UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

LUCIANO DELFINO MOREIRA

UM TRATAMENTO TEÓRICO DE ALGUMAS MÉDIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Dourados - MS
Março - 2020

LUCIANO DELFINO MOREIRA

UM TRATAMENTO TEÓRICO DE ALGUMAS MÉDIAS

ORIENTADOR: PROF. DR. ALEXANDRE PITANGUI CALIXTO

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dourados - MS
Março - 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

M838t Moreira, Luciano Delfino
UM TRATAMENTO TEORICO DE ALGUMAS MÉDIAS [recurso eletrônico] / Luciano Delfino Moreira. – 2020.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: ALEXANDRE PITANGUI CALIXTO.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, 2020.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Médias. 2. Ensino Médio 3. Aplicações. I. Calixto, Alexandre Pitangui. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo autor.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Um Tratamento Teórico de Algumas Médias "**, de autoria de **Luciano Delfino Moreira**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Alexandre P. Calixto

Prof. Dr. Alexandre Pitangui Calixto (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Rogério de Oliveira
Membro Examinador (UFGD)

Marina Rodrigues Maestre.

Profª. Drª. Marina Rodrigues Maestre
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 27 de março de 2020

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus filhos, Carlos Eduardo de Lima Moreira e Henrique Lopes Moreira, que são a razão de uma busca de crescimento pessoal a fim de me tornar uma pessoa melhor a cada dia.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me orientar em todos os momentos de minha vida.

A minha família, por me apoiar nesse novo projeto.

Aos meus orientadores pela dedicação e conhecimento compartilhados.

A certeza de estarmos certos é conseguida

pela coragem de estarmos errados.

Helena Martins

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um estudo das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática voltada para o ensino médio com algumas aplicações na Física, nas Engenharias, mercado financeiro entre outros, passando pela base do estudo das médias e evoluindo para algumas aplicações pouco exploradas atualmente no Ensino Médio, buscando assim enriquecer e variar os exemplos sobre o assunto.

Palavras-chave: Média; Ensino Médio; Aplicações.

ABSTRACT

In this essay we present a study of the arithmetic, harmonic, quadratic and geometry measures focused on high school with some applications in physics, in the financial market engineering among others going through the base of the study of the averages and evolving into some little explored explanations currently in high school, by seeking to enrich and vary the examples on the subject.

Keywords: Average, High School, Applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática nas escolas, atualmente, deve ser feito de forma contextualizada com as demais disciplinas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) uma das propostas é que o ensino médio, como parte da educação básica, deva ser desenvolvido buscando uma interdisciplinaridade e contextualização. Com essa proposta, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), que hoje é uma das maiores avalições nacionais para ingresso no ensino superior nas universidades públicas e privadas, busca a interdisciplinaridade e contextualização dos conteúdos, que no decorrer da resolução das questões, os alunos poderão perceber situações matemáticas relacionadas a questões de outras ciências e em situações práticas do cotidiano.

Buscando uma contribuição significativa para o ensino da matemática e tendo como foco principal os conteúdos do ensino médio voltado para o ENEM, neste trabalho trazemos alguns exemplos sobre o conteúdo de médias com o objetivo de fornecer ao professor de matemática, um pouco de teoria e alguns exemplos de aplicações pouco explorados nos materiais de ensino médio atual. A média quadrática foi a que se mostrou mais prática na produção de exemplos e aplicações, propiciando o embasamento teórico relacionado à prática.

Buscando esclarecer algumas ideias matemáticas que estão sendo construídas, no Capítulo 1- trazemos um breve histórico que descrevemos sobre alguns matemáticos durante a história que discorreram em algum momento, sobre as médias e suas aplicações. No Capítulo 2- descrevemos sobre as médias aritmética, geométrica e harmônica e alguns exemplos clássicos para melhor compreensão do que está sendo escrito. No Capítulo 3- foi dedicado unicamente à média quadrática, onde apresento algumas aplicações na Física e na Engenharia Ambiental. Finalmente, o Capítulo 4- traz uma interpretação geométrica das médias aritmética, geométrica, harmônica, quadrática e uma comparação entre elas.

1. BREVE HISTÓRICO

As médias, ao longo da história, foram objetos de estudos de alguns matemáticos. Pitágoras foi um dos que contribuiu para o estudo das médias. Segundo CONTADOR (2008), a média aritmética, geométrica e subcontrária (harmônica), tiveram origem na Mesopotâmia, onde Pitágoras, em uma de suas viagens, as conheceu.

Segundo CONTADOR (2008), a média harmônica tem sua origem em estudos a música, nos quais Pitágoras usava um instrumento chamado monocórdio para suas experiências. Os sons obtidos por Pitágoras depois deram origem à lira, alaúde, cravo, violão, piano, órgão de tubo entre outros. Pitágoras encontrou então uma relação entre a Harmonia musical e a Matemática.

Arquimedes foi outro matemático que se dedicou aos estudos de algumas médias. Segundo BOYER (2010), ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo, novamente, Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Seu processo interativo para esses polígonos relacionava-se com o que às vezes se chama algoritmo de Arquimedes. Escreve-se a sequência $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \dots$, onde P_n e p_n são os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de n lados respectivamente. Começando do terceiro termo, calcula-se cada termo a partir dos dois termos precedentes tomando, alternadamente, a média harmônica e a média geométrica.

Papus de Alexandria também teve sua contribuição para o estudo das médias. Grego, que por volta do ano de 320 escreveu sua obra Coleção Matemática, composta de oito livros. No livro III, Papus oferece com uma construção geométrica simples em um semicírculo as representações das médias aritmética, geométrica e harmônica.

Hoje em dia as médias são comumente utilizadas. Seja ela para um simples cálculo com o objetivo de verificação de uma possível aprovação escolar a cálculos de médias muito mais complexos nos setores científico, industrial, financeiro, que muitas vezes objetiva uma explicação momentânea ou até mesmo predizer algum fato futuro.

No próximo capítulo vamos tratar das médias mais comuns estudadas no ensino médio, média aritmética, média geométrica e média harmônica. Nesse capítulo vamos utilizar as definições formais de MORGADO e CARVALHO (2015) e alguns de seus exemplos.

2. MÉDIAS: ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HARMÔNICA

Uma ideia importante de aplicação matemática é o conceito de média, que é um número real que está associado a um conjunto de dados e pode representar esse conjunto que está sendo analisado. Há diversas médias na literatura e cabe a quem estiver analisando os dados definir qual a média será mais conveniente usar. Em geral, a média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar certa característica da lista. Nesse capítulo iremos trabalhar os conceitos de média aritmética, geométrica e harmônica e desenvolver alguns exemplos e aplicações.

2.1 Média aritmética

Uma média, de uma lista de valores, é um número que pode substituir todos os elementos desta lista sem alterar determinada característica. Se essa característica for a soma desses elementos, então temos a mais famosa das médias, a média aritmética.

De maneira mais formal vamos ver a definição de média aritmética segundo MORGADO e CARVALHO (2015).

Definição 2.1: A média aritmética $(\bar{x})$ de uma lista de *n* números $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} . \qquad (2.1)$$

Nos parágrafos a seguir vamos ver quatro exemplos de média aritmética utilizados no ensino médio.

Exemplo 2.1: (ENEM – 2012, adaptado)

Vamos considerar que cinco empresas estão à venda e um investidor deseja comprar duas dessas empresas. A Tabela 2.1 a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos dessas cinco microempresas (ME). De qual maneira um investidor poderia justificar a sua escolha para tal compra?

Uma maneira bastante comum é que sua escolha seja baseada nas empresas que possuem maior rendimento médio no período avaliado. Vamos analisar a Tabela 2.1 para concluir nosso raciocínio.

Tabela 2.1: Evolução de uma receita bruta

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolate X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Este exemplo é um clássico da média aritmética, que visa a comparação das médias da receita bruta anual dos últimos três anos. Portanto, devemos realizar a média da receita de cada empresa no período desejado e escolher as duas empresas que obtiveram os maiores resultados.

É preciso calcular a média aritmética de cada empresa no mesmo período. Assim:

Alfinetes V: $\bar{v} = \frac{200+220+240}{3} = 220$

Balas W: $\bar{w} = \frac{200+230+200}{3} = 210$

Chocolate X: $\bar{x} = \frac{250+210+21}{3} = 225$

Pizzaria Y: $\bar{y} = \frac{230+230+23}{3} = 230$

Tecelagem Z $\bar{z} = \frac{160+210+24}{3} = 205.$

Analisando as médias das empresas podemos concluir que o investidor escolherá as empresas Pizzaria Y, com média de R$ 230.000,00 e Chocolates X, com média de R$ 225.000,00, pois obtiveram o maior rendimento médio anual.

Exemplo 2.2:

Considere que o perímetro de um retângulo de dimensões a e b e o quadrado de lado ℓ possuem o mesmo perímetro. Podemos dizer que a média aritmética das dimensões desse retângulo é igual:

(A) ao perímetro desse quadrado;

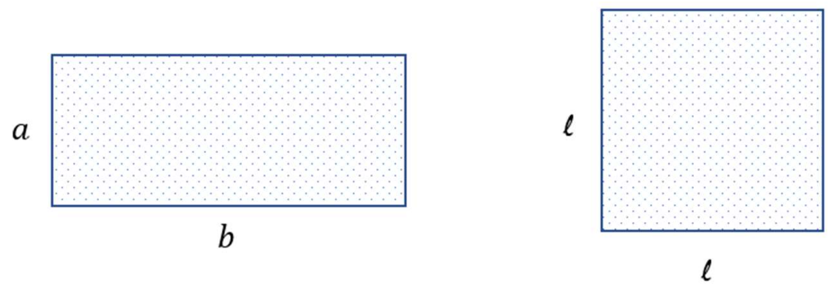
(B) a metade do lado desse quadrado;

(C) ao lado desse quadrado;

(D) ao dobro do lado desse quadrado.

Para resolver esse problema, devemos comparar os perímetros das duas figuras geométricas.

Figura 2.1: Retângulo/Quadrado



Fonte: Autor

Os perímetros do retângulo P_r e do quadrado P_q são, respectivamente

$$P_r = 2(a+b) \quad \text{e} \quad P_q = 4 \cdot \ell \ .$$

Como as figuras possuem mesmo perímetro, então devemos ter,

$$P_r = P_q \quad \Rightarrow \quad 2(a+b) = 4 \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{2(a+b)}{4} = \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)}{2} = \ell \ ,$$

ou seja, o lado do quadrado é igual a média aritmética $\bar{x}$ das dimensões do retângulo, assim,

$$\ell = \frac{(a+b)}{2} = \bar{x} \ .$$

Portanto, a alternativa correta é a (C).

Exemplo 2.3: (Insper – 2014, adaptado)

Para fazer parte do time de basquete de uma escola é necessário ter, no mínimo, 11 anos de idade. A média das idades dos cinco jogadores titulares desse time é 13 anos, sendo que o mais velho deles tem 17 anos de idade. Uma questão interessante nesse problema é calcular a idade máxima do segundo mais velho do time titular.

Este é um exemplo mais complexo, onde devemos trabalhar com algumas suposições para obtermos um possível resultado. Vamos então a solução desse problema.

Como um dos jogadores tem 17 anos, devemos escolher um entre os cinco jogadores que tenha essa idade. Sem perda de generalidade, vamos escolher o jogador *E* para tal idade.

Sabemos que a média aritmética das idades dos jogadores é de 13 anos, então

$$\frac{A+B+C+D+17}{5} = 13 \quad \Rightarrow \quad A+B+C+D+17 = 65 \quad \Rightarrow \quad A+B+C+D = 48\,.$$

Sabemos agora que a soma das idades dos quatro jogadores A, B, C, D é de 48 anos. Desejamos calcular a idade máxima de um desses jogadores. Vamos supor que os outros três jogadores tenham a idade mínima possível.

Vamos escolher o jogador *D* para que tenha a idade máxima e então os jogadores *A*, *B* e *C* tenham a idade mínima possível.

Assim, $A = B = C = 11$ anos de idade. Então,

$$11 + 11 + 11 + D = 48 \quad \Rightarrow \quad 33 + D = 48 \quad \Rightarrow \quad D = 15\,.$$

Concluímos que o segundo jogador mais velho deve ter, no máximo, 15 anos de idade.

Exemplo 2.4: (ENEM – 2018)

No quadro estão representadas as quantidades de certos tipos de vinho vendidos durante um ano e o lucro por unidade vendida de cada um desses tipos. Para repor seu estoque, o proprietário escolherá apenas os tipos de vinho em que o lucro total com sua venda foi maior do que a média entre os lucros obtidos com a venda de todos os tipos.

Tabela 2.3: Tipos de vinho e lucro

Tipo de vinho	I	II	III	IV	V	VI
Unidades vendidas	120	50	71	47	70	90
Lucro por unidade (R$)	6,00	12,00	10,00	20,00	5,00	12,00

Conforme condições estabelecidas, os tipos de vinhos escolhidos serão:

(A) I e VI

(B) IV e VI

(C) I, IV e VI

(D) II, IV e VI

(E) II, III, IV e VI

Este exemplo busca uma comparação de dois valores que estão implícitos no exercício. O lucro total de cada tipo de vinho durante o ano e a média dos lucros obtidos durante o ano.

Para resolver essa questão devemos primeiramente calcular o lucro total de cada tipo de vinho. Para isso vamos criar uma linha na Tabela 2.3 que representa o lucro total por tipo de vinho em reais, bastando multiplicar lucro por unidade pelas unidades vendidas de cada tipo de vinho.

Tabela 2.4: Lucro por tipo de vinho.

Tipo de vinho	I	II	III	IV	V	VI
Unidades vendidas	120	50	71	47	70	90
Lucro por unidade (R$)	6,00	12,00	10,00	20,00	5,00	12,00
Lucro total por tipo de vinho (R$)	720,00	600,00	710,00	940,00	350,00	1080,00

Vamos agora, calcular o lucro médio por tipo de vinho. Para obtemos o lucro médio, que denotaremos por $\bar{l}$, devemos fazer a média aritmética do lucro total por tipo de vinho.

$$\bar{l} = \frac{720 + 600 + 710 + 940 + 350 + 1080}{6} = \frac{4400}{6} = 733{,}33 \ .$$

O lucro médio por tipo de vinho que é de R$ 733,33. Como o proprietário deseja repor somente os vinhos que tiveram lucro acima da média, ele irá repor os vinhos de tipo IV e VI, pois seus lucros foram R$ 940,00 e R$ 1080,00 respectivamente, acima da média que é de R$ 733,33. Concluímos que a alternativa correta é a (B).

Na seção seguinte falaremos de média aritmética ponderada utilizando o mesmo raciocínio de média aritmética simples.

2.2 Média aritmética ponderada

A ideia primitiva de média ponderada é uma média simples de uma lista de números que possuem determinados pesos. Esses pesos representam simplesmente a frequência com que cada termo aparece nesta lista de números e, conforme aplicação esses pesos podem assumir valores não inteiros.

A seguir vamos ver uma definição formal de média aritmética ponderada segundo MORGADO e CARVALHO (2008).

Definição 2.2: A média aritmética ponderada $(\overline{x_p})$ dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com os pesos respectivamente iguais a, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, é definida por

$$\overline{x_p} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \quad . \tag{2.2}$$

Em algumas instituições de ensino é comum que utilizem peso nas médias de notas bimestrais de seus alunos. O próximo exemplo foi desenvolvido a partir de uma instituição real que utiliza média ponderada para formação da média de seus alunos.

Exemplo 2.5:

A escola ANGLO-UNIGRAN de Dourados-MS, utiliza a média ponderada para efetuar a média de seus alunos. Para o cálculo da média anual, os bimestres possuem peso 1, 2, 3 e 4, representando o primeiro, segundo, terceiro e quarto bimestre, respectivamente. Multiplica-se a nota do primeiro bimestre por 1, a do segundo bimestre por 2, a do terceiro bimestre por 3 e a do quarto bimestre por 4, soma-se os quatro produtos e divide o resultado por 10. Essa será a média anual do aluno.

Considere a seguinte notação:

NB_1 = Nota no primeiro bimestre;

NB_2 = Nota no segundo bimestre;

NB_3 = Nota no terceiro bimestre;

NB_4 = Nota no quarto bimestre;

M_A = Média anual.

Equacionando a média obtemos:

$$M_A = \frac{NB_1 \cdot 1 + NB_2 \cdot 2 + NB_3 \cdot 3 + NB_4 \cdot 4}{10}$$

Na fórmula a divisão por 10 é feita devido à soma dos pesos das médias bimestrais $(10 = 1 + 2 + 3 + 4)$.

Suponhamos, que Jeferson é um aluno dessa escola e ao longo do ano suas médias foram iguais a

$$NB_1 = 6{,}0\ ; \quad NB_2 = 3{,}5\ ; \quad NB_3 = 5{,}6\ ; \quad NB_4 = 8{,}1.$$

A questão desse problema é saber a média anual de Jeferson. Então,

$$M_A = \frac{6{,}0 \cdot 1 + 3{,}5 \cdot 2 + 5{,}6 \cdot 3 + 8{,}1 \cdot 4}{10} = \frac{6{,}0 + 7{,}0 + 16{,}8 + 32{,}4}{10} = 6{,}22\ .$$

Logo a média anual de Jeferson é de 6,22 pontos. No próximo exemplo vamos mostrar que os pesos podem ser números não inteiros, como dissemos anteriormente.

Podemos utilizar os pesos da média aritmética ponderada do exemplo 2.5 como pesos não inteiros. Fazendo uma manipulação algébrica podemos colocar os pesos em forma percentual, assim como uma frequência relativa utilizada na estatística. Termos,

$$M_A = \frac{NB_1 \cdot 1 + NB_2 \cdot 2 + NB_3 \cdot 3 + NB_4 \cdot 4}{10} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_A = NB_1 \cdot \frac{1}{10} + NB_2 \cdot \frac{2}{10} + NB_3 \cdot \frac{3}{10} + NB_4 \cdot \frac{4}{10} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_A = NB_1 \cdot 0{,}1 + NB_2 \cdot 0{,}2 + NB_3 \cdot 0{,}3 + NB_4 \cdot 0{,}4\ .$$

Os pesos agora serão 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4 cuja soma representa um inteiro. Podemos então transformar a equação da média anual em uma simples multiplicação. De outra forma, podemos considerar os pesos como sendo pontos percentuais, pois

$$0{,}1 = \frac{10}{100} = 10\%\ ;$$

$$0,2 = \frac{20}{100} = 20\% \,;$$

$$0,3 = \frac{30}{100} = 30\% \,;$$

$$0,4 = \frac{40}{100} = 40\% \,.$$

Concluímos assim que

NB_1, representa 10% da composição da média anual;

NB_2, representa 20% da composição da média anual;

NB_3, representa 30% da composição da média anual e

NB_4, representa 40% da composição da média anual.

No próximo exemplo também verificamos que os pesos, da média ponderada, podem ser números não inteiros.

Exemplo 2.6: (PROFMAT - 2015p.168, exemplo 8.9)

Em um grupo de pessoas, 70% das pessoas são adultos e 30% são crianças. O peso médio dos adultos é de $70kg$ e o peso médio das crianças é de $40kg$. Qual o peso médio do grupo?

Solução:

É uma média ponderada $\overline{x_p}$ de dois subgrupos, com pesos 0,7 (ou 70%) para os adultos e peso 0,3 (ou 30%) para as crianças, assim

$$\overline{x_p} = \frac{0,7 \cdot 70 + 0,3 \cdot 40}{0,7 + 0,3} = 61\ kg\ .$$

Portanto, a média de peso do grupo é de $61kg$ por pessoa.

Na seção seguinte vamos definir média geométrica com algumas aplicações na matemática financeira e nas geometrias plana e espacial.

2.3 Média geométrica

A média Geométrica, é pouco explorada no ensino médio, mas possui algumas aplicações clássicas na matemática financeira e na geometria.

No próximo parágrafo vamos ver a definição formal de média geométrica segundo MORGADO e CARVALHO (2015).

Definição 2.3: A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é definida por

$$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot\ x_3\ \cdot \dots \cdot x_n}\ . \qquad (2.3)$$

Devemos observar que a média geométrica deve ser calculada somente para números positivos, evitando assim obter um número não pertencente ao conjunto dos números reais. Como exemplo, se $n = 2$, $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ a média geométrica seria $g = \sqrt{-1}$ que não pertence ao conjunto dos números reais.

Nos próximos três exemplos vamos mostrar uma aplicação e em seguida vamos obter uma fórmula para resolver cada situação proposta.

Exemplo 2.7: (Matemática financeira)

Uma pessoa dispõe de uma quantia para investir e obter maior lucratividade durante três meses, sem nenhuma retirada antes desse prazo. No primeiro mês investiu a uma taxa de 6% ao mês (am), no segundo mês conseguiu investimento a 5,5% am e no terceiro mês conseguiu investir a 5,1% am. Qual o rendimento médio desse investimento nos três meses?

Para resolver esse problema, vamos recordar um pouco de matemática financeira. Considere as seguintes notações:

C: representa o capital a ser investido;

i: representa a taxa de investimento (taxa unitária);

j: representa os juros produzidos em um período, ou seja, $j = C \cdot i$;

M: representa o montante, ou seja, $M = C + j$.

Substituindo a equação dos juros na equação do montante temos,

$$M = C + C \cdot i = C(1 + i). \qquad (2.4)$$

Nesse exemplo vamos obter os três montantes diferentes, que chamamos de M_1, M_2 e M_3, três capitais diferentes que chamamos de C_1, C_2 e C_3 e quatro taxas, i é a taxa média e i_1, i_2 e i_3 as taxas apresentadas no exemplo. Para melhor entendimento, criamos uma tabela para a capitalização com taxas iguais e outra para capitalização com taxas diferentes nos três períodos.

Vamos agora montar uma tabela, Tabela 2.5, com uma capitalização com taxas iguais em cada período.

Tabela 2.5: Capitalização com taxas iguais.

Final do período de capitalização	**Capital ao início do período de capitalização**	**Montante**
1	C_1	$M_1 = C_1(1 + i)$
2	$C_2 = M_1 = C_1(1 + i)$	$M_2 = C_2.(1 + i) = C_1(1 + i)(1 + i)$
3	$C_3 = M_2 = C_1(1 + i)(1 + i)$	$M_3 = C_3.(1 + i) = C_1(1 + i)(1 + i)(1 + i)$

Concluímos que o montante ao final do terceiro período de aplicação com a mesma taxa é

$$M_3 = C_1(1 + i)(1 + i)(1 + i). \qquad (2.5)$$

Agora, vamos montar uma tabela, Tabela 2.6, com uma capitalização com taxas diferentes em cada período.

Tabela 2.6: Capitalização com taxas diferentes.

Final do período de capitalização	**Capital ao início do período de capitalização**	**Montante**
1	C_1	$M_1 = C_1(1 + i_1)$
2	$C_2 = M_1 = C_1(1 + i_1)$	$M_2 = C_2(1 + i_1) = C_1(1 + i_1)(1 + i_2)$
3	$C_3 = M_2 = C_1(1 + i_1)(1 + i_2)$	$M_3 = C_3(1 + i) = C_1(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$

Concluímos, que o montante ao final do terceiro período de aplicação com taxas diferentes é

$$M_3 = C_1(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\,. \tag{2.6}$$

Para que tenhamos um rendimento médio devemos igualar o montante gerado pelas aplicações com taxas diferente ao montante gerado a uma taxa média durante os três meses, ou seja, igualar as equações (2.5) e (2.6).

$$C_1(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C_1(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$

Dividindo os dois membros da igualdade por C_1, temos

$$(1 + i)(1 + i)(1 + i) = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\,. \tag{2.7}$$

Substituindo os valores das taxas $i_1 = 0{,}060$, $i_2 = 0{,}055$ e $i_3 = 0{,}051$ na Equação (2.7), temos

$$(1 + i)(1 + i)(1 + i) = (1{,}06)(1{,}055)(1{,}051) \;\Rightarrow\; (1 + i)^3 = (1{,}06)(1{,}055)(1{,}051) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (1 + i) = \sqrt[3]{(1{,}06)(1{,}055)(1{,}051)} \;\Rightarrow\; (1 + i) = \sqrt[3]{1{,}1753333}\,,$$

que é a fórmula da média geométrica.

Logo,

$$(1 + i) = 1{,}05533 \;\Rightarrow\; i = 0{,}05533\,.$$

Portanto, o rendimento médio mensal é de 5,533% ao mês.

Podemos definir uma fórmula para esse tipo de situação. Em *n* períodos de uma aplicação com *n* taxas diferentes nesse período podemos obter uma taxa média por período nesta aplicação. Lembrando que o período de capitalização deve ser sempre o mesmo, ou seja, todas as taxas devem ser capitalizadas ao dia, ao mês, ao bimestre, ao trimestre ou ao ano, e assim por diante. Sendo i a taxa média por período e $i_1, i_2, \ldots, i_n$ as taxas nos períodos de aplicação, ou seja, i_1 é a taxa do rendimento do primeiro período, i_2 é a taxa do rendimento do segundo período, e assim até i_n que é a taxa do *n*-ésimo período de aplicação.

Uma taxa média aplicada por n períodos deve resultar o mesmo montante em uma aplicação com n taxas "diferentes".

$$(1+i)(1+i)(1+i)\cdots(1+i) \ = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)$$

$$(1+i)^n \ = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)$$

$$(1+i) \ = \sqrt[n]{(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)} \tag{2.8}$$

Verificamos que e a equação (2.8) possui a média geométrica em sua composição.

$$g = \sqrt[n]{(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)} \tag{2.9}$$

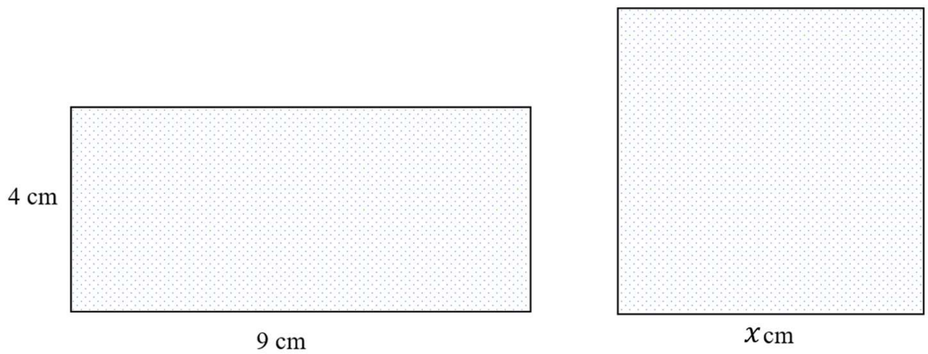
Concluímos então, que para calcular a taxa média basta fazer

$$i = g - 1. \tag{2.10}$$

Exemplo 2.8:

Na geometria plana podemos utilizar a média geométrica como cálculo de áreas equivalentes. Para se obter o lado x de um quadrado que tenha área equivalente à de um retângulo, de dimensões y e z, basta fazer a média geométrica das dimensões do retângulo. Considere um caso particular onde a medida x dos lados de um quadrado tenha área equivalente à de um retângulo de dimensões $y = 4$ cm e $z = 9$ cm. (observe a Figura 2.2)

Figura 2.2: Retângulo e quadrado equivalentes



Fonte: Autor

Devemos equacionar igualando as áreas das duas figuras, Figura 2.2. Área do quadrado S_q de lado x cm

$$S_q = x^2 \,.$$

Área do retângulo S_r de lados y cm e z cm

$$S_r = 4 \cdot 9 = 36 \,.$$

Então,

$$S_q = S_r \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \cdot 9 \,.$$

Dessa forma, concluimos que

$$x = \sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \text{ cm} \,.$$

Portanto, o quadrado deve ter 6 cm de lado.

De modo mais simplificado poderiamos fazer a média geométrica das dimensões do retângulo para obter a medida do lado do quadrado.

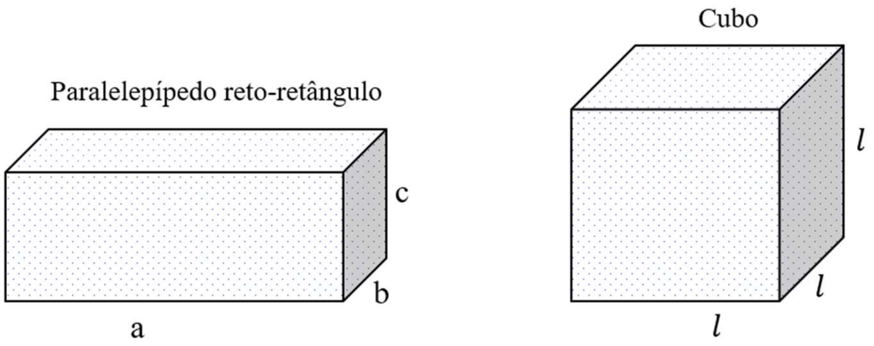
$$x = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ cm de lado.}$$

Com o mesmo raciocínio do Exemplo 2.8 podemos obter uma fórmula para calcular as dimensões de um cubo com o mesmo volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c.

Exemplo 2.9

Considerando um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c. Determinar a aresta de um cubo que tenha o mesmo volume do paralelepípedo.

Figura 2.3 – Paralelepípedo reto-retângulo e cubo equivalentes



Fonte: Autor

Solução:

Lembrado que o volume de um paralelepípedo reto-retângulo V_p é

$$V_p = a \cdot b \cdot c$$

e o volume de um cubo V_c de aresta l é igual a

$$V_c = l^3.$$

Os sólidos têm volumes equivalentes, então

$$V_c = V_p \quad \Rightarrow \quad l^3 = a \cdot b \cdot c \ .$$

Logo, a aresta do cubo é a média geométrica das dimensões do retângulo

$$l = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \ . \tag{2.11}$$

Portanto, basta fazer a média geométrica das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo para se obter a aresta de um cubo com o mesmo volume.

2.4 Média geométrica ponderada

De forma semelhante, podemos buscar o mesmo raciocínio que construímos na média aritmética ponderada em relação aos pesos para aplicação na média geométrica. Esses pesos podem ser interpretados como uma frequência de cada termo em uma lista de números. Porém, média geométrica é a raiz n-ésima do produto dos n números que se deseja calcular. Logo, se temos termos iguais, em um produto, podemos escrever de forma simplificada com uma potência, já que produto de mesma base, deve-se conservar a base e somar os expoentes. Então, de forma simplificada, podemos dizer que os pesos em uma média geométrica ponderada são as potências que cada termo apresenta. Nada impede que esses pesos possam ser números não inteiros.

No próximo parágrafo vamos ver uma definição mais formal de média geométrica ponderada.

Definição 2.4:

A média geométrica ponderada g_p dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ com os pesos respectivamente iguais a $p_1, p_2, \dots, p_n,$ é definida por

$$g_p = \sqrt[k]{{x_1}^{p_1} \cdot {x_2}^{p_2} \cdot \ \dots \cdot {x_n}^{p_n}}\ , \tag{2.12}$$

onde $k = p_1 + p_2 + \cdots + \ p_n$.

Comparando a média geométrica ponderada g_p com a média geométrica simples g podemos perceber que a diferença entre elas, nada mais é que a frequência (peso) com que cada termo aparece na amostra, pois no caso da média geométrica simples, a frequência (peso) a ser considerado de cada elemento é igual a 1. Veremos um caso de pesos diferentes no exemplo a seguir.

Exemplo 2.9:

Suponhamos que queremos calcular a média geométrica dos nove valores 2, 2, 4, 5, 3, 2, 5, 6 e 4.

Para resolver essa questão, normalmente faríamos uma média geométrica simples,

$$g = \sqrt[9]{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}$$

mas, ordenando a sequência, temos 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5 e 6.

Verificamos que cada valor aparece um quantidades de vezes na amostra, ou seja,

o valor 2 aparece três vezes (peso 3);

o valor 3 aparece uma vez (peso 1);

o valor 4 aparece duas vezes (peso 2);

o valor 5 aparece duas vezes (peso 2);

o valor 6 aparece uma vez (peso 1),

então, os valores 2, 3, 4, 5 e 6 possuem seus respectivos pesos iguais a 3, 1, 2, 2 e 1.

Logo podemos reescrever a média geométrica simples como uma média geométrica ponderada, ou seja,

$$g = \sqrt[9]{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt[9]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6} =$$
$$= \sqrt[9]{2^3 \cdot 3^1 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^1} = g_p \, .$$

Dessa forma, temos que a média geométrica dos nove valores é $g = 3{,}38$

2.5 Média harmônica

Também chamada de média subcontrária, a média harmônica é uma das três médias estudadas por Pitágoras. A média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos números.

Vamos ver uma definição formal de média harmônica segundo MORGADO e CARVALHO (2015).

Definição 2.5: A média harmônica (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é definida por

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \, . \qquad (2.13)$$

A média harmônica é utilizada quando estamos trabalhando com grandezas inversamente proporcionais. Um exemplo clássico é a relação entre velocidade e tempo na cinemática, ramo da física que estuda o movimento dos corpos. O Exemplo 2.10 é um clássico da cinemática.

Exemplo 2.10:

Um veículo percorre de um ponto *A* até um ponto *B* a uma velocidade média de 120 km/h. Depois, ele volta do ponto *B* até o ponto *A* com uma velocidade média de 80 km/h. Qual a velocidade média para realizar o percurso de ida e volta entre os pontos *A* e *B*? (considere o trajeto entre os pontos *A* e *B* retilíneo)

Um erro bastante comum, na resolução desse problema, é fazer a média aritmética entre as velocidades, ou seja,

$$\frac{80 + 120}{2} = 100\,,$$

chegando ao resultado de 100 km/h.

Mas, o que se pede é a velocidade média para realizar o percurso e não a média das velocidades. A resposta correta é de 96 km/h, resultado esse que se obtém usando a média harmônica.

Para facilitar o entendimento vamos estipular um valor para a distância entre os pontos *A* e *B* de 240 km. Com essas informações podemos determinar o tempo gasto na ida e volta entre os pontos *A* e *B*. Na ida o tempo t_{AB} será de 2 horas, ou seja,

$$t_{AB} = \frac{240}{120} = 2\,.$$

Já o tempo gasto no trajeto de volta t_{BA}, do ponto *B* até o ponto *A,* é de 3 horas, isto é,

$$t_{BA} = \frac{240}{80} = 3\ .$$

Então, o tempo de ida e volta é a soma dos tempos, ou seja, 5 horas para percorrer a distância de ida e volta 480 km.

Concluímos que a velocidade média v_m para realizar todo o percurso é de 96 km/h,

$$v_m = \frac{480}{5} = 96\ .$$

Vamos verificar a média harmônica utilizadas implicitamente no raciocínio anterior.

1° passo: Cálculo de tempo gasto em cada trecho, em horas

$$t_{AB} = \frac{240}{120} = 2 \qquad \text{e} \qquad t_{BA} = \frac{240}{80} = 3$$

2°passo: Cálculo do trajeto total (ida e volta), em quilômetros

$$240 + 240 = 480$$

3° passo: Velocidade média dos 480 km

$$v_m = \frac{480}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{480}{\frac{240}{120} + \frac{240}{80}} = \frac{240 \cdot 2}{240 \cdot \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{80}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{80}} = 96\,.$$

Logo, temos

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{80}}\ ,$$

que é a média Harmônica das velocidades médias de 120 e 80 km/h.

Verificamos que para este exemplo não foi necessário estipular uma distância entre os pontos *A* e *B*, basta utilizar a média harmônica entre as velocidades.

Generalizando o problema, vamos considerar s a distância entre os pontos *A* e *B*. Antes, vamos definir as seguintes notações:

- v_{AB}: velocidade de ida;
- t_{AB}: tempo gasto no trajeto de ida;
- v_{BA}: velocidade de volta;
- t_{BA}: tempo gasto no trajeto de volta;
- v_m: velocidade média.

Em cinemática utilizamos para velocidade média a variação do espaço dividido pela variação de tempo, através da fórmula

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ . \qquad (2.14)$$

Assim temos,

$$v_{AB} = \frac{s}{t_{AB}} \quad \Rightarrow \quad t_{AB} = \frac{s}{v_{AB}} \qquad (2.15)$$

e

$$v_{BA} = \frac{s}{t_{BA}} \quad \Rightarrow \quad t_{BA} = \frac{s}{v_{BA}}\ . \qquad (2.16)$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.16) na equação (2.14), temos

$$v_m = \frac{s+s}{t_{AB}+t_{BA}} = \frac{2\cdot s}{\frac{s}{v_{AB}}+\frac{s}{v_{BA}}} = \frac{s\cdot 2}{s\cdot\left(\frac{1}{v_{AB}}+\frac{1}{v_{BA}}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_{AB}}+\frac{1}{v_{BA}}}\ .$$

Portanto, independente da distância, as velocidades médias de ida e volta entre dois pontos é dado pela média harmônica, ou seja,

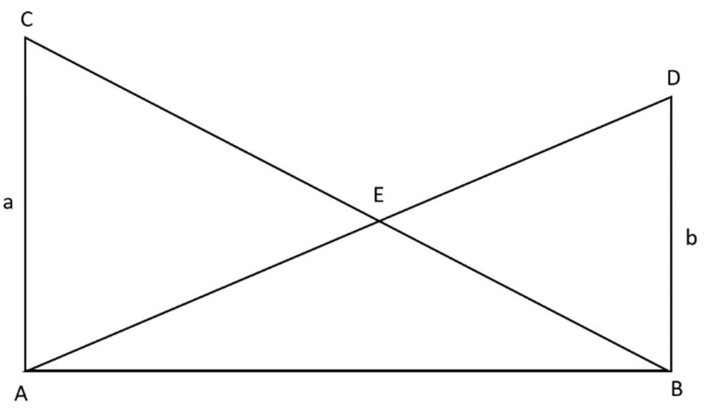
$$h = \frac{2}{\frac{1}{v_{AB}}+\frac{1}{v_{BA}}}\ . \qquad (2.17)$$

No próximos dois exemplos veremos a média harmônica aplicada a geometria.

Exemplo 2.11:

Dada uma reta *r* e dois números positivos *a* e *b*, considere dois pontos *A* e *B* de *r*. A partir deles, construímos os segmentos de reta *AC* e *BD* de comprimentos *a* e *b*, respectivamente e perpendiculares a reta *r*. Se ligarmos o ponto *C* ao ponto *B*, o ponto *D* ao ponto *A* e chamarmos o ponto de intersecção dos segmentos *AD* e *CB* de *E* (Figura 2.4), prove que a distância *x* de *E* até a reta *r* é a metade da média harmônica de *a* e *b*. (PEREIRA, 2014).

Figura 2.4: Representação geométrica da média Harmônica - 1.



Fonte: Autor

Solução:

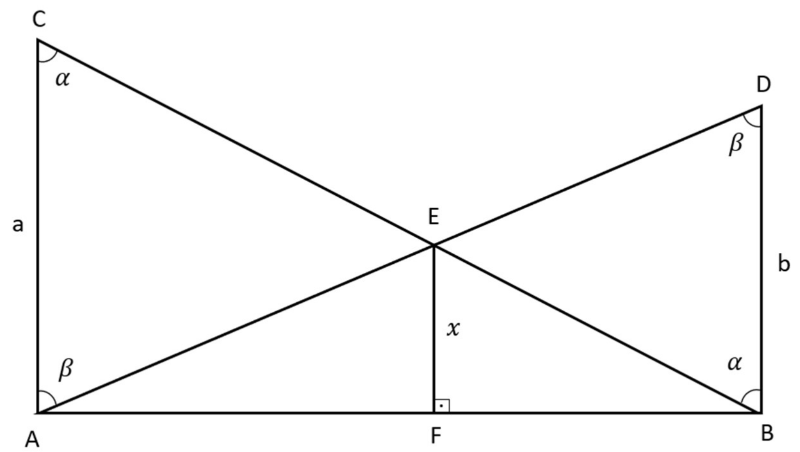
Sabemos que a média harmônica de a e b é

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} .$$

Observe a Figura 2.5, devemos mostrar que

$$x = \frac{h}{2} = \frac{ab}{a+b} .$$

Figura 2.5: Representação geométrica da média Harmônica - 2.



Fonte: Autor

Temos que os segmentos de reta AF e BF são as respectivas alturas relativas ao vértice E dos triângulos AEC e BED.

Da semelhança de triângulos temos,

$$\frac{a}{b} = \frac{AF}{FB} . \tag{2.18}$$

Também, da semelhança dos triângulos ACB e FEB, temos

$$\frac{a}{x} = \frac{AB}{FB} .$$

Como $AB = AF + FB$, podemos reescrever a relação acima como

$$\frac{a}{x} = \frac{AF + FB}{FB} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{AF}{FB} + 1 . \tag{2.19}$$

Substituindo a equação (2.18) em (2.19)

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{b} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{a+b}{b} \ .$$

Portanto,

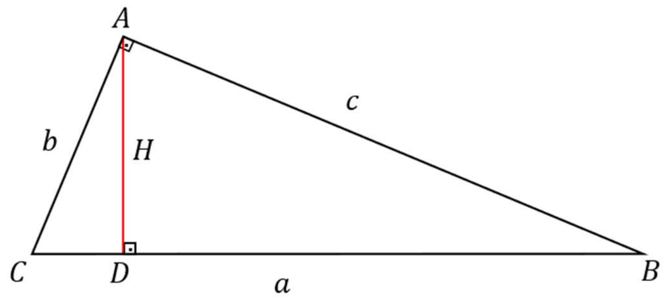
$$x = \frac{ab}{a+b} \ . \tag{2.20}$$

Exemplo 2.12:

Demonstre que, em um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, o quadrado da altura referente a hipotenusa é igual a metade da média harmônica dos quadrados dos catetos.

Considere a Figura 2.6 a seguir.

Figura 2.6: Triângulo retângulo



Fonte: Autor

Se considerarmos $h_{(b^2,\, c^2)}$ a média harmônica entre o quadrado dos catetos. Então devemos obter a seguinte relação

$$H^2 = \frac{1}{2} \cdot h_{(b^2,\, c^2)} \quad \Rightarrow \quad H^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2 \cdot c^2}{b^2 + c^2} \ ,$$

ou seja,

$$H^2 = \frac{b^2 \cdot c^2}{b^2 + c^2} \ . \tag{2.21}$$

Para demostrar a equação (2.21) devemos lembrar de uma relação métrica no triângulo retângulo, obtida a partir da semelhança dos triângulos ADC e ABC.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{H} \quad \Rightarrow \quad a \cdot H = b \cdot c \ \ . \tag{2.22}$$

Elevando ambos os membros da equação (2.22) ao quadrado, temos

$$a^2 \cdot H^2 = b^2 \cdot c^2 \ , \tag{2.23}$$

e dividindo a equação (2.23) por a^2, temos

$$H^2 = \frac{b^2 . c^2}{a^2} \ . \tag{2.24}$$

Lembrando que a é a hipotenusa do triângulo ABC, então vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 \ . \tag{2.25}$$

Substituindo a equação (2.25) em (2.24), temos

$$H^2 = \frac{b^2 . c^2}{b^2 + c^2} \ . \tag{2.26}$$

Portanto, chegamos ao resultado desejado, a equação (2.26) é igual a equação (2.21). O exemplo a seguir envolve uma relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica.

Exemplo 2.13:

Uma curiosidade interessante é que com os números a e b, reais não nulos e positivos, ao fazermos a média geométrica das médias aritmética e harmônica, obtemos a própria média geométrica desses números.

Vamos verificar essa afirmação. Para fazermos essa verificação devemos lembrar das médias propostas. Considere as médias aritmética, geométrica e harmônica entre a e b, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \ , \qquad g = \sqrt{a \cdot b} \ , \qquad h = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \ .$$

Consideremos $g(\bar{x}, h)$ a média geométrica entre as médias aritmética e harmônica, ou seja,

$$g(\bar{x}, h) = \sqrt{\bar{x} \cdot h} \quad \Rightarrow \quad g(\bar{x}, h) = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}} \quad \Rightarrow \quad g(\bar{x}, h) = \sqrt{a \cdot b} = g\ .$$

Portanto, a média geométrica entre a média aritmética e harmônica dos números a e b é a própria média geométrica.

Até o final desse capítulo, fizemos uma revisão das médias mais utilizadas no ensino médio. No próximo capítulo vamos ver alguns exemplos incomuns no ensino escolar a fim de contribuir para o enriquecimento do conteúdo com exemplos de aplicações da média quadrática na Física e na Engenharia Florestal.

3. MÉDIA QUADRÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

A média quadrática é pouco explorada no ensino médio, embora tenha grande importância para ciência. Neste capítulo estudaremos a importância da média quadrática na Engenharia Florestal e na Física.

3.1. Média Quadrática

Nos próximos parágrafos vamos ver a definição formal de média quadrática e um exemplo, retirado de MORGADO e CARVALHO (2015).

Definição 3.1: A média quadrática dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é definida por

$$q = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n}} \tag{3.1}$$

isto é, a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números.

Exemplo 3.1:

A quantidade de uma aproximação é medida pelo seu erro, que é a diferença entre o valor da aproximação e o valor real da grandeza. Se considerarmos o número inteiro 4 então ele é uma aproximação do número decimal 3,8 com erro de 0,2 (também se diz uma aproximação com excesso de 3,8 com erro de 0,2) e o número decimal 5,5 é uma aproximação do número decimal 5,7 com erro de 0,2 (ou uma aproximação com falta de 5,7 com erro 0,2). Evidentemente quanto mais próximo de zero estiver o erro, melhor será a aproximação.

A qualidade de uma lista de aproximações é medida pela média quadrática dos seus erros, ou também pelo erro médio quadrático, que é o quadrado dessa média quadrática, ou seja, é a média aritmética dos quadrados dos erros. Abaixo temos duas listas S_1 e S_2 de aproximação do número 4:

$$S_1 = (3\,;\ 4{,}5\,;\ 3{,}6)\,; \qquad S_2 = (3{,}2\ ;\ 4{,}8)\ .$$

Os erros médios quadráticos são respectivamente iguais a

$$\frac{1^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4^2}{3} = 0{,}47 \quad ; \qquad \frac{0{,}8^2 + 0{,}8^2}{2} = 0{,}64\ .$$

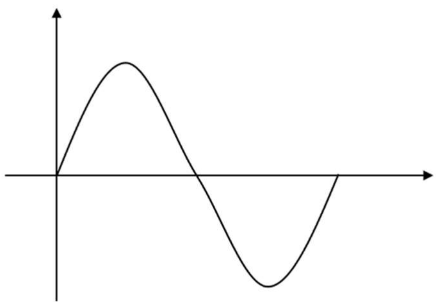
Dessa forma, concluímos que a lista de aproximação S_1 é melhor do que a lista de aproximação S_2.

Na próxima seção vamos ver uma aplicação da média quadrática na área de Engenharia Elétrica. O *Root Mean Square* (RMS), comumente conhecido como valor eficaz, é comum entre os profissionais de eletricidade, mas algo incomum ainda no ensino médio.

3.2 Valor Eficaz (RMS)

Para a medição de tensão (Volt) e corrente (Ampere) no dia a dia de muitos eletricistas, é utilizado um equipamento chamado multímetro que mede a tensão RMS. Dependendo da escolha do multímetro essa medição pode apresentar alguns erros em alguns circuitos. Isso ocorre pelo modo como cada multímetro é projetado para fazer a medição. O modelo mais comum e com preço mais acessível foi desenvolvido para medir um circuito onde as ondas são senoidais como representado na Figura 3.1.

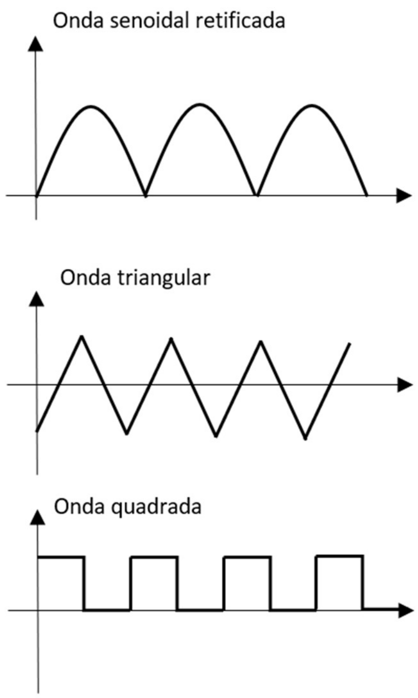
Figura 3.1 - Um período de Senoide



Fonte: Autor

Já os modelos dos medidores TRUE RMS, apesar de ter um custo maior no mercado, apresentam uma medição mais precisa com diferentes formas de ondas. Na Figura 3.2. temos alguns modelos de ondas onde o multímetro TRUE RMS apresenta uma medição mais precisa que o multímetro comum.

Figura 3.2: Ondas diversas



Fonte: Autor

A tensão é usado para o cálculo da potência média dissipada, gerada por qualquer tipo de onda em corrente alternada em um circuito elétrico.

Para identificarmos a aplicação da média quadrática nas medições e chegarmos a potência média dissipada, precisamos antes relembrar alguns conceitos que veremos nas próximas seções.

3.2.1 Tensão média

Para o cálculo da tensão elétrica em uma corrente alternada é utilizado uma ferramenta matemática chamada Integral. Não vamos aprofundar nos cálculos integrais, pois o objetivo das Seções 3.2.1 e 3.2.2 é apenas entender como um multímetro foi projetado para fazer a medição de uma onda senoidal.

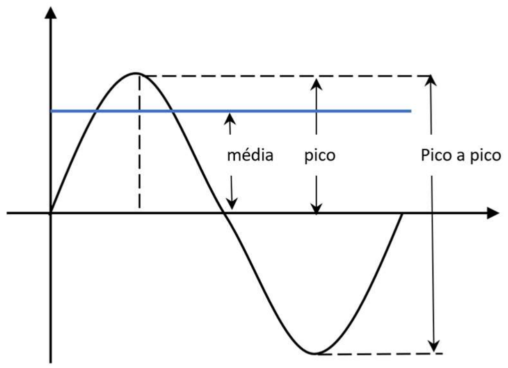
O valor médio da tensão elétrica, é calculado conforme a integral

$$V_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T |v(t)|\, dt \tag{3.2}$$

onde, V_{med} é a tensão média obtida no intervalo de tempo de zero a T da função tensão $v(t)$ medida em Volts. Observe que a tensão média na equação (3.2) está em módulo, pois se fizermos a integral em um ciclo, a média seria zero, pois a função senoidal é simétrica em relação ao eixo x.

Na Figura 3.3 podemos identificar a relação entre a tensão alternada e a tensão média obtida em um ciclo.

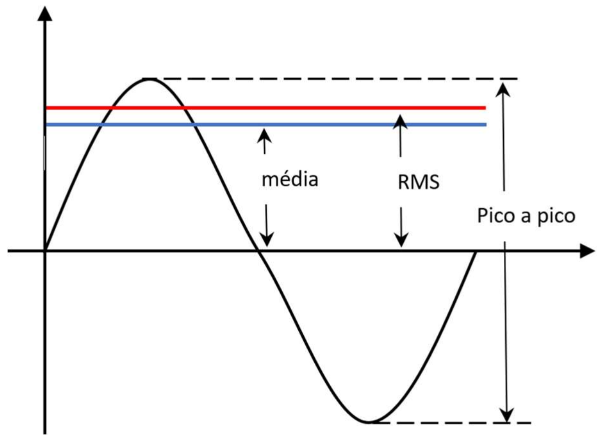
Figura 3.3 – Tensão média



Fonte: Autor

Uma informação relevante é sobre a tensão fornecida pelas concessionárias de energia nas redes domésticas no Brasil. Uma das tensões utilizadas é 220 volts, sendo na verdade o RMS, que é um valor que está entre tensão média e o pico máximo. Como mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Tensão RMS



Fonte: Autor

A lei de OHM afirma que a tensão aplicada em dois terminais é proporcional à corrente elétrica que percorre no circuito. Considere as notações,

V = Tensão (Volts),

I = Corrente medida em amperes,

R = Resistência medida em Ohms,

Conforme a lei de OHM temos,

$$I = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad V = I.R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V}{I}\ . \tag{3.3}$$

Não podemos deixar de lembrar da potência, conceito físico que relaciona a corrente de um circuito e a tensão, ou seja, a potência P é igual ao produto das duas grandezas, tensão e corrente,

$$P = V.I \tag{3.4}$$

sendo a potência P medida em Watts.

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.4), obtemos uma equação para calcular a potência de um circuito de corrente contínua relacionando tensão e resistência,

$$P = \frac{V^2}{R}. \tag{3.5}$$

Na seção a seguir, nos dedicaremos em fazer o cálculo do valor da tensão RMS que comentamos anteriormente.

3.2.2 O cálculo do RMS

Para calcular o RMS vamos considerar que uma resistência R, seja alimentada com uma tensão alternada $v(t)$. Circulará pelo circuito uma corrente $i(t)$ também alternada. Como tensão e corrente são funções em relação ao tempo t, a potência pode ser escrita por

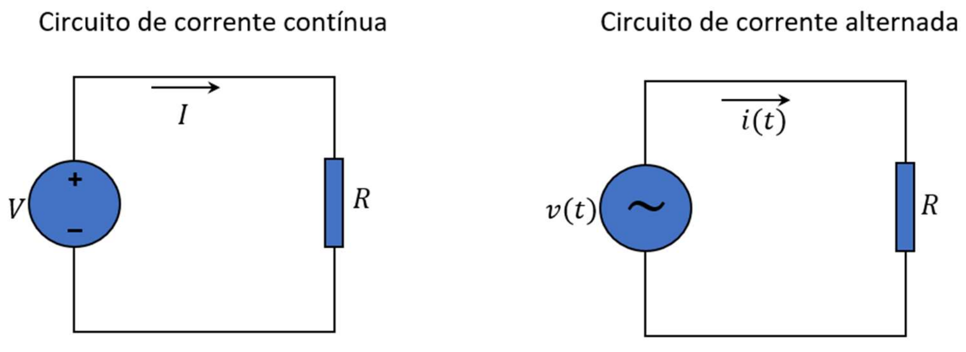
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R}. \tag{3.6}$$

Para calcular a potência média ao longo do período T, a equação (3.6) pode ser escrita como

$$P_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt \ . \tag{3.7}$$

Na Figura 3.5 estão representados os circuitos de corrente contínua e de corrente alternada, respectivamente, que produzem a mesma potência dissipada para determinação do valor eficaz.

Figura 3.5 – circuitos: corrente contínua e alternada



Fonte: Autor

Então, se igualarmos as equações (3.5) e (3.7) que, representam respectivamente a potência do circuito de corrente contínua e potência do circuito de corrente alternada, onde possuem a mesma potência dissipada temos,

$$\frac{V^2}{R} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2}{R} = \frac{1}{TR}\int_0^T v^2(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt \ .$$

Portanto,

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} \ . \tag{3.8}$$

Assim, obtemos a tensão RMS

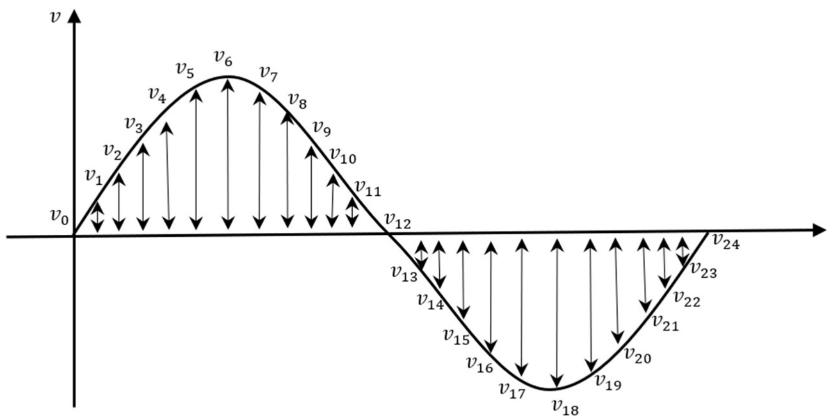
$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} \ . \tag{3.9}$$

Portanto, um multímetro comum faz a medição da tensão RMS com a equação (3.9). Na seguinte seção veremos como é feito o cálculo do TRUE RMS.

3.2.3 O cálculo do TRUE RMS

O multímetro com a função TRUE RMS faz um mapeamento na onda, marcando pontos com seus valores em um determinado instante de acordo com Figura 3.6.

Figura 3.6 – Mapeamento multímetro TRUE RMS



Fonte: Autor

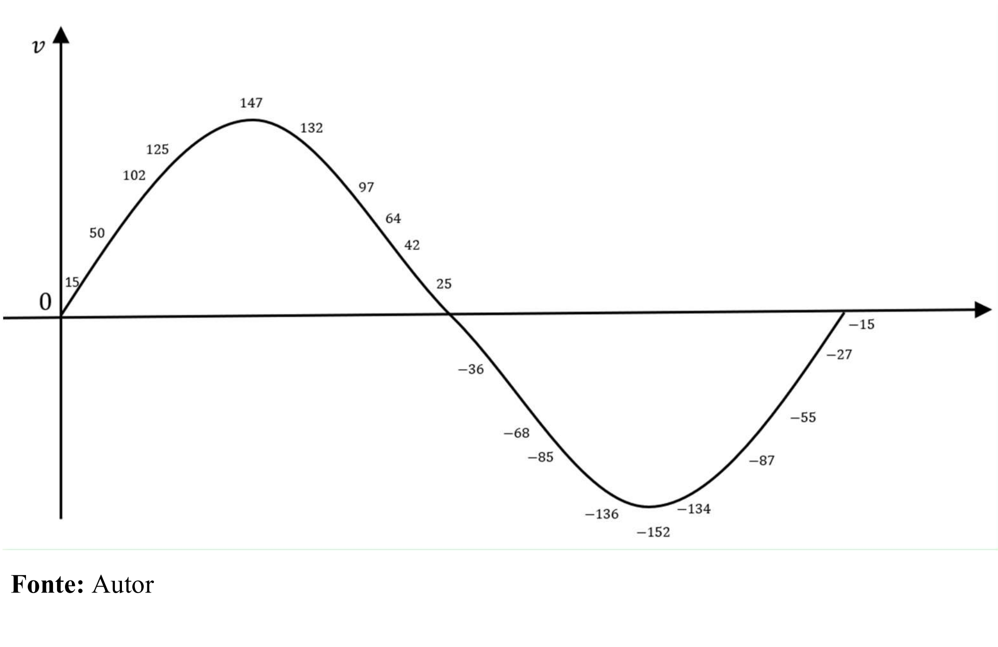
Para calcular a tensão eficaz (RMS) o multímetro utiliza a média quadrática dos valores marcados, isto é,

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{{V_0}^2 + {V_1}^2 + {V_3}^2 + \ldots + {V_n}^2}{n}}\ . \tag{3.9}$$

Observe que o multímetro com a função TRUE RMS é mais preciso nas situações adversas, pois funciona com qualquer tipo de onda. Observe, também, que a fórmula do TRUE RMS é a mesma da média quadrática.

Para melhor entendimento vamos simular o mapeamento feito por um multímetro TRUE RMS em uma onda senoidal durante um ciclo completo, conforme Figura 3.7.

Figura 3.7 – Mapeamento multímetro TRUE RMS em um ciclo



Fonte: Autor

Podemos observar que o mapeamento foi feito com 21 medições durante um ciclo. Para que a equação não fique muito longa, vamos apresentar a média quadrática utilizando somatório, onde v_1 representa a primeira medição, v_2 representa a segunda medição e assim por diante até a v_{21} medição, logo

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{21} {v_i}^2} \, .$$

Efetuando os cálculos, temos

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{167930}{21}} = \sqrt{7996{,}667} = 89{,}42 \, .$$

Dessa forma, concluímos que a tensão eficaz é de 89,42 volts.

Uma outra aplicação da média quadrática vem da teoria cinética dos gases da Física, onde se calcula a velocidade média das moléculas de um gás sob pressão a uma temperatura constante, como veremos na próxima seção.

3.3 Teoria cinética dos gases e média quadrática

Antes de apresentar tal aplicação ligada a média quadrática, vamos relembrar alguns conceitos importantes para melhor compreensão dessa aplicação.

Um gás consiste em átomos que preenchem o volume de seu recipiente. As variáveis volume, pressão e temperatura, são consequências do movimento dos átomos. Consideramos as seguintes definições:

Volume – resultado da liberdade dos átomos;

Pressão – resultado das colisões dos átomos com as paredes do recipiente;

Temperatura – relacionada com a energia cinética dos átomos.

A constante de Avogadro, aparece nos cálculos dessa aplicação, logo é importante entendermos o que significa.

Amadeo Avogadro, físico Italiano, que em 1811, formulou uma hipótese relacionada ao número de moléculas existente em uma amostra de gás, hipótese essa que ficou mais tarde conhecida com a lei de Avogadro, que diz:

"Volumes iguais, de gases diferentes à mesma temperatura e pressão, possuem o mesmo número de moléculas."

Número esse que ficou conhecido como número de Avogadro (N_A). (MUNDOEDUCAÇÃO, 2019)

Definimos mol como o número de átomos ou moléculas N_A em uma amostra de 12g do carbono-12. Num mol de qualquer substância existem

$$N_A = 6{,}02.10^{23} mol^{-1} .$$

número de mols (n) contidos em uma amostra de qualquer substância é igual a razão entre o número de moléculas (*N*) na amostra e o número de moléculas em 1mol

$$n = \frac{N}{N_A} . \tag{3.10}$$

O número de mols n pode ser encontrado dividindo a massa (M_{am}) da amostra pela sua massa molar (*M*), onde

$$M = m.N_A. \tag{3.11}$$

Então,

$$n = \frac{M_{am}}{M} = \frac{M_{am}}{m.N_A}, \tag{3.12}$$

onde, M_{am} é a massa da amostra, M é a massa molar e m a massa de uma molécula.

Na próxima seção vamos ver qual a relação entre pressão, temperatura e velocidade média quadrática.

3.3.2 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática

Para darmos continuidade no raciocínio e entendermos essa relação, precisamos saber o que é quantidade de movimento linear (ou momentum linear).

Observando uma partida de bilhar, ao projetar uma bolinha na outra, podemos ver que uma bolinha transfere seu movimento total ou parcialmente para a outra.

A grandeza física que possibilita o estudo dessa transferência de movimento é a quantidade de momento linear $(\vec{Q})$, ou seja, quantidade de momento ou momentum linear.

A quantidade de movimento relaciona a massa de um corpo com sua velocidade

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v} \ . \tag{3.13}$$

Como características da quantidade de movimento, temos

- Módulo: $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$
- Direção: a mesma da velocidade.
- Sentido: a mesma da velocidade.
- Unidade de medida no sistema internacional (SI): kg.m/s.

Exemplo 3.1: (Fonte: SOFISICA – 2020)

Qual a quantidade de movimento de um corpo de massa $2kg$ a uma velocidade de 1m/s?

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q} = 2.1 \quad \Rightarrow \quad \vec{Q} = 2kg.m/s\,.$$

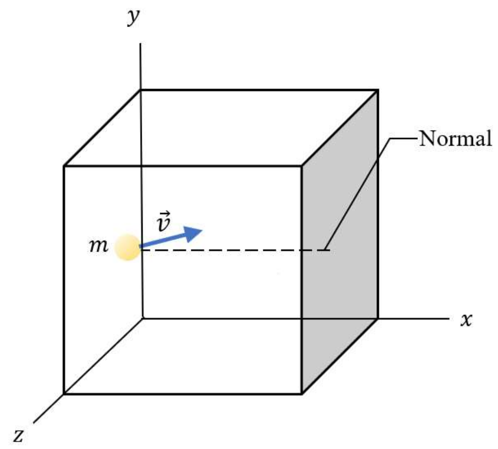
Para chegarmos na relação existente entre pressão, temperatura e velocidade média quadrática, vamos ilustrar uma situação no Exemplo 3.2. e através de equações vamos encontrar a média quadrática e definir essa relação matemática. Qualquer definição necessária será descrita no decorrer da resolução.

Exemplo 3.2:

Vamos admitir que n mols de um gás ideal esteja confinado numa caixa cúbica de volume $V,$ mantendo as paredes da caixa em uma temperatura T. Vamos obter a equação que relaciona a pressão p exercida pelo gás sobre as paredes e as velocidades das moléculas.

Para começarmos a equacionar, vamos verificar o que precisamos para não efetuarmos cálculos excessivos. Observamos a Figura 3.8.

Figura 3.8 – Molécula sob pressão



Fonte: Autor

Considere a parede sombreada da Figura 3.8. Iniciaremos pela pressão p na parede sombreada, que é determinada pela razão da força impulsiva média (F_x) exercida na parede pela área da parede. Ou seja,

$$p = \frac{F_x}{L^2} \ . \tag{3.14}$$

Agora, precisamos obter a força impulsiva média exercida por uma molécula sobre a parede. Essa força é igual à quantidade de movimento linear transferida, dividida pelo intervalo de tempo entre as transferências, isto é,

$$F_x = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t} \ . \tag{3.15}$$

Quando a molécula da Figura 3.8 colidir com a parede, a variação da quantidade de movimento linear ao longo do eixo x é dada pela diferença entre a quantidade de movimento final ($\vec{Q}_F$) e a quantidade de movimento inicial ($\vec{Q}_I$)

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_F - \vec{Q}_I = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x \ ,$$

ou seja, o valor em módulo da quantidade de movimento é

$$\Delta\vec{Q} = 2mv_x \ . \tag{3.16}$$

A molécula vai atingir a parede várias vezes. O tempo entre duas colisões na mesma parede será dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2L}{v_x}. \tag{3.17}$$

Substituir as equações (3.16) e (3.17) na equação (3.15), temos

$$F_x = \frac{2m \cdot v_x}{\frac{2L}{v_x}} \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{m \cdot v_x^2}{L} \ . \tag{3.18}$$

Para obter a força total sobre a parede sombreada (F'_x), isto é, a taxa com a qual a quantidade de movimento linear é atribuída a parede por todas as moléculas, deve-se somar as quantidades $\frac{m \cdot v_x^2}{L}$ para todas as moléculas. Considerando que temos N moléculas, sendo v_{x1} é a componente x da velocidade da molécula 1, v_{x2} é a componente x da velocidade da molécula 2, e assim por diante. Assim,

$$F'_x = \frac{mv_{x1}^2}{L} + \frac{mv_{x2}^2}{L} + \cdots + \frac{mv_{xN}^2}{L} \ . \tag{3.19}$$

Em seguida, para obter a pressão, divide-se essa força pela área da parede (L^2) a pressão é portanto,

$$p = \frac{F'_x}{L^2} = \frac{mv_{x1}^2/L + mv_{x2}^2/L + \cdots + mv_{xN}^2/L}{L^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{mv_{x1}^2 + mv_{x2}^2 + \cdots + mv_{xN}^2}{L^3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p = \left(\frac{m}{L^3}\right).\left(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2\right) \tag{3.20}$$

Se N é o número de moléculas na caixa e $N = n.N_A$, Equação (3.10), podemos convenientemente multiplicar o numerador e denominador da equação (3.16) por

$$\frac{n.N_A}{N} = 1 \ ,$$

sem alterar a equação. Assim,

$$p \ = \ \left(\frac{m}{L^3}\right) \cdot \left(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2\right) \cdot \frac{n.N_A}{N} \ = \ \left(\frac{n.m.N_A}{L^3}\right) \cdot \left(\frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2}{N}\right). \tag{3.21}$$

Se

$$(v_x^2)_{med} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2}{N} \tag{3.22}$$

é a velocidade média quadrática da componente x de todas as velocidades moleculares, então, podemos reescrever a equação (3.21) da seguinte forma,

$$p = \frac{n \cdot m \cdot N_A}{L^3} (v_x^2)_{med} \ , \tag{3.23}$$

Substituindo, a equação (3.11) em (3.23) e lembrando que o volume da caixa da Figura 3.8 é $V = L^3$, temos

$$p = \frac{n \cdot M}{V} (v_x^2)_{med} \, . \tag{3.24}$$

Não podemos esquecer que até a equação (3.24) efetuamos os cálculos somente para a componente x. Mas podemos estender para as componentes y e z, pois os valores dos quadrados das componentes da velocidade são iguais. Para qualquer molécula, ${v^2}_x = {v^2}_y = {v^2}_z$, de modo que, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, então

$$v = 3 \cdot v_x^2 \ ,$$

ou seja,

$$v_x^2 = \frac{1}{3} \cdot v^2 \, . \tag{3.25}$$

Assim, substituindo a equação (3.25) na equação (3.24) temos,

$$p = \frac{n \cdot M}{3V} (v^2)_{med} \ . \tag{3.26}$$

A raiz quadrada de $(v^2)_{med}$ é uma velocidade conhecida como velocidade média quadrática, simbolizada por v_{RMS}, ou seja,

$$\sqrt{(v^2)_{méd}} = v_{RMS} \ .$$

Assim, temos as equações

$$p = \frac{n \cdot M}{3V} v^2{}_{RMS} \qquad (3.27)$$

e

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3p \cdot V}{n \cdot M}} \quad . \qquad (3.28)$$

Com a equação (3.28) chegamos a relação que propomos no início desse capítulo no Exemplo 3.2. A relação existente entre pressão p exercida pelo gás sobre as paredes e as velocidades das moléculas em uma caixa com volume e temperatura constantes.

Agora, veremos uma aplicação de média quadrática na área de engenharia florestal. Uma ferramenta utilizada nesta área é a de dendrometria, que definiremos na seção a seguir.

3.4 Dendrometria e média quadrática

Nesta seção devemos esclarecer que muitos métodos de campo são desenvolvidos para que os cientistas ou técnicos possam ter maior agilidade e simplicidade na execução e processamento de dados. Esses métodos podem apresentar uma margem de erro maior. Lembrando que a escolha do método a ser utilizado, e todas informações, coletadas e analisadas é de responsabilidade integral do técnico responsável. Então, a escolha é muito pessoal. Nesta seção escolhemos um desses métodos que utiliza a média quadrática na dendrometria para estimar ou determinar quantitativamente o que uma floresta possui em recursos naturais.

A palavra dendrometria é derivada dos vocábulos gregos *dendron* e *metria*, que significam, respectivamente, árvore e mensuração. A dendrometria, portanto, refere-se ao estudo das dimensões das árvores e objetiva, basicamente, determinar o volume florestal e, portanto, antever com confiança o estoque e o incremento florestal.

A dendrometria é a disciplina que se encarrega de estudar todas as variáveis de estado que definem uma árvore, seus componentes e os produtos que dele se originam. Também inclui o estudo do crescimento das árvores através da evolução temporal de variáveis de interesse como os diâmetros, alturas ou volumes de fustes. (MUNIZ, 2007).

No próximo parágrafo veremos algumas variáveis dendrométricas essenciais para entendimento dessa aplicação da média quadrática.

As variáveis dendrométricas mais importantes para o inventário florestal compreendem o diâmetro na altura do peito de uma pessoa (DAP), a altura total e o fator de forma. Em inglês o DAP é conhecido como DBH (Diameter at Breast Height). O DAP é uma medida do diâmetro da árvore a 1,30 metros de altura em relação ao nível do solo (medida utilizada no Brasil); a altura total é o comprimento da árvore ou do seu fuste/tronco; e o fator de forma expressa o afilamento do fuste ao longo de seu comprimento, isto é, indica quanto o diâmetro de uma árvore diminui ao longo da sua altura.

O diâmetro a altura do peito (DAP) é considerado uma variável dendrométrica muito importante em trabalhos florestais. Sempre que possível a medição do DAP de uma árvore em pé deve ser realizada a 1,30m de altura. Esse ponto de medição dá agilidade ao trabalho de campo, facilita o manuseio de instrumentos de medição e diminui o risco de problemas ergonômicos ao mensurador, sendo uma forma de padronização mundial da altura de tomada da medida.

Vamos ver algumas ferramentas utilizadas para a medição do DAP:

Uma ferramenta utilizada para medição do DAP é a Suta. Consiste em uma régua graduada conectada a dois braços perpendiculares, sendo um fixo e o outro móvel (Figura 3.9). Para a correta medição do diâmetro das árvores é importante que a Suta esteja em posição perpendicular ao eixo do fuste da árvore.

Figura 3.9 – Suta

Fonte: Referência [8]

Uma outra ferramenta para medição do DAP é a Fita Métrica, que é utilizada para a medição da circunferência da árvore. Neste caso, o diâmetro é obtido pelo desenvolvimento da seguinte relação matemática:

$$DAP = \frac{CAP}{\pi}, \tag{3.29}$$

onde, o DAP é o diâmetro a altura do peito, CAP a circunferência a altura do peito e π a proporção numérica originada da relação entre as grandezas do perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro cujo valor é aproximadamente 3,141592... .

Como os diâmetros representam medidas de uma única dimensão (comprimento) é usual o cálculo da média aritmética dos DAPs. Para calcular a média aritmética dos DAPs podemos calcular utilizando os dados individuais Equação (3.30) ou utilizando uma tabela de frequência Equação (3.31),

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} DAP_i}{n} \ . \tag{3.30}$$

Se consideramos as seguintes notações

DAP_i = diâmetro a 1,30 m do solo da i-ésima árvore;

n = número total de árvores;

cl_i = centro da i-ésima classe de diâmetro;

f_i = freqüência na i-ésima classe de diâmetro,

teremos a Equação (3.30) escrita da seguinte forma

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} cl_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \ . \tag{3.31}$$

Na próxima seção veremos a relação entre o diâmetro médio e média quadrática.

3.4.1 Diâmetro médio (q) e Média Quadrática

A área seccional média ($\bar{g}$), considerando-se os DAPs de um conjunto de n árvores, pode ser obtida por

$$\bar{g} = \frac{\pi \cdot q^2}{4} \ . \tag{3.32}$$

Pode-se utilizar, no entanto, uma alternativa para o cálculo da área seccional média. Nesse caso, deve-se usar a média quadrática dos diâmetros ou o diâmetro médio q. A área seccional g é calculada por

$$g = \frac{\pi \cdot DAP^2}{4} \ , \tag{3.33}$$

a área seccional média pode ser definida por

$$\bar{g} = \frac{\pi \cdot q^2}{4} \ . \tag{3.34}$$

Para facilitar e justificar o entendimento do uso da média quadrática na dendrometria vamos mostrar uma aplicação. Vamos considerar um conjunto de *n* árvores com mesma altura H e DAP_i com $0 < i \leq n$. Se os volumes dos fustes destas árvores fossem obtidos por meio da expressão do volume de um cilindro, temos

$$V_1 = \frac{\pi \cdot DAP_1^2 \cdot H}{4} \ , \ \ V_2 = \frac{\pi \cdot DAP_2^2 \cdot H}{4} \ , \ \ V_3 = \frac{\pi \cdot DAP_3^2 \cdot H}{4} \ , \ \ \cdots \ , V_n = \frac{\pi \cdot DAP_n^2 \cdot H}{4} \ .$$

Para calcular o volume médio (Vm) utilizaremos a média aritmética simples

$$V_m = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi \cdot DAP_1^2 \cdot H}{4} + \frac{\pi \cdot DAP_2^2 \cdot H}{4} + \frac{\pi \cdot DAP_3^2 \cdot H}{4} + \cdots + \frac{\pi \cdot DAP_n^2 \cdot H}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_m = \frac{1}{n} \cdot \frac{H}{4}\left(\pi \cdot DAP_1^2 + \pi \cdot DAP_2^2 + \pi \cdot DAP_3^2 + \cdots + \pi \cdot {DAP_n}^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_m = \frac{\pi \cdot H}{4}\left(\frac{DAP_1^2 + DAP_2^2 + DAP_3^2 + \cdots + {DAP_n}^2}{n}\right) ,$$

ou simplesmente,

$$V_m = \frac{\pi \cdot H \cdot q^2}{4} \ . \tag{3.35}$$

Sendo,

$$q^2 = \frac{DAP_1^2 + DAP_2^2 + DAP_3^2 + \cdots + DAP_n{}^2}{n} = \frac{\sum DAP_n{}^2}{n} \quad \Rightarrow \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{DAP_1^2 + DAP_2^2 + DAP_3^2 + \cdots + DAP_n{}^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum DAP_n{}^2}{n}} \ . \tag{3.37}$$

Portanto, podemos concluir que o diâmetro médio é a média quadrada dos DAPs de uma amostra.

Para melhor entendimento vamos resolver um exemplo que utilize a média quadrática na dendrometria.

Exemplo 3.3

Um engenheiro florestal coletou os DAPs de 20 árvores em uma amostra de um hectare e os valores estão na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: DAPs da amostra em um hectare (em cm)

21	32	44	23	22
20	27	35	41	35
38	26	28	42	42
50	37	39	40	15

Queremos determinar a área seccional média dessa amostra.

Para resolver este exemplo devemos calcular o diâmetro médio q dos DAPs e depois calcular a área seccional média g. Novamente, para que a equação não fique muito longa, vamos apresentar a média quadrática utilizando somatório. Onde DAP_1 representa a primeira medição,DAP_2 representa a segunda medição e assim por diante até a DAP_{20}, assim,

$$q = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} DAP_i^2} \ .$$

Efetuando os cálculos temos,

$$q = \sqrt{\frac{23321}{40}} = \sqrt{583{,}025} = 24{,}24591 \ .$$

Agora, podemos calcular a área da seccional média desejada. Usaremos a equação (3.34) e substituindo, $q = 24{,}24591$ cm, na equação $\bar{g} = \frac{\pi . q^2}{4}$, temos

$$\bar{g} = \frac{\pi . \left(\sqrt{583{,}025}\right)^2}{4} = \frac{1831{,}627}{4} = 457{,}9068 \ .$$

Portanto, a área seccional média da amostra é de 457,91 cm².

Exemplo 3.4:

Deseja-se calcular o volume médio de madeira obtido de dez medições das árvores. A Tabela 3.2 apresenta os DAPs e altura dos frustres (*H*) (troncos) das árvores medidas em metros. Uma dica para os cálculos: Considere os frustres cilindros perfeitos e utilize o diâmetro médio para os cálculos.

Tabela 3.2: DAPs e Altura de dez árvores em metros.

Árvore	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DAP	0,10	0,23	0,11	0,25	0,34	0,32	0,41	0,27	0,35	0,27
Altura	3,00	4,50	2,56	5,60	6,30	7,00	6,50	4,80	6,20	5,00

Para calcular o volume médio, usaremos a equação (3.35) que é o diâmetro médio, assim,

$$q = \sqrt{\frac{DAP_1^2 + DAP_2^2 + DAP_3^2 + \cdots + DAP_n^2}{n}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{0{,}10^2 + 0{,}23^2 + 0{,}11^2 + 0{,}25^2 + 0{,}34^2 + 0{,}32^2 + 0{,}41^2 + 0{,}27^2 + 0{,}35^2 + 0{,}27^2}{10}}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{0{,}7919} \quad \Rightarrow \quad q^2 = 0{,}7919 \ . \tag{3.38}$$

Agora, podemos calcular o volume médio, Equação (3.35),

$$V_m = \frac{\pi \cdot H \cdot q^2}{4} \ .$$

Consideremos, H_1 a altura da árvore 1, H_2 a altura da árvore 2, assim até H_{10} a altura da árvore 10. O volume total é a soma dos volumes de todas as dez árvores. Então temos,

$$V_m = \frac{\pi \cdot H_1 \cdot q^2}{4} + \frac{\pi \cdot H_2 \cdot q^2}{4} + \cdots + \frac{\pi \cdot H_{10} \cdot q^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_m = \frac{\pi \cdot q^2}{4}(H_1 + H_2 + \cdots + H_{10}) \ .$$

Logo,

$$V_m = \frac{\pi \cdot 0{,}7919}{4}(3 + 4{,}5 + 2{,}56 + 5{,}6 + 6{,}3 + 7 + 6{,}5 + 4{,}8 + 6{,}2 + 5) \quad \Rightarrow$$

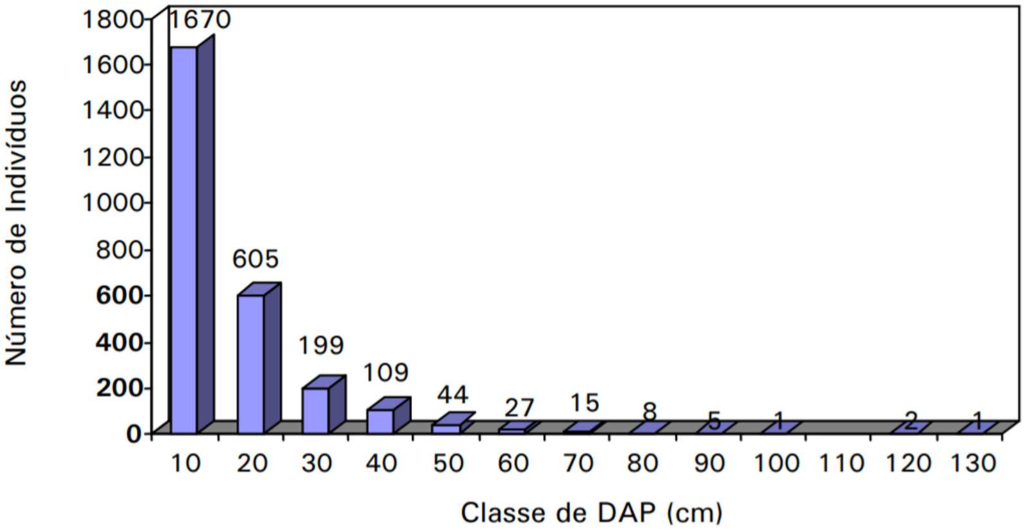
$$\Rightarrow \quad V_m = \frac{\pi \cdot 0{,}7919 \ \cdot \ 51{,}46}{4} \quad \Rightarrow \quad V_m = 32{,}00 \ .$$

Portanto, o volume médio de madeira é de 32 m³ com aproximação final de duas casas decimais.

No próximo parágrafo vamos ver uma aplicação real de média quadrática na engenharia florestal.

Um trabalho interessante foi realizado no município de Machadinho d´Oeste, no estado de Rondônia. Que teve como objetivo determinar a composição florística e estrutural de um fragmento florestal em uma área de 184,10 ha em cobertura florestal nativa (VIEIRA *et al.*, 2002). Vamos utilizar esse exemplo para uma possível aplicação no ensino médio, desconsiderando algumas variáveis utilizadas no trabalho científico, podendo então os valores aqui calculados apresentarem diferença em relação ao trabalho original. Utilizamos apenas as informações contidas na Figura 3.10 e consideraremos que a coleta foi efetuada em uma amostra equivalente a 5 hectares distribuídos aleatoriamente dentro da área. A Figura 3.9 apresenta a distribuição diamétrica da área observada.

Figura 3.10 – Distribuição de frequência por centro de classe de diâmetro em uma floresta densa em machadinho d´Oeste, RO.



Fonte: VIEIRA *et al.* , 2002

Uma observação importante nesse trabalho é o cálculo da área Basal (AB) que fornece ao cientista a densidade do povoamento, podendo determinar o grau de ocupação da área por madeira.

A área basal é simplesmente o somatório de todas as áreas seccionais das árvores.

$$AB = \sum_{i=1}^{n} g_i \quad \text{ou} \quad AB = n \cdot \bar{g} \ , \tag{3.39}$$

sendo n o número de árvores da amostra.

A área basal média $(\overline{AB})$ é a razão entre a área basal em m² e a área de observação em hectares. Nesse caso, a área de observação foi de 5 hectares,

$$\overline{AB} = \frac{AB}{5}. \tag{3.40}$$

Então, vamos colocar como objetivo o cálculo da área basal média $(\overline{AB})$ para essa aplicação. Iniciamos o cálculo com o diâmetro médio e devemos nos atentar que o gráfico apresenta uma frequência para cada classe. Observamos também que na Figura 3.10 o topo de cada classe diamétrica está o número (frequência f_i) de árvores de cada classe diamétrica.

Assim, na classe diamétrica de $DAP_1 = 10$ cm temos $f_1 = 1670$ árvores, na classe diamétrica de $DAP_1 = 20$ cm temos $f_2 = 605$ árvores, e assim sucessivamente. Outra observação importante é que em geral se calcula a área basal em metros quadrados por hectares (m²/ha), então vamos utilizar as classes diamétricas em metros. Usaremos somatório para representar os cálculos, assim,

$$q^2 = \frac{1}{2686}\sum_{i=1}^{13}\left(f_i \cdot {DAP_i}^2\right)$$

Substituindo os valores e calculando temos,

$$q^2 = \frac{119{,}06}{2686} = 0{,}044326\ .$$

Vamos calcular agora a área seccional média ($\bar{g}$)

$$\bar{g} = \frac{\pi \cdot q^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{g} = \frac{\pi \cdot 0{,}044326}{4} = 0{,}034814$$

Para obtemos a área basal, precisamos do valor de n que é a soma de todas as frequências no topo de cada coluna da figura 3.10, ou seja,

$$n = 1670 + 605 + 199 + 109 + 44 + 27 + 15 + 8 + 5 + 1 + 2 + 1 = 2686$$

então,

$$AB = n.\bar{g} \quad \Rightarrow \quad AB = 2686 \cdot 0{,}034814 \quad \Rightarrow \quad AB = 93{,}50951 \text{ m}^2.$$

Finalmente, vamos obter a área basal média ($\overline{AB}$), que para esse caso foi calculada com base em um experimento de 5 hectares. Então,

$$\overline{AB} = \frac{AB}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{93{,}50951}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 18{,}7019\ .$$

Concluímos que nessa amostra teremos uma área basal média de 18,70 m²/ha.

4. REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS MÉDIAS

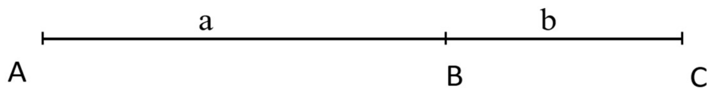
Neste capítulo vamos apresentar a representação geométrica da média aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Vamos fazer uma comparação dessas médias através das construções em um semicírculo.

4.1. Representação da média aritmética

Vamos representar a média aritmética $\bar{x}$ entre dois segmentos distintos de comprimento a e b, conforme orientação a seguir:

Primeiramente, construímos dois segmentos colineares $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de comprimentos a e b, respectivamente, conforme Figura 4.1.

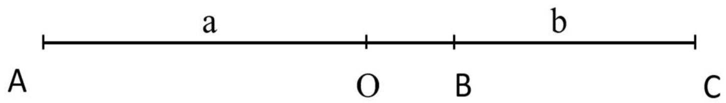
Figura 4.1: Segmentos colineares



Fonte: Autor

Em seguida, marcamos o ponto médio O do segmento $\overline{AC}$, conforme Figura 4.2.

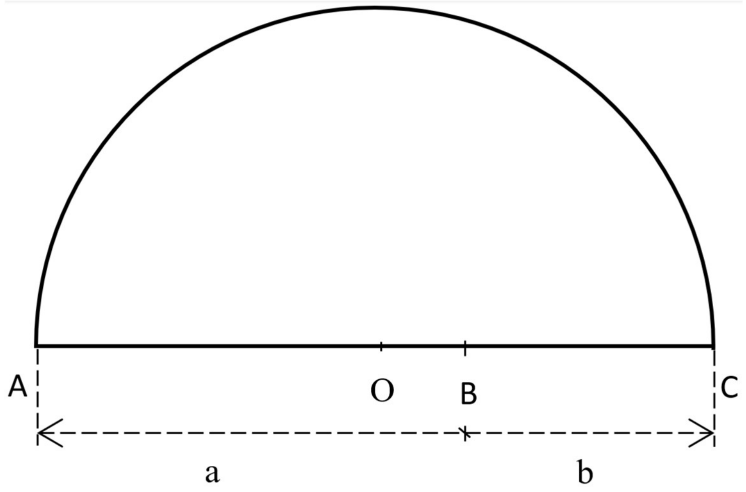
Figura 4.2: Ponto médio de $\overline{AC}$



Fonte: Autor

Construímos um semicírculo com centro O, tendo $\overline{AC}$ como diâmetro d, onde $d = a + b$, conforme Figura 4.3.

Figura 4.3: Semicírculo



Fonte: Autor

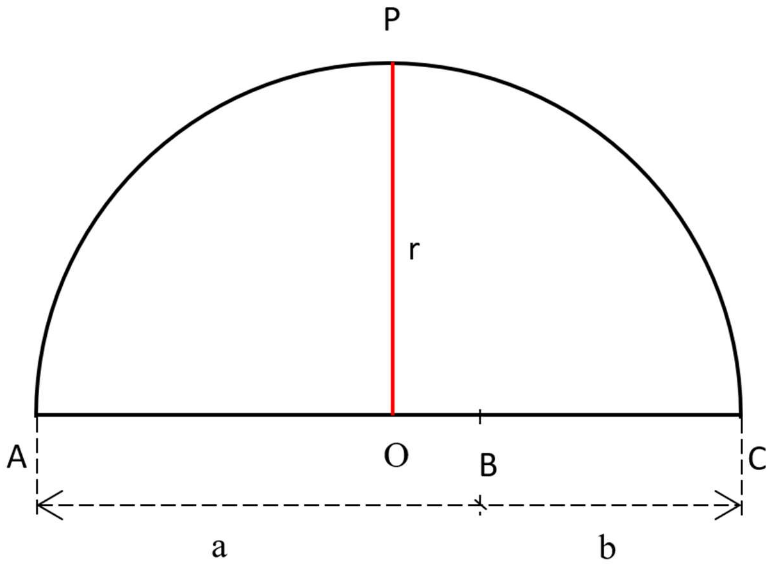
Como $d = 2r$, sendo r o raio do semicírculo e $d = a + b$ temos que

$$2r = a + b \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{a+b}{2} \ .$$

Portanto, o raio $\overline{OA}$ é a média aritmética dos segmentos a e b,

$$\overline{OA} = \frac{a+b}{2} = \bar{x} \ . \tag{4.1}$$

Figura 4.4: Representação geométrica da média aritmética



Fonte: Autor

Dessa forma, qualquer raio representado no semicírculo é a média aritmética entre a e b, logo podemos considerar $\overline{OP}$ como média aritmética.

4.2. Representação da média geométrica

A partir do semicírculo construído na Figura 4.4, traçaremos por B um segmento perpendicular ao diâmetro $\overline{AC}$ e denotando por D o ponto de interseção deste segmento com o semicírculo.

Em seguida, construirmos os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$.

Como o ângulo $A\hat{D}C$ é ângulo inscrito e possui o mesmo arco do ângulo $A\hat{O}C$, que mede 180°, então o ângulo $A\hat{D}C$ é ângulo reto. Podemos concluir que o triângulo ADC é retângulo.

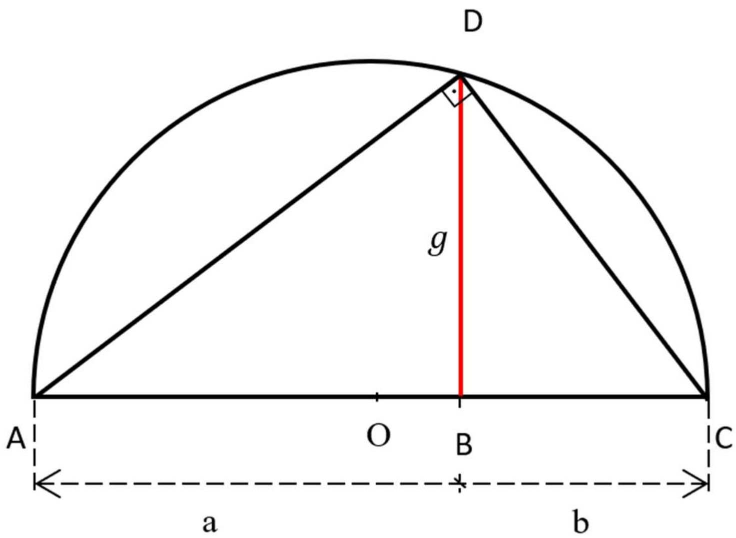
Utilizando as relações métricas do triângulo retângulo, onde o quadrado da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos na hipotenusa, temos que

$$(\overline{BD})^2 = \overline{AB}.\overline{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}.\overline{BC}} \ . \tag{4.2}$$

Concluímos, que $\overline{BD}$ é a média geométrica g dos segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então,

$$\overline{BD} = \sqrt{a.b} = g \ . \tag{4.3}$$

Figura 4.5: Representação da média geométrica



Fonte: Autor

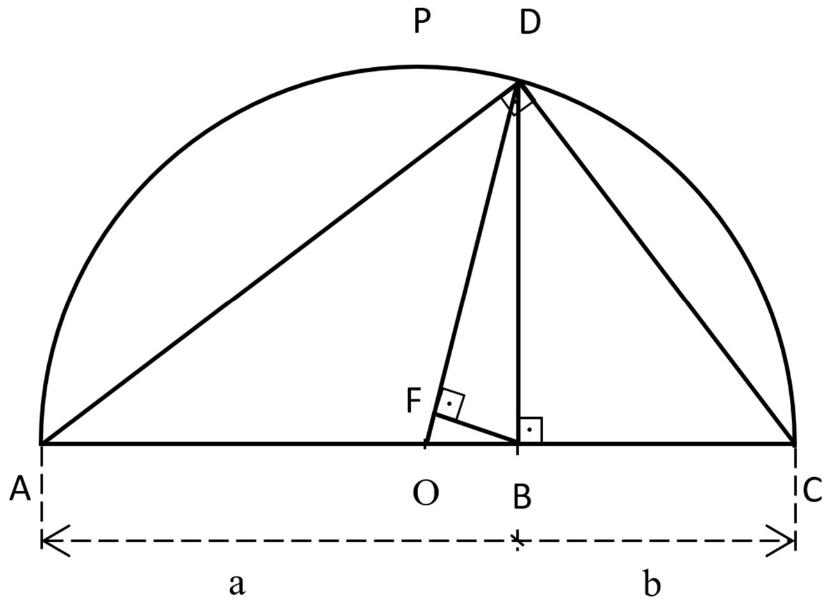
4.3. Representação da média harmônica

A partir do semicírculo construído na Figura 4.5, traçamos o raio $\overline{OD}$. Lembrando que

$$\overline{OD} = r = \frac{a+b}{2}\ .$$

Partindo de B traçamos um segmento perpendicular ao raio $\overline{OD}$. Denotando por F, o ponto de interseção desse segmento com o raio $\overline{OD}$;

Figura 4.6 Representação da média harmônica 1



Fonte: Autor

Observamos os triângulos OBD e DFB e vimos que

- Os ângulos $B\hat{F}D$ e $O\hat{B}D$ são ângulos retos, ou seja, $B\hat{F}D = O\hat{B}D = 90°$
- Os ângulos $F\hat{D}B$ e $O\hat{D}B$ são ângulos comuns, ou seja, $F\hat{D}B = O\hat{D}B = \alpha$
- Os ângulos $B\hat{O}D$ e $D\hat{B}F$ são ângulos com a mesma medida, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, ou seja,

$$B\hat{F}D + F\hat{D}B + D\hat{B}F = O\hat{B}D + O\hat{D}B + B\hat{O}D$$
$$90° + \alpha + D\hat{B}F = 90° + \alpha + B\hat{O}D$$
$$D\hat{B}F = B\hat{O}D$$

Logo, concluímos que os triângulos OBD e DFB são semelhantes, pois seus ângulos são iguais. Logo, pela semelhança desses triângulos temos

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BF}} \ .$$

Como $\overline{OD}$ representa a média aritmética, onde

$$\overline{OD} = r = \frac{a+b}{2}$$

e $\overline{BD}$ representa a média geométrica onde $\overline{BD} = g = \sqrt{a.b}$, obtemos a seguinte relação

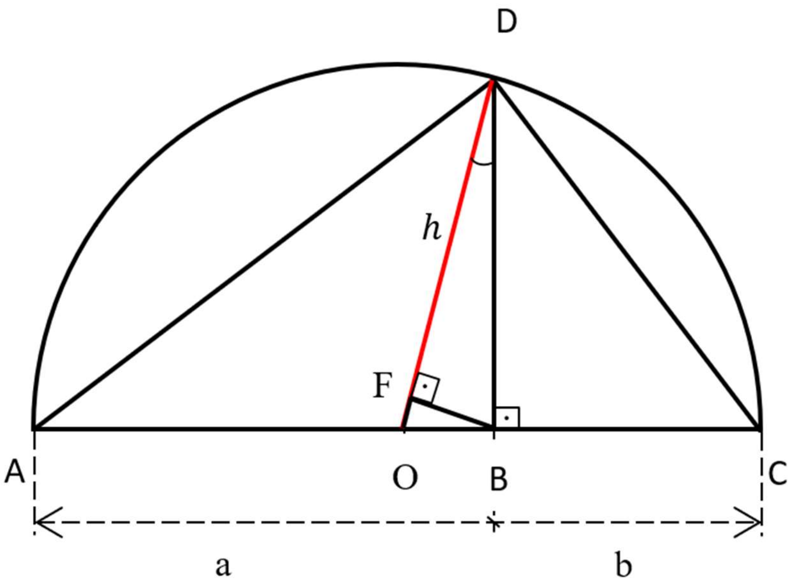
$$\frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \Rightarrow (\overline{BD})^2 = \overline{OD}.\overline{DF} \Rightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{a+b}{2}.\overline{DF} \Rightarrow ab = \frac{a+b}{2}.\overline{DF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2ab}{a+b} = \overline{DF} \Rightarrow \frac{\frac{2ab}{ab}}{\frac{a+b}{ab}} = \overline{DF} \Rightarrow \frac{2}{\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}} = \overline{DF} \Rightarrow \overline{DF} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \ .$$

Concluímos, que $\overline{DF}$ é a média harmônica (h) dos segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então

$$\overline{DF} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = h \ . \qquad (4.4)$$

Figura 4.7: Representação da média harmônica 2



Fonte: Autor

4.4. Representação da média quadrática

A partir do semicírculo construído na Figura 4.4, construir o segmento de extremidades B e P, obtendo assim um triângulo retângulo POB retângulo em O.

Obtermos o segmento $\overline{OB}$ através da diferença entre $\overline{OC}$ e $\overline{BC}$, sendo que,

$$\overline{OC} = \frac{a+b}{2}$$

e $\overline{BC} = b$, temos

$$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \overline{OB} = \frac{a+b}{2} - b \quad \Rightarrow \quad \overline{OB} = \frac{a-b}{2} \; . \tag{4.5}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POB, temos

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OB}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PB}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

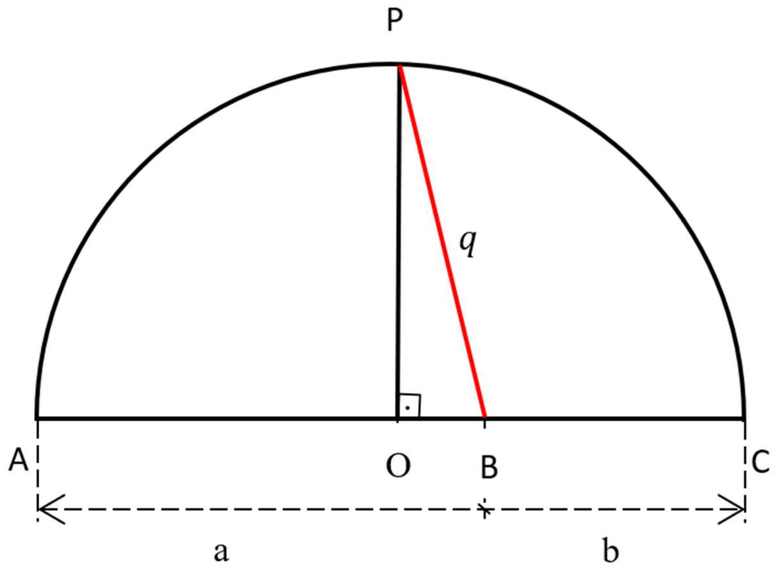
$$\overline{PB}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PB}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{PB}^2 = \frac{2a^2+2b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{PB}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \; .$$

Concluímos, que $\overline{PB}$ é a média quadrática (q) dos segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então

$$\overline{PB} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = q \; . \tag{4.6}$$

Figura 4.8 Representação da média quadrática



Fonte: Autor

4.5. Desigualdade das médias

Com base nas construções realizadas no Capítulo 4 vamos comparar as médias.

Na Figura 4.6 podemos determinar as desigualdades entre as médias aritmética, geométrica e harmônica.

Considere o triângulo ODB retângulo em B, temos:

- $\overline{OD}$ é hipotenusa,
- $\overline{BD}$ é cateto.

Logo, $\overline{OD} \geq \overline{BD}$. Como,

$$\overline{OD} = r = \frac{a+b}{2} = \bar{x}$$

e $\overline{BD} = \sqrt{a \cdot b} = g$, concluímos que

$$\bar{x} \geq g \ . \tag{4.7}$$

Considere agora o triângulo BFD retângulo em F, temos:

- $\overline{DF}$ é cateto
- $\overline{BD}$ é hipotenusa

Logo, $\overline{BD} \geq \overline{DF}$. Como,

$$\overline{BD} = \sqrt{a \cdot b}$$

e $\overline{DF} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = h$, concluímos que

$$g \geq h \ . \tag{4.8}$$

Na Figura 4.8 podemos determinar a desigualdade entre a média aritmética e quadrática.

Considere o triângulo retângulo OBP retângulo em O, temos que:

- $\overline{OP}$ é cateto
- $\overline{BP}$ é hipotenusa

Logo, $\overline{BP} \geq \overline{OP}$. Como,

$$\overline{BP} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = q$$

e $\overline{OP} = \frac{a+b}{2} = \bar{x}$, concluímos que

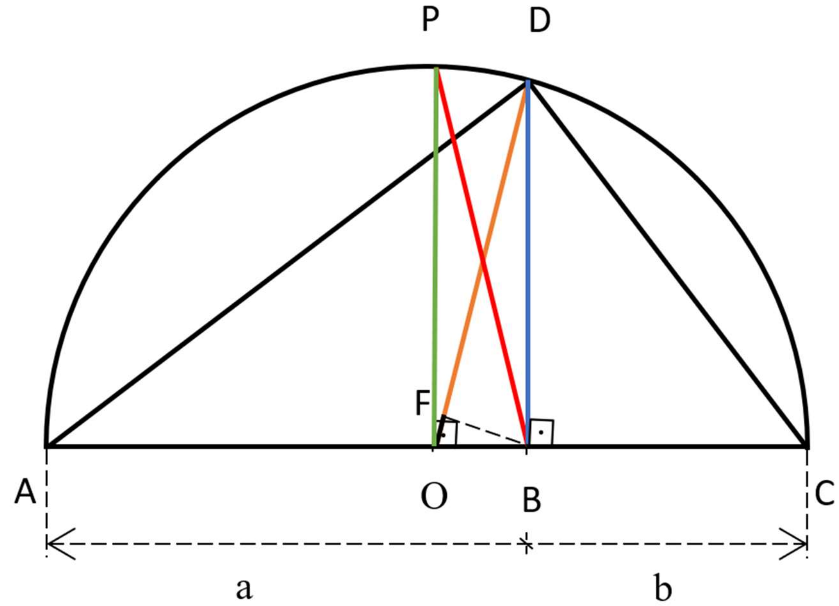
$$q \geq \bar{x} \, . \tag{4.9}$$

Considerando as inequações (4.7), (4.8) e (4.9), podemos fazer a comparação entre as médias propostas e concluir que

$$q \geq \bar{x} \geq g \geq h \tag{4.10}$$

Valendo a igualdade apenas quando $a = b$.

Figura 4.9 Representação das médias $\bar{x}$, g, q e h



Fonte: Autor

Na Figura 4.9 temos as representações geométricas das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Apenas pela construção podemos identificar as desigualdades das médias anteriormente obtidas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que este trabalho venha atingir sua proposta de fornecer ao professor de Matemática do ensino médio um material de apoio que possa complementar os materiais de base adotados nas escolas públicas e privadas. No trabalho foi abordado as principais médias estudadas no ensino médio, a média aritmética, geométrica, harmônica, quadrática e suas representações geométricas.

Neste trabalho foi explorado algumas aplicações de cada média citada, com o objetivo de trazer algo novo para a sala de aula a cada tema apresentado, mesmo que seja uma média amplamente utilizada, como a média aritmética. Com base na dificuldade de encontrar aplicações nos livros didáticos sobre médias pouco exploradas no ensino médio, como a média quadrática, optou-se em buscar novas aplicações sobre essa média para que possamos contribuir com uma variedade significativa de possibilidades a serem exploradas. As aplicações encontradas muitas vezes necessitam de um conhecimento extra para o professor de matemática, tendo em vista que essas aplicações são de outras ciências, o que vem de encontro com a proposta do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), interdisciplinaridade e contextualização. Podendo assim o professor de matemática relacionar sua disciplina com outras ciências. Para tanto buscamos reunir o máximo de informações sobre cada aplicação apresentada, para que sirva de base para entendimento da aplicação proposta. Em alguns exemplos discutimos sobre qual média seria utilizada naquela situação, em outros apenas identificamos qual a média utilizada, obtida apenas por manipulação algébrica. Ficando como desafio ao leitor aprofundar mais sobre o assunto com base na bibliografia sugerida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 2010.

[2] BRAGA, Newton C.< http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/ideias-dicas-e-informacoes-uteis/177-ideias-praticas/12290-tensao-de-pico-eficaz-e-rms-ip1315>.Acesso em 10/01/2020

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : matemática*– Brasília : MEC/SEF, 1997.< http://portal.mec.gov.br>. acesso 03/01/2020

[4] BRITO, Márcia Regina F. de. *Uma Análise do ENEM Aplicado à Matemática.*

[5] CHAVES, Alaor. *Física Básica*. *Gravitação, Fluidos, Ondas, Termodinâmica*. Editora LTC. Rio de janeiro – RJ, 2007 .

[6] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Matemática, uma breve história*. Vol. I. 3ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

[7] COSTA DA FONTE, André. *Médias, desigualdades e problemas de otimização*. Trabalho de conclusão (Mestrado Profissional) . departamento de Mátemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, PE. 2013.

[8] DENDROMETRIA, *Livro dendrometria e inventário florestal.* Disponível em: <http://www.mensuracaoflorestal.com.br/capitulo-2-diametro-circunferencia-e-area-basal> Acesso em 17 de agosto de 2019.

[9] EVES, Howard*. Introdução à história da matemática*. Campinas – SP. Editora UNICAMP, 2004.

[10] FERNANDES, Jeferson Martins, *Médias e suas aplicações.* Dourados – MS. UFGD, 2018.

[11] FERREIRA, Luis da Silva, *Uma abordagem sobre médias e suas aplicações no ensino médio*. Profmat. Macapá- AP, 2017.

[12] GUSSOW, Milton. *Eletricidade Básica*. . 2ª Edição, Coleção Schaum. Editora: Makron Books. 2008.

[13] HALLIDAY*, David;* RESNICK, Robert; *KRANE, Kennet S. Física 2*. 5° Edição. LTC editora, 2003

[14] HALLIDAY*, David;* RESNICK, Robert*; TABOSA, José Wellington Rocha. Fundamentos de Física* . 7° Edição *.Volume. 2*. LTC editora, 2003.

[15] IMAÑA ENCINAS, José. *Variaveis Dendometricas*. Universidade de Brasilia. Departamento de Engenharia Florestal, 2002

[16] MORGADO, Augusto Cesar, CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. *Matemática Discreta*, 2° Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro -RJ, 2015 (Coleção PROFMAT)

[17] MUNDOEDUCACAO, *O número de Avogadro.* Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/o-numero-avogadro.htm> Acesso em 05 de dezembro de 2019.

[18] MUNIZ, Alder Cantunda Timbó, Dendrometria. Disponível em: < https://www.dicionarioinformal.com.br/usuario/id/4164/> Acesso em 11 de novembro de 2019.

[19] PEREIRA, Jakson da Cruz. *Médias: aritmética, geométrica e harmônica*. Campinas - SP. 2014.

[20] SILVA, Fábio Souza da. O Enem e a Interdisciplinaridade no ensino da matemática. Revista Episteme Transversalis. V.1, N.1, 2010.

[21] SILVA, José Antônio Aleixo da. *Princípios básicos de Dendrometria*. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Ciência Florestal. Recife, 1979.

[22] SILVA, Marcello Praça Gomes da. *Média Harmônica: Conceitos e Aplicações*. 1° edição Kindlle, 2017.

[23] SILVA, Rodrigo Thiago Passos. *Tensão média e tensão eficaz.* Disponível em: <https://pt.slideshare.net/RodrigoThiagoPassosSilva/tenso-mdia-e-tenso-eficaz>. Acesso em 17 de agosto de 2019.

[24] SOFISICA, *Quantidade de Movimento.* Disponível em: <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/quantmov.php>. Acesso em janeiro de 2020.

[25] VIEIRA, Abadio Hermes; MARTINS, Eugênio Pacelli; SILVEIRA, Antonio Laffayete Pires da; PEQUENO, Petrus Luiz da Luna; LOCATELLI, Marília, *, Fitossociologia de um Fragmento Florestal na Regiao de Machadinho d´Oeste- RO*. Boletim de Pesquisa e desenvolvimento 9. Porto Velho, RO, 2002.