Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

NORTEAMENTO DA PRÁTICA DOCENTE EM RELAÇÃO AO CONTEÚDO DE FUNÇÕES PELA BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM E PELO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Ives Lima Pereira

Teresina
2020

Ives Lima Pereira

Dissertação de Mestrado:

NORTEAMENTO DA PRÁTICA DOCENTE EM RELAÇÃO AO CONTEÚDO DE FUNÇÕES PELA BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM E PELO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Manoel Vieira de Matos Neto

Teresina

2020

IVES LIMA PEREIRA

NORTEAMENTO DA PRÁTICA DOCENTE EM RELAÇÃO AO CONTEÚDO DE FUNÇÕES PELA BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM E PELO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Teresina, 29 de junho de 2020

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Manoel Vieira de Matos Neto (orientador)
Universidade Federal do Piauí-UFPI

Prof. Carlos Humberto Soares Júnior (membro interno)
Universidade Federal do Piauí-UFPI

Prof. Francismar Holanda (membro externo)
Instituto Federal do Piauí-IFPI

Teresina
2020

Às pessoas que participaram de forma direta e indireta para que eu obtivesse êxito nessa etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, autor e consumador da minha fé, o qual me enche de conhecimento e sabedoria para conquistar meus objetivos e conduzir a minha vida.

Agradeço aos meus pais que apesar das dificuldades, sempre cuidaram para que eu me preocupasse somente com meus estudos.

Agradeço à minha esposa que pacientemente suportou minhas ausências durante esse período e que me deu forças quando me sentia esgotado fisicamente e mentalmente.

Agradeço a todos meus professores que me incentivaram a buscar sempre mais durante minha jornada do conhecimento e ao meu orientador que com bastante paciência me conduziu durante a elaboração deste trabalho.

"*Pois o Senhor é o que dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e o discernimento*".

Provérbios 2:6

Resumo

O presente trabalho se trata de um estudo bibliográfico dos principais conceitos matemáticos referentes à funções estudados no Ensino Médio e de sua abordagem em sala de aula, enfatizando os aspectos importantes para uma aprendizagem significativa deste tema destacando suas aplicações e interdisciplinaridades, e tendo como perspectiva as diretrizes apontadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as habilidades e competências cobradas pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) enquanto instrumento para ingresso no ensino superior. Encontra-se também a evolução do conceito de função ao longo dos séculos através dos estudos de problemas encontrados pelas sociedades em seus respectivos períodos históricos até o conceito que encontramos nos dias atuais. É abordado, no trabalho, sugestões metodológicas para o ensino-aprendizagem de funções tendo em vista as novas formas de ensinar esse conteúdo matemático almejando a torná-lo mais fácil e mais atrativo aos alunos, de tal forma que se apropriem dos conceitos a ponto de aplicar às diversas situações de sua vida e uma análise de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), onde é apresentado uma solução e as habilidades da BNCC e do ENEM que podem ser desenvolvidas com as questões.

Palavras-chave: Funções, Ensino de Matemática, BNCC, ENEM.

Abstract

The present work is a bibliographic study of the main mathematical concepts related to functions treated in High School and its approach in the classroom, emphasizing the important aspects for a meaningful learning of this theme, highlighting its applications and interdisciplinarities, and having as perspective the guidelines pointed out by the National Common Curricular Base (BNCC in portuguese) and the main instruments for assessing learning and entering higher education. One also finds the evolution of the concept of function over the centuries through studies of problems encountered by societies in their respective historical periods up to the concept we find today. In the work, methodological suggestions for teaching and learning functions are addressed in view of the new ways of teaching this mathematical content aiming to make it easier and more attractive to students, in such a way that they appropriate the concepts to the point of applying them to the students. various situations in his life and an analysis of questions from the National High School Exam (ENEM in portuguese), which presents a solution and the skills of BNCC and ENEM that can be developed with the questions.

Keywords: Functions, Mathematics Teaching, BNCC, ENEM.

Sumário

Introdução

Em matemática, dentre os conceitos mais importantes, destaca-se o de função. Assim como muitos outros, o conceito de função foi construído e formulado por filósofos, teóricos e cientistas que não se limitavam ao estudo da matemática apenas como um instrumento isolado, mas como ferramenta para solucionar desde problemas cotidianos à questões relacionadas às mais diversas áreas do conhecimento humano. Além disso, configura-se como uma ferramenta fundamental no processo de modelagem de fenômenos naturais e sociais. Nem sempre percebemos, mas a todo momento estamos em contato com as funções, por exemplo: quando assistimos ou lemos um jornal, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação ou comparação de duas grandezas ou até mesmo uma função, mas representada graficamente. Para que esse gráfico tome forma é necessário que essa relação ou comparação seja compreendida, interpretada e representada nas mais diversas formas.

Neste contexto, é essencial, ao se abordar funções em sala de aula, evidenciar os principais aspectos das funções para então apontar a importância de uma nova e significativa abordagem do estudo deste tema em que sejam destacadas suas aplicações e interdisciplinaridades. Atuando nesta perspectiva, o professor também estará contribuindo para a promoção de sua formação continuada.

O presente trabalho trata-se de um estudo bibliográfico dos conceitos elaborados acerca desta temática, realizado à luz das diretrizes apontadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento norteador dos currículos dos sistemas e redes de ensino e das propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas, e em consonância ao que é cobrado pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ele tem ainda como objetivo contribuir com uma abordagem que possibilite formar estudantes com habilidades e conhecimentos considerados essenciais para o século XXI, incentivando a modernização dos recursos e das práticas pedagógicas e promovendo a atualização do corpo docente das instituições de ensino, em particular, da rede pública de ensino e contribuir diretamente com a aprendizagem significativa deste conteúdo.

O trabalho está estruturado na seguinte forma: no capítulo 1 é feita um breve relato do desenvolvimento histórico de funções, no capítulo 2 expomos os principais conceitos e propriedades da Teoria das Funções, no capítulo 3 tratamos das habilidades e competências esperadas de um concludente do Ensino Médio acerca de funções, no capítulo 4 tratamos das competências e habilidades previstas pela BNCC e pelo ENEM para funções e no quinto e último capítulo fazemos a análise e críticas de questões apresentadas em algumas das edições do ENEM.

Capítulo 1

Uma Breve História

Seja comprando um produto e relacionando o preço com a quantidade, formando pares para uma dança junina, até o estudo de gráficos de uma curva relacionando seus pares ordenados, a noção de função tem um aspecto fundamental na vida cotidiana e acadêmica dos estudantes de ensino médio, podendo refletir em sua vida universitária.

A definição formal e o estudo de função da maneira que conhecemos hoje, definida nos livros didáticos passou por várias formulações e reformulações antes da apresentação moderna. Iremos destacar nesse capítulo a evolução desse conhecimento e os matemáticos que contribuíram para isso, de forma direta ou indireta.

Destacamos aqui primeiramente uma contribuição valorosa do filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). Entre suas publicações mais famosas está o *O Discurso do Método* e *A Geometria*. Em seu estudo de geometria, Descartes relacionava quantidades desconhecidas com outras quantidades através de um sistema de coordenadas, e dessa forma, utilizava-se de processos algébricos para a resolução de problemas geométricos. Tatiana Roque fala:

> Descartes conclui que, tomando infinitos valores para x, acham-se também infinitos valores para y. Uma das grandezas indeterminadas pode ser, assim, determinada a partir da atribuição de valores à outra grandeza indeterminada, por meio de um número finito de operações algébricas. Introduz-se aqui, pela primeira vez de modo absolutamente claro, a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra. (ROQUE,

> 2012, p.298)

Ainda segundo Roque (2012, p. 259), a representação de equações indeterminadas através de um sistema de coordenadas, presente na obra de Descartes, foi inovador. Hoje, a relação de quantidades ou grandezas desconhecidas através de um sistema de coordenadas é uma parte significativa do estudo de funções.

O estudo de função se desenvolveu muito ligado aos métodos do Cálculo Diferencial e Integral de Sir Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Liebniz (1646-1716). Mesmo que os dois não tenham dado uma contribuição significativa à teoria das funções em si, os seus estudos sobre o Cálculo abriram os horizontes para que outros matemáticos viessem a perceber o papel central que as funções e suas definições tinham no estudo dos infinitesimais. Roque afirma que:

> Apesar de terem pesquisado inúmeras relações funcionais, Leibniz e Newton não explicitam o conceito de função em suas obras. A falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, motivou a definição de função, expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli. (ROQUE, 2012, p. 299)

Johann Bernoulli (1667-1748), nascido em Basiléia, na Suíça, foi um grande matemático da renomada família Bernoulli. Entre seus feitos em Matemática encontra-se a solução do problema da braquistócrona. Em sua obra, seu conceito de função, segundo Boyer (1974, p. 311) era de "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer". Esse conceito foi apresentado em um artigo à Academia de Ciências de Paris. Nesse mesmo artigo, ele utiliza a notação φx para designar uma função.

O próximo matemático a dar sua contribuição foi Leonhard Euler (1707-1783). Nascido em Basel, Suíça, Euler foi um dos matemáticos mais producentes da história, com quase 800 trabalhos publicados, sendo parte deles após sua morte. Na obra *Introdução à análise do infinito* de 1748, Euler dá centralidade à noção de função em relação à análise matemática. Nela, ele define que uma função de uma quantidade variável é, conforme Mol (2013, p.119), "uma expressão analítica composta de alguma maneira da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes". Para ele, a quantidade variável compreendia em si os números positivos, negativos, fracionários, racionais, irracionais, transcendentes, os números imaginários e o zero, algo que muitos matemáticos da sua época não aceitavam. Anos mais tarde, em 1755, em sua obra *Fundamentos do cálculo diferencial*, Euler apresenta a seguinte definição de função:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x. (Roque, 2012, p. 302)

É devido também a Euler a notação e definição de função circular e o uso de $f(x)$ para designar uma função de x.

Com uma contribuição discreta mas valorosa, a vez agora é de Johann Heinrich Lambert (1728-1777), nascido em Mulhouse e contemporâneo de Euler. Entre seus maiores feitos em Matemática está a prova de que π é irracional, que foi apresentada à Academia de Berlim, no ano de 1761. Conforme Eves (2011, p. 478) "devemos a Lambert o primeiro desenvolvimento sistemático da teoria das funções hiperbólicas, inclusive a notação atual", ou seja, as notações $senhx$, $coshx$ e $tanhx$ são devidas a ele.

Saindo do século XVIII e passando para o século XIX, o problema sobre como o calor se propaga numa massa metálica deu uma nova perspectiva sobre o que se entendia como uma função, o qual foi abordado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Fourier nasceu em Auxerre, na França. Durante sua vida foi professor da École Polytechnique, ajudou Napoleão Bonaparte na sua expedição ao Egito e trabalhou em cargos administrativos na França após seu retorno do Egito. Seu trabalho de maior destaque foi o *Teoria Analítica do Calor*, publicado em 1822. Fourier apresentou à Academia de Ciências da França um artigo sobre a propagação do calor em 1807, onde dizia, segundo Eves (2011, p. 526) "que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno", ou seja, toda função pode ser escrita como uma série trigonométrica. Essa afirmação fez com que os juízes, a saber, Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix não só rejeitassem o artigo, mas o criticassem severamente. Anos depois, em seu trabalho *Teoria Analítica do Calor*, Fourier apresenta, segundo Roque, a seguinte definição sobre função.

> Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, os quais cada um é arbitrário. Uma infinidade de valores sendo atribuídos à abscissa x, existe um número igual de ordenadas fx. Todas têm valores numéricos atuais, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma à outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (ROQUE, 2012, p. 319-320)

No trabalho de Fourier também é destacado que ele encontra a solução do problema sobre como o calor se espalha numa massa metálica considerando apenas um intervalo, algo que até então não houvera sido abordado, pois até então se considerava que uma função era bem estabelecida por sua expressão analítica. Por fim, seu trabalho impactou grandemente não só a Matemática, mas também a Física, sendo hoje em dia estudada as Séries de Fourier nos cursos de Física e Matemática.

A próxima definição de função vem do matemático Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Nascido em Duren, na Alemanha, foi professor em Breslau, Berlim e em Gottingen, sendo chamado para esta última após a morte de seu mestre, Gauss. Contribuiu no campo da Teoria dos Números, discutiu as condições de integrabilidade de funções e seus estudos sobre a convergência das séries de Fourier nos chama a atenção devido à definição que ele dá sobre função. Em seu trabalho *Sobre a convergência das séries trigonométricas que servem para representar uma função arbitrária entre limites dados* ele fornece o seguinte exemplo de função, que não pode ser integrável tendo em vista a definição de função que se tinha até então:

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se x é racional} \\ 1, & \text{se x é irracional} \end{cases}$$

Daí, ele concluiu que era necessário investigar antes a condição de integrabilidade de uma função num certo intervalo para que se pudesse encontrar a solução do problema de convergência das séries de Fourier. A partir disso, percebeu-se quão necessário era revisar a definição de função. Então uma versão revisada de um artigo seu de 1829 foi publicada em 1837, trazendo a seguinte definição de função:

> Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (ROQUE, 2012, p. 365)

Essa definição dada por ele é bem próxima da que usamos hoje em dia.

Durante muito tempo na história da Matemática havia uma repulsa e um ceticismo em relação ao infinito. Muitos matemáticos não ousavam penetrar no campo da infinitude, e os que tentavam tinham seus trabalhos duramente criticados. Mesmo assim, graças a dois amigos esse campo foi explorado, dando subsídio para chegarmos ainda mais perto da definição atual de função e como abordamos esse conteúdo. O primeiro deles é Richard Dedekind (1831-1916). Nascido em Brauschweig na Alemanha, foi um grande matemático que contribuiu ricamente para a Teoria dos Conjuntos, principalmente na construção dos números reais. Ele apresenta no seu livro *Continuidade e números irracionais* um método para a construção dos irracionais a partir dos racionais. Esse método é chamado de "Cortes de Dedekind". Segundo Mol (2013, p. 132), "o trabalho de Dedekind, pela primeira vez na história, apresentou uma definição satisfatória para a noção de contínuo". Com esse trabalho, ele mostra a propriedade da completude dos números reais a qual é muito importante para o estudo de funções.

Outro grande matemático a contribuir para a teoria de funções foi o amigo e colaborador de Dedekind, Georg Cantor (1845-1918). Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia, e foi professor na Universidade de Halle, onde lecionou quase toda a vida. Entre os resultados obtidos em seus estudos, Cantor estabelece uma relação biunívoca entre os racionais e os naturais, mostrou que não há como fazer essa correspondência entre os reais e os naturais, provou que o conjunto dos subconjuntos de um conjuntos tem uma potência (cardinalidade) maior que o próprio conjunto, entre outros resultados muito importantes.

Seguindo daí, a visão de função passa a ser de uma relação entre conjuntos e não somente a expressão analítica em si. Toma forma assim a definição atual de função e muito da sua teoria passa a se assentar nas transformações que um valor de um conjunto passa para ser um valor em outro conjunto, denominados de domínio e contradomínio através de uma lei de formação ou de até mesmo instruções escritas na língua vernácula; em como representar graficamente essa função geometricamente, obter valores pedidos, analisar intervalos de viabilidade e por aí vai.

Vemos assim que o conceito de função que será definido na próxima seção passou por várias mudanças e que a definição usada hoje é válida dentro do corpo de conhecimentos construídos até então que foram e que não foram questionados, podendo ocorrer mudanças até mesmo na nossa concepção de função daqui a um ano, uma década ou mais tempo.

Capítulo 2

Teoria das Funções

Após mencionarmos aspectos históricos relativo a funções, neste capítulo faremos uma exposição sucinta de conceitos, definições e propriedades os quais são conhecimentos imprescindíveis para que o aluno se aproprie.

O conceito de uma função é uma generalização da noção comum de fórmula matemática. As funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois conjuntos. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x (às vezes denominado variável independente) um único valor da função f(x) (também conhecido como variável dependente).

De modo mais formal temos.

Definição 1. *Dados dois conjuntos,* A *e* B*, ambos não vazios, chamamos de função* f *uma relação que faz corresponder a todo elemento de A, chamado de domínio, um único elemento de B, chamado de contradomínio, ou seja, todo elemento* $x \in A$ *se corresponde com um único elemento* $f(x) \in B$.

Geralmente quando os conjuntos A e B não são dados, considera-se o maior conjunto possível.

Sobre a definição de função, temos que considerar o seguinte:

1. O conjuntos de todos os valores de x para os quais a função está definida se chama *Domínio da função* f e é representado por $D(f)$.

2. O conjunto formado por todos os $f(x)$ é chamado *Conjunto imagem de* f e é representado por $Im(f)$.

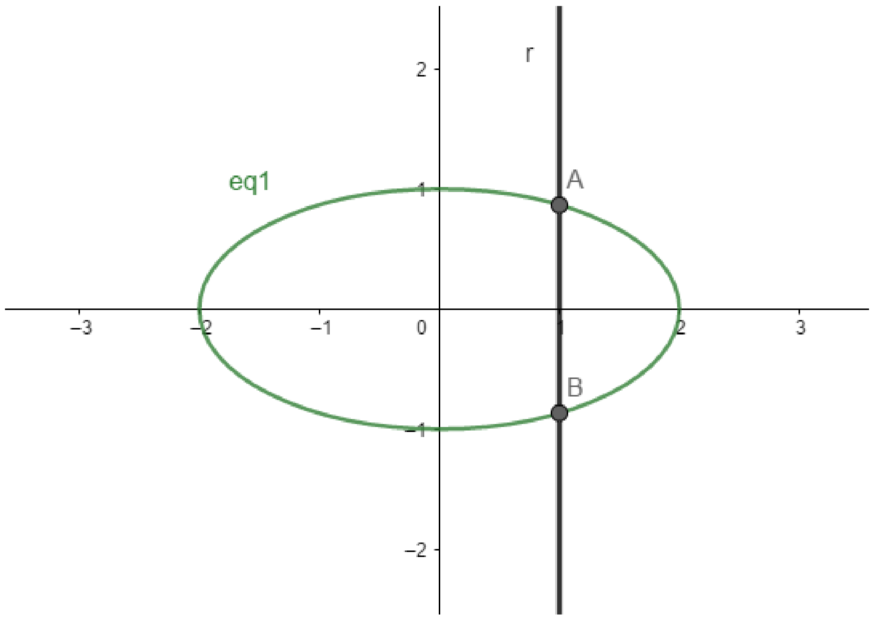
3. Se um valor de $x \in A$ possui mais de uma imagem, então f não é função.

Geralmente, o domínio é mencionado como conjunto de partida, ou seja, o conjunto onde seus valores são primeiro utilizados e substituídos no lugar da variável na função. O conjunto imagem é o conjunto de chegada, ou seja, o conjunto onde os valores do domínio encontram seus correspondentes depois de serem substituídos na função.

A relação dada por uma função pode ser representada através de uma equação, de um relacionamento gráfico, de diagramas representando os dois conjuntos, de uma regra de associação, de uma tabela de correspondência, etc. Muitas vezes, é útil associar cada par de elementos relacionados pela função com um ponto em um espaço adequado (por exemplo, o plano cartesiano). Neste caso, a exigência de unicidade da imagem (valor da função) implica um único par para cada entrada x (valor do argumento).

Para testarmos se uma relação é uma função real de variáveis reais, podemos utilizar o artifício de passar uma reta paralela ao eixo das ordenadas e ver se toca o gráfico da relação em mais de um ponto. Se isso ocorrer, não é função, caso contrário, é função. Vejamos no esquema a seguir.

Figura 2.1: Exemplo de não função



Fonte: Autor

No exemplo da figura 2.1, temos o gráfico da equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ e a reta $r : x = 1$. Nesse exemplo, podemos ver que reta r passa pelos pontos A e B, sendo assim, no ponto que a reta r intercepta o eixo das abcissas, o valor de x correspondente possui duas imagens, logo, o gráfico da figura 2.1 representa uma função.

Caso o gráfico da figura não seja dado, podemos utilizar a equação dada para determinar se é ou não função. Basta tomarmos um valor arbitrário do domínio e verificamos se possui somente uma imagem.

Vejamos o caso de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Nele os valores de $x \in [-2, 2]$. Tomemos o valor $x = 0$ e resolvamos a equação:

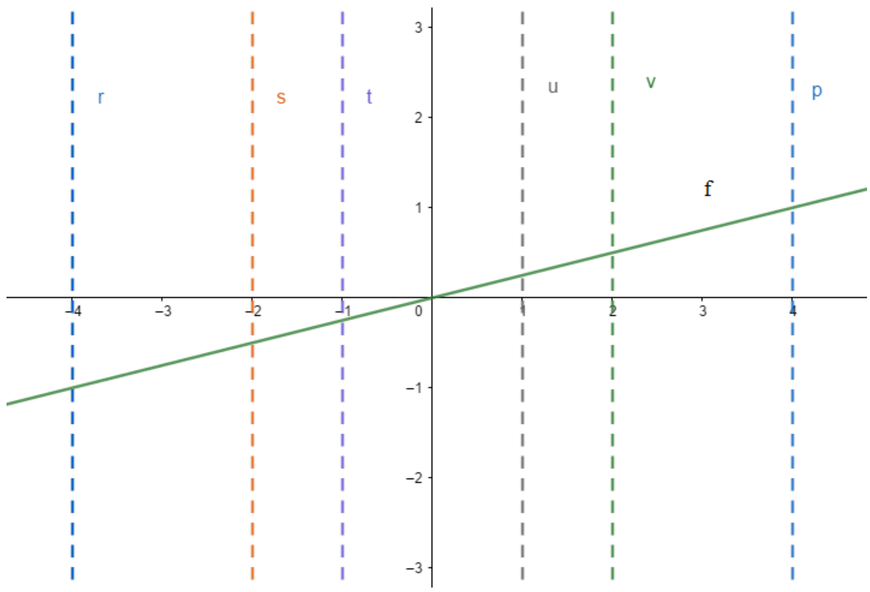
Solução:

$$0 + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Como obtemos dois valores de y, o gráfico de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ não representa uma função.

Agora observemos o exemplo a seguir.

Figura 2.2: Exemplo de não função



Fonte: Autor

Nesse gráfico, temos a reta $f : 4y - x = 0$ e todas as outras retas interceptam f em um único ponto. Assim, o gráfico de f representa a função $f(x) = \frac{x}{4}$.

As funções nem sempre são representadas por sua lei de formação ou graficamente, podendo também ser representadas pela linguagem vernácula ou através de tabelas de valores. Segue aqui um exemplo de cada forma:

1. A cada número natural faça corresponder o seu sucessor.

2. A tabela abaixo relaciona o gasto de uma pessoa em função da quantidade de unidades que adquire de certo produto.

Tabela 2.1: Custo em função da quantidade de unidades compradas

Quantidade	2	4	5	6	10
Custo (R$)	4	8	10	12	20

Fonte: Autor

Agora, vejamos quando uma função é injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

Definição 2. *Uma função* f *de domínio* A *e contradomínio* B *é dita injetiva quando, para todo* $x_1 \in A$ *e todo* $x_2 \in A$*, com* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$*.*

Da definição acima, podemos concluir que se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. De outra forma, a função não é injetiva.

Definição 3. *Uma função* f *de domínio* A *e contradomínio* B *é dita sobrejetiva quando, para todo* $y \in B$ *existe pelo menos um* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$*.*

Temos que observar que a definição acima de função sobrejetiva não nos diz que o valor de $x \in A$ é único, e sim que tem que existir ao menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Diz-se também que a função é sobrejetiva quando o conjunto imagem de f é igual ao contradomínio de f.

Definição 4. *Uma função f de domínio* A *e contradomínio* B *é dita bijetiva quando ela é injetiva e sobrejetiva.*

Conta-se que antigamente os pastores ao deixar suas ovelhas pastarem, faziam o seguinte: para cada ovelha que saía eles pegavam uma pedra. Quando elas voltavam, a cada ovelha que passasse pela porta do curral eles jogavam uma pedra fora das que tinham colhido. Se não sobrasse nenhuma pedra significava que todas haviam retornado. Se sobrasse, significava que a quantidade que sobrou era o número de ovelhas perdidas. Esse é um belo exemplo de função bijetora, onde cada elemento do conjunto das ovelhas se relaciona com um único elemento do conjunto das pedras, e todas as pedras possuem uma ovelha correspondente.

Conforme suas características e definições, as funções são classificadas em várias categorias, entre as principais temos: função afim (ou função polinomial do 1° grau), função quadrática (ou função polinomial do 2° grau), função polinomial, função modular, função exponencial, função logarítmica, função trigonométrica, dentre inúmeras outras.

2.1 Função Afim ou Polinomial do 1º Grau

Definição 5. *Uma relação* f *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *é chamada de função afim quando todo* $x \in \mathbb{R}$ *estiver relacionado com* $ax + b \in \mathbb{R}$*, com* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*, ou seja:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow ax + b$$

A função afim representa várias situações simples do cotidiano onde há crescimento ou decrescimento constante, tendo ou não uma quantidade inicial, como por exemplo, a quantidade de dinheiro obtido com a venda de um produto por certo preço; o valor dos juros que uma pessoa pagará no regime de juros simples; entre várias outras situações, desta forma fica evidente a importância do estudo das funções afins Das funções afins derivam as funções linear (quando $b = 0$); identidade (quando $a = 1$ e $b = 0$) e constante (quando $a = 0$).

Na função afim, as constantes a e b são chamadas de coeficiente angular ou taxa de variação e coeficiente linear ou valor constante, respectivamente. Nos problemas envolvendo função, encontrando esses valores temos achado a lei de formação da função. Vejamos como encontrar esses valores num problema contextualizado.

Exemplo 1: Um taxista cobra R$ 4,00 na bandeirada e um valor de R$ 3,25 por cada quilômetro percorrido. Encontre a expressão que fornece o custo da corrida.

Solução:

Bem, esse exemplo serve para verificarmos o que varia e o que não varia nesses tipos de problema. O que não varia é a taxa fixa, que será o nosso b e o que varia será a taxa de variação, que é o nosso a. Nesse caso, podemos perceber que o valor de R$ 4,00 é uma taxa fixa, que independe da quantidade de quilômetros que serão percorridos, enquanto o valor de R$ 3,25 depende de quantos quilômetros irá ser percorrido. Sendo assim, $b = 4$ e $a = 3,25$. Chamando de x a quantidade de quilômetros que irá ser percorrido, a nosso função é $f(x) = 3,25x + 4$.

Em situações envolvendo funções afim é sempre importante perceber o que será alterado pela variável. Esse valor sempre será o coeficiente angular, e o que não for alterado será sempre o coeficiente linear.

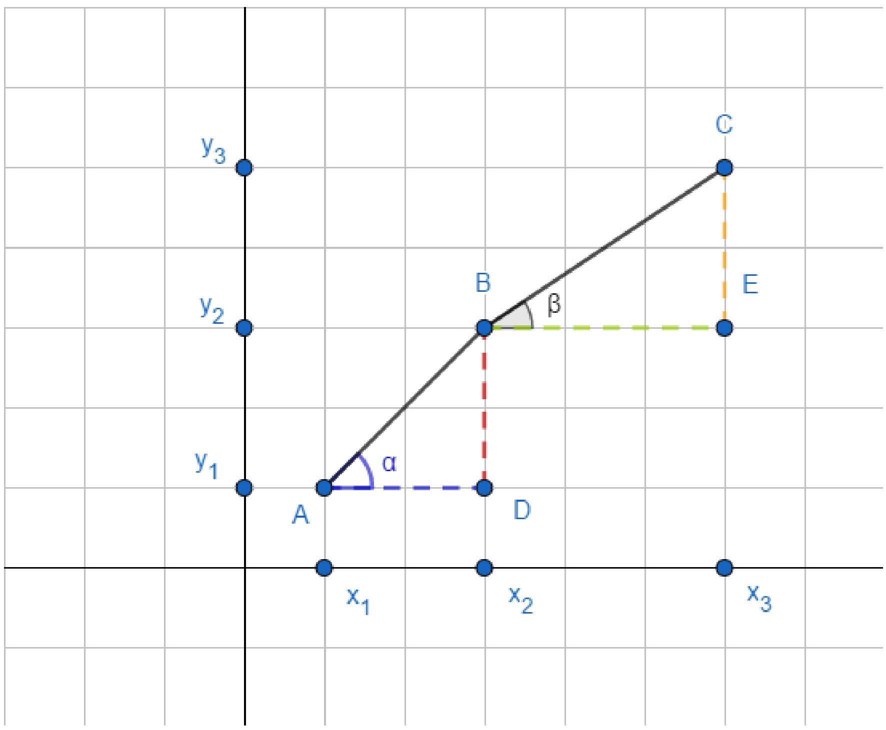
2.1.1 Gráfico da Função Afim

Definição 6. *O gráfico da função* $f(x) = ax + b$ *é uma reta.*

Para demonstrarmos que o gráfico da função afim é uma reta basta mostrarmos que dados três pontos do gráfico da função eles estão alinhados.

Demonstração. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos do gráfico da função $f(x) = ax + b$, conforme a figura a seguir.

Figura 2.3: Gráfico da Função f



Fonte: Autor

Sendo A, B e C pontos que pertencem ao gráfico, temos:

$$y_1 = ax_1 + b \tag{2.1}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{2.2}$$

$$y_3 = ax_3 + b \tag{2.3}$$

Fazendo $2.2 - 2.1$ e $2.3 - 2.2$, obtemos:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a \tag{2.4}$$

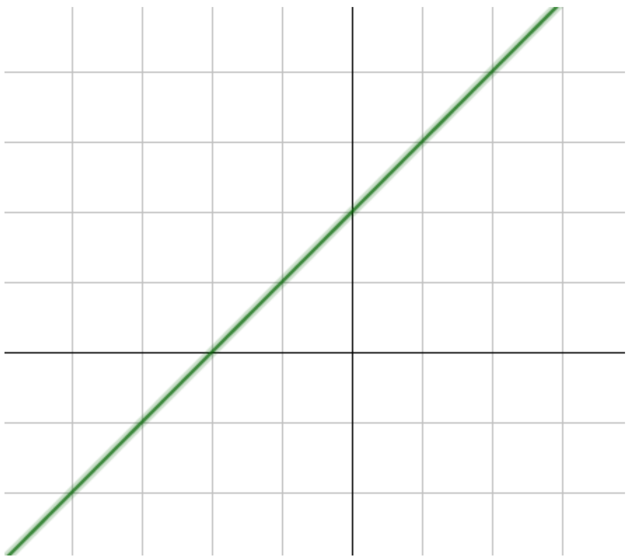
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \tag{2.5}$$

Daí, por transitividade, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Logo, $tg(\alpha) = tg(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$, em que α e β são os ângulos destacados na figura 2.3. Concluímos então que A, B e C estão alinhados e portanto, o gráfico de f é uma reta.

$\square$

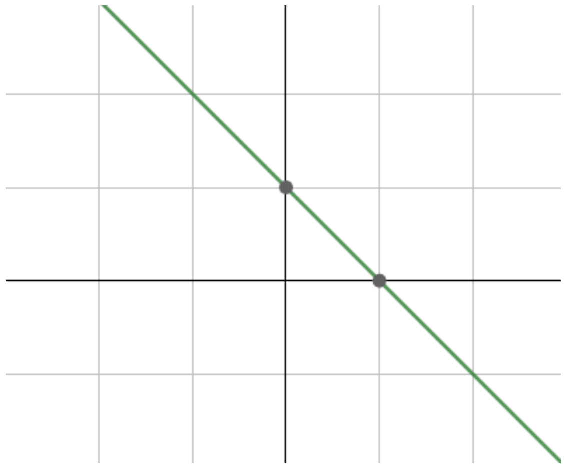
A inclinação do gráfico da função afim, que mede a taxa de variação de y em relação à x, depende do sinal do coeficiente angular. Se ele for positivo, a função é crescente, mas se for negativo, a função é decrescente, conforme as figuras 2.4 e 2.5 a seguir, respectivamente.

Figura 2.4: Gráfico da Função Crescente



Fonte: Autor

Figura 2.5: Gráfico da Função Decrescente



Fonte: Autor

Já o coeficiente linear b determina onde o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas.

2.1.2 Zero da Função Afim

Definição 7. *O zero ou raiz da função afim é o valor de* x *para o qual* $ax + b = 0$.

Para determinar o zero da função afim basta resolver a equação $ax + b = 0$. No gráfico, o zero da função é o ponto no qual a reta intercepta o eixo das abcissas. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2: A função $L(x) = 3x - 600$ fornece o lucro que uma empresa tem ao vender uma quantidade x de um certo produto. Qual a quantidade de produtos que terão de ser vendidos para que a empresa não tenha lucro e nem prejuízo?

Solução:

Para que não haja lucro e nem prejuízo é necessário que $3x - 600 = 0$. Portanto, temos:

$$3x - 600 = 0$$

$$3x = 600$$

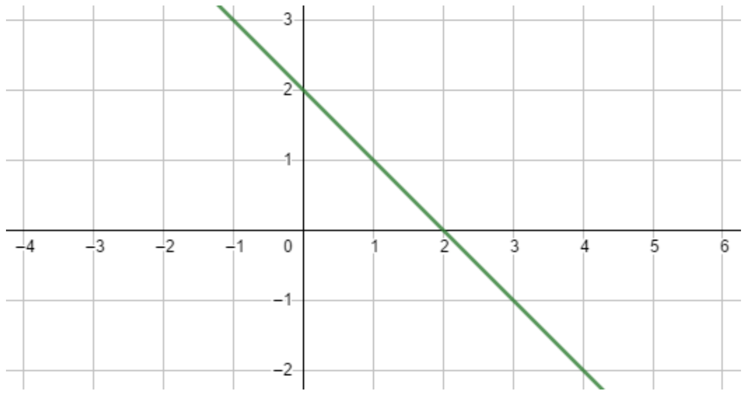
$$x = \frac{600}{3}$$

$$x = 200$$

Logo, terão que ser vendidas 200 unidades.

Exemplo 3: Qual o zero da função representada no gráfico a seguir?

Figura 2.6: Gráfico da Função $f(x) = -x + 2$



Fonte: Autor

Solução:

Como falado anteriormente, o ponto que o gráfico da função toca o eixo das abcissas é o zero da função. Portanto, $x = 2$ é o zero da função.

2.2 Função Quadrática ou Polinomial do 2º Grau

Definição 8. *Uma relação* f *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *é dita função polinomial do 2º grau ou função quadrática quando à todo* $x \in \mathbb{R}$ *fizer relacionar a* $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$*, com* $a \neq 0$*,* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$*.*

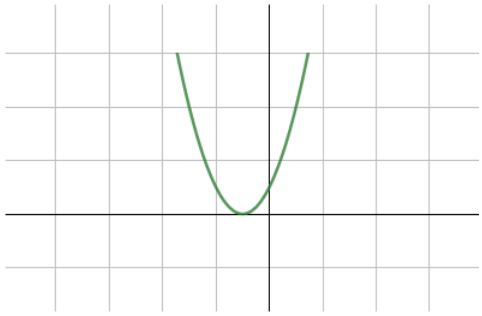
Da definição é óbvio que $a \neq 0$, caso contrário teríamos uma função polinomial do primeiro grau ou até mesmo constante.

A função quadrática tem relevante papel nos estudos em Física, como no lançamento de um projétil, no movimento uniformemente variado; é usada para achar máximos ou mínimos de funções lucro ou custo; usada na Arquitetura para o cálculo de arcos parabólicos nas construções, sem falar das suas aplicações em espelhos parabólicos, que são utilizados em fogões solares, nas antenas parabólicas entre outros assuntos e aplicações que justificam seu estudo.

2.2.1 Gráfico da Função Quadrática

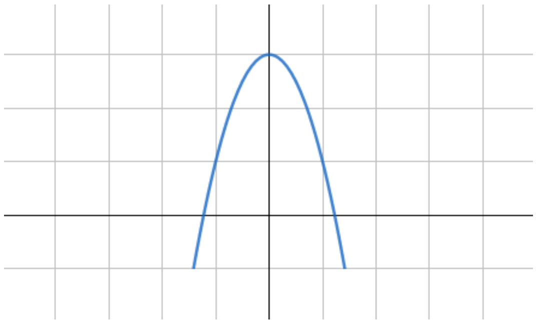
O gráfico de uma função quadrática é uma curva que tem a seguinte forma.

Figura 2.7: Gráfico da Função Quadrática com concavidade voltada para cima



Fonte: Autor

Figura 2.8: Gráfico da Função Quadrática com concavidade para baixo



Fonte: Autor

É possível identificar a posição da concavidade da curva analisando apenas o sinal do coeficiente a. Ou seja, em relação à concavidade do gráfico da função quadrática, vale destacar que:

1. Quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima, conforme a figura 2.7.

2. Quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, conforme a figura 2.8.

Essa característica é bastante importante pois ajuda a analisar e relacionar a lei de formação com a representação gráfica dessa função.

Por fim, o coeficiente c corresponde ao ponto que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas.

Dica: Toda vez que quiser saber onde o gráfico toca o eixo das ordenadas, faça $x = 0$ na função. Se quiser saber onde toca o eixo das abcissas, basta encontrar os zeros da função, caso existam.

2.2.2 Zeros da Função Quadrática

Definição 9. *Os zeros da função quadrática são os valores de x que fazem com que* $ax^2 + bx + c = 0$

Vejamos como chegar à fórmula conhecida como Fórmula de Bháskara para a resolução de $ax^2 + bx + c = 0$

Demonstração. Como queremos os valores de x para que $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

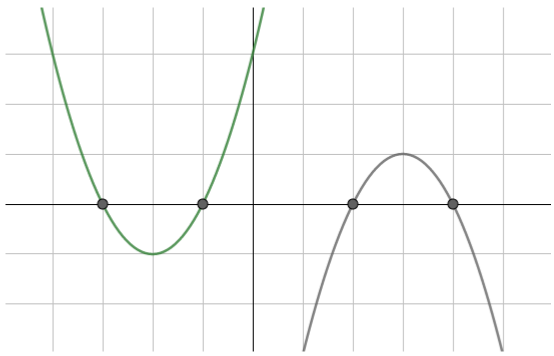
$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

Logo, chegamos que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$. □

A quantidade de raízes que uma equação do segundo grau possui depende do valor de Δ da seguinte forma:

1. Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas.

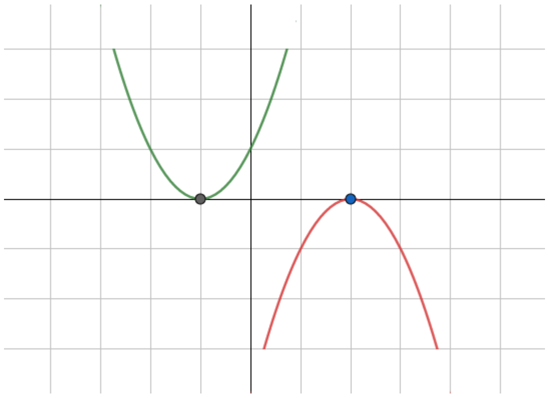
Figura 2.9: Gráficos de Funções Quadráticas quando possuem duas raízes



Fonte: Autor

2. Se $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma raiz real.

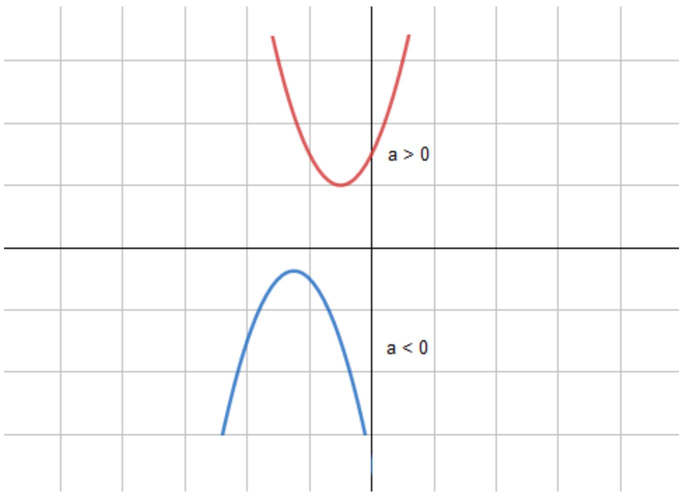
Figura 2.10: Gráficos de Funções Quadráticas quando possuem uma raiz



Fonte: Autor

3. Se $\Delta < 0$, a equação não possui raiz.

Figura 2.11: Gráficos de Funções Quadráticas que não possuem raízes



Fonte: Autor

Graficamente, os zeros reais da função quadrática são os pares ordenados que o gráfico da função toca o eixo das abcissas.

2.2.3 Máximo e Mínimo da Função Quadrática

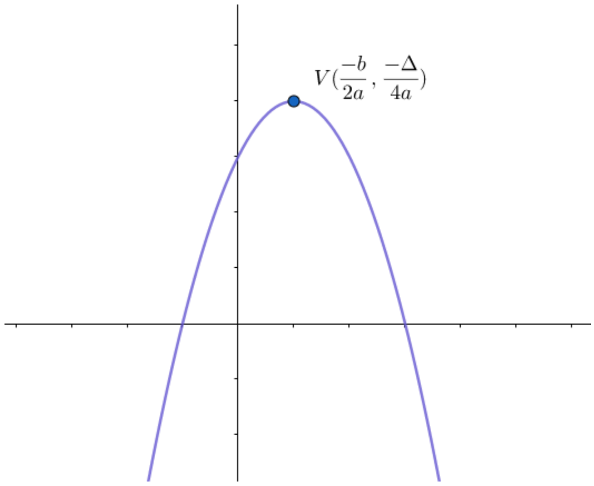
Uma das partes mais importantes do estudo das funções quadráticas é a respeito do máximo e mínimo que essa função pode assumir e para quais valores isso ocorre.

Portanto, vejamos quando ocorre o máximo e o mínimo.

Proposição 1. *A função quadrática assume valor máximo ou valor mínimo* $y = \frac{-\Delta}{4a}$ *quando* $x = \frac{-b}{2a}$*. O valor máximo ocorre quando* $a < 0$ *e o valor mínimo quando* $x > 0$*.*

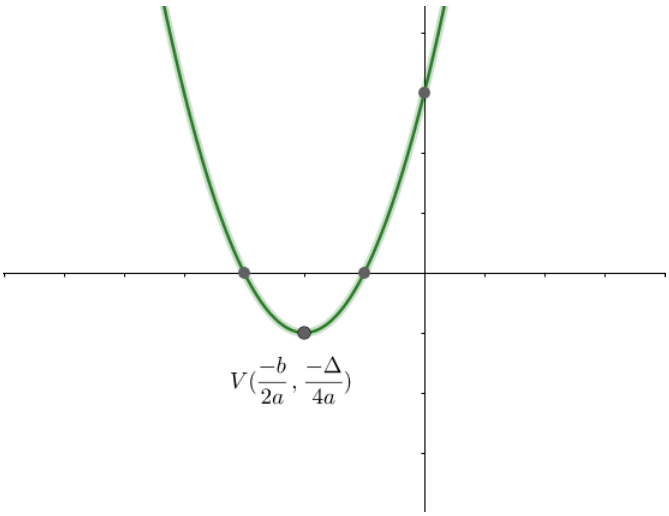
O ponto de máximo ou de mínimo do gráfico da função é o vértice $V(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a})$.

Figura 2.12: Ponto de máximo da Função Quadrática



Fonte: Autor

Figura 2.13: Ponto de mínimo da Função Quadrática



Fonte: Autor

Tanto para o ponto de máximo quanto para o ponto de mínimo a fórmula é a mesma. O que vai determinar se vai ser máximo ou mínimo será o sinal do coeficiente a.

2.3 Função por Partes

Geralmente a função por partes é utilizada quando uma situação é modelada por certas sentenças dentro de certos intervalos do seu domínio. Dentre as aplicações dessa função estão o cálculo do imposto de renda, da conta de energia e de água. Ela é de fundamental importância dentro da Matemática e das outras ciências que se relacionam com essa disciplina, como a Biologia, Química e Física. Portanto, se faz necessário que o discente saiba lidar com esse tipo de função.

Definição 10. *Uma função por partes é uma função definida por duas ou mais sentenças em seu domínio.*

Vejamos alguns exemplos dessa função.

Exemplo 4: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemplo 5: Considere a função a seguir

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x < 5 \\ x-1, & 5 \leqslant x \end{cases}$$

A função dada por partes não possui um número limite de sentenças que a definam. A situação a ser modelada por esse tipo de função é que determina a quantidade de sentenças.

2.3.1 Função Modular

Definição 11. *Uma relação que associa cada* $x \in \mathbb{R}$ *a seu correspondente* $|x| \in \mathbb{R}$ *recebe o nome de função modular*

A função modular é um caso de função por partes, onde utilizamos a definição de módulo de um número. Ela é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Analisemos o exemplo abaixo de função modular.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geqslant 3 \\ -x + 3, & x < 3 \end{cases}$$

Como a função modular sempre retorna uma valor não negativo, tomando qualquer valor dentro do domínio podemos perceber que a imagem é sempre positiva ou zero. Nesse caso, a lei de formação função poderia ser escrita como $f(x) = |x - 3|$. Agora, se fosse dado a lei de formação $f(x) = |x - 3|$, como proceder para escrevê-la em forma de sentenças? Para que isso seja feito, basta resolver a inequação $x-3 \geqslant 0$. A outra condição já será determinada a partir da resolução dessa inequação. Daí, basta usar a definição de módulo, ou seja

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Consideremos o problema de escrever a função $f(x) = |-x + 5|$ em partes.

Solução: Primeiramente, temos que resolver a inequação $-x + 5 \geqslant 0$.

$$-x + 5 \geqslant 0 \Rightarrow 5 \geqslant x \Rightarrow x \leqslant 5$$

Daí, $|-x + 5| = -x + 5$ se $x \leqslant 5$. Então, $|-x + 5| = x - 5$ se $x > 5$. Portanto, a função dada por partes fica assim:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5, & x \leqslant 5 \\ x - 5, & x > 5 \end{cases}$$

2.3.2 Gráfico da Função Por Partes

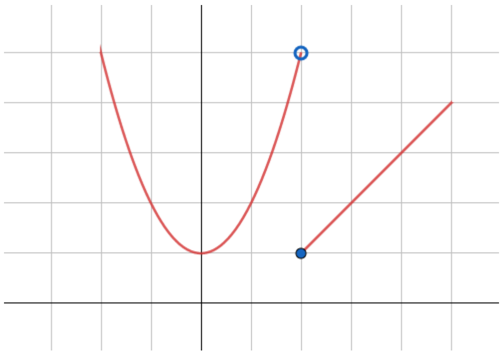
Para fazermos o gráfico de uma função por partes, temos que considerar os intervalos de cada sentença. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6: Construa o gráfico da função a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 2 \\ x^2+1, & x < 2 \end{cases}$$

Solução: Para construir o gráfico dessa função, construímos os gráficos das duas sentenças e apagamos a parte para as quais elas não estão definidas, ou seja, para $x < 2$ apagamos a parte do gráfico de $x-1$, deixando o ponto $x = 2$, pois ele tem imagem por essa sentença, portanto, coloca-se uma bola fechada nele. Daí, para $x \geqslant 2$, apagamos a parte do gráfico de x^2+1 e deixamos uma bola aberta no gráfico, pois $x = 2$ não possui imagem por essa sentença. Assim, o gráfico dessa função fica dessa forma.

Figura 2.14: Gráfico da Função do Exemplo 6

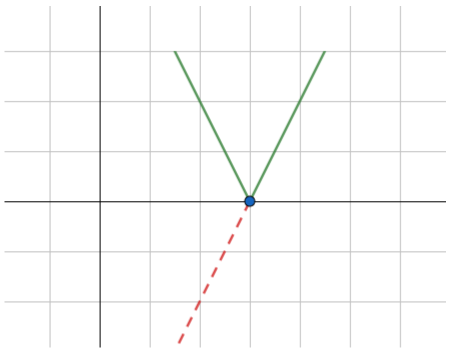


Fonte: Autor

Exemplo 7: Construa o gráfico da função $f(x) = |2x-6|$.

Solução: Para esta função, basta que fazer o gráfico de $2x-6$ e refletir a parte do gráfico que ficar abaixo do eixo das ordenadas.

Figura 2.15: Gráfico da Função do Exemplo 7



Fonte: Autor

A parte verde corresponde à função $f(x) = |2x - 6|$ e a parte vermelha faz parte da função $f(x) = 2x - 6$.

Ao fazer o gráfico da função modular, sempre se reflete a parte que possui imagem negativa em relação ao eixo das abcissas. É como se pintasse a parte que tem imagem negativa e dobrasse bem no eixo x, formando uma imagem simétrica acima desse eixo.

2.4 Função Exponencial

Definição 12. *Sendo $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1$, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ a $a^x \in \mathbb{R}$ é chamada de função exponencial. Chamamos a de base da função exponencial.*

A função exponencial é estritamente crescente ou estritamente decrescente, o que ocorre quando $1 < a$ ou quando $0 < a < 1$, respectivamente.

A função exponencial, em particular, possibilita expressar um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza, bem como está presente nos cálculos relacionados aos juros compostos, importantes na matemática financeira. Esse tipo de função é adequada para expressar situações onde ocorrem grandes variações em períodos curtos. Por exemplo, sob certas condições, pode-se representar o crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias de uma cultura em função do tempo t medido em horas.

2.4.1 Propriedades

Vejamos algumas propriedades úteis ao estudo de funções exponenciais.

P_1: Se $a > 1$ e $m > n$, então $a^m > a^n$ para todo $m, n \in \mathbb{R}$

P_2: Se $0 < a < 1$ e $m > n$, então $a^m < a^n$.

P_3: Para todo $0 < a \neq 1$, se $a^m = a^n$, então $m = n$.

P_4: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

P_5: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.

P_6: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

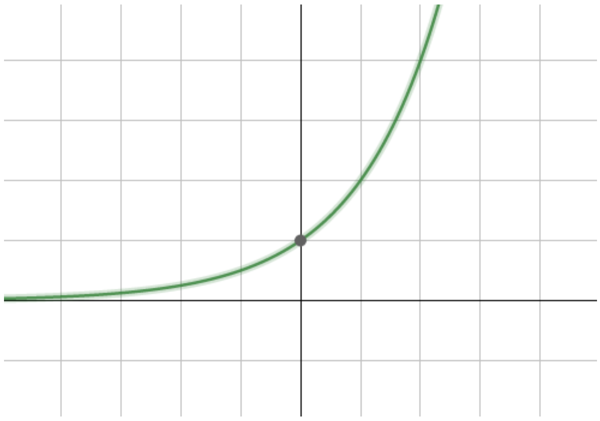
P_7: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

P_8: $(\dfrac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

2.4.2 Gráfico da Função Exponencial

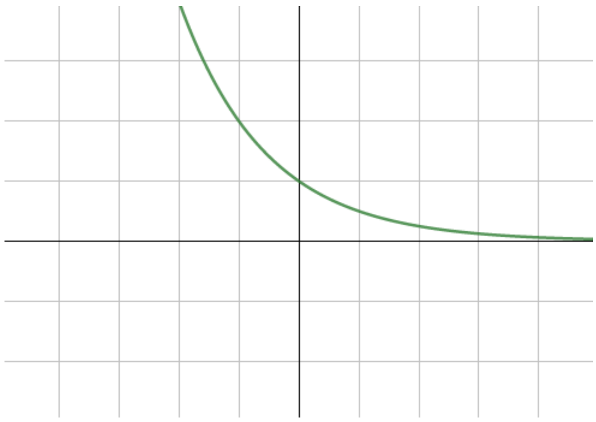
O gráfico da função exponencial depende do valor de a, tendo as seguintes formas a seguir.

Figura 2.16: Gráfico da Função Exponencial quando $a > 1$



Fonte: Autor

Figura 2.17: Gráfico da Função Exponencial quando $0 < a < 1$



Fonte: Autor

A função exponencial é estritamente positiva. Como podemos perceber pelas figuras 2.16 e 2.17, o gráfico da função exponencial está acima do eixo x e sempre corta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

2.5 Função Logarítmica

As funções logarítmicas são as funções em que utilizam na sua lei de formação o operador logaritmo. Como o logaritmo é a operação inversa da exponencial, seus respectivos tipos de função também são inversas uma da outra. Por este motivo, as funções logarítmicas são na maioria das vezes utilizadas nas mesmas áreas de aplicações das funções exponenciais.

Antes de definirmos função logarítmica, precisamos definir o que é logaritmo e conhecer algumas propriedades essencias para operar com logaritmos. Portanto, apresentaremos primeiro a definição de logaritmo e suas propriedades.

Definição 13. *Sejam* a *e* b *dois números reais positivos, com* $a \neq 1$. *Chamamos de logaritmo de* b *na base* a *o expoente que se deve dar à* a *de modo que a potência seja* b, *ou seja,* $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Na definição acima, a se chama base, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

2.5.1 Propriedade dos Logaritmos

Vejamos agora algumas propriedades operatórias dos logaritmos.

P_1: $\log_a 1 = 0$

P_2: $\log_a a = 1$

P_3: $a^{\log_a b} = b$

P_4: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

P_5: $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$

P_6: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

P_7: $\log_a b^y = y \cdot \log_a b$

P_8: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

As propriedades acima são bem importantes, sendo fundamental não só para que o aluno manipule com habilidade a função logarítmica, mas tenha a inteira compreensão de sua definição.

2.5.2 Função Logarítmica

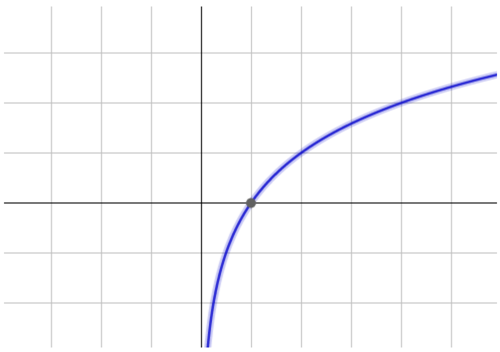
Definição 14. *Dado* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < a \neq 1$, *a função* f *que transforma cada* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *em* $\log_a x \in \mathbb{R}$ *é chamada função logarítmica. Ela é crescente quando* $a > 1$ *e decrescente quando* $0 < a < 1$.

Inversa da função exponencial, assim como ela, a função logarítmica possui em série de aplicações. Como exemplo de aplicação, temos o cálculo do pH de substâncias, a magnitude de um terremoto, o crescimento de uma cultura de bactérias, a análise do crescimento de uma população, o cálculo de tabelas financeiras referentes ao regime de juros compostos, o decaimento radiativo entre as várias aplicabilidades desse conteúdo, sendo assim útil nas ciências da natureza, nas ciências exatas e nas ciências sociais.

2.5.3 Gráfico da Função Logarítmica

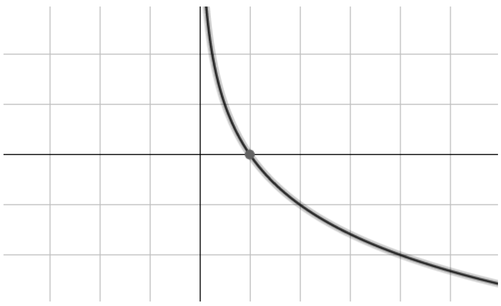
O gráfico da função logarítmica assume o seguinte aspecto, que varia de acordo com o valor da base a.

Figura 2.18: Gráfico da Função Logarítmica quando $a > 1$



Fonte: Autor

Figura 2.19: Gráfico da Função Logarítmica quando $0 < a < 1$



Fonte: Autor

Pela propriedade P_1, independentemente da base, sempre o gráfico da função passará sempre no ponto $(1, 0)$.

2.6 Funções Trigonométricas

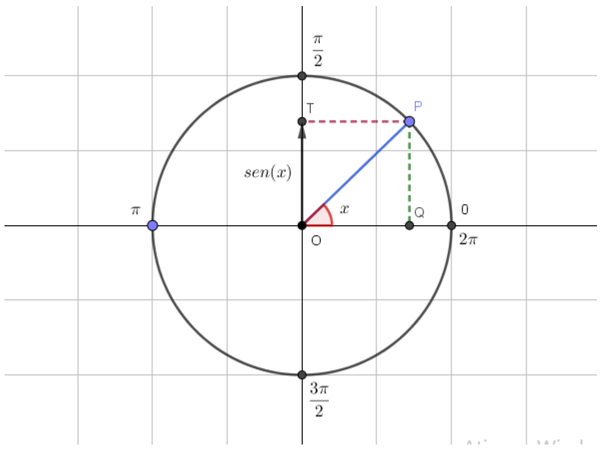
Como tudo na Matemática tem um motivo para seu estudo, com as funções trigonométricas não é diferente. Assim como as funções anteriores, suas aplicabilidades justificam sua necessidade de ensino e aprendizagem. Na Física, dentre os conteúdos que possuem aplicações de função trigonométricas podemos destacar o estudo dos movimentos ondulatórios, das correntes alternadas, o estudo de um sistema de forças, a reflexão e refração de raios paralelos, dentre vários outras. Além disso, temos nesse conteúdo uma ferramenta poderosa para cálculo de grandes distâncias através do método da triangulação, que pode ser utilizado na Astronomia, Engenharia, Agrimensura e Arquitetura.

2.6.1 Função Seno

Definição 15. *Uma relação é chamada função seno quando faz corresponder cada* $x \in \mathbb{R}$ *a um* $sen(x) \in \mathbb{R}$.

Analisemos o ciclo trigonométrico a seguir.

Figura 2.20: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor

Pelo ciclo trigonométrico, dado um ângulo x, $sen(x) = \frac{PQ}{OP}$. Como $OP = 1$, pois o ciclo trigonométrico tem raio igual a 1, $sen(x) = PQ$, que por sua vez é igual a OT. Logo, $sen(x) = OT$.

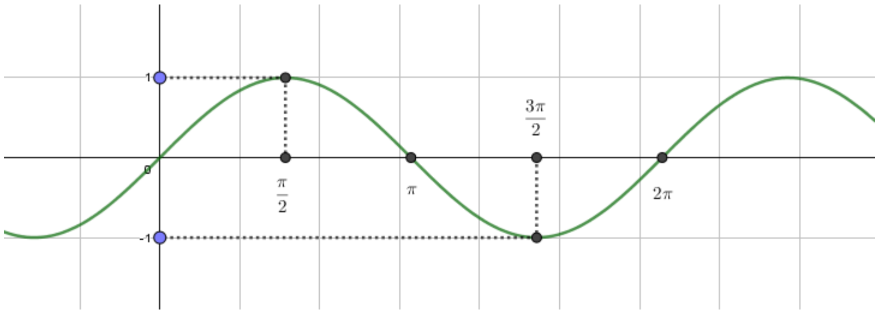
A função $f(x) = sen(x)$ é periódica de período 2π, ou seja, dado um ângulo x, se acrescentarmos 2π à x quantas vezes quisermos, a imagem será a mesma, isto é,

$\mathsf{sen}(x) = \mathsf{sen}(x + 2n\pi)$, com $n \in \mathbb{Z}$ e sua imagem $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

2.6.2 Gráfico da Função Seno

O gráfico da função seno está representado na figura abaixo.

Figura 2.21: Gráfico da função Seno



Fonte: Autor

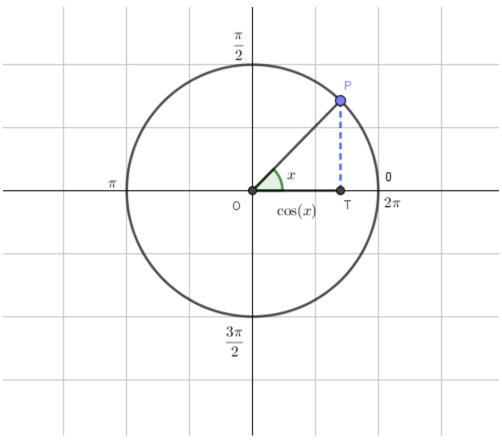
Note que a imagem da função varia de -1 a 1, e que passa pelo ponto $(0, 0)$.

2.6.3 Função Cosseno

Definição 16. *Uma relação é chamada de função cosseno quando faz corresponder cada* $x \in \mathbb{R}$ *a um* $\cos(x) \in \mathbb{R}$.

Analisemos o ciclo trigonométrico novamente.

Figura 2.22: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Autor

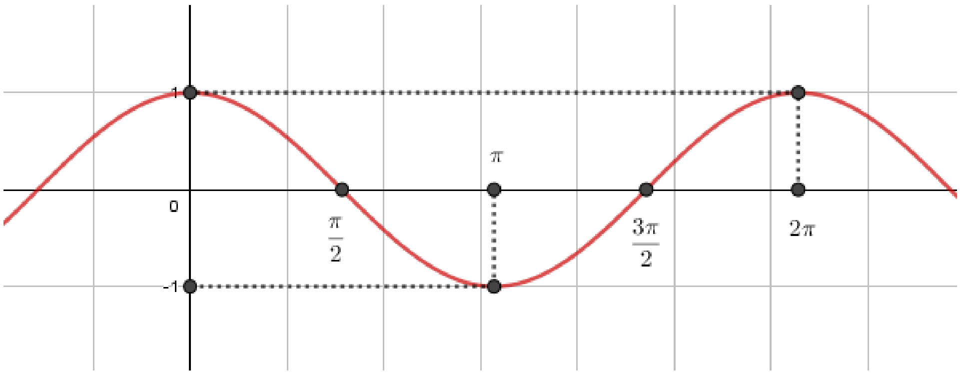
Pelo ciclo trigonométrico, $\cos(x) = \frac{OT}{OP}$. Sendo $OP = 1$, temos então que $\cos(x) = OT$.

Assim como a função seno, a função cosseno é periódica de período 2π, ou seja, $\cos(x) = \cos(x + 2n\pi)$, com $n \in \mathbb{Z}$; e sua $Im(f) = [-1, 1]$.

2.6.4 Gráfico da Função Cosseno

O gráfico da função cosseno tem o seguinte aspecto.

Figura 2.23: Gráfico da Função Cosseno



Fonte: Autor

Podemos perceber pelo gráfico que a imagem da função varia de -1 a 1 e que ele passa pelo ponto $(0, 1)$.

Capítulo 3

Habilidades e Competências Esperadas de um Concludente do Ensino Médio

Após concluído o ensino fundamental, os estudantes tem pela frente a jornada do ensino médio, onde os assuntos matemáticos se apresentam de forma mais complexa, abstrata e interconectada entre si. Deles, espera-se que obtenham o nível mínimo de conhecimentos matemáticos necessários à sua vida pessoal e acadêmica, caso queiram continuar seus estudos ingressando no ensino superior, e vida profissional.

Em Matemática, mais especificamente em se tratando de funções, o trabalho de abordagem deste tema na escola é desafiador, tanto para os alunos quanto para o professor. As funções fazem parte do nosso cotidiano e estão presente na realização das coisas mais elementares que fazemos. Assim, são necessárias metodologias diferenciadas, produção e análise de gráficos, como também o estudo de suas aplicações. O principal desafio é criar condições para que o aluno trabalhe com a aplicação prática de função e possa adquirir um melhor entendimento do conteúdo de modo a se apropriar desse conhecimento para modelar e interpretar situações práticas.

Para tal, existem documentos governamentais que norteiam a prática docente quantos aos conteúdos que devem ser abordados e as habilidades e competências que os alunos devem adquirir durante o ensino médio.

Neste capítulo apresentaremos as competências e habilidades que os alunos devem adquirir em relação a funções e que estão presentes na Base Nacional Curricular Comum

(BNCC) e cobradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

3.1 BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da educação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Ele também determina que essas competências, habilidades e conteúdos devem ser os mesmos, independentemente de onde as crianças, os adolescentes e os jovens moram ou estudam. O documento foi homologado pelo Ministério da Educação (MEC) no dia 20 de dezembro de 2017 para as etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental e em 14 de dezembro de 2018 para a etapa do Ensino Médio.

A BNCC é ainda, segundo (BRASIL, 2017)

> um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

Em relação ao conteúdo de funções, a BNCC traz as seguintes competências e habilidades que os alunos devem adquirir ao longo do ensino médio, conforme o descritor dado no documento.

- **(EM13MAT101)** Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- **(EM13MAT302)** Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

- **(EM13MAT303)** Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

- **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.

- **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

- **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

- **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

- **(EM13MAT403)** Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.

- **(EM13MAT404)** Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- **(EM13MAT405)** Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.

- **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
- **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
- **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

3.2 ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi implementado em 1998 e avalia o desempenho escolar ao final da educação básica. Realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), colabora para o acesso à educação superior por meio do Sistema de Seleção Unificada (SISU), do Programa Universidade para Todos (Prouni) e de convênios com instituições portuguesas e a programas de financiamento e apoio estudantil, como o do Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies). Seus resultados também permitem o desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

O ENEM atualmente é a prova mais usada para acesso não só às universidades públicas como também às particulares do país. Em relação ao conteúdo de funções, o ENEM cobra as seguintes habilidades.

- **(H17)** Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

- **(H18)** Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
- **(H19)** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- **(H20)** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- **(H21)** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- **(H22)** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- **(H23)** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
- **(H24)** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- **(H25)** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- **H26)** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Capítulo 4

Trabalhando as Competências e Habilidades Previstas pela BNCC e pelo ENEM para Funções

Dado o desafio que é hoje ensinar, principalmente ensinar matemática, é necessário e recorrente pesquisas sobre as metodologias e práticas docentes que facilitem o processo de ensino-aprendizagem visando a emancipação cognitiva do aluno.

É evidente que pensar em uma prática que deu certo para um professor possa funcionar em nossas turmas é um erro, pois mesmo duas turmas de mesmas séries de um mesmo professor não são nada parecidas, mas isso não deve ser fator determinante para que não se adote uma forma diferente de trabalhar a matemática.

Também não se pode fantasiar que ao adotar uma prática diferente o resultado obtido será satisfatório. Nesse processo temos que analisar o que deu certo e o que deu errado, a forma como foi trabalhado aquele conteúdo e com isso, melhorarmos a nossa didática. Esse, de fato, é um processo de tentativas e falhas que nos permite melhorar enquanto docentes e adotar procedimentos e posturas eficientes em sala de aula com base nas experiências vividas com os alunos.

Nesse processo, o professor, que deve ser um eterno pesquisador, pode adotar metodologias baseadas em trabalhos que mostraram êxito nos objetivos educacionais propostos, adaptando-os à sua realidade. Aqui, traremos algumas opções de metodologias para se trabalhar as habilidades da BNCC e do ENEM que os alunos devem adquirir durante a jornada do ensino médio.

4.1 Interdisciplinaridade

Entre as formas de ensino que o professor pode lançar mão, destacamos primeiro a Interdisciplinaridade, que é a "interação de duas ou mais disciplinas, que pode ir desde a simples comunicação de ideias até a integração recíproca dos contextos fundamentais e da teoria do conhecimento, da metodologia e dos dados da pesquisa"(ZABALA, 2002, p.35).

Na BNCC, a interdisciplinaridade em relação à Matemática, e mais precisamente ao conteúdo de funções, aparece através de aplicações que essa disciplina tem em relação às outras ciências, como Biologia, Química, Física, entre outras, o que dá um norte para o trabalho docente quando da abordagem e desenvolvimentos das habilidades e competências referentes a esse assunto.

Tais aplicações que o professor pode abordar através de situações problema podem ser iniciadas com um contexto histórico que justificou a necessidade do estudo sobre funções, a poderosa arma que os matemáticos desenvolveram para analisar e interpretar fenômenos da natureza, as implicações no avanço das mais variadas ciências e como esse ramo da Matemática é significativo para a sociedade contemporânea.

Dessa forma, o docente poderá levar o aluno a perceber que a Matemática não existe por si mesma e para satisfazer suas próprias indagações, mas que serve para analisar o meio em que vivemos, as relações comerciais existentes, os estudos sociais, e principalmente para o desenvolvimento da sociedade e manutenção do seu bem estar, através de tomadas de decisões baseadas em argumentos matemáticos sólidos, como por exemplo, a quarentena adotada pelos países para frear o contágio do COVID-19 ocorrido no ano de 2020, quando se percebeu através de um modelo exponencial que a taxa de transmissão do vírus era muito alta.

4.2 O Uso do Lúdico

Outra alternativa para se trabalhar o assunto de funções é o uso do lúdico em sala de aula, que envolve a abordagem através de jogos, brincadeiras, uso de materiais concretos, matemágicas entre outros recursos para o ensino, tudo de forma direcionada e bem orientada para alcançar o objetivo da aula.

Ao utilizar o lúdico, além de trabalhar as habilidades em relação ao conteúdo de funções, o aluno vai adquirir e desenvolver habilidades sociais através da cooperação, socialização do raciocínio e procedimentos de tomada de decisões que são importantes para a vida acadêmica e profissional.

Em relação aos jogos, Borin nos diz que

> por intermédio do jogo educativo que caracteriza o aprender pensado e não mecanizado, pode-se observar uma maior interação dos alunos envolvidos, uma melhor concentração, uma maior rapidez e precisão no raciocínio, desenvolvimento do caráter social de ajuda mútua e cooperação e um nível menor de stress relacionado à rotina escola. (BORIN, 1996, p.25)

corroborando o que foi dito no parágrafo anterior, e portanto, torna viável a aplicação de jogos em sala de aula com objetivo educacional. Além disso, para Borin

> outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é possível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem. (BORIN, 1996, p. 9)

Agora se o professor optar por trabalhar dentro da ludicidade com materiais concretos, ele pode construí-los sozinho ou com a ajuda dos alunos objetivando a compreensão ou aplicação de funções. Esses tipos de materiais educativos proporcionam aos alunos uma aprendizagem ativa, onde o aluno entra em contato com o objeto de estudo e dele pode tirar significados além daqueles propostos pelo docente. Fortalecendo essa opção de ensino, Camacho diz que "estes tipos de materiais estimulam o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, pois através da sua manipulação, exploração e investigação o aluno aprende a comunicar, a raciocinar e a resolver problemas de forma natural e clara"(CAMACHO, 2012, p. 23).

Essa forma de ensinar é bastante interessante por se focar mais no aluno e no que ele pode extrair de matemática da atividade lúdica, mas deve ser devidamente orientada pelo professor, que deve ser mediador entre o aluno e o objeto de saber, sempre visando à aprendizagem prevista para aquele momento.

4.3 Uso da Tecnologia

Na sociedade em que nos encontramos, onde estamos rodeados de tecnologia por todos os lados, sendo a mais popular o celular, agregar essa ferramenta ao ensino de funções é outra opção que o docente dispõe como metodologia de ensino.

Seja através do uso de calculadora, aplicativos de celular, softwares de computador, uso de recursos audiovisuais, o professor pode inserir em suas aulas elementos da tecnologia que facilitem o ensino do conteúdo de funções, pois como falam Borba e Penteado (2001, p.97) "as ferramentas tecnológicas são interfaces importantes no desenvolvimento de ações em Educação Matemática. Abordar atividades matemáticas com os recursos tecnológicos enfatiza um aspecto fundamental da disciplina, que é a experimentação".

Dentre os recursos que o professor pode ter a seu alcance destacam-se o computador e o celular. Com o computador, o professor pode utilizar softwares que facilitem o estudo de funções. Para Bona

> Os softwares educativos podem ser um notável auxiliar para o aluno adquirir conceitos em determinadas áreas do conhecimento, pois o conjunto de situações, procedimentos e representações simbólicas oferecidas por essas ferramentas é muito amplo e com um potencial que atende boa parte dos conteúdos das disciplinas. Estas ferramentas permitem auxiliar aos alunos para que deem novos significados às tarefas de ensino e ao professor a oportunidade para planejar, de forma inovadora, as atividades que atendem aos objetivos do ensino (BONA, 2009, p.36).

Com o emprego dessas ferramentas educacionais, o professor atua como orientador e o aluno assume um papel ativo na construção do conhecimento.

Tanto para o computador quanto para o celular, há um software bastante interessante, que é o Geogebra. Ele oferece recursos gráficos e algébricos que podem ser utilizados para construir gráficos de funções, calcular máximos, mínimos e seus zeros e ajuda na verificação das particularidades de cada função. Rêgo fala que

> As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador das tarefas de resolução de problemas (Rêgo, 2000, p. 76).

O uso dos recursos tecnológicos está previsto na BNCC como forma de obter certas habilidades dentro do conteúdo de funções, direcionando a prática docente ao emprego desses recursos, facilitando a aprendizagem dos alunos. Então é totalmente válido o seu uso como forma de alcançar a parcela da turma que precisa de outra forma de aprendizagem para obter sucesso na sua empreitada nos estudos de funções.

Ao empregar as metodologias apresentadas nesse capítulo, o docente tem que ter em mente os desafios que podem aparecer e procurar formas de contorná-los. Alguns dos obstáculos que poderão ser encontrados são a falta de preparo por parte do docente em empregar novas metodologias para o ensino de funções devido a sua formação inicial; falta de recursos na escola para poder desenvolver certas atividades, principalmente atividades que precisem de recursos tecnológicos; problemas de ordem social e econômica por partes dos alunos que muitas vezes não possuem o material necessário para o desenvolvimento da aula, dentre outros.

Apesar das dificuldades, o docente deve utilizar tais metodologias, e variá-las para contemplar todos os alunos da sala, sabendo que nem toda atividade vai ser motivadora ou que será proveitosa para determinado aluno, justificando assim variar o cardápio de aulas.

4.4 Novos Rumos do Ensino de Funções

Por muito tempo o ensino de funções se apresentava de forma descontextualizada e sem objetivo algum de aplicação na vida cotidiano do aluno ou em outras ciências. O abstrato prevalecia sobre o concreto, levando ao desinteresse e dificuldade de aprendizagem e desinteresse. Noções fundamentais à compreensão do conceito e aplicação de funções ficavam obscuras devido a abordagem dada pelo professor. Chaves e Carvalho (2004, p. 5) nos fala que

> ao fazerem uso da linguagem matemática, o "formal"é colocado *a priori*, onde ideias inerentes ao conceito de função, tais como, noções de correspondência, domínio e imagem, observação de "leis"ou "regras"como executante de transformações globais entre dois conjuntos, não ficavam devidamente explicitadas nas expressões utilizadas pelos professores.

Esse tipo de abordagem excessivamente preocupada com a formalização matemática sem a devida preocupação com a aplicabilidade da disciplina e formação de um cidadão que saiba utilizar o conteúdo de funções no seu dia-a-dia contrasta com o que a BNCC prevê como uma aprendizagem significativa para o aluno. Dessa forma, a BNCC

> ...propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida (BNCC, 2017, p. 15).

Em meio a esse processo, tornar o aluno responsável pelo seu aprendizado implica em torná-lo mais consciente do caminho que deve traçar e os obstáculos que tem de superar para conseguir seus objetivos pessoais.

Em relação aos livros didáticos, os autores têm que adequar suas obras ao que está previsto na BNCC, para que sirvam realmente de material de apoio à prática docente. Para isso, terão que elaborar exercícios, sequências didáticas, apresentar dicas metodológicas, problemas contextualizados, aplicações em outras ciências, tudo voltado às habilidades e competências da BNCC para o assunto de funções. Se antes a abordagem era puramente tecnicista, agora terá que ser dado um aspecto prático, aplicável, tangível à percepção dos alunos, algo que eles possam absorver de forma mais fácil por já terem encontrado em sua vida tal situação abordada no livro ou que seja fácil de abstrair.

Como o processo de ensino aprendizagem é complexo e deve ter como foco os anseios dos alunos, é bom o professor também adotar abordagens que preparem os alunos para o prosseguimento dos estudos através do ingresso no ensino superior. Sendo assim, faz parte desse novo rumo do ensino de funções a abordagem de questões dos exames de acesso às universidades, como por exemplo o ENEM. Dessa forma, o ensino de funções através dessa perspectiva ajuda na preparação do aluno para a continuidade da vida acadêmica assim como sua emancipação como cidadão.

Por fim, com a adoção da BNCC, entramos numa fase de ver o que vai funcionar, o que tem que ser revisto e melhorado, fazer estudos, pesquisas e avaliações para melhorar a prática docente, o aprendizado dos alunos e consequentemente a educação como um todo, para construirmos uma sociedade com indivíduos emancipados e letrados matematicamente.

Capítulo 5

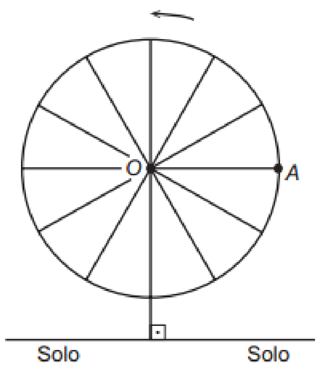
Análise e Críticas de Algumas Questões do ENEM

Nesta seção vamos analisar e resolver algumas questões do ENEM escolhidas dos exames realizados entre os anos de 2010 e 2019, caderno amarelo, evidenciando as habilidades requeridas pelo ENEM e as habilidades que constam na BNCC que podem ser trabalhadas através da resolução dessas questões.

O texto das questões não foi alterado de nenhuma forma, sendo transcrito da maneira que se encontra nas provas do ENEM.

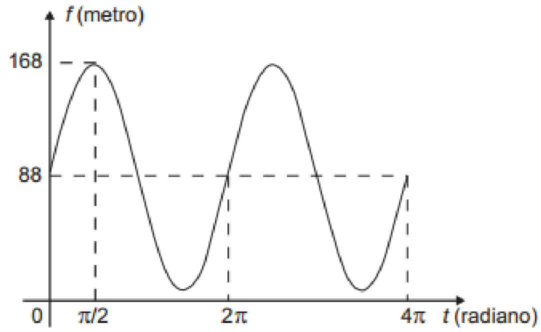
QUESTÃO 145 - ENEM 2018

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

A) $f(t) = 80sen(t) + 88$

B) $f(t) = 80cos(t) + 88$

C) $f(t) = 88cos(t) + 168$

D) $f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)$

E) $f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)$

Solução: Nessa questão vamos utilizar os pontos dados no gráfico da função e utilizá-los nas funções $y(t) = Asen(t) + B$, $h(t) = Pcos(t) + Q$ e $i(t) = Msen(t) + Ncos(t)$ e verificar qual dessas tem o gráfico descrito.

1. Função $y(t) = Asen(t) + B$

   (a) Para $t = 0$

   $$Asen(0) + B = 88 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 88 \Rightarrow B = 88$$

   (b) Utilizando o ponto $(\frac{\pi}{2}, 168)$, temos:

   $$Asen(\tfrac{\pi}{2}) + 88 = 168 \Rightarrow A \cdot 1 = 80 \Rightarrow A = 80$$

   Assim, $y(t) = 88sen(t) + 80$

2. Função $h(t) = Pcos(t) + Q$

   (a) Para $t = \frac{\pi}{2}$

$$P \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) + Q = 168 \Rightarrow P \cdot 0 + Q = 168 \Rightarrow Q = 168$$

(b) Utilizando o ponto $(0, 88)$, temos:

$$P \cdot \cos(0) + 168 = 88 \Rightarrow P \cdot 1 = -80 \Rightarrow P = -80$$

Logo, $h(t) = -80\cos(t) + 168$. Como não há alternativa com essa opção, essa função não pode ser resposta.

3. Função $i(t) = M sen(t) + N\cos(t)$

(a) Para $t = 0$, temos:

$$M \cdot sen(0) + N \cdot \cos(0) = 88 \Rightarrow N = 88$$

(b) Para $t = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$M \cdot sen(\tfrac{\pi}{2}) + 88 \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 168 \Rightarrow M = 168$$

Logo, $i(t) = 168 sen(t) + 88\cos(t)$. Dessa forma, tanto a função y quanto a função i podem ser a resposta. Façamos $t = \frac{3\pi}{2}$ nas duas funções para ver se possuem imagens pertencentes ao gráfico. Daí, temos:

$$i(\tfrac{3\pi}{2}) = 168 \cdot sen(\tfrac{3\pi}{2}) + 88 \cdot \cos(\tfrac{3\pi}{2}) = 168 \cdot (-1) + 88 \cdot 0 = -168$$

Como a imagem é negativa, e pelo gráfico a imagem da função é toda positiva, a função i não pode ser nossa função. Então, por exclusão, $y(t) = 88 sen(t) + 80$ é a resposta. Portanto, letra A.

Nessa questão, o professor pode trabalhar com seus alunos a habilidade EM13MAT404 da BNCC e as habilidades H24, H25, H26 do ENEM. Para tal, o programa Geogebra seria bem interessante para explorar as possibilidades de resolução bem como verificar graficamente através da *plotagem* dos gráficos das funções das alternativas A à E e para o cálculo das imagens das funções para certos valores de x escolhidos para a resolução desse problema.

QUESTÃO 139 - ENEM 2011

A Escala e Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina $\cdot$ cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0?

A) $10^{-5,10}$ B) $10^{-0,73}$ C) $10^{12,00}$ D) $10^{21,65}$ E) $10^{27,00}$

Solução: Dado $M_W = 7,3$, basta substituirmos para obtermos M_0. Dessa forma, temos que:

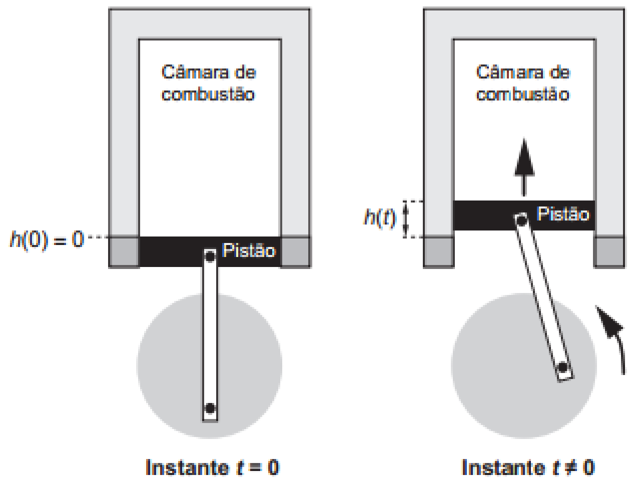
$-10,7 + \frac{2}{3}\log_{10} M_0 = 7,3 \Rightarrow \frac{2}{3}\log_{10} M_0 = 18 \Rightarrow \log_{10} M_0 = \frac{3}{2}\cdot 18 \Rightarrow \log_{10} M_0 = 27 \Rightarrow M_0 = 10^{27}$

Logo, letra E.

Com essa questão são trabalhadas as habilidades EM13MAT305 da BNCC e H21 do ENEM. Além disso, são abordadas as propriedades de logaritmos, que são de fundamental importância ao estudo de função logarítmica e exponencial já que uma é inversa da outra. Essa questão pode ser abordada por meio da interdisciplinaridade, como aplicação na Geografia.

Questão 180 - ENEM 2019

Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4+4sen(\frac{\beta t}{2}-\frac{\pi}{2})$ definida para $t \geqslant 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetros, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 8

Solução: O detalhe da resposta dessa questão se encontra no fato de que é necessário e suficiente que alcance a altura de 6 cm em menos de 4 segundos. Assim, temos:

$$4 + 4sen(\tfrac{\beta t}{2} - \tfrac{\pi}{2}) = 6 \Leftrightarrow 4sen(\tfrac{\beta t}{2} - \tfrac{\pi}{2}) = 2 \Leftrightarrow sen(\tfrac{\beta t}{2} - \tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

que vai ocorrer quando $\frac{\beta t}{2}-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\beta t}{2}-\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{\beta t}{2}-\frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}$, ou seja, $\beta t = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \beta t = 4$, $\beta t = \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \beta t = 8$ e $\beta t = \frac{16\pi}{3} \Leftrightarrow \beta t = 16$, já que $\pi = 3$, respectivamente.

Já que $\beta t = 16$ é necessário e suficiente, pois é quando a altura chega em 6 cm pela terceira vez, analisemos os valores para β de tal forma que $t < 4$.

I. Se β for 4, então $t = 4$, o que não ocorre, pois $t < 4$.

II. Se β for 5, então $t = 3,2 < 4$, logo está dentro do intervalo.

III. Se β for 6, então $t \approx 2,66$, que está dentro do intervalo.

Como queremos o menor valor de β, então $\beta = 5$, letra D.

Da BNCC, podemos trabalhar a habilidade EM13MAT306. Já do ENEM, as habilidades H21, H22, H23 podem ser desenvolvidas por meio dessa questão. Essa questão pode ser tanto abordada por meio da interdisciplinaridade quanto com o uso do Geogebra e é um excelente exemplo para se praticar a leitura matemática.

Uma sugestão é que após uma aula tradicional onde já foi explorado o assunto de função seno o cosseno, o professor pode realizar com a turma uma resolução de questões sobre essas duas funções, com o auxílio do Geogebra.

De primeiro momento, deve ser apresentado o programa para que os alunos se familiarizem. Dando prosseguimento, o docente deve dar início à resolução da lista de questões, montando um roteiro do que deve ser executado no programa em cada item para que se responda às questões, sempre observando se os alunos estão conseguindo executar os comandos.

Dentro das resoluções o professor pode destacar alguns aspectos dessas funções ou algo que lhe chame atenção nas questões e que ele ainda não abordou com a turma.

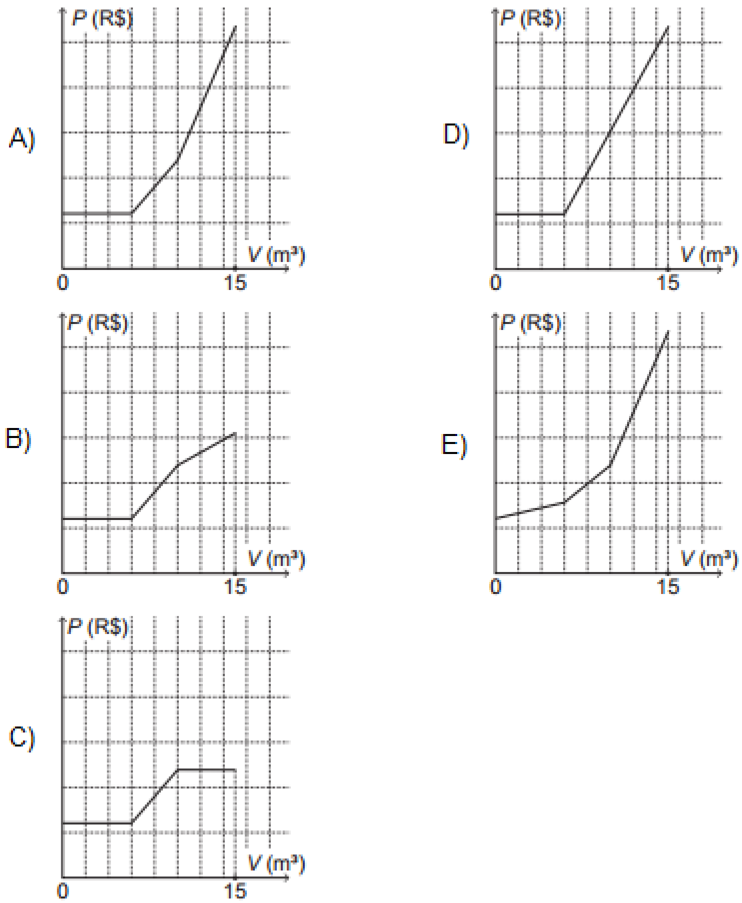
Finalizando a sugestão, o docente deve sempre tirar um tempo para que sejam tratadas as dúvidas dos alunos, tanto em relação ao assunto quanto ao Geogebra.

Questão 163 - ENEM 2019

Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

- Faixa 1: para consumo até $6m^3$, valor fixo de $R\$12,00$;
- Faixa 2: para consumo superior a $6m^3$ e até $10m^3$, tarifa de $R\$3,00$ por metro cúbico ao que exceder a $6m^3$
- Faixa 3: para consumo superior a $10m^3$, tarifa de $R\$6,00$ por metro cúbico ao que exceder $10m^3$

O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

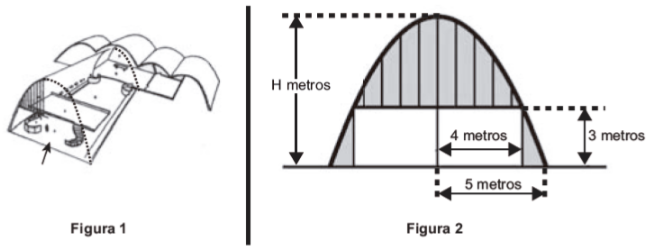


Solução: Note que o gráfico da letra E possui uma inclinação inicial, o que não corresponde à taxa fixa de R$ 12,00 para o consumo até $6\mathfrak{m}^3$. Na letra D, após o valor permanecer fixo até $6\mathfrak{m}^3$, ele aumenta de forma constante, o que não ocorre, os acréscimos das faixas 2 e 3 são diferentes. Na letra C indica que na faixa 3 o valor é constante, o que não é verdade, pois há um acréscimo por cada $\mathfrak{m}^3$ usado acima de $10\mathfrak{m}^3$. Já na B, o gráfico nos diz que o valor do acréscimo da faixa 3 é menor que o da faixa 2, o que é incorreto. Logo, por exclusão, letra A.

Essa questão traz a possibilidades de serem desenvolvidas as habilidades H17, H18, H20, H21 e H22 do ENEM e as habilidades EM13MAT101 e EM13MAT405 da BNCC. Uma forma de se trabalhar essa questão seria primeiro analisar uma conta de energia de algum aluno, montar o gráfico por partes no Geogebra junto com eles, mostrando os comandos necessários para plotar o gráfico e depois partindo para essa questão. Depois poderia até pedir que eles tentassem achar a lei de formação de cada alternativa através do Geogebra.

Questão 176 - ENEM 2017

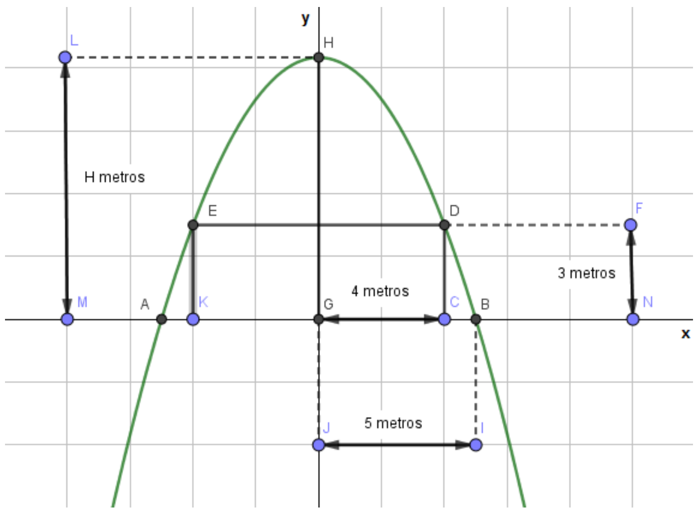
A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.



Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{31}{5}$ C) $\frac{25}{4}$ D) $\frac{25}{3}$ E) $\frac{75}{2}$

Solução: Representando a figura no plano cartesiano e passado o eixo y pelo eixo de simetria da figura, temos:



Como o eixo y passa pelo eixo de simetria da curva, a distância de G até A é de 5 metros. Da mesma forma, a distância de G até K é de 4 metros. Assim, utilizando os pontos $A(-5,0)$, $B(5,0)$, $D(4,3)$ e $E(-4,3)$ para achar os coeficientes de $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \quad (1) \\ a \cdot (5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \quad (2) \\ a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 3 \quad (3) \\ a \cdot (4)^2 + b \cdot (4) + c = 3 \quad (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a - 5b + c = 0 \quad (1) \\ 25a + 5b + c = 0 \quad (2) \\ 16a - 4b + c = 3 \quad (3) \\ 16a + 4b + c = 3 \quad (4) \end{cases}$$

Fazendo $(1) - (2)$, obtemos $-10b = 0$, donde $b = 0$. Substituindo no sistema, fica assim:

$$\begin{cases} 25a + c = 0 \quad (*) \\ 16a + c = 3 \quad (**) \end{cases}$$

Agora, fazendo $(*) - (**)$, obtemos que $9a = -3$, donde $a = \frac{-1}{3}$. Substituindo em $(*)$, têm-se que $25 \cdot \frac{-1}{3} + c = 0$, donde $c = \frac{25}{3}$. Assim nossa função é $f(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{25}{3}$. Para achar a altura, basta achar o valor máximo da função. Então, temos:

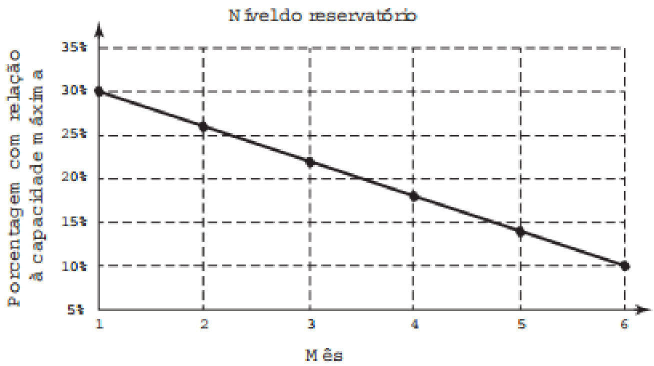
$$H = \frac{-(0^2 - 4 \cdot (\frac{-1}{3}) \cdot \frac{25}{3})}{4 \cdot (\frac{-1}{3})} \Rightarrow H = \frac{25}{3}$$

Logo, letra D.

Com essa questão, as habilidades EM13MAT302 e EM13MAT503 da BNCC e H21, H22 e H25 do ENEM são exploradas. Ao propô-la, estará revisando o conteúdo de sistemas lineares, bastantes útil para encontrar coeficientes de funções quando se tem os dados necessários. Além da resolução aqui apresentada, o professor pode mostrar aos alunos que ao traçar o eixo de simetria, a intersecção dele com o gráfico da função quadrática é o vértice, e a ordenada é o valor máximo da função, a título de informação.

Questão 143 - ENEM 2016

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

A) 2 meses e meio. B) 3 meses e meio. C) 1 mês e meio.
D) 4 meses. E) 1 mês.

Solução: Primeiramente, vamos achar o valor dos coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$. Para isso, note que o gráfico nos fornece os pontos $(1, 30)$ e $(6, 10)$. Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b = 30 \quad (1) \\ 6a + b = 10 \quad (2) \end{cases}$$

De $(1) - (2)$ obtemos que $a = -4$. Substituindo em (1), encontramos $b = 34$. Assim, $f(x) = -4x + 34$.

Agora, vamos igualar a zero e descobrir quanto tempo demora desde o primeiro mês até esvaziar o reservatório.

$$-4x + 34 = 0 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = 8,5$$

Então, a partir do sexto mês só restam 2 meses e meio para o reservatório esvaziar, portanto, letra A.

As habilidades requeridas pela BNCC presentes nessa questão são EM13MAT101 e EM13MAT302; e do ENEM são a H17, H20, H21, H22, H24 e H25. Em sala de aula, com o uso do Geogebra, o professor mostraria aos alunos que escolhendo dois pontos mostrados no gráfico se poderia encontrar a lei de formação e consequentemente a solução através do gráfico, já que no software é possível ver onde a reta intercepta o eixo x. Assim, o aluno começa a entender que possuindo dois pontos podemos encontrar a lei de formação da reta.

Questão 152 - ENEM 2015

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $\mathsf{t} \geqslant 1$?

A) $\mathsf{P(t)} = 0,5 \cdot \mathsf{t}^{-1} + 8000$ B) $\mathsf{P(t)} = 50 \cdot \mathsf{t}^{-1} + 8000$
C) $\mathsf{P(t)} = 4000 \cdot \mathsf{t}^{-1} + 8000$ D) $\mathsf{P(t)} = 8000 \cdot (0,5)^{\mathsf{t}-1}$
E) $\mathsf{P(t)} = 8000 \cdot (1,5)^{\mathsf{t}-1}$

Solução: Como a cada ano que passa tem o aumento de 50%, temos:

I Ano 1
$\mathsf{P}(1) = 8000$

II. Ano 2
$\mathsf{P}(2) = 8000 \cdot 1,5$

III. Ano 3
$\mathsf{P}(3) = (8000 \cdot 1,5) \cdot 1,5 = 8000 \cdot (1,5)^2$

IV. Ano 4
$\mathsf{P}(4) = (8000 \cdot (1,5)^2) \cdot 1,5 = 8000 \cdot (1,5)^3$

Seguindo o raciocínio, no ano t, $\mathsf{P(t)} = 8000 \cdot (1,5)^{\mathsf{t}-1}$. Letra E.

O docente que queira trabalhar as habilidades H21 e H22 do ENEM e EM13MAT303 e EM13MAT304 da BNCC pode escolher esta questão para isso. Para resolvê-la também é interessante utilizar a fórmula do montante no regime de juros compostos ou então a fórmula de um termo de uma progressão geométrica. Com isso, o professor mostra aos alunos que os conteúdos matemáticos são interligados entre si.

Considerações Finais

Como já foi aqui mencionado, o assunto trata-se de um dos tópicos matemáticos com a maior gama de aplicações em problemas naturais e com uma diversa possibilidade de articulação entre as disciplinas gerais do Ensino Médio. Além disso, constitui-se em um instrumento imprescindível na modelagem de fenômenos naturais e sociais. Neste sentido, é evidente a afirmação de que funções ganha relevo em seus principais aspectos do processo de ensino quando se pensa em interdisciplinaridade.

Com suas nuances de multidisciplinaridade, apontadas desde a evolução de seu conceito até a sua utilização atual nas mais diversas disciplinas e profissões, a função foi trabalhada aqui de maneira a mostrá-la como uma ferramenta que permite descrever e analisar inúmeros problemas das ciências em geral e situações do nosso próprio cotidiano, um elemento facilitador da interdisciplinaridade e que possa ser trabalhado de maneira a contribuir para a desmistificação da matemática como disciplina assustadora, sendo, por outro lado, apontada, em seu elo de conexão, como exemplo de uma nova abordagem da matemática para o Ensino Médio.

Hoje, com a BNCC, o professor possui um roteiro de ensino que deve ser seguido para que os discentes adquiram um conjunto de conhecimentos tidos como básico dentro da parte de funções, e nas suas habilidades é deixado sugestões de como se deve ser trabalhado tal habilidade, se com uso da tecnologia ou através de aplicações em outras ciências, por exemplo.

Vale destacar que as abordagens aqui apresentadas não são substitutas da forma tradicional de ensinar, mais sim aliadas, contribuindo para diversificar as aulas, sair um pouco da rotina de sala de aula, dando um sabor diferente às funções.

Por fim, destacamos que o objetivo seja sempre o aluno durante esse processo de ensino-aprendizagem, que nessa etapa do ensino médio deve ficar evidente por meio das aulas que eles possuem um papel importante na construção do seu saber dando a eles a oportunidade de extraírem conhecimentos e adquirirem habilidades com a maior autonomia possível dentro das atividades que o professor propor para certo conteúdo ou aula e que com tudo isso, o discente poderá alcançar seus objetivos dentro do seu plano de vida.

Referências Bibliográficas

[1] **BONA, Berenice de O**. *Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais de ensino fundamental*. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/eenci/artigos/Artigo_ID71/v4_n1_a2009.pdf. Acesso em 29 de março de 2020.

[2] **BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G**. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[3] **BORIN, Júlia**. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. 6ª ed. São Paulo: IME-USP, 1996.

[4] **BOYER, Carl Benjamin**. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[5] **BRASIL**. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 de março de 2020.

[6] **BRASIL**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência ENEM*. Disponível em http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 27 de março de 2020.

[7] **BRASIL**. Ministério da Educação. *Matriz de Referência de Matemática*. Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_professor/o_que_cai_nas_provas/Matriz_de_Referencia_de_Matematica.pdf. Acesso em: 27 de março de 2020.

[8] **CHAVES, M. I. A.; CARVALHO, H. C**. *Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem*. Disponível em `http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/114/conceito_de_fun%C3%A7%C3%A3o.pdf`. Acesso em 01 de abril de 2020.

[9] **EVES, Howard**. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[10] **IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos**. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 3ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1977. v. 1.

[11] **IEZZI, Gelson; OSVALDO, Dolce; MURAKAMI, Carlos**. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 3ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1977. v. 2.

[12] **IEZZI, Gelson**. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 2ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1977. v. 3.

[13] **MARIANA, Mariana S. F. P**. *Materiais manipuláveis no processo ensino/aprendizagem da matemática*. Disponível em `digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf`. Acesso em 29 de março de 2020.

[14] **MOL, Rogério S**. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG: 2013.

[15] **RÊGO, Rogéria G**. *Um estudo sobre a construção do conceito de função*. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, Natal, 2000.

[16] **ROQUE, Tatiana**. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[17] **ZABALA, Antoni**. *Enfoque Globalizador e pensamento complexo: uma proposta para o currículo escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2002.