

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

GERALDO BARROS DA SILVA

O USO DE ATIVIDADES MOTIVADORAS, SIGNIFICATIVAS,
CONTEXTUALIZADAS E REALÍSTICAS NO ESTUDO
DE GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II



Instituto de Matemática

Maceió

2020



PROFMAT

GERALDO BARROS DA SILVA

**O USO DE ATIVIDADES MOTIVADORAS, SIGNIFICATIVAS,
CONTEXTUALIZADAS E REALÍSTICAS NO ESTUDO DE GRANDEZAS E
MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso Proformat pela Universidade Federal de Alagoas como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo

**Maceió - AL
2020**

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586u Silva, Geraldo Barros da.
O uso de atividades motivadoras, significativas, contextualizadas e realísticas no estudo de grandezas e medidas no ensino fundamental II / Geraldo Barros da Silva. - 2020.
108 f. : il.

Orientador: Vanio Fragoso de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 85-86.
Apêndices: f. 87-108

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Unidades de medida. 3. Ensino fundamental - 5ª. a 8ª. I. Título.

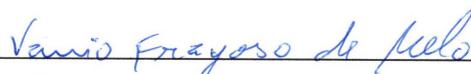
CDU: 372.851

Folha de Aprovação

GERALDO BARROS DA SILVA

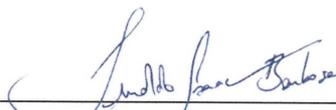
O Uso de Atividades Motivadoras, Significativas, Contextualizadas e Realísticas no Estudo de Grandezas e Medidas no Ensino Fundamental II

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 19 de março de 2020.



Prof. Dr. Vanio Frayoso de Melo – UFAL (orientador)

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Examinador Interno)



Prof. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto – UNICAP (Examinador Externo)

A Deus, à minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me proporcionado forças e coragem para continuar a minha jornada de estudos sempre firme e confiante em meus objetivos.

A todos os meus colegas do Profmat pelo companheirismo e amizade.

Aos meus alunos, que são a razão de toda a minha busca por aprimoramentos.

À UFAL por proporcionar um ambiente de qualidade para o desenvolvimento dos estudos nas mais diversas esferas.

Aos professores pelo conhecimento que me proporcionaram durante todo o tempo que passei nesta instituição.

Ao meu orientador Professor Vanio Fragoso de Melo pela sua generosidade, amizade e paciência.

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma proposta pedagógica com o uso de atividades práticas envolvendo grandezas e medidas, objetivando a aprendizagem de conceitos matemáticos nas séries finais do ensino fundamental. Dentre os motivos desta escolha, estão as possibilidades de contextualizações e da criação de situações que tenham mais relação com o cotidiano dos alunos. O objetivo geral, é fazer com que o leitor reflita sobre as possibilidades do uso dessas atividades como elemento facilitador para o desenvolvimento de conceitos matemáticos diversos do ensino fundamental, inclusive, aqueles referentes à própria unidade temática grandezas e medidas. Assim, o trabalho está dividido em três momentos: no primeiro, tratamos do ensino da matemática segundo a BNCC e de reflexões relacionadas ao aprendizado e à prática docente; no segundo, de fatos relacionados às unidades de medidas e da importância do trabalho com grandezas e medidas na prática escolar e no terceiro, apresentamos sugestões de atividades dinâmicas, diferenciadas e participativas a serem aplicadas em sala de aula. Logo, buscamos criar e apresentar atividades que sejam motivadoras, significativas, contextualizadas e dentro da realidade do aluno ou da realidade distante da dele, mas que lhe possibilite outros olhares para além do conteúdo estudado.

Palavras-chave: aprendizagem da matemática, grandezas e medidas.

ABSTRACT

We will present a pedagogical proposal with the use of activities involving quantities and measures aimed at learning mathematical concepts in the final grades of elementary. The reasons for this choice are the possibilities of contextualization and the creation of situations related to students' daily lives. The general objective is to make the reader reflect on the possibilities of using these activities as a facilitator for the development of different mathematical concepts of elementary education including those referring to the thematic unit itself of quantities and measures. So, the work is divided into three parts: in the first, we deal with teaching of mathematics according to BNCC and reflections related to learning and teaching practice; in the second, facts related to units of measures and the importance of work with quantities and measures in school practice and in the third, we present suggestions for dynamic, differentiated and participatory activities to be applied in the classroom. Then, seeking to create and present activities that are motivating, meaningful, contextualized and within the student's reality or the reality far from him, but that allows him to look beyond the studied content.

Keywords: math learning, quantities and measures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Planta baixa da casa	35
Figura 2 – Vista da casa com o telhado pronto	35
Figura 3 – Colchete tipo “bailarina”.	38
Figura 4 – Relógio de papel.	39
Figura 5 – Termômetro de números inteiros.	45
Figura 6 – Opções de agrupamento de volumes.	49
Figura 7 – Material dourado	54
Figura 8 – Área do trapézio seccionada em um retângulo e dois triângulos . . .	59
Figura 9 – Semiesferas de isopor	61
Figura 10 – Globo terrestre escolar	62
Figura 11 – Globo com meridianos e paralelos	64
Figura 12 – Estádio Rei Pelé	66
Figura 13 – Perímetro e área do gramado do Estádio Rei Pelé	67
Figura 14 – Gramado do Estádio Rei Pelé com perímetro em jardas e área em hectares	67
Figura 15 – FedEx Field (estádio de futebol americano localizado em Landover, Maryland, Estados Unidos.	68
Figura 16 – Cubo feito com canudos evidenciando os vértices e as arestas . . .	73
Figura 17 – Teorema de Pitágoras	74
Figura 18 – Planificação da pirâmide	75
Figura 19 – Montagem do cubo	75
Figura 20 – Ferramenta de extrusão da janela 3D	80
Figura 21 – Unindo dois prismas de bases triangulares	81
Figura 22 – Sólido sendo cortado por um plano perpendicular à base e às duas faces laterais	82
Figura 23 – Formando um novo prisma de base retangular	82

SUMÁRIO

	Lista de ilustrações	8
	Sumário	9
1	INTRODUÇÃO	11
2	A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL	13
2.1	O ensino da matemática segundo a BNCC	13
2.2	A matemática na prática escolar	22
2.2.1	A história da matemática	24
2.2.2	O uso das tecnologias na educação	24
2.2.3	O uso de jogos	24
2.2.4	A resolução de problemas como metodologia de ensino	26
2.2.5	A etnomatemática	27
2.2.6	Atividades com materiais manipuláveis	27
2.2.7	Algumas observações adicionais	28
3	GRANDEZAS E MEDIDAS	29
3.1	Unidades de medidas: práticas antigas e atuais	29
3.2	A importância do ensino das grandezas e medidas	30
4	ATIVIDADES ENVOLVENDO GRANDEZAS E MEDIDAS	33
4.1	Sequências de atividades	34
4.1.1	Sequência 1: Planejando a construção de um telhado a partir da sua inclinação	34
4.1.2	Sequência 2: Jogo dos ângulos no relógio de papel	37
4.1.3	Sequência 3: Desenvolvendo os conceitos de média, moda e mediana a partir de etiquetas e embalagens	41
4.1.4	Sequência 4: Desenvolvendo adição de inteiros e regra de sinais através do jogo do termômetro	45
4.1.5	Sequência 5: Desenvolvendo a expressão do volume do paralelepípedo retângulo com o uso de caixas de fósforos	47
4.1.6	Sequência 6: O uso do papel milimetrado no trabalho com coordenadas e escalas	55
4.1.7	Sequência 7: Calculando áreas dos polígonos e construindo fórmulas	57

4.1.8	Sequência 8: Aprendendo geografia e matemática com o uso do globo terrestre escolar	59
4.1.9	Sequência 9: Localização, medições e unidades de medidas no Google Earth	63
4.1.10	Sequência 10: Contas de água e luz: uma proposta envolvendo temas transversais	69
4.1.11	Sequência 11: Cubo de três pirâmides	72
4.1.12	Sequência 12: Deduzindo a expressão do cálculo da área do círculo e estudando as expressões de volumes do prisma reto de base poligonal e do cilindro circular reto com o uso do geogebra	76
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
	REFERÊNCIAS	85
	ANEXO A – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)	87
	ANEXO B – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)	93
	ANEXO C – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)	99
	ANEXO D – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)	104

1 INTRODUÇÃO

De forma direta ou indireta, a matemática está presente em praticamente todas as atividades humanas, e estamos sempre a utilizando independente da nossa idade, profissão, cultura e do fato de gostarmos dela ou não.

Desde criança, praticamos matemática naturalmente quando fazemos um desenho de uma casa, brincamos, dividimos comida ou brinquedos com os irmãos e amigos entre outros exemplos. No entanto, apesar desse contato diário com a matemática, as dificuldades encontradas na aprendizagem desse componente curricular no ambiente escolar têm sido uma das grandes preocupações de educadores em todo o mundo.

No Brasil, os resultados de exames nacionais e internacionais mostram que a aprendizagem da matemática está muito aquém do nível desejável, e de acordo com uma matéria de dezembro de 2019, publicada no portal G1 da Globo, dados obtidos do PISA mostram que “dois terços dos estudantes brasileiros de 15 anos sabem menos que o básico em matemática.”(MORENO, 2019).

Ao longo da história, a educação foi se adequando às novas realidades e desafios, e atualmente os jovens precisam estudar vários conteúdos matemáticos que foram construídos e acumulados ao longo do tempo. Na maioria das vezes, eles sequer têm informação sobre os contextos históricos nos quais esses conhecimentos foram desenvolvidos e de como eles surgiram.

Conseqüentemente, diante da forma como normalmente são apresentados e trabalhados em sala, alguns desses conteúdos tornam-se estranhos aos alunos, gerando aumento do desinteresse, desânimo e rejeição.

Para reduzir esse impacto, faz-se necessário que as aulas sejam mais agradáveis sempre que possível, e que os conhecimentos matemáticos tenham mais significado para o estudante, e para isso, é importante que sejam aproveitados os seus conhecimentos prévios na construção dos conceitos matemáticos de forma contextualizada.

Seguindo esse contexto, podemos considerar a existência de práticas matemáticas que sempre estiveram presentes em nossa vida sendo indissociáveis do nosso cotidiano como contar, medir, pesar e observar a passagem do tempo através de instrumentos como o relógio.

Todas essas práticas citadas fazem parte do estudo das grandezas e medidas e, dos conteúdos matemáticos estudados no ensino fundamental, aqueles relacionados às grandezas e medidas são os que mais fazem sentido para as crianças e jovens pelo seu caráter prático e contextualizado.

Diante desses fatos, e com o intuito de aproximar a matemática escolar da realidade dos alunos aproveitando os seus conhecimentos prévios, podemos fazer o seguinte questionamento: Até que ponto o trabalho com grandezas e medidas pode favorecer uma aprendizagem mais significativa e consistente de conceitos matemáticos no ensino fundamental II?

Inicialmente, com o propósito de responder a essa questão, realizaremos uma pesquisa de finalidade básica e estratégica e objetivo descritivo, com abordagem qualitativa e com procedimentos bibliográficos e documentais. Em seguida, apresentaremos algumas propostas pedagógicas com atividades diversas envolvendo grandezas e medidas em formatos que possibilitam a interação, a ludicidade, a interdisciplinaridade, a consideração dos conhecimentos prévios dos alunos entre outros aspectos que favorecem uma aprendizagem mais significativa e prazerosa da matemática.

Como objetivos específicos, serão pesquisados problemas e obstáculos na aprendizagem da matemática no ensino fundamental, algumas metodologias e orientações dos documentos oficiais que podem contribuir para facilitar a aprendizagem da matemática, a importância das atividades envolvendo grandezas e medidas e por fim, serão criadas sequências didáticas utilizando atividades envolvendo grandezas e medidas.

Seguindo esse viés, o trabalho está dividido de maneira que o leitor possa refletir sobre o tema grandezas e medidas, bem como ter uma proposta de atividades que sirva para aplicação em sala de aula e/ou ponto de partida para criação de novas atividades.

No segundo capítulo, trataremos de problemas e obstáculos relacionados ao ensino e à aprendizagem da matemática no ensino fundamental, de orientações dos documentos oficiais e de técnicas pedagógicas que podem contribuir para uma aprendizagem mais significativa da matemática.

No terceiro capítulo, teremos uma reflexão a respeito das unidades de medidas na história e usos atuais de unidades fora do sistema internacional de unidades, e também será tratada a importância do ensino das grandezas e medidas.

No quarto capítulo, constarão algumas propostas de atividades envolvendo grandezas e medidas, que tanto podem ser obtidas prontas, como também podem ser criadas pelo professor ou adaptadas de outras atividades, mas que tenham como características serem motivadoras, significativas, contextualizadas e dentro da realidade próxima ou distante, objetivando a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Por último, teceremos nossos comentários finais sobre a temática abordada neste trabalho, os objetivos e as atividades propostas.

2 A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

2.1 O ENSINO DA MATEMÁTICA SEGUNDO A BNCC

Os conhecimentos adquiridos e as competências e habilidades desenvolvidas no ambiente escolar, em particular, aquelas advindas do estudo da matemática são imprescindíveis para a formação das pessoas, no sentido de capacitá-las para que possam lidar com uma sociedade, onde ocorrem cada vez mais desafios e mudanças tecnológicas que surtem efeito nas relações sociais, de trabalho, de comércio, de comunicação entre outras.

Muitos jovens, por questão de imaturidade e desconhecimento de todos esses desafios, questionam o fato do professor lhes incentivar a aprender fazer contas alegando que a calculadora já as fazem com eficiência, desconhecendo a importância de saber lidar com as operações entendendo as suas nuances, propriedades e as características do sistema decimal.

Apesar da robotização e do fato das máquinas de computação e comunicação estarem cada vez mais poderosas e portáteis e trazerem uma farta gama de informações em tempo real, o estudo da matemática traz para os jovens conhecimentos e percepções que vão muito além do saber fazer contas e compreender os algoritmos, visto que a matemática fornece ferramentas para interpretar os fatos e ajudar a lidar com as novas tecnologias e realidades.

Ao passo que máquinas divertem e facilitam a vida das pessoas, elas também são fontes geradores de desemprego, tendo como um exemplo já enraizado e conhecido, o uso dos caixas eletrônicos: Os banqueiros não precisam pagar ninguém para fazer o trabalho delas!

No entanto, há uma necessidade de mão de obra especializada para programar e consertar essas máquinas e como sabemos, é fato a necessidade de conhecimentos e experiências que podem ser adquiridos com o estudo e a compreensão da matemática em todo trabalho de suporte tecnológico.

Considerando a relação entre as tecnologias e a produção do conhecimento Abar(2011) afirma:

Importante observar que apenas a existência das tecnologias que permitem o rápido acesso às informações e à comunicação não garante a construção do conhecimento e de uma sociedade preparada para seu uso. Isso depende das pessoas e não das tecnologias utilizadas (ABAR, 2011, p.14)

Dessa forma, as pessoas constroem conhecimento e tomam decisões a partir de informações com base na interpretação que fazem da realidade, e uma boa base escolar é fundamental nesse processo. É notável assim, num mundo imerso em tantos dados, a importância de uma aprendizagem significativa, tanto das outras áreas, quanto da matemática, para que os jovens possam, ao se apropriar de seus fundamentos essenciais, usufruir de seus benefícios e interferir positivamente na sociedade.

Com o propósito de garantir que os estudantes de todas as escolas brasileiras tenham direito a aprendizagens básicas e essenciais, foi homologada recentemente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de caráter obrigatório e válida para todas as escolas públicas e particulares do Brasil, a qual traz um conjunto de conhecimentos que todos os alunos têm direito a aprender de forma progressiva no decorrer de toda a educação básica, ou seja, a BNCC não define apenas conteúdos a serem estudados, mas aprendizagens a serem desenvolvidas, objetivando um ensino integral onde o estudante possa desenvolver competências e habilidades para resolver problemas da vida, exercer a cidadania e ter conhecimentos para prosseguir nos estudos. (BRASIL, 2017).

Apesar de haver uma previsão no Artigo 210 da Constituição Federal de 1988 de uma base comum curricular nacional (pelo menos para o ensino fundamental), houve um longo caminho até que a BNCC fosse concluída, e para uma melhor ideia, relacionamos no quadro 1 alguns fatos históricos importantes no processo de construção da BNCC.

Quadro 1 – Fatos relacionados à criação da BNCC

ANO	OCORRÊNCIA(S)
1988	“É promulgada a Constituição da República Federativa do Brasil que prevê, em seu Artigo 210, a Base Nacional Comum Curricular. Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.”
1996	“É aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que em seu Artigo 26, regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica.”
1997	“São consolidados, em dez (10) volumes, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano [...]”

DATA	OCORRÊNCIA(S)
1998	“São consolidados, em dez (10) volumes, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano.”
2000	“São lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)[...]”
2010	“A Resolução n. 4, de 13 de julho de 2010, define as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (DCNs) com o objetivo de orientar o planejamento curricular das escolas e dos sistemas de ensino.”
2011	“A Resolução n.7, de 14 de dezembro de 2010, fixa a Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos.”
2012	“A Resolução n. 2, de 30 de janeiro de 2012, define as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.”
2014	<p>“A Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014, regulamenta o Plano Nacional de Educação (PNE), com vigência de 10 (dez) anos. O Plano tem 20 metas para a melhoria da qualidade da Educação Básica e 4 (quatro) delas falam sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNC).”</p> <p>“Entre 19 e 23 de novembro é realizada a 2ª Conferência Nacional pela Educação (Conae), organizada pelo Fórum Nacional de Educação (FNE) que resultou em um documento sobre as propostas e reflexões para a Educação brasileira e é um importante referencial para o processo de mobilização para a Base Nacional Comum Curricular.”</p>
2015	<p>“Entre 17 a 19 de junho acontece I Seminário Interinstitucional para elaboração da BNC. Este Seminário foi um marco importante no processo de elaboração da BNC, pois reuniu todos os assessores e especialistas envolvidos na elaboração da Base. A Portaria n. 592, de 17 de junho de 2015, Institui Comissão de Especialistas para a Elaboração de Proposta da Base Nacional Comum Curricular.”</p> <p>“Em 16 de setembro de 2015 a 1ª versão da BNCC é disponibilizada.”</p> <p>“De 2 a 15 de dezembro de 2015 houve uma mobilização das escolas de todo o Brasil para a discussão do documento preliminar da BNC.”</p>
2016	<p>“Em 3 de maio de 2016 a 2ª versão da BNCC é disponibilizada.”</p> <p>“De 23 DE JUNHO A 10 DE AGOSTO/2016 aconteceram 27 Seminários Estaduais com professores, gestores e especialistas para debater a segunda versão da BNCC. O Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime) promoveram esses seminários.”</p> <p>“Em agosto, começa a ser redigida a terceira versão, em um processo colaborativo com base na versão 2.”</p>

DATA	OCORRÊNCIA(S)
2017	<p>“Em abril de 2017, o MEC entregou a versão final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ao Conselho Nacional de Educação (CNE).”</p> <p>“Em 20 de dezembro de 2017 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi homologada[...].”</p> <p>“Em 22 de dezembro de 2017 o CNE apresenta a RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 2, DE 22 DE DEZEMBRO DE 2017 que institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular.”</p>
2018	<p>“Em 06 de março de 2018, educadores do Brasil inteiro se debruçaram sobre a Base Nacional Comum Curricular, com foco na parte homologada do documento, correspondente às etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental, com o objetivo de compreender sua implementação e impactos na educação básica brasileira.”</p> <p>“Em 02 de abril de 2018 o Ministério da Educação entregou ao Conselho Nacional de Educação (CNE) a 3ª versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio. A partir daí o CNE iniciou um processo de audiências públicas para debatê-la.”</p> <p>“5 de abril institui-se o Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular ProBNCC.”</p> <p>“Em 02 de agosto de 2018, escolas de todo o Brasil se mobilizaram para discutir e contribuir com a Base Nacional Comum Curricular da etapa do Ensino Médio. Professores, gestores e técnicos da educação criaram comitês de debate e preencheram um formulário online, sugerindo melhorias para o documento.”</p> <p>“Em 14 de dezembro de 2018, o ministro da Educação, Rossieli Soares, homologou o documento da Base Nacional Comum Curricular para a etapa do Ensino Médio.”</p>

Fonte: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico>> Acesso em 10 de maio de 2020.

Uma das consequências da BNCC foi a necessidade de adequação dos livros didáticos, que sofreram algumas mudanças importantes. Sobre esse novo livro, Ribeiro (2019) afirma que

[...] ele passa a abordar o conteúdo de forma menos enciclopédica, valorizando mais o trabalho com competências e habilidades. Quando alinhado à BNCC, o livro didático facilita a sua implementação, já que é o principal instrumento de referência do processo de ensino-aprendizagem.

Com a indicação das habilidades mobilizadas em cada capítulo do livro, o professor tem um direcionamento maior de como trabalhar o conteúdo em sala de aula. Dessa forma, ele não o trata como algo a ser memorizado, mas como uma habilidade a ser desenvolvida pelo aluno.(RIBEIRO, 2019)

Apesar do livro didático ser um instrumento de alta relevância da educação brasileira e ser um dos recursos mais usados, a escola deve estar atenta para a forma como os objetos de conhecimentos serão trabalhados e como o currículo será desenvolvido.

Diante disso, torna-se imprescindível o conhecimento da BNCC por parte de todos os educadores, visto que ela deve ser obrigatoriamente considerada na elaboração de todos os currículos de todas as escolas brasileiras, visando o desenvolvimento das competências gerais e também das competências específicas de cada componente curricular. Porém, é importante observarmos que, além da parte comum, os currículos terão uma parte diversificada considerando as características e necessidades regionais, culturais, etc.

Cabe a nós fazer a observação de que a partir do momento que estudamos a BNCC, deparamo-nos constantemente com os termos competências e habilidades mas, apesar disso, não houve na elaboração do documento uma preocupação em definir habilidades assim como a distinção entre os termos no entanto,

competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.(BRASIL, 2017, p.8).

Nesse sentido, os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores são ferramentas essenciais para o desenvolvimento das competências. Sobre a versatilidade das habilidades, a BNCC afirma que “[...] embora cada habilidade esteja associada a determinada competência, isso não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras.”(BRASIL, 2017, p.530)

A diferença entre competência e habilidade pode ser bem sutil dependendo do contexto como nos mostra Macedo(2005),

A diferença entre competência e habilidade, em uma primeira aproximação, depende do recorte. Resolver problemas, por exemplo, é uma competência que supõe o domínio de várias habilidades. Calcular, ler, interpretar, tomar decisões, responder por escrito, etc., são exemplos de habilidades requeridas para a solução de problemas de aritmética. Mas, se saímos do contexto de problema e se consideramos a complexidade envolvida no desenvolvimento de cada uma dessas habilidades, podemos valorizá-las como competências que, por sua vez, requerem outras tantas habilidades.(MACEDO, 2005, p.10)

O mesmo autor ainda reforça o caráter geral de competência quando afirma que “[...] a competência é uma habilidade de ordem geral, enquanto a habilidade é uma competência de ordem particular, específica.”(MACEDO, 2005, p.10)

A BNCC apresenta dez competências gerais a serem desenvolvidas em toda a educação básica e foram elaboradas visando o desenvolvimento de uma educação integral dos indivíduos e são elas:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva;
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural;
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva;

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade;
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta;
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas;
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza;
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

A BNCC trabalha com áreas de conhecimento, dentro de cada uma dessas áreas encontram-se os componentes curriculares e para cada componente curricular existem competências específicas.

Na BNCC, no caso do componente curricular matemática, constam as seguintes competências específicas que precisam ser desenvolvidas:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

A BNCC nos mostra que

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento – aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos –, que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas. (BRASIL, 2017, p.28)

Quanto às habilidades¹, a BNCC afirma que elas “[...]expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.” (BRASIL, 2017, p.29)

Para o ensino fundamental, são propostas cinco unidades temáticas correlacionadas: probabilidade e estatística, números, geometria, grandezas e medidas e álgebra. Elas precisam ser trabalhadas em todo o ensino fundamental porém, a ênfase é dada de acordo com cada fase.

A BNCC enfatiza que “o ensino fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2017, p.266).

Mesmo diante da importância da BNCC na definição dos conhecimentos essenciais, ela não especifica os modos como esses conhecimentos podem ser trabalhados na escola ou seja, ela normaliza o “que fazer” e não o “como fazer”. Portanto, é necessário que no âmbito da educação escolar sejam considerados diversos procedimentos metodológicos para que o desenvolvimento das competências e habilidades propostas na BNCC seja alcançado.

Na próxima seção, trataremos de alguns problemas e dificuldades relacionados à prática docente nas escolas incluindo as questões referentes às formações dos professores. Também mencionaremos alguns recursos teóricos e metodológicos importantes para o desenvolvimento de competências e habilidades, de uma aprendizagem mais consistente e que, de uma forma geral, serviram de parâmetros para a construção das ideias contidas nas propostas de atividades deste trabalho.

¹ Nos anexos A, B, C e D serão encontradas todas as habilidades de matemática a serem desenvolvidas no ensino fundamental II caso o leitor deseje consultar.

2.2 A MATEMÁTICA NA PRÁTICA ESCOLAR

No cotidiano escolar, os professores de matemática são constantemente desafiados a sair da sua zona de conforto em virtude das preocupações constantes relacionadas à aprendizagem e ao desenvolvimento dos seus alunos, gerando muitas vezes desânimo com a profissão ou descrédito em relação ao próprio futuro do ensino da matemática.

Seguindo esse contexto, a dedicação e a energia canalizadas na tentativa muitas vezes frustradas de fazer com que os estudantes fiquem atentos ao que está sendo ensinado, mostra que a forma como a matemática é ensinada na escola pelo modelo tradicional se faz desinteressante para a grande maioria dos jovens e que algo a mais se torna necessário para que haja uma mudança que melhore esse nosso quadro educacional. Conseqüentemente, muitos jovens que concluem o ensino fundamental não tem os conhecimentos básicos necessários como já mencionamos na introdução.

Diante disso, observamos que torna-se necessário uma constante busca por estratégias e metodologias que sejam relevantes para motivar e facilitar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois, apenas o fato do professor ter um conhecimento da matemática satisfatório para o nível da turma onde vai trabalhar não garante que terá experiências exitosas na sua prática docente.

Assim, a formação do professor deve ser constante visto que, diante da complexidade e dos desafios da prática docente, torna-se fundamental a busca por aperfeiçoamento obtidos por estudos de técnicas e metodologias que possibilitem melhores resultados no ensino e aprendizagem da matemática.

Em relação à formação dos professores, Nogueira destaca que

A discutida “qualidade do ensino” brasileiro com freqüência é objeto de matérias nos jornais e embora muitas variáveis estejam envolvidas no processo de ensino/aprendizagem, a formação do professor é a que mais se sobressai. Esse destaque se justifica, pois um professor melhor formado teria mais condições de conduzir o processo de ensino/aprendizagem nos diferentes níveis de escolarização. (NOGUEIRA, 2007, p.83)

Além da necessidade de uma boa formação acadêmica, existe a necessidade de formações continuadas que podem trazer, entre outras possibilidades, atualizações em relação às novidades advindas dos estudos no campo da educação matemática, estudos de práticas educativas exitosas realizadas por instituições e também advindas de iniciativas individuais ou de uma determinada comunidade escolar, que deram bons resultados e podem ser adaptadas a outros contextos, assim como estudos relacionados às tendências pedagógicas e conhecimentos de técnicas.

Com isso, uma boa formação continuada pode até preencher lacunas oriundas da formação acadêmica, pois, em muitos casos, nas licenciaturas em matemática foi dada grande ênfase aos estudos específicos enquanto os estudos relacionados às teorias e práticas educativas foram bastantes resumidos em poucas disciplinas.

Outro ponto importante é a inexistência, em alguns casos, da preocupação por parte de algumas secretarias de educação no sentido de oferecerem cursos, treinamentos e acompanhamentos voltados para profissionais recém contratados nas instituições de ensino tanto antes deles assumirem turmas, quanto durante o processo de adaptação.

Geralmente, os professores saem das universidades e passam por um concurso ou outro tipo de seleção e são surpreendidos com os impactos e desafios oriundos da prática docente, e a orientação e acompanhamento de pessoas mais experientes e preparadas seria essencial.

Nesse intento, esse processo de adaptação poderia ocorrer na fase de estágios durante a graduação, mas muitos estagiários são contratados para assumirem turmas e suprirem carências de pessoal, muitas vezes pelas mesmas secretarias nas quais futuramente irão trabalhar sem treinamento prévio.

Outro fator a ser observado é que a correta compreensão tanto das teorias, quanto das aplicações práticas das principais tendências pedagógicas e metodologias de ensino da matemática, torna-se um dos pontos essenciais nas formações tanto acadêmicas, quanto continuadas, visto que é a partir dessa compreensão que novos horizontes e possibilidades podem surgir no fazer pedagógico.

Devido a isso, torna-se importante que o professor conheça diversas metodologias e técnicas para que possa se utilizar daquelas que sejam mais adequadas ao momento, ao propósito, à realidade e a cultura dos seus alunos, aos recursos da escola entre outros fatores, visto que não existe uma única forma tida como ideal para que o aprendizado se concretize como nos mostra os PCN (1998):

É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (BRASIL, 1998, p.42)

Assim, à partir do conhecimento de diversas possibilidades, o professor pode criar estratégias para diversificar as aulas tornando-as mais atrativas e/ou mais prazerosas para os alunos, a fim de que seja despertado neles o gosto e o entusiasmo pela matemática ou pelo menos, tentar formas mais naturais de trabalhar os conhecimentos. Dentre essas possibilidades, os PCN destacam a história da matemática, as tecnologias da comunicação e o uso dos jogos.

A seguir, listaremos essas possibilidades destacadas e outras igualmente importantes no sentido de motivar, facilitar e diversificar o ensino da matemática.

2.2.1 A história da matemática

A história da matemática pode ser usada no sentido de valorizar e reconhecer a importância dos conhecimentos advindos de práticas sociais, pois mostra que muitos avanços na matemática foram impulsionados pelas necessidades dos povos de solucionar situações práticas e reais. Dessa forma, trabalhar esses conhecimentos na escola faz com que os alunos passem a ver a matemática como uma ferramenta que foi construída coletivamente e está em constante evolução, já que novos problemas sempre vão surgir.

No entanto, é importante ressaltar que a abordagem da história da matemática não deve ser feita só no sentido de trazer a informação de quem criou esse ou aquele teorema, mas com o objetivo de resgatar técnicas de povos antigos, transformando-as em brincadeiras e em experiências que possam ser utilizadas no âmbito escolar não necessariamente dentro da sala de aula².

2.2.2 O uso das tecnologias na educação

As tecnologias estão cada vez mais presentes no nosso cotidiano e temos presenciado um grande avanço das tecnologias digitais nos últimos anos. Porém, quando falamos do uso de tecnologias na educação, não nos referimos necessariamente a aportes tecnológicos caros, pois o simples uso de uma calculadora pode ser fundamental em várias situações³. Existem outras inúmeras opções tecnológicas como o uso do computador e internet, programas de geometria, retroprojetores, uso de smartphones e aplicativos de comunicação, televisores e outras que podem ser usadas de acordo com propósito educativo, a disponibilidade na escola e a disponibilidade entre os alunos.

2.2.3 O uso de jogos

Os jogos trazem elementos importantes tanto para a aprendizagem da matemática como o desenvolvimento do raciocínio lógico, a busca de estratégias para vencer e a concentração quanto para as aprendizagens sociais como respeito às regras e a valorização do trabalho em equipe no casos dos jogos coletivos.

² Como exemplo, podemos citar o cálculo da altura de uma árvore no terreno da escola adotando a mesma técnica que Tales utilizou para medir a altura da pirâmide.

³ Como, por exemplo, no cálculo aproximado por falta ou por excesso da $\sqrt{2}$ na introdução ao estudo dos números irracionais. Neste caso, além das estimativas não funcionarem, não é interessante que os alunos realizem cálculos manuais já que o foco principal está na análise dos resultados.

Além dessas características, os jogos trazem o lúdico para a prática educativa, tornando o processo de aprendizagem mais divertido. No entanto, é preciso que o professor tome alguns cuidados com relação à metodologia usada nas atividades envolvendo jogos como nos relata Santanna e Nascimento (2011):

O professor deve escolher uma metodologia de trabalho que permita a exploração do potencial da atividade lúdica no desenvolvimento das habilidades. Se o material não for potencialmente significativo, os alunos, mesmo com grande disposição para incorporar o conteúdo proposto, à sua estrutura cognitiva, terão aprendizagem mecanizada, sem significado efetivo para seu conhecimento.(SANTANNA; NASCIMENTO, 2011, p.31)

O termo “aprendizagem mecanizada” está presente nos estudos do pesquisador norte americano David Paul Ausubel, referentes à aprendizagem significativa.

De acordo com Pelizzari et al (2002):

Quanto mais se relaciona o novo conteúdo de maneira substancial e não arbitrária com algum aspecto da estrutura cognitiva prévia que lhe for relevante, mais próximo se está da aprendizagem significativa. Quanto menos se estabelece esse tipo de relação, mais próxima se está da aprendizagem mecânica ou repetitiva.(PELIZZARI et al., 2002, p.39)

Pelizzari et al (2002) também relata que a aprendizagem mecanizada é mais volátil, enquanto a aprendizagem significativa é mais flexível por conta da sua melhor incorporação, podendo ser adaptável a outros contextos diferentes. No entanto, quando nada se sabe sobre determinado assunto a ser estudado, o aprendizado pode ser mecanizado, e à partir do momento que essas informações iniciais se incorporem e sejam compreendidas pelo aluno, podem servir de âncoras para novas informações se constituindo, nesse caso, em aprendizagem significativa.

Um outro ponto importante mencionado é o de que a realização da aprendizagem, principalmente a aprendizagem significativa, depende diretamente do grau de interesse do estudante em aprender.

Diante disso, podemos entender que mesmo que um jogo traga informações totalmente novas ou distante da realidade dos alunos, elas podem ser melhor absorvidas, pelo fato de que os jogos trazem curiosidade e despertam o interesse além dos aspectos lúdicos envolvidos. Dessa forma, ideias, informações e regras matemáticas importantes que seriam cansativas em aulas expositivas podem ser absorvidas mais facilmente, se forem devidamente contextualizadas em um jogo, ou seja, se transformam em ferramentas para o jogo.

2.2.4 A resolução de problemas como metodologia de ensino

Nesse contexto, os problemas escolhidos se apresentam de uma forma diferente daquela frequentemente encontrada nos livros didáticos, onde muitos dos denominados “problemas” são, na verdade, exercícios de fixação para que os alunos pratiquem e fixem elementos de matemática apresentados pelo professor, adquiram técnica e desenvolvam habilidades. Em sua grande maioria, são bem semelhantes aos exemplos já vistos em sala, são parecidos entre si, e geralmente, os alunos já tem uma ideia dos caminhos da sua resolução bastando, para isso, superar as dificuldades de transcrevê-los para a linguagem de símbolos e fazer os cálculos.

Nesse tipo de abordagem, é importante que o professor saiba o que é um problema matemático sendo, nesse contexto, definido por Souto e Guérios (2020) como

[...] uma situação desafiadora para a qual o aluno não possui em sua memória um modelo de resolução. Por conseguinte, este precisa interpretar e compreender o enunciado do problema, mobilizar conhecimentos anteriores e elaborar estratégias resolutivas próprias, na busca de uma solução que apresente sentido matemático para a pergunta do problema.(SOUTO; GUÉRIOS, 2020, p.5).

As mesmas autoras também ressaltam que os estudos com esse tipo de abordagem não são muito recentes e que um dos pioneiros foi George Polya tendo, inclusive, contribuído com um método organizado em quatro etapas e que, no entendimento das autoras, não são necessariamente um roteiro a ser seguido, de forma linear mas são importantes no sentido de orientar os alunos no processo de resolução de um problema matemático.(SOUTO; GUÉRIOS, 2020, p.3–5–6).

Vejamos uma breve descrição feita por Polya (1978) sobre essas etapas ou fases que são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto:

[...] Primeiro, temos que *compreender* o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos que ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* revendo-a e discutindo-a.(POLYA, 1978, p.3–4).

Polya (1978) também chama atenção para dois aspectos importantes do problema escolhido: além de ser um problema de possível compreensão pelos alunos, ele deve ter o potencial de despertar neles a vontade de resolvê-lo. Nesse sentido,

ajuda muito o fato desse problema ser contextualizado e fazer parte da realidade dos alunos.

2.2.5 A etnomatemática

Neste contexto, práticas matemáticas presentes nos grupos sociais aos quais os alunos pertencem são reconhecidas e consideradas em virtude da possibilidade da construção de novos conceitos aproveitando as ideias e práticas que os alunos já possuem e estão enraizadas na sua cultura. Segundo Halmenschlager (2001),

[...] a Etnomatemática permite o reconhecimento de diferentes formas de fazer Matemática, utilizadas pelos grupos sociais em suas práticas diárias, na tentativa de resolver e manejar realidades específicas, as quais nem sempre seriam identificáveis sob a ótica da matemática acadêmica. (HALMENSCHLAGER, 2001, p.15)

Um das possibilidades de trabalho com a etnomatemática é a resolução de problemas relacionados à realidade dos alunos de modo que eles descubram estratégias de resolução baseadas na matemática utilizada de forma implícita nas suas experiências pessoais e na sua cultura. A partir dessa fase inicial de tentativas acertos e erros, o professor poderá fazer intervenções não no sentido de destruir as ideias próprias dos alunos à respeito das possíveis soluções, mas de analisá-las e compreendê-las buscando relações entre os conhecimentos que eles possuem e os conhecimentos formais e auxiliando-os no processo de construção do conhecimento matemático.

Temos como um dos principais autores sobre a etnomatemática, o professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio, ao qual se deve o termo etnomatemática e cujos trabalhos são extremamente relevantes.

2.2.6 Atividades com materiais manipuláveis

É uma prática muito utilizada nos anos iniciais pelo seu caráter lúdico, mas podem proporcionar momentos de aprendizados divertidos e agradáveis para qualquer nível do ensino fundamental. Tem a vantagem de poderem ser desenvolvidas também com materiais baratos, aproveitando caixas e outros materiais de forma gratuita, tornando-se um recurso bastante viável, devido às limitações de investimentos que ocorrem em muitas escolas públicas brasileiras.

Como exemplos do uso de materiais manipuláveis no estudo da matemática podemos citar:

- A construção de sólidos geométricos como cilindros, pirâmides, cones e prismas à partir de sua planificação, inclusive com medidas de pré determinadas;

- Construção de planificações de objetos como latas, caixas entre outros, ou seja, o processo inverso do item anterior;
- A utilização de materiais como balanças, trenas, malhas quadriculadas, fitas métricas entre outras possibilidades.

2.2.7 Algumas observações adicionais

- Alguns desses recursos podem ser usados simultaneamente como, por exemplo, o uso de jogos construídos em sala com o materiais manipuláveis;
- Vários elementos importantes devem ser considerados pelo professor na sua prática escolar como o conhecimento prévio dos estudantes e o uso de atividades e problemas relacionados a realidade e a cultura dos alunos;
- Também é importante considerar diversos aspectos na avaliação inclusive, a análise dos erros dos alunos no processo de aprendizagem.

Muitas vezes, os professores encontram erros recorrentes nas provas e comuns em uma mesma turma e mesmo que isso signifique um trabalho a mais, vale a pena conversar com cada aluno e tentar entender qual lógica foi usada por ele. Muitas vezes, um aluno erra uma conta de multiplicação apenas por estar usando o algoritmo de forma errada, mesmo sabendo de forma consciente toda a tabuada. Nesse caso, trata-se da falta de conhecimento sobre o sistema decimal, e o professor pode ajudá-lo a transpor essa e outras dificuldades.

3 GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste capítulo, trataremos de alguns fatos relacionados às unidades de medidas como história e questões do uso de unidades de medidas fora do sistema internacional de unidades, assim como da importância das grandezas e medidas e do seu ensino.

3.1 UNIDADES DE MEDIDAS: PRÁTICAS ANTIGAS E ATUAIS

Nos primórdios da humanidade, os conhecimentos matemáticos se restringiam às contagens, observações dos eventos periódicos e de formas geométricas da natureza. Eram relacionados às necessidades de sobrevivência e possivelmente, às manifestações religiosas, ou seja, a matemática era simples e usual e cada membro de um grupo aprendia com os outros e usava os conhecimentos na realização das atividades comuns a todos.(EVES, 1995)

Ainda segundo o mesmo autor, quando surgiram novas demandas como por exemplo, a necessidade de demarcação de terras ocorrida depois que o homem se estabeleceu às margens de rios importantes como o rio Nilo, por exemplo, também vieram juntos novos desafios e conseqüentemente, a necessidade de se obter mais conhecimentos matemáticos.

Começou a acontecer também nessa época, uma separação entre aqueles que cuidavam dos conhecimentos matemáticos e aqueles que faziam o trabalho braçal.

Porém, tanto (BOYER; MERZBACH, 2019), (EVES, 1995) quanto outros autores importantes da história da matemática defendem que as unidades de medidas presentes nessas antigas civilizações eram todas baseadas em partes do corpo humano.

Como exemplos dessas unidades de medidas denominadas antropométricas, podemos citar a mão, o pé, a jarda, o cúbito ou côvado, etc.

Segundo (COSTA-FÉLIX; BERNARDES, 2017) , os povos antigos da China, Índia, Egito e Mesopotâmia já desenvolviam certos padrões de pesos e medidas, e um exemplo desses padrões era o cúbito real utilizado no antigo Egito, cujo comprimento era equivalente à distância do cotovelo à ponta do dedo médio distendido do Faraó, sendo atribuída pena de morte aos comerciantes do Egito que não aferissem os seus instrumentos de medidas (bastões de madeira). Para isso, esses bastões eram comparados com bastões de granitos que eram expostos em locais públicos e repre-

sentavam a medida correta do cúbito real. Esses bastões eram feitos à partir de uma pedra de granito que continha a medida oficial do cúbito do faraó reinante.

Rozemberg (2002) afirma que, ao longo dos séculos, ocorreram centenas de unidades de medidas e como sempre, apesar de padronizações locais e algumas tentativas de organização, existiam medidas diferentes mesmo com as mesmas denominações e sob o controle de um mesmo governo.(ROZENBERG, 2002)

Nos tempos atuais, mesmo com a adoção do Sistema Internacional de Unidades (S.I.) em praticamente todos os países, muitas das unidades de medidas criadas ao longo da história, tanto as derivadas dessas unidades antigas, quanto outras surgidas posteriormente, permanecem até hoje por estarem enraizadas nas culturas e tradições de alguns povos ou grupos e em determinadas profissões.

Mesmo que essas unidades de medidas permaneçam em uso, muitas delas têm conversão fixamente determinadas para as unidades do S.I. por questões técnicas, mas existem outras cujas conversões variam de acordo com a região do seu uso.

Como exemplos dessas unidades fora do S.I. podemos citar jardas, polegadas, milhas terrestres, milhas marítimas, nós, pés, alqueires, toneladas, léguas, libras, hectare, galão, cavalo-vapor, etc.

Dessa maneira, o conhecimento dessas unidades de medidas não pode ser desprezado no âmbito escolar, visto que muitas delas são usadas nos esportes, no cotidiano, nos noticiários inclusive, existem unidades que fazem parte da cultura local dos estudantes e trabalhar com elas, promove a preservação da cultura e da identidade regional.

3.2 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DAS GRANDEZAS E MEDIDAS

As medidas e medições estão fortemente presentes no cotidiano de todas as pessoas, visto que o ato de medir, de comparar tamanhos de objetos, de contar quanto tempo falta para o ônibus passar ou para se chegar à escola são consideradas práticas comuns. Até no preparo de algum prato seguindo uma receita, estamos lidando com grandezas, cujas medidas são quantificadas como a massa de cada ingrediente, o tempo de cozimento, a temperatura do forno, etc.

Seguindo esse viés, na prática escolar, as atividades envolvendo grandezas e medidas são estratégicas pois, além do fato de podermos aproveitar as experiências prévias dos estudantes, existe a possibilidade de trabalhar a matemática de modo contextualizado com outras disciplinas como geografia, ciências, etc.

Apesar dessa importância das grandezas e medidas, a parte dos livros didáti-

cos destinada ao seu estudo, muitas vezes parece um anexo sendo geralmente colocada nos últimos capítulos do livro e por conta disso, muitas vezes não é trabalhada no ano letivo.

O fato da BNCC ter criado uma unidade temática exclusiva para as grandezas e medidas pode contribuir para que os autores dos livros didáticos deem mais destaque ao seu estudo, colocando os seus conteúdos e ideias de forma contextualizada desde o início do livro.

Por outro lado, os conhecimentos matemáticos estão relacionados entre si e a BNCC apenas sugere essa organização por unidades temáticas.

Vejamos o que a BNCC diz em relação à unidade temática grandezas e medidas:

As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (BRASIL, 2017, p.273)

Ainda de acordo com a (BRASIL, 2017, p.73 e 74), podemos observar o que se espera que os alunos aprendam sobre grandezas e medidas no ensino fundamental nas séries iniciais e no ensino fundamental séries finais (ensino fundamental II), e o motivo de listar a parte do ensino fundamental I, é que nessa etapa, os conhecimentos exigidos estão mais voltados para o lúdico para a prática experimental e tem mais relação com os costumes sociais; e ao fazer uma avaliação diagnóstica em alunos egressos dessa fase, o professor poderá verificar se o nível de conhecimentos prévios está satisfatório. Caso isso não tenha ocorrido, o professor poderá através de atividades retomar e reforçar essas ideias e aprendizados, tendo em vista a sua importância.

1. Ao concluírem as séries iniciais do ensino fundamental, a expectativa é de que os alunos sejam capazes de:

- reconhecer que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressarem o resultado da comparação por meio de um número;
- resolverem problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos

e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais;

- resolver problemas sobre situações de compra e venda e desenvolver, por exemplo, atitudes éticas e responsáveis em relação ao consumo;

2. Ao concluir as séries finais do ensino fundamental a expectativa é a de que os alunos:

- reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais;
- estabeleçam e utilizarem relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, entre outras;
- determinem expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros.

Em relação ao ensino fundamental II, a BNCC também destaca a importância da introdução das unidades de medidas relacionadas ao mundo digital e que nesse caso, é preciso que os alunos saibam que prefixos como quilo, por exemplo, não estão relacionados com potências de dez como ocorre com as unidades de massa visto que o sistema utilizado no mundo digital é o sistema binário e como consequência, um quilobyte tem 1024 bytes e não 1000 bytes.

Podemos observar que no estudo das grandezas e medidas lidamos com o sistema decimal, o binário e o sexagesimal no caso de unidades relacionadas ao tempo e essa conexão entre as unidades temáticas grandezas e medidas e números pode servir de estímulo para o estudo dos sistemas de numeração com observações à respeito de suas estruturas, semelhanças e diferenças.

4 ATIVIDADES ENVOLVENDO GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste capítulo, serão apresentadas algumas sugestões de atividades, objetivando o aprendizado dos alunos de forma mais significativa, dinâmica e participativa através de procedimentos práticos com materiais manipuláveis e outros recursos, fugindo um pouco das definições prontas e dando oportunidade para que eles possam experimentar e fazer descobertas.

Será permitido o uso de calculadora ou celular com a função de calcular em todas as atividades que necessitarem de cálculos deste trabalho. É sempre recomendável fazer isso, quando o mais importante não for a execução das contas, mas sim a observação dos padrões obtidos com os resultados.

Todas as atividades propostas estão compondo sequências didáticas.

Peretti; Costa (2013) define sequência didática como

[...] um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.(PERETTI; COSTA, 2013, p.6)

A principal vantagem do uso de sequências didáticas é que os passos, competências e habilidades a serem desenvolvidas, objetivos e conteúdos trabalhados se tornam mais claros para o professor. No entanto, recomenda-se que se tenha um olhar crítico ao aplicar uma sequência elaborada por outro professor pois, se for o caso, pode ser interessante que sejam feitas alterações para adaptá-las a outras ideias, nível da turma, objetivos e realidades.

4.1 SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES

4.1.1 Sequência 1: Planejando a construção de um telhado a partir da sua inclinação

Público alvo: nono ano do ensino fundamental.

Objetivos: Através de um problema contextualizado, introduzir os conceitos de inclinação, seno, cosseno e tangente; mostrar aos alunos que, com o uso da tabela trigonométrica, se conhecermos a medida de um lado de um triângulo retângulo e de um dos seus ângulos agudos, podemos descobrir as medidas dos outros lados assim como, se soubermos as medidas dos seus lados, descobrimos as medidas dos seus ângulos agudos.

Nota: Apesar da BNCC não considerar, pelo menos explicitamente, o estudo das razões trigonométricas no ensino fundamental II, ela apenas especifica as aprendizagens mínimas, não proibindo que esses conhecimentos sejam trabalhados nesta fase.

Porém, podemos observar que sequências didáticas como essa onde há formação de grupos contribuem para desenvolvimento da seguinte competência da BNCC: “Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.”

Número de aulas: 3 aulas de 50 minutos.

Primeira aula

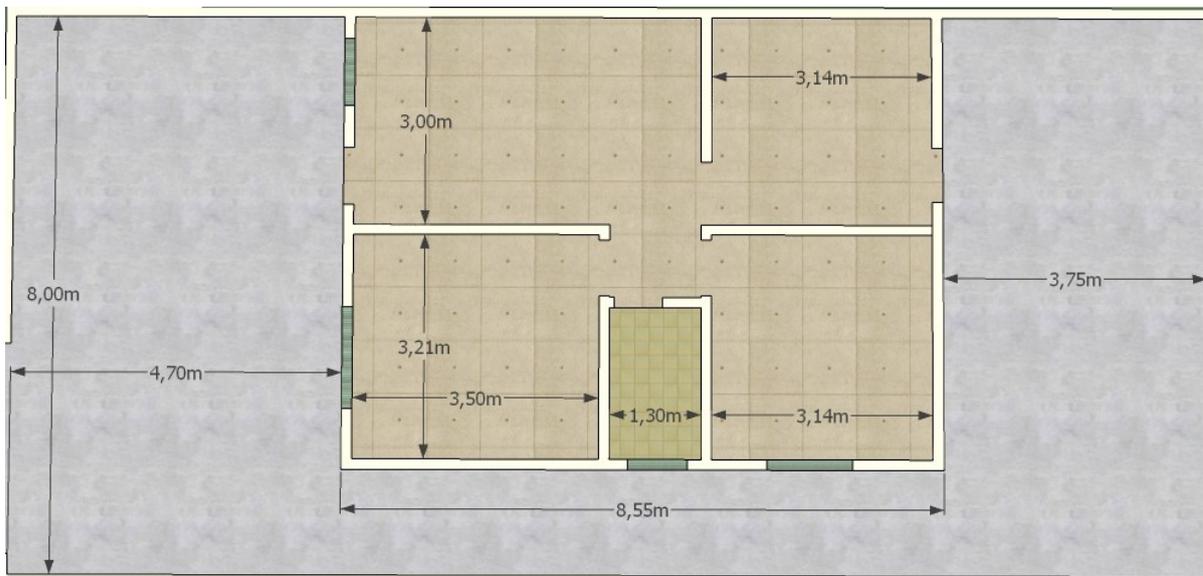
Descrição:

- Serão formados grupos de quatro ou cinco alunos.
- Cada grupo receberá um papel com a planta baixa de uma casa conforme a figura 1 e serão informados que irão planejar o telhado da casa.
- Será necessário calcular a altura máxima da parede lateral para que o telhado com telhas de cerâmica ou barro¹ tenha a inclinação de 25 graus (fictício), que é a inclinação mínima recomendada pelo fabricante das telhas e depois, o número de telhas necessárias para cobrir a casa.

¹ Na verdade, os fabricantes de telhas de cerâmica ou barro recomendam inclinações até maiores que a que está citada no problema. No caso de telhados com telhas de fibrocimento, a inclinação é menor.

- O telhado terá duas águas, ou seja, será formado por duas partes planas conforme a figura 2. Todas as paredes já estão prontas atingindo uma altura de 2,80 metros em relação ao piso do corredor externo à casa e 2,70 metros em relação ao piso interno.

Figura 1 – Planta baixa da casa



Fonte: O autor

Figura 2 – Vista da casa com o telhado pronto



Fonte: O autor

Outras informações: A parte da parede a ser completada em ambos os lados da casa terá a forma de um triângulo isósceles. Além disso, o telhado avançará 40 centímetros na parte da frente da casa, na parte de trás e na lateral onde ficam as janelas, e para cobrir um metro quadrado de telhado serão necessárias 33 telhas.

- O problema consiste em determinar a altura e os dois lados congruentes do triângulo isósceles a partir da informação de que os ângulos das bases são de 25 graus e de que o tamanho da base (de acordo com a planta baixa) é de 8,55 metros. As medidas dos lados dos retângulos que formam cada uma das águas serão calculadas em seguida.
- O professor perguntará aos grupos qual é o formato de cada água do telhado e como fazer para calcular as suas áreas. Em seguida, pedirá para que os alunos observem as medidas na planta baixa e descubram qual é a largura do telhado considerando que cada parede tenha a espessura de 15 centímetros.

Observação: O telhado é 40 centímetros mais largo que a casa, mas o professor não dirá logo isso ao pedir a sua largura. Apenas dirá se o cálculo está certo ou alertará que está quase certo, mas está faltando um detalhe. Será dado um tempo para que eles façam perguntas e descubram. Se algum grupo descobrir, ele perguntará se algum aluno do grupo gostaria de explicar à turma. Se ninguém descobrir, ele explicará a forma correta de fazer o cálculo aos alunos.

- Será pedido aos grupos que façam o desenho lateral da casa colocando as medidas que eles já conhecem. Esse desenho constará de um retângulo representando a parede já pronta e um triângulo representando a parte que será feita, de forma semelhante à vista lateral da casa (figura 2). O professor perguntará o que significa 25 graus de inclinação e ajudará aos alunos a identificar e destacar esses ângulos no triângulo.
- O professor dirá aos grupos que traçam a altura do triângulo isósceles e fará a observação que o triângulo foi dividido em dois triângulos retângulos, aproveitando a oportunidade para denominar os catetos e a hipotenusa. Em seguida, definirá o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo e falará um pouco da história da trigonometria e da sua importância. Como exemplo de aplicação desse conhecimento, ele poderá citar o teodolito, explicando um pouco sobre o seu uso na execução de medições difíceis.

Segunda aula

Descrição:

- Os grupos permanecerão os mesmos.
- O professor desenhará um triângulo retângulo no quadro com um dos ângulos medindo 15 graus, escreverá apenas o valor de um dos seus lados e lembrará aos grupos que o triângulo isósceles do problema ficou dividido em dois triângulos retângulos congruentes após a altura ser traçada.

- O professor distribuirá uma tabela trigonométrica para cada grupo.
- Em seguida, orientará os alunos para que encontrem os valores do seno, cosseno e tangente de 15 graus e calculem² as medidas dos outros dois lados do triângulo.
- Os grupos irão usar esses conhecimentos para descobrirem os valores dos lados congruentes e da altura do triângulo isósceles.
- Eles usarão o que aprenderam para fazer o cálculo da área do telhado com o acompanhamento do professor.
- Será solicitado aos alunos que calculem o valor gasto com as telhas a partir do preço médio do milheiro de telhas mais comuns na região.
- O professor deixará uma lista com alguns exercícios para serem resolvidos na próxima aula.

Terceira aula

descrição:

Nesta aula, os alunos resolverão os exercícios da lista entregue na aula anterior. Será pedido aos grupos que eles observem o desenho da casa e a altura máxima da parede lateral e digam se dá pra colocar uma caixa de água em cima do banheiro e embaixo do telhado, de modo que o fundo dela fique a uma distância de pelo menos um metro de altura em relação ao chuveiro, que está a 2,10 metros de altura em relação ao piso da casa, de modo que seja possível abri-la para limpeza. O professor deverá pesquisar e levar as informações sobre as dimensões de uma caixa de 1000 litros para os alunos.

Sugestões extras: O uso da proporção é uma outra alternativa que poderia ser usada na resolução desse problema. Os grupos poderiam desenhar um triângulo isósceles representando a parte da parede a ser completada adotando uma escala de 10cm para cada metro. Eles usariam um transferidor para desenhar os ângulos da base, ara medir os ângulos da base. Em seguida, os cálculos seriam feitos os cálculos com o uso da proporção. Opcionalmente, uma maquete da casa poderia ser feita pela turma, com as paredes de isopor e o telhado de papelão, utilizando a mesma escala.

4.1.2 Sequência 2: Jogo dos ângulos no relógio de papel

Público alvo: sétimo ano do ensino fundamental.

² Os alunos também poderão usar o celular para as contas.

Objetivos: Reforçar o conceito de ângulo, relacionar ângulos múltiplos de 30 graus com as horas do relógio, trabalhar medições em graus e as operações de adição e subtração de números inteiros.

Habilidades da BNCC relacionadas: (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

Número de aulas: 3 aulas de 50 minutos

Primeira aula

Descrição:

Organização da turma: A turma será dividida em quatro equipes.

Materias necessários: Quatro pratos de papel desses usados em festas, EVA ou papelão para confeccionar os ponteiros e os números, alguns transferidores (pelo menos dois pra cada equipe), algumas régua, cola branca e colchetes do tipo “bailarina” (figura 3) para prender os ponteiros dos relógios.

Figura 3 – Colchete tipo “bailarina”.



Fonte: <<https://familiarluterana.wordpress.com/2014/04/04/na-papelaria-o-que-sao-colchetes-ou-bailarinas/>>

- O professor entregará o material e fará um desenho no quadro explicando como os relógios devem ser confeccionados³.
- Os alunos construirão quatro relógios de papel semelhantes ao da figura 4.
- Todos os alunos desenharão um círculo utilizando um transferidor e dividirão esse círculo em 12 partes como as fatias de uma pizza utilizando um transferidor e uma régua.
- Essas marcações serão utilizadas para determinar os 12 pontos onde serão colados os números. Ademais, os desenhos dos raios deverão ficar nos relógios e o professor orientará os alunos sobre a divisão do círculo, sendo importante que eles percebam que existe um ângulo de 30 graus entre duas horas consecutivas do relógio e conseqüentemente, saibam quando ocorrerem 60, 90, 120, 150 e 180 graus.

³ O professor poderá anunciar a atividade na aula anterior

Figura 4 – Relógio de papel.



Fonte:<<https://storytimekatie.com/tag/paper-plate-crafts/page/2/>>

- Os relógios serão guardados na escola para a próxima aula.

Segunda aula

Materiais necessários: Quatro tesouras sem ponta, algumas folhas de papel A4, os relógios de papel da aula anterior, quatro dados e quatro sacolas plásticas.

Descrição:

- O professor pedirá aos grupos que recortem as folhas A4 em pedaços aproximadamente do mesmo tamanho. os nomes dos alunos de cada equipe serão escritos nos papéis que serão colocados nas suas respectivas sacolas.
- Inicialmente, o professor identificará cada equipe por um único número de 1 a 4 e em seguida, lançará o dado e os dois primeiros resultados de 1 a 4 obtidos identificarão as duas equipes que participarão da primeira rodada do jogo. As outras duas, participarão da segunda rodada e as campeãs de cada rodada, disputarão a final.
- A escolha dos jogadores que representarão cada uma das quatro equipes será por sorteio e, para isso, os papéis nas sacolas das respectivas equipes serão escolhidos aleatoriamente.
- serão utilizados dois dos relógios da aula anterior.

- O professor pedirá a presença de dois jogadores de cada equipe e um de outra que não está jogando para lançar o dado.
- Dois jogadores, um de cada equipe, segurarão o relógio encostando-o no quadro para que todos da sala vejam o processo do jogo e outros dois serão os fiscais dos resultado dos lançamentos do dado.
- Os dois ponteiros estarão apontando para o 12 mas somente o ponteiro da hora será movido e cada jogador terá direito a seis movimentos dos ponteiros.
- Iniciado o jogo, o dado será lançado duas vezes para cada uma das equipes. O primeiro lançamento dirá se o ponteiro girará no sentido horário em caso de resultado par ou no sentido anti-horário, no caso de resultado ímpar. O segundo lançamento terá a seguinte correspondência: 1, 2, 3, 4, 5 e 6 correspondem aos ângulos de 30, 60, 90, 120, 150 e 180 graus respectivamente. O professor deixará essa correspondência anotada no quadro.
- Será atribuído o valor positivo para rotação no sentido horário e negativo para anti-horário a após cada movimento, o valor do ângulo será convertido em ponto acompanhado do respectivo sinal.
- Vencerá a equipe que tiver a maior soma dos valores relativos obtidos nos sorteios.

Observações:

- A equipe cujo relógio terminou em uma hora mais avançada, terá direito a um lançamento extra valendo 30 pontos positivos se o resultado for par ou 60 pontos positivos se o resultado for ímpar.
- Se no final, os dois ponteiros de alguma equipe estiverem juntos novamente na posição inicial significará hora máxima (12 horas).
- Quando o jogador for mover o ponteiro, a sua equipe poderá ajudar verbalmente e a outra equipe não poderá atrapalhar. Se o ponteiro for colocado no lugar errado, a outra equipe poderá consertar e se conseguir, receberá 30 pontos positivos transferidos da equipe que errou.

terceira aula**Descrição:**

Nesta aula, o professor deixará os alunos se divertirem jogando entre si e, nos últimos 25 minutos, fará um breve exercício individual de verificação de aprendizagem envolvendo adição de números inteiros.

4.1.3 Sequência 3: Desenvolvendo os conceitos de média, moda e mediana a partir de etiquetas e embalagens

Público alvo: sexto ano do ensino fundamental.

Objetivos: Introduzir os conceitos de média aritmética, moda e mediana, trabalhar as representações em gramas e quilogramas das massas de mercadorias e o cálculo do preço do quilo.

Número de aulas: 4 aulas de 50 minutos.

Habilidade da BNCC relacionada:

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Habilidade da BNCC relacionada (com adaptações):

(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Nota: A proposta dessa sequência é promover o desenvolvimento dos conceitos de média, moda e mediana a partir do conhecimento de unidades de massas de modo preliminar e compatível com as turmas de sextos anos além de outras práticas como relacionar massa do produto comprado, preço do quilograma e valor pago.

Preparativos:

- O professor providenciará uma caixa grande para que sejam armazenadas embalagens e etiquetas onde constarão registros de medidas de massa tanto em quilogramas quanto em gramas, o tipo de produto e o preço do quilo. Como exemplos, podemos citar um pacote de leite vazio, um pacote de amendoim, uma etiqueta de uma compra constando a massa, etc.).
- Se o aluno trouxer alguma embalagem, deverá dizer quanto custa o produto (por exemplo, para uma caixa de maisena, dizer quanto custa uma caixa com maisena com a mesma massa).
- O professor solicitará a cada aluno que traga dois ou três itens (embalagens ou etiquetas) e avisará que haverá uma atividade com esse material. Esse pedido será feito com uma antecedência de três aulas. As embalagens deverão estar secas e isentas de resíduos de alimentos e deverão ser entregues ao professor e armazenadas na caixa.

Observação: É estratégico que existam algumas embalagens ou etiquetas com a mesma massa. O professor pode providenciar isso.

Primeira aula

Organização da turma: serão formadas quatro equipes.

Descrição:

- O professor trará a caixa e distribuirá as embalagens e etiquetas para os quatro grupos.
- Em seguida, será entregue uma tabela com quatro colunas para cada equipe. Na primeira coluna, serão escritos os nomes dos produtos que estavam nas embalagens ou registrado na etiqueta. Nas segunda e terceira colunas, as suas respectivas massas em gramas ou em quilogramas. Na quarta coluna, serão registrados os preços do quilograma de cada produto, mas será preenchida posteriormente.
- Será pedido aos grupos que anotem a quantidade de itens de suas tabelas. Em seguida, somem os valores de todas as massas desses itens tanto da coluna expressa em gramas, quanto da coluna em quilogramas.

Será levantada a seguinte questão: Se todas as massas dos produtos do seu grupo seu grupo fossem iguais, qual seria o seu valor para que a soma de todas elas continuasse a mesma que está agora?

Serão acrescentadas outras perguntas:

- Se três amigos receberam o lanche e o copo de um deles vier com suco até a metade, o do outro tiver só um pouco e o do terceiro vier quase cheio como eles três farão para corrigir o problema antes de tomar o suco? O total de suco dos três copos juntos fica o mesmo depois que eles corrigem o problema?

- Se os funcionários de uma empresa recebem a mesma quantia todo mês e houve um erro e quando abriram os envelopes com o salário, notaram que uns receberam a mais e outros a menos, porém, o patrão não notou. Como eles podem corrigir esse problema? A soma de todos os salários juntos fica alterada depois que o problema for corrigido? Será dado um tempo para que os grupos pensem a respeito e anotem as ideias.

- Se todas essas massas do seu grupo tivessem o mesmo valor, vocês poderiam fazer a sua soma de um modo mais fácil?

Será dado um tempo para que os alunos discutam.

média aritmética

O professor dirá o que é média aritmética aproveitando as respostas dos alunos e pedirá para que eles calculem as médias das massas e anotem na tabela. Os grupos deverão calcular o preço do quilograma dos produtos que não tiverem esse valor expresso. Eles usarão calculadoras. As tabelas ficarão com o professor e serão devolvidas às equipes na aula seguinte. Cada equipe deverá marcar as suas tabelas. As etiquetas e embalagens de cada equipe ficarão separadas em sacos e guardadas na caixa até a próxima aula.

Segunda aula

Descrição:

- A organização das turmas permanecerá como na aula anterior.

mediana

- O professor devolverá os itens aos grupos e pedirá que eles coloquem-os em ordem crescente de suas massas da esquerda para a direita.
- A tabela poderá ajudar nessa ordenação visto que eles perceberão que, por padrão 200 gramas é a mesma coisa que 0,200 ou 0,20 ou 0,2 quilogramas.

O professor pedirá para que eles encontrem o valor ou os dois valores que estão ocupando a posição central dependendo se a quantidade de itens é ímpar ou par respectivamente. Em seguida, explicará que o valor central é denominado mediana e se forem dois valores, a mediana será a média aritmética deles.

- O professor pedirá para que os alunos retirem algumas embalagens da sequência e calculem a nova mediana. O grupo que tinha uma quantidade par de itens fica com uma quantidade ímpar e vice-versa.

Moda

- O professor definirá moda como o valor que é repetido com maior frequência e pedirá aos grupos que determinem qual valor é a moda das massas e dirá aos alunos que também existem casos onde ocorre nenhuma moda ou mais de uma moda.
- Poderá ser feita a seguinte observação desses conceitos na compra de um smartphone: Se uma pessoa desejar comprar um smartphone e fizer um acompanhamento de preços por um período ela pode observar:
 - O valor que mais aparece nas promoções (moda);
 - O cálculo do preço médio praticado independente de promoções (média aritmética);

- Considerando os valores mais baixos e mais altos observados, pode-se estimar um valor que esteja entre os dois (mediana).

O professor poderia perguntar aos alunos se eles escolheriam um desses métodos ou se usariam outra estratégia.

- O professor terminará a aula deixando uma lista de exercícios para casa envolvendo com maior ênfase as médias aritméticas mas também, moda e mediana. Cálculos envolvendo miligramas e gramas também constarão nos exercícios.

Unidades de capacidade como litros e mililitros poderão ser inseridos nos exercícios da seguinte forma: Poderão constar fotos de promoções de refrigerantes comprados em latas com 350ml e os alunos irão descobrir o preço do litro e em seguida, poderão comparar com o preço do litro do mesmo refrigerante vendido em uma garrafas pet com 1,5 litros⁴. Os alunos poderão usar calculadora e farão esses exercícios em pequenos grupos ou duplas.

Terceira aula:

Descrição:

- Com o uso de uma trena, serão verificadas as alturas de dez alunos e dez alunas voluntário(a)s, os valores em centímetros, serão anotados pelos grupos que em seguida, efetuarão os cálculos da altura média em centímetros e também em metros⁵.
- No restante da aula, serão resolvidos os exercícios da lista entregue na aula anterior.

Quarta aula:

Descrição:

- Nesta aula serão feitas questões envolvendo unidades de massas fora do sistema internacional de unidades como toneladas, quilates, libras entre outras unidades usadas na região da escola que façam parte do cotidiano dos alunos.
- O professor acompanhará e orientará os alunos durante essas questões e as outras da lista anterior.

⁴ A ideia é dividir o valor por cada lata com o produto pela quantidade em mililitros impressa descobrindo assim o preço de um mililitro. Depois, é só multiplicar o valor de um mililitro 1000. Depois, eles farão o mesmo procedimento para o produto na garrafa pet e compararão os resultados

⁵ Podem ser calculadas as alturas médias das meninas e dos meninos separadamente.

4.1.4 Sequência 4: Desenvolvendo adição de inteiros e regra de sinais através do jogo do termômetro

Público alvo: sétimo anos do ensino fundamental.

Objetivos: Facilitar a compreensão das operações de adição, subtração de números inteiros e regra de sinais.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

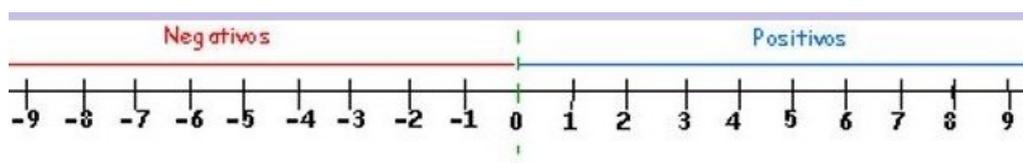
Número de aulas: 4 aulas de 50 minutos

Material necessário: Placas de isopor ou outro material como papelão que sejam suficientes para formar quatro réguaas retangulares. Também serão usados cartolinas ou folhas de papel A4 e piloto com tinta permanente, além de oito tampinhas de garrafas PET, sendo quatro de uma cor e quatro de outra.

Construção do termômetro: Para esse jogo, serão construídos quatro termômetros medindo 30m por 80cm tendo uma base de isopor ou papelão em duas camadas para que ele fique na forma de uma tábua e não seja muito flexível.

Serão coladas, cartolinas ou até folhas de papel A4 sobre cada base para para que sejam desenhadas escalas de modo semelhante a da figura 5. As marcações poderão ser feitas com piloto escolar com ponta fina indo de -30 cm até +30 cm.

Figura 5 – Termômetro de números inteiros.



Fonte: <<http://ms-matematica.blogspot.com/2013/09/projeto-didatico-interdisciplinar.html>> (Imagem adaptada) .

Primeira aula

Descrição:

- O professor dividirá a turma em quatro equipes.
- O termômetro ficará deitado e apoiado em cadeiras enquanto os jogadores ficarão sentados em lados opostos.

- As tampinhas serão usadas para marcar as posições no termômetro sendo uma para cada equipe que estiver jogando e os valores a serem marcados devem estar alinhados com os centros das tampinhas.
- O jogo sempre terá início com os objetos das duas equipes na marcação zero graus.
- Cada rodada terá 20 lançamentos duplos: 10 lançamentos para cada equipe de forma alternada.
- Um aluno de uma outra equipe que não estiver jogando irá jogar o dado acompanhado por um fiscal de cada equipe.
- O primeiro lançamento indicará o sentido do deslocamento sendo positivo para resultado par e negativo para resultado ímpar. O segundo lançamento indicará o valor do deslocamento.

O jogo terá a moeda do simétrico. Trata-se de uma moeda onde serão colados um sinal + em uma face e o sinal - na outra face. A moeda do simétrico será lançada sempre que ocorrerem os valores 5 ou 6 no lançamento do dado que indica o valor do deslocamento. Se o resultado for positivo, o jogador atualizará a pontuação e permanecerá onde está, se o resultado for negativo, a posição do jogador se inverterá após atualização assumindo a posição simétrica em relação ao zero. O jogador poderá dispensar o lançamento da moeda se a tampinha estiver marcando uma temperatura positiva alta, mas perderá a metade dos pontos se a quantidade de pontos for par. Se for ímpar, será somado mais um ponto antes de dividir por dois.

- Vencerá a equipe que estiver ocupando a temperatura de valor relativo mais alto no termômetro.

Observação: É importante que, ao explicar a regra da moeda do simétrico, o professor utilize o desenho de um trecho da reta numérica dos inteiros e explique o que são dois números simétricos e que o “código para pedir o simétrico” é o sinal negativo.

- Se antes do fim dos 20 lançamentos, uma das equipes “sair” pelo lado positivo da régua, ou seja, fizer 30 pontos ou mais, vencerá imediatamente o jogo. Caso contrário, se sair pelo lado negativo, perderá imediatamente o jogo.
- Os dois termômetros ficarão disponíveis para que as quatro equipes joguem através de dois jogadores representantes que podem ser escolhidos por sorteio utilizando para isso, os nomes dos alunos ou os seus respectivos números da

chamada escrito em pedaços de papel a serem escolhidos aleatoriamente em uma sacola.

Segunda aula

Descrição:

Nessa aula os alunos jogarão entre si sob supervisão do professor.

Observação.: cada dupla jogará apenas uma vez para que o máximo de alunos participem.

terceira aula

Descrição:

Nesta aula, serão feitos exercícios em duplas ou triplas onde o professor sorteará os valores e a moeda referente a dois jogadores escolhidos na sala mas que não jogarão. Apenas representarão as suas respectivas equipes. Eles e o restante da turma acompanharão o andamento do jogo através de anotações. No entanto, cada desses jogadores terá o poder de escolher se a moeda do simétrico será jogada ou se ele perderá pontos. Os alunos deverão transcrever e acompanhar o jogo escrevendo os números inteiros de cada jogada e os resultados atualizados sem o uso da tábua de jogo.

os alunos deverão descobrir quem venceu a jogada assim como avisar, caso um dos dois tenha vencido ou perdido precocemente ao sair da régua.

O professor distribuirá uma lista de exercícios para os alunos.

quarta aula

descrição:

Nessa aula serão feitos exercícios da lista entregue na aula anterior envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros dando preferência aos problemas ou exercícios contextualizados. O professor também dirá aos alunos que a multiplicação e a divisão de números inteiros ocorre normalmente, mas deverá ser respeitada a regra de sinais, ou regra do simétrico ou regra da moeda como os alunos preferirem chamar.

4.1.5 Sequência 5: Desenvolvendo a expressão do volume do paralelepípedo retângulo com o uso de caixas de fósforos

Público alvo: oitavo ano do ensino fundamental.

Objetivos: Formar a ideia de que o volume de um paralelepípedo reto retângulo depende das três dimensões que o compõe: comprimento, largura e altura; lembrar

as características principais desses sólidos, entender as relações dadas pelas equações 4.1 e 4.2 e trabalhar o sentido de representação algébrica e do cálculo de valor numérico de uma expressão algébrica.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Número de aulas: 4 aulas de 50 minutos

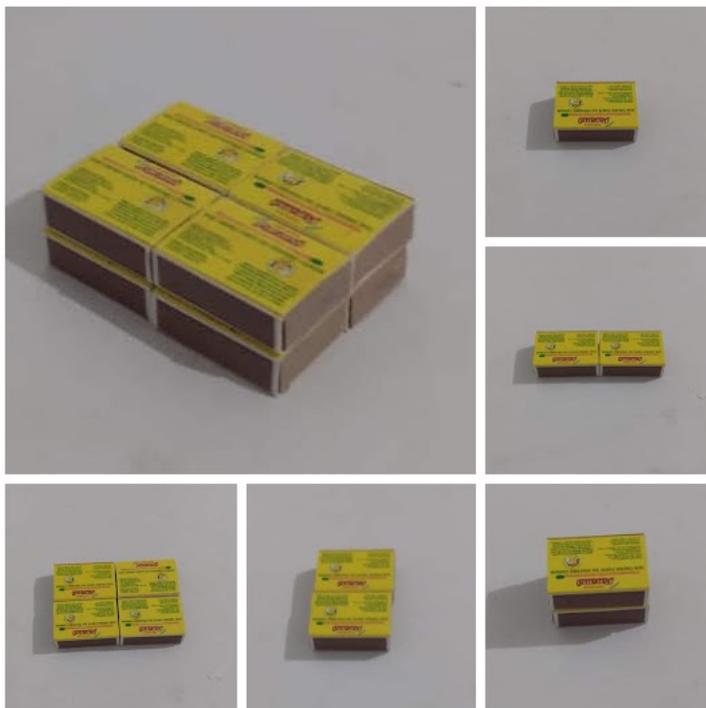
Primeira aula

Descrição:

- O professor levará oito cubos feitos de papelão com um decímetro de aresta, mostrará as suas características e dirá que ele é uma unidade de volume de um decímetro cúbico e que, devido à equivalência de volumes, podemos ter objetos com um volume de um decímetro cúbico mesmo que não sejam um cubo. Em seguida, ele explicará à turma que eles vão fazer atividades agrupando caixas de fósforos e nesse caso, cada caixa será considerada uma unidade de volume.
- O professor pedirá que sejam formados grupos com quatro ou no máximo cinco alunos e em seguida, abrirá uma caixa de papelão contendo várias caixas de fósforos vazias e dividirá essas caixas para grupos de forma que cada grupo fique com pelo menos oito caixas.
- Será perguntado se eles estão percebendo algumas semelhanças entre a caixa de fósforos e a caixa de papelão e se eles sabem o que é um paralelepípedo retângulo.
- O professor poderá relembrar a definição de paralelepípedo retângulo e pedirá para que os alunos identifiquem elementos como faces, ângulos retos, arestas e vértices nas caixas de fósforos.
- O professor combinará com a turma que a aresta maior da caixa de fósforos será o comprimento, a média será a largura e a menor, a altura.
- O professor lembrará aos alunos que todo cubo é um paralelepípedo retângulo cujas medidas das arestas são iguais.
- Em seguida, pedirá aos grupos que formem blocos (que deverão ter a forma de paralelepípedos retângulos) juntando duas ou mais caixas de fósforos.

Na figura 6, temos uma unidade de volume e alguns exemplos de agrupamentos, porém, não estão listadas todas as possibilidades.

Figura 6 – Opções de agrupamento de volumes.



Fonte:O autor

- O professor orientará os alunos no preenchimento do quadro 2, onde serão registrados o que acontece com cada dimensão da caixa tomada como unidade no bloco formado, o produto desses registros e o volume total de cada bloco. Como exemplos, temos o preenchimento para três possíveis blocos:

Quadro 2 – volumes

Novo Bloco	comprimento	largura	altura	Produto	Volume total
Bloco 1	1	2	1	$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$	2 u.v.
Bloco 2	2	2	2	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	8 u.v.
Bloco 3	3	1	2	$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$	6 u.v.

Observação: usando a primeira linha da tabela como exemplo, os registros 1,2 e 1 significam que o comprimento do bloco 1 equivale a 1 comprimento da unidade de volume, a sua largura equivale a 2 larguras da unidade de volume e a sua altura é equivalente a 1 altura da unidade de volume.

Outra forma de leitura: quando comparamos o comprimento, a largura e a altura de cada bloco formado e relacionamos essas dimensões com essas dimensões

da caixa unitária notamos que o bloco 1 é um agrupamento no qual só a largura dobra, no bloco 2, as três dimensões dobram e no bloco 3, o comprimento triplica e a altura dobra.

- O professor observará e ajudará os alunos a compreenderem o processo de preenchimento do quadro.
- O professor ajudará os alunos a observarem, ao longo dessas duas primeiras aulas, que o volume (que pode ser representado por V) de cada bloco pode ser obtido através do produto das suas arestas. O professor deverá estimular os alunos a perceberem essa relação observando os blocos e o quadro que eles preencheram.
- Pode ser trabalhada, tanto com o uso das caixas de fósforos, quanto com o uso de cubos, a ideia de que descobrir o volume multiplicando as arestas é apenas uma forma mais fácil de contar as unidades de volumes através da observação de cada aresta⁶.
- Ao final da aula, as tabelas e as caixas serão guardadas pelo professor para a aula seguinte.

Segunda aula

Descrição:

- As tabelas e as caixas serão devolvidas aos alunos.
- Os grupos continuarão formando blocos e depois farão o processo inverso ao da aula anterior: reconstruirão alguns blocos à partir dos registros das tabelas.
- O professor pedirá aos alunos para que observem os registros das tabelas e digam o que acontece com o volume quando:
 - Apenas um das arestas dobra;
 - Duas das arestas dobram ao mesmo tempo;
 - As três arestas dobram ao mesmo tempo.

E as respostas esperadas são, respectivamente, o volume dobra, quadruplica e fica oito vezes maior. O professor pode ajudá-los caso eles não tenham conseguido incorporar essa ideia ainda.

⁶ É algo semelhante ao que acontece no cálculo da área de um retângulo cujos lados medem 3cm e 15cm. Pode-se construir uma malha quadriculada interna ao retângulo, dividindo os seus lados em segmentos de um centímetro e unindo os pontos com segmentos paralelos aos lados. Depois, é só contar as unidades de um centímetro quadrado de área formadas pelos quadradinhos, porém, multiplicando os quadradinhos de cada linha pelo número de colunas fica mais fácil.

- Será pedido aos alunos para calcularem os volumes nos casos em que todas as arestas fiquem multiplicadas por três e por quatro.
- O professor pedirá que um dos grupos forme um bloco que tenha todas as dimensões dobradas e outro bloco com todas as dimensões triplicadas. Os outros grupos deverão colaborar com a construção emprestando as caixas de fósforos necessárias para completar o segundo bloco.
- Após isso, professor colocará mais uma caixa de fósforos próxima aos dois blocos e perguntará aos alunos se eles estão notando a semelhança entre a caixa de fósforos e os outros dois blocos formados.
- Ele aproveitará as observações dos alunos e os ajudará a entender que os dois blocos tem uma forma semelhante à da caixa de fósforos só que ampliada, e que isso acontece quando todas as arestas crescem por igual, ou seja, ficam multiplicadas pelo mesmo fator.
- Em seguida, ele pedirá para que os grupos preencham os dados de cada bloco ampliado de acordo o quadro 2 e os ajudará a observar que e o volume total, formado em cada caso, obedece à seguinte relação:

$$\frac{(a_1)^3}{(a_2)^3} = \frac{V_1}{V_2} \quad (4.1)$$

onde a_1 , a_2 , V_1 e V_2 são, respectivamente, uma aresta qualquer do sólido padrão, a aresta multiplicada pelo fator de ampliação, o volume do sólido padrão e o volume do sólido ampliado.

- Observará também que as áreas laterais dependem do produto das duas arestas que as formam visto que são retângulos. Logo, a relação entre uma aresta qualquer de um sólido, a aresta correspondente ampliada, a área total do sólido e a área total do sólido ampliado é dada por

$$\frac{(a_1)^2}{(a_2)^2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (4.2)$$

onde a_1 , a_2 , A_1 e A_2 são, respectivamente, uma aresta qualquer do sólido padrão, a aresta multiplicada pelo fator de ampliação, a área total do sólido padrão e a área total do sólido ampliado.

Observação: Essa relação também vale no caso de A_1 e A_2 serem a área de uma das faces do sólido padrão e a área da face correspondente do sólido ampliado, respectivamente.

Terceira aula**Descrição:**

- Inicialmente, o professor trará uma caixa em forma de cubo sem a tampa, feita de papelão com arestas internas medindo 1 decímetro (10 centímetros) e também trará só a planificação para que os alunos vejam como é a montagem.
- Em seguida, será lembrado que, como essa caixa tem a forma de um cubo e as suas arestas internas medem 1dm, o seu volume interno é de 1 decímetro cúbico.
- Ele pedirá a um aluno ou uma aluna que forre o cubo por dentro com um papel filme tomando o cuidado para que não fiquem muitos espaços entre o filme e a superfície interna da caixa e em seguida, outro aluno despejará um litro de água nesse cubo com cuidado.

O objetivo dessa experiência é que os alunos associem o volume de um decímetro cúbico com o a capacidade de 1 litro.

Para que os alunos entendam quantos litros cabem em um recipiente com o espaço interno de 1 metro cúbico, o professor poderá lembrar que, como cada aresta de 1 metro é dez vezes maior que uma aresta de dez centímetros, um metro cúbico será 10x10x10 vezes maior que um decímetro cúbico e conseqüentemente, caberá 1000 litros nesse recipiente.

O professor deverá ajudar os alunos a entender que a expressão

$$V = c \cdot l \cdot a$$

onde c é o comprimento, l é a largura e a , a altura sempre vale, independente do objeto utilizado como volume unitário ter a forma de um cubo, ou de uma caixa de fósforos.

- A partir desse momento, os alunos farão exercícios onde constarão cálculos de áreas laterais e volumes de paralelepípedos retângulos e também problemas que relacionem unidades de volume e capacidade.

Quarta aula**Descrição:**

O professor iniciará lançando um problema para os grupos.

Ele pedirá aos alunos que, pensando no paralelepípedo retângulo, imaginem o que aconteceria com o volume de uma pessoa e com as áreas do seu corpo se todas as suas medidas (braços, pernas, etc) dobrassem de tamanho.

Ela dará um tempo para que os alunos reflitam sobre a situação.

Em seguida, depois de uma breve explicação de que o nosso intestino absorve os alimentos de acordo com o tamanho da sua área, ele perguntará à turma o que acontece com as áreas do intestino de uma pessoa se todas as suas dimensões dobrarem de tamanho.

Ele dará um tempo para que os alunos pensem e discutam.

Em seguida, perguntará o que acontece com a massa do corpo de uma pessoa se o seu volume dobrar ou triplicar e de quantas vezes mais comida ela vai necessitar em cada caso.

O professor explicará também, em linguagem simples, que a resistência de uma coluna depende do material de que é feita e também da sua área de seção transversal, concluindo que quando um osso tem a sua área de seção transversal dobrada provavelmente terá o dobro da resistência.

Finalmente, perguntaria se seria possível a existência um gigante, feito do mesmo material que nós, só que ampliado em dez vezes.

Será dado um tempo para que os alunos discutam.

A ideia é que os alunos desconfiem e concluam que esses gigantes não podem existir.

Um dos motivos é que iriam morrer por insuficiência de nutrientes, pois, enquanto o seu volume cresceria mil vezes e conseqüentemente, a sua massa, a sua área intestinal só cresceria 100 vezes.

Outro motivo que impede a existência desses gigantes é a impossibilidade de ficar de pé, pois enquanto a sua massa seria 1000 vezes maior, a sua resistência só aumentaria em 100 vezes.

Esse exemplo serve para que os alunos reflitam sobre a importância e as possibilidades do alcance dos conhecimentos matemáticos.

Observação: Essa análise foi feita pelo professor Eduardo Wagner em uma de suas vídeoaulas. O leitor poderá assisti-la através da fonte (WAGNER, 2010).

- Continuação dos exercícios envolvendo áreas e volumes de sólidos semelhantes e exemplos de uso das equações 4.1 e 4.2.

Observações adicionais:

- Pode-se, opcionalmente, ser abordada a seguinte questão: ao classificar as faces como grande (parte de cima da caixa de fósforos), média (a lateral) e pequena (a frente da caixa) nota-se que nos três casos em que o volume dobra (duas caixas encostadas), as áreas totais das superfícies dos blocos formados não obedecem a regra de dobrar também.

É equivalente à experiência com peças do tangram: se formarmos uma figura com as peças do tangram e construirmos uma figura diferente reagrupando essas mesmas peças existe a garantia da conservação da área total mas não do perímetro.

- Apesar da experiência não representar o caráter contínuo da expressão do volume ela cumpre com a missão de familiarizar os alunos com a questão da relação de dependência entre o volume e as medidas das arestas.
- Essa atividade poderia ser realizada com cubos e uma boa opção é o uso do material dourado (figura 7) mas poderia ser uma coleção qualquer de cubos com a mesma aresta considerando cada cubo como uma unidade cúbica. No entanto, o uso da caixa de fósforos dá uma ideia mais geral já que devido à equivalência, existe um cubo cuja aresta mede $\sqrt[3]{V}$ onde V é o volume da caixa de fósforos.

Figura 7 – Material dourado



Fonte:<[https:](https://www.magazineluiza.com.br/material-dourado-de-madeira-611-pecas-ciabrink/p/5423363/pa/doud/)

[//www.magazineluiza.com.br/material-dourado-de-madeira-611-pecas-ciabrink/p/5423363/pa/doud/](https://www.magazineluiza.com.br/material-dourado-de-madeira-611-pecas-ciabrink/p/5423363/pa/doud/)>

- Podemos também ampliar essa atividade triplicando ou quadruplicando as dimensões ao mesmo tempo. Neste caso, além da possibilidade de se trabalhar a relação de dependência entre o volume e as dimensões lineares do objeto também podemos observar a formação da sequência $(n^2, n^3, \dots, n^n, \dots)$ onde termos da sequência são os volumes dos sólidos quando as três dimensões do sólido inicial (tomado como unidade) duplicam, triplicam, respectivamente, sendo n o volume do sólido considerado unidade cúbica padrão do problema.

4.1.6 Sequência 6: O uso do papel milimetrado no trabalho com coordenadas e escalas

Público alvo: sexto ano do ensino fundamental.

Objetivos: Nesta atividade, serão trabalhados a localização de pontos no plano cartesiano assim como a compreensão do significado de escala e uso das escalas dos mapas no cálculo das distâncias entre dois pontos.

Número de aulas: 2 ou 3 aulas de 50 minutos

Habilidades da BNCC relacionadas:

Matemática (aulas 1 e 2)

(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

Geografia (aula 2)

(EF06GE08) Medir distâncias na superfície pelas escalas gráficas e numéricas dos mapas.

Preparativos:

- Algumas folhas de papéis milimetrados serão disponibilizadas para os alunos contendo um par de eixo cartesianos e o desenho de um mapa de uma cidadezinha.

Esse mapa conterà pontos nomeados representando locais importantes como igreja, delegacia, posto de saúde, prefeitura, etc.

- Para preparar o mapa, o professor poderá desenhar uma cidadezinha em uma folha milimetrada (pode ser uma folha A4 com uma malha milimetrada já impressa nela).
- Duas daquelas linhas mais grossas que já estão na malha que representam a divisão em centímetros, poderão ser destacadas para o desenho dos eixos coordenados.
- A localização dos pontos ficará restrita ao primeiro quadrante.
- Caso se deseje, outros pontos podem ser criados como o sítio do seu Zé, a padaria da dona Chiquinha, o Curral do Toinho, etc.

Primeira aula

Descrição:

- Serão formadas equipes de três ou quatro alunos.
- Serão entregues, uma cópia do mapa da cidadezinha com os eixos para cada grupo e uma folha contendo só a malha e os eixos para cada aluno.

- O professor dará algumas instruções sobre a marcação de pontos no plano cartesiano e escreverá coordenadas de pontos no quadro para que os alunos treinem escrevendo esses pontos na malha⁷. Em seguida, andará pela sala verificando se os pontos estão sendo marcados corretamente efetuando as devidas correções e orientações.
- Depois dessa etapa, já com a malha contendo o desenho, os alunos deverão escrever as coordenadas dos locais da malha onde se encontram os pontos como a prefeitura, a igreja, a delegacia, etc.
- O professor pedirá para que os nomes de todos os alunos de cada grupo sejam escritos na folha do mapa e entregues ao professor.

Segunda aula

Descrição:

- Os grupos continuarão os mesmos da aula anterior;
- O professor explicará brevemente no quadro o que é uma escala e para que serve;
- Será atribuída uma escala ao mapa da cidadezinha e será pedido que os alunos calculem as distâncias “reais” entre alguns locais da cidade representados pelos pontos do mapa usando para isso, uma régua;
- As distâncias obtidas deverão ser anotadas para que o professor possa corrigir orientando os alunos em caso de haver erros;
- Os alunos poderão usar calculadora nessa atividade;
- Também será entregue pra cada grupo, um mapa oficial com escala que conte o bairro ou a região onde fica a escola para que os alunos possam calcular algumas distâncias de sua livre escolha com o acompanhamento do professor.
- O professor deverá considerar a participação dos alunos quando for atribuir pontos pela atividade.

Nota: O professor poderá acrescentar mais uma aula para outros exercícios relacionados, caso deseje.

⁷ Essa atividade deverá ser feita na malha sem o desenho com o uso de lápis para que qualquer ponto que tenha sido marcado no lugar errado possa ser apagado e remarcado corretamente.

4.1.7 Sequência 7: Calculando áreas dos polígonos e construindo fórmulas

Público alvo: sétimo ano do ensino fundamental.

Número de aulas: 3 aulas de 50 minutos

Objetivos: Aprimorar o conceito de área e trabalhar a compreensão de como são feitos os cálculos das áreas de algumas figuras planas notáveis e de outros polígonos através da sua decomposição em figuras planas conhecidas.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Primeira aula

Descrição:

- O trabalho será em equipes de três ou quatro alunos.
- O professor entregará apenas cópias das malhas quadriculadas com os eixos.
- Os alunos serão instruídos a usarem lápis e não riscarem com muita força para que a folha possa ser reaproveitada⁸.
- Em seguida, o professor pedirá para que os alunos marquem alguns pontos⁹ na malha, cujas coordenadas serão determinados por ele e escritas no quadro. A cada ponto será atribuída uma letra maiúscula do nosso alfabeto, como é clássico na geometria euclidiana.
- Os pontos serão agrupados em duplas e o professor pedirá para que os alunos construam segmentos de retas ligando cada uma das respectivas duplas. Ao final, deverão ser formados quatro retângulos com áreas e perímetros diferentes.
- Em seguida, o professor lembrará que cada quadradinho cujos lados medem um centímetro tem área de um centímetro quadrado e pedirá para que os alunos determinem a área de cada retângulo contando os quadradinhos (ou multiplicando).
- O professor também pedirá para que escrevam os perímetros dos retângulos.

⁸ Essa atitude tanto tem o caráter ecológico quanto econômico visto que muitas escolas públicas tem carência de recursos e materiais e às vezes o professor compra material com o próprio dinheiro para realizar atividades.

⁹ Deve ser colocados pontos nos quatro quadrantes.

Nota: Deverão ser feitos, propositalmente, um par de retângulos com áreas iguais e perímetros diferentes e dois com perímetros iguais e áreas diferentes. Como exemplo, podemos ter um deles com medidas 3cm x 4cm, outro com 6cm x 2cm e outro 4cm por 4 cm. O objetivo é, que seja observado que os dois primeiros citados tem áreas iguais e perímetros diferentes. Já o segundo e o terceiro, tem perímetros iguais e áreas diferentes. Se algum aluno questionar porque existe um quadrado entre os retângulos o professor deverá lembrar o conceito de retângulo e que todo quadrado é um retângulo mas a recíproca não é verdadeira. Se ninguém notar, ele deve chamar atenção da turma para esse ponto.

- O quarto retângulo deverá ser um pouco maior para que eles percebam que multiplicando a base pela altura fica mais fácil determinar a sua área. Caso não descubram sozinhos, o professor deverá comentar isso aproveitando para dizer o que é base e o que é altura.
- Em seguida, serão escritas as coordenadas de quatro novos pontos. Cada um desses pontos deverá pertencer a um dos retângulos já feitos e serão localizados nos lados superiores (opostos à base). Em cada retângulo, será traçado um triângulo utilizando a sua base e o novo ponto.

No retângulo PQCD da figura 8, poderíamos formar um triângulo com a base CD e o ponto A, por exemplo.

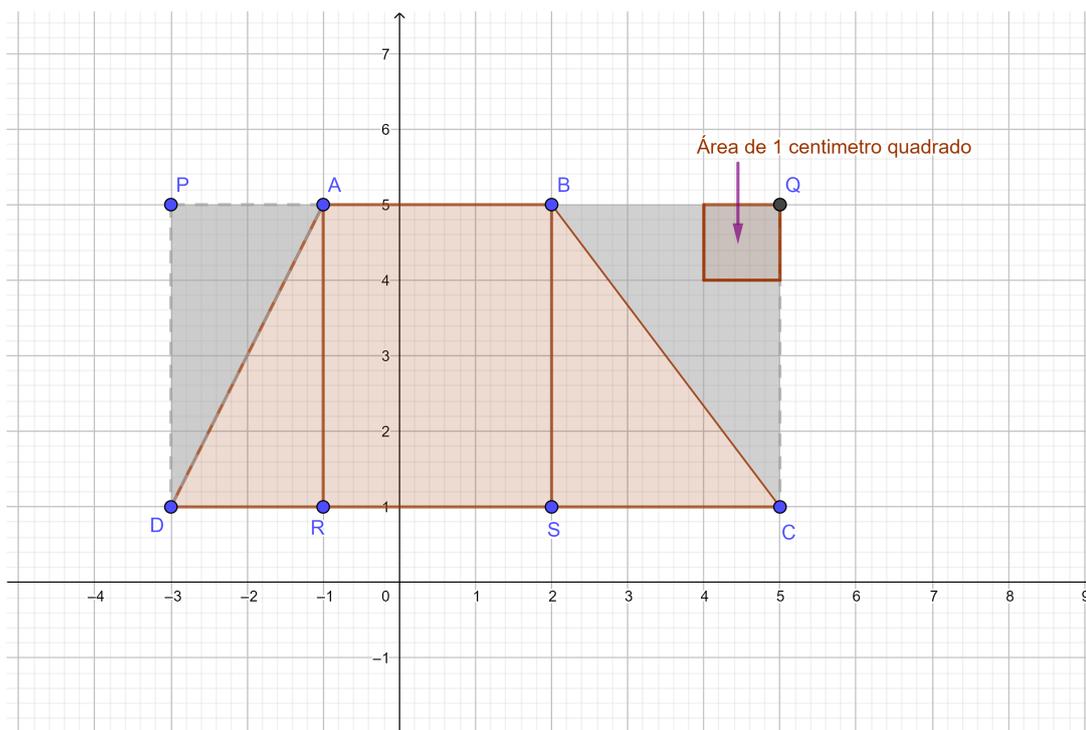
- O professor pedirá que os alunos calculem as áreas desses triângulos usando a estratégia de completar cada triângulo para que ele se transforme em um retângulo com o dobro de sua área.
- Com base nessa experiência, o professor ajudará os alunos a entenderem que a área do triângulo vale a metade da área do retângulo formado e a escreverem as expressões para o cálculo das áreas do retângulo e do triângulo.

Segunda aula

Descrição:

- As equipes permanecerão as mesmas.
- O professor entregará as cópias das malhas com os eixos e escreverá no quadro as coordenadas dos pontos e indicará os segmentos a serem traçados.
- deverão ser formados paralelogramos, losangos e trapézios.
- o professor pedirá aos grupos que dividam as áreas dessas figuras particionando-as em triângulos e em retângulos. A (figura 8) mostra uma dessas possibilidades.

Figura 8 – Área do trapézio seccionada em um retângulo e dois triângulos



Fonte: O autor

- Depois, o professor usará partições e agrupamentos para que os alunos entendam as expressões que são usadas para o cálculo das áreas do trapézio, do paralelogramo e do losango.

Terceira aula

Descrição:

- Nessa aula, os alunos responderão exercícios e problemas e o professor fará o devido acompanhamento.

4.1.8 Sequência 8: Aprendendo geografia e matemática com o uso do globo terrestre escolar

Público alvo: sexto ano do ensino fundamental.

Número de aulas: 2 aulas de 50 minutos

Objetivos: Trabalhar a relação biunívoca entre um ponto da terra e suas coordenadas geográficas e a localização de pontos na superfície da terra. Trabalhar o cálculo aproximado da distância entre dois pontos distintos da superfície terrestre.

Nota: Essa sequência pode ser utilizada em escolas que não tenham recursos para utilização do google heart. Em contrapartida, apesar de ser realizada com o uso de recursos e materias simples, ela traz a vantagem de que elementos importantes da circunferência sejam trabalhados.

Habilidades da BNCC relacionadas: (EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Primeira aula

O objetivo dessa aula é o de que os alunos incorporem conceitos fundamentais relacionados à esfera e o significado de escala usando operações de multiplicação e divisão.

Descrição:

- A turma será dividida em quatro equipes.
- Cada grupo receberá uma fita métrica e duas semiesferas de isopor que poderão ser encaixadas formando uma esfera (figura 9). Essas esferas deverão ter preferencialmente tamanhos diferentes para cada grupo mas é bom que não sejam muito pequenas.
- O professor mostrará como são encontradas as medidas do diâmetro e da circunferência usando uma semiesfera de isopor e uma fita métrica.
- Em seguida, cada grupo verificará os valores dos diâmetros, dos raios e das medidas das circunferências de uma de suas semiesferas.
- Utilizando calculadoras, os alunos dividirão as medidas das circunferências de cada bola pelo seu respectivo diâmetro e anotarão os resultados. Cada grupo disponibilizará uma de suas semiesferas para ser reversada entre os outros grupos e cada grupo fará as medições em todas elas.
- O professor aproveitará para falar a respeito do número π e do seu valor aproximado sem precisar entrar na questão dele ser irracional, apenas enfatizando que quando se divide a circunferência pelo seu diâmetro o resultado é sempre o mesmo e é denominado pi.
- Os valores que cada grupo encontrou para pi para cada uma das bolas serão anotados no quadro pelo professor que pedirá aos grupos que compare-os o valor real aproximado de pi, que é de 3,14.
- O professor informará que a medida da circunferência terrestre é de 40.075 km e ajudará aos alunos a definir a escala para cada bola de isopor pedindo aos grupos que dividam a medida da circunferência da terra pelas medidas das circunferências de cada bola. O resultado deverá ser anotado em um pedaço de fita colante que será grudado na bola.

- O professor poderá enfatizar que a escala significa quantas vezes um caminho na bola é menor que um caminho com a mesma forma na terra.
- Em seguida, o professor mostrará um globo terrestre escolar semelhante ao da figura 10 para cada uma das equipes para que eles o examinem, meçam a sua circunferência e calculem a sua escala e comparem o resultado com o valor da escala escrita no globo, caso tenha.

nota: O professor sempre deverá evidenciar o conceito de raio ao falar do diâmetro e da relação $\frac{C}{d} = \pi$, onde C é o comprimento da circunferência e d é o diâmetro.

Figura 9 – Semiesferas de isopor



Fonte: <<https://stockemb.com.br/produto/bola-isopor-diametro-250mm-c-2-pc/>>

Segunda aula

Descrição:

- Os grupos da aula anterior serão mantidos
- O professor trará novamente o globo terrestre da aula anterior para a sala e explicará o que são as coordenadas geográficas e como localizar um ponto na superfície da terra.
- Os alunos poderão usar também os livros de geografia para aproveitar as ilustrações e os exercícios.

Notas:

- Poderá haver um acordo entre o professor de matemática e o professor de geografia para que as informações dessa aula se processem da melhor forma.

Figura 10 – Globo terrestre escolar



Fonte:<<https://stockemb.com.br/produto/bola-isopor-diametro-250mm-c-2-pc/>>

- O professor de matemática poderá se comunicar com o professor de geografia e perguntar como é que ele trabalha esse conteúdo e quais são as principais dificuldades dos alunos.
- Depois que o globo for disponibilizado aos grupos para que eles se habituem com esse tipo de coordenadas será proposta a seguinte brincadeira:
Uma equipe que estiver com o globo escolherá um lugar, anotar as suas coordenadas e informará essas coordenadas para outra equipe. Em seguida, a outra equipe receberá o globo e terá que descobrir em que país está situado o local das coordenadas. O professor acompanhará o processo e ajudará os alunos em caso de dúvidas ou dificuldades mas será dada preferência à ajuda vinda de algum aluno do grupo que propôs as coordenadas.
- Os alunos também vão estimar as distâncias entre dois pontos da terra à partir do globo escolar.

Para isso, eles escolhem os pontos no globo escolar e medem com fita métrica a distância entre eles. Em seguida, eles irão utilizar a escala do globo e uma calculadora para calcular a distância real (de modo aproximado).

- Também irão calcular o raio e o diâmetro da terra dividindo o tamanho da sua circunferência que foi informada pelo professor pelo valor de π .

4.1.9 Sequência 9: Localização, medições e unidades de medidas no Google Earth

Público alvo: sexto ano do ensino fundamental.

Número de aulas: 4 aulas de 50 minutos

Objetivos: Explorar com os alunos, além da localização, as possibilidades do cálculo de medidas de áreas, perímetros e distâncias entre dois pontos aproveitando a opção do uso de unidades de medidas fora do S.I. para estimular o seu estudo.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Primeira aula

Descrição:

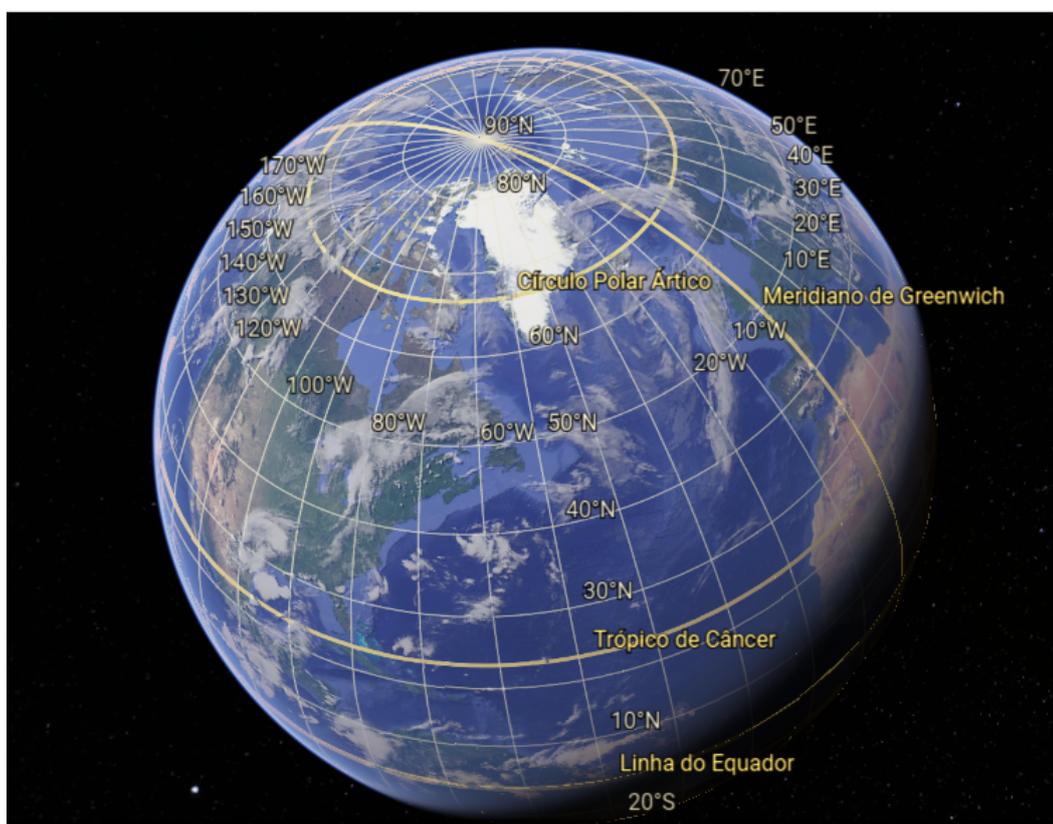
- **Essa aula poderá ser desenvolvida com as seguintes configurações:**
 - Caso a sala só tenha um computador conectado à internet e retroprojeter, o professor poderá explicar os passos, convidar alguns alunos para executar as ações e os demais acompanharão.
 - Se houver uma sala com vários computadores conectados à internet mas não houver algum conectado e com retro projetor, o professor dividirá a turma em grupos de acordo com o número de computadores, dará instruções e acompanhará os alunos.
 - Se houver computadores conectados para os alunos e um computador com retroprojeter para o professor, todos os grupos executarão as instruções à medida que o professor for explicando e executando.

As aulas serão descritas supondo que a escola ofereça a forma mais favorável, que é a última citada. O professor fará adequações no primeiro e segundo casos mas mesmo assim, vale a pena os alunos conhecerem o google earth.

- Inicialmente, o professor irá mostrar aos alunos como são localizados os pontos na superfície da terra através dos meridianos e paralelos.

Localizamos a ferramenta **estilo do mapa**, “circulada” na cor verde, no canto inferior esquerdo da figura 13. Feito isso, ativaremos as linhas de grade (é a última opção inferior do menu) e os meridianos e paralelos aparecerão conforme podemos ver na figura 11.

Figura 11 – Globo com meridianos e paralelos



Fonte:O autor

Em seguida, o professor poderá mostrar aos alunos:

- Como o google earth pode fornecer uma visão panorâmica do mundo.
- Como fazer para encontrar um país, uma cidade, rua, monumentos e até uma loja digitando o nome no campo de busca do google earth e mostrar que as coordenadas do local também aparecem junto com a imagem ou mapa;
- Como mergulhar em uma rua para ter uma visão do local, inclusive podendo avançar em algumas direções pré determinadas, obter zomm para observar algum lugar específico, mudar a posição da câmera, etc;

- Como conhecer virtualmente um lugar em qualquer parte do mundo;
- Que se pode visualizar um local para onde se pretenda ir para fazer uma análise prévia do roteiro.
- Após esse primeiro contato, os alunos serão orientados a obter a distância entre dois pontos da terra selecionando a unidade de medida que será usada para exibir o resultado.
- O professor pedirá para que eles escolham dois locais da cidade onde fica a escola e verifiquem a distância com o google earth. Em seguida, com base na velocidade de uma pessoa caminhando¹⁰, eles descobrirão em quanto tempo alguém poderá percorrer o trajeto a pé.

Segunda aula

Descrição:

O professor dirá aos alunos que o google earth permite a verificação de perímetros e até áreas aproximadas de regiões com contornos não poligonais.

Vejamos alguns exemplos:

- Os alunos alagoanos, por exemplo, irão utilizar o google earth para localizar as imagens do Estádio Rei Pelé (Figura 12) ou Trapichão como também é conhecido, situado em Maceió, capital de Alagoas.
- Em seguida, verificarão as medidas do perímetro e da área do gramado conforme a figura 13.
- O professor orientará os alunos para que eles consigam alternar a unidade de comprimento para jardas, milhas, etc. e a unidade de área para hectare ou outra unidade de área anotando os resultados exibidos antes e depois das modificações. Esses resultados serão usados na próxima aula. Na figura 14, temos um exemplo de uma dessas modificações.
- O professor aproveitará para falar brevemente de unidades de medidas antropométricas como jardas, polegadas, pés, etc. Também falará de unidades de área próprias de cultura local e também, do hectare.

Na figura 13 podemos destacar:

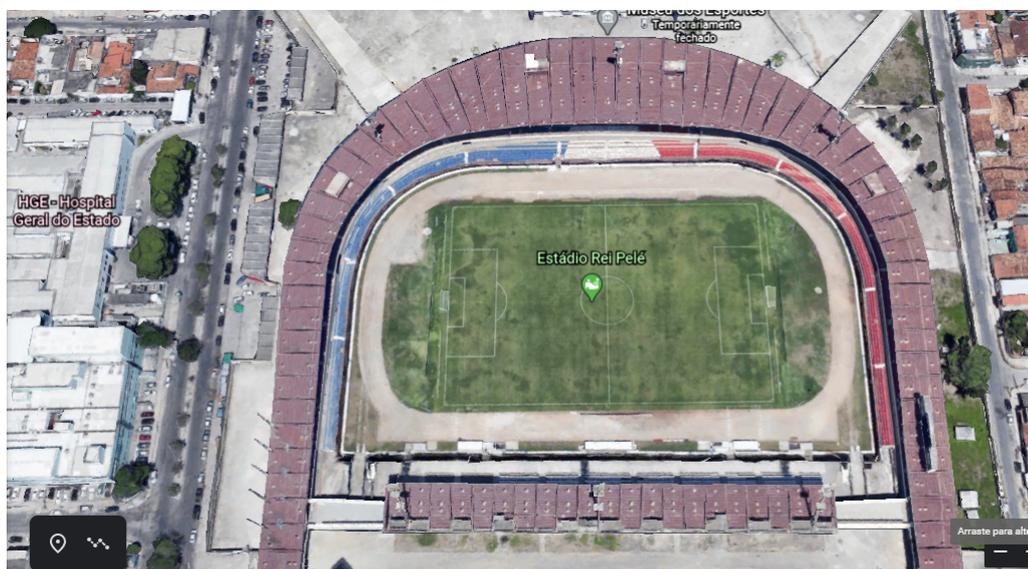
¹⁰ Em uma aula anterior, esse valor poderá ser estimado através de uma experiência rápida. O professor medirá uma distância na escola em um local conveniente, e alguns alunos irão percorrer essa distância caminhando normalmente. Os tempos serão cronometrados através do smartphone. À partir dos resultados obtidos no cronômetro e com a distância conhecida, o professor ensinará aos alunos como obter a velocidade média em metros por segundo.

- A ferramenta usada para executar as medições dos perímetros, distancias e áreas “circulada” na cor rosa, na parte inferior da lateral esquerda;
- Duas setinhas, indicadas pelas setas vermelhas, que podem ser clicadas caso se queira mudar a unidade de medida para perímetro ou para a área de forma independente.
- No canto inferior da lateral direita, indicada pela seta verde, uma roda que podemos girá-la segurando a seta do mouse em suas bordas (ponto azul) e esse processo fará com que a imagem rotacione. Por fim, se segurarmos o mouse no centro do círculo e o movermos de cima para baixo regulamos o ângulo do plano de visão da imagem.

A ferramenta de comprimento funciona assim:

Se clicarmos em um ponto e depois em outro, aparecerá a distância entre eles; se continuarmos clicando, a ferramenta vai acumulando as somas das distâncias e se fecharmos o polígono, a ferramenta fornece o perímetro e também a área. Para finalizar no momento que quisermos, temos que clicar em “concluído” que fica ativo durante as medições e situado onde está escrito “iniciar medição”.

Figura 12 – Estádio Rei Pelé



Fonte: O autor

Terceira aula

Descrição:

- Nesta aula, os alunos usarão os computadores para pesquisarem sobre unidades de comprimento e áreas que não fazem parte do S.I. mas que são usadas por questões culturais. As jardas é um exemplo dessas unidades e é muito

Figura 13 – Perímetro e área do gramado do Estádio Rei Pelé



Fonte:O autor

Figura 14 – Gramado do Estádio Rei Pelé com perímetro em jardas e área em hectares



Fonte:O autor

usada nos Estados Unidos fazendo parte, inclusive, do futebol americano. Outra unidade que nós conhecemos é a polegada muito mencionada quando nos referimos às telas de smartphones, televisores, etc.

- Com a ajuda do professor, os alunos vão criar uma tabela constando as conversões entre essas unidades e as unidades do S.I. mais convenientes.
- Os alunos vão, além dessa pesquisa, medir a distância em jardas entre duas faixas alternadas de um campo de futebol americano (figura 15).
- Em seguida, o professor exibirá um vídeo curto falando sobre o futebol ameri-

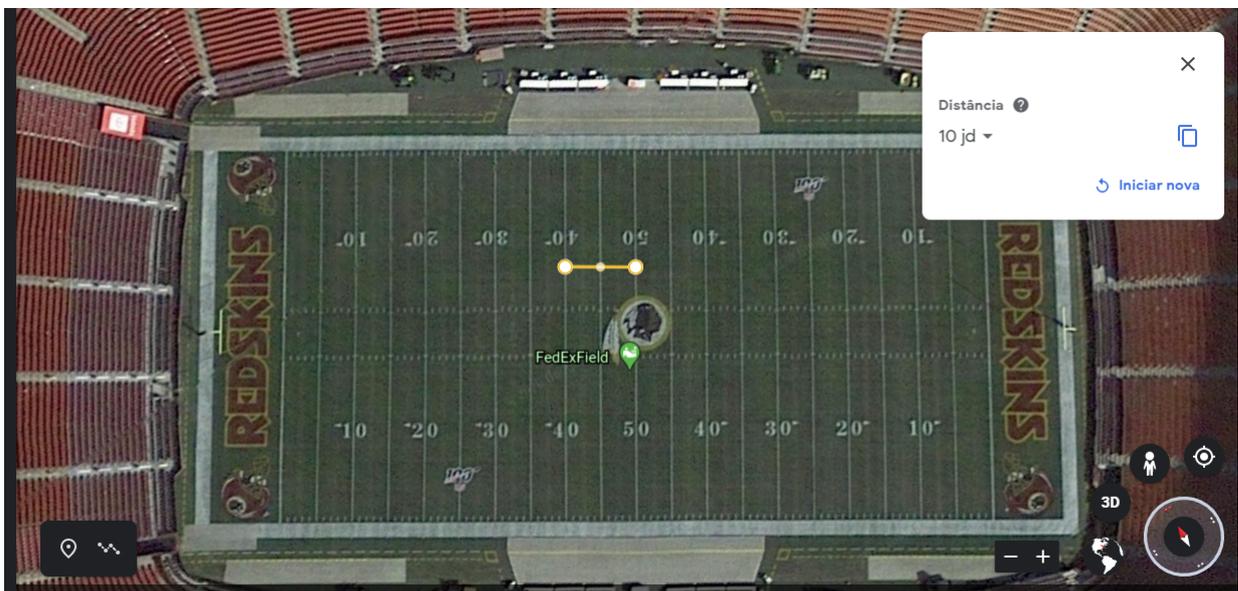
cano e suas regras.

Quarta aula

Descrição:

- Nessa aula, os alunos resolverão exercícios com problemas envolvendo unidades de comprimento e de áreas fora do S.I. de forma contextualizada incluindo também, unidades de medidas fora do S.I. que façam parte da cultura local e da realidade dos alunos como léguas, por exemplo.

Figura 15 – FedEx Field (estádio de futebol americano localizado em Landover, Maryland, Estados Unidos).



Fonte:O autor

4.1.10 Sequência 10: Contas de água e luz: uma proposta envolvendo temas transversais

Público alvo: oitavo ano do ensino fundamental.

Número de aulas: 4 aulas de 50 minutos

Objetivos: Espera-se que que, além do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos trabalhados, os alunos atentem para a importância do uso consciente da energia elétrica e da água assim como, adquiram ferramentas para compreender detalhes que possam gerar economia com conforto e segurança.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Notas: Faz-se necessário que os alunos saibam as definições das unidades de volumes as correspondências entre as unidades de volume e de capacidade, ou seja, de que um recipiente com um metro cúbico de espaço interno comporta mil litros e se esse espaço for de um decímetro cúbico comportará um litro. Porém, apesar dessa proposta ser direcionada aos oitavos anos, não é incomum encontrarmos estudantes desse nível com dificuldades em relação a esses conceitos de unidades de volumes, de capacidade, áreas entre outros problemas. O professor poderá fazer uma revisão prévia dessas unidades, inclusive usando materiais concretos caso seja necessário.

Primeira aula:

Descrição:

A turma será encaminhada para sala de vídeo onde serão exibidos vídeos curtos de livre escolha do professor que abordem questões como:

- A falta de saneamento e suas consequências para a saúde.
- Dados numéricos referentes à abrangência do serviços de saneamento no Brasil ou na cidade onde moram os alunos ou até mais especificamente, no bairro. Esses resultados poderão ser comparados com os de outros locais, cidades, bairros da cidade ou até de outros países.
- As consequências das águas pluviais não serem destinadas para o esgoto em localidades onde existe saneamento básico¹¹.

¹¹ Esse alerta existe nos recibos de água mas a maioria das pessoas ou não leem, ou não entendem ou não fazem o correto que é destinar essas águas para a calçada para que elas entrem no bueiro e corram livremente para os rios.

- A questão do reaproveitamento das águas das chuvas, visto que é uma forma ecológica de fazer economia assim como o uso da água sem exageros e ter consciência da sua importância e a importância da destinação adequada do lixo para que os mananciais não sejam poluídos.
- Será dada ênfase à análise e interpretação de dados presentes em tabelas de estatísticas, que deverão fazer parte dos vídeos.
- Os alunos farão um relato do que aprenderam na aula e entregarão ao professor.

Segunda aula

Descrição:

- Os alunos irão novamente para a sala de vídeo onde serão exibidos vídeos de livre escolha do professor que trate de temas relacionados à energia elétrica como, por exemplo:
- Segurança das instalações residenciais e das pessoas através do uso do aterramento e de outros dispositivos de segurança como disjuntor e DR, escolha consciente de produtos elétricos e o consumo consciente da energia elétrica.
- Práticas ecológicas e econômicas como o uso de janelas para ventilar e iluminar, o uso de telhas translúcidas em alguns locais da casa, o uso de lâmpadas econômicas, saber usar o ferro elétrico passando o máximo de roupa por vez, cuidados com o uso da geladeira (não deixar muito cheia, olhar se as borrachas estão boas, evitar que a porta fique aberta por muito tempo, etc.).

Observação: O professor deverá lembrar que é muito importante o consumidor observar a potência¹² do eletrodoméstico, eletroportátil ou outro equipamento que queira comprar comparando diversas marcas visto que isso influenciará diretamente no consumo.

- Questões que resultam em aplicação da matemática como a relação entre potência, voltagem e corrente, a capacidade de condução dos fios de acordo com a sua bitola, a importância de seguir as recomendações dos fabricantes dos equipamentos elétricos, o uso dos fios adequados de acordo com a potência dos equipamentos.
- Uma notícia que trate de algum acidente que foi divulgado na mídia provocados por instalações inadequadas ou sobrecargas.
- Perigos trazidos pelo contato com a corrente elétrica e os cuidados que podem ser tomados para evitar acidentes, riscos de choques e raios.

¹² Geralmente, fica em uma etiqueta branca na parte de trás do produto e está escrita em Watts, cujo símbolo é o W.

- O professor organizará um roteiro para os temas não se esquecendo de evidenciar as unidades de medidas usadas.

Terceira aula

Descrição:

- A turma poderá ser dividida em grupos com quatro ou cinco alunos.
- Xerox de recibos de água e de energia (cobrindo a parte da identificação e do endereço do dono) serão distribuídos aos alunos para que eles entendam e pratiquem o cálculo do faturamento mensal.
- Para isso, eles poderão ver a leitura anterior e a atual para obter o consumo, ver o valor pago pelo saneamento (onde tem saneamento) e o quanto se paga por cada metro cúbico consumido observando que esses valores aumentam por faixas ¹³, etc.
- O professor os orientará em todo o processo.
- Em seguida, eles construirão uma expressão algébrica que possa usada para o cálculo da água consumida.
- Ao analisar os recibos de energia a taxa de iluminação pública (calculada à parte) deverá ser observada.
- O professor ajudará os alunos a contruir uma expressão algébrica que possa ser utilizada para calcular o consumo de energia.

Quarta aula

Descrição:

- Será dada sequência à construção das fórmulas, para o caso de algum grupo não ter conseguido terminar, e à resolução de alguns problemas como, por exemplo, o cálculo do consumo mensal em quilowthora (KWh) de algum eletrodoméstico conhecendo a potência e o tempo de uso diário entre outras questões dos livros didáticos relacionadas. Os alunos também usarão as fórmulas construídas por eles sob orientação do professor nesses cálculos.

¹³ Por exemplo: até dez metros cúbicos é cobrado um valor para cada metro cúbico, acima de dez metros cúbicos o valor de cada metro cúbico já aumenta.

4.1.11 Sequência 11: Cubo de três pirâmides

Público alvo: nono ano do ensino fundamental.

Objetivos: Com essa atividade, é esperado que os estudantes se familiarizem com a com a confecção da planificação e com a montagem de figuras espaciais à partir de medidas pré determinadas visto que geralmente os exercícios relacionados às planificações se restringem à identificação das planificações à partir da imagem espacial ou vice versa. O Teorema de Pitágoras também será utilizado.

Observações adicionais: Apesar de ser uma atividade própria do estudo da geometria, o estudante trabalha com medições de ângulos e lados e pratica a confecção de materiais utilizando instrumentos de medidas como transferidor, esquadro, régua, compasso, etc.

Busca-se também a conscientização de que o resultado final das peças confeccionadas depende da precisão das medições.

Além disso, procura-se vencer umas das grandes dificuldades que é a de fazer com que o estudante compreenda a formação de um cubo à partir do encaixe de três pirâmides iguais.

A manipulação faz com que os estudantes tenham um controle da situação podendo experimentar os encaixas errando, acertando e aprendendo. Por fim, deseja-se que eles descubram também que assim como é possível calcular a área de um triângulo completando-o para formar um retângulo e pegando a metade da área desse retângulo, também fica bem fácil calcular o volume de cada uma dessas pirâmides entendendo que elas tem um terço do volume do cubo que elas formam ao se agruparem.

Número de aulas: 3 aulas de 50 minutos

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

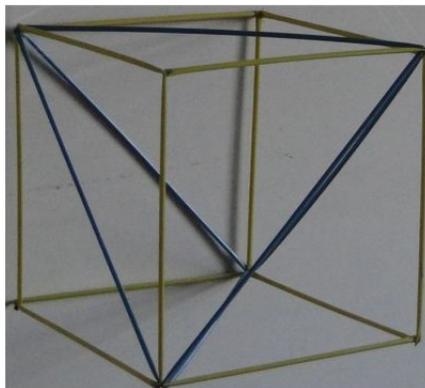
Primeira aula

Descrição:

- O professor dividirá a turma em seis equipes e distribuirá o material necessário como cartolinas (daquelas mais rígidas), compassos, régua, esquadros, etc.
- As arestas do cubo a ser montado nesse problema deverá ter no mínimo 8cm de comprimento visto que menor do que isso pode dificultar (não impossibilitar) a colagem das abas.
- O professor levará e mostrará aos grupos um cubo com canudos e arames ou palitos de churasco para que os alunos tenham a visão das diagonais do cubo

que formam as três pirâmides. Na figura 16, temos um exemplo desse tipo de cubo.

Figura 16 – Cubo feito com canudos evidenciando os vértices e as arestas



Fonte: <<https://cursoathenas.webnode.com.br/news/geometria-espacial-platao>>

- O professor desenhará a planificação da pirâmide no quadro e explicará como fazê-la usando o cubo de canudos¹⁴ durante a explicação. No entanto, os alunos se responsabilizarão pelo desenho da planificação e o professor acompanhará o processo oferecendo suporte.
- Será lembrado aos alunos que devem ser deixadas abas nos locais convenientes da planificação.
- Cada equipe fará três pirâmides que deverão ser identificadas por cada grupo e após a colagem, serão guardadas em um local seguro da escola até a próxima aula.

Segunda aula

Descrição:

- O professor trará as pirâmides em uma caixa e entregará aos grupos que farão as montagens dos cubos podendo ser utilizados pedaços fita adesiva transparente para a fixação. A sequência da construção das pirâmides e do cubo está de acordo com as figuras 18 e 19.
- Após isso, o professor dirá aos alunos que eles vão fazer uma demonstração do Teorema de Pitágoras e pedirá para que eles façam em uma folha o desenho de dois quadrados conforme a figura 17 e em seguida, risquem todos os triângulos das duas figuras.

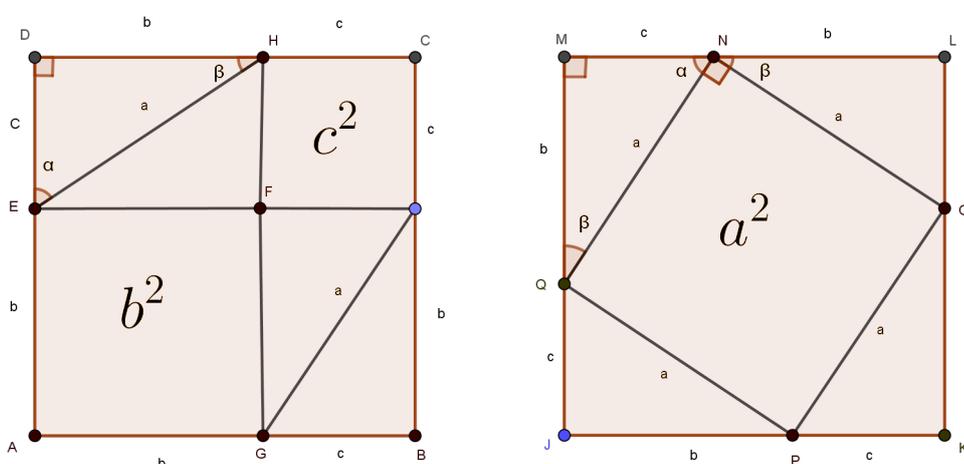
¹⁴ É bom que o cubo tenha um tamanho satisfatório para que todos a turma visualize a explicação ao mesmo tempo.

Nota: O professor poderá explicar brevemente sobre o triângulo retângulo, os catetos, a hipotenusa relacionando as medidas a , b , e c aos lados do triângulo retângulo DHE, por exemplo.

- Depois das devidas justificativas geométricas, os alunos perceberão que se todos os triângulos que são eliminados dos dois quadrados que tem a mesma área, as áreas que sobram nos dois quadrados são equivalentes resultando na relação $a^2 = b^2 + c^2$, conhecida como teorema de Pitágoras.

Nota: É importante justificar porque o quadrilátero NOPQ é um quadrado.

Figura 17 – Teorema de Pitágoras



Fonte: O autor

No livro *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*, o saudoso professor Elon Lages Lima se referiu à essa forma (que é bem antiga) de demonstrar o teorema de Pitágoras como “a mais bela prova”.(LIMA et al., 1991, p.53)

- Aproveitando a descoberta, o/ professor pedirá que os alunos calculem as diagonais da face do cubo e a diagonal do cubo utilizando o teorema de Pitágoras e depois dos cálculos prontos, verifiquem essas medidas com uma régua¹⁵.
- O último passo será convencer a turma de que o volume de cada uma dessas três pirâmides é um terço do volume do cubo.

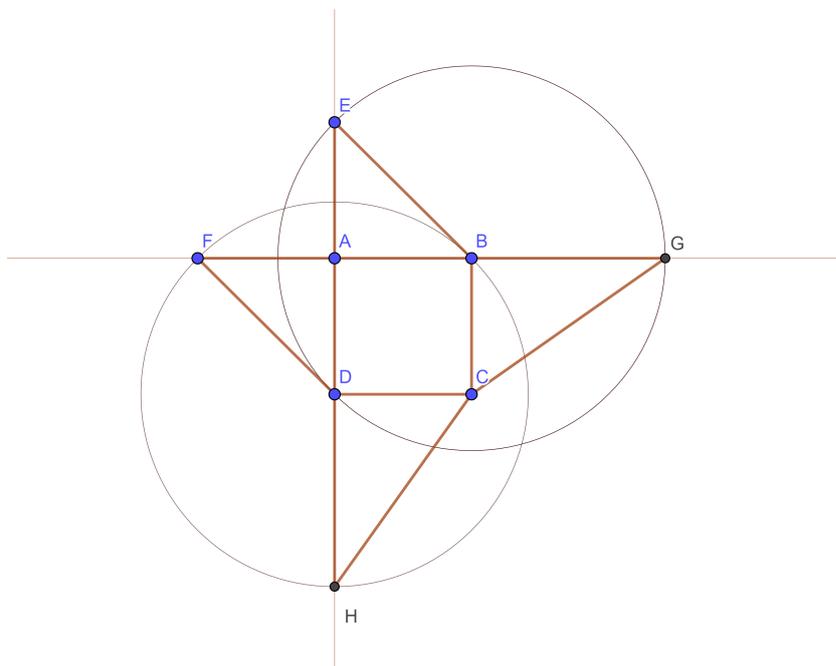
Terceira aula

Descrição:

Nesta aula, os alunos resolverão exercícios do livro didático envolvendo o teorema de Pitágoras.

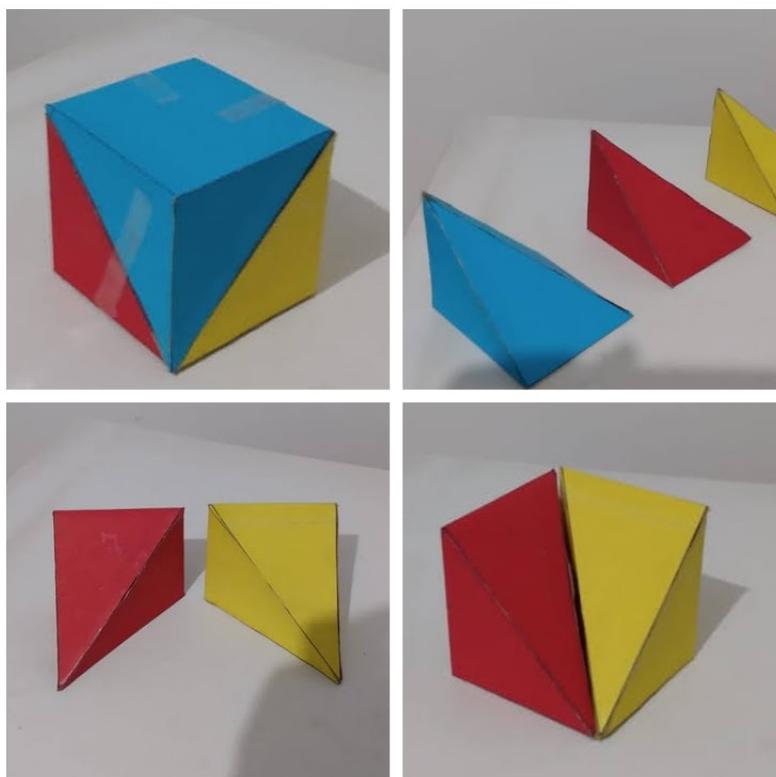
¹⁵ Será necessário desmontar o cubo para medir a sua diagonal.

Figura 18 – Planificação da pirâmide



Fonte: O autor

Figura 19 – Montagem do cubo



Fonte: O autor

4.1.12 Sequência 12: Deduzindo a expressão do cálculo da área do círculo e estudando as expressões de volumes do prisma reto de base poligonal e do cilindro circular reto com o uso do geogebra

Público alvo: nono ano do ensino fundamental.

Número de aulas: 5 aulas de 50 minutos

Objetivos: Ajudar os alunos, com argumentos e utilização de imagens construídas com o software livre geogebra, a entenderem que a expressão do volume do prisma reto de base retangular (ou paralelepípedo reto retângulo) também serve para quaisquer prismas retos cujas bases são outros polígonos que possam ser decompostos em triângulos e também para o cilindro circular reto.

Habilidades da BNCC relacionadas:

(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

Nota: Essa atividade também ajuda a melhorar a percepção espacial, traz diversas informações geométricas importantes, faz uso de tecnologias, auxilia no pensamento algébrico dedutivo, além de promover o desenvolvimento de competências relacionadas ao trabalho em equipe.

Primeira aula

Descrição:

- o professor avisará sobre o trabalho e dividirá a turma em seis equipes.
- Os alunos serão conduzidos a uma sala onde seja possível projetar a imagem do computador em uma tela grande¹⁶.
- O professor apresentará o geogebra aos alunos e mostrará brevemente ferramentas básicas como a marcação de pontos e a construção de retas, segmentos, triângulos, retângulos e outros polígonos.

¹⁶ Não tem problema se o computador não estiver conectado à internet já que o geogebra pode ser instalado na máquina para ser trabalhado of line sendo vantajoso para muitas escolas que não dispõem de uma sala de computadores com internet para os alunos.

- O professor aproveitará a oportunidade para desenhar um polígono regular inscrito em uma circunferência e falar das suas características.
- Em seguida, convidará um aluno ou aluna de cada uma das equipes para fazer desenhos no geogebra. Será dada preferência aos alunos que estejam motivados, encorajados e queiram participar voluntariamente.

As instruções aos alunos que estiverem construindo uma figura serão dadas de forma que todos os outros alunos escutem e os locais dos cliques deverão ser apontados na tela grande para que os demais alunos acompanhem e se familiarizem com o processo.

Alguns exemplos de ações:

- O professor pedirá que um aluno faça um retângulo com os lados coincidindo com as linhas horizontais e verticais da malha e reforçará a ideia de que a área do retângulo é o produto da sua base pela sua altura utilizando os quadradinhos da malha do geogebra como unidades de medidas de área.
- Outro aluno desenhará um triângulo que deverá ser completado com outro triângulo congruente a ele gerando um retângulo que tenha a mesma base e mesma altura do triângulo. O professor aproveitará para lembrar da expressão do cálculo da área do triângulo.
- Aproveitando o desenho de um círculo feito por outro aluno incluindo o seu diâmetro, deverá ser lembrado que quando se divide a medida da circunferência pelo diâmetro o resultado é a constante π e que conseqüentemente,

$$C = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi, \quad (4.3)$$

onde C é a medida da circunferência, d é o valor do diâmetro e r , o valor do raio.

- Outro aluno ou aluna, desenhará um triângulo isósceles e depois, será traçada a sua altura.
- Os outros alunos poderão escrever no caderno as expressões e conhecimentos revisados na aula incluindo desenhos.

Segunda aula

Descrição:

- Os grupos permanecerão os mesmos e os alunos voltarão à sala de vídeo.

- Um aluno convidado, que tenha tido mais facilidade na aula anterior, desenhará um quadrado inscrito em uma circunferência e traçará as suas diagonais fazendo com que ele fique dividido em quatro triângulos isósceles e congruentes e traçará a altura de um dos triângulos. O professor lembrará que as diagonais do quadrado coincidem com o diâmetro da circunferência e que cada altura de um triângulo no sentido radial é denominada apótema.
- Os alunos deverão fazer os esboços dos desenhos no caderno para depois fazer os desenhos melhorados.
- O professor desenhará um hexágono regular e um octógono regular inscritos na mesma janela onde está o quadrado inscrito e aproveitando os desenhos, perguntará aos alunos como fazer para calcular a área de cada triângulo e conseqüentemente, do polígono todo.

O objetivo a ser alcançado é ajudar os alunos a entender que a área do polígono regular é a soma das áreas de todos os triângulos. Eles não precisarão fazer cálculos, mas observar que a base de cada triângulo é o lado l do polígono e a altura, o apótema a . Logo, somando todas as áreas At de cada triângulo temos a área Ap do polígono.

$$Ap = n \cdot At = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l}{2} \cdot a = S \cdot a \quad (4.4)$$

onde S é o semiperímetro do polígono, a é a medida do apótema e n é o número de lados.

- O professor perguntará aos alunos, mostrando a imagem dos três polígonos inscritos, o que está acontecendo com o comprimento do apótema quando o número de lados do polígono aumenta e o que acontece também com a área do polígono em relação à área do círculo no qual está inscrito.
- A ideia é que eles percebam intuitivamente que quanto mais lados o polígono tem, mais ele “preenche” o círculo sobrando menos espaços vazios, o perímetro se aproxima da medida da circunferência e o comprimento do apótema se aproxima do comprimento do raio e entendam que, se a quantidade de lados crescer infinitamente, a equação 4.4 pode ser reescrita substituindo o semiperímetro S pela metade da medida da circunferência ($\frac{2\pi r}{2} = \pi r$) e o apótema a pelo raio r resultando na expressão

$$Ac = (\pi r) \cdot r = \pi r^2 \quad (4.5)$$

onde Ac é a área do círculo.

Observações:

- A ideia é que o professor convide os alunos de modo que a maior parte possível dos que queiram participar tenha contato com o computador, mas se existir sala com computadores na escola, poderá ser reservada uma aula onde o professor pedirá os desenhos e os alunos que tiverem mostrado mais facilidade ajudarão os outros a fazerem os desenhos, ou seja, serão convidados e serem monitores e o professor acompanhará o processo dando suporte.
 - Também existe a possibilidade da instalação do aplicativo geogebra no celular, incluindo a possibilidade da brincadeira com realidade aumentada como a inserção de uma esfera virtual em um local real da sala como a parte de cima de uma banca. Assim, um aluno pode ficar encostado na banca e fingir que está segurando a esfera com a sua posição orientada por outro aluno que está visualizando a tela. Quando tiver tudo ajustado, haverá a captura da tela resultando na imagem do aluno segurando a esfera virtual.
- Ao final da aula, será deixada uma lista para cada aluno com problemas envolvendo cálculo de áreas incluindo áreas do círculo. Também serão incluídos questões sobre volume do prisma reto de base retangular que relacionem medidas de volumes e capacidade¹⁷.

Terceira aula

Descrição:

- Essa aula acontecerá na sala e os alunos dos grupos resolverão os exercícios da lista. O professor fará correções e orientará os alunos nas questões. Eles poderão usar calculadoras para a verificação dos resultados das contas ou para fazer contas.

Quarta aula

Descrição:

- Os grupos irão novamente para a sala de vídeo e o professor lhes apresentará a janela 3D que pode ser acionada no menu “exibir” e dirá que serão feitas experiências semelhantes às da aula 2 mas nesse caso, serão formados sólidos e analisados os seus volumes.
- A princípio, o professor combinará com os alunos que a expressão para o cálculo do volume do paralelepípedo reto retângulo

$$V = Ab \cdot h \quad (4.6)$$

¹⁷ Podemos citar, como exemplo, um exercício onde os alunos terão que descobrir quantos litros de água serão necessários para encher uma piscina com a forma de um paralelepípedo retângulo até uma determinada altura em metros dadas a largura e o comprimento em metros.

onde Ab e h são, respectivamente, a área da base e a altura do paralelepípedo será aceita como verdadeira para quaisquer valores reais positivos mas dirá isso na linguagem mais simples e intuitiva possível.

A ideia básica, é convencer os alunos através de imagens e argumentos, que a expressão também vale para prismas retos de base triangular já que as outras bases poligonais podem ser decompostas em triângulos e a área do círculo pode ser aproximada pelas áreas dos triângulos que formam os polígonos regulares com infinitos lados inscritos. Para isso, será utilizada a ferramenta extrusão para prisma da janela 3D do geogebra 5 (figura 20).

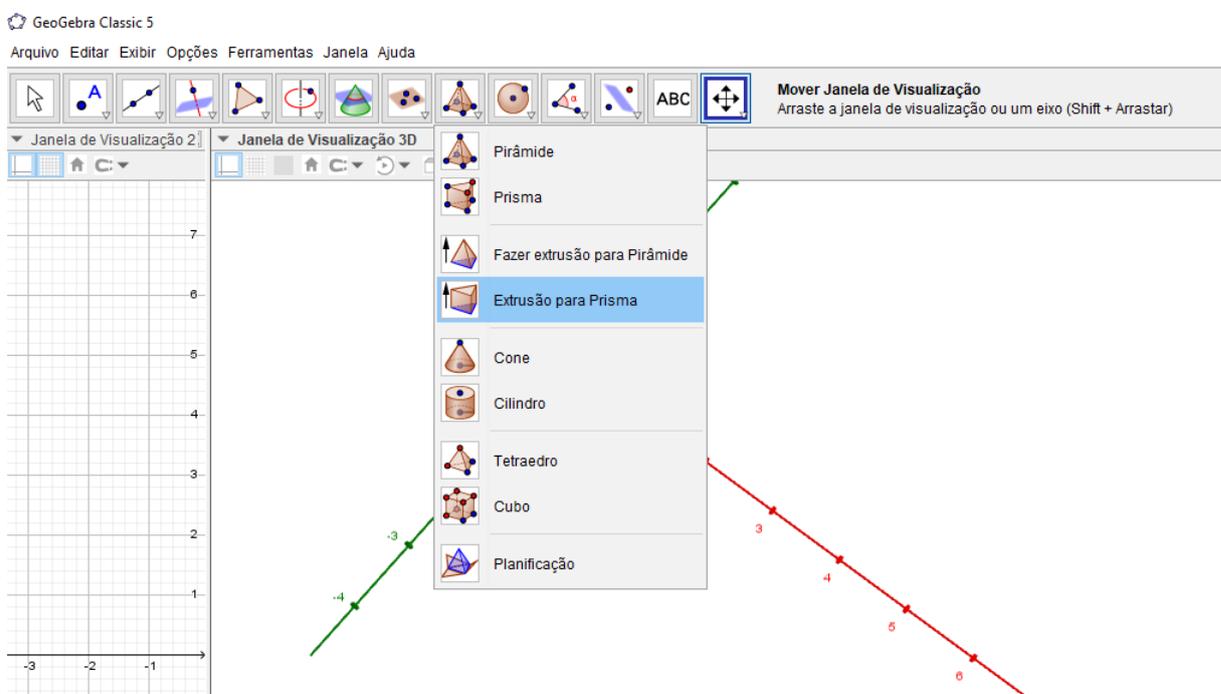
Ela fornece a dimensão altura a uma base transformando um polígono em um prisma ou um círculo em um cilindro e funciona da seguinte forma:

Depois que o polígono ou círculo for desenhado na janela 3D, clica-se na ferramenta extrusão e depois, no polígono ou círculo. Uma janela se abrirá e basta que seja digitada a altura desejada e apertada a tecla ENTER.

Na figura 20 podemos ver como acessar ferramenta.

Observação: A figura 20 também mostra a ferramenta mover selecionada que serve para mover toda a área de trabalho do geogebra e para isso, basta clicar com o mouse na área de trabalho, segurar e arrastar no sentido desejado.

Figura 20 – Ferramenta de extrusão da janela 3D

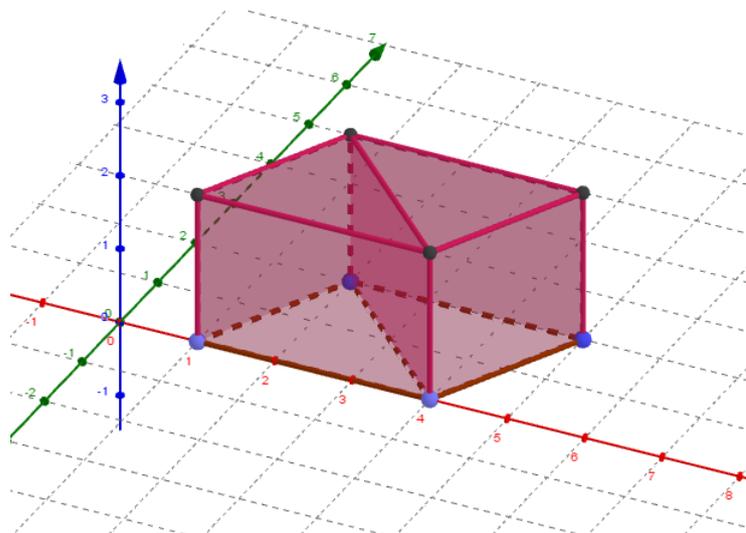


Fonte:O autor

- O professor desenhará um prisma reto cuja base é um triângulo acutângulo e

em seguida, criará uma cópia¹⁸ do prisma e unirá os dois de modo conveniente formando um prisma cuja base é um paralelogramo conforme a figura 21. Ele fará as imagens detalhando calmamente todos os passos para que os alunos acompanhem.

Figura 21 – Unindo dois prismas de bases triangulares



Fonte:O autor

- Em seguida, explicará como é feito o corte do prisma conforme a figura 22 e mostrará como as partes poderão se reorganizar para formar um prisma de base retangular (figura 23)

Podemos perceber que nenhuma fração do volume total foi perdido no processo de cortar o prisma, retirar uma parte cortada e recolocá-la em outro local. Daí, conclui-se que o prisma de base retangular formado tem o dobro do volume do prisma de base triangular.

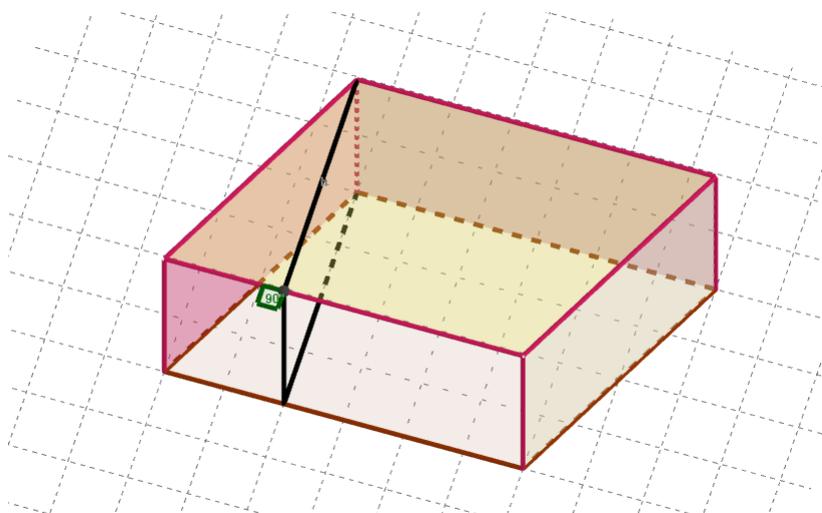
- O professor trabalhará com os alunos a ideia de que quando um prisma reto é cortado por um plano perpendicular à sua base, os volumes resultantes são diretamente proporcionais às áreas das bases resultantes após o corte pelo fato de que a altura é constante e portanto, e expressão **área da base x altura** também pode ser usada para o caso de bases triangulares.

Conseqüentemente, servirá para todas as bases que possam ser divididas em triângulos ou que possa ser aproximada por triângulos como é o caso do cilindro.

Nota: O professor poderá fazer a observação de que os alunos já tinham essa noção pois, quando se corta um alimento que tenha a forma de paralelepípedo

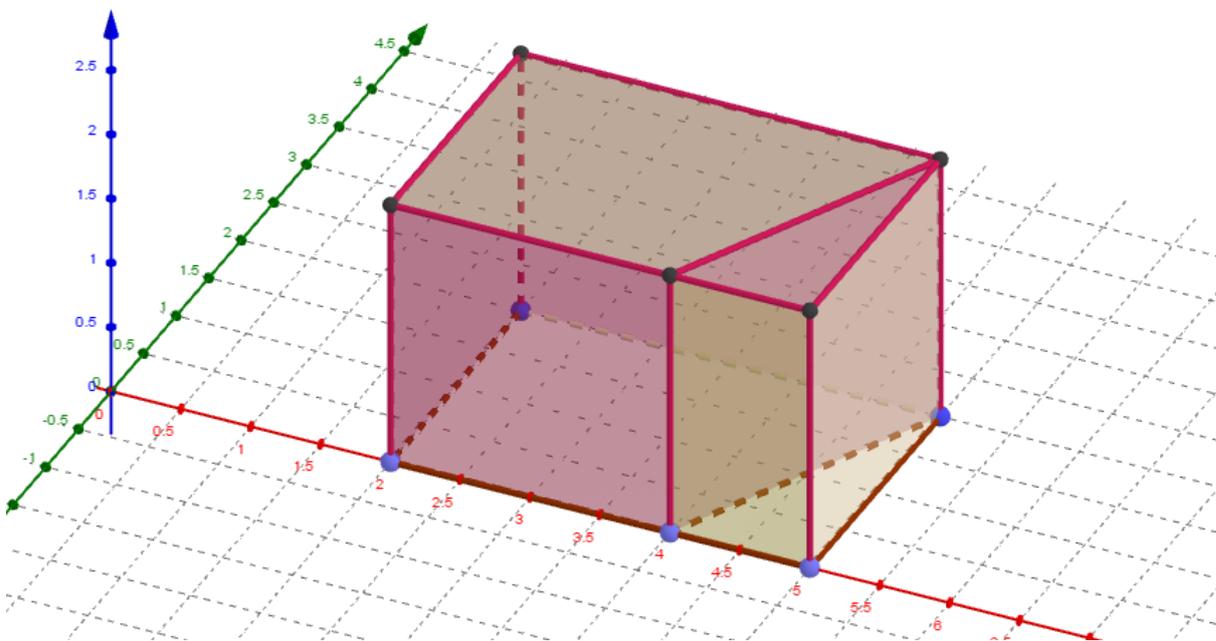
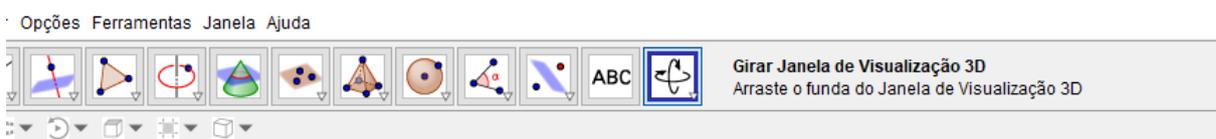
¹⁸ Basta para isso, que as bases sejam desenhadas individualmente com a ferramenta polígono havendo inclusive sobreposição de lados para que o geogebra entenda que são duas bases separadas e depois, é só usar a extrusão para puxar cada polígono.

Figura 22 – Sólido sendo cortado por um plano perpendicular à base e às duas faces laterais



Fonte:O autor

Figura 23 – Formando um novo prisma de base retangular



Fonte:O autor

retângulo em duas partes iguais procura-se “aprumar” a faca para que a partição seja a mais correta possível. Também pode ser observado que caso se deseje dividir esse alimento igualmente em quatro fatias basta que a base fique dividida em quatro partes iguais e a divisão seja feita com a faca ou espátula “aprumada”.

- Os alunos anotarão informações e tentarão fazer os desenhos dos objetos 3D visualizados que serão entregues posteriormente.

Quinta aula

Descrição:

Nesta aula, os alunos resolverão os exercícios e problemas contextualizados envolvendo volume de dois cilindros e três prismas retos cujas bases são polígonos regulares confeccionados de papelão (uma base quadrada, outra triangular e outra hexagonal). Esses objetos circularão entre os grupos que farão as medições anotando os valores das medidas. O professor dirá aos alunos que considerem esses prismas como maquetes de objetos reais, dará a escala e pedirá para que eles calculem os volumes reais.

Quanto aos cilindros, eles representarão maquetes de reservatórios de água. O professor dirá as escalas e os alunos calcularão os volumes reais e a capacidade em litros dos reservatórios.

Nota: O professor pode orientar aos alunos que primeiro convertam os valores usando a escala para depois calcular os volumes (fica mais fácil assim).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após vermos os objetivos legais e metas para que a escola desenvolva um trabalho eficiente em relação ao ensino da matemática, e os estudantes alcancem uma proficiência adequada, diante do fato de que a educação formal escolar tem se mostrado insuficiente para que os jovens tenham uma aprendizagem significativa, sabemos que é necessário diversificar, dinamizar e inovar a prática docente em sala de aula.

Em relação à matemática, em alguns casos o aluno até consegue fazer contas e resolver problemas mas faz isso mecanicamente com base nas soluções que o professor ensinou, e apenas uma pequena mudança nas condições do problema pode ser suficiente para desestabilizá-lo.

Isso se deve ao fato de que esse aluno não associou os conhecimentos que viu na escola com as suas experiências, ou seja, ele não percebeu o significado do que estava estudando, encontrando barreiras para contextualizar o que aprendeu.

Diante desses fatos, devido ao alcance social das grandezas e medidas e pela familiaridade que as pessoas tem com medições no cotidiano, e pela ligação que as grandezas e medidas têm com outras unidades temáticas e com as ciências, concluímos que a utilização de atividades com grandezas e medidas é de grande potencial para dar significado, contextualizar e servir como elemento facilitador da aprendizagem tanto de tópicos matemáticos que possam causar mais estranheza aos jovens como equações, números negativos entre outros quanto dos próprios conceitos referentes às grandezas e medidas.

Neste trabalho, foram propostas atividades que têm como principais metodologias o uso de conhecimentos e experiências prévias dos alunos, a interação através do trabalho em equipe, a aquisição de conhecimentos matemáticos de forma significativa e contextualizada, além de trazer elementos de ludicidade através de atividades com caráter de jogo e do contato com materiais manipuláveis.

Não pretendemos, no entanto, apenas mostrar modelos de atividades para serem simplesmente aplicadas apesar de que é possível que alguém o faça mas temos como um dos objetivos principais motivar o professor pesquisador que não quer ficar inerte diante desse quadro negativo da educação brasileira.

Logo, esperamos que esse trabalho tenha cumprido o papel de despertar no professor o seu potencial criativo e que ele veja como uma possibilidade interessante o aproveitamento das potencialidades advindas do trabalho com grandezas e medidas, que na maioria das vezes, é desmerecidamente renegado na prática escolar.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. Educação matemática na era digital. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 27, p. 13–28, 2011. 14
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. 29
- BRASIL, m. d. E. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a base**. [S.l.], 2017. 14, 17, 20, 21, 31
- BRASIL, S. d. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. [S.l.], 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.html>>. Acesso em: 28 abril. 2020. 23
- COSTA-FÉLIX, R. P.; BERNARDES, A. **Metrologia Vol. 1: Fundamentos**. [S.l.]: Brasport, 2017. 29
- EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 1995. 29
- HALMENSCHLAGER, V. L. da S. **Etnomatemática: uma experiência educacional**. [S.l.]: Selo Negro, 2001. 27
- LIMA, E. L. et al. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S.l.], 1991. 74
- MACEDO, L. de. Competências e habilidades: elementos para uma reflexão pedagógica. 2005. 18
- MORENO, A. C. **Pisa 2018: dois terços dos brasileiros de 15 anos sabem menos que o básico de matemática**. **G1**, 03 dez, 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/pisa-2018-dois-tercos-dos-brasileiros-de-15-anos-sabem-menos-que-o-basico-de-matematica.ghtml>>. Acesso em: 16 dez. 2019. 11
- NOGUEIRA, C. M. I. As teorias de aprendizagem e suas implicações no ensino de matemática. **Acta Scientiarum. Human and Social Sciences**, v. 29, n. 1, p. 83–92, 2007. 22
- PELIZZARI, A.; KRIEGL, M. d. L.; BARON, M. P.; FINCK, N. T. L.; DOROCINSKI, S. I. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. **revista PEC**, v. 2, n. 1, p. 37–42, 2002. 25
- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. D. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, 2013. 33
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. rio de janeiro. **Interciência**, 1978. 26
- RIBEIRO, B. **Como o livro didático ajuda na implementação da BNCC**. SOMOSPAR, 02 ago, 2019. Disponível em: <<https://www.somospar.com.br/livro-didatico-ajuda-na-implementacao-bncc/>>. Acesso em: 01 mai. 2020. 17

- ROZENBERG, I. M. **O sistema internacional de unidades-SI**. [S.l.]: Instituto Mauá de Tecnologia, 2002. 30
- SANTANNA, A.; NASCIMENTO, P. R. A história do lúdico na educação the history of playful in education. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 6, n. 2, p. 19–36, 2011. 25
- SOUTO, F. C. F.; GUÉRIOS, E. Resolução de problemas contextualizados: análise de uma ação didática para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. 020023, 2020. 26
- WAGNER, E. **1 video (71 min). PAPMEM - Julho de 2010 - Volumes**. Publicado pelo canal do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Youtube, 2010. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Bwgbtu8oKk4>>. Acesso em: 01 mai. 2020.

ANEXO A – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)

Quadro 3 – Habilidades da BNCC - Sexto ano do ensino fundamental

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal</p>	<p>(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.</p>
<p>Números - Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal</p>	<p>(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.</p>
<p>Números - "Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana"</p>	<p>(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.</p>
<p>Números - "Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos"</p>	<p>(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).</p>

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - "Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos"</p>	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
<p>Números - "Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos"</p>	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
<p>Números - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações</p>	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
<p>Números - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações</p>	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
<p>Números - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações</p>	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
<p>Números - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações</p>	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais</p>	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
<p>Números - Aproximação de números para múltiplos de potências de 10</p>	(EF06MA12) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
<p>Números - Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”</p>	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
<p>Álgebra - Propriedades da igualdade</p>	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
<p>Álgebra - Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo</p>	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
<p>Geometria - Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados</p>	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Geometria - Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)</p>	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
<p>Geometria - Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados</p>	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
<p>Geometria - Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados</p>	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
<p>Geometria - Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados</p>	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
<p>Geometria - Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas</p>	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
<p>Geometria - Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares</p>	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Geometria - Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares</p>	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
<p>Grandezas e medidas - Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume</p>	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
<p>Grandezas e medidas - Ângulos: noção, usos e medida</p>	(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
<p>Grandezas e medidas - Ângulos: noção, usos e medida</p>	(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
<p>Grandezas e medidas - Ângulos: noção, usos e medida</p>	(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
<p>Grandezas e medidas - Plantas baixas e vistas aéreas</p>	(EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
<p>Grandezas e medidas - Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado</p>	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

6º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>"Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)"</p> <p>Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas</p> <p>Probabilidade e estatística - Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas</p> <p>Probabilidade e estatística - "Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações"</p> <p>Probabilidade e estatística - Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas</p>	<p>(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.</p> <p>(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.</p> <p>(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.</p> <p>(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.</p> <p>(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).</p>

ANEXO B – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)

Quadro 4 – Habilidades da BNCC - Sétimo ano do ensino fundamental

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - Múltiplos e divisores de um número natural</p> <p>Números - Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples</p> <p>Números - Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações</p> <p>Números - Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações</p> <p>Números - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador</p> <p>Números - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador</p>	<p>(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.</p> <p>(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.</p> <p>(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.</p> <p>(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.</p> <p>(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.</p> <p>(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.</p>

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador</p> <p>Números - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador</p> <p>Números - Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador</p>	<p>(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.</p> <p>(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.</p> <p>(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.</p>
<p>Números - Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações</p>	<p>(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.</p>
<p>Números - Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações</p>	<p>(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.</p>
<p>Números - Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações</p>	<p>(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.</p>
<p>Álgebra - Linguagem algébrica: variável e incógnita</p>	<p>(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.</p>
<p>Álgebra - Linguagem algébrica: variável e incógnita</p>	<p>(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.</p>
<p>Álgebra - Linguagem algébrica: variável e incógnita</p>	<p>(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.</p>

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Álgebra - Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica</p> <p>Álgebra - Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais</p> <p>Álgebra - Equações polinomiais do 1º grau</p> <p>Geometria - Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem</p> <p>Geometria - Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem</p> <p>Geometria - Simetrias de translação, rotação e reflexão</p>	<p>(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.</p> <p>(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.</p> <p>(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.</p> <p>(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Geometria - A circunferência como lugar geométrico</p>	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
<p>Geometria - Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal</p>	(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
<p>Geometria - Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos</p>	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
<p>Geometria - Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos</p>	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
<p>Geometria - Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos</p>	(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
<p>Geometria - Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero</p>	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
<p>Geometria - Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero</p>	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Grandezas e medidas - Problemas envolvendo medições</p> <p>Grandezas e medidas - Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais</p> <p>Grandezas e medidas - Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros</p> <p>Grandezas e medidas - Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros</p> <p>Grandezas e medidas - Medida do comprimento da circunferência</p> <p>Probabilidade e estatística - Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências</p>	<p>(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.</p> <p>(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).</p> <p>(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.</p> <p>(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.</p> <p>(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.</p> <p>(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.</p>

7º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Probabilidade e estatística - Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados</p>	(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
<p>Probabilidade e estatística - "Pesquisa amostral e pesquisa censitária Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações"</p>	(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
<p>Probabilidade e estatística - Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados</p>	(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

Fonte: BNCC

ANEXO C – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)

Quadro 5 – Habilidades da BNCC - Oitavo ano do ensino fundamental

8º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
Números - Notação científica	(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
Números - Potenciação e radiciação	(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
Números - O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Números - Porcentagens	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Números - Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
Álgebra - Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Álgebra - Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

8º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
Álgebra - Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Álgebra - Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
Álgebra - Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
Álgebra - Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Álgebra - Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
Álgebra - Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
Geometria - Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

8º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria - Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
Geometria - Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
Geometria - Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Geometria - Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Grandezas e medidas - "Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência"	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Grandezas e medidas - "Volume de bloco retangular Medidas de capacidade"	(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. "Volume de bloco retangular
Grandezas e medidas - Medidas de capacidade"	(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

8º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Probabilidade e estatística - "Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral"</p>	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
<p>Probabilidade e estatística - Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados</p>	(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
<p>Probabilidade e estatística - Organização dos dados de uma variável contínua em classes</p>	(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
<p>Medidas de tendência central e de dispersão</p>	(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
<p>Probabilidade e estatística - "Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral"</p>	(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

8º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
Probabilidade e estatística - "Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral"	(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

Fonte: BNCC

ANEXO D – HABILIDADES DE MATEMÁTICA DA BNCC (NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL)

Quadro 6 – Habilidades da BNCC - Nono ano do ensino fundamental

9º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - "Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica"</p>	<p>(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).</p>
<p>Números - "Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica"</p>	<p>(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.</p>
<p>Números - Potências com expoentes negativos e fracionários</p>	<p>(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.</p>
<p>Números - Números reais: notação científica e problemas</p>	<p>(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.</p>

9º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Números - Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.</p> <p>Álgebra - Funções: representações numérica, algébrica e gráfica</p> <p>Álgebra - Razão entre grandezas de espécies diferentes</p> <p>Álgebra - Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais</p> <p>Álgebra - "Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações"</p> <p>Geometria - Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal</p>	<p>(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.</p> <p>(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.</p> <p>(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.</p> <p>(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.</p> <p>(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.</p>

9º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Geometria - Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo</p> <p>Geometria - "Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais"</p> <p>Geometria - "Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais"</p> <p>Geometria - Polígonos regulares</p> <p>Geometria - Distância entre pontos no plano cartesiano</p>	<p>(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. Semelhança de triângulos (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.</p> <p>(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.</p> <p>(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.</p> <p>(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.</p> <p>(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.</p>

9º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
<p>Geometria - Vistas ortogonais de figuras espaciais</p>	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
<p>Grandezas e medidas - "Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas Unidades de medida utilizadas na informática"</p>	(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
<p>Grandezas e medidas - Volume de prismas e cilindros</p>	(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
<p>Probabilidade e estatística - Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes</p>	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
<p>Probabilidade e estatística - Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação</p>	(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
<p>Probabilidade e estatística - Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos</p>	(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

9º ano do ensino fundamental	
Unidades Temáticas / Objetos de conhecimento	Habilidades
Probabilidade e estatística - Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: BNCC