é ensinada hoje em dia aos alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Finalmente no sétimo capítulo é dedicado a equação do 2º grau nos dias de hoje, da sua forma em que é mostrada aos alunos. Mostramos este capítulo as diversas dificuldades que os alunos tem com equações do 2º grau, sendo a maior parte ligada ao domínio da linguagem algébrica. E alguns exemplos aplicados são resolvidos com os métodos citados no capítulo.

1 CIVILIZAÇÕES PRÉ-GREGAS

A história da matemática é uma área de estudo ligada à investigação sobre a origem das descobertas matemáticas, dos seus métodos e aos registros ou notações do passado.

As civilizações anteriores à civilização grega tinham uma matemática muito básica, aplicada somente para as suas necessidades fundamentais do cotidiano, como por exemplo no cálculo do calendário, administração das colheitas, organização das obras públicas, cobrança de impostos, pequeno comércio, etc..

Os conhecimentos das civilizações anteriores à civilização grega se restringiam a certas regiões, não se espalhavam. Isso devido a sua estrutura social estática, aos deficientes meios de comunicação e pela destruição de materiais, ora por guerras, inundações e catástrofes, ora por puros atos de vandalismo (conta-se, por exemplo, que um déspota chinês mandou destruir todos os livros de estudo) ou simplesmente por não ter resistido ao desgaste do tempo. Quando se tentou reescrever as obras perdidas houve necessidade de o fazer de memória, o que torna impreciso o conhecimento da versão original. Todos os aspectos referidos fazem com que seja difícil datar com precisão as descobertas destas civilizações.

O material utilizado pelos chineses e indianos era a casca de árvore e o bambu, materiais muito deterioráveis. A partir do séc. I a.C. os chineses começaram a utilizar o papel, mas mesmo assim são poucos os documentos desta civilização antes do séc. VII que se conhecem. Já os babilônios escreviam em tábuas de barro e as levavam ao forno, o que as tornavam quase indestrutíveis. Usavam a escrita cuneiforme, cujos símbolos foram pressionados em tabletes macios de argila com a ponta de um junco como uma "caneta" e, assim, tinham uma aparência em forma de cunha. Muitas das tábuas de 1700 a.C. sobrevivem e assim podemos ler os textos originais. Os egípcios utilizavam rolos de papiro[1] e o tempo seco da região fez com que alguns resistissem até aos nossos dias. Desta forma, a análise das matemáticas dos séculos pré-gregos será dedicada às civilizações egípcia e babilônica.

[1] Papiro (pelo latim *papyrus)* originalmente, uma planta perene da família das ciperáceas cujo nome científico é *Cyperus papyrus*, por extensão é também o meio físico usado para a escrita, precursor do papel, durante a Antiguidade sobretudo no Antigo Egito. O papiro é obtido utilizando a parte interna, branca e esponjosa, do caule do papiro, cortado em finas tiras que eram posteriormente molhadas, sobrepostas e cruzadas, para depois serem prensadas. A folha obtida era martelada, alisada e colada ao lado de outras folhas para formar uma longa fita que era depois enrolada. A escrita dava-se paralelamente às fibras.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro>

1.1 **Civilização egípcia**

A civilização egípcia se desenvolveu a nordeste do continente africano, ao longo do rio Nilo, que nasce no lago Vitória (África oriental) e corta as terras do Egito até desaguar no mar Mediterrâneo. Nos tempos mais antigos, quem se estabeleceu às margens do rio Nilo foram tribos esparsas, satisfeitas por encontrar um local onde não dependiam de chuvas, facilitando assim, a agricultura. A agricultura foi desenvolvida fazendo uso intensivo dos períodos regulares úmidos e secos do ano. O Nilo inundava suas proximidades durante a estação chuvosa, fornecendo terras férteis que os complexos sistemas de irrigação tornaram férteis para o cultivo. Saber quando a estação chuvosa estava prestes a chegar era vital e o estudo da astronomia se desenvolveu para fornecer informações sobre o calendário. A grande área coberta pela nação egípcia exigia administração complexa, um sistema de impostos e os exércitos tinham que ser apoiados. À medida que a sociedade se tornava mais complexa, os registros precisavam ser mantidos e os cálculos eram feitos à medida que as pessoas trocavam suas mercadorias. A necessidade de contar surgiu, veio a escrita hieroglífica (hieróglifos são pequenas figuras que representam palavras, que surgiram por volta de 300 a.C.) e os numerais eram necessários para registrar as transações.

Os primeiros atestados de cálculos matemáticos são datados do período pré-dinástico[2] Nacada. Os sistemas numéricos egípcios não eram adequados para cálculos aritméticos, apesar dos egípcios serem práticos em sua abordagem à matemática. O comércio exigia que pudessem lidar com frações e que a multiplicação e divisão fossem possíveis. Assim, criavam métodos de multiplicação e divisão que envolvessem apenas adição.

Os primeiros números hieroglíficos podem ser encontrados em templos, monumentos de pedras e vasos. Eles dão pouco conhecimento sobre quaisquer cálculos matemáticos que possam ter sido feitos com os sistemas numéricos. Enquanto esses hieróglifos estavam sendo esculpidos em pedra, não havia necessidade de desenvolver símbolos que pudessem ser escritos mais rapidamente. No entanto, uma vez que os egípcios começaram a usar folhas achatadas do papiro seco como "papel" e a ponta de um junco como uma "caneta", havia motivos para desenvolver meios mais rápidos de escrever. Isso levou ao desenvolvimento de escrita e números hieráticos.

---

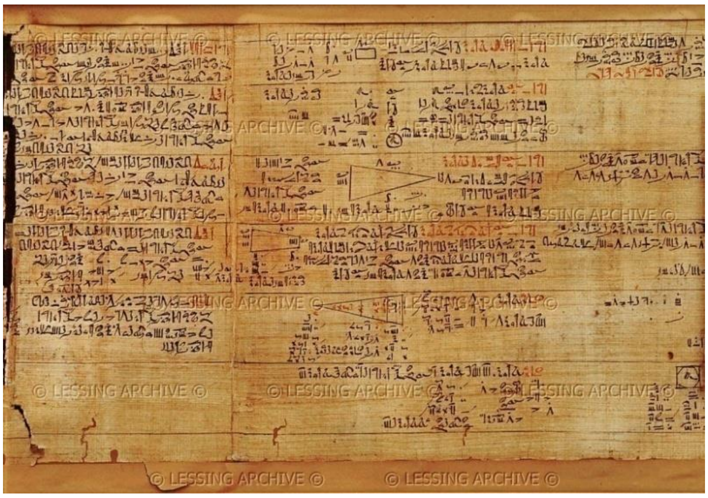
[2] Período pré-dinástico (anterior a 3100 a.C.) é a denominação tradicional empregada para o período que transcorreu entre o Neolítico (ou Período da Pedra Polida) e o início da monarquia faraônica formada pelo rei Menés (ou Narmer). Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Per%C3%ADodo_pr%C3%A9-din%C3%A1stico_do_Egito>. Acessado em 23/04/2018, às 14:39.

Os egípcios também desenvolveram uma geometria e trigonometria básica (esticadores de corda) para facilitar a demarcação de terras.

> "Sesóstris... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda... Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia."
>
> *Heródoto*

Deve ter havido um grande número de papiros, muitos lidando com a matemática de uma forma ou de outra, mas, infelizmente, uma vez que o material é bastante frágil, quase todos se perderam. É notável que qualquer um tenha sobrevivido, e que eles são uma consequência das condições climáticas secas do Egito. Referimo-nos ao Papiro de Rhind[3], ao Papiro de Moscou[4], ao Papiro de Kahun[5] e ao Papiro de Berlim[6], preciosas fontes de informação acerca da matemática egípcia.

Figura 1 - Parte do Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes)



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

---

[3] Papiro da 13ª dinastia egípcia (1783 - 1643 a.C), atualmente no British Museum de Londres. Recebeu este nome devido ao antiquário escocês Henry Rhind. Ele foi escrito por um escriba chamado *Ahmes*. Por esse motivo, esse papiro é também conhecido como papiro de Ahmes. Ele contém 87 problemas e várias tabelas matemáticas

[4] Papiro da 12ª dinastia egípcia (1991 - 1786 a.C), atualmente no Museu Pushkin, na Rússia. Conhecido também como *Papyrus de Golenishchev*, ele apresenta 25 problemas.

[5] Papiro da 12ª disnatia egípcia (1991–1786 a.C), atualmente no *University College* de Londres. É uma coleção de antigos textos egícios, que incluem, entre outras coisas, um tratado matemático e outro de obstetrícia.

[6] Papiro da 13ª dinastia egípcia (1783 - 1643 a.C), atualmente no Staatliche Museum, em Berlim. Foi comprado por Henry Rhind em 1850, mas encontrava-se em mau estado e só foi analisado e restaurado cerca de 50 anos mais tarde por Schack-Schackenburg. O papiro de Berlim encontra-se, ainda assim, parcialmente estragado.

A respeito do papiro de Rhind, Eves afirma:

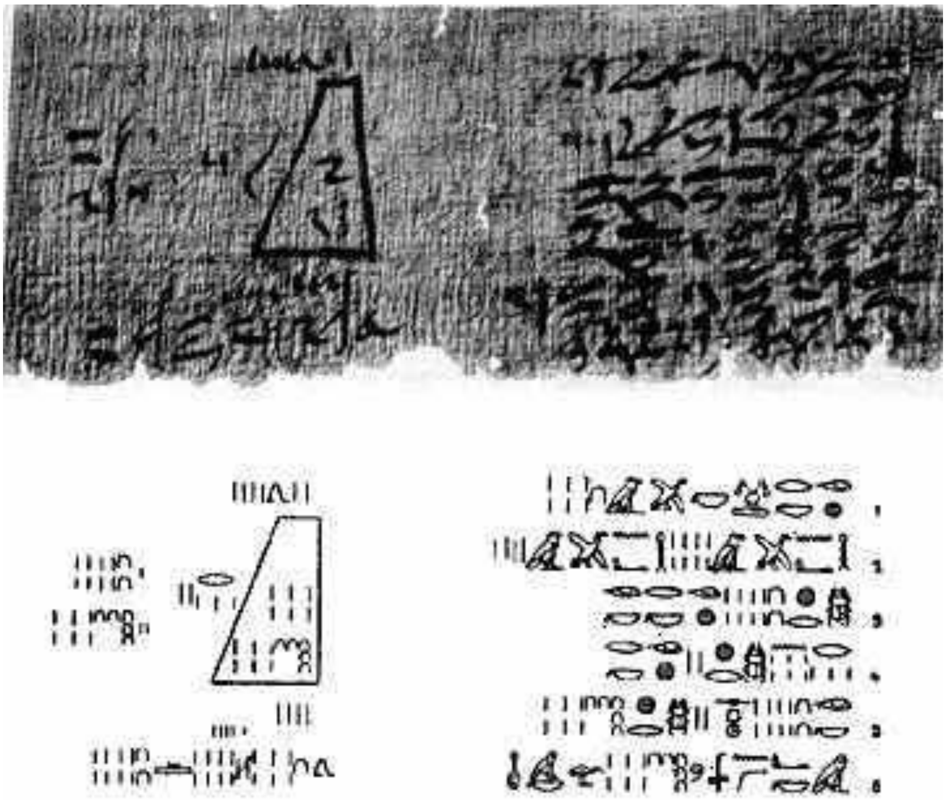
> [...] o papiro de Rhind é uma fonte rica sobre a matemática egípcia, pois descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, solução para problemas de determinação de área de um círculo e muitas aplicações da matemática em problemas práticos. (EVES, 2004, p. 70).

Neste papiro existiam problemas de natureza aritmética e geométrica. Os problemas aritméticos representavam situações envolvendo divisão de bebidas e pães, bem como operações aritméticas e a determinação da quantidade de alimentos, que estavam associadas a equações de grau um, operações com frações e problemas de medida. Em relação à geometria, os problemas relatavam situações com cálculo de volumes e áreas de figuras planas.

Em relação ao conhecimento matemático presente nos papiros, Boyer destaca:

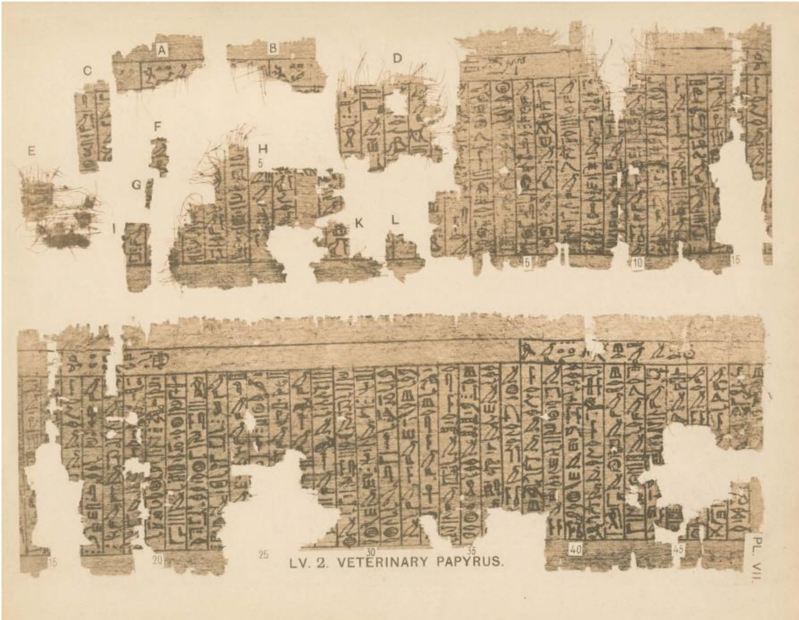
> Há um limite para a quantidade de informação matemática que se pode retirar de calendários e pedras tumulares, e nossas ideias sobre a contribuição egípcia seriam muito imprecisas se dependêssemos somente de material de origem cerimonial e astronômica. A matemática é muito mais do que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas. (BOYER, 2001, p. 9)

Figura 2 - Parte do Papiro de Moscou



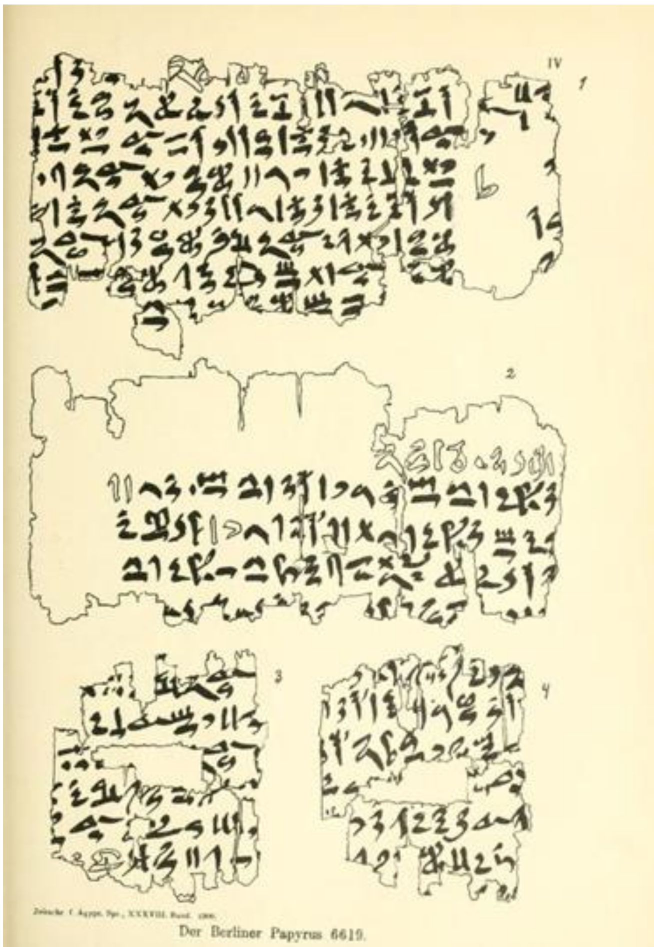
Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

Figura 3 - Parte do Papiro de Kahun



Fonte: < http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

Figura 4 - Parte do Papiro de Berlim



Fonte: < http://cienciadegaragem.blogspot.com.br/2017/

02/as-origens-da-raiz-quadrada.html>

Para resolver os problemas matemáticos, os egípcios desenvolveram uma técnica chamada pelos europeus de "método de falsa posição[7]", registrado nos papiros de Moscou e de Rhind, entre outros papiros. Em outro papiro, encontramos dois problemas em que são dadas a área S, a diagonal d de um retângulo e se procuram seus lados x e y: $x^2 + y^2 = d^2$ e $xy = S$. Vejamos abaixo um exemplo, retirado do papiro de Berlim, traduzido para a linguagem atual:

Determine dois números tais que os seus quadrados é 100 *e que um lado é* $\frac{3}{4}$ *do outro.*

Solução dada pelos egípcios:

> Divide-se 100 em dois quadrados, tal que o lado de um é $\frac{3}{4}$ do outro lado. Fazes um triângulo em que um lado é 1 e o outro é $\frac{3}{4}$. O quadrado de $\frac{3}{4}$ é $\frac{9}{16}$; os quadrados somados fazem $\frac{25}{16}$; a raiz é $\frac{5}{4}$. A raiz de 100 é 10, dividamos 10 por $\frac{5}{4}$ que dá 8. Os $\frac{3}{4}$ de 8 são 6. as soluções são 8 e 6. (CASSINET, 1982 *apud* ANDRADE, 2000, p.11)

Em linguagem e simbologia atual, a análise da resolução do problema é a seguinte: o problema reduz-se ao sistema $\begin{cases} \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 100 \\ \mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} \end{cases}$. Como já foi referido, para resolver este problema usou-se o método da falsa posição. Começou-se por supor que os lados do triângulo retângulo mediam 1 e $\frac{3}{4}$ (isto é, que o valor de x e de y eram 1 e $\frac{3}{4}$ respectivamente). Deste modo, a equação linear do sistema era satisfeita. Ao substituir estes valores na equação quadrática obteve $1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$. Em seguida, o autor calculou a raiz quadrada do valor obtido e do termo independente da equação quadrática: $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ e $\sqrt{100} = 10$. Para terminar, calculou o quociente entre estes dois valores $\frac{10}{\frac{5}{4}} = 8$. Para obter as soluções finais, bastou multiplicar por 8 os valores supostos inicialmente, isto é $x = 8 \cdot 1 = 8$ e $y = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

Vejamos o que Boyer diz sobre o método da falsa posição:

> Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma ou onde são conhecidos e xé desconhecido. A incógnita é chamada de "*aha*". O Prob. 24, por exemplo, pede o valor de *aha*, e as operações indicadas à esquerda do sinal

[7] A regra de falsidade é assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque, por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido.

> de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x+\frac{1}{7}x$ é 8 em vez de 19 como se queria. Como $8\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$=19, deve-se multiplicar 7 por $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ para obter a resposta. Ahmes achou $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Então conferiu a sua resposta mostrando que se a $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ somarmos um sétimo disso (que é $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$) de fato obteremos 19. Aqui notamos outro passo significativo no desenvolvimento da matemática pois a verificação é um exemplo simples de prova. (BOYER, 1974, p.12).

Um outro problema de se observar é o de número 25 do papiro de Ahmes. Ele diz, em linguagem atual:

Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual é a quantidade?

Este problema é resolvido por tentativas. Comecemos com o número 2. $x+\frac{1}{2}x$ é 3 em vez de 8, como queremos. Logo devemos procurar pelo número que multiplicado por 3 dê 16, que é $\frac{16}{3}$, e este será o número pelo qual 2 deve ser multiplicado para obtermos o número procurado, que é $\frac{32}{3}$.

Observe que esses problemas apresentam um método mais aritmético do que algébrico. Vejamos o que Andrade (2000) ressalta:

> [...] num raciocínio algébrico a incógnita é tida como conhecida, é representada por uma letra, palavra ou símbolo e é envolvida em operações como se de um número se tratasse. O procedimento dos Egípcios baseava-se em fazer cálculos com números concretos até chegarem ao valor da incógnita. A incógnita era apenas o ponto de chegada dos problemas. (ANDRADE, 2000, p.12).

No papiro de Moscou é pedido para calcular a base de um retângulo cuja altura h é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base l e cuja área é igual a 12. Este problema, em linguagem moderna, se escreve $\frac{3}{4}l^2=12$. Já no papiro de Rhind, encontramos um problema em que são dadas as área S, a diagonal d de um retângulo e se procuram seus lados x e y: $x\cdot y=S$ e $x^2+y^2=d$.

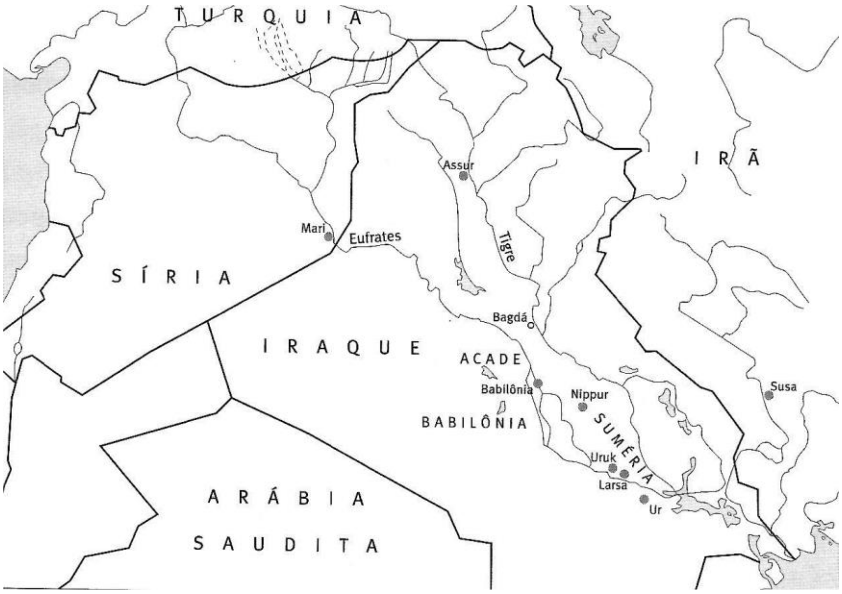
Assim, podemos observar que a civilização egípcia apresentou as primeiras contribuições para o estudo de problemas do segundo grau, deixadas à nós por meio dos papiros.

Registros de conquistas de faraós e outros fatos da vida egípcia estão em abundância em todo o Egito, mas de sua matemática apenas vestígios foram encontrados, registrados nos papiros. Sabemos que Thales, Pitágoras e outros visitaram o Egito para estudar. Se houvesse apenas métodos aritméticos aplicados como vimos nos papiros, a viagem teria pouco valor. Mas onde estão os registros de conquistas? Muito provavelmente, a matemática existente foi absorvida no corpo da matemática grega - numa era em que as novas e melhores obras substituíam completamente as antigas e, neste caso, as antigas obras escritas em hieróglifos.

1.2 **Civilização babilônica**

A Mesopotâmia, que em grego significa "terra entre rios", situava-se no Oriente Médio, no chamado crescente fértil, entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje estão situados o Iraque e a Síria, principalmente, como mostra a figura a seguir.

Figura 5 - Mapa da Mesopotâmia



Fonte: ROQUE, Tatiana. História da Matemática, 2012, p.37, 1ª edição

A Mesopotâmia foi habitada pelos Sumérios, Acádios, Amoritas, Caldeus e Hititas, os quais lutavam pela posse das terras aráveis.

Por estar situado nesta região geográfica, a Mesopotâmia estava mais sujeita às invasões e conquistas de vários povos, ao contrário do que ocorreu no Egito. As duas civilizações, egípcia e mesopotâmica, desenvolveram-se no mesmo período.

A matemática na mesopotâmica nasceu das necessidades de manutenção de registros para fins administrativos e comerciais. A matemática mesopotâmica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes e escribas.

As águas dos rios Tigre e Eufrates proporcionavam facilidades para o transporte de mercadorias, o que ajudou a desenvolver um processo de navegação. Foram desenvolvidos nestes rios projetos de irrigação das terras cultiváveis e a construção de grandes diques de contenção, uma forma de engenharia primitiva. Assim, procedeu-se ao desenvolvimento de uma astronomia rudimentar para o cálculo do período de cheias e vazantes dos rios, mesmo que estes períodos não fossem regulares, como os do rio Nilo no Egito.

Os sumérios haviam desenvolvido uma forma abstrata de escrita baseada em símbolos cuneiformes, com auxílio de objetos em formato de cunha. É juntamente com os hieróglifos egípcios, o mais antigo tipo conhecido de escrita, tendo sido criado pelos sumérios por volta de 3 500 a.C. Inicialmente a escrita representava formas do mundo (pictogramas), mas por praticidade as formas foram se tornando mais simples.

Os primeiros pictogramas eram gravados em tabuletas de argila, em sequências verticais de escrita com um estilete feito de cana que gravava traços verticais, horizontais e oblíquos. Até então duas novidades tornaram o processo mais rápido e fácil: as pessoas começaram a escrever em sequências horizontais (rotacionando os pictogramas no processo), e um novo estilete em cunha inclinada passou a ser usado para empurrar o barro, enquanto produzia sinais em forma de cunha. Ajustando a posição relativa da tabuleta ao estilete, o escritor poderia usar uma única ferramenta para fazer uma grande variedade de signos.

Tabletes cuneiformes foram escritas em barro molhado que foram secados ao sol quente e muitos milhares destes sobreviveram até hoje. Usando uma ponta de um junco como uma "caneta" em um meio de argila que levou ao uso de símbolos cuneiformes, já que as linhas curvas não podiam ser desenhadas.

Andrade (2000) nos diz sobre os escritos babilônicos:

> Há uma maior abundância de documentos relativos à matemática desta civilização, em virtude do material utilizado para a escrita ser diferente; em vez de papiros, os Mesopotâmios utilizavam tábuas de barro mole, as quais eram escritas com um estilete e cozidas ao sol ou num forno. Desta forma, eram mais resistentes ao tempo e, consequentemente, mais duradouras. (ANDRADE, 2000, p.12).

A escrita cuneiforme foi adotada subsequentemente pelos acadianos, babilônicos, elamitas e assírios e adaptada para escrever em seus próprios idiomas; foi extensamente usada na Mesopotâmia durante aproximadamente 3 mil anos, apesar de sua natureza (como estabelecida pelos sumérios) não ser intuitiva aos falantes de idiomas semíticos. Antes da descoberta da civilização suméria, o uso da escrita cuneiforme, apesar das dificuldades, levou muitos filólogos a suspeitar da existência de uma civilização precursora à babilônica. A sua invenção não conseguiu suprir as necessidades de administração dos palácios e dos templos (cobrança de impostos, registro de cabeças de gado, medidas de cereal, etc.).

Figura 6 - Tabela de sinais cuneiformes

Fonte: ROQUE, Tatiana. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas,, 2012, p.50, 1ª edição.

Os tabletes cuneiformes são os elementos que contêm registros de problemas e resoluções matemáticas, usando o sistema de numeral de base 60.

Segundo Gonçalves:

> *"O estudo das características materiais dos tabletes cuneiformes (como formato, disposição do texto, locus no sítio arqueológico) pode auxiliar no entendimento tanto de quem o produziu e com que objetivo, como do local em que foi produzido e sua relação com o local de exumação.(...) De Nippur, conhecemos centenas de tabletes matemáticos, provavelmente datando da primeira década do reino de Samsu-iluna, filho e sucessor de Hammurabi. (Robson 2001; Proust 2004) De Shaduppûm conhecemos por volta de 20 tabletes com problemas, dos quais a maior parte foi provavelmente produzida em um período uns poucos anos anterior,*

> correspondendo ao início do reino de Hammurabi, da Babilônia, e aos reinos de Dadusha e seu filho Ibalpiel II, de Eshnuna (Baqir 1950, 1950a, 1951). Do conjunto de tabletes de Nippur, uma grande parte provém de uma mesma casa no sítio arqueológico, a chamada Casa F, nas proximidades do templo de Inanna, a saber, por volta de 1400 tabletes e fragmentos, inseridos como material reciclado na própria estrutura do chão e paredes, bem como depositados em potes de reciclagem. De Shaduppum, por outro lado, um grupo de 10 tabletes matemáticos, de um total de 263, provém da Sala 252. Tanto na Casa F como na Sala 252 foram encontrados tabletes de outros gêneros textuais, e ambas foram residências particulares (GONÇALVES, p. 12, 2010)

Os babilônicos tinham alguns conhecimentos matemáticos muito além dos povos da sua época. Estudos mostram que eles possuíam mais facilidade e habilidade para lidar com cálculos, pelo fato de sua linguagem e seu sistema de numeração serem mais compreensível, em comparação aos egípcios.

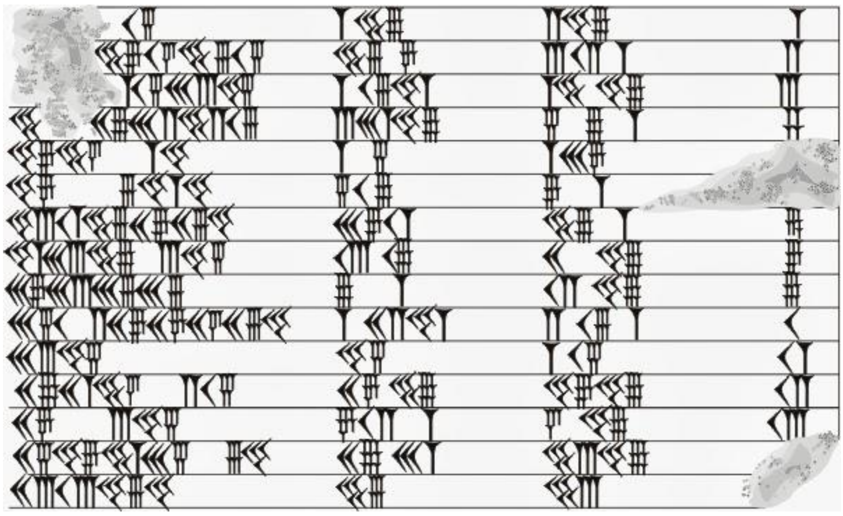
Os babilônios possuíam métodos para resolver problemas do segundo grau, fórmulas para o cálculo de áreas de figuras e volume de sólidos, todos bem simples e só usadas em aplicações simples. Também conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e trigonometria básica, conforme descrito no tablete Plimpton 322[8]. Ela contém quatro colunas e 15 linhas de números escritos no alfabeto cuneiforme da época, que usa um sistema numeral de base 60, ou sexagesimal – atualmente, usamos um sistema de base 10, ou decimal.

Figura 7 - Tábua babilônica Plimpton 322

Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>

[8] Tablete, datada de entre 1822 a.C. e 1762 a.C., seria originária da antiga cidade suméria de Larsa (hoje é o sul do Iraque). Foi encontrada pelo arqueólogo, acadêmico, diplomata e negociante de antiguidades Edgar Banks. Ela agora está guardada na Biblioteca de Livros e Manuscritos Raros da Universidade Colúmbia, em Nova York, EUA.

Figura 8 - Tradução da Tábua de Plimpton 322



(a)

[1 59 *] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 6 15	56 7	3 12 1	2
[1 55 7] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1 53] 10 [*] 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 1 40	1 5	1 37	5
[1] 47 6 41 40	5 19	8 1	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	7
[1] 41 33 59 3 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 1	12 49	9
[1] 35 10 2 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [*] 3 45	7 12 1	4 49	13
[1] 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	15

(b)

Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4		$a^2 + b^2 = c^2$	Coluna 1
Cateto b	Hipotenusa c	Linha n	Cateto a	$c^2 - b^2 = a^2$	$(c/a)^2$
119	169	1	120	14400	1,9834028
3367	4825	2	3456	11943936	1,9491586
4601	6649	3	4800	23040000	1,9188021
12709	18541	4	13500	182250000	1,8862479
65	97	5	72	5184	1,8150077
319	481	6	360	129600	1,7851929
2291	3541	7	2700	7290000	1,7199837
799	1249	8	960	921600	1,6927094
481	769	9	600	360000	1,6426694
4961	8161	10	6480	41990400	1,5861226
45	75	11	60	3600	1,5625000
1679	2929	12	2400	5760000	1,4894168
161	289	13	240	57600	1,4500174
1771	3229	14	2700	7290000	1,4302388
28	53	15	45	2025	1,3871605

(c)

Legenda: $(a) \rightarrow (b)$ da escrita cuneiforme para a base 60; $(b) \rightarrow (c)$ da base 60 para a base 10

Fonte: < http://ms-matematica.blogspot.com.br/2015/01/plimpton-322.html>

Os egípcios utilizavam um sistema posicional de base 10. Já os babilônicos utilizavam o sistema posicional sexagesimal, que facilitava os cálculos, visto que os divisores naturais de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Esse sistema facilitava também o cálculo com frações. Mas como funcionava esse sistema posicional?

O sistema numérico de base 60 é utilizada até hoje para a medição de tempo em horas (horas, minutos e segundos) e na medição de graus e suas partes (graus, minutos e segundos).

Por exemplo, o que significa dizer, em base sexagesimal, que certa viagem durou $2{,}10$ horas? O cálculo é feito considerando que 1 hora corresponde a 60 minutos e fazemos assim:

$$2h + 0{,}10h = 2h + 0{,}10 \cdot 60min = 2h\,06min = 2;06\ (base\ 60)$$

Para voltar para a base decimal, faz-se o seguinte:

$$2;\ 06 = 2 \cdot 60^0 + 6 \cdot 60^{-1} = 2 + 0{,}10 = 2,10\ (base\ 10)$$

A estratégia de separar a parte inteira da parte decimal por ponto e vírgula (;) na base 60 foi criada por Neugebauer[9] , fazendo essa notação levar seu nome.

Vejamos outro exemplo: Na base sexagesimal temos o número $3{,}53;18{,}36$. Como seria esse número na base decimal?

$$3{,}53;18{,}36 = 3 \cdot 60^1 + 53 \cdot 60^0 + 18 \cdot 60^{-1} + 36 \cdot 60^{-2}$$
$$3{,}53;18{,}36 = 180 + 53 + 0{,}3 + 0{,}01$$
$$3{,}53;18{,}36\ (\text{base } 60) = 233{,}31(\text{base } 10)$$

O mais antigo problema do 2º grau em toda a história da matemática foi a extração de uma raiz quadrada. Os babilônios resolveram esse problema da seguinte forma: primeiro calculava-se o número que elevado ao quadrado dá a, o que equivale a resolver a equação $x^2 = a$; depois utilizava-se de uma tabela de quadrados, que lhes permitia obter um enquadramento da raiz procurada, dando-lhes um valor por falta e outro por excesso. Duas tabelas dessas foram encontradas em Senkerah, no Eufrates em 1854, datadas em 2000 a.C..Elas dão quadrados dos números até 59 e cubos até 32. Um exemplo duma tabela utilizada pelos babilônios para este fim poderia ser como o que a seguir se apresenta:

[9] Otto Eduard Neugebauer (26 de maio de 1899 ─ 19 de fevereiro de 1990) foi um matemático e historiador da ciência austro-estadunidense. Foi palestrante do Congresso Internacional de Matemáticos em Bolonha (1928) e Oslo (1936 - *Über vorgriechische Mathematik und ihre Stellung zur griechischen).*

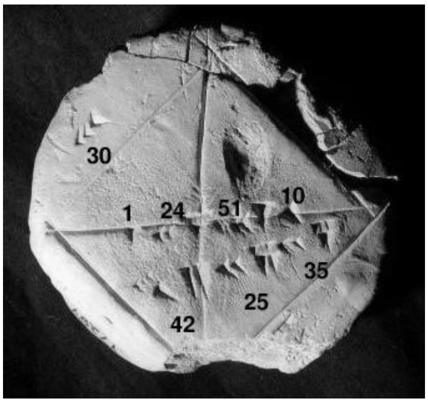
Tabela 1 - Tabela de quadrados

Número	Quadrado
....	....
$1;20$	$1;46,40$
$1;21$	$1;49,21$
$1;22$	$1;52,04$
$1;23$	$1;54,49$
$1;24$	$1;57,36$
$1;25$	$2;00,25$
....	....

Fonte: O autor, 2018

Analisando a tabela de quadrados[10] pode-se concluir que $\sqrt{2}$ estava compreendido entre $1;24$ e $1;25$. Desde que as situações a resolver não exigissem um grau de aproximação muito grande, os babilônios consideravam que $\sqrt{2}$ era $1;24$ ou $1;25$. No tablete de argila YBC 7289[11] abaixo observa-se que os babilônios conheciam uma aproximação de $\sqrt{2}$ bem mais rigorosa: $1;24,51,10$. Trata-se da representação mais antiga de um valor aproximado para a raiz quadrada de dois, escrita em caracteres cuneiformes e descoberta em 1912. De um lado da peça, pode-se ler o próximo número do sistema sexagesimal: 30. No interior, ao longo de uma diagonal, podemos ler os dois conjuntos de números: $1,24,51,10$ e $42,25,35$.

Figura 9 - Tablete de argila YBC 7289



Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/YBC_7289>

[10] Note-se que os valores da tabela estão escritos no sistema sexagesimal.

[11] YBC 7289 é datado do primeiro terço do 2º milênio a.C.. Não é sabida a sua origem exata, mas provavelmente vem do sul do Iraque atual. Foi comprado em torno de 1912 e publicada pela primeira vez em 1945. E é atualmente armazenado na Universidade de Yale, em New Haven, EUA.

Mas os babilônios não sabiam apenas resolver problemas do 2º grau que hoje se reduzem a equações do tipo $x^2 = a$. Esta civilização estudou e desenvolveu significativamente a resolução de problemas do 2º grau, desde que não trabalhassem com números negativos, pois esses números ainda não tinham sido incluídos em sua aritmética. Eles encontravam as soluções de alguns problemas do 2º grau, uma vez que estes haviam desenvolvido uma habilidade aritmética bem sofisticada e flexível como transpor termos de uma equação somando "iguais a iguais", e multiplicar ambos os membros de uma equação por quantidades iguais para remover denominadores ou eliminar fatores.

Uma vez que apenas eram considerados coeficientes positivos, as equações quadráticas completas podem dividir-se em três tipos:

$$x^2 + px = q$$
$$x^2 = px + q$$
$$x^2 + q = px$$

1.2.1 Equação do tipo $x^2 + px = q$

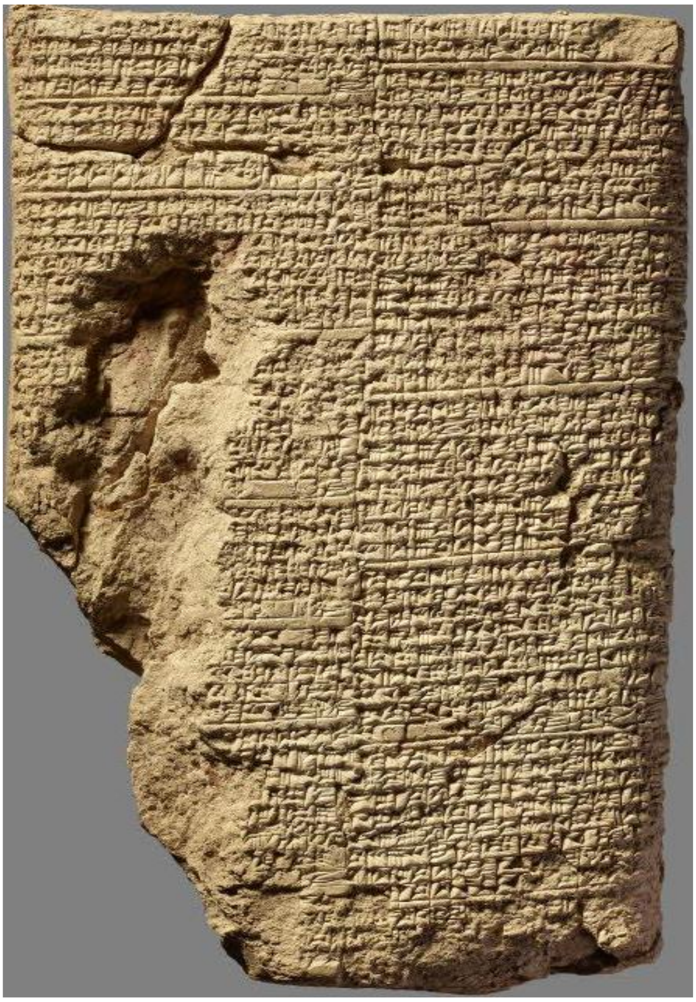
O tablete de argila BM 13 901[12], que se encontra no British Museum, é um dos mais antigos textos matemáticos conhecidos. Um desses problemas é descrito a seguir, traduzido por Donald John Wiseman[13] e na linguagem atual significa:

Encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a $0;45$.

[12] Tablete que tem cerca de 24 problemas, com soluções em escritas cuneiformes, usando-se o sistema sexagesimal. Provavelmente foi escrito durante o reinado de Hamurabi (1810 a.C. - 1750 a.C.), sexto rei da primeira dinastia babilônica

[13] Donald John Wiseman (25 de outubro de 1918 – 2 de fevereiro 2010), foi um estudioso da Bíblia, arqueólogo e assiriólogo. Ele foi professor de Assiriologia na Universidade de Londres 1961-1982.

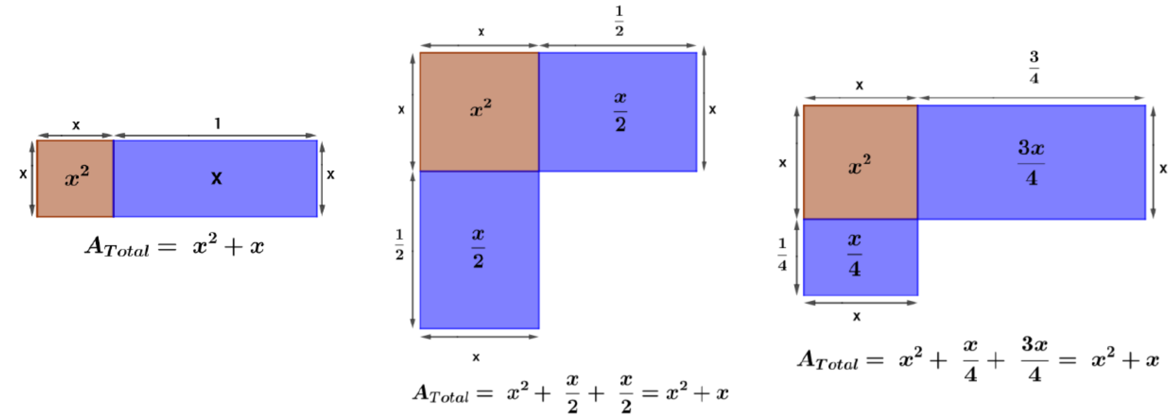
Figura 10 - Tablete de argila BM 13901



Fonte: <http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=1612997894&objectid=798589>

Os documentos matemáticos provenientes da civilização Mesopotâmica não fornecem, em geral, indicações quanto ao modo como eram obtidas as soluções dos problemas propostos (neste caso, como era obtido o algoritmo). Queremos acreditar pelos relatos que lemos dos feitos dos babilônios que eles sabiam fazer manipulações convenientes de áreas de retângulos e quadrados, ou seja, que a área de um retângulo de lados a e b era $a \cdot b$ e a área de um quadrado de lado x era x^2; também acreditamos que se eles queriam uma área que fosse nominalmente igual à medida de um lado c, bastava fazer o outro lado do retângulo ser igual a 1. Acreditamos também que eles sabiam manusear áreas com desenvoltura e por isso cremos que sabiam que todas as figuras a seguir tinham a mesma área $x^2 + x$.

Figura 11 - Figuras com mesma área

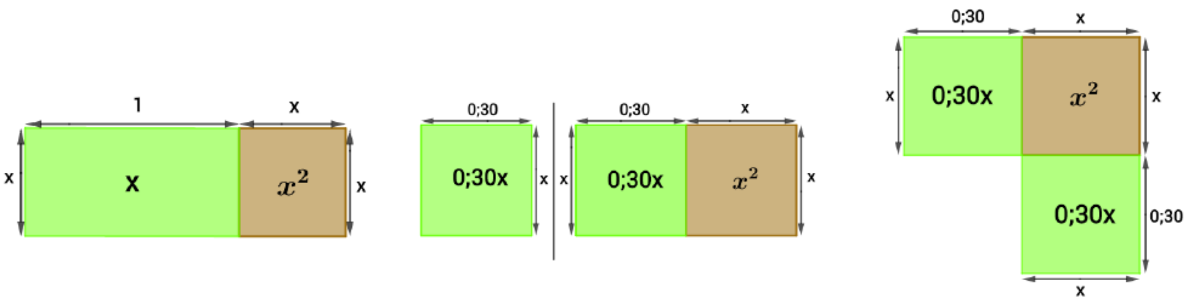


(a) (b) (c)

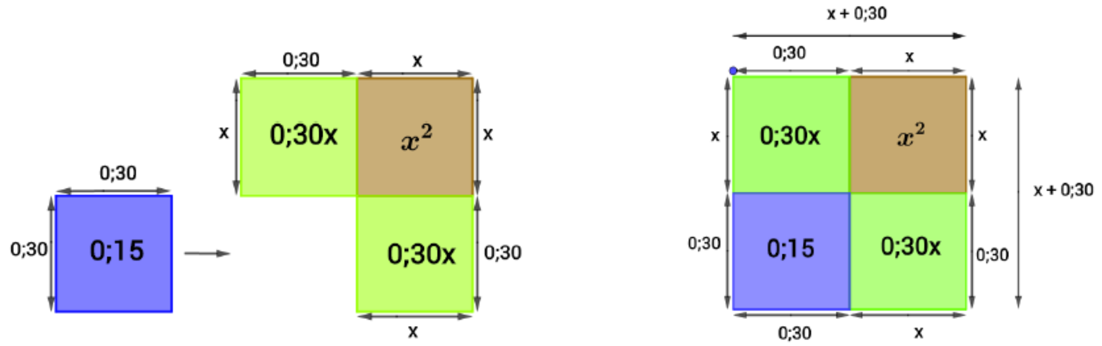
Fonte: O autor, 2018

Geometricamente temos que os passos da figura abaixo representam o problema apresentado pelos babilônios e sua solução:

Figura 12 - Resolução geométrica da equação $x^2 + x = 0;45$



(a) (b) (c)



(d) (e)

Legenda: $(a) \rightarrow (b)$ - Tome a metade de 1; $(b) \rightarrow (c)$ - Rearrumando...; $(c) \rightarrow (d)$ - Multiplique $0;30$ por $0;30$, que é $0;15$; $(d) \rightarrow (e)$ - Some $0;15$ a $0;45$ para obter 1, formando assim um quadrado de lado $x + 0;30$.

Fonte: O autor, 2018

Interpretada algebricamente, em nossa linguagem algébrica moderna, a solução dada pelos babilônios foi a seguinte:

> Eu adicionei a área e o lado do meu quadrado: deu $0;45$. Tu consideras 1, a unidade. Divides o 1 ao meio: dá $0;30$. Multiplicas $0;30$ por $0;30$: dá $0;15$. Junta o $0;15$ ao $0;45$: dá 1. É o quadrado de 1. Subtrais $0;30$, que foi o que tu multiplicaste, a 1: obténs $0;30$, é o lado do quadrado. (MAHAMMED, 1995 *apud* ANDRADE, 2000, p.16)

Representando o lado do quadrado por x, o problema reduz-se a resolver a equação $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} = 0;45$, que é do tipo $x^2 + px = q$. O algoritmo usado foi o seguinte:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0;45} - \frac{1}{2} = \sqrt{(0;30)^2 + 0;45} - 0;30 = \sqrt{0;15 + 0;45} - 0;30 =$$

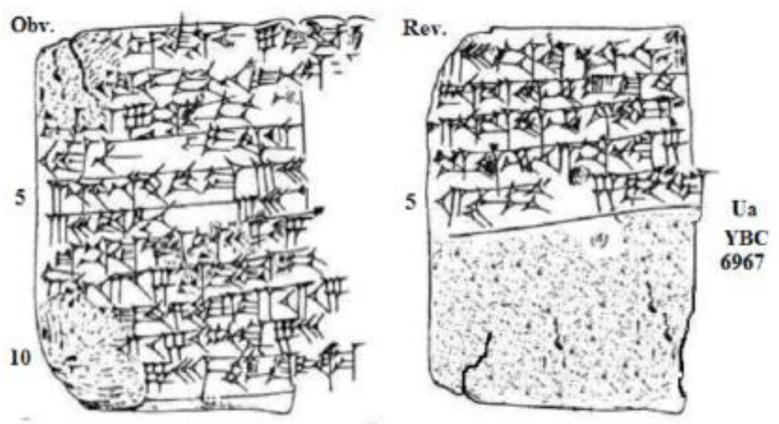
$= \sqrt{1} - 0;30 = 1 - 0;30 = 0;30$, que corresponde ao caso geral $\boxed{x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}}$.

Frisamos que isso é uma leitura anacrônica, hoje desacreditada.

Já o tablete de argila YBC 6967, que se encontra na Universidade de Yale, contém o seguinte problema que foi traduzido por Donald John Wiseman para a linguagem atual:

Um recíproco excede seu recíproco em 7. Quais são: o recíproco e seu recíproco?

Figura 13 - Tablete de argila YBC 6967



Fonte: < http://www.academia.edu/22134390/TAVOLETTA_TABLET_YBC_6967>

Esse problema é essencialmente numérico, pois os recíprocos são números que multiplicados perfazem $1{,}0$. Entretanto, como o sistema babilônico é de base 60, lembremos que nessa base $1{,}0 = 1 \cdot 60 + 0 = 60$. O problema então consiste em se obter dois números, x e y, cujo produto é 60 e a diferença é 7, isto é:

$$x \cdot y = 60 \text{ e } x - y = 7$$

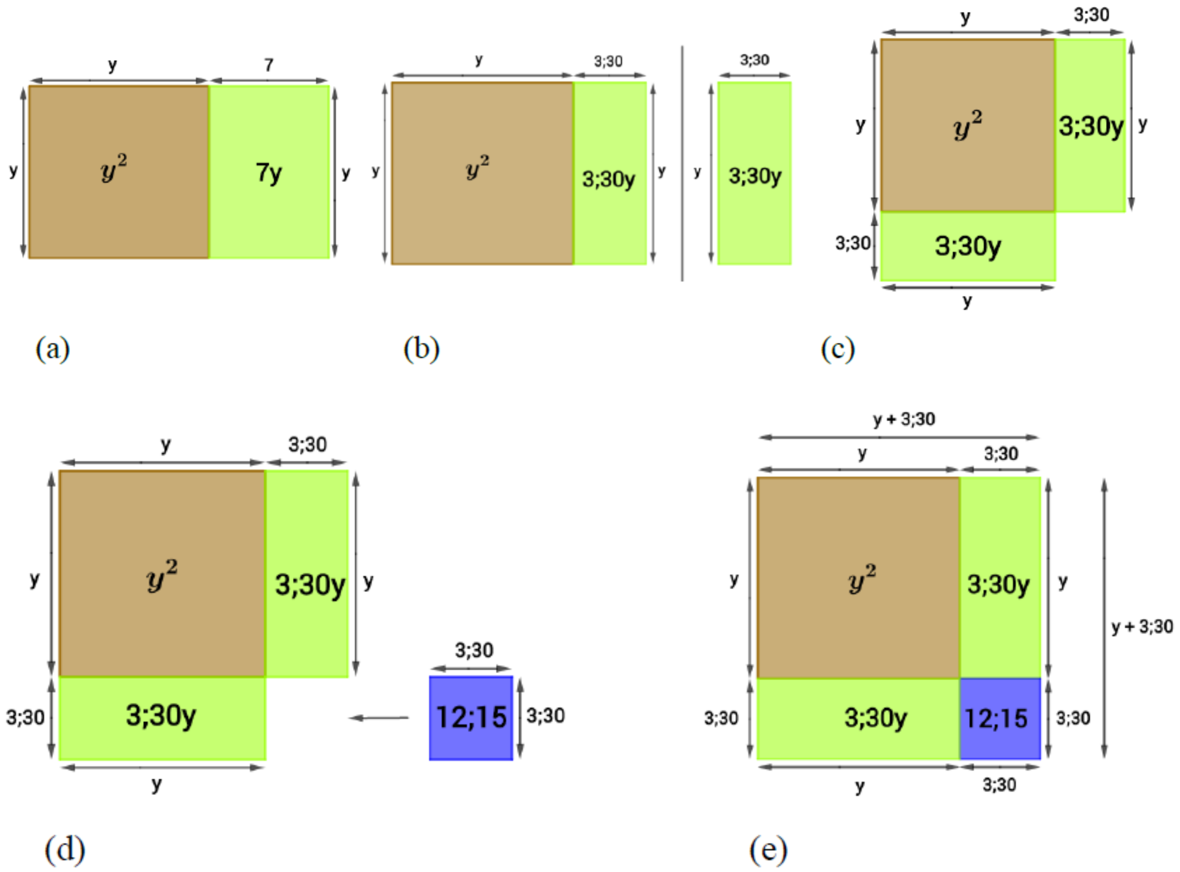
Desse modo, obtemos um sistema de duas equações, que por substituição se reduz à equação quadrática $(y + 7) \cdot y = 60$, ou seja, $y^2 + 7y = 60$.

A solução apresentada no tablete babilônico para esse sistema é a seguinte:

> Tome a metade de 7, que é $3;30$. Multiplique $3;30$ por $3;30$, que é $12;15$. Some isso ao produto 1,0 e o resultado é $1,12;15$. Dado que a raíz quadrada de $1,12;15$ é $8;30$, tome $8;30$ que você obteve e subtraía $3;30$ dele; some $3;30$ a $8;30$. Um é 12 e o outro é 5. (MAHAMMED, 1995 *apud* ANDRADE, 2000, p.16)

A solução geométrica dos babilônios foi:

Figura 14 - Resolução geométrica da equação $y^2 + 7y = 60$



Legenda: $(a) \to (b)$ - Tome metade de 7 que é $3;30$; $(b) \to (c)$ - Reorganizando...; $(c) \to (d)$ - Multiplique $3;30$ por $3;30$, que é $12;15$; $(d) \to (e)$ - Some $12;15$ a $1,0$ para obter $1;12;15$, formando um quadrado de lado $y + 0;30$

Fonte: O autor, 2018

Algebricamente temos:

$$y^2 + 7y = 1,0;0 \Longrightarrow y^2 + 7y + 12,15 = 1,0;0 + 12,15 \Longrightarrow (y + 3;30)^2 = 1,12;15 \Longrightarrow$$

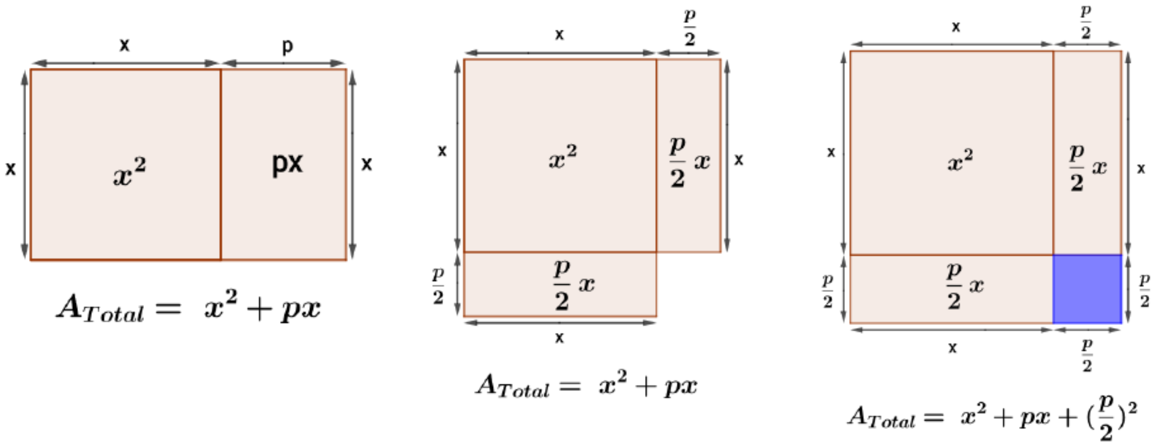
$y + 3;30 = \sqrt{1{,}15;15} \Rightarrow y + 3;30 = 8;30 \Rightarrow y = 8;30 - 3;30 \Rightarrow y = 5$

Com isso temos que o outro valor é:

$x - y = 7 \Rightarrow x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12.$

Observe que resolver a equação geral $x^2 + px = q$ é a mesma coisa que resolver o sistema linear $\begin{cases} y - x = p \\ xy = q \end{cases}$. Eles podem ser generalizados geometricamente da seguinte forma:

Figura 15 - Argumentação geométrica para o caso $x^2 + px = q$



Fonte: O autor, 2018

Como $x^2 + px = q$, vem que a área do quadrado de lado $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ é $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$; daí se conclui que $x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + p} - \frac{p}{2}}$

1.2.2 Equação do tipo $x^2 - px = q$ ou $x^2 = px + q$

No tablete de argila BM13901 se encontra o seguinte problema:

Encontre o lado de um quadrado cuja área subtraída de seu lado dá 14,30.

Solução dada pelos babilônios:

> Eu subtraí à área da superfície, o lado do meu quadrado: deu 14,30. Consideras 1, a unidade. Solução dada pelos babilônios: Divides o 1 a meio : dá 0; 30. Multiplicas 0; 30 po 0; 30: dá 0; 15. Juntas 0; 15 ao 14,30: dá 14,30; 15 É o quadrado de 29; 30. Junta 0; 30, que foi o que tu multiplicaste, a 29; 30: obténs 30, é o lado do quadrado. (MAHAMMED, 1995, *apud* ANDRADE, 2000, p.17)

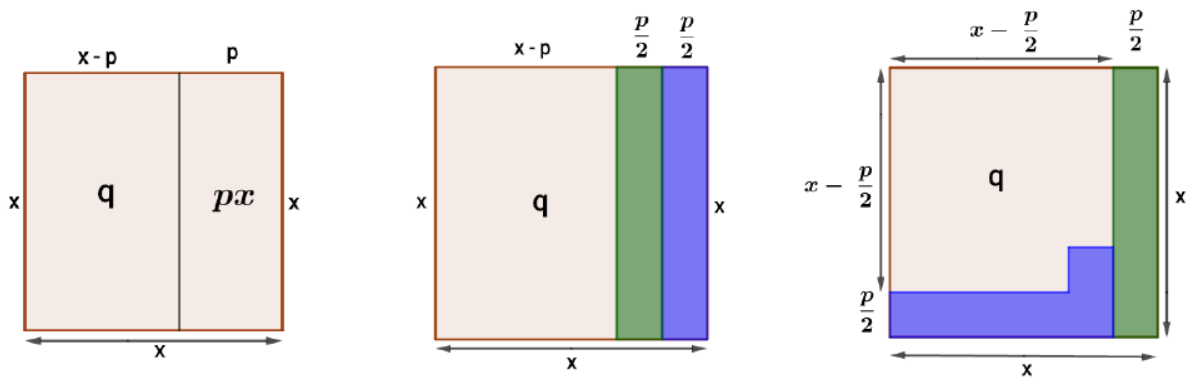
Numa interpretação algébrica moderna e anacrônica deste caso, o problema se reduz a resolver a equação $x^2 - x = 14{,}30$, que é do tipo $x^2 - px = q$. Uma vez que os babilônios não aceitavam os coeficientes negativos, este problema foi interpretado como sendo $x^2 = px + q$ (onde p e q são positivos). Este tipo de equação já tem um algoritmo de resolução diferente do anterior:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14{,}30} + \frac{1}{2} = \sqrt{(0;30)^2 + 14{,}30} + 0;30 = \sqrt{0;15 + 14{,}30} + 0;30 =$$

$= \sqrt{14{,}30;15} + 0;30 = 29;30 + 0;30 = 30$, que corresponde no caso geral a $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

Observe que resolvermos a equação geral $x^2 = px + q$ é a mesma coisa que resolvermos o sistema linear $\begin{cases} x - y = p \\ xy = q \end{cases}$. Ele pode ser generalizados geometricamente da seguinte forma:

Figura 16 - Argumentação geométrica para a equação $x^2 = px + q$



(a) (b) (c)

Fonte: O autor, 2018

Podemos assim concluir que a área do quadrado de lado $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$ é igual a $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$, de que se obtém que $x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}}$

1.2.3 Equação do tipo $x^2 - px + q = 0$ ou $x^2 + q = px$

Os babilônios tinham dificuldade em revolver um problema com várias soluções. Uma vez que um problema deste tipo podia ter duas soluções positivas, a forma de apresentação do problema era totalmente diferente das anteriores. Em vez de considerarem um problema do 2º grau, os babilônios utilizavam um sistema de dois problemas com duas incógnitas. Vejamos...

No tablete de argila YBC 4663 se encontra o seguinte problema:

Encontrar os lados de um retângulo sabendo que a sua soma é $6;30$ *e sua área é* $7;30$.

Solução dada pelos babilônios:

> Eu adicionei o comprimento e a largura do meu retângulo: deu $6;30$; a sua área é $7;30$. Tu divides $6;30$ a meio: dá $3;15$. Multiplicas $3;15$ por $3;15$: dá $10;33{,}45$. [A seguir] subtrais $7;30$ de $10;33{,}45$: dá $3;3{,}45$. É o quadrado de $1;45$. Junta $3;45$; que foi o que tu multiplicaste, a $1;45$: dá $5;00$, é o comprimento do rectângulo. Retira de $3;15$ que foi o que tu multiplicaste, $1;45$: dá $1;30$, é a largura. (MAHAMED, 1995 *apud* ANDRADE, 2000, p.18)

Figura 17 - Tablete de argila YBC 4663

Fonte: < http://isaw.nyu.edu//exhibitions/before-pythagoras/>

Neste caso o problema se reduz a resolver o sistema $\begin{cases} x+y=6;30 \\ xy=7;30 \end{cases}$, que é equivalente a resolver a equação $x^2 + 7;30 = 6;30x$. Assim:

$$x = \sqrt{\left(\frac{6;30}{2}\right)^2 - 7;30} + \frac{6;30}{2} = \sqrt{(3;15)^2 - 7;30} + 3;15 = \sqrt{10;33{,}45 - 7;30} + 3;15$$
$$= 1;45 + 3;15 = 5$$

$$y = \frac{6;30}{2} - \sqrt{\left(\frac{6;30}{2}\right)^2 - 7;30} = 3;15 - \sqrt{(3;15)^2 - 7;30} = 3;15 - \sqrt{10;33{,}45 - 7;30}$$

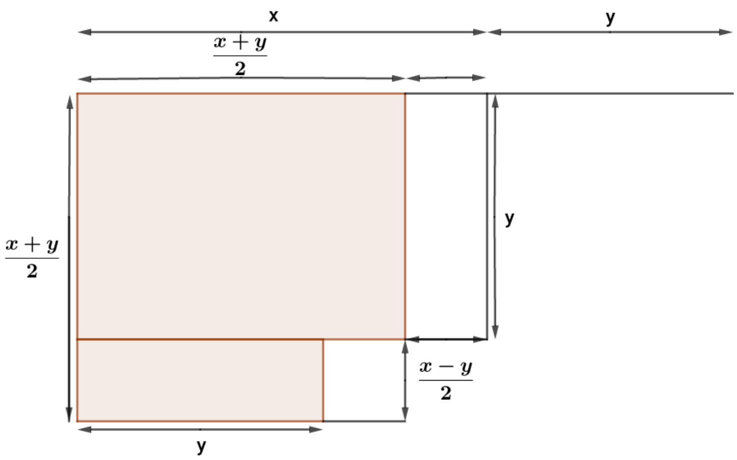
$$= 3;15 - 1;45 = 1;30$$

daí que, designando a soma das raízes por S e o se produto por P, obtemos que

$x = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P} + \frac{S}{2}$ e $y = \frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$.

Veja abaixo a solução geométrica aceita atualmente como o procedimento usado pelos babilônios:

Figura 18 - Argumentação geométrica da equação $x^2 + q = px$



Fonte: O autor, 2018

A área da zona sombreada é igual à área do retângulo que tem lados x e y, daí que a área é $x \cdot y = P$. Logo:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 = P + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

Dessa última igualdade, facilmente se tiram os valores de x e y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P} \\ y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P} \end{cases}$$

Resumindo o que sabemos hoje, os babilônios podiam resolver problemas que, em nossa linguagem simbólica moderna, equivalem às seguintes equações:

i) equações com uma incógnita: $ax = b$, $x^2 = a$, $x^2 + ax = b$, $x^2 - ax = b$, $x^3 = b$ e $x^2(x + 1) = a$;

ii) Sistemas de duas equações com duas incógnitas (que dão origem a uma equação do segundo grau): $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$, $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ e $\begin{cases} xy = S \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$.

Vemos assim que os babilônios apresentaram modelos e técnicas ("receitas") de cunho geométrico de como se resolver problemas do 2º grau, mesmo só lidando com expressões positivas.

2 **CIVILIZAÇÃO GREGA**

A civilização grega foi formada nos séculos XX a.C. a XII a.C. por invasões de Aqueus, Jônios, Eólios e Dórios.

A Grécia antiga é considerada o berço da civilização ocidental. Mas, na realidade ela desenvolveu-se a partir da civilização cretense. Como a Grécia antiga era chamada de Hélade, este povo foi denominado, na antiguidade, “Helenos”.

A história da Grécia pode ser dividida em quatro períodos: Período Homérico (Séculos XII até VIII a.C.), período em que foi criada as obras de Homero; Período Arcaico (Séculos VIII até VI a.C.), início da expansão grega; Período Clássico – Época de Ouro (Séculos VI até IV a.C.), período em que a democracia é estabelecida em Atenas e dominada pelos macedônios; e Período Helenístico (Séculos IV até I a.C.).

A base da revolução matemática exercida pela civilização grega partiu de uma ideia muito simples. Enquanto egípcios e babilônicos perpetuavam seus conhecimentos a partir da indagação do “como”, os filósofos gregos passaram a perguntar o “por quê”. Assim, a matemática que só era usada para as necessidades práticas do cotidiano, passou a ser utilizada como elemento de pensamento abstrato e filosófico. Segundo Struik (1978 apud ANDRADE 2000, p.20), o objetivo inicial da civilização grega era compreender o lugar do homem no universo, e a matemática ajudava o sentido de ordenar as ideias de uma forma racional.

A matemática grega originou-se no racionalismo jônico, e teve como principal estimulador Tales de Mileto[14]. Ele foi um dos responsáveis por desenvolver a geometria dedutiva e por efetuar as primeiras demonstrações matemáticas. Algumas conclusões tradicionalmente atribuídas a ele: um círculo é dividido por qualquer diâmetro; os ângulos de base de um triângulo isósceles são iguais; os ângulos entre duas linhas retas que se cruzam são iguais; dos triângulos são congruentes se tiverem dois ângulos e um lado igual; e um ângulo em um semicírculo é um ângulo reto. Hoje duvida-se muito que de fato ele tenha chegado a esses resultados.

Na Grécia houve dois grupos distintos de filósofos: os Sofistas e os Pitagóricos, os quais passam a analisar a matemática de dois modos diferentes.

Os Sofistas abordavam os problemas de natureza matemática direcionados a estratégias de argumentação e oratória, para que os estudantes atingissem o ápice da

[14] Tales de Mileto (623 a.C - 546 a.C) foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga. É apontado como um dos sete sábios da Grécia Antiga.

excelência em suas atividades, independente de quais fossem estas atividades. Ou seja, os sofistas preferiam a abstração do que a aplicação da matemática.

Os Pitagóricos, sociedade secreta criada por Pitágoras de Samos[15], enfatizavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Os pitagóricos não investigam de que são formadas as coisas, mas sim o que são as coisas, e sua resposta é que as coisas são números. Apoiados em seu princípio, os pitagóricos desenvolvem uma espécie de análise do número, cujos resultados eram aplicados na realidade. Pitágoras dizia que: "tudo na Natureza está arranjado conforme as formas e os números"..

Com as campanhas de Alexandre III, conhecido como Alexandre, o grande, houve um avanço rápido da civilização grega em direção à Ásia. Assim, a matemática grega sofreu uma influência ainda mais forte da matemática babilônica e egípcia com seus problemas de administração e astronomia, o que fez de Alexandria o centro cultural e econômico do mundo helenístico.

Com o domínio da Grécia e do oriente pelos romanos, estas regiões tornaram-se colônias governadas por administradores romanos. A estrutura econômica do império romano permanecia baseada na agricultura. Com o declínio do mercado de escravos a economia entrou em decadência e existiam poucos homens a fomentar uma ciência, mesmo medíocre.

Podemos, então, determinar uma relação entre a crise da matemática e a crise do sistema social, pois a queda de Atenas significou o fim do império da democracia escravagista. Esta crise social influenciou a crise nas ciências que culminou com o fechamento da escola de Atenas, marcando com isto o fim da matemática grega clássica.

Podemos observar que as descobertas matemáticas estão relacionadas com os avanços obtidos pela sociedade, tanto intelectuais como comerciais. Se no princípio a matemática era essencialmente prática, visto que as sociedades eram rudimentares, com o desenvolvimento destas sociedades a matemática também evoluiu, passando de uma simples ferramenta que auxiliava aos problemas práticos para uma ciência que serviu como chave para analisar o mundo e a natureza em que vivemos.

As descobertas matemáticas realizadas pelos povos pré-históricos, egípcios e babilônicos serviram como ponta pé inicial para o desenvolvimento da matemática grega. Esta matemática grega foi, e continua sendo a base de nossa matemática. Grande parte do desenvolvimento tecnológico obtido em nossos dias tem como ponto de partida a matemática grega.

---

[15] Pitágoras de Samos (569 a.c - 475 a.c) foi um matemático grego. Foi quem fundou a escola pitágorica, uma sociedade meio religiosa e meio científica.

O objetivo inicial da civilização grega era compreender o lugar do Homem no universo, e a matemática ajudava no sentido de ordenar as ideias de forma racional. Embora não se conheçam fontes fidedignas que os permitam visualizar o quadro de desenvolvimento inicial da matemática nesta civilização, possuímos edições credíveis das obras de alguns matemáticos importantes da antiguidade, nomeadamente Euclides de Alexandria[16] e Diofanto de Alexandria[17].

2.1 **Euclides de Alexandria**

Pouco se sabe da vida de Euclides. Apesar da data e local do seu nascimento serem desconhecidos, pensa-se que terá vivido no início do séc. III a.C. Provavelmente recebeu a sua formação matemática na Academia de Aristóteles.

Figura 19 - Euclides de Alexandria

Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/euclides_de_alexandria>

Foram pelo menos dez os trabalhos escritos por Euclides, embora apenas cinco das suas obras tenham sobrevivido até aos nossos dias. Seu trabalho mais famoso são “Os

[16] Euclides de Alexandria (nascido no século 300 a.C.) foi um professor, matemático platônico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".

[17] Diofanto de Alexandria (nascido entre 201 e 214 e falecido entre 284 e 298) foi um matemático greco. É considerado por muitos como "o pai da álgebra".

Elementos”, obra em 13 livros ou capítulos, baseados numa dedução estritamente lógica de teoremas, a partir dos primeiros princípios, os postulados, definições e axiomas. Até os dias de hoje, este é o livro mais impresso em matemática.

Figura 20 - Manuscrito dos Elementos - D'Orville 301, escrito em 888

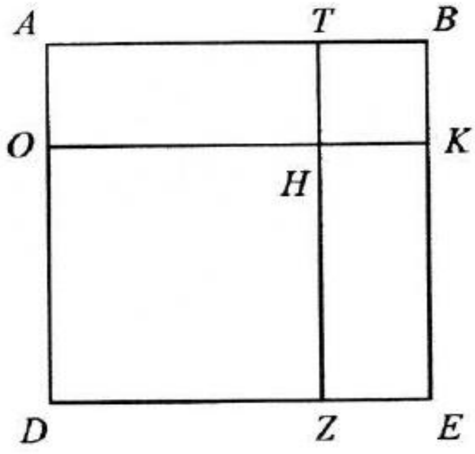
Fonte: <https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/GH/H_2.htm>

Vejamos algumas das proposições dos livros II e VI dos *Elementos*, e as respectivas igualdades algébricas modernas que podemos associar às mesmas, de maneira anacrônica.

Proposição II-4: *"Se uma linha recta é cortada num ponto arbitrário, o quadrado da linha inteira é igual aos quadrados dos segmentos, e a duas vezes o rectângulo contido por esses dois segmentos."* (EUCLIDES, 1993, *apud* ANDRADE 2000, p. 22)

A figura associada a esta proposição, e que foi apresentada por Euclides é a seguinte:

Figura 21 - Figura da proposição II. 4



Fonte: O autor, 2018

Se designarmos $\overline{\mathrm{AT}}$ por a e $\overline{\mathrm{TB}}$ por b, a proposição anterior é traduzida por:

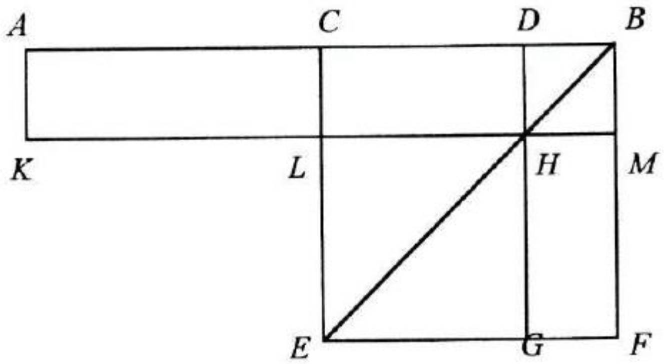
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

A igualdade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é conhecida nossa como o quadrado da soma de dois números.

Proposição II. 5: "*Se uma linha recta é cortada em partes iguais e desiguais, o rectângulo [compreendido] entre os dois segmentos desiguais da linha recta, adicionado com o quadrado da linha compreendida entre as secções, é igual ao quadrado da metade da linha recta.*" (EUCLIDES, 1995, *apud* ANDRADE 2000 p.22)

A figura que Euclides apresentou para esta proposição foi a seguinte:

Figura 22 - Figura da proposição II. 5



Fonte: O autor, 2018

Se designarmos $\overline{AC}$ por a e $\overline{CD}$ por b, a proposição anterior é traduzida por:

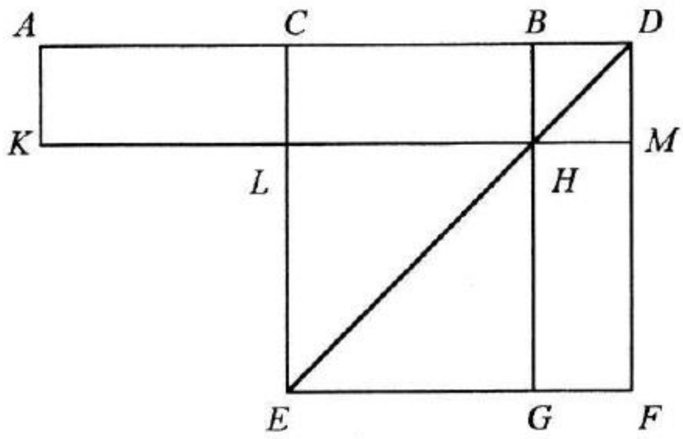
$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$$

A proposição II - 6 é complementar da proposição II - 5 e diz o seguinte:

Proposição II. 6: "*Se uma linha recta é cortada em duas partes iguais, e se lhe acrescentarmos directamente outra linha, o rectângulo compreendido entre a linha recta com a linha acrescentada, e entre a linha acrescentada, adicionado ao quadrado da metade da linha recta, é igual ao quadrado descrito sobre a linha composta pela metade da linha recta e a linha acrescentada, como uma só linha."* (EUCLIDES, 1995 *apud* ANDRADE 2000 p.23)

A figura apresentada por Euclides foi a seguinte:

Figura 23 - Figura da proposição II . 6



Fonte: O autor, 2018

Para obtermos uma igualdade algébrica com base nesta proposição, vamos representar $\overline{AC}$ por a e $\overline{CD}$ por b. A igualdade será:

$$(a+b)(b-a)+a^2=b^2$$

Dentre as restantes proposições do livro II dos *Elementos* há também a destacar a proposição 11. Esta já não trata de uma igualdade entre expressões quadráticas, mas nos conduz à solução da conhecida proporção divina (que atualmente se designa por número de ouro). No entanto, a resolução apresentada não pode ser generalizada às outras equações do 2º grau.

Note-se que, no que diz respeito às equações completas do 2º grau, estas podiam se dividir em três tipos:

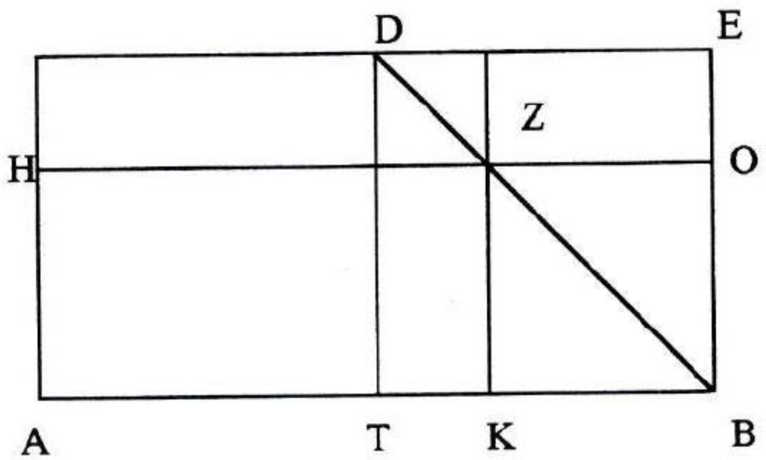
$$x^2 + px = q,$$
$$x^2 = px + q,$$
$$x^2 + q = px.$$

Antes de enunciar as referidas proposições, convém referir que aplicar uma figura retilínea a um segmento é construir um retângulo sobre esse segmento que tenha a mesma área da figura retilínea. Por vezes, a aplicação é feita não ao segmento exato, mas a um outro maior ou menor; nesses casos, dizemos que a aplicação é feita por excesso ou por defeito, respectivamente.

Proposição VI. 27: *"De todos os paralelogramos que são aplicados a uma mesma linha recta, e que são deficientes por paralelogramos semelhantes e semelhantemente situados ao paralelogramo descrito sobre a metade dessa linha, o maior é aquele que é aplicado sobre a metade dessa linha, e que é semelhante ao seu defeito."* (EUCLIDES, 1995 *apud* ANDRADE 2000 p.24)

Para o caso dos paralelogramos serem retângulos, a figura suporte da proposição dada por Euclides seria a seguinte:

Figura 24 - Figura da proposição VI. 27 parte 1



Fonte: O autor, 2018

A demonstração dada em linguagem e simbologia atuais é a seguinte:

Seja $\overline{AB}$ a linha dada que está cortada ao meio no ponto T. Sobre $\overline{AB}$ foi aplicado o paralelogramo AD deficiente pelo paralelogramo TE, que é semelhante a uma figura dada, mas que está descrito sobre a metade da linha $\overline{AB}$.

O que a proposição afirma é que de todos os paralelogramos que são aplicados sobre $\overline{AB}$, e cujo o defeito é semelhante a TE, o maior é AD. Para mostrar tal resultado, Euclides considerou que sobre $\overline{AB}$ foi também aplicado um outro paralelogramo arbitrário, neste caso AZ, também deficiente e com defeito semelhante a TE. O que se pretende mostrar é que AD é maior que AZ.

Como os paralelogramos TE e KO são semelhantes, têm a mesma diagonal. Portanto TZ será igual a ZE. Juntando a ambos o paralelogramo KO, obtemos que o paralelogramo TO será igual ao paralelogramo KE.

Além disso, o paralelogramo TO é igual ao paralelogramo TH (porque a linha AT é igual à linha TB); daí que TH seja igual a KE. Juntando agora a ambos o paralelogramo TL, concluímos que o paralelogramo inteiro AZ será igual ao gnomom $ZTBE$.

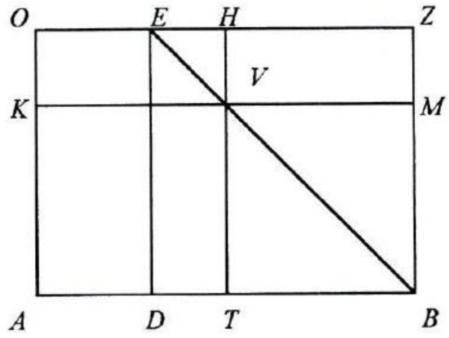
Ora, o paralelogramo AD, que é igual ao paralelogramo TE, é maior que o paralelogramo AZ.

■

Em seguida, Euclides considerou o caso em que o defeito é maior que a figura dada inicialmente. Dividiu de novo a linha $\overline{AB}$ em duas partes iguais no ponto T, e aplicou a essa linha o paralelogramo AV, deficiente pelo paralelogramo TM que novamente é semelhante a uma figura dada, e está descrito sobre a metade da linha $\overline{AB}$. De seguida, aplicou à linha $\overline{AB}$ o paralelogramo AE deficiente pelo paralelogramo DZ, semelhante a TM, e por sua vez à figura dada inicialmente.

Novamente, o que a proposição afirma é que o paralelogramo AV (que foi aplicado sobre a metade da linha dada) é maior que o paralelogramo AE. A figura referente a este segundo caso é a seguinte:

Figura 25 - Figura da proposição VI. 27 parte 2



Fonte: O autor, 2018

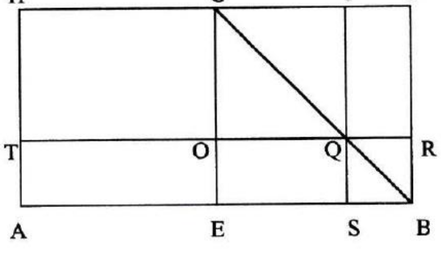
Como os paralelogramos DZ e TM são semelhantes, têm a mesma diagonal, que neste caso é EB. Além disso, temos que VZ é igual a VO (porque HZ é igual a OH), daí se conclui que VZ é maior que KE. Temos também que VZ é igual a VD, daí que VD seja maior que KE. Juntando a ambos o paralelogramo KD; vem que o paralelogramo inteiro AV' é maior que o paralelogramo inteiro AE, que é o que se pretendia mostrar.

■

Proposição VI. 28: *"A uma linha recta dada aplicar um paralelogramo que é igual a uma figura rectilínea dada, mas que é deficiente por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado: é necessário que a figura rectilínea dada não seja maior que o paralelogramo construído sobre a metade da linha dada, e semelhante ao defeito."* (HEATH, 1981, *apud* ANDRADE 2000 p.26)

A adaptação da figura apresentada por Euclides relativamente a esta proposição, para o caso particular dos paralelogramos serem retângulos, e consequentemente o defeito ser um quadrado é a que se segue:

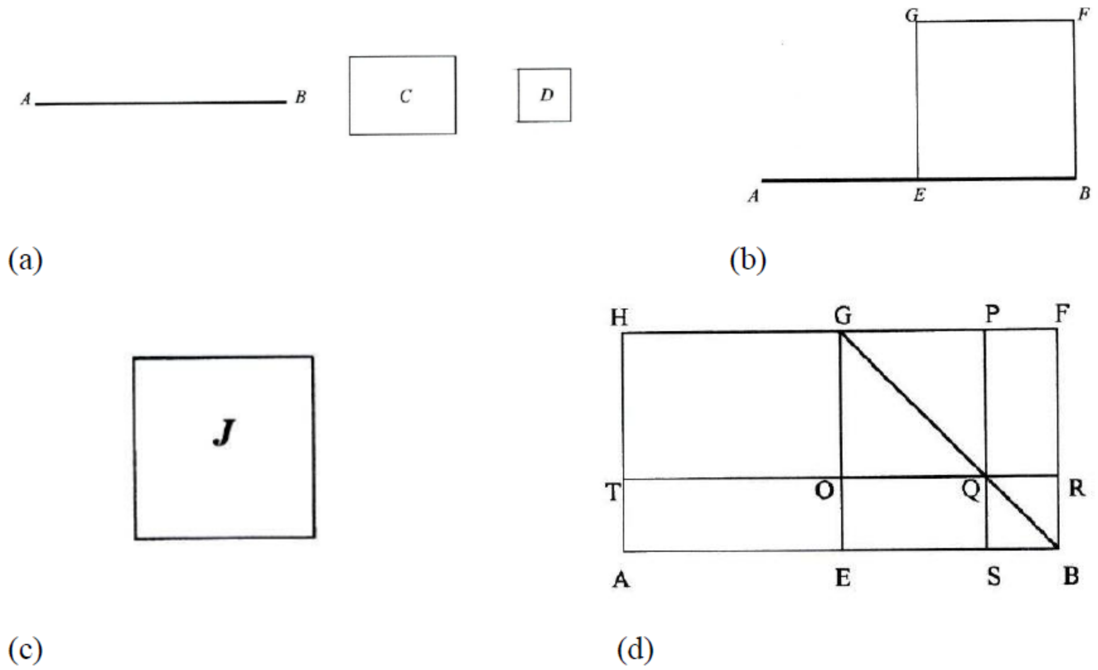
Figura 26 - Figura da proposição VI. 28



Fonte: O autor, 2018.

Vejamos como se obtém a figura apresentada.

Figura 27 - Obtenção da figura 26



Legenda: (a) objetos usados na construção; (b) 1ª etapa; (c) 2ª etapa; (d) 3ª etapa.

Fonte: O autor, 2018

É dado um comprimento ($\overline{AB}$), a área de uma figura plana (C) e uma figura (D) ao qual o defeito será semelhante (fig.27a). A primeira etapa, consiste em dividir o segmento dado a meio, e desenhar sobre a segunda metade do segmento uma figura semelhante a D (fig.27b). Na segunda etapa constrói-se um paralelogramo J, semelhante a D, tal que a área de J seja igual à área de $EBFG\ -\ área\ de\ C$. (Esta construção obriga a usar outras proposições do livro VI dos *Elementos*, às quais não faço referência, nomeadamente quadraturas e Teorema de Pitágoras) (fig.27c). Finalmente, na terceira etapa coloca-se a figura J no canto superior esquerdo da figura $EBGF$ e prolongam-se alguns dos lados, de modo a obter a figura pretendida (fig.27d).

Prova: Pretendemos mostrar que a área de $ASQT$ e igual à área de C e que $SBRQ$ é um quadrado. $SBRQ$ é um quadrado, pois por construção $EBFG$ e $OQPG$ são quadrados. Logo, $\overline{SQ} = \overline{QR}$. Como por construção $área\ de\ J = área\ de\ EBFG - área\ de\ C$, vem que:

$$
\begin{aligned}
área\ de\ EBFGO &= área\ de\ EBFG - área\ de\ J \\
&= área\ de\ EBFG - (área\ de\ EBFG - área\ de\ C) \\
&= área\ de\ C
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\overline{GB}$ é a diagonal do quadrado EBFG, vem que a área de QF é igual à área de QE. Se juntarmos a ambos ao paralelogramo QB, vem que o paralelogramo PB é igual ao paralelogramo OB. Mas $\overline{OB}$ é igual a $\overline{TE}$, pois o lado $\overline{AE}$ é igual ao lado $\overline{EB}$, daí que $\overline{TE} = \overline{PB}$. Juntando a ambas as figuras o paralelogramo OS, temos que o paralelogramo inteiro TS será igual ao paralelogramo $EBFQ$, que como já vimos, tem área C.

■

Finalmente, para que possamos interpretar o problema em nossa linguagem atual, mostrando como ele pode ser reformulado algebricamente, com as equações do 2º grau subjacentes, vamos atribuir letras aos vários segmentos. Consideremos o segmento dado $\overline{AB}$ como sendo a e $\overline{AS}$ (que é o comprimento procurado) como sendo x. O retângulo procurado ($ASQT$) tem lados x e $a - x$ e tem área C, daí que procurar esse rectângulo seja procurar o comprimento
x tal que:

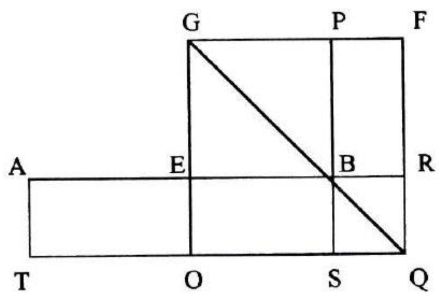
$$x(a-x) = C \Leftrightarrow x^2 + C = ax \longrightarrow \text{equação do tipo } x^2 + q = px.$$

A proposição 29 é complementar da proposição 28 e permite-nos resolver geometricamente os outros tipos de equações do 2º grau completas.

Proposição VI. 29: *"Aplicar sobre uma linha recta dada, um paralelogramo que é igual a uma figura rectilínea dada, mas que é excedente por um paralelogramo semelhante a outro paralelogramo dado."* (EUCLIDES, 1993 *apud* ANDRADE 2000 p.28)

Adaptando a figura apresentada por Euclides para esta proposição ao caso particular dos paralelogramos serem rectângulos, e consequentemente o excesso ser um quadrado, obtém-se a seguinte figura:

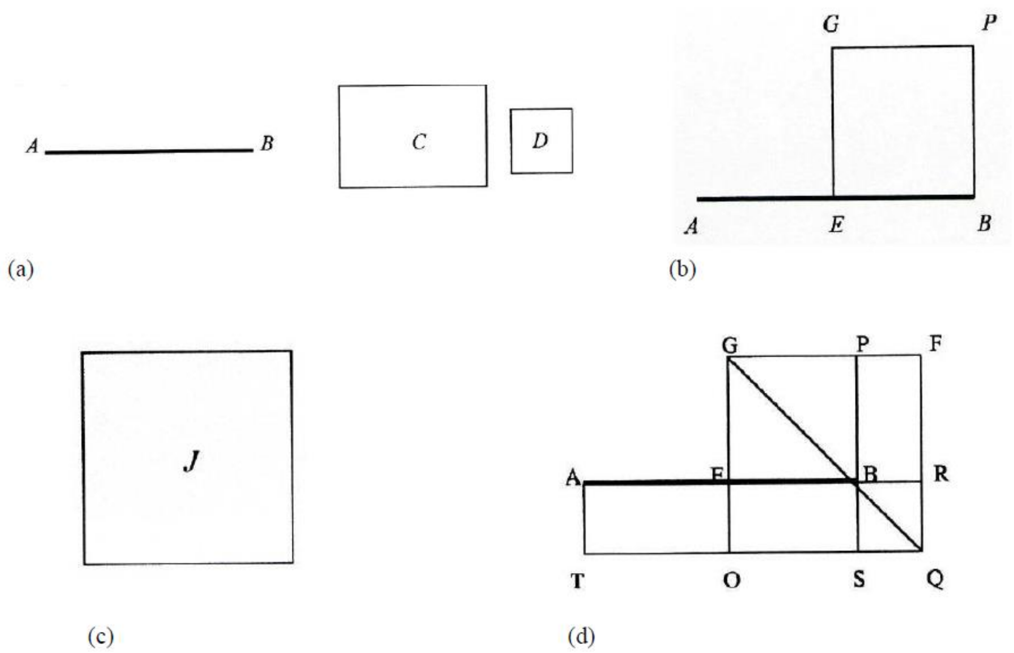
Figura 28 - Figura da proposição VI. 29



Fonte: O autor, 2018.

Vejamos como é que se a obtém.

Figura 29 - Obtenção da figura 28



Legenda: (a) objetos usados na construção; (b) 1ª etapa; (c) 2ª etapa; (d) 3ª etapa.

Fonte: O autor, 2018

Novamente, é dado um comprimento ($\overline{AB}$), a área de uma figura plana (C) e uma figura (D) ao qual o excesso será semelhante (fig.29a). A primeira etapa é perfeitamente análoga à do caso anterior, que é construir sobre a segunda metade do segmento AB uma figura semelhante a D (fig.29b). Na segunda etapa, constrói-se um paralelogramo J, semelhante a D, mas tal que a área da figura J seja igual à $\text{área de EBPG} + \text{área de C}$ (novamente, esta construção usa outras proposições do livro VI dos Elementos) (fig.29c). Na terceira e última etapa, coloca-se a figura J no canto superior esquerdo da figura $EBPG$ e prolongam-se os lados, obtendo-se assim afigura apresentada inicialmente (fig.29d).

Prova: Pretendemos agora mostrar que ATQR tem área igual à de C e que SQRB é um quadrado. Por construção, temos que EBPG e OQFG são quadrados, donde se conclui que SQRB também é um quadrado. Também por construção, temos que $\text{área de J} = \text{área de EBPG} + \text{área de C}$. Daí se conclui que:

$$
\begin{aligned}
área\ de\ OQFBE &= área\ de\ J - área\ de\ EBPG \\
&= (área\ de\ EBPG + área\ de\ C) - área\ de\ EBPG \\
&= área\ de\ C
\end{aligned}
$$

Como $\overline{\mathrm{AE}}$ é igual a $\overline{\mathrm{EB}}$, vem que a área do paralelogramo AO é igual à área do paralelogramo OB que, por sua vez, é igual à área de PR, uma vez que $\overline{\mathrm{GQ}}$ é a diagonal do quadrado GOQF. Juntando a AO e a PR o paralelogramo EQ, vem que a área de AQ é igual à área de OQFB, que como já vimos é igual à de C. Está assim demonstrado o que se pretendia.

■

Do modo análogo aquilo que acontece com a proposição 28, esta proposição poderia ter sido demonstrada mais rapidamente usando a proposição II.6, pois neste caso ambas as proposições (II-6 e VI-29) referem-se a um segmento que foi dividido em partes iguais e tinha no seu prolongamento um outro segmento.

À semelhança do que fizemos anteriormente, vamos atribuir letras aos diferentes segmentos, para transformar a proposição anterior numa igualdade algébrica. Na mesma linha de raciocínio, consideremos o segmento dado $\overline{AB}$ como sendo a e $\overline{AR}$ (que é o comprimento procurado) como sendo x. O retângulo procurado $ARQT$ tem lados x e $x - a$ e área C; daí que procurar o retângulo é procurar x tal que:

$$x(x-a) = C \Leftrightarrow x^2 = C + ax \longrightarrow \text{equação do tipo } x^2 = px + q.$$

Se considerássemos o segmento $\overline{AB}$ como sendo a e a linha que lhe foi acrescentada ($\overline{BR}$) como sendo x, então o retângulo procurado teria lados x e $a + x$. Neste caso, procurar esse retângulo seria procurar o comprimento x tal que:

$$x(x+a) = C \Leftrightarrow x^2 + ax = C \longrightarrow \text{equação do tipo } x^2 + px = q.$$

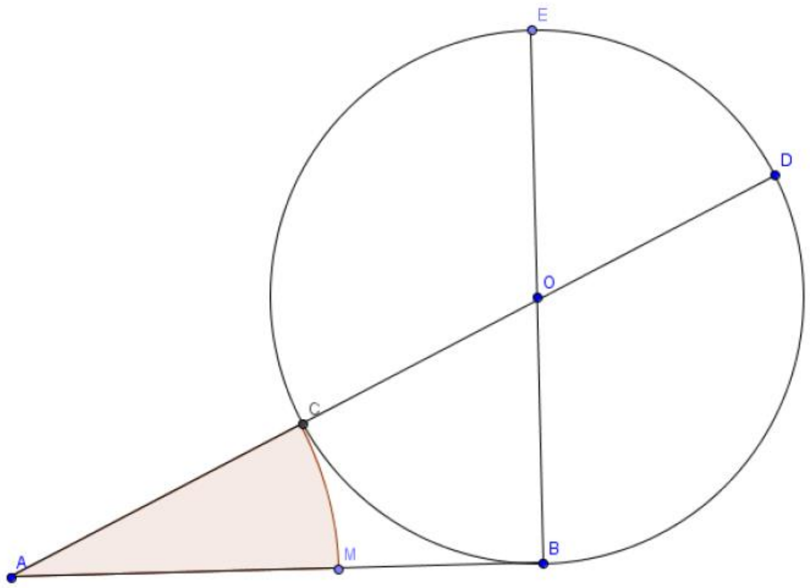
Desta forma, obtivemos os outros dois tipos de equações do 2º grau completas.

José Morgado, em um de seus trabalhos publicado na internet (Millenium, nº 16, Out. de 1999) diz que nos *Elementos* de Euclides, ensina-se a resolver o seguinte problema:

"Dividir um segmento de recta em duas partes tais que o rectângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte."

Hoje resolve-se algebricamente esse problema solucionando a equação $a(a-x) = x^2$, em que "a" é o segmento dado. A equação pode ser escrita sob a forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$; trata-se de dividir o segmento "a" em média e extrema razão. Seja $\overline{AB}$ o segmento dado e consideremos a circunferência tangente a $\overline{AB}$ em B e cujo raio é $\frac{a}{2}$. A reta definida por A e pelo centro O da circunferência encontra a circunferência os pontos C e D.

Figura 30 - Solução geométrica da proporção $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$



Fonte: O autor, 2018

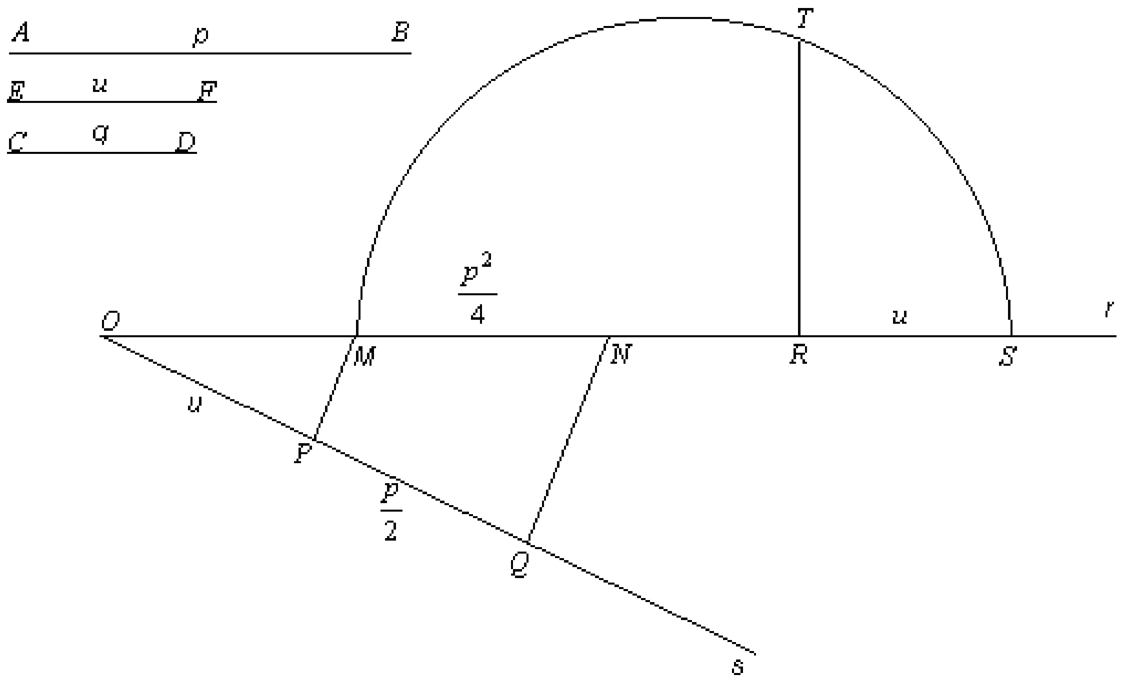
O arco de circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$ encontra $\overline{AB}$ no ponto M. As partes pedidas são precisamente $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ e tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$. Com efeito, tem-se $a^2 = (a+x)x$, onde a e x designam, respectivamente, o comprimento da tangente $\overline{AB}(= \overline{CD})$ e o comprimento de $\overline{AM}$ (o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa) e da igualdade $a^2 = (a+x)x$, resulta $a(a-x) = x^2$, quer dizer, a área do retângulo que tem para lados "a" e a parte $a - x$ é igual ao quadrado da outra parte, já que $a - (a-x) = x$. A igualdade $a^2 = (a+x)x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABO. Assim, tem-se $\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{OA}^2$, isto é, $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, onde $a^2 = x^2 + ax = x(a+x)$ como se pretendia.

∎

Ainda no mesmo trabalho, Morgado (Millenium, nº 16, Out. de 1999) apresenta outra solução geométrica de uma equação quadrática, como vemos abaixo.

Suponhamos agora que queremos resolver a seguinte equação $x^2 + px = q$. Esta equação é, evidentemente, equivalente à equação $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$. Então, para resolver a equação, basta concluir que $\frac{p^2}{4} + q$, extrair-lhe a raiz quadrada e subtrair-lhe, em seguida, $\frac{p}{2}$

Figura 31 - Solução geométrica da equação $x^2 + px = q$ usando régua e compasso



Fonte: MORGADO, Millenium nº 16, 1999

Comecemos por considerar duas retas r e s, concorrentes em O e, sobre r, um ponto M tal que $\overline{OM} = \frac{p}{2}$, sendo p o comprimento do segmento $\overline{AB}$ relativamente ao segmento unidade $\overline{EF} = u$ e consideremos sobre s dois pontos P e Q tais que $\overline{OP} = u$ e $\overline{PQ} = \frac{p}{2}$. Unamos P e M e conduzamos por Q uma paralela a $\overline{PM}$; seja N o ponto de intersecção dessa paralela com r. Tem-se $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}}$ e portanto, $\overline{MN} = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{p^2}{4}$. Consideremos agora o ponto R, de r, tal que $\overline{MR} = \overline{MN} + \overline{NR} = \frac{p^2}{4} + q$. Trata-se de extrairmos a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$. Para isso, marquemos sobre r o ponto S tal que $\overline{RS}$ tenha comprimento u e R fique entre M e S. Consideremos uma semicircunferência γ, de diâmetro $\overline{MS}$ e seja T o ponto de encontro dessa semicircunferência com a perpendicular a r conduzida por R. Por um teorema conhecido da geometria Elementar (a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é meio proporcional dos segmentos que seu pé determina na hipotenusa) conclui-se que RT é precisamente a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$, visto que $\overline{RT}^2 = \left(\frac{p^2}{4} + q\right) \cdot u = \frac{p^2}{4} + q$. Para obter x, basta determinar o valor de $\overline{RT} - \frac{p}{2}$.

■

2.2 **Diofanto de Alexandria**

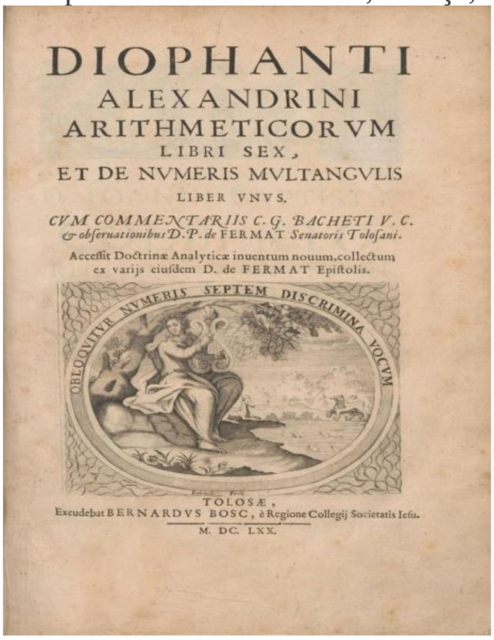
Diofanto de Alexandria foi um matemático grego que teria nascido no início da segunda metade do séc. III d.C. Embora se desconheçam datas exatas do seu nascimento e morte, pensa-se que terá morrido com 84 anos .

Figura 32 - Diofanto de Alexandria

Fonte:<http://redeabe.org.br/historia_estatistica/projeto/interna/40>

Tanto quanto se conhece, Diofanto é autor de uma obra intitulada *Aritmética*, composta por 13 livros, dos quais apenas 10 são conhecidos. A obra de Diofanto apresenta uma coleção de problemas que recaem explicitamente na resolução de equações do 1º e 2º grau (e por vezes de grau superior) envolvendo uma ou mais incógnitas. Os problemas apresentados são puramente aritméticos e o tratamento apresentado, apesar de por vezes recorrer à geometria, baseia-se essencialmente em métodos analíticos.

Figura 33 - Frontispício da “Arithmetica De Diofanto",
publicado em Toulouse, França, em 1620



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Fonte: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/
2008/02/biografia-de-diofanto-de-alexandria.html>

Os problemas 27 a 30 do livro I *da Aritmética* de Diofanto são os primeiros que se reduzem a equações do 2º grau completas e na apresentação da sua resolução, Diofanto utiliza um artifício que permite transformá-las em equações do 2º grau incompletas, cuja resolução é imediata. Tal artifício consiste (independentemente do número de equações, do grau dessas equações e do número de incógnitas envolvidas no problema) em designar uma certa quantidade desconhecida (uma nova incógnita por excelência) por aritmo. Em seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e, ou são feitas substituições entre as várias equações ou, como no caso das equações indeterminadas, são tomados casos particulares, de modo a reduzir a uma só equação, com uma só incógnita (o aritmo) nunca com grau superior ao segundo.

Note-se que a escolha do aritmo não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma a que no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do aritmo era fácil determinar as várias soluções do problema. Já nos problemas Diofantinos verifica-se o uso de generalizações de métodos, embora nem sempre se buscassem todas as soluções possíveis.

Luís Radford chama a atenção para o método inovador introduzido por Diofanto:

> O procedimento de Diofanto é totalmente diferente, do ponto de vista conceitual, dos procedimentos de falsa posição, e da geometria de colagem. Com efeito, aqui, uma incógnita (designada por aritmo, que quer dizer número) é posta em evidência nos cálculos. Esta incógnita não é como nos processos aritméticos, o ponto de chegada dos cálculos, ela não é mais, como acontece no caso da geometria da colagem, um ponto de referência estático no desenvolvimento ao problema, mas sim uma quantidade que é operada como se fosse um número conhecido. (RADFORD, 1993 *apud* ANDRADE, 2000 p.37)

Diofanto seguia a tradição da época, na medida em que aceitava e trabalhava apenas com números racionais positivos. Sempre que um problema tinha como solução um número negativo, apelidava-o de "absurdo"; e se a solução fosse um número irracional ou imaginário, era tido como impossível.

À semelhança do que aconteceu com os seus antecessores, Diofanto também resolvia os problemas utilizando o discurso contínuo (dando explicações e resoluções usando texto corrido). Além disso, Diofanto fazia com que o leitor pudesse acompanhar o processo de descoberta do resultado. Isso é bem visível na resolução dos seus problemas, e iremos vê-lo nos exemplos que a seguir apresentamos.

2.2.1 Equações do 2º grau determinadas

O primeiro problema do 2º grau é a 26ª proposição do livro I. Note-se que tal problema conduz a uma equação do 2º grau incompleta.

Problema I-26:

> São-te dados dois números, procura o número que, se o multiplicarmos respectivamente, dá dum lado um quadrado, e doutro lado a raiz desse quadrado. Sejam 200 e 5 os dois números dados, e [consideremos] que o número procurado é 1 aritmo. Temos então que, se o número procurado é multiplicado por 200 unidades, dá 200 aritmos, e se é multiplicado por 5 unidades, dá 5 aritmos. Ora, foi dito que um desses números é um quadrado e que o outro é a raiz desse quadrado; daí que, se nós elevarmos ao quadrado 5 aritmos obtemos 25 quadrados de aritmos [que são] iguais a 200 aritmos. Dividamos tudo pelo aritmo; vem que 25 aritmos são iguais a 200 unidades, e o aritmo é igual a 8 unidades; isto satisfaz a proposição. (DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.38)

Neste primeiro exemplo, representa-se o número procurado por 1 aritmo (que iremos designar por x). Facilmente se vê que o problema se reduz à equação $25x^2 = 200x$. A resolução dada em simbologia atual é a seguinte: $25x^2 = 200x \Leftrightarrow 25x = 200 \Leftrightarrow x = 8$.

■

A proposição 27 do mesmo livro é o primeiro problema que se reduz a uma equação do *2°* grau completa, mas que Diofanto através da nova incógnita denominada aritmo transformou numa equação do *2°* grau incompleta.

Problema I-27:

> Encontrar dois números tais que a sua soma e o seu produto sejam dois números dados. É preciso, no entanto, que o quadrado da semi-soma dos números procurados exceda por um quadrado o produto desses números; coisa que é figurativo. Propomos portanto que a soma dos números se[a 20 unidades, e que o produto seja 96 unidades.(DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.38)

Em linguagem atual, esse problema se reduz a resolver o sistema $\begin{cases} X + Y = 20 \\ X \cdot Y = 96 \end{cases}$, que é equivalente a resolver a equação $x^2 + 96 = 20x$, do tipo $x^2 + q = px$.

> [Consideremos] que a diferença entre os números seja 2 aritmos. Daí que, como a soma dos números é 20 unidades, se dividirmos em duas partes iguais, cada uma das partes será metade da soma, ou seja, 10 unidades. Daí que, se nós juntarmos a uma das partes, e se retirarmos à outra parte, a metade da diferença entre os números, ou seja 1 aritmo, estabelece-se de novo que a soma dos números é 20 unidades, e que a sua diferença é 2 aritmos. Em consequência disso, consideremos que o número maior é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são a metade da soma dos números; daí que o número mais pequeno será 10 unidades menos 1 aritmo, e temos [novamente] que a soma dos números é 20 unidades e que a diferença entre eles é 2 aritmos.
> Temos também que o produto dos números é 96 unidades. Ora, o seu produto é igual a 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; se igualarmos isso a 96 unidades, vem que o aritmo é igual a 2 unidades. Em consequência disso, o número maior será 12 unidades e o mais pequeno 8 unidades, e estes números satisfazem a proposição. (DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.39)

Diofanto considerou que a diferença entre os dois números era 2 aritmos. Representaremos um aritmo por x. Além disso, como a semi-soma dos números é 10, vem que os números são $X = 10 - x$ e $Y = 10 + x$. Como o produto dos números é 96 resulta que: $(10 - x)(10 + x) = 96 \Leftrightarrow 100 - x^2 = 96 \Leftrightarrow x^2 = 4$ donde se tira que $x = 2$ e os números procurados são 8 e 12.

■

Podemos ver o cálculo dos valores de X e de Y da seguinte forma:

$X = 10 - \sqrt{10^2 - 96}$ e $Y = 10 + \sqrt{10^2 - 96}$, que corresponde a $X = \frac{X+Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY}$ e $Y = \frac{X+Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY}$. Como $X + Y = 20$ e $X \cdot Y = 96$, que são os coeficientes da equação $X^2 + 96 = 20X$, resulta que $X = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ e $Y = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, que são as fórmulas já usadas anteriormente pelos babilônios para resolverem as equações do 2º grau desse tipo.

Note-se que a condição inicial dada por Diofanto: "é preciso, no entanto que o quadrado da semissoma dos números procurados exceda por um quadrado o produto desses números", é suficiente para que se possa calcular a raiz quadrada, ou seja (no contexto em que Diofanto trabalhava) que a solução seja racional. Senão vejamos:

Temos que $\begin{cases} X + Y = S \\ X \cdot Y = P \end{cases}$. Considerou-se que $X = \frac{S}{2} - x$ e que $Y = \frac{S}{2} + x$. assim sendo, $X \cdot Y = \left(\frac{S}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{S}{2} + x\right) = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - x^2$. Mas $P = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - x^2$ é equivalente a $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P = x^2$.

■

Problema I-30:

> Encontrar dois números tais que a sua diferença e o seu produto sejam dois números dados.
> É preciso no entanto que o quádruplo do produto dos números, aumentado do quadrado da diferença, seja um quadrado; coisa que é também figurativo.
> Propomos portanto que a diferença dos números seja 4- unidades e que o produto seja 96 unidades. (DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.40)

Neste caso, o problema cinge-se a resolver o sistema $\begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{Y} = 4 \\ \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = 96 \end{cases}$, que é equivalente quer à equação $\mathrm{X}^2 = 4\mathrm{X} + 96$ do tipo $\mathrm{x}^2 = \mathrm{px} + \mathrm{q}$, quer à equação $\mathrm{Y}^2 + 47\mathrm{Y} = 96$, que é do tipo $\mathrm{x}^2 + \mathrm{px} = \mathrm{q}$.

> Que a soma dos números seja 2 aritmos. Ora, nós temos também que a sua diferença é 4 unidades, daí que o maior é 1 aritmo mais 2 unidades, e o menor é 1 a ritmo menos 2 unidades; isto estabelece que a sua soma é 2 aritmos e que a sua diferença é 4 unidades.
> Temos agora que o produto dos números é 96 unidades. Mas o produto dos números é 1 quadrado de aritmo menos 4 unidades. Igualemos isso a 96 unidades; o número maior é de novo 12 unidades e o mais pequeno 8 unidades; números esses que satisfazem o problema. (DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.40)

Como a diferença entre os números estava definida, Diofanto considerou que o aritmo (que é representado por x) é a semi-soma dos números. Como a diferença entre eles é 4, o autor chegou à conclusão que $X = x + 2$ e $Y = x - 2$.

Como o produto entre os números é 96 resulta que $(x+2)(x-2) = 96 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 96 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$. Assim sendo, os números procurados são 12 e o 8.

■

Da mesma forma vista anteriormente, podemos ver os cálculos dos valores de X e Y como sendo $X = \sqrt{96 + 2^2} + 2$ e $Y = \sqrt{96 + 2^2} - 2$, que correspondem a $X = \sqrt{XY + \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2} + \frac{X-Y}{2}$ e $Y = \sqrt{XY + \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2} - \frac{X-Y}{2}$.

Como $X - Y = 4$ e $X \cdot Y = 96$ que, novamente são os coeficientes das equações $X^2 = 4X + 96$ e $Y^2 + 4Y = 96$ dos tipos $x^2 = px + q$ e $x^2 + px = q$ respectivamente, resulta que $X = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2}$ e $Y = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$, que novamente são as fórmulas usadas já anteriormente pelos babilônios para resolverem as equações do *2°* grau destes dois tipos.

Novamente, a condição inicial dada por Diofanto: "é preciso no entanto que o quádruplo do produto dos números, aumentado do quadrado da diferença, seja igual a um quadrado", é para garantir que o resultado seja uma raiz quadrada racional. Senão vejamos: Temos que $\begin{cases} X - Y = D \\ X \cdot Y = P \end{cases}$. Considerou-se que $X = x + \frac{D}{2}$ e que $Y = x - \frac{D}{2}$. Assim sendo, $X \cdot Y = \left(x + \frac{D}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{D}{2}\right) = x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2$. Temos então que $x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 = P$, que é equivalente a $P + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = x^2$. Multiplicando ambos os membros desta última equação por 4, obtemos $4P + D^2 = (2x)^2$.

■

2.2.2 Equações do 2º grau indeterminadas

O primeiro problema do 2º grau indeterminado que aparece nos livros de Diofanto é o problema 8 do livro II. Também neste tipo de problemas, o autor escreve as várias incógnitas em função da incógnita suplementar a que ele chama aritmo.

Mas vejamos tudo o que foi dito com o exemplo atrás referido:

Problema II-8:

> Divide um quadrado proposto em dois quadrados. Propomos portanto dividir 16 em dois quadrados. (DIOFANTO, 1959 *apud* ANDRADE, 2000 p.42)

O problema reduz-se a encontrar uma solução racional para a equação $k_1^2 + k_2^2 = 16$.

> Consideremos que o primeiro número é 1 quadrado aritmo. Temos então que o outro número será 16 unidades menos 1 quadrado aritmo. É portanto necessário que 16 unidades menos 1 quadrado de aritmo seja igual a um quadrado.
> Formemos o quadrado duma quantidade qualquer de aritmos diminuída de tantas unidades quantas a raiz de 16 unidades. *Que* seja o quadrado de 2 aritmos menos 4 unidades. Esse quadrado será portanto 4 quadrados de aritmo mais 16 unidades menos 16 aritmos. Igualemos isso às duas partes os termos negativos, e retiremos os semelhantes dos semelhantes. Vem que 5 quadrados de aritmos são iguais a 16 aritmos, e o artimo vale ${}^{16}/_{5}$. Temso então que um dos números será ${}^{256}/_{25}$ e o outro será ${}^{144}/_{25}$. Ora, esses dois números adicionados v elem ${}^{400}/_{25}$, que é 16 unidades, a cada um deles é um quadrado. (DIOFANTO 1959, *apud* ANDRADE, 2000 p.42)

Diofanto supôs que k_1 fosse 1 aritmo, isto é, $k_1 = x$. Em seguida considerou que $k_2 = ax - 4$ (um certo número de aritmos menos 4 unidades) e escolheu um caso particular: $k_2 = 2x - 4$. Calculou o quadrado de cada um dos números: $k_1^2 = x^2$ enquanto que o outro quadrado é $k_2^2 = (2x-4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$. Por fim, escreveu a equação que traduzia o problema e a resolveu:

$$x^2 + 4x^2 + 16 - 16x = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 16 - 16x + 16x = 16 + 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 16 = 16 + 16x \Leftrightarrow 5x^2 = 16x \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

■

No final, e uma vez que já tinha obtido o valor do aritmo, calculou o valor das incógnitas envolvidas no problema:

$k_1^2 = x^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$ e $k_2^2 = (2x-4)^2 = \left(\frac{32}{5} - 4\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$.

Confirma-se que $k_1^2 + k_2^2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16$.

■

É curioso referir que foi junto a este problema que Fermat[18] enunciou, na margem do seu exemplar da *Aritmética* de Diofanto, o famoso resultado conhecido como "Último

[18] Pierre de Fermat (1601- 1665) foi um magistrado, entusiasta matemático e cientista francês. Fez diversas contribuições para o cálculo geométrico, infinitencimal e na teoria dos números.

Teorema de Fermat", só demonstrado há relativamente pouco anos, mais de 350 anos da sua morte.

Concluímos assim que os gregos deram contribuições importantes para à matemática, principalmente na geometria. Começaram a construir uma nova matemática, baseada em definições mais elaboradas, teoremas, axiomas, postulados e tudo isto está provado no livro *Os Elementos*. Mas não foram só Euclides e Diofanto os responsáveis pela matemática grega. Tivemos, dentre outros, Pitágoras, a quem é atribuído o "Teorema de Pitágoras", um dos mais famosos teoremas da matemática; Apolônio, autor do famoso Tratado das Cônicas, Ptolomeu, com a sua obra *O Almagesto*, livro voltado para a teoria matemática dos movimentos do sol, da lua e dos planetas dentre outros.

3 **CIVILIZAÇÃO ÁRABE**

Nos primeiros séculos depois de Cristo houve muitas mudanças no mundo. O Império Romano atingiu seu ápice no final do século II, mas em 395 o Império dividiu-se em dois: Império Romano do Ocidente,, cuja capital era Roma e Império Romano do Oriente, onde a cultura acumulada na Antiguidade Clássica ainda sobrevivia.

Por volta do ano 570, na cidade de Meca, na Arábia, nasceu Maomé, destinado a criar um império que veio a sacudir o mundo desde a Europa até a Índia. Aos 40 anos, Maomé começou sua pregação pública, que mais tarde foi compilada no Corão. Unidos pelos ensinamentos de Maomé, os muçulmanos completaram a conquista de toda Península Arábica e das regiões fronteiriças da Síria e do atual Iraque em 632. A partir daí, outros países foram caindo em sequência e, em poucas décadas, o império muçulmano chegou à fronteira da Espanha com a França, no Ocidente, e à Índia no Oriente.

A Mesopotâmia, através do governo dos Sassânidas[19] (reis persas que governaram a Mesopotâmia, como Ciro e Xerxes), recuperou sua posição central ao longo das rotas comerciais que sob o domínio romano e heleno havia perdido.

Depois da conquista árabe, em 641 teve origem Bagdá, em substituição à Babilônia, que havia desaparecido. A matemática do período islâmico revela a mesma mistura de influências que se tornaram familiares em Alexandria e na Índia. Certamente houve uma importante influência que veio dos matemáticos hindus.

Em pouco tempo os califas, palavra que significa sucessor (de Maomé), influenciados pelo legado deixado pelo helenismo em Damasco, reconheceram a importância do saber e das artes e passaram a patrociná-los. Os califas de Damasco, os chamados Omíadas, perderam o poder político para os abássidas, da região onde situa-se o Iraque, em 750. Bagdá se tornou capital do império árabe em 772 e somente na Espanha, com capital em Córdoba, sobreviveram descendentes dos Omíadas. Em ambas as partes do mundo islâmico o progresso científico e cultural foi grande e rápido.

O califa al-Mansur (reinou de 754 a 775), que construiu Bagdá às margens do rio Tigre, desejou fazer dela uma nova Alexandria e para lá atraiu sábios de várias regiões, inclusive judeus e cristãos. Em 773, uma delegação de astrônomos e matemáticos hindus

---

[19] O império Sassânida foi o último Império Persa pré-islâmico. Foi fundado por Artaxes I e durou mais de 400 anos (224 - 651).

visitou sua côrte e explicou a ele e a seus eruditos como trabalhar com o eficiente sistema indiano de numeração, logo adotado pelos sábios de Bagdá. O califa Harum al-Rashid (reinou de 786 a 809), imortalizado nos *Contos das 1001 Noites*, cercou-se de sábios e artistas e, inclusive, ordenou que os Elementos fossem vertidos para o Árabe . Este fato foi de suma importância pois, muito mais tarde, essa foi a fonte a que a Europa recorreu para reencontrar os perdidos ensinamentos de Euclides. Seu filho, al-Manun, que reinou entre 813 e 833, continuou a obra do pai e determinou a pesquisa e a tradução para a língua árabe de todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados, criando em Bagdá uma escola cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde a que existira em Alexandria. Assim foram salvas importantes obras como"*Os Elementos*", de Euclides, "*O Almagesto"* de Ptolomeu, e de outros autores, como Arquimedes, Apolônio, todos gênios da Antiguidade Clássica. Estes clássicos estariam perdidos para nós sem os árabes,, por causa do fechamento da escola de Atenas por Justiniano.

As atividades matemáticas árabes começaram com a tradução dos *Siddanthas*[20] hindus. Al-Mamun convidou para a sua côrte muitos dos melhores cientistas do mundo e entre eles estava o famoso astrônomo e matemático Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi (783 - 850). Tendo-lhe sido solicitado por Al-Mamun que produzisse uma obra popular sobre as equações, ele escreveu o livro *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala* cuja tradução ao pé da letra é *Breve tratado sobre o cálculo de restauração e comparação*. É importantíssimo também falar que Mohammed Ben Musa Al-Khowarizmi foi o primeiro autor islâmico que escreveu "sobre a solução de problemas por al-jabr[21] e al-muqabala".

Por jabr, entende-se a operação de somar um número ou expressão algébrica a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Também se diz jabr a operação de multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número, para eliminar frações.

Al-Khowarizmi escreveu vários tratados sobre matemática e astronomia, que explicavam o sistema de numeração hindu. As escolas passaram a ensiná-lo e, em algumas

---

[20] Siddhãnta é um termo estabelecido dentro da filosofia hindu que denota uma linha específica de desenvolvimento dentro de uma tradição religiosa ou filosófica hindu. Literalmente "estabeleceu opinião o doutrina, dogma, axioma, verdade recebida ou admitida; qualquer livro de texto fixo ou estabelecido ou canônico sobre qualquer assunto.

[21] Foi a partir de al-jabr, que significa restauração, que nasceu a palavra álgebra e foi a partir do próprio nome Al-Khowarizmi que nasceu a palavra algoritmo e também a palavra algarismo.

décadas, o novo sistema de numeração estava sendo usado pelas pessoas do povo, em particular os comerciantes. E foi na extensa fronteira entre os mundos cristão e muçulmano que os europeus, realizando transações comerciais com árabes, tiveram seus primeiros contatos com um outro tipo de Aritmética.

Outro matemático brilhante foi Omar Khayyam. Ele escreveu uma álgebra que continha uma investigação sistemática de equações cúbicas, utilizando a interseção de duas seções cônicas.

Como responsáveis de todos estes progressos há a destacar nomes como Al Khowarizmi, Abu Kamil, Al Khayyam e Al Qalasadi e dentre estes Al Khowarizmi apresentou resultados importantes no estudo e resolução da equação do 2º grau.

3.1 **Al Khowarizmi**

Abu Abd Allah Mohammed Ben Musa Al Khowarizmi viveu entre 780 e 850. Era originário de Khazen e foi um dos matemáticos que pertenceram à *"Casa da Sabedoria"*. Foi em Bagdad, o novo centro da Matemática do mundo após Alexandria, que Al Khowarizmi escreveu, entre 813 e 833, o seu célebre livro *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala* cuja tradução ao pé da letra é *Breve tratado sobre o cálculo de restauração e comparação*. Foi da deturpação do termo al-jabr e da extensão do nome à resolução das equações que, no século XIV, surgiu a palavra álgebra. Provavelmente foi a partir deste pequeno tratado que nasceu a álgebra como disciplina e com tudo o que é adjacente: nome, objetos, algoritmos, demonstrações, aplicações, etc.. E esse é o motivo principal pelo qual Al Khowarizmi é considerado por muitos o "Pai da Álgebra". Vale destacar que a forma como o autor apresenta a álgebra é simples e prática, sendo o seu conteúdo bastante próximo da álgebra elementar dos nossos dias.

Saliente-se porém que o livro do "Pai da álgebra" era destinado ao público em geral. Al Khowarizmi, no prefácio do seu livro, confirmou tal fato quando escreveu:

> "...fui encorajado a escrever um pequeno trabalho sobre o cálculo de al-jabr wa al-muqabala, e ele contém tudo o que há de mais fácil e mais útil em aritmética, como aquilo que os homens necessitam constantemente para repartirem as suas heranças, seus donativos, suas partilhas, nas decisões, no comércio, e noutras transações que eles fazem entre eles, relativas a medição de terrenos, à escavação de canais, no cálculo geométrico, ou outros aspectos de vários tipos que possam surgir de novo." (RADFORD, 1993 *apud* ANDRADE, 2000 p.47)

Figura 34 - Al Khowaizmi

Fonte: < https://www.thoughtco.com/
al-khwarizmi-profile-1789065>

Figura 35 - Primeira página de *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*

Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Livro_da_Restaura%
C3%A7%C3%A3o_e_do_Balanceamento>

Um dos progressos da obra de Al Khowarizmi foi a introdução das equações na resolução dos seus problemas. As equações serviram de base a toda a sua obra, que como já vimos, deu origem à álgebra. As equações surgiram quando o autor tomou consciência de que números de diferentes espécies podiam ser iguais entre si:

> "Um número pertencente a uma classe pode ser igual a um número de uma outra classe; tu podes dizer por exemplo, "que quadrados são iguais a raízes' *ou* "que quadrados são iguais a números" *ou* "que raízes são iguais a números."" (RADFORD, 1993 *apud* ANDRADE, 2000 p.47)

Tendo em conta que apenas eram aceitos coeficientes e soluções positivas, as diferentes combinações possíveis entre os números das três classes existentes definiam os seis tipos de equações que deviam ser estudadas. Al Khowarizmi dividiu esses seis tipos de equações em dois conjuntos: três tipos de equações simples e três tipos de equações combinadas. São elas:

$$\text{Equações simples}\begin{cases}1^{\text{o}}\text{ tipo: quadrados iguais a raízes, } ax^2 = bx\\ 2^{\text{o}}\text{ tipo: quadrados iguais a números, } ax^2 = c\\ 3^{\text{o}}\text{ tipo: raízes iguais a números, } ax = b\end{cases}$$

$$\text{Equações combinadas}\begin{cases}4^{\text{o}}\text{ tipo: raízes e quadrados iguais a números, } x^2 + px = q\\ 5^{\text{o}}\text{ tipo: quadrados e números iguais a raízes, } x^2 + q = px\\ 6^{\text{o}}\text{ tipo: raízes e números iguais a quadrados, } px + q = x^2\end{cases}$$

Al Khowarizmi evitou sempre que possível as equações com soluções irracionais. Os exemplos apresentados tinham quase sempre coeficientes racionais e soluções inteiras. Os números que aparecem nas equações e a que nós hoje chamamos coeficientes não eram vistos como números que estavam a multiplicar pela raiz ou pelo quadrado, mas sim como as quantidades de raízes ou de quadrados que estavam envolvidas no problema.

Para reduzir uma equação quadrática qualquer à forma canônica, Al Khowarizmi apresentou dois processos: o de al-jabr e o de al-muqabala.

Aos nossos olhos, o processo de al-jabr consiste em desembaraçarmo-nos de sinais (-) que aparecem na equação, bastando para isso passar termos negativos da equação de um membro para outro, trocando-lhes o sinal. Tendo introduzido os números naturais, Al Khowarizmi não aceitava termos negativos; para ele existiam números ou combinações incompletas de números de espécies diferentes. O processo de al-jabr consistia em restaurar, completando essa combinação de números naquilo que lhe faltava. Al Khowarizmi sabia que teria que juntar a mesma quantidade a ambos os membros da equação para que a igualdade continuasse válida. Então, vejamos o seguinte exemplo:

> "... a soma *é* cem mais dois quadrados sem vinte coisas, e isso é igual a cinquenta e oito dinheiros. Completa agora cem e dois quadrados sem vinte coisas juntando vinte coisas a cinquenta e oito; fica cem mais dois quadrados igual a cinquenta e oito e vinte coisas." (RADFORD, 1993 *apud* ANDRADE, 2000 p.48)

$$100 + 2x^2 - 20x = 58 \Leftrightarrow 100 + 2x^2 - 20x + 20x = 58 + 20x \Leftrightarrow$$
$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$

O processo de al-muqabala consistia em reduzir todos os termos da mesma espécie a um só, agrupando os vários termos semelhantes. O autor também considerava ser processo de al-muqabala a divisão de todos os termos da equação pelo número de quadrados que estavam envolvidos no problema. Continuemos com o exemplo anterior:

> "...fica cem mais dois quadrados igual a cinquenta e oito e vinte coisas. Reduz isso a um quadrado, tomando a metade de tudo o que tu tens. Isso dá: cinquenta dinheiros e um quadrado, que é igual a vinte e nove dinheiros e dez coisas. Então reduz isso, tomando vinte e nove de cinquenta, resta vinte e um e um quadrado igual a dez coisas." (ANDRADE, 2000 p.49)

$$100 + 2x^2 = 58 + 20x \Leftrightarrow 50 + x^2 = 29 + 10x \Leftrightarrow 50 - 29 + x^2 = 10x \Leftrightarrow$$
$$21 + x^2 = 10x$$

Note-se porém que a ordem pela qual os processos al-jabr e al-muqabala eram aplicados não era arbitrária. Se trocasse essa ordem, poderíamos ser conduzidos a uma expressão igual a zero (a qual não teria qualquer significado). Vejamos isso com um outro exemplo:

Suponhamos que temos a equação $17x^2 - 9x - 46 = 12x^2 - 3x - 44$. O processo de al-muqabala transfoma-la-ia na equação $5x^2 - 6x - 2 = 0$ que carecia de significado. Em contrapartida, o processo de al-jabr permitia obter $17x^2 = 12x^2 - 3x - 44 + 9x + 46$, e posteriormente, o de al-muqabala conduziria a $5x^2 = 6x + 2$.

Com os processos al-jabr e al-muqabala era possível transformar toda e qualquer equação quadrática em sua forma canônica. Depois, era só aplicar a essa equação (na sua forma canônica) o algoritmo correspondente. Para cada um dos seis tipos de equações, Al Khowarizmi apresentou um algoritmo. No caso das equações simples (1º, 2º e 3º tipo) foi dada a resolução por meio de exemplos, sem apresentar qualquer demonstração. Isso talvez se devesse ao fato de tais demonstrações serem simples e já conhecidas da restante comunidade matemática.

Nas equações combinadas (4º, 5º e 6º tipo) era dado o caso geral, mas a resolução algébrica (algoritmo) era apresentada por meio de um exemplo numérico concreto. Curiosamente, estas resoluções são idênticas às dadas pelos Mesopotâmios, o que nos permite imaginar que Al Khowarizmi recebeu esse conhecimento como herança.

3.1.1 Equações do tipo $ax^2 = bx$

> "Aqui temos um exemplo de quadrados iguais a raízes: um quadrado é igual a cinco das suas raízes. A raiz do quadrado é 5 e 25 constitui o próprio quadrado, que é evidentemente igual a 5 vezes a sua raiz. Vejamos outro exemplo:Um terço de um quadrado é igual a quatro vezes a raiz. A raiz do quadrado é 12, e 144 é o número que corresponde ao próprio quadrado.
> E agora, do mesmo modo, cinco quadrados são equivalentes a 10 raízes. Um quadrado é portanto igual a 2 raízes, a raiz do quadrado é 2, e 4 representa o quadrado. (...)" (CHESTER, 1997 *apud* ANDRADE, 2000 p.51)

Os exemplos e as respectivas resoluções apresentadas em simbologia atual correspondem a:

$$\text{Casos particulares: } \begin{cases} 1^{\underline{o}}\ exemplo: x^2 = 5x \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow x^2 = 25 \\ 2^{\underline{o}}\ exemplo: \frac{x^2}{3} = 4x \Leftrightarrow x^2 = 12x \Leftrightarrow x = 12 \Leftrightarrow x^2 = 144 \\ 3^{\underline{o}}\ exemplo: 5x^2 = 10x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \end{cases}$$

Caso geral: $ax^2 = bx \Leftrightarrow x^2 = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$

Esses tipos de equações eram resolvidos reduzindo o 1º membro da equação a um só quadrado, ou completando o quadrado, consoante a quantidade de quadrados fosse superior ou inferior a 1 respectivamente. Depois, dividia ambos os membros por x, obtendo o valor da raiz e assim o valor do quadrado era imediato. Note-se que a solução nula era simplesmente ignorada.

3.1.2 Equações do tipo $ax^2 = c$

> "Mostra-se do seguinte modo que quadrados são iguais a números:
> Um quadrado é igual a 9. O número 9 dá a área de um quadrado, daí que o número 3 seja a raiz.
> Do mesmo modo, quando estamos perante uma grande ou pequena quantidade de quadrados do quadrado procurado, devemos proceder a uma redução, que nos

> permita definir uma equivalência com um só quadrado. (...) Obtemos então uma equação que define em numeroso valor de um só quadrado.
> Se tivermos menos que um quadrado, por exemplo, se tivermos um terço, um quarto, ou a quinta parte de um quadrado ou de uma raiz, a equação deve ser tratada da mesma maneira, de modo que apareça, o valor do quadrado completo ou de uma só raiz. Examinemos o seguinte exemplo: Cinco quadrados são equivalentes a 80. Daí que um quadrado corresponda a uma quinta parte do número 80, que *é* evidentemente 16. Vejamos um outro exemplo: A metade de um quadrado é equivalente a 18. O quadrado inteiro vale portanto 36.
> Deste modo, todos os quadrados, qualquer que seja o seu número serão reduzidos a um só, ou a parte do quadrado será convertida num quadrado inteiro. É necessário proceder do mesmo modo no que concerne aos números que acompanham os quadrados." (CHESTER, 1997 *apud* ANDRADE, 2000 p.52)

Os exemplos e as respectivas resoluções apresentadas em linguagem atual são as seguintes:

Casos particulares: $\begin{cases} 1^{\underline{o}}\ exemplo: x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \\ 2^{\underline{o}}\ exemplo: 5x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = \frac{80}{5} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \\ 3^{\underline{o}}\ exemplo: \frac{1}{2}x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6 \end{cases}$

Caso geral: $ax^2 = c \Leftrightarrow x^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}}$

Essas equações são resolvidas reduzindo o 1º membro da equação a um só quadrado, dividindo ou multiplicando ambos os membros pelo mesmo número. Feito isso, o valor do quadrado e o valor da raiz seriam imediatos. Note-se que a raiz negativa nunca era considerada.

3.1.3 <u>Equações do tipo $ax = b$</u>

> "Para vermos o que é raízes iguais a números, vejamos o seguinte exemplo: Uma raiz é igual a 3. Daí que o número 9 seja o quadrado dessa raiz. Vejamos um outro exemplo: Quatro raízes iguais a 20. Então a raiz desse quadrado será igual a 5. Vejamos agora um outro exemplo: a metade de uma raiz é igual a 10. A raiz inteira é portanto igual a 20, daí que, é evidente que 400 represente o quadrado." (CHESTER, 1997 *apud* ANDRADE, 2000 p.53)

Casos particulares: $\begin{cases} 1^{\underline{o}}\ exemplo: x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \\ 2^{\underline{o}}\ exemplo: 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow x^2 = 25 \\ 3^{\underline{o}}\ exemplo: \frac{1}{2}x = 10 \Leftrightarrow x = 20 \Leftrightarrow x^2 = 400 \end{cases}$

Caso geral: $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$

Uma vez que nas equações do 1º tipo a solução era ignorada, as equações do 3º tipo têm uma resolução equivalente às do 1º tipo.

Com os exemplos apresentados, podemos concluir que o autor não procurava apenas o valor da raiz, nem apenas o valor do quadrado, mas ambos.

Vejamos agora os algoritmos e as demonstrações dadas por Al Khowarizmi para os três tipos de equações combinadas.

3.1.4 Equações do tipo $x^2 + px = q$

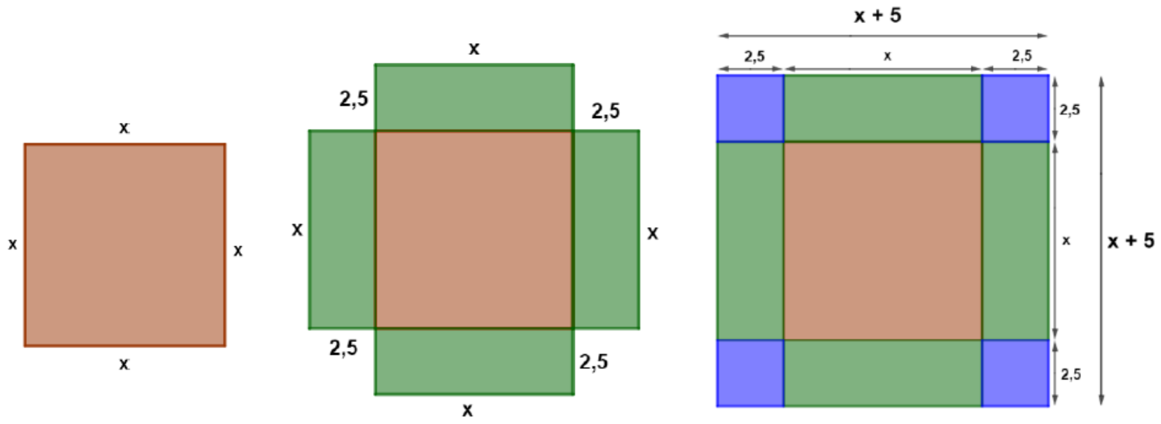
> "Quando os tesouros e as raízes são iguais a um número, é como quando tu dizes: um tesouro e dez das suas raízes são iguais a trinta e nove dinheiros.
> O seu significado é que ao teu bem, se lhe juntares o equivalente a dez das suas raízes, atinge trinta e nove. O processo de resolução consiste em dividir as raízes por dois, que é cinco neste problema. multiplicá-lo por si próprio que dá vinte e cinco. Junta o que obtiveste aos trinta e nove. Isso dará sessenta e quatro. Tomas então a sua raiz quadrada que é oito e retiras-lhe a metade do número das raízes que são cinco. Resta três que é a raiz do bem que tu procuras e o bem é nove." (DJEBAR, 1996, *apud* ANDRADE, 2000 p.54)

Este problema reduz-se à resolução da equação $x^2 + 10x = 39$, que é do tipo $x^2 + px = q$.

O algoritmo seguido pelo autor foi $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$, que para o caso geral corresponde a $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Demonstração: Al khowarizmi representa o bem procurado (x^2) por um quadrado de lado desconhecido (x). Pelo fato do problema proposto ser "um quadrado e dez das suas raízes é igual a 39, ele juntou ao quadrado inicial uma superfície cuja área é $10x$, subdividido em quatro retângulos iguais cujos lados são x e $2{,}5$. Obteve assim a seguinte figura:

Figura 36 - Solução geométrica da equação $x^2 + px = q$ dada por Al Khowarizmi



Legenda: (a) quadrado de lado x; (b) juntou-se 4 retângulos de lados x e 2,5 a figura anterior; (c) obtemos um quadrado de lado $x + 5$.

Fonte: O autor, 2018.

Pelas condições do problema, área da figura 38b) é 39. Para completar esta figura, de modo a obter um quadrado, falta em cada um dos 4 cantos, 1 pequeno quadrado de lado $2{,}5$. A área total desses quadrados é $4 \cdot 2{,}5^2 = 25$.

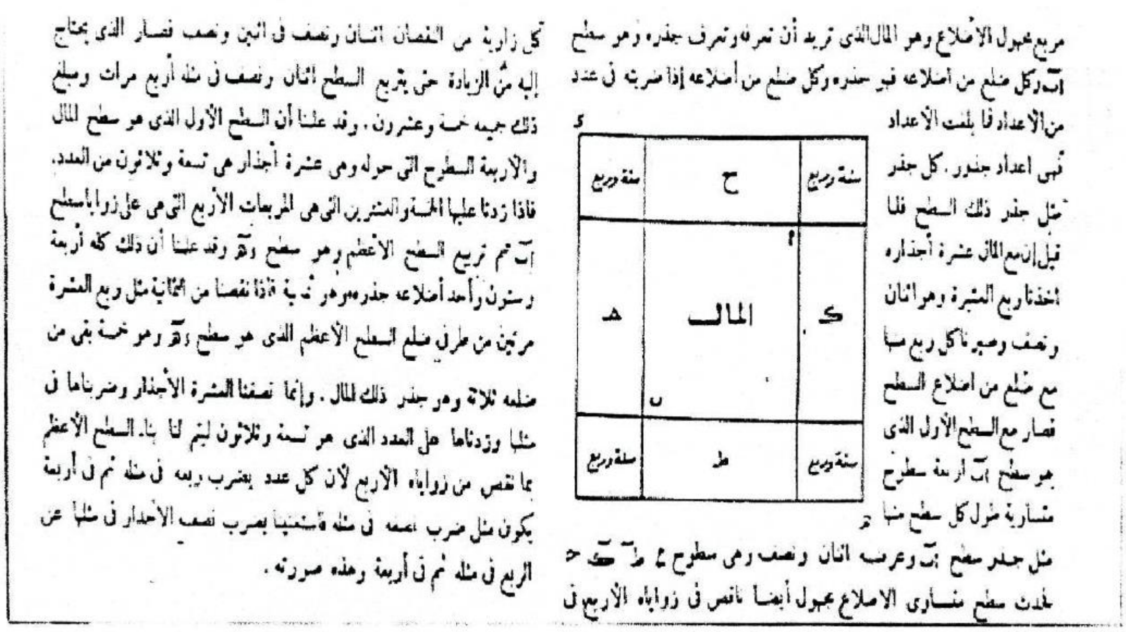
Juntando esses quatro quadrados, obtém-se a figura 38c), cuja área será $39 + 25 = 64$. Sendo assim, o lado do quadrado maior é $\sqrt{64}$, que é 8. Logo, o lado do quadrado inicial é $8 - 2 \cdot 2{,}5 = 3$. Está assim encontrado o valor da raiz e a área do quadrado completo vale 9.

■

Mas observe que existem algumas diferenças entre os cálculos feitos na resolução numérica e os cálculos feitos na resolução geométrica do mesmo problema. Os cálculos feitos na resolução numérica foram $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$ enquanto que na resolução geométrica foram $x = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 2 \cdot \frac{10}{4}$. Apesar das duas fórmulas serem obviamente equivalentes, Al Khowarizmi explicou a pequena diferença que existe entre elas:

> "Nós dividimos a meio as dez raízes, multiplicamos o resultado por si próprio, e juntamos o resultado ao número que é trinta e nove, a fim de completar a construção da superfície maior, naquilo que lhe faltava nos seus quatro cantos, pois todo o número cujo quarto é multiplicado por si próprio, e depois por quatro, é como o produto da sua metade por si própria.
> Somos portanto dispensados de multiplicar o quarto por si próprio, e depois por quatro, multiplicando apenas a metade por si própria." (DJEBAR, 1996 *apud* ANDRRADE, 2000 p.56)

Figura 37 - Parte do livro Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa muqabala onde aparece a demonstração acima



Fonte: ANDRADE, Bernardino Carneiro de. A Evolução Histórica de Resolução das Equações do 2º Grau, 2000 p.55

3.1.5 Equações do tipo $x^2 + q = px$

> "Quando os quadrados e os números são iguais às raízes é como quando tu dizes: Um quadrado e vinte e um em número é igual a dez das suas raízes. Isto vale também para o teu bem, que é tal que se lhe juntares vinte e um dinheiros, a soma que daí resulta é igual a dez raízes desse bem. O método de resolução consiste *no* seguinte:
> Toma metade das raízes, isto é cinco. Multiplica-as por elas próprias, dá vinte e cinco. Retira-lbe os vinte e um que é o que nós dissemos que está junto do quadrado, restará quatro. Toma a sua raiz que é dois. Retira esse valor à metade das raízes que são cinco. Restam três. Isso é a raiz do quadrado que tu procuras e o quadrado é nove.
> Se tu quiseres, junta a raiz de quatro à metade das raízes. Isso dá sete que é também a raiz do quadrado que tu procuras, e o quadrado é quarenta e *nove."* (I.R.E.M de Paris VII (M.A.T.H.), 1990 *apud* ANDRADE, 2000 p.57)

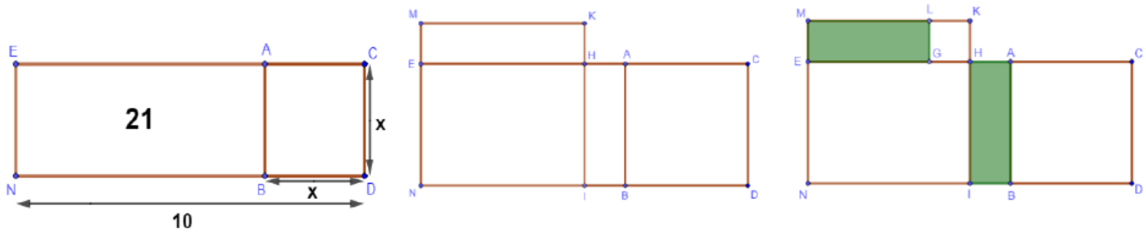
Em linguagem atual, o problema se reduz a resolver a equação $x^2 + 21 = 10x$, que é do tipo $x^2 + q = px$.

O algoritmo dado para resolver esta equação foi: $x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$, que corresponde no caso geral a $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Note-se que esta equação tem duas soluções positivas. Para obter a outra solução, como o próprio autor referiu, basta alterar a última operação (que foi indicada no algoritmo) para uma adição. O valor da segunda solução é $x = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7 \Leftrightarrow x^2 = 49$, que corresponde a $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Demonstração: Al khowarizmi representa o quadrado (x^2) por uma superfície quadrada $ABCD$ de lado desconhecido (x). Em seguida, e sobre um dos lados do quadrado contrói um retângulo de área igual a 21; trata-se do retângulo $ABNE$. Pelas condições do problema $(x^2 + 21 = 10x)$, conclui-se que o comprimento desse retângulo tomado com o lado do quadrado inicial vale 10. A figura completa é $CDNE$, e vale 10 raízes do quadrado. A seguir, o autor do livro dividiu o segmento $\overline{CE}$ ao meio no ponto H, (e consequentemente o segmento $\overline{ND}$ no ponto I e construiu um quadrado sobre esse lado (o lado desse quadrado corresponde a metade do número das raízes). Para terminar, construiu no canto superior direito de $MNIK$ um quadrado sobre o lado KH.

Figura 38 - Solução geométrica dada por Al Khowarizmi da equação $x^2 + 21 = 10x$



(a) (b) (c)

Legenda: (a) representação geométrica da equação $x^2 + 21 = 10$; (b) dividir o segmento $\overline{EC}$ ao meio no ponto H; (c) contrução do quadrado $MNIK$ sobre o lado KH.

Fonte: O autor, 2018

Por hipótese e por construção, temos que a área de $ABCD$ é x^2 e a de $ABNE$ é 21. Pelas condições do problema $(x^2 + 21 = 10x)$ temos que a superfície $CDNE$ vale $10x$, isto implica que o segmento $\overline{ND}$ mede 10. Como I é o ponto médio de $\overline{ND}$ e $\overline{NK}$ é um quadrado, temos que $MKIN$ vale $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$.

Como por construção $MK = KI$ e $KL = KH$, concluiu-se que $ML = HI$. Além disso, como $LG = KH = HA$, concluimos que as superfícies $MLGE$ e $ABIH$ são iguais. De tudo o que vimos, conclui-se que:

$$\begin{aligned} área\ de\ GHKL &= área\ de\ IKMN - (área\ de\ EHIN + área\ de\ EGLM) \\ &= área\ de\ IKMN - (área\ de\ EHIN + área\ de\ ABIH) \\ &= área\ de\ IKMN - área\ de\ ABNE \\ &= 25 - 21 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Daí se conclui que $\overline{HG} = 2$. Como $\overline{HG} = \overline{HA}$ vem que $x = \overline{CA} = \overline{HC} - \overline{HA} = 5 - 2 = 3$, ficando assim resolvido o problema.

■

O fato de as equações do 5º tipo poderem ter mais do que uma solução positiva não passou desapercebido por Al Khowarizmi, e como tal foi explorado. Ele explicou como se pode ver, de inicio, se uma equação deste tipo tem ou não soluções, e caso as tenha quantas são. Este estudo corresponde a estudar o sinal do que chamamos de binômio discriminante.

Al Khowarizmi alerta ainda para o fato de existirem alguns problemas que conduzem a equações deste tipo, que podem ter duas soluções, embora só uma dessas soluções satisfaça as condições iniciais do problema: neste tipo de situações é, portanto, necessário fazer as respectivas verificações. Mas vejamos tudo isto nas próprias palavras de Al Khowarizmi:

> "Se tu encontrares um problema que se reduza a este caso, verifica a sua validade pela adição, se ela não (se verificar), ela será então necessariamente verificada pela subtracção.
> Este caso resolve-se pela regra da adição, e pela da subtracção, e isto não se passa assim nos outros casos entre os três onde há necessidade de tomar a metade das raízes.
> Aprende também *que*, neste caso, se nós tomarmos metade das raízes, e se as multiplicarmos por elas próprias, [e se] o resultado for inferior aos dinheiros que estão junto do quadrado, então o problema será impossível.
> Se for igual ao número de dinheiros, a raiz do quadrado é portanto exactamente igual a metade das raízes sem qualquer aumento ou diminuição" (I.R.E.M de Paris VIII (M.A.T.H.), 1990 *apud* ANDRADE, 2000 p. 62)

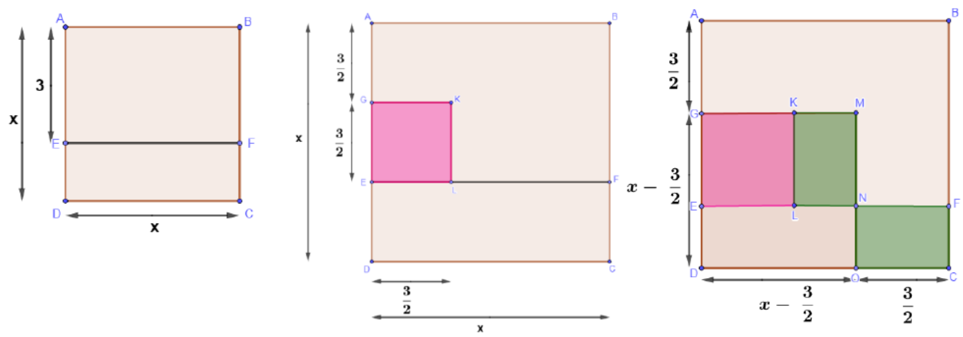
3.1.6 Equações do tipo $px + q = x^2$

> "Para as equações deste tipo, propomos o seguinte: 5 raízes e 4 números são iguais a um quadrado (...) Divide-se por 2 o número das raízes; obtém-se $1\frac{1}{2}$; multiplicamos de seguida esse número por ele próprio, faz $2\frac{1}{4}$. A esse número junta-se 4, faz $6\frac{1}{4}$. Extrai-se a raiz quadrada desse número; obtém-se $2\frac{1}{2}$. Junta-se essa raiz a metade do número das raízes, isto é $1\frac{1}{2}$, obtém-se 4, que corresponde a raiz do quadrado. O quadrado no seu conjunto vale 16." (CHESTER, 1997 apud ANDRADE, 2000 p.63)

O problema traduz-se pela equação $3x + 4 = x^2$, que é do tipo $px + q = x^2$. O algoritmo apresentado foi $x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$, que corresponde no caso geral a $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

Demonstração: Al Khowarizmi representa o quadrado (x^2), por uma superfície quadrada (AC) de lado desconhecido (x). De seguida, divide esse quadrado em duas partes marcando o segmento $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AB}$ e tal que $\overline{AE}$ seja igual a 3 (o número das raízes). Assim sendo, temos que (EB) vale $3x$ e pelas condições do problema conclui-se que $(\overline{EC})$ vale 4. A seguir, Al Khowarizmi divide o segmento $\overline{AE}$ ao meio no ponto G e desenha um quadrado sobre o lado $\overline{GE}$ ($\overline{GE}$ representa metade do número das raízes). Para obter a figura dada, o autor da obra construiu um outro quadrado (GO), agora sobre o lado GD.

Figura 39 - Solução geométrica dada por Al Khowarizmi da equação $3x + 4 = x^2$



(a) (b) (c)

Legenda: (a) Marca-se o segmento $\overline{EF}$ paralelo ao lado $\overline{CD}$ do quadrado $ABCD$ de área x^2; (b) divide-se o segmento $\overline{AE}$ ao meio o ponto G e desenha-se um quadrado sobre o lado $\overline{GE}$; (c) constroí-se o quadrado $GMOD$ sobre o lado GD.

Fonte: O autor, 2018

A demonstração em linguagem e simbologia atual (embora de uma forma mais simplificada) consiste no seguinte:

Por hipótese e por construção temos que (AC) vale x^2 , (AF) vale $3x$ e, consequentemente (EC) vale 4. Temos também que o segmento $\overline{AE}$ mede 3.

Como (AC) é um quadrado, vem que $\overline{AD} = \overline{DC}$. Como (DM) também é um quadrado, vem que $\overline{GD} = \overline{DO}$. Daí se conclui que $\overline{OC} = \overline{AG}$. Mas $\overline{AG} = \overline{GE}$ (uma vez que G é o ponto médio de $\overline{AE}$) e $\overline{GE} = \overline{KL}$ (porque são ambos lados do quadrado GL); daí se tira que $\overline{OC} = \overline{KL}$.

Como $GMOD$ é um quadrado, vem que $\overline{GM} = \overline{MO}$. Como $GKLE$ também é um quadrado vem que $\overline{GK} = \overline{GE}$, que por sua vez é igual a $\overline{MN}$, daí se tira que $\overline{KM} = \overline{NO}$.

Como os quadrados $KMNL$ e $NFCO$ possuem os mesmos comprimentos, eles são iguais. Então:

$$\begin{aligned} área\ de\ GMOD &= área\ de\ GKLE + (área\ de\ DENO + área\ de\ KMNL) \\ &= área\ de\ GKLE + (área\ de\ DENO + área\ de\ CONF) \\ &= área\ de\ GKLE + área\ de\ CDEF \\ &= 2\tfrac{1}{4} + 4 \\ &= 6\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Daí se conclui que $\overline{GD} = 2\frac{1}{2}$. Então $x = \overline{AD} = \overline{AG} + \overline{GD} = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$. O quadrado inteiro vale portanto 16. Fica assim resolvido o problema.

■

Para terminar saliente-se que apesar de Al Khowarizmi dar uma apresentação completa de todos os tipos de equações do 2º grau, a parte final do seu livro, que ocupa mais de metade da obra, consiste na apresentação de problemas resolvidos (acerca de homens, heranças ou terras etc.).

Do exposto podemos perceber que o desenvolvimento das equações do 2º grau dado pelos árabes foi muito positivo, apresentando um método mais algébrico do que geométrico, que foi aquele apresentado por Diofanto. É nítido que essas contribuições foram importantes para o que conhecemos atualmente, sobre a maneira de encontrarmos a solução de uma equação do 2º grau.

4 **CIVILIZAÇÃO HINDU**

Escavações arqueológicas ocorridas em Mohenjo Daro nos dão uma indicação de uma civilização muito antiga e de uma cultura muito alta na Índia, ocorrida na mesma época em que eram construídas as pirâmides no Egito. Posteriormente o país foi ocupado pelos invasores arianos que impuseram o sistema de castas, o qual trouxe um atraso muito grande ao desenvolvimento. Estes invasores arianos desenvolveram na Índia a literatura sânscrita. Na mesma época em que Pitágoras começou a desenvolver seus teoremas e axiomas na Grécia, Buda agia na Índia.

Os indianos dos primeiros tempos foram exterminados por volta de 1500 a.C. Este país tinha vários pequenos principados desunidos, o que propiciou muitas invasões em seu território (arianas, persas, gregas, árabes e ingleses). Estes invasores se estabeleceram como classe dominante, evitando a miscigenação com o povo nativo.

Entre 3000 a.C. e 1500 a.C. viveu na Índia um povo, da região do rio Indo, que cultivava a agricultura e morava em cidades. Este povo foi destruído pelos arianos. Entre 1500 a.C. e 500 a.C. os arianos desenvolveram o hinduísmo, combinação de religião, filosofia e estrutura social, a qual veio a desenvolver a base de sua civilização. O hinduísmo é um conjunto de crenças e leis que se baseia em três ideias principais: culto a um grande número de deuses, transmigração da alma e o sistema de castas que dividia rigidamente a sociedade indiana em quatro classes: Brahmana (sacerdotes), kshatriya (guerreiros), vaisya (comerciantes e artesãos) e sudra (camponeses).

Sidarta Gautama (Buda), por volta de 500 a.C. se revolta contra esta filosofia. O budismo foi uma resposta ao caos e à agitação desta época, encontrando muitos adeptos, principalmente entre os pobres. Até começar a declinar, por volta de 500 d.C. o budismo já havia se espalhado pela China, Japão e sudeste asiático.

Em 320 a.C. Chandragupta Mauria unificou todos os pequenos estados indianos e estabeleceu o império Mauriano, seguido pelo seu neto Açoka (272-232 a.C.). Em 185 a.C. o império voltou a se desintegrar e ficar dividido em pequenos estados. Da queda do império mauriano até 200 d.C. houve um grande desenvolvimento cultural, por meio da literatura, arte, ciência e filosofia. Em 320 d.C. a Índia foi novamente unificada por Chandragupta I, originando o império dos Gupta, que se manteve até 470 d.C., o qual é considerado a era clássica da Índia.

Com a invasão dos árabes, o islamismo foi introduzido na Índia, conquistando partes da Índia ocidental nos séculos VIII, IX e X. Em 1206 Kutb ud-Din-Aibak fundou o sultanato muçulmano de Dehli. Em 1526 Babur instala o império Mogol (Turco). No século XVII a Índia é invadida pelos Ingleses que exercem uma tirania muito grande contra a sua população.

A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático.

A Índia, assim como o Egito, tinha seus "esticadores de corda". As primitivas noções geométricas tomaram corpo no escrito conhecido como Sulvasutras[22]. Este escrito tem três versões, sendo que a mais conhecida tem o nome de Apastamba. Nesta primeira versão, da mesma época de Pitágoras, são encontradas regras para construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formam tríadas pitagóricas. Este escrito, provavelmente, sofreu influência babilônica, visto que estas tríadas encontram-se nas tábuas cuneiformes.

Após a publicação dos Sulvasutras, surgiram os "Siddhantas" (sistemas de astronomia), marcando o renascimento da cultura sânscrita. A trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os ângulos centrais que subentendem. Para os autores dos Siddhantas, a relação ocorre entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda.

Muitos dos resultados obtidos pelos matemáticos gregos chegaram ao conhecimento dos hindus por intermédio dos árabes. Os hindus ampliaram-nos sob alguns aspectos e traduziram-nos para a sua língua e exprimiram-nos com eloquência poética. Vejamos o exemplo de um problema sugerido por Bhaskara Akaria[23], cujo enunciado era o seguinte: " Linda donzela de olhos cintilantes, se conheces o método do retorno diz-me: qual é o número que, multiplicado por 3, acrescido de 3/4 deste produto, dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, elevado ao quadrado, diminuído de 52, acrescido de 8 e dividido por 10, dá como resultado o número 2? "

---

[22] Os sulvasutras tratam dos conhecimentos teóricos necessários para a construção de altares. Eles são escritos em versos, e parecem terem sido escritos em torno de 600 a.C. Surgem aqui pela primeira vez as equações do 2º grau, sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem que sejam apresentadas soluções.

[23] Bhaskara Akaria, também conhecido como Bhaskara II ou Bhaskaracharya, nasceu na cidade de Vijayapura, na Índia, em 1114, e viveu até meados de 1185. Foi professor, astrólogo e astrônomo, e foi chefe do observatório astronômico de Ujjain, escola de matemática muito bem conceituada no período. Bhaskara morreu aos 71 anos de idade, em Ujjain, na Índia.

Outro matemático hindu foi Brahmagupta. Ele foi um dos primeiros a usar números negativos, o zero em operações aritméticas e desenvolveu um método de resolução de equações do 2º grau.

Figura 40 - Brahmagupta

Fonte: < https://www.somatematica.com.br/ biograf/ brahma.php>

Sobre os matemáticos indianos, Pedroso (2000) nos diz

> A matemática hindu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre os quais destacam-se Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahamagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc. XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação do 2º grau ao resolver problemas. Segundo o próprio Bhaskara a regra que usava e que originou a fórmula atual era devido a Sridhara e que curiosamente é chamada, somente no Brasil, de Fórmula de Bhaskara. (PEDROSO, 2010 p. 6)

Os hindus construíram um sistema de numeração próprio. Os hindus resolviam muitos dos problemas aritméticos usando a falsa posição. Sobre esse sistema, Pedroso (2010) destaca:

ya	(abreviação de *yavattavat*) era a primeira incógnita;
ka	(*kalaka* ou “negro”) era a segunda incógnita;
v	(varga) significava “quadrado”;
.	Um ponto sobre o número indicava que ele era negativo;
bha	(*bhavita*) significava “produto”;
k(a)	representava *karana* (“irracional” ou “raiz”);
ru	representava *rupa* (número “puro” ou “comum”).

(PEDROSO, 2010 p. 6)

Mostraremos um exemplo elaborado por Brahmagupta mostrando o uso de seu sistema de numeração, no qual o primeiro membro era escrito em uma linha e o segundo a linha de baixo e apresentado por Pedroso (2010).

Tabela 2 - Tradução da linguagem hindu para a atual

Notação Hindu	**Notação Atual**
ya v ya 10 ru 9	$x^2 - 10x = -9$
ya ka 7 bha k(a) 12 ru 8 ya v 3 ya 10	$7xy + \sqrt{12} - 8 = 3x^2 + 10x$

Fonte: Pedroso, 2010 p.6

Note que o problema parecia complexo, mas ao passarmos para a notação atual recaímos em uma representação comum nos dias de hoje.

Sobre a matemática dos hindus Boyer (2001) afirma:

> A matemática indiana era, como dissemos, uma mistura de bom e ruim. Mas parte do bom era magnificamente bom, e aqui Brahmagupta merece grande louvor. A álgebra hindu é especialmente notável em seu desenvolvimento da análise indeterminada, à qual Brahmagupta fez várias contribuições. Por exemplo em sua obra achamos uma regra para a formação de tríadas pitagóricas expressas na forma $m, \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n-m}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n+m}\right)$; mas isso é apenas uma forma modificada da antiga regra babilônica, que ele pode ter conhecido. A fórmula de Brahmagupta para a área do quadrilátero, mencionada acima, foi usada por ele em conjunção com as fórmulas $\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$ e $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ para as diagonais, para achar quadrados cujos lados, diagonais, e áreas sejam todos racionais, entre esses estava o quadrilátero de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$, e diagonais 63 e 56. Brahmagupta deu a área "bruta" como sendo 1933 ¾, apesar de sua fórmula fornecer a área exata, 1764, nesse caso. (BOYER, 2001 p. 125)

Além de Brahmagupta, Bhaskara Akaria foi um dos últimos grandes matemáticos hindus até aos tempos modernos. Ele escreveu seis livros comprovados que são: S*iddhantasiromani*, dedicado a assuntos astronômicos; Lilavati; B*ijaganita*, um tratado sobre Álgebra; V*asanabhasya de Mitaksara; Karanakutuhala* ou *Brahmatulya; e Vivarana*.

Figura 41 - Bhaskara Akaria

Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Bhaskara_Akaria>

O livro *Siddhantasiromani* foi escrito em 1150 e está dividido em duas partes: Goladhyaya-Esfera Celeste e Granaganita-Matemática dos Planetas. Esses dois livros tratam sobre trigonometria e matemática aplicada à astronomia. Nesta obra encontram-se a soma e diferença de senos de dois ângulos, ou seja, $sen(a+b) = sen\ a \cdot \cos b + sen\ b \cdot \cos a$ e $sen(a-b) = sen\ a \cdot \cos b - sen\ b \cdot \cos a$.

Lilavati (significa formosa e bela, em sânscrito), é a sua obra mais importante e leva o nome de sua filha. O livro foi composto em forma de poema com 278 versos e possui finalidade lúdica. Este livro ganhou grande popularidade na Índia durante o tempo de Akbar (1556-1605). Foi sob a ordem deste imperador que Abul Faizi, o poeta da corte, preparou a tradução integral, o Tarjamah-i-Lilavati em 1587 d.C.. Refere-se a vários assuntos,tais como: sistema de numeração, operações fundamentais, frações, regra de três simples e composta, misturas, porcentagem, progressões, geometria e equações indeterminadas, ou diofantinas, quadráticas e também a equação de Pell.

Vejamos um problema do *Lilavati*.

> O quadrado da quinta parte do número de macacos de um bando, subtraída de 3 macacos, entra numa caverna; e um macaco ca fora pendurado numa árvore. Diga quantos são os macacos. (PEDROSO, 2010 p. 7)

Em notação atual tem-se: $\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^2 + 1 = x$ ou $x^2 - 55x + 250 = 0$.

Outro problema do *Lilavati*:

> A raiz quadrada do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto $\frac{8}{9}$ do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor. Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas. (PEDROSO, 2010, p. 7)

A solução dada por Bhaskara, segundo Pedroso (2010) foi:

Seja *ya v* 2 o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$ o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é *ya* 1	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é *ya v* $\frac{16}{9}$	Oito nonos de todo o enxame é $\left(\frac{16}{9}\right)x^2$
A soma da raiz quadrada com a fração e o casal de abelhas é igual à quantidade de abelhas do enxame, isto é, *ya v* 2	$x + \left(\frac{16}{9}\right)x^2 + 2 = 2x^2$
Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em *ya v* 18 *ya* 0 *ru* 0 *ya v* 16 *ya* 9 *ru* 18	$\frac{9x + 16x^2 + 18}{9} = \frac{18x^2}{9} \Leftrightarrow$ $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
Após a subtração a equação torna-se *ya v* 2 *ya* 9 *ru* 0 *ya v* 0 *ya ru* 18	$18x^2 - 16x^2 - 9x$ $= 16x^2 + 9x + 18 - 16x^2 - 9x$ $2x^2 - 9x = 18$
Portanto *ya* é 6	Portanto, $x = 6$
Donde *ya v* 2 é 72	Donde $2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 72$

(PEDROSO, 2010 p. 7 e 8)

Mas como Bhaskara chegou às respostas das equações, que são representadas da forma $ax^2 + bx = c$? Vejamos...

1º) multiplicamos os dois lados da equação $ax^2 + bx = c$ por $4a$, resultando na expressão $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$;

2º) soma-se b^2 a ambos os lados da expressão obtida, obtendo-se $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$;

3º) observando a expressão acima, vemos que se trata de um produto notável, ou seja, $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$;

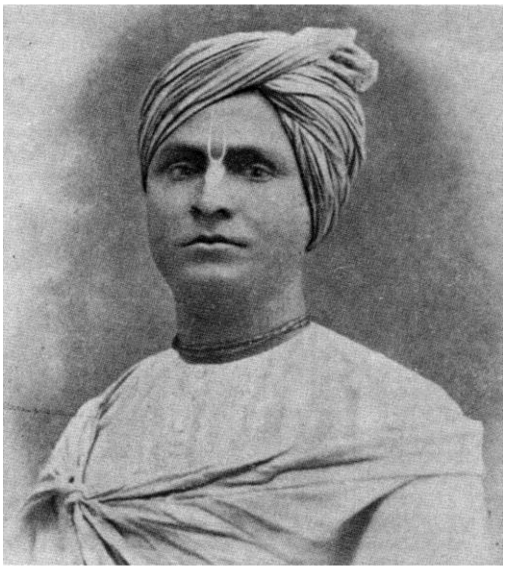
4º) elevando ambos os lados ao quadrado e extraindo a raiz, chegamos em $2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$ (notemos que a raíz negativa não era considerada). E agora trata-se de uma equação do primeiro grau, cuja resolução já é conhecida.

Parece ter sido S'ridhara[24] quem primeiro enunciou a chamada regra hindu para a resolução de equações quadráticas que, na citação de Bhaskara, consiste no seguinte:

> "É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar" (ROQUE, 2012 p. 240)

Ele apresentou uma exposição sobre o zero. Ele escreveu: "Se zero é adicionado a qualquer número, a soma é o mesmo número; se zero é subtraído de qualquer número, o número permanece inalterado; se zero é multiplicado por qualquer número, o produto é zero". E no caso de dividir uma fração, ele descobriu o método de multiplicar a fração pelo recíproco do divisor.

Figura 42 - S'ridhara



Fonte: < https://en.wikipedia.org/wiki/Sridhara>

[24] Sridharacharya (750 dC - 950 dC) foi um matemático indiano e filósofo . Ele nasceu na vila de Bhurishristi (Bhurisristi ou Bhurshut) no sul de Radha (atualmente Hughli) no século VIII dC.

5 **CIVILIZAÇÃO CHINESA**

A civilização chinesa, bem como a civilização indiana, são muito mais antigas que as civilizações grega e romana, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmica.

A civilização chinesa originou-se às margens dos rios Yang-Tsé e Amarelo. Podemos dividir a história chinesa em quatro grandes períodos:

China Antiga (2000 a.C. – 600 a.C.)

China Clássica (600 a.C. – 221 d.C.)

China Imperial (221 d.C. – 1911 d.C.)

China Moderna (1911 d.C. – hoje)

Vários fatores levaram ao desenvolvimento da matemática na China s qual foi, por um longo período, independente dos desenvolvimentos em outras civilizações. A natureza geográfica do país significava que havia limites naturais (montanhas e mares) que o isolavam. Por outro lado, quando o país foi conquistado por invasores estrangeiros, eles foram assimilados à cultura chinesa, em vez de mudar a cultura para si mesmos. Como conseqüência, houve um contínuo desenvolvimento cultural na China de cerca de 1000 aC e é fascinante traçar o desenvolvimento matemático dentro dessa cultura. Há períodos de avanço rápido, períodos em que um certo nível foi mantido e períodos de declínio.

A primeira coisa a entender sobre a antiga matemática chinesa é a maneira como ela difere da matemática grega. Ao contrário da matemática grega, não há desenvolvimento axiomático da matemática. O conceito chinês de prova matemática é radicalmente diferente do dos gregos, mas não se deve pensar em nada menos por causa disso. Em vez disso, é preciso se maravilhar com a abordagem chinesa à matemática e os resultados a que ela levou.

A matemática chinesa era, como sua linguagem, muito concisa. Foram muitos problemas motivados por problemas do calendário, comércio, medição de terras, arquitetura, registros do governo e impostos. No século IV aC, as tábuas de contagem eram usadas para calcular, o que efetivamente significava que um sistema numérico com valor decimal estava em uso.

O império chinês durou muito mais tempo que o romano. Só foi rompido com a revolução de 1911. É importante ressaltar que ao contrário do império romano, os imperadores chineses, principalmente Kublai Khan, produziram uma cultura rica e uma base intelectual sólida. Enquanto os monarcas romanos eram geralmente militares analfabetos, os monarcas chineses valorizavam muito a intelectualidade. Pelo fato de que os chineses se interessavam mais por literatura e arte, a matemática e a ciência chinesa sofreram um atraso em relação as outras matérias.

Nosso conhecimento da matemática chinesa antes de 100 aC é muito superficial, embora em 1984 tenha sido descoberto o *Suan shu shu* (Um livro sobre aritmética) datado de aproximadamente 180 aC. É um livro escrito em tiras de bambu e foi encontrado perto de Jiangling, na província de Hubei. Os próximos livros importantes dos quais temos registros são um trabalho de dezesseis capítulos *Suanshu* (prescrições computacionais) escrito por Du Zhong e um trabalho de vinte e seis capítulos *Xu Shang suanshu* (prescrições computacionais de Xu Shang) escrito por Xu Shang. Nenhum desses textos sobreviveu e pouco se sabe sobre seu conteúdo. O mais antigo texto sobrevivente completo é o *Zhoubi suanjing* (Manual do Manômetro Zhou Sombra), compilado entre 100 aC e 100 dC.

O mais famoso livo da matemática chinesa é o livro de matemática “Chui Chang Suan Shu” (Nove capítulos sobre a arte da matemática, em torno de 200 a.C.). Entre vários assuntos abordados, chamam a atenção problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nesta mesma época os gregos compunham tratados logicamente ordenados e expostos de forma sistemática. Os chineses seguiam a mesma linha babilônica, compilando coleções com problemas específicos. Assim como os egípcios, os chineses alternavam, em seus experimentos, resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. Nesta publicação encontram-se soluções de sistemas lineares com números positivos e negativos.

Durante toda sua história, a ciência chinesa sofreu com vários problemas, que impediram sua continuidade e aprimoramento. Em 213 a.C. o imperador da China mandou queimar os livros existentes. Mesmo que algumas cópias tenham sido salvas, a perda foi irreparável. No século XX, Mao-Tsé-Tung, com sua “Revolução Cultural” também promoveu uma queima generalizada de livros, considerados “subversivos”.

É poss~ivel que tenha havido contato cultural entre Índia e China e entre a China e o Ocidente. Muitos dizem que houve influência babilônica na matemática chinesa, apesar de que a China não utilizasse frações sexagesimais. O sistema de numeração chinês era decimal.

Eles utilizavam o sistema de “barras” (I, II, III, IIII, T). Não podemos precisar a idade deste sistema de numeração, porém sabe-se que ele é anterior ao sistema de notação posicional.

Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, utilizando o m.d.c.. Trabalhavam com números negativos por meio de duas coleções de barras (vermelha para os coeficientes positivos e preta para os negativos), porém não aceitavam números negativos como solução de uma equação.

A matemática chinesa é tão diferente da matemática de outros povos da mesma época que seu desenvolvimento ocorreu de forma independente. Lui Hui, no terceiro século, determinou um valor para π utilizando, primeiro um polígono regular com 96 lados (3,14) e depois utilizando um polígono regular com 3072 lados (3,14159).

O ponto alto da matemática chinesa ocorreu no século XIII durante o fim do período Sung. Nesta época foram descobertos a impressão, a pólvora, o papel e a bússola. Obras chinesas desta época influenciaram fortemente a Coréia e o Japão. Muitas dessas obras desapareceram da China neste período, reaparecendo apenas no século XIX.

Yang Hui[25], matemático talentoso trabalhou com séries numéricas e apresentou uma variação chinesa do o triângulo de Pascal. Ele descreveu multiplicação, divisão, extração de raiz, equações quadráticas e simultâneas, séries, cálculos de áreas de um retângulo, um trapézio, um círculo e outras figuras.

Guo Shoujing (1231-1316), embora geralmente não incluído entre os principais matemáticos do século treze, fez contribuições importantes. Ele produziu o *Shou shi li* (Obras e Calendário de Dias), trabalhou em trigonometria esférica e resolveu equações usando o método numérico de Ruffini - Horner . Ele também desenvolveu uma fórmula de interpolação cúbica, tabelando as diferenças da diferença acumulada como no método de interpolação de diferenças finitas de Newton .

E por volta de 1303, Chu Shih-chieh[26], mostrou na obra *Ssu-yüan yú-chien,* que significa “Precioso espelho dos quatro elementos”, uma técnica para resolver equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, chamada de método *fan*, ou *fan-*

[25] Yang Hui (1238 - 1298) foi um matemático chinês. Trabalhou em quadrados mágicos , círculos mágicos e no teorema binomial.

[26] Chu Shih-chieh (1260 - 1320), cujo nome verdadeiro é Zhu Shijie, foi um dos mais importantes matemáticos da China durante a Dinastia Yuan. Pouco se sabe sobre sua vida mas dois de seus trabalhos matemáticos são conhecidos: Introdução ao Estudo da Matemática e O Precioso Espelho dos Quatro Elementos, sendo esse o seu livro mais importante.

fan, que foi apresentado de forma retórica, com grande precisão, porém considerando somente uma única raiz positiva.

Vejamos agora um exemplo de resolução de uma equação polinomial do 2º grau usando o método fan-fan. Usado-o para encontrar, por exemplo, a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, ele consistia no seguinte: partia-se de uma solução aproximada, no caso $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e usava-se a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y, cuja solução está entre 0 e 1. Identificando y^2 com y, obtinha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = \frac{143}{291}$ e assim o valor inicial de x era corrigido para: $x = 19 + \frac{143}{291} = 19{,}49$. A ideia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. No caso, fazendo $z = x - 19{,}49$, obtinha-se a equação em z, $z^2 + 290{,}98z = 0{,}66$ e, daí: $z = \frac{0{,}66}{291{,}98} = 0{,}0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19,49226). O método chinês foi capaz de minimizar o erro de cálculo da raiz da equação do segundo grau por meio de uma substituição algébrica que garante uma equação equivalente à primeira fazendo com que seu valor fique mais próximo do real.

Dessa forma, podemos perceber que os chineses deram uma contribuição no estudo das equações de 2º grau, como vimos na técnica de Chu Shih-chieh. Apesar dessa contribuição, vimos uma nova forma de se construir e resolver problemas matemáticos.

6 **CIVILIZAÇÃO EUROPEIA A PARTIR DO SÉCULO XVI**

Foi no século XII que surgiram na Europa (mais propriamente na Itália) as primeiras cidades comerciais. Os mercadores de tais cidades visitavam muito o Oriente, tomando assim contato com os conhecimentos árabes dessa civilização. Foi por meio dos mercadores italianos que o conhecimento árabe chegou à Europa. Há a destacar Leonardo de Pisa (1175-1250), mais conhecido por Leonardo Fibonacci que, no seu regresso do Oriente (Egito, Síria e Grécia, terminando por volta de 1200), escreveu um livro intitulado *Liber Abaci* (1202) que continha grande parte da informação aritmética e algébrica da civilização árabe.

A partir da segunda metade do séc. XV, assiste-se na Europa a uma atividade científica cada vez mais notória. Para tal, muito contribuiu a criação da imprensa, que permitia editar livros com maior facilidade e rapidez. Foi nesta altura que se começaram a fazer traduções latinas de obras gregas e árabes. A recuperação dos clássicos gregos demorou mais do que as obras árabes sobre álgebra e aritmética, pois poucos eram os homens que dominavam a língua grega e a matemática ao mesmo tempo. No entanto, e aos poucos, essas traduções também foram surgindo. Assim, a partir de 1575, a Europa Ocidental já estava com a Álgebra árabe totalmente dominada e ainda a melhorou, com a resolução de equações de grau 3 e 4. Os matemáticos François Viète (1540 - 1603), Albert Girard (1595-1632), René Descartes (1596 - 1650) e Colin MacLaurin (1698 - 1746) foram alguns dos que contribuíram para este desenvolvimento. Girard além de criar uma notação própria, considerava já as soluções negativas, apesar destas continuarem a ser ignoradas pela restante comunidade matemática até o séc. XVIII.

6.1 **François Viète**

Vejamos o que Amaral (2016) descreve sobre Viète:

> [...] foi um matemático francês que nasceu em Fontenay-le-Comte no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Estudou direito e foi membro do parlamento da Bretanha, ou seja, não era um matemático por profissão. Porém seu lazer era dedicado a matemática dentro da qual fez contribuições à Àritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas, sem dúvida, foi na Álgebra que ocorreram suas

> mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das ideias modernas. Em sua obra foi encontrada, pela primeira vez em Álgebra, uma diferença clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida que chamamos de incógnita. Viète utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viète, a álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pelas resoluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas, como por um uso parcial de símbolos. Viète teve uma participação muito efetiva na renovação do simbolismo e na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Também desenvolveu novos métodos de solução, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, embora seu trabalho tivesse ficado tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativas. (AMARAL, 2016 p. 18)

Figura 43 - François Viète

Fonte: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete.html>

Muitos estudiosos descrevem que Viète associava a variável a uma letra qualquer. Ele representava a área por uma letra maiúscula. Em uma equação do tipo $x^2 + c = bx$, ele a abordava como sendo a soma de áreas.

Viète demonstrou a fórmula resolutiva da equação de 2º grau considerando duas novas variáveis ou incógnitas, que chamaremos de incógnitas auxiliares. Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, ele fez a substituição $x = y + z$, obtendo a expressão abaixo:

$$a(y + z)^2 + b(y + z) + c = 0$$

e ao desenvolve-la obteve:

$$ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0$$

Ele achou os valores de z para os quais esta equação em y não tivesse o termo de primeiro grau, ou seja:

$$2az + b = 0$$

$$2az = -b$$

$$z = -\frac{b}{2a}$$

E depois substituiu o valor de z na equação $ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0$, obtendo:

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Longrightarrow 4a^2y^2 = b^2 - 4ac$$

Isolando y concluiu-se que:

$$y^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como desde o inicio substituiu-se $x = y + z$ temos:

$$x - z = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = z \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e como foi visto na equação $z = -\frac{b}{2a}$, substiuindo na equação anterior obtêm-se:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é exatamente a fórmula, que no Brasil é conhecida como sendo a fórmula de Bhaskara.

Com isso, observamos uma nova maneira de se chegar à fórmula de resolução de uma equação do 2º grau, com raízes positivas ou negativas.

6.2 **Albert Girard**

Pouco se conhece sobre a vida de Albert Girard. Pensa-se que teria vivido entre 1595 e 1632 e que teria nascido em St. Mihiel, em Lorena, na França, mas como membro da Igreja Reformada, foi refugiado religioso na Holanda. Entrou na universidade de Leiden aos 22 anos e lá estudou matemática, mas seu primeiro interesse era a música.

Girard trabalhou em álgebra, trigonometria e aritmética, e aperfeiçoou e editou algumas obras de Viéte e Stevin. Mas foi na álgebra que ele mais se notabilizou e onde deu as suas maiores contribuições. O seu trabalho mais importante foi escrito em francês e publicado em Amsterdã em 1629, com o título *Invenção nova em Álgebra.* Este livro é um livro de 63 páginas, das quais 49 são sobre aritmética a álgebra. Alguns assuntos abordados por Girard neste livro: a soma e produto das raízes de uma equação de grau n; o uso de raízes negativas na solução de problemas geométricos; as raízes imaginárias, dizendo que toda equação pode ter raízes reais e imaginárias. Chama a atenção para o fato da primeira parte desta obra de Girard apresentar *o Teorema Fundamental da Álgebra:* "toda a equação completa de grau n tem o número de soluções igual ao seu grau".

A segunda parte do teorema acima citado era referente à relação que existe entre os coeficientes de uma equação e as suas soluções. De fato, o termo independente de uma equação de grau n é, a menos do sinal, igual ao produto de todas as raízes (positivas ou negativas, reais ou imaginárias); o coeficiente do termo de grau 1 é novamente, a menos do sinal, igual à soma de todas as combinações possíveis de $n - 1$ raízes; o coeficiente do termo de grau 2 é, a menos do sinal, igual à soma de todas as combinações possíveis de $n - 2$ raízes, e assim sucessivamente. O número de coeficientes dessas somas aparece na linha $n + l$ do triângulo hoje conhecido por triângulo de Pascal.

Foi o uso deste resultado, embora no sentido oposto, que permitiu a Girard encontrar as várias soluções de equações de grau 3, 4, e por vezes superior.

A resolução dessas equações por este processo obrigava, na maioria dos casos, a resolver equações do 2º grau. Na resolução das equações do 2º grau, Girard apresentou apenas o algoritmo (já conhecido de toda a comunidade matemática) sem dar qualquer explicação ou demonstração, muito provavelmente por considerar já ser do conhecimento geral.

No entanto, nessas resoluções há a destacar dois aspectos em que Girard foi inovador o fato de aceitar as soluções negativas e a notação própria que criou e usou. Só com a aceitação das soluções imaginárias é que Girard podia comprovar que uma equação de grau n tinha n soluções. O autor, além de as aceitar, também as usava nos seus cálculos para encontrar as restantes soluções de uma equação. Sempre que surgiam soluções imaginárias, Girard classificava-as de inexplicáveis ou impossíveis.

Relativamente à notação usada, Girard usava já alguns símbolos, embora continuasse a usar o discurso contínuo. Alguns dos símbolos por ele utilizados têm o mesmo significado que têm hoje em dia, como é o exemplo de $+$, de $-$ e de $\sqrt{}$. Relativamente às potências das incógnitas, Girard escrevia o expoente dentro de parênteses (por exemplo, x^2 era representado por (2)). Curioso é o fato de o autor não ter qualquer símbolo para a igualdade.

Por exemplo, a equação $5x^2 = 18x + 72$ era escrita por Albert Girard do seguinte modo: $5(2)$ é igual a $18(1) + 72$. 0 algoritmo de resolução dessa equação era o habitual. Vejamos:

> "$5(2)$ é igual a $18(1) + 72$. A metade do número dos (1) é $+9$. O seu quadrado é $+81$, ao qual junta-se 5 vezes $+72$, que é $+360$. A soma dá 441 A $\sqrt{441}$ é 21, a qual é acrescentada e retirada ao primeiro, donde resulta 30 e -12. Cada um deles *dividido por* 5, dá 6 e $-{}^{12}/_{5}$, que é o valor de $1(1)$" (CASSINET, 1980, apud ANDRADE, 2000 p. 101)

Figura 44 - Albert Girard

Fonte: < https://en.wikipedia.org/ wiki/ Albert_Girard>

6.3 **René Descartes**

René Descartes nasceu em Touraine (França) no ano de 1596 e morreu no ano de 1650 em Estocolmo. Descartes foi educado no colégio jesuíta de La Flèche, em Anjou. Lá ele fez cursos clássicos, lógica matemática, filosofia tradicional aristotélica e aprendeu a matemática. Deixou o Colégio La Flèche em 1614.

Depois Descartes estudou medicina e direito, tendo-se graduado (embora sem grande gosto) em direito em 1616. Nos anos que se seguiram encontrou ou correspondeu-se com intelectuais de vários países tais como Faulhaber na Alemanha, Desargues e Mersenne na França.

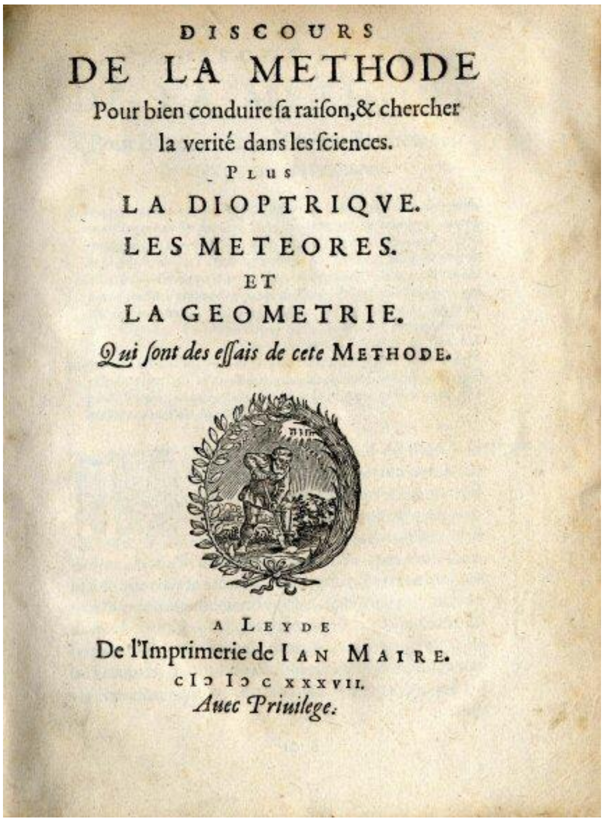
Figura 45 - René Descartes

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/ René_Descartes>

No ano de 1628 retirou-se para a Holanda onde começou a escrever sobre a teoria que descobrira (provavelmente sobre alguma teoria da geometria). Paralelamente, Descartes estava a desenvolver um trabalho de filosofia, uma vez que pretendia encontrar um método filosófico geral, que respondesse aos principais problemas da filosofia. Em 1637, publicou finalmente a sua obra de filosofia intitulada *Discurso do método* e, como apêndice desse livro, editou pela primeira vez o seu trabalho de geometria (com cerca de 100 páginas).

Este trabalho de geometria está dividido em três livros. No primeiro livro, o autor começou por mostrar que as 5 operações fundamentais que existem na aritmética correspondem a construções simples com régua e compasso na geometria. Não se esqueceu de referir que nas multiplicações, divisões e na extração de uma raiz quadrada era necessário um segmento unitário do qual o resultado estava dependente. Descartes considerava (contrariamente ao que Stevin fazia) que o quociente entre dois segmentos era ainda um segmento e não um número, evitando assim todos os inconvenientes lógicos dos números irracionais. Descartes conseguia assim libertar a álgebra do princípio da homogeneidade que desde os primórdios "estorvava" o progresso da matemática. Deste modo, expressões como $\sqrt[3]{a^2b^2 - b}$, (onde a e b representam segmentos de reta e o segmento unidade é conhecido) ganharam sentido.

Figura 46 - Folha de rosto da primeira edição do livro "Discurso sobre o Método"



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Discurso_sobre_o_M%C3%A9todo>

Descartes queria explicar a álgebra pela da intuição geométrica e dos seus conceitos, ou por outras palavras, fazer o tratamento gráfico das equações, ou seja, queria provar tudo da álgebra usando geometria.

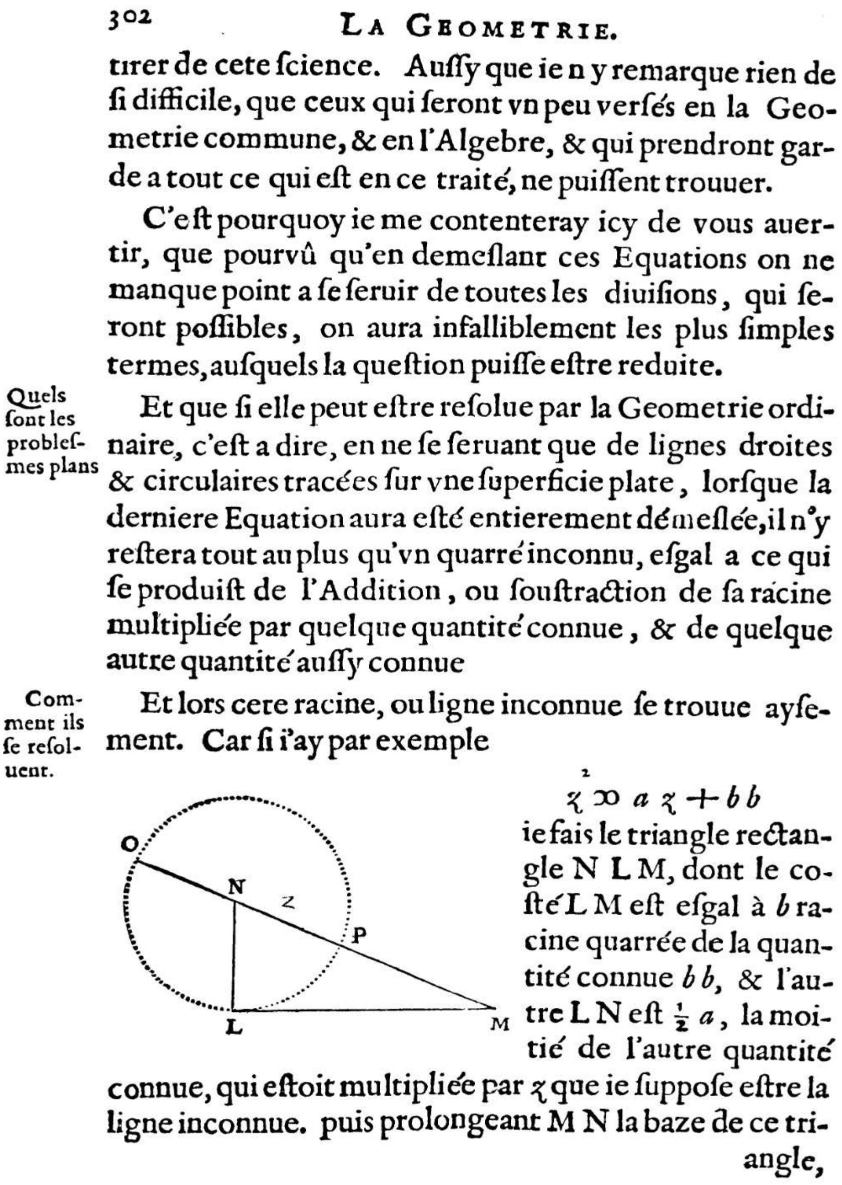
Antes de passarmos à análise das resoluções dos vários tipos de equações do 2º grau, convém referir que embora o autor, em parte, ainda utilizasse o discurso contínuo na resolução das equações, a notação usada era já bastante próxima da dos nossos dias. A simbologia apresentada por Descartes difere da atual apenas em dois aspectos: yy em vez de y^2 e o símbolo ∞ representava o sinal de $=$. Note-se também que já em Descartes as quantidades desconhecidas eram representadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto que as quantidades conhecidas eram representadas pelas primeiras.

Vejamos agora a resolução das equações do $2°$ grau dada por Descartes.

6.2.1 Equações do tipo $z^2 = az + bb$

> "Constrói-se o triângulo rectângulo NLM tal que o lado LM seja igual a b, a raiz quadrada da quantidade conhecida bb, e o lado LN seja $a/2$, a metade da outra quantidade conhecida, que está multiplicada por z, que se supõe ser a linha desconhecida. Depois, prolonga-se MN, a base desse triângulo, até O, de modo que NO se|a igual a NL; toda a linha OM é z, a linha procurada. Ela exprime-se desta forma: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$." (DESCARTES, 1954 *apud* ANDRADE, 2000 p. 104)

Figura 47 - Página 302 do livro La Geométrie, de René Descartes


302 LA GEOMETRIE.

tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

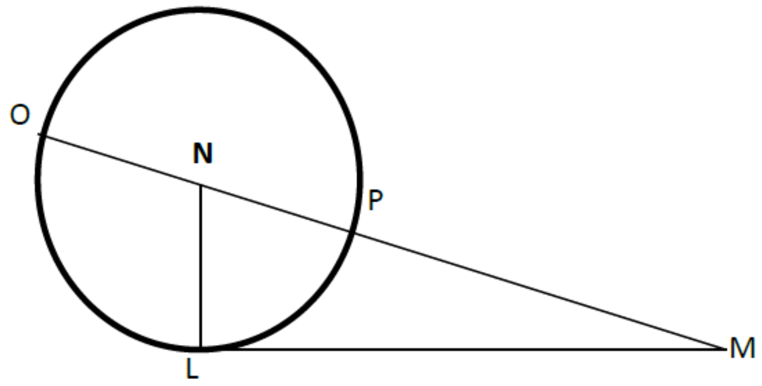
$$z^2 \infty az + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=la+geometrie&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwjlsuiDz8_cAhVIQ5AKHQY4BHgQsAR6BAgFEAE&biw=1600&bih=763#imgrc>

A figura apresentada foi a seguinte:

Figura 48 - Resolução geométrica da equação $z^2 = az + bb$



Fonte: Revista do professor de Matemática nº43

Como se pode ver pela transcrição dada, Descartes explicou a forma de obter a solução, embora sem apresentar qualquer justificação. Essa justificativa deduz-se facilmente se tivermos em conta a proposição III-36 dos *Elementos* de Euclides.

Por construção, temos que $\overline{LM} = b$ e que $\overline{LN} = \frac{a}{2}$. Pela proposição referida temos que $\overline{MP} \cdot \overline{MO} = \overline{ML}^2$. Temos então que:

$$\overline{MP} \cdot \overline{MO} = \overline{ML}^2$$
$$\Leftrightarrow (\overline{MO} - a) \cdot \overline{MO} = bb$$
$$\Leftrightarrow \overline{MO}^2 - a \cdot \overline{MO} = bb$$
$$\Leftrightarrow \overline{MO}^2 = a \cdot \overline{MO} + bb$$

Pela última igualdade, conclui-se que $\overline{MO}$ satisfaz a equação $z^2 = az + bb$, sendo portanto solução da equação.

Para se deduzir a expressão algébrica da solução $\left(z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}\right)$ é suficiente aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo MNL. Assim:

$$\overline{MN}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LN}^2$$
$$\Leftrightarrow (\overline{MO} - \overline{NO})^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LN}^2$$
$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = bb + \frac{aa}{4}$$
$$\Leftrightarrow z - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

A outra solução da equação não é apresentada, uma vez que é negativa.

6.2.2 Equação do tipo $y^2 + ay = bb$

> "Se tivermos $yy = ay + bb$, em que y é a quantidade procurada, faz-se o mesmo triângulo rectângulo NLM, de base MN e tal que NP e igual a NL e a recta PM é a raiz procurada. Deste modo temos que $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$." (DESCARTES, 1954 *apud* ANDRADE, 2000, p. 105)

Neste caso, Descartes usou a mesma construção do exemplo anterior.

Partindo da mesma condição inicial, e substituindo $\overline{MO}$ por $\overline{MP} + a$, obteve:

$$\overline{MP} \cdot \overline{MO} = \overline{ML}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP} \cdot (\overline{MP} + a) = bb$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 + a \cdot \overline{MP} = bb,$$

de onde resulta que $\overline{MP}$ é a solução da equação $y^2 + ay = bb$.

Para se obter a expressão algébrica da solução $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ o autor começa por usar novamente o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo MLN para em seguida subtrair a hipotenusa do triângulo MNL o raio da circunferência, obtendo assim a expressão pretendida. Assim:

$$\overline{MN}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LN}^2$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MP} + \overline{PN})^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LN}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = bb + \frac{aa}{4}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

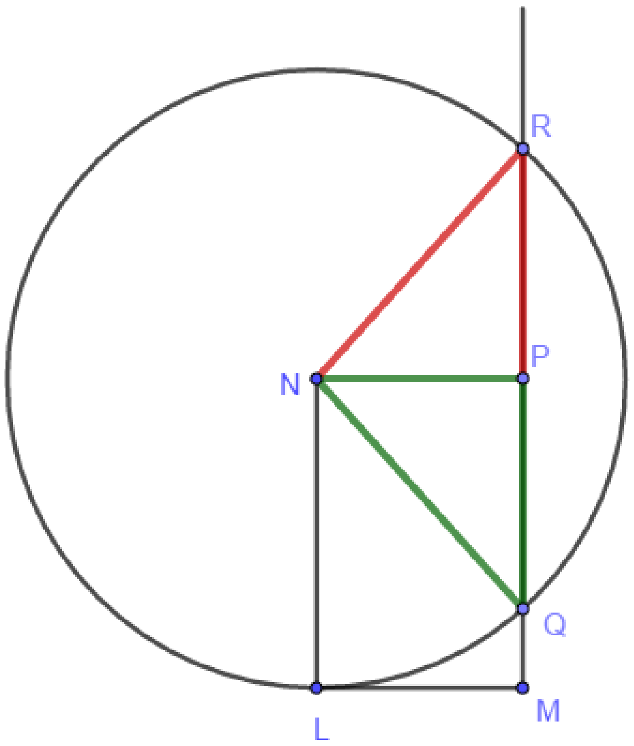
A solução negativa desta equação também foi ignorada.

6.2.3 Equação do tipo $z^2 = az - bb$

> "Enfim, se tivermos $z^2 = az - bb$, faz-se NL igual a $a/2$ e LM igual a b. Depois, em vez de unir os pontos MN, tira-se MQR paralela a LN. De centro N até L descreve-se um círculo que corte a linha nos pontos Q e R; a linha procurada z é MQ e MR, pois neste caso ela exprime-se de duas maneiras, a saber: $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ e $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. E se o círculo, que tem o seu centro no ponto N, passar pelo ponto L, mas não cortar e nem tocar a linha MQR, não existe nenhuma solução da equação, de modo que não é possível garantir que a construção do problema proposto é impossível." (DESCARTES, 1954 *apud* ANDRADE, 2000 p. 106)

A figura para este tipo de equações é a seguinte:

Figura 49 - Resolução geométrica da equação $z^2 = az - bb$



Fonte: O autor, 2018

Neste caso, a figura é diferente, embora o raciocínio seja análogo e a proposição usada seja a mesma:

Por construção, temos que $\overline{LM} = b$ e que $\overline{LN} = \frac{a}{2}$. Pela proposição III-36 v em que $\overline{MQ} \cdot \overline{MR} = \overline{ML}^2$. Mas

$$\overline{MQ} \cdot \overline{MR} = \overline{ML}^2 \Leftrightarrow \qquad \overline{MQ} \cdot \overline{MR} = \overline{ML}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{MQ} \cdot (a - \overline{MQ}) = b^2 \Leftrightarrow \quad \text{ou} \quad (a - \overline{MR}) \cdot \overline{MR} = b^2$$

$$a \cdot \overline{MQ} - \overline{MQ}^2 = b^2 \Leftrightarrow \qquad a \cdot \overline{MR} - \overline{MR}^2 = b^2$$

$$\overline{MQ}^2 = a \cdot \overline{MQ} - b^2 \qquad \overline{MR}^2 = a \cdot \overline{MR} - b^2$$

Donde se conclui que tanto $\overline{MQ}$ como $\overline{MR}$ são soluções da equação $z^2 = az - bb$.

Como este tipo de equações nem sempre tem soluções, o autor referiu os casos em que a equação é impossível (quando a reta perpendicular a $\overline{LM}$ por M não intersecta a circunferência de centro N e raio NL (que corresponde a $b > \frac{a}{2}$)).

Relativamente às expressões apresentadas, consideremos que P é o ponto médio de $\overline{QR}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo NQP e ao triângulo NPR temos que:

$$\overline{NQ}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2 \Leftrightarrow \qquad \overline{NR}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PR}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{NQ}^2 = \overline{NP}^2 + \left(\frac{a}{2} - \overline{MQ}\right)^2 \Leftrightarrow \qquad \overline{NR}^2 = \overline{NP}^2 + \left(\overline{MR} - \frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{aa}{4} = bb + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2 \Leftrightarrow \quad \text{ou} \quad \frac{aa}{4} = bb + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{2} - z = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb} \Leftrightarrow \qquad z - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \qquad z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$$

Como vimos, Descartes resolveu toda e qualquer equação do 2º grau de uma forma geométrica e totalmente original relativamente aos gregos, introduzindo a notação que ainda hoje utilizamos. No entanto, ignorou (pelo menos no 1º livro do seu trabalho) as soluções negativas, e continuou a dividir as equações do 2° grau em vários tipos.

6.3 **Colin MacLaurin**

Colin MacLaurin foi um matemático britânico, que nasceu na Escócia no ano de 1698 e faleceu em 1746. A sua habilidade matemática desde cedo foi notória, tendo entrado para a universidade com 12 anos e terminado com brio o bacharelado sobre as teorias da gravitação de Newton na Universidade de Glasgow quando tinha 15 anos. Aos 19 anos, foi professor universitário em Aberdeen. Seis anos mais tarde estava já na universidade de Edimburgo, onde ficou de 1725 até 1745. O seu primeiro trabalho importante, publicado em 1720, foi a *Geometria Orgânica*, um tratado que estendia os resultados de Isaac Newton e James Stirling sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas.

Figura 50 - Colin MacLaurin

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Colin_Maclaurin#/media/File:Colin_maclaurin.jpg>

No que diz respeito às equações do 2º grau, MacLaurin apresentou no seu livro *Álgebra*, que foi publicado em 1748 (2 anos depois da sua morte), a teoria das equações do 2º grau de uma forma completa (considera todas as soluções positivas ou negativas), geral (considera todos os casos de uma só vez, sem os dividir em vários tipos) e acessível a todos (com uma linguagem perfeitamente acessível a um público vasto, mesmo sem grandes conhecimentos matemáticos), dando a demonstração algébrica que é ensinada hoje em dia aos alunos do secundário.

Vejamos tal solução.

> "Transportam-se todos os termos que contêm a incógnita para um membro da equação e todos os termos conhecidos para o outro.
> Se o quadrado da incógnita está multiplicado por alguma quantidade, dividem-se todos os termos da equação por essa quantidade.
> Forma-se o quadrado da metade da quantidade que multiplica a incógnita simples, juntando-o a ambos membros da equação e, nesse momento, um membro da equação será um quadrado perfeito.
> Tira-se a raiz quadrada de ambos os membros, e um membro será sempre a incógnita com a metade da quantidade que multiplica a incógnita simples; de modo que se transpusermos essa metade, teremos o valor da incógnita." (CASSINET, 1979 *apud* ANDRADE, 2000 p. 108 e 109)

Exemplo: $y^2 + ay = b$

1º passo: Junta-se o quadrado de $\frac{a}{2}$: $y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$

2º passo: Extraí-se a raiz: $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$

3º passo: Transpomos $\frac{a}{2}$: $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$

Como todo quadrado é positivo, é evidente que a raiz quadrada duma quantidade negativa é imaginária pelo que não poderá ser aceito; é por isso, que existem equações do 2º grau que podem não ter qualquer solução.

Exemplo: $y^2 - ay = -3a^2$

1º passo: Junta-se o quadrado de $\frac{a}{2}$: $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$

2º passo: Extraí-se a raiz: $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

3º passo: Transpomos $\frac{a}{2}$: $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

Neste exemplo, os dois valores de y são imaginários ou impossíveis, porque não podemos aceitar a raiz quadrada de $-\frac{11a^2}{4}$.

Pelo que foi mostrado, os europeus nos mostraram outras maneiras de se resolver uma equação do 2º grau. Além de representações algébricas, tivemos as geométricas, a partir das formulações feitas por Viète e Descartes.

7. A EQUAÇÃO DO 2º GRAU NA ATUALIDADE

A definição para equação encontrada no dicionário Aulete[27] é “sentença matemática de igualdade condicional entre expressões, na qual ao menos uma delas contém no mínimo um termo variável”.

Toda equação com uma incógnita (digamos, sem perda de generalidade, x) que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$ é chamada equação do segundo grau ou equação quadrática. Ela recebe este nome porque seu termo de maior grau tem grau dois.

É importante aqui frisar que a incógnita x foi apenas uma escolha, lembrando que os alunos não devem ficar condicionados ao uso de uma única letra. Deve ser claro para eles que a incógnita pode ser representada pela letra que preferirem.

A igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de forma geral da equação do segundo grau, ou forma reduzida. Os números representados por a, b e c são os coeficientes desta equação e o coeficiente a deve ser diferente de zero para garantir a presença do termo ax^2, que garante que a equação seja do segundo grau. Quando b e c são diferentes de zero a equação do segundo grau é dita completa. Se pelo menos um dos coeficientes b ou c é nulo, diz-se que a equação do segundo grau é incompleta.

Vejamos, por exemplo, a equação $2x^2 - 5 = 0$ $(b = 0)$. Esta equação pode ser resolvida isolando o termo do 2º grau, dividindo ambos os membros por 2 e extraindo a raiz quadrada em ambos os lados. Uma observação que se deve ser feita é que esta equação tem duas soluções, uma positiva e outra negativa:

$$2x^2 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

No caso geral, $ax^2 - c = 0$, temos as etapas:

[27] Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa. 2. ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2009, p.322.

$$ax^2 = c$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{c}{a}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

É possível efetuar a divisão por a pois já foi garantido que a não é zero.

No caso da equação $2x^2 + 10x = 0$, escrevemos a equação como um produto de dois fatores igual a zero, colocamos um fator em comum em evidência e aplicamos a "lei do anulamento do produto". Assim:

$$2x^2 + 10x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5$$

No caso geral, $ax^2 + bx = 0$, temos as etapas:

$$x(ax+b) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; ax + b = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; ax = -b$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -\frac{b}{a}$$

Para se resolver uma equação do 2º grau completa (isto é, com todos os coeficientes não nulos), os alunos devem saber usar o fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Acredita-se que a primeira vez em que essa fórmula apareceu escrita na literatura matemática foi em 1896 em um o artigo de Henry Heaton, no periódico *The American Mathematical Monthly*.

Figura 51 - O artigo "A Method of Solving Quadratic Equations"

A METHOD OF SOLVING QUADRATIC EQUATIONS.

By Prof. HENRY HEATON, M. Sc., Atlantic, Iowa.

Let it be required to solve the equation

$$ax^2+bx+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Transposing the middle term we have

$$ax^2+c=-bx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Squaring, $a^2x^4+2acx^2+c^2=b^2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$

Subtracting $4acx^2$, $a^2x^4-2acx^2=(b^2-4ac)x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$

Extracting the square root, $ax^2-c=\pm(\sqrt{b^2-4ac})x \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$

Adding equation (2), $2a^2x^2=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})x \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$

Whence $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Fonte: RIBEIRO, Fabiano Batista, 2014. p. 17

Analisando o sinal do discriminante ($b^2 - 4ac$), os alunos podem reconhecer se uma equação do 2º grau tem uma, duas ou nenhuma raíz real:

• se $b^2 - 4ac < 0$, a equação nnão tem raíz real;

• se $b^2 - 4ac = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais;

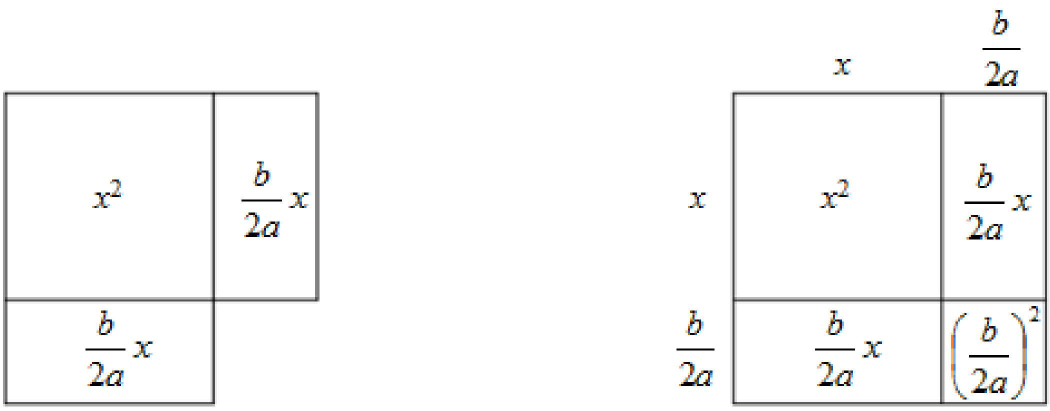
• se $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes.

É interessante notar que a fórmula obtida pode também ser utilizada para equações incompletas, pois todos os passos podem ser efetuados normalmente mesmo se b ou c forem nulos. Comumente denomina-se o valor da expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (Delta maiúsculo). Realizando essa substituição na fórmula da resolução de equações do segundo grau será obtido:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A dedução da fórmula acima pode ser acompanhada pela representação geométrica, por meio do método conhecido por "completar o quadrado". Começamos por dividir ambos os membros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a e completamos o quadrado como mostra a figura:

Figura 52 - Método "completar quadrado"



Fonte: O autor, 2018

A fórmula resolvente resulta de uma dedução análoga à anterior:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos perceber que a maneira como a equação do 2º grau é desenvolvida nas escolas brasileiras é baseada em apresentar a fórmula conhecida como sendo de Bhaskara.

Sobre uma maneira nova de exposição das equações do 2º grau, Lima (1990) apresenta uma para a sua solução:

> Pode-se reformular esse problema, em termos geométricos, assim: determinar os lados de um retângulo, do qual se conhecem o semiperímetro s e a área p.
> Os números procurados, digamos α e β, são as raízes da equação do segundo grau $x^2 + sx + p = 0$.
> Com efeito, se $\alpha + \beta = s$ e $\alpha\beta = p$, então o trinômio $x^2 + sx + p$ se anula para $x = \alpha$ e $x = \beta$, como se vê a seguir.
> $$\alpha^2 - s\alpha + p = \alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0$$
> $$\beta^2 - s\beta + p = \beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \beta^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0$$
> Outra maneira de chegará mesma conclusão consiste em observar que, por um lado temos
> $$x^2 - sx + p = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
> e, por outro lado, vale $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.
> Portanto $x^2 - sx + p = (x - \alpha)(x - \beta)$. Segue-se que α e β sao os únicos valores de x que tornam $x^2 + sx + p$ igual a zero, isto é, são raízes desse trinômmio. (LIMA, 1990, p. 6)

Assim, tivemos uma outra maneira para o entendimento e construção da solução da equação do 2º grau.

Podemos constatar que a matemática sempre serviu de combustível para muitos estudiosos, que fascinados com a sua beleza, nunca parassem de produzir ou aprimorar algo novo.

Vejamos agora alguns exemplos em que podemos aplicar os métodos explicitados da solução de uma equação do 2º grau.

Exemplo 1: Na figura está representado um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a) Escreva uma expressão algébrica que represente a área do retângulo;

b) Determine as dimensões do retângulo quando a sua área é 450 m^2.

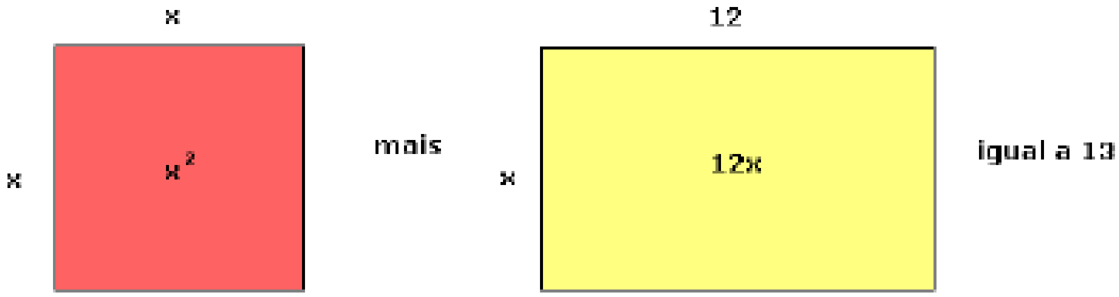
Solução: a) Seja x o valor da largura. Então, o comprimento do retângulo vale $2x$. Logo, a área deste retângulo é dada pela expressão algébrica $2x \cdot x = 450 \Leftrightarrow 2x^2 = 450$.

b) Para se determinar as dimensões do retângulo basta resolvermos a expressão $2x^2 = 450$, que é uma equação do 2º grau incompleta. Temos então que: $2x^2 = 450 \Leftrightarrow x^2 = \frac{450}{2} \Leftrightarrow x^2 = 225 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{225} \Leftrightarrow x = \pm 15$. Como este problema é geométrico, descartamos a solução negativa. Logo, a largura é $x = 15\ m$ e o comprimeto é $2x = 2 \cdot 15 = 30\ m$.

Neste exemplo queremos saber se o aluno sabe montar a expressão algébrica relacionada com a área de um retângulo e a resolução de uma equação do 2º grau incompleta.

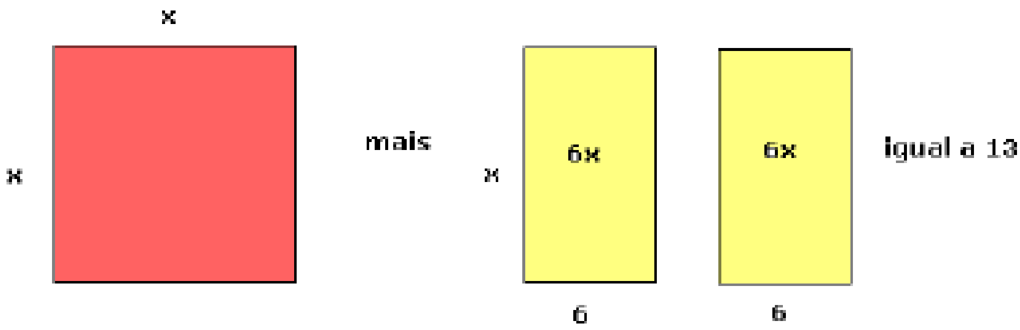
Exemplo 2: A área de um quadrado de lado x acrescido da área de um retângulo de dimensões 12 e x é igual a 13. Qual a medida do lado desse quadrado?

Solução: Inicialmente, vamos representar o problema utilizando a forma geométrica caracterizado na figura a seguir:



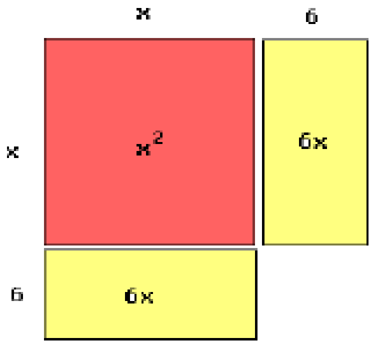
Fonte: São Paulo, 2014, p. 68

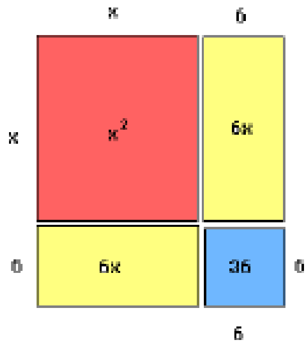
Agora expressando na forma geométrica dividindo o comprimento pela metade caracterizado na figura a seguir:



Fonte: São Paulo, 2014, p. 68

A equação neste caso é expressa por $x^2 + 2 \cdot 6x = 13$. Agrupando as figuras de modo que se tenha um quadrado, percebemos que falta o termo 36, que é o quadrado de lado 6. Veja nas figuras abaixo:





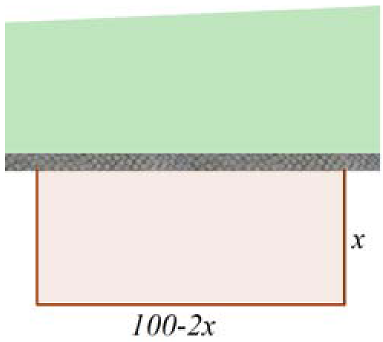
Fonte: São Paulo, 2014, p. 68

Podemos expressar da seguinte forma a primeira figura: $x^2 + 2 \cdot 6x = 13$ e a segunda figura por: $x^2 + 2 \cdot 6x + 36 = 13 + 36 \Longrightarrow (x+6)^2 = 49$.

Sendo a nova área 49, a medida do lado do novo quadrado será $\sqrt{49} = 7$. Assim, o lado do quadrado será $x + 6 = 7$ e protanto, $x = 1$ é a solução.

Nesta questão estamos querendo saber se o aluno consegue resolver uma equação do 2º grau a partir do "método de completar quadrados". É importante o professor resolver alguns problemas de equação do segundo grau por este método, para que o aluno não fique preso a só usar a "fórmula de Bhaskara".

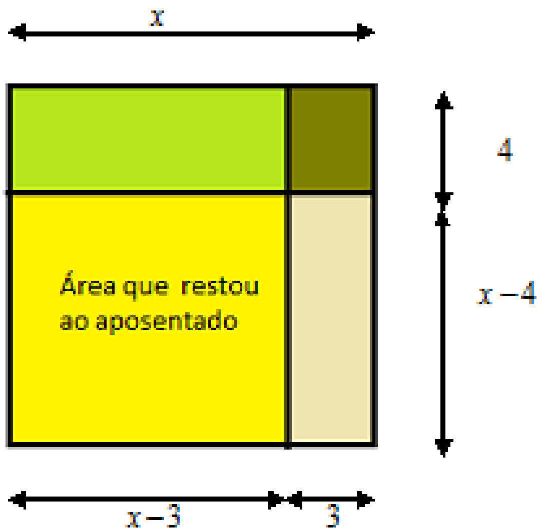
Exemplo 3: O Sr Armando quer vedar três lados de um terreno de forma retangular, com uma rede com 100 m de comprimento, como mostra a figura abaixo:



Determine o valor que x deve ter para que a área do retângulo seja de 1200 m^2.

Solução: Neste problema temos que resolver a equação $x \cdot (100 - 2x) = 1200$, que é uma equação do 2º grau completa. Assim, ela fica: $100x - 2x^2 = 1200 \Leftrightarrow 2x^2 - 100x + 1200 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$. Obtemos duas soluções: 20 e 30. É importante que consigam interpretar estas soluções levando em conta a situação da realidade com que estão a trabalhar e que se apercebam de que existem dois retângulos com perímetro igual a $100\ m$ e área igual a $1200\ m^2$, um com dimensões 20 por 60 e outro com dimensões 30 por 40. Muitas vezes os alunos chegam a uma destas soluções por tentativa e erro. É importante mostrar-lhes um método mais formal de resolução a que podem recorrer, neste caso usando uma equação do 2º grau.

Exemplo 4: Um velho aposentado teve parte do terreno de sua propriedade desapropriada pela prefeitura, que pretendia alargar duas avenidas. Do terreno em forma de quadrado, foram perdidas uma faixa de 4m de largura ao norte e uma faixa de 3 m de largura a leste. A área do terreno ficou reduzida à metade. De que tamanho era o terreno?



Solução: A área que restou ao aposentado foi um retângulo de medidas $x - 3$ e $x - 4$, correspondente à metade da área anterior, que era x^2. A equação será expressa por: $(x - 3)(x - 4) = \frac{x^2}{2}$, ou seja, $x^2 - 7x + 12 = \frac{x^2}{2}$, equivalente a $x^2 - 14x + 24 = 0$. Resolvendo, encontramos $x = 2$ e $x = 12$. Analisando os resultados:

• para $x = 12$ temos: $(12 - 3) \cdot (12 - 4) = 9 \cdot 8 = 72\ m^2$;

• para $x = 2$ temos: $(2 - 3) \cdot (2 - 4) = (-1) \cdot (-2) = 2\ m^2$, não se deve ser considerada porque os lados do terreno ficariam com medidas negativas.

Portanto a única resposta válida é $x = 12$ e o tamanho do terrenno era de $12^2 = 144\ m^2$.

Aqui chamamos a atenção ao fato de que o aluno tem que saber fazer a análise crítica dos resultados. Verificar se eles estão coerentes com o problema proposto!!!!

Agora vamos indicar algumas dificuldades que os alunos podem ter com as equações do 2º grau: (i) reconhecer que uma equação do 2º grau é incompleta e resolvê-la usando as regras de resolução de equações e a lei do anulamento do produto; (ii) substituir corretamente os valores dos coeficientes de uma equação e determinar os valores das raízes; (iii) interpretar as situações em que existe apenas uma raiz ou não existem raízes; e (iv) traduzir condições verbais numa equação do 2º grau e interpretar as suas soluções, de acordo com as condições dadas.

A maior parte destas dificuldades tem origem no domínio insuficiente da linguagem algébrica e geométrica pelos alunos. No entanto, os cálculos podem ser simplificados pela escolha apropriada dos exemplos ou pelo uso da tecnologia (com o uso do Geogebra por exemplo), mas a interpretação das situações tem que ser feita sempre de modo aprofundado e rigoroso, de modo a promover a compreensão por parte dos alunos.

CONCLUSÃO

Todos os métodos de resolução e suas demonstrações tiveram a sua importância ao longo da história da matemática sejam eles algébrico, gráfico, cartesiano ou geométrico e atualmente não podemos ficar resumidos a apenas um método de resolução. É de fundamental importância o ensino de várias maneiras de se resolver o mesmo problema mostrando sua aplicabilidade, pois isso diversifica os ângulos de visão do aluno e amplia a assimilação do assunto. A utilização de alguns desses métodos deve ser trabalhada em sala de aula de maneira a motivar ou tentar despertar o interesse do aluno pela matemática fazendo com que ele perceba que a álgebra , a geometria e a aritmética são conteúdos que podem e devem ser trabalhados juntos. Usando apenas equações do segundo grau e usando esses métodos o aluno pode calcular medidas dos lados de uma figura geométrica, determinar a variação de valores de uma equação, esboçar gráficos, resolver sistemas, conhecer as aplicações da matemática nas diversas ciências e muitas outras atividades inerentes ao conteúdo.

Sabe-se que uma das maneiras de facilitar o ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo em matemática é utilizando situações problema e expondo a importância desse conteúdo em várias áreas do conhecimento. É claro que quando o professor se propõe a trabalhar esses métodos de resolução para equação de grau dois é necessário verificar os conhecimentos prévios do aluno e se ele já tem fundamentos para assimilação do conteúdo em foco, pois alguns desses métodos expostos nesse trabalho não poderão ser apresentados numa turma de ensino fundamental a não ser que seja numa turma de preparação para olimpíadas de matemática, mas você pode utilizá-los como curiosidade numa turma de ensino médio. O fato de muitos alunos já terem aversão à disciplina e só tratá-la como algo que não se aplica à sua realidade deve ser encarado pelo professor como desafiador e esse deve mostrar que matemática não é somente um mundo de fórmulas prontas e é aí que se faz necessário o professor conhecer muito bem o que está ensinando para tentar motivar esse aluno. Por isso o docente deve ser conhecedor da história desse conteúdo, das aplicações desse conteúdo e das diversas maneiras de se resolver problemas que envolvam esse conhecimento, e ainda, enfatizar a necessidade deste conteúdo para assuntos futuros, uma vez que a matemática é uma ciência interligada com as demais disciplinas, fazendo parte do universo educacional como uma das principais ferramentas.

Portanto o ensino de vários métodos de resolução de equação além de tornar as aulas de matemática mais ricas de informações, tornando uma aula mais motivadora, facilita a aplicabilidade desse conteúdo em várias tarefas realizadas na vida escolar desse aluno, bem como ajuda o desenvolvimento do raciocínio lógico, fazendo com que esse aluno deixe ter apenas aquela aula tradicional sobre equações do segundo grau na qual é mostrada apenas uma maneira de se resolver esse tipo de equação sem dizer como surgiu essa fórmula resolutiva. Não podemos negar que mesmo ciente da importância do ensino das equações do segundo grau através da história da matemática e seus diversos métodos de resolução, serão encontradas dificuldades e pouca aceitabilidade por parte de alguns docentes, mas sendo o professor um profissional reflexivo não pode negar que ele, tendo essas técnicas de resolução como aliadas no ambiente de sala de aula, facilitará ao ensino-aprendizagem dos seus alunos. Por tudo isso esperamos que esse trabalho sirva como material da apoio aos profissionais de ensino de matemática para que eles consigam mudar as suas estratégias de ensino sobre esse conteúdo ou que sirva para despertar melhorias significativas e decisivas nas suas aulas de forma que o discente possa adquirir mais confiança em seu aprendizado, além de tornar suas aulas mais dinâmicas. Não tenho interesse aqui em defender se existe um método melhor do que outro ou que cause maior facilidade na aprendizagem seja ela algébrico ou não, apenas que o professor faça uso de cada um deles como aliado no processo de ensino aprendizagem como forma motivadora.

Assim, buscar construir o novo, é meditar sobre o ontem, não deixando-o de lado, esquecido, mas sendo ele o passaporte para uma nova era. Não precisamos radicalizar o ensino, mas melhorar a ótica com a qual as coisas são apresentadas, para assim trilharmos por novos caminhos e alcançar novos horizontes.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T. do. *Método de Viète para Resolução de Equações do 2º grau*. Revista do Professor de Matemática nº 13, 1988. Disponível em < http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm>. Acesso em 31 de agosto de 2018.

ANDRADE, B. C. *A Evolução Histórica de Resolução das Equações do 2º Grau*. Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações, Portugal. Universidade do Porto, (2000). Disponível em: < https://repositorioaberto.up.pt/bitstream/10216/9895/2/3026TM01C.pdf>. Acesso em: 25 de agosto de 2018.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad, por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad, por Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

CARVALHO, J. B. P. de. *Revisitando uma Velha Conhecida*. In. Conferência da II Bienal da SMB, UFBA, (2004). Disponível em < http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>. Acesso em 05 de agosto de 2018.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 4. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GONÇALVES, C. H. B. *Tabletes Matemáticos Cuneiformes e a Questão da Materialidade*, 2010. Disponível em < www.each.usp.br/ >. Acesso em 28 de agosto de 2018 19h:38min

LIMA, E. L. *A Equação do Segundo Grau.* Revista do Professor de Matemática. nº 13. Rio de Janeiro, IMPA, 1988. Disponível em < http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

PEDROSO, H. A. U*ma Breve História da Equação do 2º grau*. Revista Eletrônica de Matemática, nº2, 2010. Disponível em <http://www.matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/eq2grau.pdf>. Acesso em 30/08/2018.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro. Zahar. 2012. Disponível em < https://th3m4th.files.wordpress.com/2016/01/historia-da-matematica-tatiana-roque.pdf> Acesso em 04 de setembro de 2018.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. Disponível em <http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Topicos_20de_20Historia_20da_20Matematica_28PROFMAT_29_TatianaRoque_Pitombeira.pdf>. Acesso em 01 de setembro de 2018..

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa. Gradiva. 1989.

WAGNER, E. *Um pouco sobre Descartes*. Revista do professor de matemática, n°19, Rio de Janeiro, IMPA, 1991. Disponível em < http://www.rpm.org.br/cdrpm/19/4.htm>. Acesso em 10 de agosto de 2018.