



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Júlia Abreu Aleixo

**A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a
Educação Básica**

São Gonçalo

2020

Júlia Abreu Aleixo

A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof^ª. Dra. Priscila Cardoso Petito

São Gonçalo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

A366 Aleixo, Júlia Abreu.
TESE A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a
Educação básica/ Júlia Abreu Aleixo. – 2020.

165f. : il.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Priscila Cardoso Petito

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional –
PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de
Formação de Professores.

1. Matemática – Estudo e ensino - Teses. 2. Educação básica. 3. Grafos.
I. Petito, Priscila Cardoso. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Faculdade de Formação de Professores.

CDU 51

CRB/7 4924

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Júlia Abreu Aleixo

A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 15 de junho de 2020.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dra. Priscila Cardoso Petito (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof^a. Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Rafael Bernardo Teixeira
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof^a. Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

São Gonçalo

2020

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus filhos, Saulo e Nara.

AGRADECIMENTOS

Obrigada Italo, meu companheiro e parceiro de todas as horas, e obrigada professora Priscila, minha orientadora.

RESUMO

ALEIXO, J.A. *A Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica*. 2020. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

Este trabalho sugere a Teoria dos Grafos como conteúdo de aprofundamento no Ensino Fundamental e Itinerário Formativo no Ensino Médio a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento oficial que afirma que os professores devem desenvolver habilidades em seus alunos para que atinjam competências necessárias para lidarem com situações do cotidiano e serem capazes de resolver problemas reais. A BNCC defende o desenvolvimento do pensamento algorítmico e computacional nos alunos. Neste texto, utilizamos conceitos e algoritmos em grafos como possibilidade de atender este propósito. Neste contexto, abordamos brevemente a origem e algumas definições básicas da Teoria dos Grafos, trazendo um levantamento do que já vem sendo discutido e aplicado sobre o tema na Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. Além disso, mostramos como a Teoria dos Grafos é amplamente discutida, testada e sugerida, há décadas, por pesquisadores como tópico interdisciplinar no Ensino Fundamental e Médio, aplicado a temas como Análise Combinatória, Probabilidade, Matrizes, etc. Em contrapartida, a Teoria dos Grafos não faz parte de nenhum documento oficial que norteia as matrizes curriculares escolares, nem mesmo da atual BNCC, não está incluída na maioria das matrizes dos cursos de Graduação em Matemática e o próprio mestrado PROFMAT não sugere Grafos nem como um tópico das disciplinas obrigatórias. Assim, sugerimos uma forma de implementar o tema nos cursos de graduação e nas escolas através de atividades interdisciplinares, mostrando quais habilidades e competências estão sendo desenvolvidas, de acordo com a BNCC.

Palavras-chave: Grafos. Educação Básica. Ensino de Matemática. Diretrizes Curriculares Nacionais.

ABSTRACT

ALEIXO, J.A. *Graph Theory and the new curricular guidelines for the Basic Education*. 2020. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

This work suggests the Graph Theory as a deepening content in Elementary Education and Formative Itinerary in High School from the National Common Curriculum Base (BNCC), the current official document that states that teachers must develop skills in their students so that they reach the necessary skills to stop situations everyday life and be able to solve real problems. BNCC defends the development of algorithmic and computational thinking in students. In this text, we use concepts and algorithms in graphs as a possibility to meet this purpose. In this context, we briefly approach the origin and some basic definitions of Graph Theory, bringing a survey of what has already been discussed and applied on the topic in Basic Education and courses Degree in Mathematics. Besides, we show how the Graph Theory has been widely discussed, tested, and suggested, for decades, by researchers as an interdisciplinary topic in Elementary and Middle Education, applied to topics such as Combinatorial Analysis, Probability, Matrices, etc. On the other hand, the Graph Theory is not part of any official document that guides school curriculum, not even the current BNCC, it is not included in most of the Undergraduate curriculum courses in Mathematics and the PROFMAT course does not suggest Graphs nor as a topic of the subjects. Therefore, we suggest a way to implement the theme in undergraduate courses in schools through interdisciplinary activities, showing which skills and competencies are being developed, according to the BNCC.

Keywords: Graphs. Elementary Education. Mathematics Teaching. National Curriculum Guidelines.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	SOBRE GRAFOS	11
1.1	Noções preliminares	11
1.2	Origem	16
1.3	O problema das quatro cores	18
1.3.1	Conjectura ou Teorema?	18
1.4	O Teorema das Cinco Cores	22
1.5	Computadores e o Teorema das Quatro Cores	30
1.6	Grafos Hamiltonianos	33
1.6.1	A Voyage Around the World	33
1.7	O Algoritmo de Dijkstra	34
2	GRAFOS NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA	42
2.1	Ideias precursoras	42
2.2	BNCC	43
2.3	Grafos nos cursos de Matemática	48
2.4	Grafos na Educação Básica	50
2.5	Grafos nos livros didáticos	50
3	ATIVIDADES COM GRAFOS PARA A SALA DE AULA	54
3.1	O dia a dia de dois professores	59
3.2	Quatro Cidades e suas Estradas	62
3.3	Ligações entre Amigos	64
3.4	Jogo de Bola	67
3.5	Poema Quadrilha	70
3.6	Caminhos em um Grafo	72
3.7	O Problema dos Carteiros	75
3.8	Ligação de Água, Luz e Telefone	78
3.9	Jogo de Dominó Completo	81
3.10	Grafos e o Jogo de Dominó Incompleto	85
3.11	As Sete Pontes de Königsberg	87
3.12	Digrafos e Futebol	90
3.13	Grafos Desconexos e História do Brasil	93
3.14	Teorema das Quatro Cores	96
3.15	Matrizes e o Sistema Binário	100
3.16	Matrizes e Grafos	105
3.17	Grafos Hamiltonianos e Poliedros de Platão	109
3.18	Desafio do Teorema das Quatro Cores	113

3.19	Poemas Orientados	115
3.20	Caminho por todos os Cômodos	118
3.21	O Caminho do Carteiro	120
3.22	O Mundo dos Computadores	124
3.23	Caminho Mínimo	129
3.24	Experiências em Sala de Aula	157
	CONCLUSÃO	163
	REFERÊNCIAS	164

INTRODUÇÃO

Grafo é uma estrutura algébrica formada por vértices e arestas. Seu uso se dá em diversas áreas da ciência, além da matemática: computação, geografia, química, engenharia etc. A relevância dos grafos é notada na otimização de fluxo de dados, de caminhos e outros tipos de conexões, que podem, por exemplo, reduzir custos, quando aplicados a situações que envolvam movimentação financeira.

Este trabalho visa contribuir para a evolução da educação básica com ideias que, a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), inserem a Teoria dos Grafos como conteúdo de aprofundamento no Ensino Fundamental e nos Itinerários Formativos, que são a forma de introduzir conteúdos de aprofundamento no Ensino Médio segundo as recentes diretrizes curriculares nacionais. Tomamos como fundamento a última versão da BNCC [1], onde sugere-se que sejam criadas situações que despertem nos estudantes o pensamento algorítmico e computacional, a fim de que sejam capazes de traduzir uma situação dada em outras representações, como fórmulas, tabelas, gráficos e vice-versa. O texto da BNCC, porém, não sugere a representação de um problema através de um diagrama, ou de um grafo, que consideramos uma possível linguagem que modela e traduz a resolução de um problema. Queremos, então, mostrar que a Teoria dos Grafos é uma ferramenta viável e interessante no desenvolvimento do pensamento algorítmico e computacional, competências defendidas pela BNCC.

Iniciamos definindo alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos, no Capítulo 1, que darão suporte para a compreensão do nosso texto. No mesmo capítulo relatamos brevemente os primórdios desta teoria, que surgiu através de um passatempo que distraía os moradores de uma pequena cidade russa, Königsberg, e que foi esclarecido pelo grande matemático Leonhard Euler através de um diagrama, que viria a ser chamado de grafo, muitos anos depois, sem que o próprio Euler pudesse imaginar. Tal problema, que é conhecido como Problema das Pontes de Königsberg, é considerado o marco da Teoria dos Grafos. Falamos de outro problema clássico, o Teorema das Quatro Cores, que levou mais de um século para ser resolvido e cuja demonstração é das mais polêmicas, por ter sido feita com o uso de computadores, o que o torna inaceitável como teorema por muitos matemáticos. Aproveitamos para mostrar o Teorema das Cinco Cores, mais fraco que o anterior, mas completamente aceitável, por ter sido demonstrado da maneira convencional, o que nos leva a uma pequena reflexão sobre o uso das máquinas nas demonstrações matemáticas. Encerramos o capítulo falando brevemente sobre os grafos hamiltonianos, que surgiram através de um jogo, e esboçando a ideia do algoritmo de Dijkstra para o problema do Caminho Mínimo em grafos.

No Capítulo 2 especificamos quais habilidades e competências da BNCC são desenvolvidas com o ensino de grafos e apresentamos as ideias precursoras da aplicação da

Teoria dos Grafos na Educação Básica brasileira, que vêm inspirando muitas dissertações e algumas teses a abordar a inclusão de grafos nas escolas, num ritmo muito mais acelerado do que a formação dos professores de Matemática, que raramente têm contato com este assunto. Em seguida, apresentamos um levantamento sobre onde os grafos aparecem hoje na educação brasileira, o que é oferecido pelos cursos de Licenciatura em Matemática, pelas escolas e quais aplicações vêm sendo sugeridas nos livros didáticos mais famosos.

Por fim, no Capítulo 3 sugerimos atividades interdisciplinares, algumas já conhecidas outras inéditas, que podem ser aplicadas por professores na educação básica ou no ensino superior. As atividades, que são apresentadas em ordem crescente de dificuldade e de acordo com as definições usadas no nosso texto, estão cuidadosamente associadas a cada habilidade/competência da atual BNCC. Apresentamos em seguida os registros de duas experiências numa escola particular de Macaé, interior do Rio de Janeiro, onde tivemos sucesso com o objetivo deste trabalho, que é mostrar a Teoria dos Grafos como um conteúdo de desenvolvimento algorítmico e computacional, ampliando os recursos que os alunos dispõem para resolver problemas, dos simples aos mais complexos, construindo uma visão mais integrada da matemática, desta ciência com outras áreas do conhecimento e de sua aplicabilidade às questões contemporâneas do cotidiano.

1 SOBRE GRAFOS

1.1 Noções preliminares

Os conceitos e resultados deste capítulo, além de maiores informações sobre os temas mencionados podem ser encontrados em [2], [3] e [4].

Grafo $G = (V, E)$ é um conjunto finito e não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V . Temos que V é o conjunto de vértices de G e E é o conjunto de arestas de G . No grafo da Figura 1.1, por exemplo, temos que:

$$V(G) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

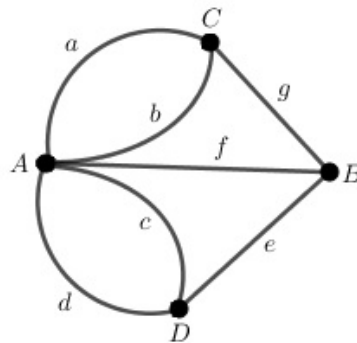


Figura 1.1

A quantidade de vértices de um grafo é chamada **ordem** de G . Assim, a ordem de G é 4, no grafo da Figura 1.1, seu conjunto de arestas, E , possui 7 elementos.

Grau de um vértice é a quantidade de arestas que incidem neste vértice. No grafo da Figura 1.1, o grau do vértice A é 5 e o grau dos demais vértices é 3.

Caminho é uma sequência finita e não vazia de arestas. Na Figura 1.1, a sequência a, g, e, d é um caminho, assim como f, g, b, c, e é outro caminho possível.

Um **ciclo** em um grafo é um caminho onde o vértice de partida é igual ao vértice de chegada. No exemplo anterior, a, g, e, d é um ciclo no grafo porque o caminho inicia e termina no vértice A .

Um grafo possui um **ciclo euleriano** se possui um caminho que percorre uma única vez cada uma das suas arestas, no qual o vértice de partida coincide com o vértice de chegada, ou seja, o grafo admite um ciclo que utiliza todas as suas arestas uma única vez. Veremos, mais adiante, que o grafo da Figura 1.1 não tem um ciclo euleriano, mas o grafo da esquerda da Figura 1.2 tem um ciclo euleriano.

Um grafo tem um **caminho euleriano** quando só difere do ciclo euleriano pelo fato de o vértice de partida e o de chegada serem distintos. Veremos que o grafo da Figura 1.1 também não tem um caminho euleriano, mas o grafo da direita da Figura 1.2 tem um caminho euleriano.

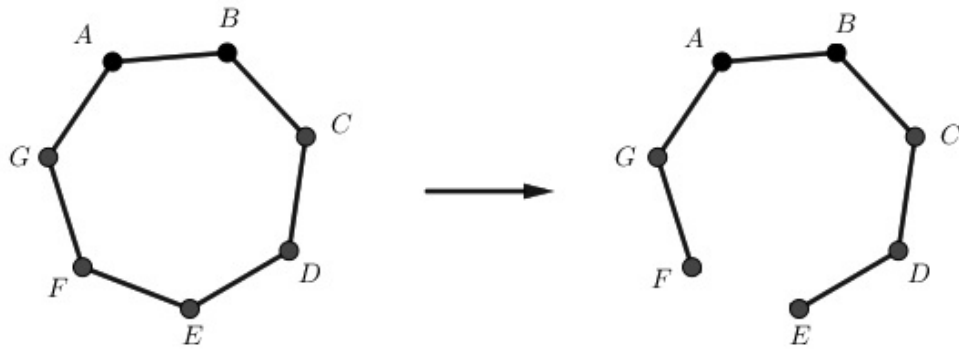


Figura 1.2 À direita temos um ciclo que, quando tem uma aresta qualquer removida, se torna um caminho, como o grafo à direita, do qual removemos a aresta EF .

Dizemos que um grafo possui um **caminho hamiltoniano** quando é possível partir de um dos seus vértices, passar por todos os outros uma única vez. Caso seja possível um caminho que termine no vértice de partida, temos um **ciclo hamiltoniano**.

Um grafo é dito **conexo** quando existe um caminho entre qualquer par de vértices. Por outro lado, um grafo é **desconexo** se existe pelo menos um par de vértices que não é ligado por um caminho. Na Figura 1.3, os dois primeiros grafos são conexos, mas podemos observar que o último grafo é desconexo, pois não existe um caminho que nos permita ligar o vértice A ao vértice F , por exemplo.

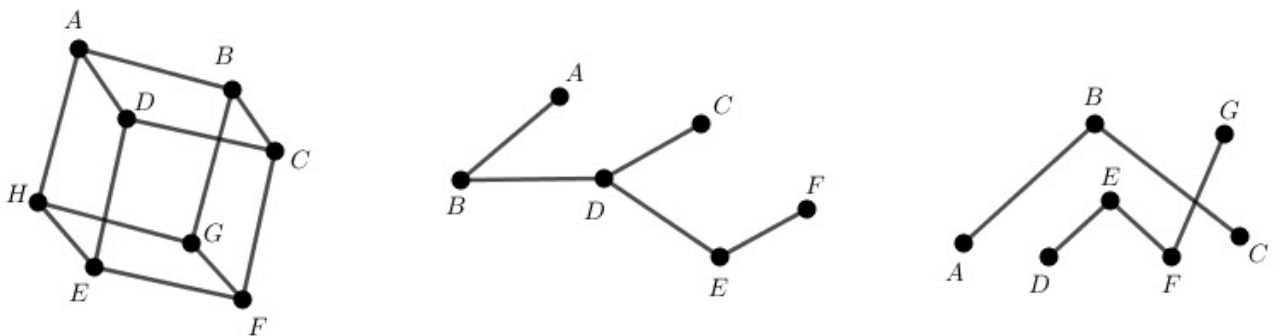


Figura 1.3

Árvores são grafos conexos sem ciclos. Um grafo em que os componentes conexos são árvores é chamado de **floresta**.

Um grafo é **planar** se puder ser representado no plano sem que tenha arestas se cruzando, como pode ser visto na Figura 1.4, onde podemos observar quatro representações de um mesmo grafo.

Toda representação planar de um grafo, divide o plano em regiões, chamadas **faces**. Embora as representações da Figura 1.4 sejam referentes a um mesmo grafo, podemos notar que, cada uma, têm quatro faces, com exceção da primeira, a partir da esquerda, que possui cinco faces. Na contagem de faces, contamos a região externa do diagrama como face exterior.

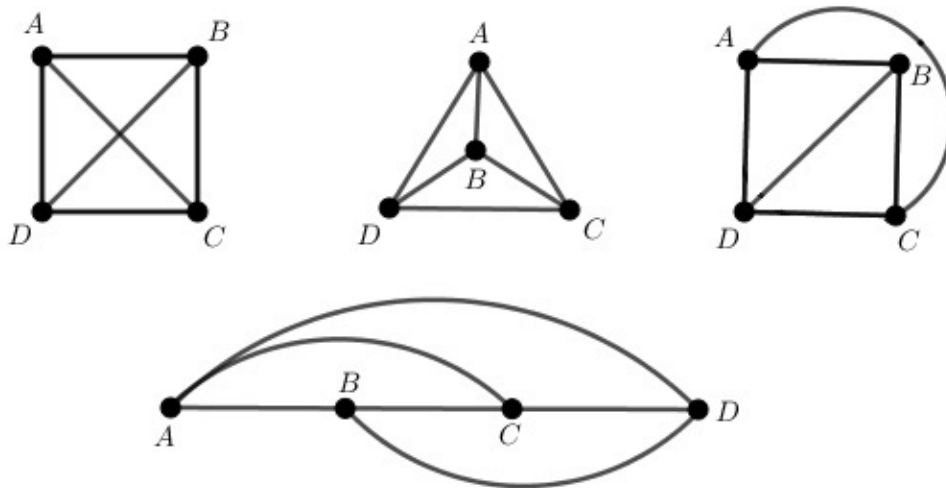
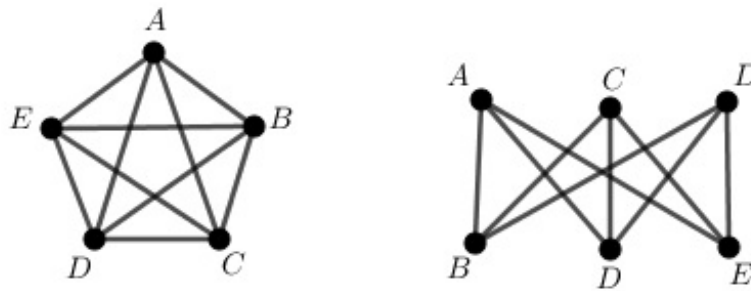


Figura 1.4

Um grafo que não é planar é chamado grafo **não planar**, como na Figura 1.5.

Figura 1.5 Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ são não planares

Grafo completo é o grafo no qual todos os vértices estão conectados entre si, através de arestas, como mostrado nas representações do K_4 na Figura 1.4. Já na Figura 1.5, somente o grafo da esquerda, K_5 , é completo, já o grafo da direita, $K_{3,3}$, é chamado **grafo bipartido completo**, já que é dividido em duas partições, com três vértices cada e, entre os vértices de partições diferentes, existem todas as arestas possíveis.

Um grafo H é um **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Na Figura 1.6, o grafo H é um subgrafo de G . O grafo I é dito um **subgrafo induzido** pelo subconjunto (A, B, C, D) de $V(G)$, pois todas as arestas incidentes aos vértices de (A, B, C, D) em G estão presentes em I .

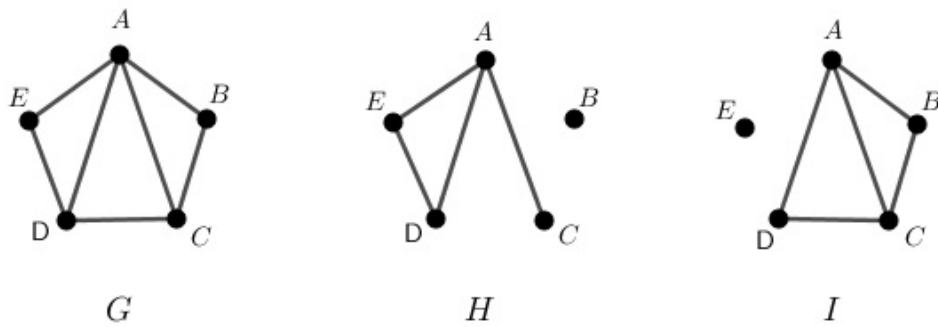


Figura 1.6

O Teorema a seguir dá uma condição necessária para um grafo ser planar. A demonstração de que o K_5 não é um grafo planar é feita na Seção 1.4 porque faz parte de uma série de resultados que contribuem para a demonstração do Teorema das Cinco Cores. O resultado para o $K_{3,3}$ pode ser obtido a partir do uso de raciocínio análogo.

Teorema 1.1.1. [Kuratowski] *Um grafo é planar se não tiver um K_5 ou um $K_{3,3}$ como subgrafo induzido.*

Demonstração. Ver em Fournier [5]. □

Digrafo é um grafo direcionado onde existe uma relação de um vértice para outro, informando o sentido tomado, como nos grafos da Figura 1.7:

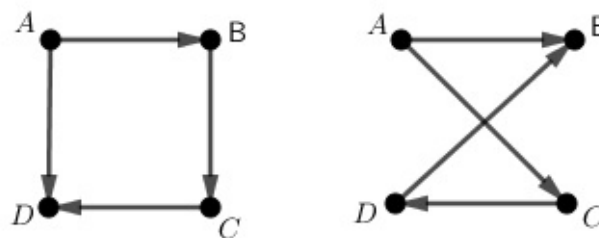


Figura 1.7

Laço é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Um laço adiciona duas unidades ao grau do vértice, como no grafo da Figura 1.8, onde o vértice A tem grau 5.

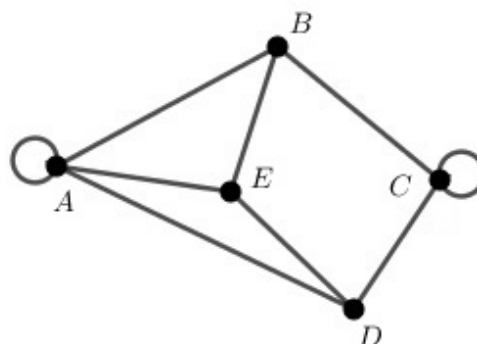


Figura 1.8 Os vértices A e C têm grau 5 e 4, respectivamente.

Um grafo é **valorado** quando é atribuído um peso às arestas, isto é, um valor que pode ser uma distância, um custo financeiro, uma medida de tempo, ou que for pedido pela modelagem do problema.

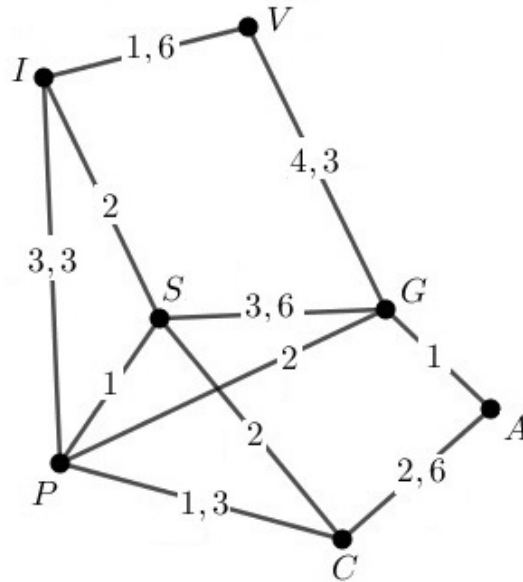
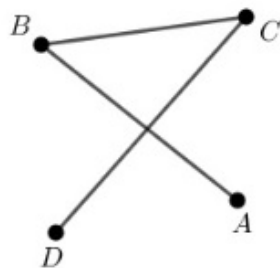


Figura 1.9 Grafo valorado, onde os números nas arestas representam as distâncias entre os bairros (vértices) do município de Macaé

Algoritmo é uma sequência finita de regras que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar um determinado problema proposto.

Matriz de Adjacência é uma matriz M definida por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe aresta entre os vértices } i \text{ e } j \text{ no grafo } G \\ 0, & \text{quando não existe tal aresta em } G \end{cases}$$



$$M(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.10 Grafo G e sua Matriz de Adjacência $M(G)$

1.2 Origem

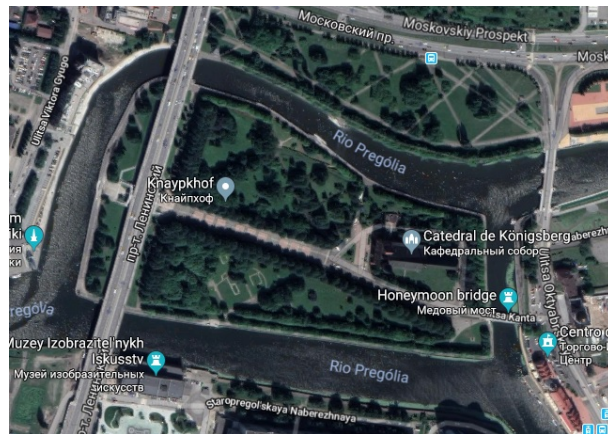


Figura 1.8 Königsberg vista do céu em 2018, retirada do google maps

O Problema das Sete Pontes de Königsberg, atual Kaliningrado na Rússia, que deu origem a Teoria dos Grafos, surgiu em 1736, quando o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) propôs uma solução para uma dúvida que servia de passatempo para os habitantes de Königsberg: Seria possível encontrar um caminho que passe em cada uma das sete pontes da cidade de Königsberg exatamente uma vez?

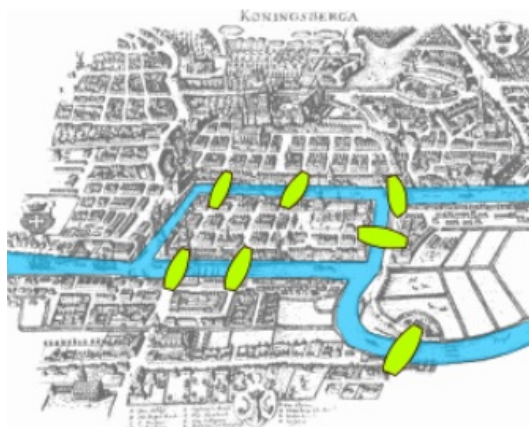


Figura 1.11 Em verde, as pontes que deram origem ao problema, retirada do wikipedia.org

Euler respondeu à pergunta usando um diagrama, possivelmente o primeiro grafo da história, como o ilustrado na Figura 1.12, onde representamos cada porção de terra pelos pontos A , B , C e D , que são os vértices do grafo, e cada ponte por uma ligação, que são as arestas do grafo.

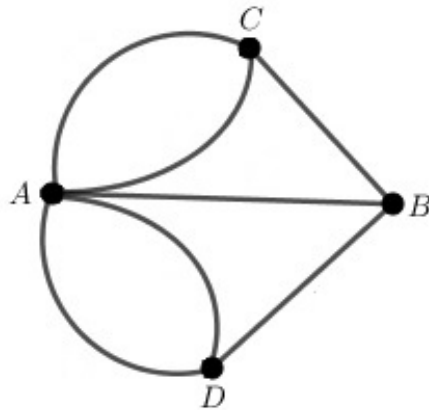


Figura 1.12

Euler mostrou que tal percurso, com as referidas restrições, era impossível de ser realizado, para qualquer ponto que se tentasse iniciar o caminho, pois cada porção de terra precisaria ter uma ponte para a entrada e outra diferente para a saída. Mas todas as porções de terra tinham uma quantidade ímpar de pontes, o que inviabilizava a ideia de passar uma única vez por cada uma delas. Esta resposta pode ser criteriosamente conferida através dos teoremas a seguir.

Teorema 1.2.1 (*Teorema de Euler para Grafos*). *Um grafo conexo G tem um ciclo euleriano se e somente se todos os seus vértices são de grau par.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo e que tem um ciclo euleriano. Como G tem um ciclo euleriano, G possui um caminho que percorre uma única vez cada uma das suas arestas, no qual o vértice de partida coincide com o vértice de chegada. Assim, ao fazermos um caminho, percorrendo uma sequência qualquer de arestas, chegamos a um vértice através de uma aresta e saímos por outra aresta distinta da aresta de chegada. Com isto, independente de quantas arestas estejam conectadas a cada vértice, como se trata de ciclo euleriano, sempre entramos e saímos de cada vértice por arestas distintas, percorrendo todas, o que só é possível se tivermos uma quantidade par de arestas incidentes em cada vértice, o que nos mostra que o grau de cada vértice é par.

Agora, para a volta, suponhamos que cada vértice de G seja de grau par. Assim, cada um de seus vértices possui uma quantidade par de arestas, ou seja, cada par consiste numa aresta de chegada e outra aresta de saída. Partindo de um vértice qualquer, seja V_1 este vértice, saímos dele através de uma aresta, que chamaremos de e_2 , chegando em outro vértice, V_2 , do qual para sair, nos utilizamos da sua outra aresta, e_3 , e assim, sucessivamente, entramos e saímos de cada vértice até, pelo fato de G ser conexo, voltarmos para o vértice V_1 , passando pela última aresta, e_1 , a qual não usamos no início do caminho. Com isto, passamos por todas as arestas uma única vez, o que nos faz concluir que G possui um ciclo euleriano. \square

Pela análise do grafo da Figura 1.12, para o problema das pontes de Königsberg, observa-se que todo vértice tem grau ímpar, logo o grafo não possui um ciclo euleriano e,

consequentemente, não é possível passar por todas as pontes uma única vez voltando ao lugar de partida.

Do *Teorema 1.1.1*, segue o corolário que determina quando um grafo possui um caminho euleriano.

Corolário 1.2.2. *[Euler] Um grafo possui um Caminho Euleriano se, e somente se, possui exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo que possui um caminho euleriano. Sejam os vértices X e Y os extremos deste caminho. Como, nos caminhos, consideramos cada aresta uma única vez, todo vértice desse caminho, exceto X e Y , têm grau par. Para a volta, seja G um grafo conexo e com exatamente dois vértices de grau ímpar: X e Y . Se fizermos um caminho partindo de X , procurando passar por todas as arestas e vértices uma única vez, quando chegarmos em Y , não teremos como sair, pois ele é de grau ímpar. Logo, Y deve ser o final do caminho. O mesmo vale para o final ser em X se escolhermos partir de Y . Por outro lado, se escolhermos fazer um caminho partindo de qualquer outro vértice, que será de grau par, ao chegarmos em X ou Y não teremos como sair, pelo fato de seus graus serem ímpares. Portanto, G possui um caminho euleriano. \square

Mostramos que o problema teria solução se todos os vértices tivessem grau par, ou seja, se o grafo G tivesse um ciclo euleriano seria possível passar por todas as pontes e voltar ao ponto de onde se partiu. E, mesmo que se quisesse passar por todas as pontes, uma única vez, sem precisar voltar ao ponto de onde se partiu, não seria possível, pois aí teríamos um caminho euleriano, onde obrigatoriamente dois vértices devem ser de grau ímpar, o que não ocorre no grafo das pontes de Königsberg.

1.3 O problema das quatro cores

1.3.1 Conjectura ou Teorema?

Outro problema famoso que contribuiu para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos foi o problema das Quatro Cores, que afirma que com quatro cores é possível pintar qualquer mapa, como descrito em [6], ou seja, quaisquer que sejam as divisões do plano, as regiões formadas pelas divisões podem ser coloridas com até quatro cores, de modo que regiões tangentes tenham cores distintas, como mostrado na Figura 1.13.

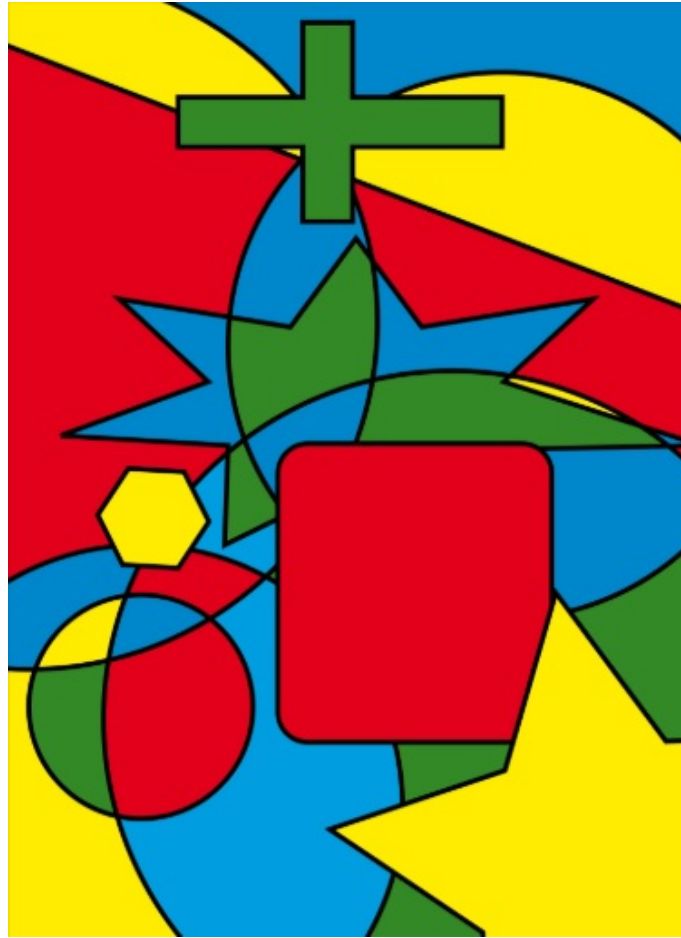


Figura 1.13 Exemplo de mapa colorido com quatro cores

Tudo começou com uma brincadeira, no ano de 1852, que distraía o matemático Francis Guthrie, a pintura de um mapa dos condados de Londres, que tinha o cuidado de não colorir condados vizinhos com a mesma cor, gerando a pergunta natural se seria possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores, de modo que regiões adjacentes não tivessem a mesma cor. Guthrie chegou a fazer alguns experimentos, colorindo outros mapas com quatro cores, tentou demonstrar matematicamente tal afirmação, mas percebeu que era uma tarefa difícil. Com isto, sugeriu a seu irmão, Frederick Guthrie, na época estudante de matemática na University College London, que tentasse demonstrar sua conjectura. Este, por sua vez, levou o problema a seu professor, o grande matemático Augustus De Morgan.

Depois de verificar que com três cores não conseguia colorir certos mapas, como ilustrado na Figura 1.14, De Morgan acreditou muito que quatro cores bastariam para colorir qualquer mapa.

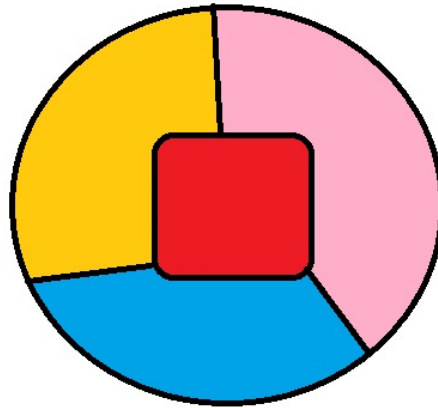


Figura 1.14 Este mapa não pode ser colorido com três cores.

Na sua forma de pensar, se quatro regiões tem, individualmente, fronteira com outras três, então uma delas será circundada pelas demais, o que impossibilita que uma quinta região tenha fronteiras com todas as quatro, como pode ser visto na Figura 1.15.

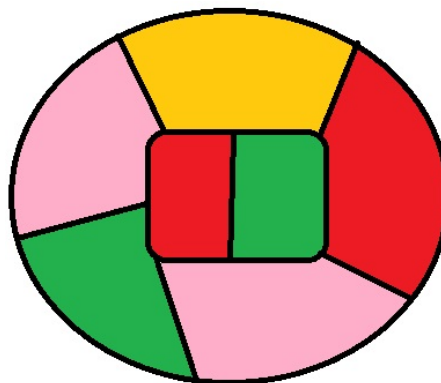


Figura 1.15 Três cores não são suficientes para colorir este mapa

Porém, tal propriedade não é suficiente para garantir que quatro cores sejam sempre suficientes para colorir todo o mapa. Assim, De Morgan propôs o problema das quatro cores para alguns de seus alunos, incluindo Sir William Hamilton, que não se interessou pelo problema, mas contribuiu para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, conforme falaremos mais adiante. Até que, em 1878, o Teorema das Quatro Cores foi divulgado pela London Mathematical Society como um problema em aberto, o que deu início a muitas tentativas de demonstração do Teorema.

Após algumas investidas frustradas de matemáticos renomados, um ano depois da divulgação do problema, o matemático britânico Alfred Bray Kempe publicou uma demonstração que foi aceita por onze anos quando, em 1890, outro matemático britânico, Percy John Heawood, encontrou falhas na demonstração de Kempe, que não refutavam a conjectura do problema das quatro cores, mas que o tornava um problema ainda em aberto.

Na sua demonstração, Kempe sugeriu um método para representar qualquer mapa dado, marcando com um ponto (vértice) a capital de cada país e quando dois países

tivessem uma fronteira em comum, uniria as capitais por uma linha (aresta) e, assim, surgia o grafo correspondente ao mapa dado. Com isto, Kempe mostrou que se fosse possível colorir dois vértices com aresta em comum com cores distintas, então o mapa correspondente original poderia ser colorido da mesma maneira.

A dificuldade básica na demonstração do teorema é muito simples: a investigação de contraexemplos. Se existirem mapas que não podem ser coloridos com quatro cores, então algum desses mapas tem a menor quantidade f de países. Segue, da definição, que qualquer mapa com menos que f países pode ser colorido com quatro cores. Qualquer mapa com menos que cinco países pode facilmente ser colorido com cinco cores, o que implica $f > 4$. Toda a demonstração consiste em mostrar que não pode existir um contraexemplo mínimo.

Uma procura por esse contraexemplo mínimo pôs restrições ao problema, o que definiu colorações admissíveis em mapas denominados *mapas normais*:

- Regiões adjacentes compartilham uma linha fronteira. Com isto, o ponto central da Figura 1.16 não é considerado uma fronteira.

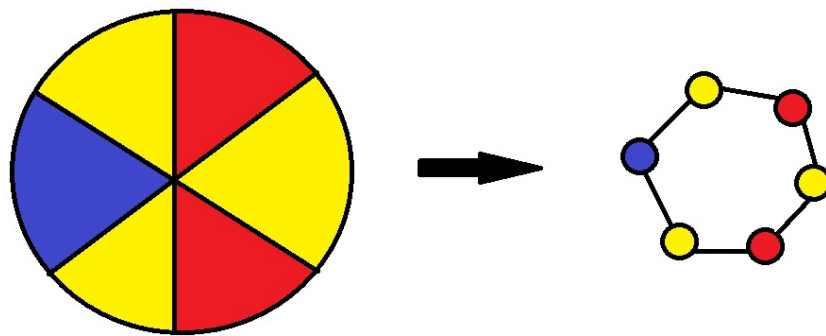


Figura 1.16 Mapa e seu grafo correspondente, pelos critérios definidos por Kempe.

- Os mapas são de regiões diretamente conectadas. Assim, um mapa com uma configuração similar à Figura 1.17 está excluído do estudo do problema das quatro cores.

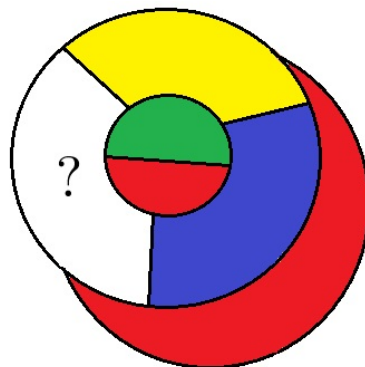


Figura 1.17 A região vermelha deste mapa possui uma parte desconectada, o que serviria de contraexemplo para o Teorema das Quatro Cores.

Se não fossem essas restrições seria fácil encontrar contraexemplos, como os citados acima.

Apesar da falha na demonstração do Teorema das Quatro Cores, o trabalho de Kempe possibilitou que Heawood trabalhasse num problema mais fácil, conseguindo mostrar que todo mapa planar pode ser colorido com no máximo cinco cores.

Como veremos adiante, o Teorema das Quatro Cores só pode, finalmente, ser demonstrado através do Teorema das Cinco Cores, que abordamos a seguir.

1.4 O Teorema das Cinco Cores

Faremos um esboço da demonstração de Heawood, que não será tão rigorosa, para o Teorema das Cinco Cores. Entretanto, para começar, precisamos de um lema, que é um Teorema formulado por Leonhard Euler, no século *XVIII*, para poliedros convexos, mas que pode ser aplicado a grafos conexos e vai nos ajudar a mostrar que todo grafo planar contém um vértice de, no máximo, grau 5.

Lema 1.4.1 (*Teorema de Euler para Poliedros Convexos*). *Se um grafo conexo e planar tem v vértices, a arestas e f faces, então*

$$v - a + f = 2$$

Demonstração. Grafos conexos planares podem ter o que chamaremos de *vértices livres*, como no grafo à esquerda da Figura 1.18, onde podemos ver um vértice de grau 1.

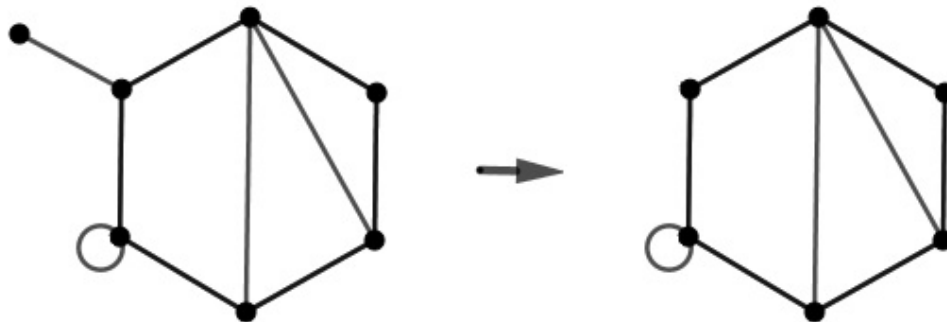


Figura 1.18 Remoção de um vértice livre

Removendo este vértice livre, e a aresta que o tem como extremo, teremos um novo grafo, o da direita, com v' vértices, a' arestas e f' faces, sendo que $v' = v - 1$, $a' = a - 1$ e $f' = f$. Daí, temos que:

$$v' - a' + f' = (v - 1) - (a - 1) + f = v - a + f$$

Se o novo grafo, assim obtido, continuar a ter vértices livres, continuamos a removê-los, mantendo constante o número de Euler $v - a + f$.

O novo grafo terá algum caminho fechado se for como o da Figura 1.18, sem vértices livres. Ou seja, partimos de um vértice qualquer, que será considerado extremidade inicial, a fim de construirmos um caminho no grafo. Escolhemos qualquer aresta deste vértice para iniciar e, para cada vértice visitado, escolhemos uma nova aresta (não usada anteriormente), como extremo, para prosseguir.

Em algum momento, não haverá mais arestas disponíveis, pois o grafo é finito, e o caminho será terminado. Como o grafo não tem vértices livres, o último vértice visitado desse caminho será um vértice visitado anteriormente. Com isto, o caminho terá, no mínimo, um de seus vértices visitado duas vezes. Assim, o primeiro vértice do caminho que é visitado pela segunda vez é a extremidade final de um caminho fechado no grafo.

Removendo uma aresta de um caminho fechado, como no grafo da Figura 1.18, podemos ter uma das situações da Figura 1.19.

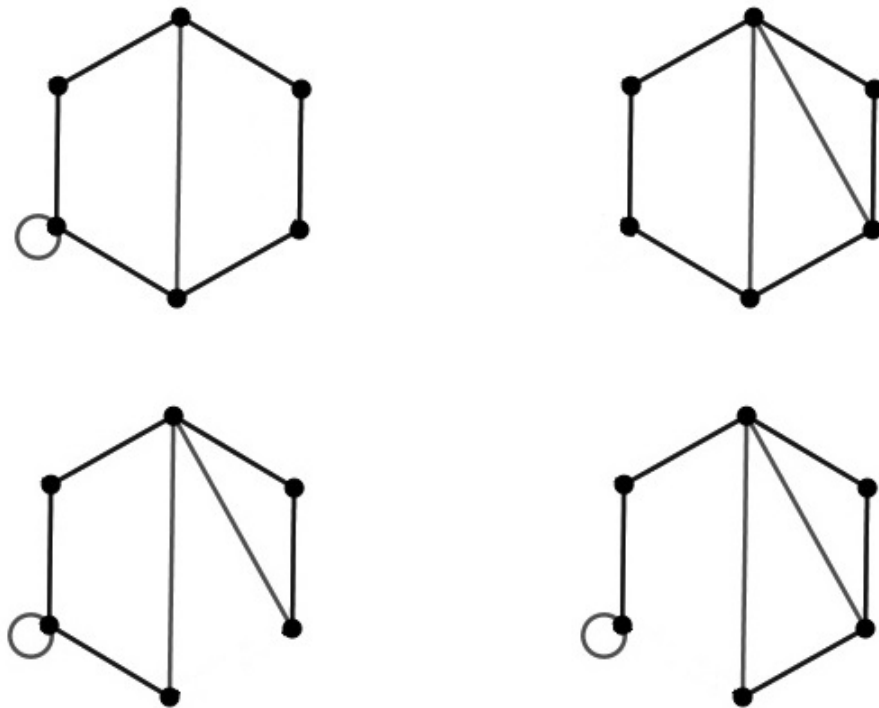


Figura 1.19 Remoção de arestas de um caminho fechado

Notemos, então, que sendo v'' , a'' e f'' os números de vértices, arestas e faces do novo grafo, teremos $v'' = v$, $a'' = a - 1$, e $f'' = f - 1$. Não havendo vértices livres, a remoção de alguma aresta provoca diminuição do número de faces, pela união em uma única face, das duas faces que a contém. Aqui usamos implicitamente o Teorema de Jordan para curvas simples fechadas: toda curva simples fechada divide o plano em duas regiões, uma limitada (interior à curva) e outra ilimitada (exterior à curva), sendo o traço da curva a fronteira comum das duas regiões. Ou seja, todo ponto do plano estará ou na curva ou em uma das duas regiões conexas separadas pela curva. Embora o enunciado do Teorema de Jordan seja simples, a demonstração é trabalhosa e necessita de conceitos de topologia, o que foge do nosso trabalho, mas pode ser conferido em [7].

Podemos observar que removendo uma aresta de um caminho fechado, o grafo continua conexo.

Neste caso teremos:

$$v'' - a'' + f'' = v - (a - 1) + (f - 1) = v - a + f$$

Assim, removendo continuamente as arestas com vértices livres, quando existirem, e as arestas de caminhos fechados, quando não houver vértices livres, preservamos o número de Euler $v - a + f$. Finalmente, chegaremos a um grafo com uma só aresta, quando teremos $v = 2$ e $a = f = 1$, ou $v = a = 1$ e $f = 2$ e, portanto, $v - a + f = 2$. Logo, para o grafo original, temos também que $v - a + f = 2$. \square

Podemos considerar um mapa qualquer como um grafo planar, no qual cada região (país, cidade etc) pode ser considerada uma face. Assim, cada região tem a fronteira representada por uma aresta. Com isto, podemos mostrar que todo mapa tem um país com, no máximo, cinco vizinhos. Tal demonstração é devida a Alfred Bray Kempe, e foi parte da sua demonstração do Teorema das Quatro Cores, aproveitada como lema para o Teorema das Cinco Cores, conforme [8].

Lema 1.4.2 (*Teorema de Kempe*). *Todo mapa tem uma face com, no máximo, cinco arestas.*

Demonstração. Suponhamos que um determinado mapa tenha v vértices, a arestas e f faces. Suponhamos, também, que cada vértice deste mapa tenha grau ≥ 3 e cada aresta tenha dois vértices distintos como extremidades.

Assim, multiplicando-se a quantidade total de vértices por 3, teremos o menor número de extremidades de arestas do mapa, ou seja,

$$3v \leq 2a$$

O que implica em

$$3v - 2a \leq 0$$

Pelo Lema 1.4.1, temos $v - a + f = 2$, e então, como $3v \leq 2a$, temos

$$6 = 3v - 3a + 3f \leq 2a - 3a + 3f = 3f - a$$

E, assim,

$$3f - a \geq 6$$

Seja f a quantidade de faces do mapa, as quais podemos chamar de face 1, face 2, ... , face f . Consideremos, assim, que a face 1 tem a_1 arestas (lados), a face 2 tem a_2

arestas, ..., e a face f tem a_f arestas. O número

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_f)}{f}$$

expressa, então, o número médio de arestas por face.

Como na soma $a_1 + a_2 + \dots + a_f$ cada aresta é contada duas vezes, já que em um mapa cada aresta é compartilhada por duas faces, temos que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_f = 2a$$

onde a representa a quantidade total de arestas.

Logo, a média de arestas por face pode ser dada por

$$\frac{2a}{f}$$

Daí, como

$$3f - a \geq 6$$

Temos que

$$a \leq 3f - 6$$

E, então,

$$2a \leq 6f - 12$$

Daí,

$$\frac{2a}{f} \leq 6 - \frac{12}{f}$$

Como

$$\frac{2a}{f} < \frac{2a}{f} + \frac{12}{f} \leq 6$$

Concluimos que

$$\frac{2a}{f} < 6$$

Sendo a média de arestas por face, $\frac{2a}{f}$, menor que 6, concluimos que alguma face do mapa terá menos que 6 arestas. Portanto, o mapa tem alguma face com 2, 3, 4 ou 5 arestas.

□

É importante considerarmos a hipótese de cada vértice ter grau ≥ 3 porque, como podemos ver na Figura 1.20, onde o mapa (a) tem vértices com grau 2, que todas as faces tem seis ou mais arestas. Já o mapa (b), que satisfaz a nossa hipótese, nos mostra que pelo menos uma face (seis, neste caso) tem até quatro vizinhos.

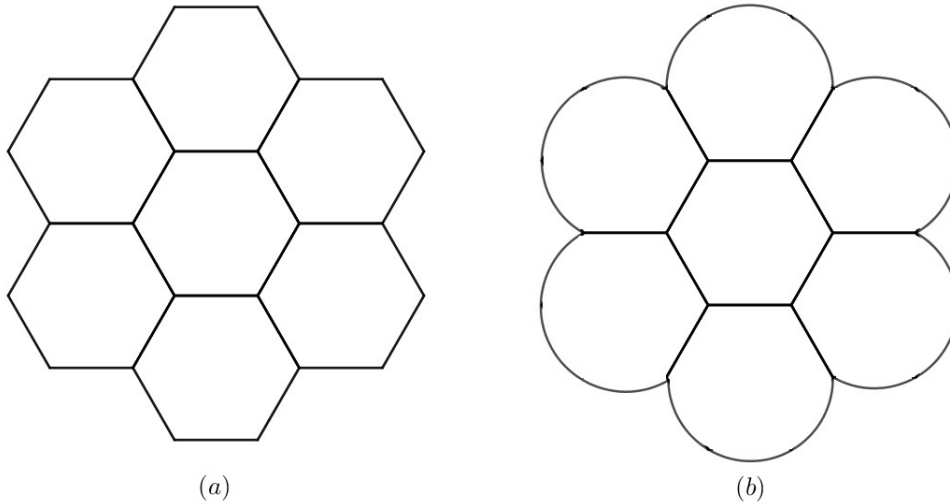


Figura 1.20

Lema 1.4.3. *Um grafo completo de 5 vértices (K_5) não pode ser planar.*

Demonstração. Suponhamos que exista um grafo de 5 vértices que seja planar. Assim, sua representação no plano determina um mapa tal que sua quantidade de vértices e arestas são dadas por $v = 5$ e $a = 10$, respectivamente. Além disso, a quantidade f de faces é dada pelo Lema 1.4.1:

$$f = 2 - v + a = 2 - 5 + 10 = 7$$

As arestas que definem a fronteira de cada país constituem um caminho simples fechado. No grafo de 5 vértices, toda aresta é parte de um caminho fechado e cada caminho fechado tem no mínimo 3 arestas, como podemos conferir na Figura 1.21.

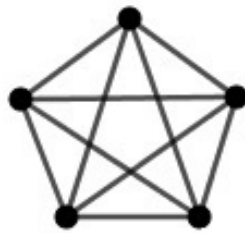


Figura 1.21

Portanto, cada país desse mapa tem um mínimo de 3 arestas em sua fronteira. No entanto, considerando o número médio de arestas por face, $\frac{2a}{f}$, temos

$$\frac{2a}{f} = \frac{20}{7} < 3$$

ou seja, alguma face tem menos que três arestas, o que torna impossível desmontar este grafo e reconstruí-lo no plano. Logo, um grafo completo de 5 vértices não pode ser planar.

□

Lema 1.4.4. [Kempe] Tomando cinco regiões quaisquer de um mapa, pelo menos duas delas não são vizinhas entre si.

Demonstração. Sejam cinco países de um mapa qualquer como, por exemplo, os representados na Figura 1.22, onde fazemos corresponder a cada país, um vértice e a cada fronteira, uma aresta, de modo que dois países são vizinhos quando estão conectados por uma aresta.

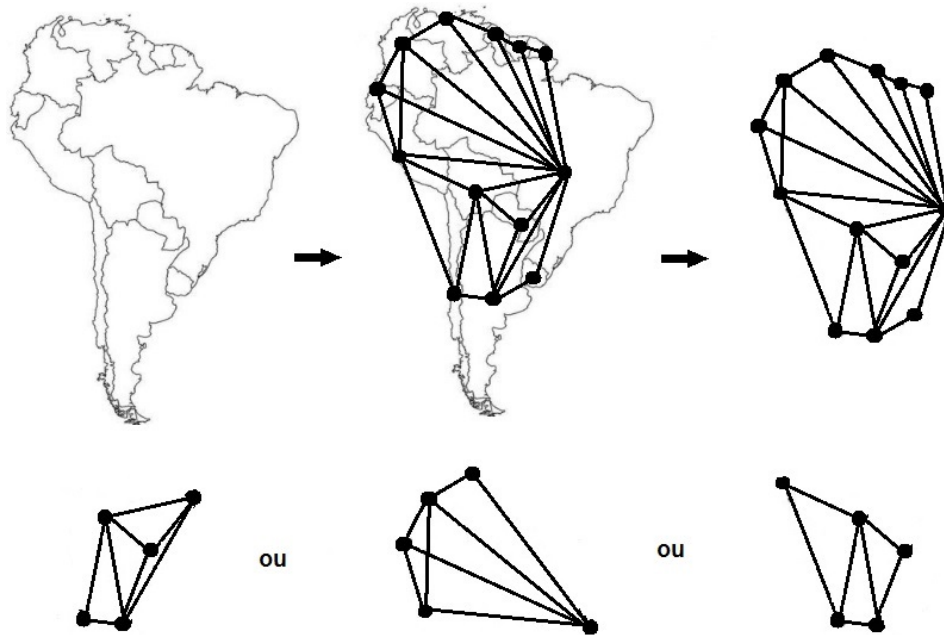


Figura 1.22 Aqui temos 1287 maneiras de escolher 5 países quaisquer

Se esses cinco países forem vizinhos entre si, os cinco vértices no grafo correspondente estarão, dois a dois, ligados por arestas, todas em um plano. Esses cinco vértices e suas arestas formarão, então, um grafo completo de cinco vértices. Como um grafo completo de 5 vértices não é planar, como mostramos no Lema 1.4.3, dentre esses cinco vértices há pelo menos dois que não são conectados por uma aresta. Portanto, dois dos cinco países não são vizinhos.

□

Teorema 1.4.5 (Teorema das Cinco Cores). [Heawood] Todo mapa no plano pode ser colorido com até cinco cores.

Demonstração. Por indução sobre um natural n .

Seja n o número de países (faces) do mapa. Se $n \leq 5$, então podemos associar a cada país uma cor, de modo que ele pode ser colorido com até cinco cores, conforme a Figura 1.23.

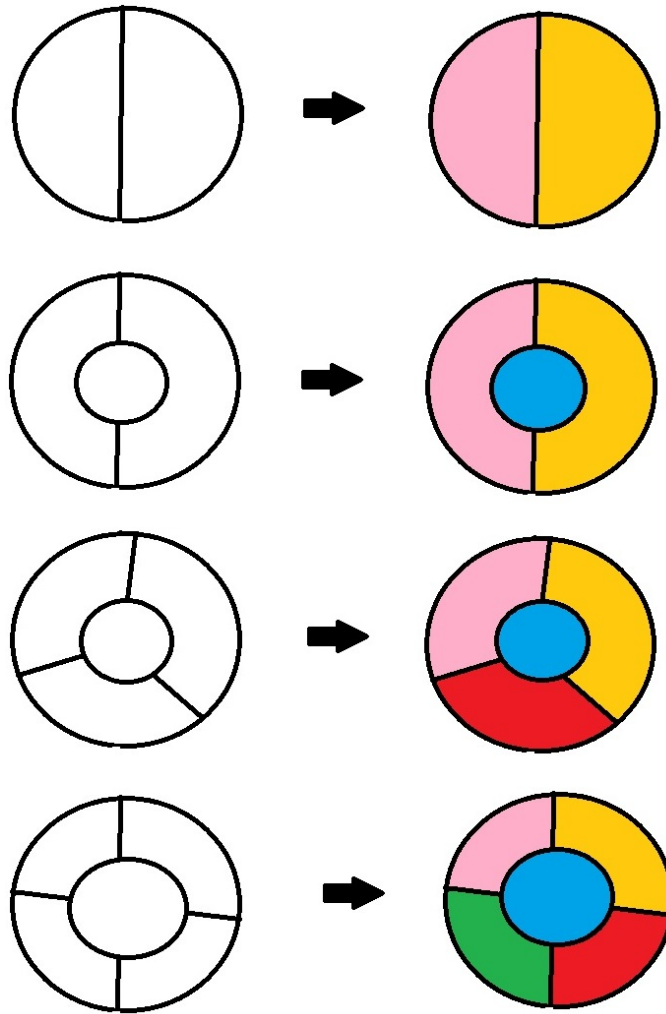


Figura 1.23 Colorindo mapas com 2, 3, 4 e 5 países

Agora, seja $n > 5$, vamos mostrar que se todo mapa com até n países pode ser colorido com 5 cores, então todo mapa com $n + 1$ países também pode ser colorido com 5 cores.

Tomemos, então, um mapa com $n + 1$ países. Pelo Lema 1.4.2, este mapa tem um país P com, no máximo, 5 vizinhos (arestas). Se reduzirmos este país, como mostrado na Figura 1.24, até que ele se torne um vértice, seus vizinhos preservarão a mesma configuração de vizinhança que tinham antes da redução.

Assim, P que tinha, no máximo, 5 vizinhos, desaparece e passamos a ter n países, os quais podemos colorir com 5 cores, de acordo com a nossa hipótese de indução.

Colorimos, então, o novo mapa com 5 cores.

Se P for circundado por 2 países, por 3 países ou por 4 países, colorimos com duas, três ou quatro cores distintas, respectivamente, como mostrado na Figura 1.24.

Assim, ao expandirmos P , de modo que ele volte a aparecer, podemos atribuir-lhe uma cor não usada nos seus vizinhos. No maior caso, esta seria a quinta cor.

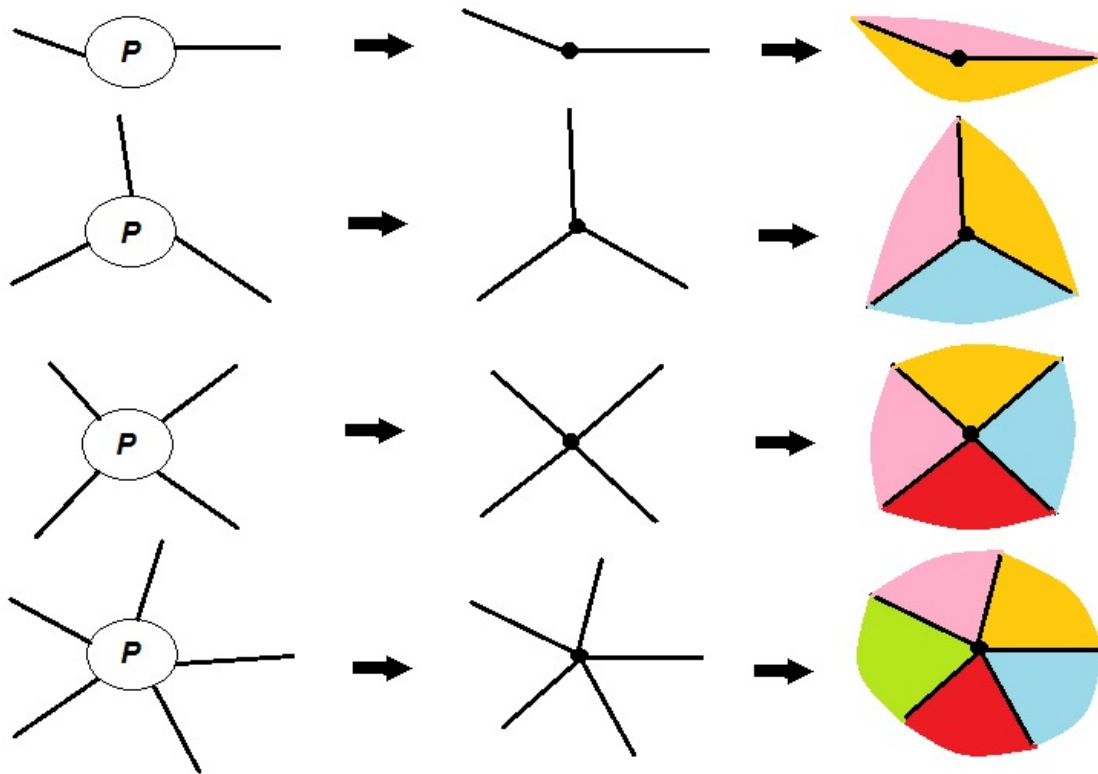


Figura 1.24 Grafos de um mapa com $n + 1$ países, onde P é um país com 2, 3, 4 ou, no máximo, 5 vizinhos, e suas respectivas colorações

No caso em que P tenha 5 vizinhos, conforme último grafo da Figura 1.24, podem ocorrer duas situações:

Na primeira, dois vizinhos de P podem pertencer a uma mesma face, como ilustrado na Figura 1.25.

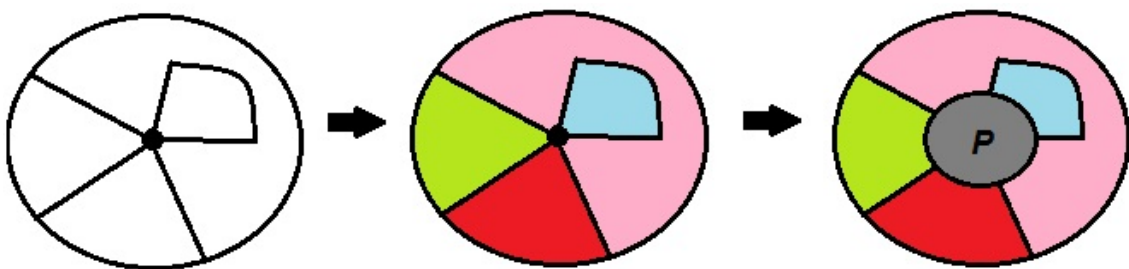


Figura 1.25 Colorindo um mapa em que duas fronteiras do país P são o mesmo país (em rosa)

Assim, o mapa reduzido a n países pode ser colorido com 4 cores. Após a expansão de P , podemos atribuir à ele a quinta cor distinta das demais.

Na segunda, os cinco vizinhos de P são cinco países diferentes. Neste caso, pelo Lema 1.4.4, dois desses países não são vizinhos. Com isto, suponhamos que esses países sejam A e B , como na Figura 1.26.

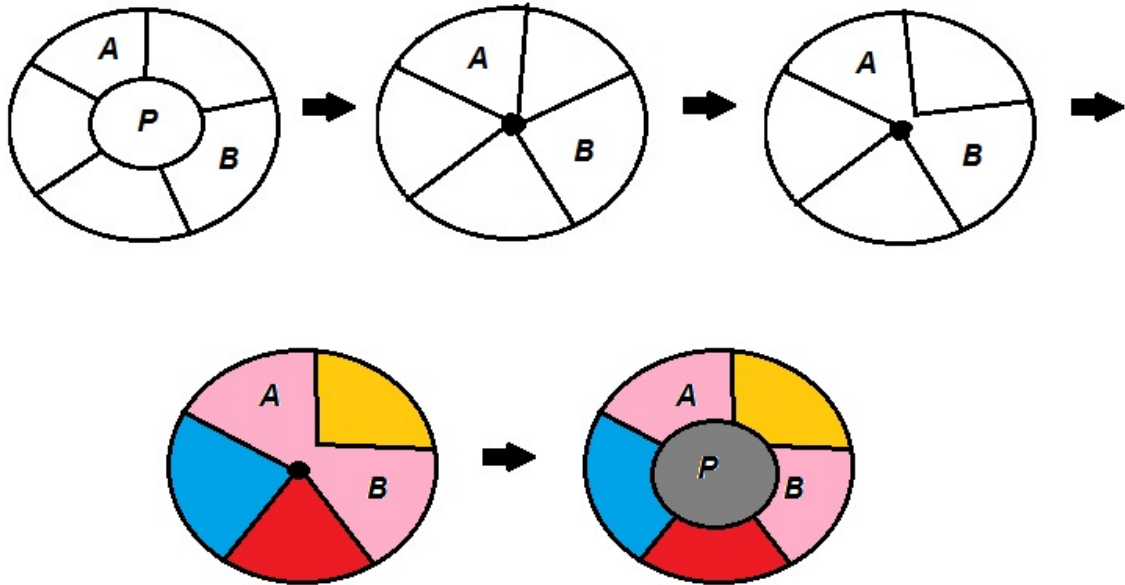


Figura 1.26

Se abrirmos uma passagem próxima ao vértice P , teremos um mapa com $n - 1$ países, que pode ser colorido com quatro cores distintas. Desfazendo a passagem, teremos cinco países, dois com a mesma cor. Assim, em volta de P temos quatro cores distintas. Retornando o país P ao mapa, podemos colori-lo com a quinta cor.

Com isto, mostramos que se todo mapa com até n países pode ser colorido com 5 cores, então todo mapa com $n + 1$ países também pode. Portanto, podemos colorir qualquer mapa com até cinco cores. \square

1.5 Computadores e o Teorema das Quatro Cores

Mesmo com o êxito da demonstração do Teorema das Cinco Cores, o problema das quatro cores continuava ruminando as mentes de muitos matemáticos. Alguns conseguiram demonstrar a validade do Teorema para mapas com uma quantidade mínima de faces, o que indicou a alta probabilidade de o Teorema ser verdadeiro.

Em 1º de abril de 1975, Martin Gardner, então editor de jogos de matemática da revista *Scientific American*, publicou o mapa da Figura 1.27, sobre o qual afirmava que quatro cores distintas não eram suficientes para colori-lo.

Muitos ficaram intrigados com a brincadeira, até que um ano depois, em 1976, os matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken divulgaram que, utilizando um computador IBM 360, conseguiram demonstrar o Teorema das Quatro Cores. O computador de grande porte levou aproximadamente seis meses para fazer a demonstração.

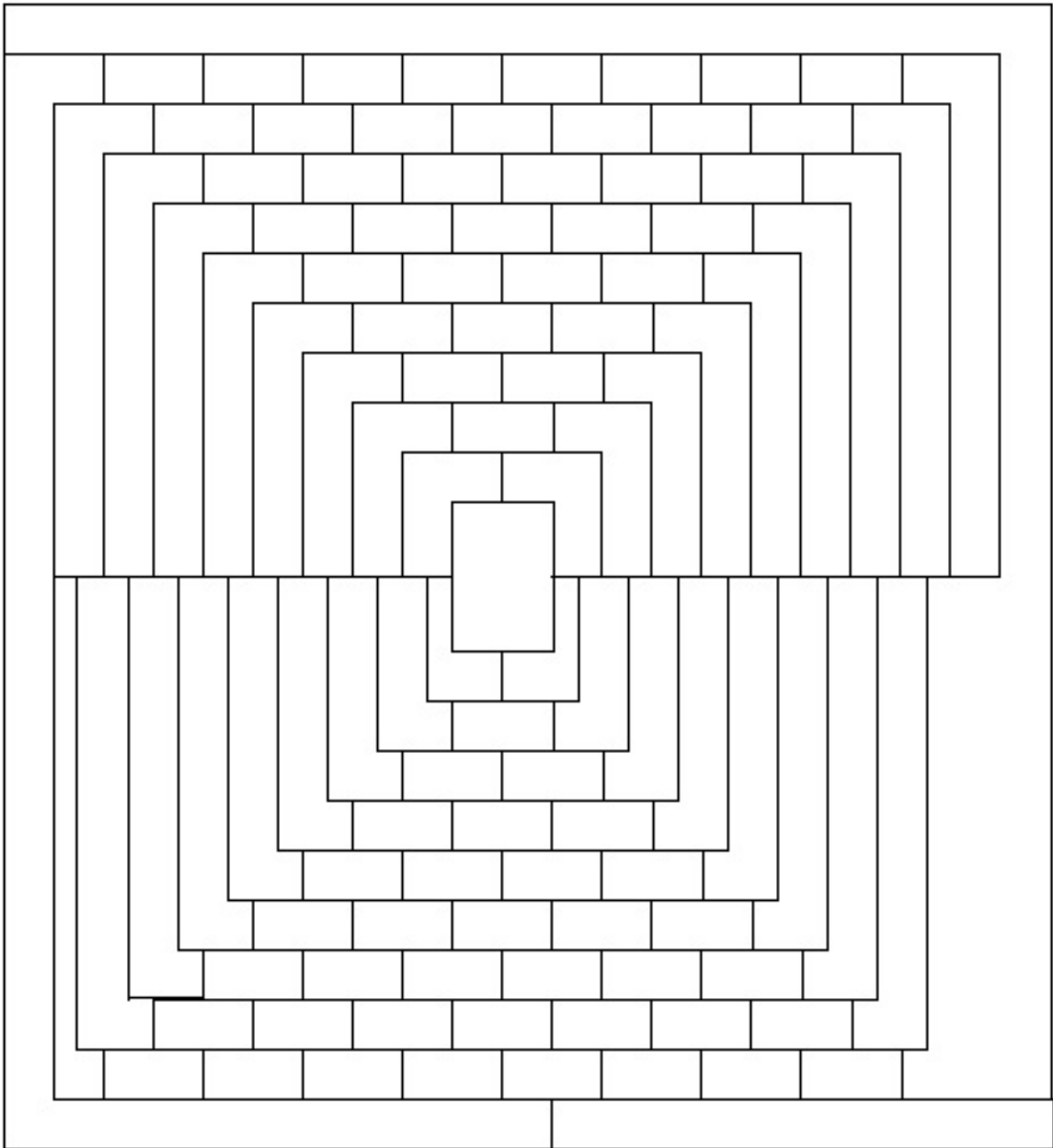


Figura 1.27 do mathforum.org

Appel e Haken usaram a maioria das ideias básicas da demonstração de Kempe para o Teorema das Quatro Cores, mas os detalhes sobre as falhas de Kempe e tudo o que foi aproveitado por Appel e Haken, foge do objetivo do nosso trabalho, porém podem ser lidos em [9].

O que vale ressaltar aqui é que a dupla Appel e Haken, tentou elaborar os esforços de Kempe, partindo dos procedimentos corretos utilizados por este, usando a mesma estrutura de demonstração, a técnica da redução ao absurdo e, ao invés de usar quatro casos de configurações mínimas, como Kempe tentou fazer, usaram 1478 casos, que foram inspecionados pelo computador.

Em 1993, uma demonstração mais reduzida num conjunto de 633 casos foi apresentada pelos matemáticos Neil Robertson, Daniel Sander, Paul Seymour e Robin Thomas, também através da computação, mostrando que talvez o Teorema das Quatro Cores nunca

venha a ser demonstrado da maneira tradicional, sendo o primeiro caso de uma nova era de teoremas, os do tipo que só são possíveis de serem demonstrados com a ajuda dos computadores, o que pode ser lido com mais detalhes em [8].

Assim que a demonstração de Appel e Haken foi divulgada, iniciou-se uma grande discussão sobre o uso dos computadores na matemática, que perdura até hoje, porque a prova do Teorema das Quatro Cores é assistida por um computador na parte crítica de reduzir e descartar as configurações de 1478 casos o que, por causa da sua imensidão, parece estar além da capacidade humana de ser conferida. E aí entra outra grande dúvida: será que os computadores merecem um papel na matemática pura?

É um questionamento filosófico, afinal o primeiro a se manifestar contra a demonstração de Appel e Haken, através do polêmico artigo “O problema das quatro cores e seu significado filosófico”, publicado no *Journal of Philosophy* em 1979, foi o filósofo Thomas Tymoczko, que questionou se demonstrações com computadores seriam viáveis uma vez que “toda demonstração matemática deve ser inspecionável, convincente e formalizada”, como podemos ler em [10]. Tymoczko sugeriu que os computadores podem ter “bugs” ou falhas que passam despercebidas por um longo período, e o seu uso deve ser unicamente experimental por estar abaixo dos rigorosos argumentos matemáticos.

A demonstração de Appel e Haken foi completamente rejeitada como um Teorema por matemáticos renomados, como o inglês Frank Bonsall, por exemplo, que afirmou considerar as demonstrações matemáticas que usam recursos computacionais como “pseudo matemática”. Para outros matemáticos a aceitação dos computadores significa que a definição de demonstração matemática precisa ser repensada e redefinida por toda comunidade matemática.

Como errar é humano e os computadores são feitos por humanos, essas máquinas também estão sujeitas a cometer erros. A matemática sul africana Henda Swart afirmou, em 1980, que as falhas que podem ocorrer nos computadores são na implementação dos algoritmos, e não passam de erros de lógica, assim como as falhas nas demonstrações feitas manualmente, que não tem nada a ver com computadores. Com isto há de se considerar que demonstrações convencionais podem ser comparadas às feitas pelos computadores. Ambas são baseadas em sentenças lógicas que são convincentes e axiomáticas, por natureza. De acordo com o matemático inglês Philip Davis, citado em [10], podemos considerar que os axiomas são a “entrada”, o teorema é a “saída” e a demonstração é o “processamento do programa”. De acordo com o matemático Davis tarefa de encontrar uma demonstração é a mesma de encontrar um “programa”. Verificar uma demonstração dada precisamos apenas rodar o programa novamente.

Apesar das opiniões que expusemos aqui, como curiosidade, existem muitas outras que defendem ou não as demonstrações com computadores, mas acreditamos que o uso das máquinas só diminui a elegância das demonstrações, sem desonrar a infalibilidade das demonstrações matemáticas. Achamos que os computadores deveriam ser considerados

como ferramentas que contribuem para o desenvolvimento da matemática pura.

1.6 Grafos Hamiltonianos

1.6.1 A Voyage Around the World

Em 1856, o matemático irlandês William Rowan Hamilton divulgou o jogo *a voyage around the world*, uma viagem ao redor do mundo, numa tradução livre. Seu objetivo é percorrer as arestas de um determinado grafo, passando uma e somente uma única vez por cada um de seus vértices (países).

O grafo do jogo é uma projeção de um dodecaedro regular no plano, como o representado na Figura 1.28, onde podemos ver que a solução aparece em vermelho.

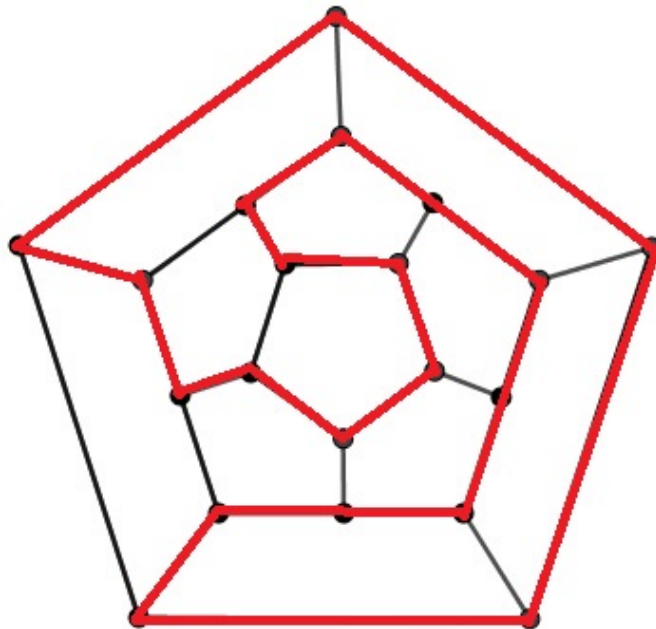


Figura 1.28 Jogo *voyage around the world*

E aqui está a diferença entre grafos hamiltonianos e eulerianos. Enquanto o jogo de Hamilton consiste em encontrar um caminho que passe por todas os vértices de um grafo exatamente uma vez, o problema de Euler, das pontes de Königsberg, consiste em encontrar um caminho que passe por todas as arestas uma única vez.

Assim, um grafo é hamiltoniano se existe um caminho que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no caminho. Este caminho é chamado de caminho hamiltoniano. Sendo assim, um grafo é hamiltoniano se ele contiver um caminho hamiltoniano.

Não existem condições de existência para determinar se um grafo é hamiltoniano. Há diversos teoremas específicos para determinados tipos de grafos, os quais fornecem condições que são, na maior parte dos casos, suficientes, porém não necessárias.

1.7 O Algoritmo de Dijkstra

Muitos problemas de otimização consistem em encontrar um subgrafo com uma quantidade mínima ou máxima de peso. Para este trabalho criamos atividades em que o peso se refere à soma dos pesos das arestas de um caminho em um grafo valorado, que correspondem às distâncias entre cidades. Assim, o peso de um caminho mínimo entre dois vértices U e V será chamado de distância mínima entre os vértices U e V denotada por $d(U, V)$ e o peso de cada aresta VW chamaremos $c(VW)$, para indicar o peso da aresta delimitada pelos vértices V e W . Assumiremos também que todos os pesos são positivos.

O algoritmo a ser descrito foi descoberto pelo cientista de computação holandês Edsger Dijkstra em 1959, de acordo com [4]. Ele encontra não só o menor caminho entre dois vértices, como também os menores caminhos do vértice de partida U_0 para todos os outros vértices de um grafo valorado G . A base da ideia do algoritmo é a seguinte: se \mathcal{P} é um caminho do vértice V ao vértice W e o vértice A pertencente a este caminho \mathcal{P} , então a parte de \mathcal{P} que vai de V até A é um caminho mínimo entre V e A . Em caso contrário, existiria um caminho mínimo \mathcal{Q} de V até A que concatenado com a parte de \mathcal{P} que vai de A até W seria um caminho de V a W menor do que \mathcal{P} , que é caminho mínimo, o que seria um absurdo. Isto acontece porque caminhos mínimos têm o que chamamos de Propriedade de Subestrutura Ótima, que é exatamente o que foi descrito.

A ideia do algoritmo é calcular e manter $d(V)$, ou seja, distância do menor caminho do vértice de partida U_0 a um vértice V do grafo. Para tal, usaremos o conjunto \mathcal{S} dos vértices resolvidos, ou circulados, como chamamos em nossa atividade proposta sobre este algoritmo. Este conjunto recebe os vértices de G cujas distâncias mínimas do vértice de partida U_0 até ele já foram determinadas.

O algoritmo tem como entrada o grafo $G(V, E)$, um custo atribuído a cada aresta em $E(G)$ $c : E \rightarrow \mathbb{Q}_+$ e $U_0 \in V(G)$. A saída é a distância $d(X)$ de U_0 até X , para cada vértice $X \in V(G)$. Sendo \mathcal{S} o conjunto dos vértices resolvidos (ou circulados), \mathcal{I} o conjunto dos que ainda não estão resolvidos e $\pi(X)$ o vértice antecessor de X no menor caminho de U_0 até X , as atribuições iniciais do algoritmo são as seguintes:

1. $d(U_0) = 0; \pi(U_0) = U_0$
2. Para cada $X \in V(G) - \{U_0\}$, faça $d(X) = \infty$
3. $\mathcal{I} = V(G)$
4. $\mathcal{S} = \emptyset$

Em seguida, denotamos por $c(UV)$ o peso da aresta UV ; $Adj(X)$ o conjunto dos vértices vizinhos do vértice X ; $d(X)$ a distância do menor caminho do vértice de partida U_0 a um vértice X do grafo; e por $Extrai_{min}(I, d)$ a operação de buscar dentre os vértices em \mathcal{I} o que tem o menor valor $d(X)$. Com isto, descrevemos o restante do algoritmo:

Enquanto $\mathcal{I} \neq \emptyset$

$$U = \text{Extrai}_{\min}(I, d)$$

Para cada $V \in \text{Adj}(U) \cap \mathcal{I}$ faça

Se $d(U) + c(UV) < d(V)$ então

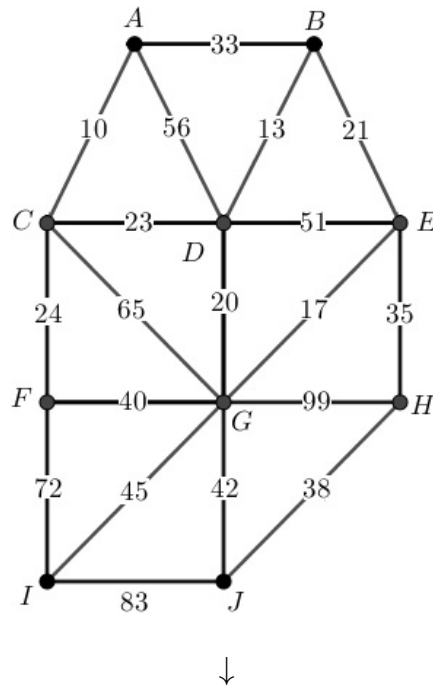
$$d(V) = d(U) + c(UV)$$

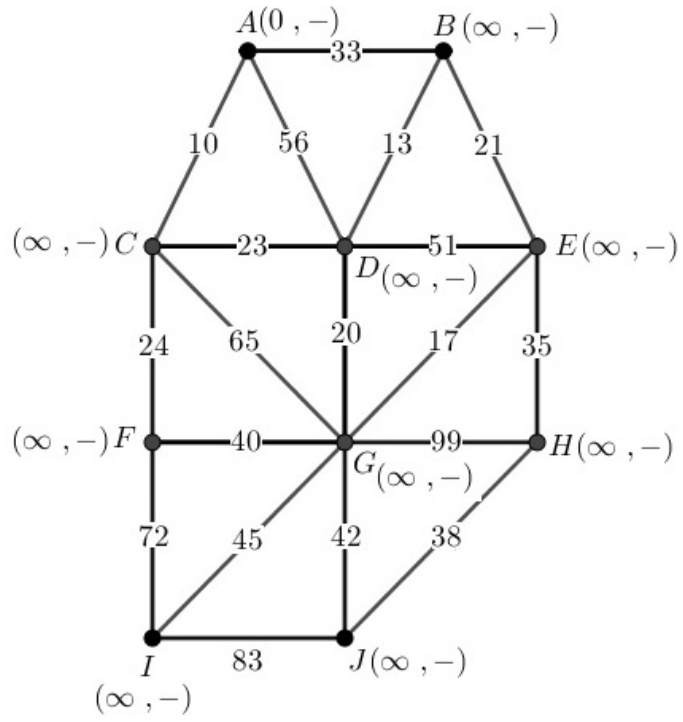
$$\pi(V) = U$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{U\}$$

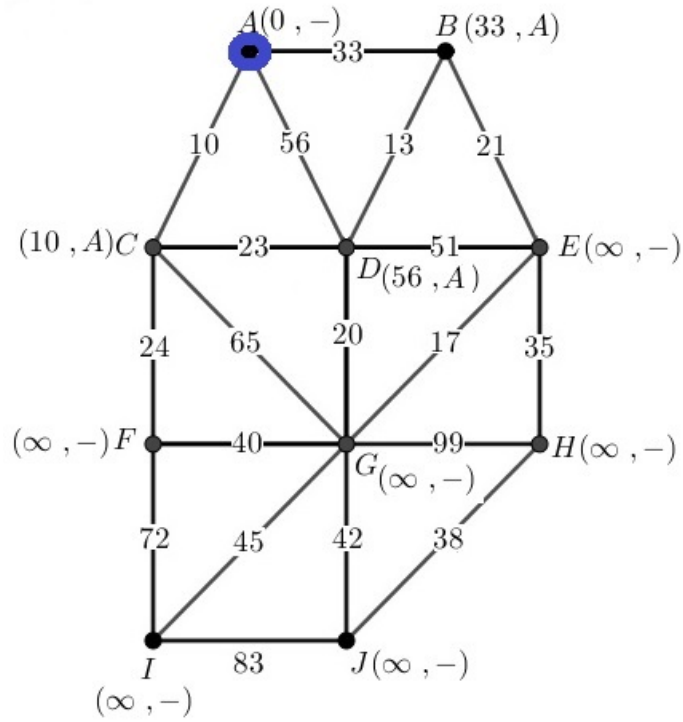
No exemplo a seguir, bem como na atividade proposta no Capítulo 3, para facilitar a visualização das mudanças de $d(X)$ e de $\pi(X)$, para cada vértice X , ao longo das iterações do algoritmo, rotulamos os vértices com um par ordenado do tipo $(d(X), \pi(X))$.

As figuras seguintes ilustram as iterações do algoritmo para descobrir o menor caminho do vértice A ao vértice J .

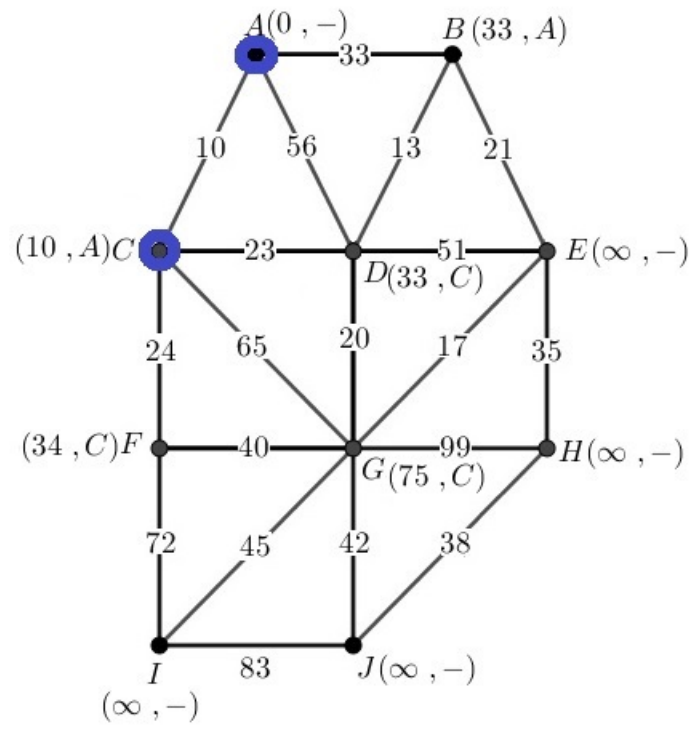




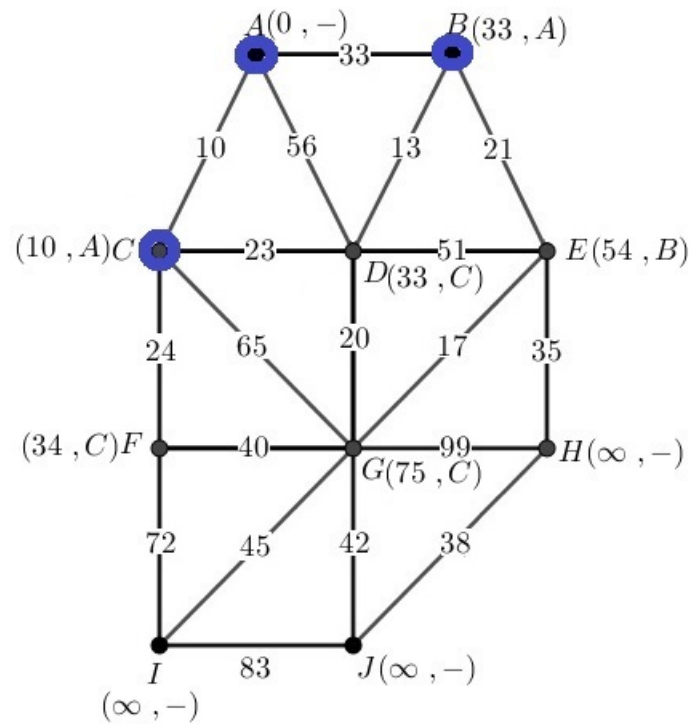
↓



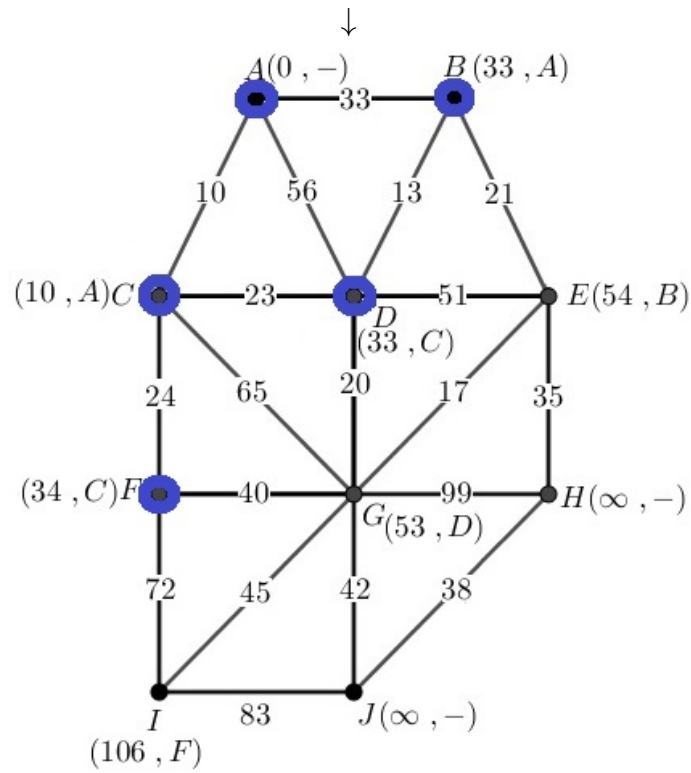
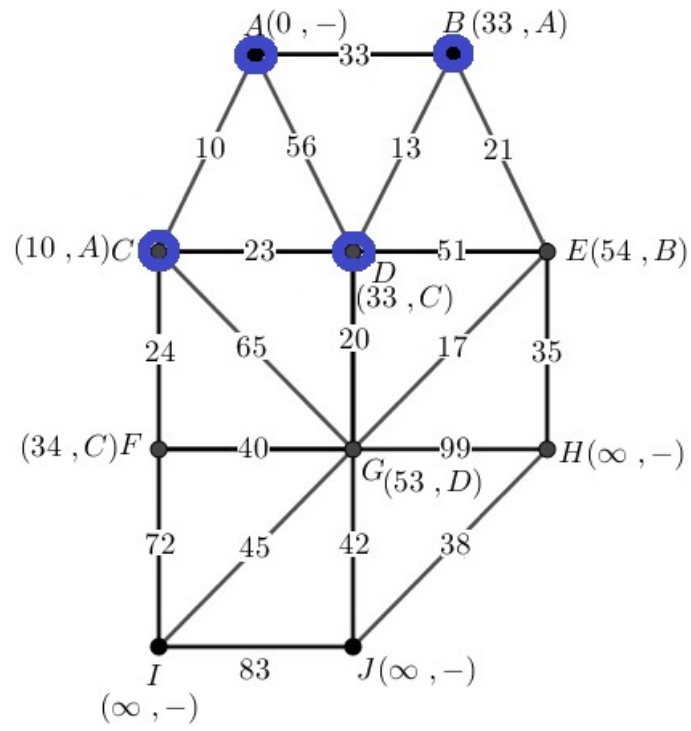
↓

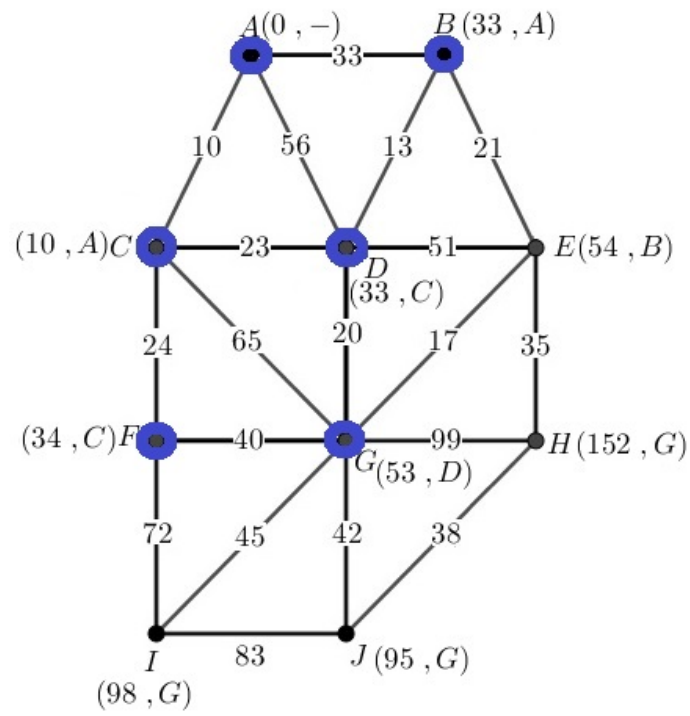


↓

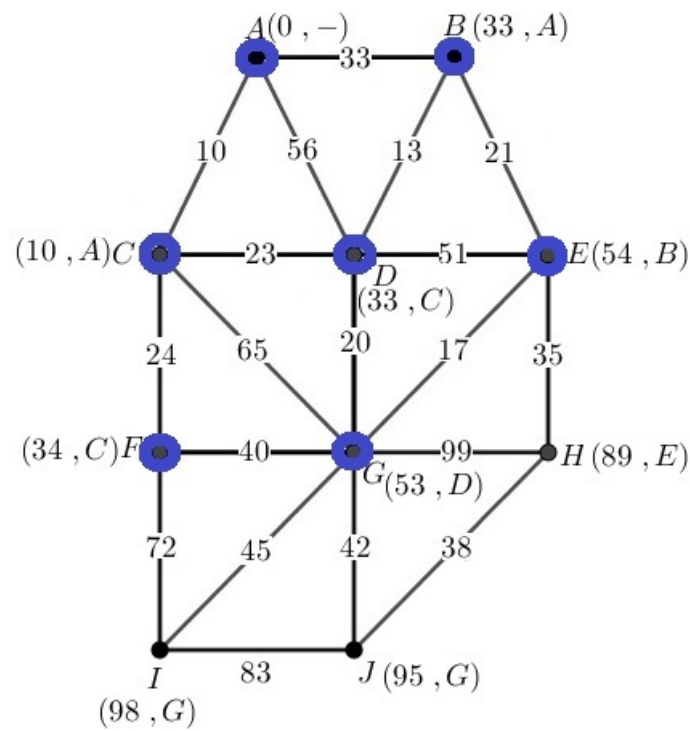


↓

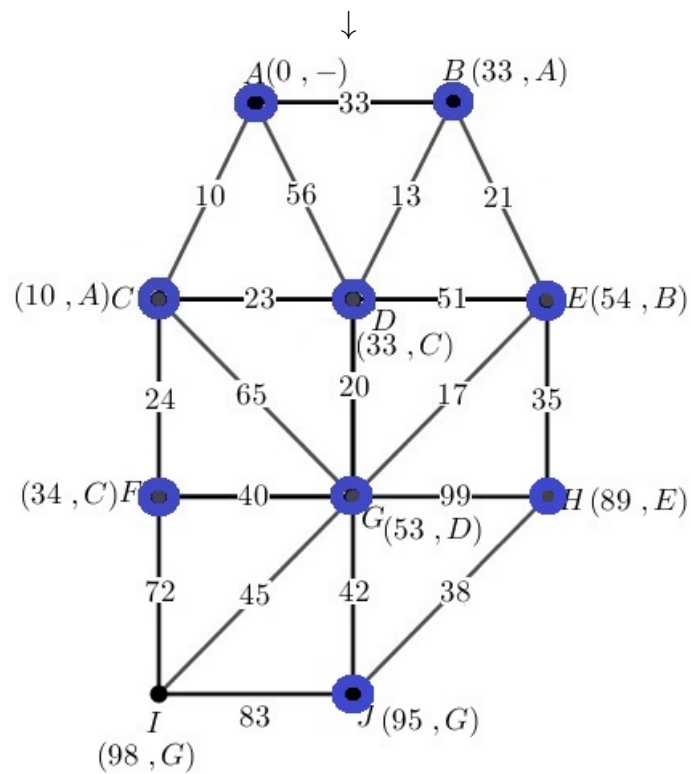
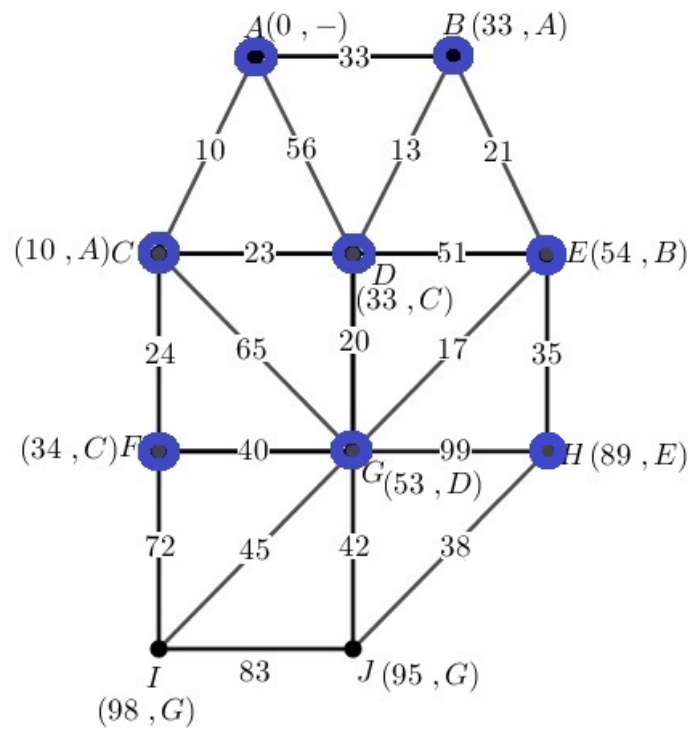




↓



↓



Logo, o menor caminho é a sequência $ACDGJ$

Quando o algoritmo termina, a distância de U_0 até X é dada pelo valor final no rótulo de X e, para determinar qual é este menor caminho, basta acompanhar cada $\pi(X)$ até chegarmos a U_0 . Note que, se o interesse é determinar a distância a um vértice específico, V_i , paramos assim que V_i for inserido no conjunto \mathcal{S} .

Outro importante algoritmo que poderia ser usado também nas atividades para a

educação básica é o de Floyd-Warshall, que é um algoritmo que determina o caminho de menor custo entre todos os vértices de um grafo. Mais detalhes deste algoritmo e de sua utilização podem ser encontrados em [11].

2 GRAFOS NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

2.1 Ideias precursoras

Os professores Jorge Bria e Ivail Muniz são nomes conhecidos na aplicação de grafos na Educação Básica, pelo menos nas propostas de atividades e experiências realizadas, pois o tema não está inserido nos documentos oficiais que norteiam nossa Educação. Após seus trabalhos publicados, suas ideias foram amplamente divulgadas e enriquecidas de mais pesquisas, principalmente em dissertações de mestrado, como mostraremos mais adiante, através de dados coletados em repositórios da internet.

O primeiro a sugerir a introdução de grafos no Ensino Fundamental e Médio foi Jorge Bria em 2001, com sua tese fundamentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na teoria epistemológica de Piaget. Bria justificou que os acontecimentos da época, globalização, computação, problemas ambientais e comportamentais indicavam a necessidade de novos conteúdos na Escola ou de novas formas de abordagem dos conteúdos consagrados, formas que se adequassem à realidade da época. O professor Bria criou atividades, de caráter computacional e algorítmico, e fez experiências bem sucedidas com o uso da Teoria dos Grafos, que são mais detalhadas em [12].

Em 2007, o professor Ivail Muniz publicou sua dissertação *Encontrando, Minimizando e Planejando percursos: Uma Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio* que viria a ser referência para muitas pesquisas posteriores, pois sugere a Teoria dos Grafos aplicada a temas da atualidade, apresentando para o Ensino Médio como uma ferramenta a ser usada na resolução de problemas de minimização e maximização. Em sua obra, Muniz defende a investigação matemática para a construção do conhecimento matemático com grafos. O professor traz atividades que envolvem processos algorítmicos. O objetivo dele é fazer com que o aluno entenda como um computador recebe as instruções para a resolução de um problema. A maioria das atividades é interdisciplinar, que possibilitam aos alunos o desenvolvimento das habilidades de explorar, analisar, modelar, generalizar etc. Sua pesquisa aliada às suas experiências com grafos em sala de aula, deram origem a um material didático intitulado *Grafos: Conceitos e Contextos para o Ensino Médio* [13].

Assim como Bria, Muniz aborda as dificuldades de trabalhar com a Teoria dos Grafos nas escolas, as mesmas que enfrentamos nos dias de hoje. Enquanto a tecnologia se desenvolve diariamente em todos os setores das nossas vidas, onde praticamente todas as nossas decisões são baseadas em processos algorítmicos, os cursos de formação de professores e as escolas ainda não aderiram às facilidades promovidas pela Teoria dos Grafos.

Hoje, as pesquisas dos professores Bria e Muniz são referência para a maioria dos estudos em grafos na educação. Com isto, adaptamos suas atividades para este trabalho,

associando as competências e habilidades da BNCC, o que pode ser conferido no capítulo 3.

2.2 BNCC

A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) é um conjunto de normas que estabelece *aprendizagens essenciais* que todos os alunos devem adquirir na Educação Básica. Foi divulgada no final de 2018 e entra em vigor em 2020, já fazendo parte do Novo Ensino Médio desde 2019, tendo sido elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento para ser um documento completo que descreve a parte comum nos currículos da escola básica no Brasil.

As aprendizagens essenciais listadas na BNCC devem garantir o desenvolvimento de *competências gerais* e *competências específicas*.

As aprendizagens essenciais são desenvolvidas através do que a BNCC chama de *objetos de conhecimento*, que são os conteúdos: razão e proporção, conjuntos numéricos, funções etc.

“Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (...)”

É imprescindível destacar que as competências gerais da Educação Básica, apresentadas a seguir, inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases (LDB). (...)”

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.” [1, p. 8].

Das dez competências gerais da BNCC, destacamos as competências nas quais a Teoria dos Grafos está relacionada:

- Competência Geral 1: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para

entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

- Competência Geral 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
 - Competência Geral 4: Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
 - Competência Geral 5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
- [1, p. 9]

As competências gerais são expressas em cada área (matemática, português, história etc) através das competências específicas de área, que devem ser desenvolvidas ao longo dos doze anos de Educação Básica.

Sobre as competências específicas da Matemática no Ensino Fundamental, podemos destacar, com referência somente à Teoria dos Grafos, as seguintes:

- Competência Específica 2: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Competência Específica 3: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- Competência Específica 5: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver proble-

mas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

- Competência Específica 6: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- Competência Específica 8: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. [1, p. 267]

De acordo com a BNCC, as competências acima são desenvolvidas quando os alunos adquirem aprendizagens essenciais chamadas *habilidades*. Cada habilidade é identificada através de um código alfanumérico, que pode ser explicado conforme descrição abaixo:



Como estamos interessados somente nas habilidades e competências que consideramos pertinentes à Teoria dos Grafos, as habilidades que identificamos no Ensino Fundamental são:

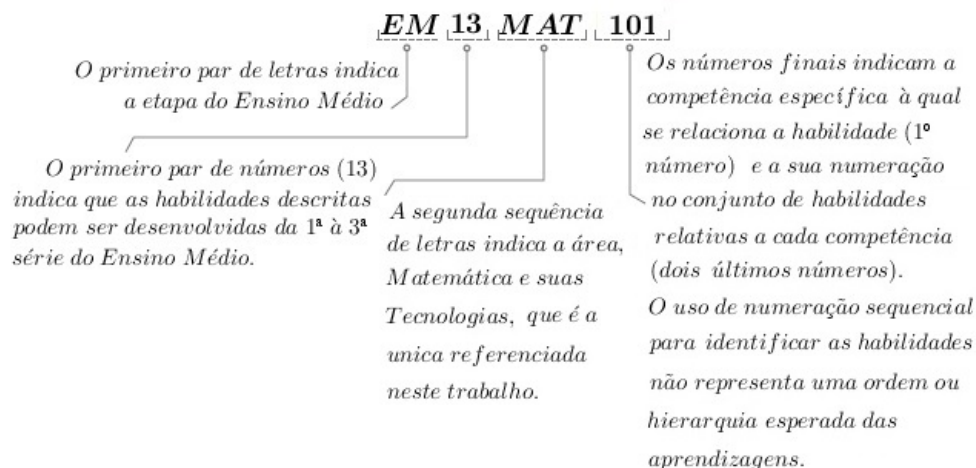
- (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados.
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. [1, p. 305-307]

Ainda no texto da BNCC, as competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio, são as mesmas do Ensino Fundamental, mas com foco na aplicação da matemática à realidade. Além disso, defende o uso de recursos tecnológicos na investigação matemática, como continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional iniciado na etapa anterior.

Para que as competências específicas do Ensino Médio sejam alcançadas, a BNCC afirma que os alunos devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, tudo o que motiva nossas atividades propostas no próximo capítulo.

Cada habilidade do Ensino Médio também é identificada através de um código alfanumérico, que pode ser traduzido como:



Assim, as competências específicas da matemática no Ensino Médio, com as respectivas habilidades nas quais a Teoria dos Grafos pode ser incluída são:

- Competência Específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
 - (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos. contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
- Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos

resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
- Competência Específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
 - (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
 - (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

[1, p. 531-539]

A nova estrutura do Ensino Médio traz uma flexibilização do currículo, que permite aos estudantes escolherem os assuntos de acordo com seus interesses, o que os tornam protagonistas do seu desenvolvimento escolar. Estes assuntos, entre os quais poderia constar a Teoria dos Grafos, são os chamados *Itinerários Formativos*, que têm a função de desenvolver o aprofundamento de conhecimentos estruturantes dentro das áreas do saber, como Matemática e suas tecnologias, por exemplo. E devem ser ofertados de acordo com a realidade local e os recursos físicos, materiais e humanos de cada escola, trazendo uma formação contemporânea que dialogue com a vida presente e futura dos alunos.

No currículo do Ensino Médio, os itinerários formativos são articulados aos conteúdos da formação geral básica, o que permite que também sejam orientados pelas competências específicas de cada área e pelas competências gerais.

Como já dissemos, o que garante o desenvolvimento das competências específicas, são as habilidades que estão relacionadas aos conteúdos, conceitos e processos. Assim, no próximo capítulo fazemos corresponder à cada atividade proposta a respectiva habilidade de acordo com as competências acima listadas.

2.3 Grafos nos cursos de Matemática

Pesquisamos, em [14], todas as universidades autorizadas pelo MEC a oferecer o curso de Matemática, na forma de bacharelado ou licenciatura. Encontramos 387 universidades que possuem o curso de Matemática ativo. Após procurarmos por Grafos nas matrizes curriculares de todos esses cursos, encontramos que a maioria das universidades oferta o assunto como tópico das disciplinas Matemática Discreta, Estruturas Algébricas, Métodos Numéricos, Programação e Algoritmos, de modo que nem todas universidades têm essas disciplinas e que somente Matemática Discreta pertence à matriz das licenciaturas, as demais disciplinas aparecem somente nos bacharelados.

Universidade	UF	Curso	Disciplina
IFAM	AM	Licenciatura	Teoria dos Grafos
IFMG	MG	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UERJ - FFP	RJ	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UERN	RN	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UFABC	SP	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UFABC	SP	Bacharelado	Teoria dos Grafos
UFF	RJ	Bacharelado	Teoria e Aplicação de Grafos
UFG	GO	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UFG	GO	Bacharelado	Teoria dos Grafos
UFPI	PI	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UFRRJ	RJ	Bacharelado	Teoria dos Grafos
UFRRJ	RJ	Licenciatura	Teoria dos Grafos
UFS	SE	Bacharelado	Introdução à Teoria dos Grafos
UFV	MG	Licenciatura	Introdução à Teoria dos Grafos
UNIRIO	RJ	Licenciatura	Teoria dos Grafos
USP - São Paulo	SP	Bacharelado	Grafos em Algoritmos
USP - São Carlos	SP	Bacharelado	Modelagem Computacional em Grafos
USP - São Paulo	SP	Licenciatura	Combinatória e Grafos
UTFPR	PR	Licenciatura	Introdução à Teoria dos Grafos

As universidades listadas acima são as que ofertam a Teoria dos Grafos em seus cursos, de acordo com os ementários oficiais de cada uma delas. Tradicionalmente, no

Brasil, a Teoria dos Grafos faz parte dos conteúdos dos cursos ligados à computação pela forma como foi introduzida no país. Porém, com o tempo e o avanço das ciências, a matemática e a computação se aproximaram e hoje só fazem sentido se vistas como complementares ou, para os mais radicais, como indissociáveis.

Acrescentamos que somente as universidades UFS e USP tem Teoria dos Grafos como disciplina obrigatória nos seus cursos de bacharelado. Nos demais cursos, inclusive de licenciatura, a disciplina é optativa.

Observamos que, fora os problemas de contagem, nenhuma das universidades citadas sugere, pelo menos em suas ementas, uma aplicação da Teoria dos Grafos na Educação Básica, o que vai contra as crescentes pesquisas e experiências de incluir o tema nas escolas. Mas este fato tem relação com a rejeição desta ideia até mesmo entre os pesquisadores em matemática.

Há um dilema curricular importante neste sentido. A questão é que já há uma quantidade considerável de conteúdos na matemática da escola básica então, que conteúdos deveriam ser retirados para que a Teoria dos Grafos estivesse presente na escola? Esta pergunta paralisou todos os esforços no sentido de tornar viável esta iniciativa.

Porém, vimos que ao longo dos anos, algumas avaliações acabaram norteando as discussões curriculares. Vejamos como exemplo o ensino de números complexos que não é conteúdo abordado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vem sendo ensinado após as provas deste exame como um conteúdo complementar nas turmas de terceiro ano do Ensino Médio. Outro fato importante que fez retornar a discussão curricular da inserção destes temas mais atuais foi o da implantação do Novo Ensino Médio norteado por uma Base Comum Curricular e que estimula o aprofundamento em itinerários formativos à escolha dos alunos. Esta fase do Ensino Médio permitiria que houvesse uma fase de aprofundamento em Matemática e suas Tecnologias.

Talvez seja necessária uma discussão mais ampla nos cursos de Licenciatura, até porque se os conteúdos forem ministrados na escola básica, é preciso que os professores os conheçam. Neste sentido, é importante ressaltar também que devem ser feitas ações de formação continuada dos professores que já atuam na escola.

E permanece uma dúvida muito natural sobre quais conteúdos seriam ministrados nesta etapa de aprofundamento do Ensino Médio, se farão parte de uma base comum nacional, como serão definidos, quem os definirá e como os professores poderão ser formados a fim de contemplar todas as possibilidades curriculares diferentes que podem aparecer neste cenário.

2.4 Grafos na Educação Básica

Analisando todos os currículos mínimos estaduais, de todos os estados brasileiros, em seus respectivos repositórios, verificamos que Teoria dos Grafos fez parte do chamado currículo base das escolas estaduais do Espírito Santo, de 2009 até 2019, ano em que houve a mais recente reforma da educação.

Em 16 de agosto de 2009, a Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo, SEDU-ES, lançou o Currículo Base da Escola Estadual que foi resultado do trabalho de 1,5 mil professores e profissionais da Educação. O então novo Currículo Escolar apresentava algumas inovações em relação ao documento norteador anterior, como a inclusão da Introdução à Teoria dos Grafos nos 2º e 3º anos do Ensino Médio [15]. Mas com a nova reforma da educação, o tema foi abolido, e o documento foi reformulado pelos profissionais de educação do estado, em regime de colaboração com a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, UNDIME, e incluiu professores redatores, professores analistas, professores colaboradores, articuladores municipais e toda a equipe ProBNCC do Espírito Santo. A rede privada, rede estadual e os municípios que não têm sistema próprio de Ensino, seguem o documento aprovado pelo Conselho Estadual de Educação e instituído por meio da Resolução CEE/ES nº 5.190/18 em 31/12/2018. Já os municípios que possuem sistema próprio de ensino, a aprovação e homologação cabem aos respectivos Conselhos Municipais de Educação.

Em 2009, o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo trazia o ensino da Teoria dos Grafos nos dois últimos anos do Ensino Médio: na forma de introdução conceitual para o segundo ano e como ferramenta para resolução de problemas no terceiro ano. Não conseguimos a bibliografia utilizada, mas encontramos, em [16], uma atividade muito legal de introdução do assunto nas escolas estaduais do ES, na qual se adaptava o problema das sete pontes de Königsberg para o problema das seis pontes de Vitória.

Parecia ser um belo início para a introdução da Teoria dos Grafos nas escolas, mas foi impedido pelas últimas reformas na base curricular nacional, como já falamos. Acharmos que o currículo das escolas estaduais do ES, com a Teoria dos Grafos como foi proposta em 2009 é compatível com a atual BNCC e só vem corroborar as diretrizes de ensino de matemática na Educação Básica.

2.5 Grafos nos livros didáticos

Apesar de Teoria dos Grafos não ser explicitamente sugerido pela BNCC, podemos encontrar o tema em poucos livros didáticos voltados para a educação básica. Atualmente, na rede pública, por exemplo, a escolha dos livros é feita baseada num guia publicado anualmente pelo MEC, através do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

O FNDE é responsável pela execução de políticas educacionais do MEC e é parceiro

de todos os estados brasileiro na promessa de garantir melhoria na qualidade da educação, principalmente a educação básica da rede pública.

Entre diversos projetos, o FNDE atua no Programa Nacional do Livro Didático, PNLD, desde 1997, avaliando livros didáticos, acervos de obras literárias, obras complementares e dicionários de todos os componentes curriculares e etapas do ensino básico.

O PNLD publica um edital para as editoras inscreverem seus livros e reúne docentes de diversas instituições educacionais do país que, sob a coordenação de uma universidade pública, realizam análise minuciosa de cada obra inscrita e publicam, na forma de um guia, resenhas das obras aprovadas, que são as que se adequam às legislações educacionais vigentes. Mais detalhes sobre o processo de construção do guia PNLD pode ser visto em [17].

Com isto, ao pesquisar nos guias publicados pelo PNLD, encontramos grafos em algumas obras.

Série	Nome	Autores	Editora	Ano
6° EF	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2009
7° EF	Matemática e Realidade	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce Antônio Machado	Atual	2005
7° EF	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2009
8° EF	Matemática e Realidade	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce Antônio Machado	Atual	2005
1° EM	Matemática para o Ensino Médio	Katia Stocco Smole Maria Ignez Diniz	Saraiva	2010
1° EM	Matemática para Compreender o Mundo	Katia Stocco Smole Maria Ignez Diniz	Saraiva	2016
2° EM	Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	2016
2° EM	Matemática para o Ensino Médio	Katia Stocco Smole Maria Ignez Diniz	Saraiva	2010

Dos livros citados, o livro Tudo é Matemática [18], páginas 100 e 101, na seção

“Leitura”, o texto “O problema das quatro cores” traz implicitamente o Teorema das Quatro Cores, com algumas atividades para a aplicação da ideia básica da teoria: colorir regiões de um mapa com a menor quantidade de cores, sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor. O Autor, Luiz Roberto Dante, é licenciado em matemática pela UNESP, mestre em matemática pela USP e doutor em psicologia da educação pela PUC-SP, autor de livros didáticos de matemática muito usados, viaja até hoje pelo Brasil todo divulgando seus livros e conversando com docentes de todos os níveis de ensino, o que pode tê-lo influenciado nas referências à Teoria dos Grafos na sua obra, conforme o vídeo [19].

O PROBLEMA DAS QUATRO CORES

O problema das quatro cores, como ficou conhecido, foi constatado no início do século XIX por um jovem estudante inglês. Ele percebeu que, para colorir todos os distritos do mapa da Inglaterra de forma que os vizinhos tivessem sempre cores diferentes, eram necessárias apenas quatro cores.

Mas a demonstração definitiva e completa só foi feita em 1976 por Appel e Haken com a ajuda de computadores. Foi a primeira demonstração matemática feita por um computador.

Qualquer que seja o mapa que se vai pintar são necessárias, no máximo, quatro cores.

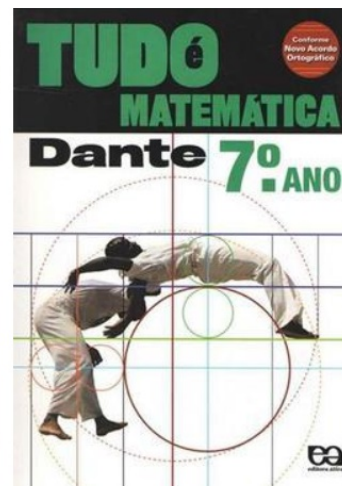
As condições para a pintura são as seguintes:

- cada região da figura deve ser de uma só cor;
- regiões vizinhas não podem ter a mesma cor;
- na figura, devemos usar o menor número possível de cores.

Veja os exemplos abaixo, nos quais a pintura já foi feita:



O problema das quatro cores é válido para a pintura de regiões planas e de mapas, como, por exemplo, os de continentes divididos em países ou de países divididos em estados.



Mais informações sobre o livro Matemática para Compreender o Mundo podem ser vistas em [17], as demais obras em [20].

Pesquisando por livros fora da PNLD, encontramos a Teoria dos Grafos nos livros da rede de escolas privadas PENSI, que tem 22 unidades no estado do Rio de Janeiro e produz os próprios livros didáticos.

APROFUNDANDO

Um passeio pela cidade de Königsberg

Um problema sobre contagem muito famoso é conhecido como “Os pontos de Königsberg”.

Königsberg é uma antiga cidade da Prússia Ocidental, e capital de uma província russa. Ela era formada por quatro regiões unidas por sete pontes.

As sete pontes de Königsberg.

Em meados do século XVIII, foi proposto um problema curioso: é possível sair e caminhar em torno de Königsberg, passando por todas as regiões e atravessando cada ponte exatamente uma vez?

Utilizando a imagem acima, tente encontrar uma possibilidade para resolver esse problema. Pegue lápis e papel, faça um esboço desenhando caminhos possíveis, mas lembre-se: só se pode passar uma vez em cada ponte. É então? Consegue?

Em 1736, Leonhard Euler, grande matemático do século XVIII, utilizando argumentos de contagem que envolviam o número de pontes que saíam de cada região, provou que esse problema não possui solução. Isso mesmo! É impossível seguir um caminho que passe apenas uma vez em cada ponte. Esse raciocínio deu origem ao que chamamos, hoje, de teoria dos grafos, muito utilizada, por exemplo, em redes sociais, para análise de conexões entre usuários.

Conexões em rede social

211

CAPÍTULO

2

7º ANO

MATEMÁTICA I

PROBLEMAS DE CONTAGEM E POSSIBILIDADE

Pensi

colégio - curso

Na edição lançada em 2019 [21], no livro do 7º ano, encontramos um texto de “aprofundamento” intitulado “Um passeio pela cidade de Königsberg”, no qual o problema das sete pontes é abordado. O assunto aparece no capítulo de Análise Combinatória, pág 211, e informa que a Teoria dos Grafos é muito usada nas redes sociais para analisar conexões entre usuários.

A informação é interessante para o público a que se destina o livro, alunos entre 11 e 13 anos, que usam as redes sociais como passatempo.

Observamos que os livros didáticos citados abordam a Teoria dos Grafos como mera curiosidade, sem explicar o que é o Teorema das Quatro Cores ou o Teorema de Euler para grafos, por exemplo. A brevidade como o assunto é proposto pode contribuir para que os professores que usam essas obras não deem importância ao tema, até porque a maioria dos professores do Ensino Básico o desconhece completamente.

3 ATIVIDADES COM GRAFOS PARA A SALA DE AULA

Neste capítulo apresentamos atividades que podem ser realizadas em sala de aula, com um roteiro detalhado de como executar e de quais conteúdos estão sendo abordados. Os conteúdos são indicados em cada ficha de atividade como Objetos de Conhecimento, de acordo com a nomenclatura da BNCC.

Todas as atividades podem ser realizadas em todos os níveis escolares, desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, para alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

Recomendamos que, antes de iniciar as atividades, o professor fale um pouco sobre a importância do que será feito, que a Teoria dos Grafos é amplamente aplicada a situações reais aos alunos, como conexões em redes sociais e mapas geográficos, ou seja, o professor deve deixar bem claro que grafos são estruturas usadas para mostrar a existência ou a inexistência de relações entre elementos de um mesmo conjunto e que esta ideia de relacionar elementos será exercitada em todas as atividades propostas.

A tabela a seguir associa cada atividade às competências e habilidades da BNCC, com as descrições detalhadas de cada item, inclusive dos objetos de conhecimento. Deste modo, o professor pode ter em mente as competências/habilidades que deseja desenvolver em seus alunos ou os conteúdos que quer ensinar e ir diretamente nas atividades indicadas na tabela. O professor ainda tem a opção de desenvolver as atividades na ordem em que são apresentadas no nosso texto, pois estão em ordem crescente de dificuldade com as indicações dos códigos das competências/habilidades que estão sendo desenvolvidas com a atividade escolhida. Assim, algumas atividades são independentes e outras precisam de conhecimentos prévios, os quais são adquiridos com a realização das atividades indicadas em “pré-requisito”. O significado das siglas e códigos na tabela, são explicados na sequência do texto.

Atividades: Objetos de Conhecimento	Competências*	Habilidades**	Pré-requisito
3.1 O dia a dia de dois professores: grafos, vértices, arestas, grau e caminho euleriano.	CG4; EF: CE6; EM: CE3	EF06MA34 EM13MAT315	nenhum
3.2 Quatro Cidades e suas Estradas: grafos, vértices, arestas e pensamento combinatório.	CG4, EF: CE5, CE6	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07	3.1
3.3 Ligação entre Amigos: grau de vértice.	CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE3	EF06MA34, EF07MA06, EM13MAT315	3.2 ou 3.1
3.4 Jogo de Bola: ciclo hamiltoniano.	CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE3	EF06MA34, EF07MA06, EM13MAT315	3.2
3.5 Poema Quadrilha: poesia modernista e digrafo.	CG4; CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE4	EF06MA34, EF07MA06, EM13MAT315	3.2
3.6 Caminhos num Grafo: caminho euleriano.	CG2; EF: CE2	EF06MA34	3.3
3.7 O Problema dos Carteiros: caminho euleriano e ciclo euleriano.	CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT315	3.9

Atividades: Objetos de Conhecimento	Competências*	Habilidades**	Pré-requisito
3.8 Ligação de Água, Luz e Telefone: grafo planar e grafo não planar.	CG2; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3	EF06MA34, EF07MA05, EM13MAT106, EM13MAT315	3.2
3.9 Jogo de Dominó Completo: grafo com laços, ciclo e caminho euleriano.	CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT407	3.3
3.10 Jogo de Dominó Incompleto: caminho euleriano.	CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315 EM13MAT407	3.9
3.11 As Sete Pontes de Königsberg: grau de um vértice do grafo, caminho euleriano e ciclo euleriano.	CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315	3.3
3.12 Digrafos e Futebol: digrafos.	CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8 EM: CE1, CE4	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT407	3.3
3.13 Grafos Desconexos e História do Brasil: grafos desconexos, árvores e presidentes do Brasil.	CG1; CG2; CG4; EF: CE3, CE5, CE8; EM: CE4	EF06MA34, EF07MA06, EM13MAT407	3.3
3.14 Teorema das Quatro Cores: Teorema das quatro cores, municípios brasileiros e suas fronteiras	CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8; EM: CE4	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT407	3.1
3.15 Matrizes e o Sistema Binário: matrizes e sistema binário.	CG4; CG5; EM: CE3, CE4	EM13MAT315, EM13MAT405	3.1
3.16 Matrizes e Grafos: matrizes e multiplicação entre matrizes	CG2; EM: CE4	EM13MAT405	3.15
3.17 Grafos Hamiltonianos e Poliedros de Platão: grafos hamiltonianos e poliedros de Platão.	CG1; CG4; CG5; EF: CE3, CE6; EM: CE3	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT315	3.4 ou 3.15
3.18 Desafio das Quatro Cores: Teorema das quatro cores.	CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT407	3.14
3.19 Poemas Orientados: digrafos e poemas.	CG4; CG5; EF: CE5, CE6; (EM) EM: CE4	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT315, EM13MAT407	3.5
3.20 Caminho por Todos os Cômodos: caminho euleriano.	CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6 EM: CE1, CE3	EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315	3.11
3.21 O Caminho do Carteiro: ciclo euleriano	CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3	EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT106, EM13MAT315	3.20
3.22 O Mundo dos Computadores: algoritmo.	CG1; CG2; CG4; CG5; EM: CE1, CE3, CE4	EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT407	3.21
3.23 Caminho Mínimo: grafo valorado, algoritmo de Dijkstra e município de Macaé	CG1; CG2; CG4; CG5; EM: CE1, CE3, CE4	EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT405	3.22

* CG é competência geral, CE é competência específica, EF é Ensino Fundamental e EM é Ensino Médio.

** Códigos para as habilidades da BNCC: a primeira habilidade indicada EF06MA34, por exemplo, EF é Ensino

Fundamental, 06 é sexto ano, MA é matemática e 34 é a ordem sequencial em que a habilidade aparece na BNCC.

Significado das competências gerais citadas na tabela.

- CG1: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- CG2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- CG4: Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
- CG5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competências específicas do Ensino Fundamental citadas na tabela:

- CE2: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- CE3: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- CE5: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- CE6: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto

prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

- CE8: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Significado das habilidades do Ensino Fundamental citadas na tabela:

- EF06MA34: Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados.
- EF07MA05: Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- EF07MA06: Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- EF07MA07: Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

Significado das competências específicas do Ensino Médio e suas habilidades citadas na tabela:

- CE1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
 - EM13MAT106: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos.
- CE3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
 - EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

- CE4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
 - EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
 - EM13MAT407: Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

A atividade 3.8 é clássica e sua resolução foi adaptada da Revista do Professor de Matemática [22], as atividades 3.1, 3.13, 3.18, 3.19 são da autora deste texto e as demais são adaptações das obras:

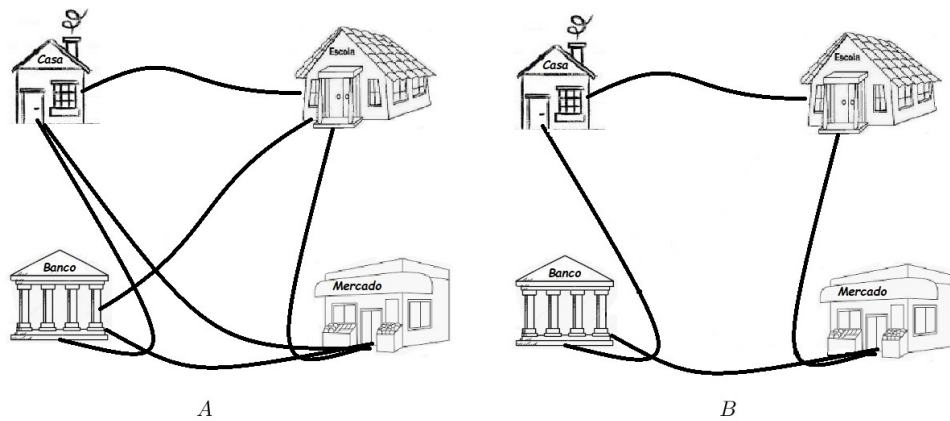
- *Grafos no ensino fundamental e médio: matemática, interdisciplinaridade e realidade* [12]: 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7.
- *Grafos: jogos e desafio* [23]: atividades 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.14, 3.15, 3.17.
- *Encontrando, minimizando e planejando percursos: uma introdução à teoria dos grafos no ensino médio* [24]: atividades 3.16, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23.

3.1 O dia a dia de dois professores

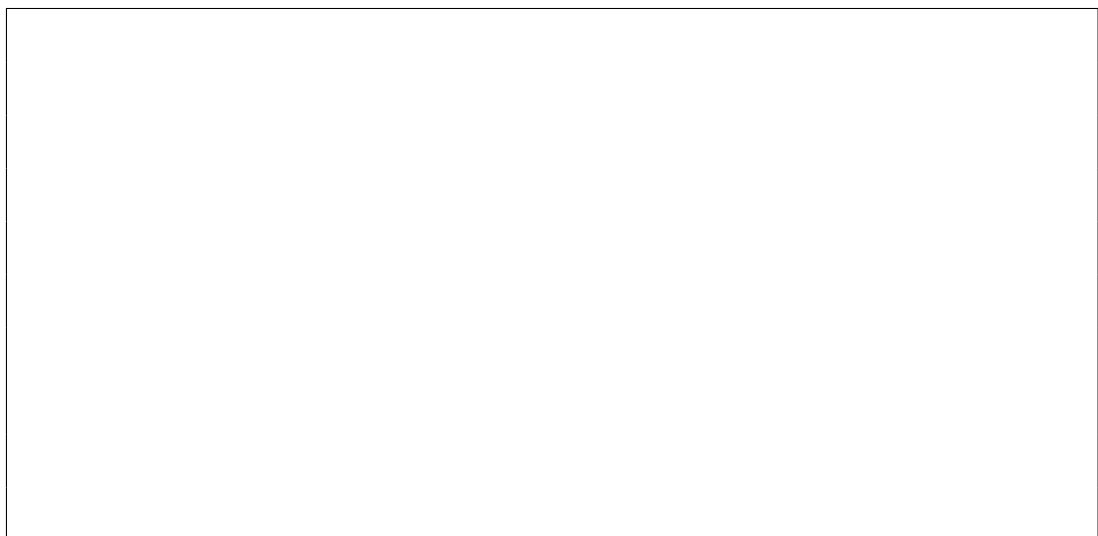
- Objetos de Conhecimento: grafos, vértices, arestas, grau de um vértice e caminho euleriano.
- Pré-requisito: nenhum.

1. Observe os dois mapas a seguir.

O mapa *A* representa os locais por onde seu professor passa no decorrer da semana, já o mapa *B* mostra os locais por onde um outro professor, que não te dá aula, costuma passar durante a semana.



2. Agora que você conhece o trajeto do seu professor e do colega dele durante a semana, use o espaço abaixo para desenhar o mesmo mapa, de modo que os locais sejam representados por pontos e as ruas por linhas. Faça do seu modo.



3. Você acabou de fazer um *modelo matemático* que representa os lugares por onde os professores passam. Agora, responda às perguntas:

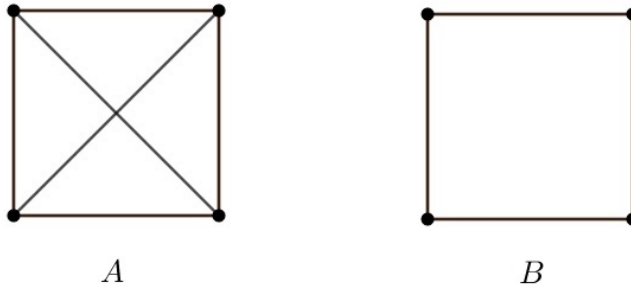
- (a) Em cada um dos mapas que você desenhou, quantas linhas partem de cada ponto?

- (b) Quantas linhas cada mapa tem no total?

- (c) É possível sair de um local e voltar ao mesmo ponto de partida, passando pelas linhas, uma única vez, em cada mapa? Justifique a sua resposta.

Atividade 3.1 - Respostas Esperadas

- O modelo do professor pode ser como este:



- Antes de dar suas respostas às perguntas, o professor explica que de acordo com a Teoria dos Grafos:
 - Os diagramas que os alunos desenharam são chamados *grafos*, os pontos são chamados *vértices* e as linhas são chamadas *arestas*.
 - Grafo é um conjunto finito, não vazio, de vértices e um conjunto finito de arestas.
 - O número de arestas que partem de um vértice é chamado de *grau* de um vértice.
 - Qualquer grafo com todos os vértices de grau par possui um *caminho euleriano*.
- Com isto, as respostas das perguntas feitas aos alunos poderiam ser:
 - (a) No grafo A , 3 linhas partem de cada ponto, já no grafo B , 2 linhas partem de cada ponto, ou seja, cada vértice tem grau 3 no grafo A e cada vértice tem grau 2 no grafo B .
 - (b) O grafo A tem 6 linhas no total, já o grafo B tem 4 linhas.
 - (c) Não é possível sair de um local e voltar ao mesmo ponto passando pelas linhas uma única vez. Em um grafo com mais de 2 vértices, sempre que todos os vértices são de grau ímpar, é impossível passar por todas as arestas sem repeti-las. Por outro lado, em todo grafo onde todos os vértices têm grau par, conseguimos passar por todas as arestas uma única vez, que é o que ocorre no grafo B .
 Construa grafos diferentes do problema, alguns com os vértices de grau ímpar, outros com os vértices de grau par e teste, com a ajuda dos seus alunos, essas afirmações!!!
- Com esta atividade desenvolvemos:
 - Competências: CG4; EF: CE6; EM: CE3.
 - Habilidades: EF06MA34 e EM13MAT315.

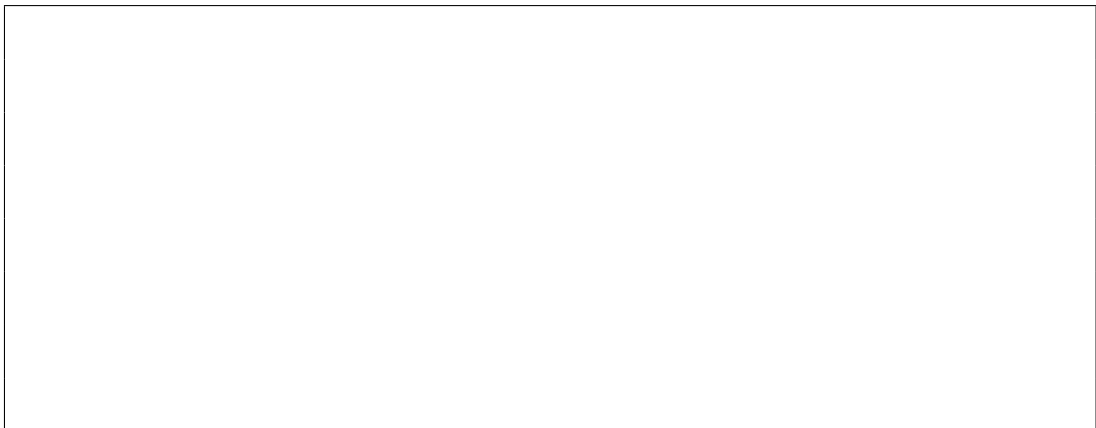
3.2 Quatro Cidades e suas Estradas

- Objetos de Conhecimento: grafos, vértices, arestas e pensamento combinatório.
- Pré-requisito: atividade 3.1

1. Eis o problema:

“Sonhos, Acordados, Bem Querer e Felicidade são quatro cidades de linda região de um país bem próximo. Se há duas estradas que nos levam de Sonhos a Acordados, cinco de Acordados a Bem Querer e três de Bem Querer à Felicidade, de quantos modos diferentes podemos imaginar (escolhendo uma sequência de três estradas) uma viagem que nos leve de Sonhos à Felicidade?”

2. Use o espaço abaixo para desenhar as cidades do problema que você acabou de ler, representando-as por pontos e usando suas iniciais para diferenciá-las, como S , A , B e F . Represente as estradas usando linhas. Cuidado para que os pontos não fiquem muito próximos, faça do seu modo.

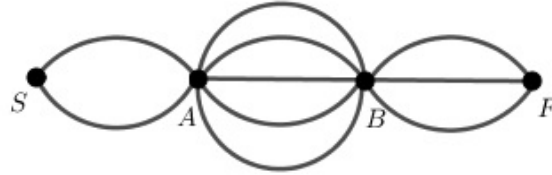


3. O desenho que você acabou de fazer é uma *modelagem* para o problema e, como é formado por pontos e linhas, é chamado de *grafo*. Com isto, responda:

De quantos modos diferentes podemos fazer uma viagem que nos leve de Sonhos à Felicidade?

Atividade 3.2 - Respostas Esperadas

- Um grafo que modela o problema pode ser este:



É fácil verificar que podemos ir da cidade Sonhos S à cidade Felicidade F de 30 maneiras diferentes.

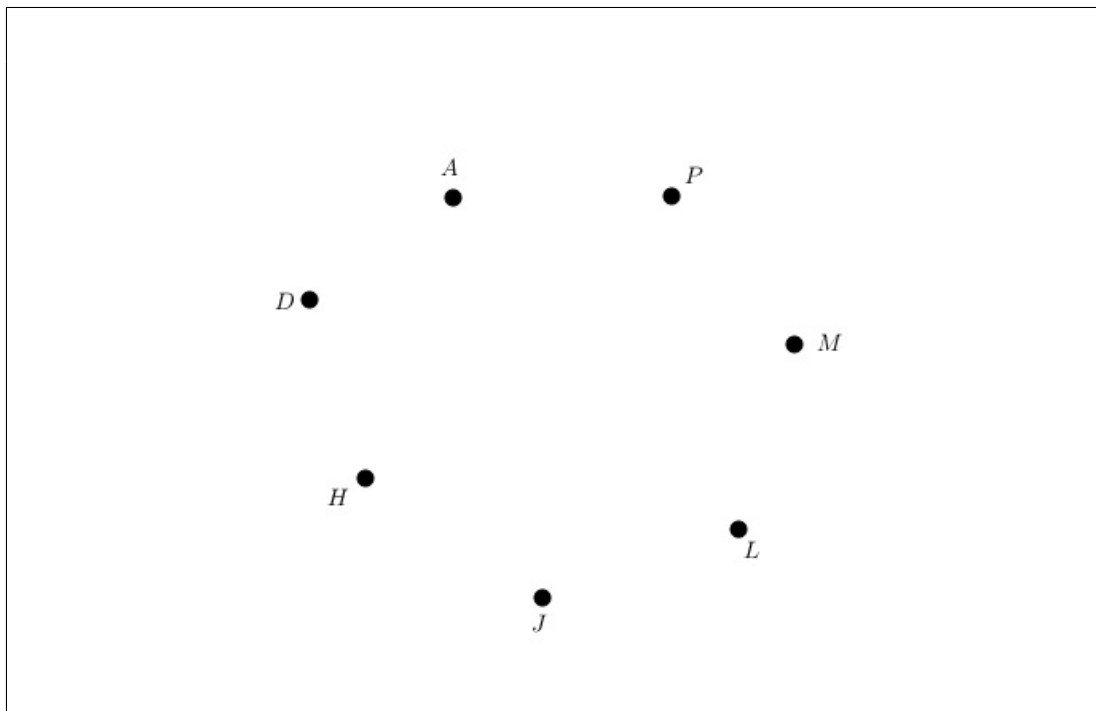
- O professor deve explicar que, na *Teoria dos Grafos*, os pontos do modelo feito são chamados *vértices* e as linhas são chamadas *arestas*. A resposta do problema, então, é o produto das quantidade de arestas entre cada vértice do caminho dado por $2 \times 5 \times 3 = 30$.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG4; EF: CE5, CE6.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06 e EF07MA07.

3.3 Ligações entre Amigos

- Objetos de Conhecimento: grau de vértice.
- Pré-requisito: atividade 3.2 ou atividade 3.1

1. Leia a história:

“João e Paulo são conhecidos um do outro. Ana, Dalva, Henrique e Paulo, todos estes, conhecem-se entre si também. Mas, Ana, Lucas e Maria, dentre estas três pessoas, nenhuma conhece as outras duas. Já Lucas e João conheceram-se há muito tempo numa excursão da escola, tornando-se grandes amigos até hoje. Aproveitando os pontos já assinalados no espaço que se segue (cada ponto representa uma dessas pessoas, indicado pela letra inicial de seu nome), obtenha o grafo que modela a situação descrita ligando dois pontos apenas quando estes representarem pessoas que se conhecem”.



2. O grafo que você desenhou pode ajudá-lo a responder às perguntas:

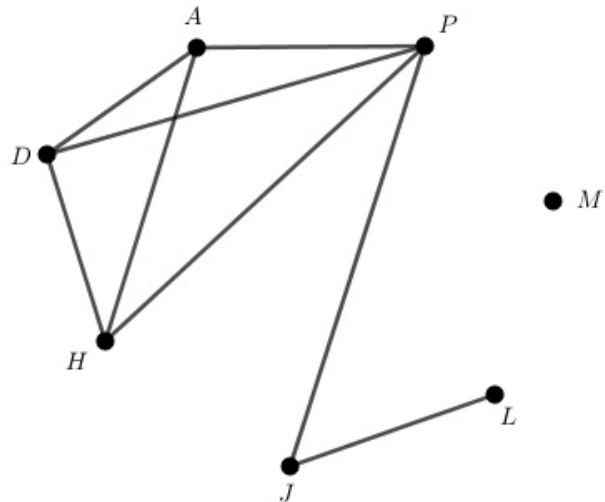
- (a) Dentro apenas desse universo das 7 pessoas citadas, qual é a mais “popular”, isto é, a que conhece e é conhecida por mais pessoas?

(b) Desse grupo, quem é a pessoa que conhece menos gente?

(c) Explique que estratégia usou para responder às perguntas anteriores.

Atividade 3.3 - Respostas Esperadas

- O grafo do professor pode ficar como este:



- As respostas para as perguntas podem ser:
 - (a) Paulo é a pessoa mais popular do grupo.
 - (b) Maria é a pessoa que menos conhece gente deste grupo.
 - (c) As respostas devem ser obtidas a partir da quantidade de linhas (arestas) que ligam cada pessoa (vértice) às demais, ou seja, analisando os graus dos vértices.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06 e EM13MAT315.

3.4 Jogo de Bola

- Objetos de Conhecimento: ciclo hamiltoniano.
- Pré-requisito: atividade 3.2

1. Leia atentamente a história a seguir:

“Num condomínio, os vizinhos Beatriz, Clarisse, Jonas, Luciana, Marcelo, Paulo e Vera estavam na área de lazer, próximos uns dos outros. Beatriz bolou uma brincadeira, uma espécie de desafio. “Vamos formar uma roda! Cada um de nós tem que jogar esta bola para alguém, mas só pode jogá-la para quem estiver com uma blusa de cor diferente da sua. Ah, outra coisa... Quem já tiver recebido a bola uma vez, não pode recebê-la de novo. Eu começo e, após a bola ter passado por todos, o último a recebê-la tem que estar com uma blusa de cor diferente da minha, pois terá que me devolvê-la, acabando a brincadeira”.

Um dos colegas na roda, confuso que nem ele só, exclamou: “Nossa, Beatriz! Vai ser muita sorte se tudo isso puder ser feito com todas essas regras que você quer e, ainda por cima, o último a receber estar com blusa de cor diferente da sua! Será que é possível?”.

Façamos de conta que estamos lá... Vamos ajudá-los? Tentemos dizer a eles uma ordem de lançamentos da bola (quem passar para quem) que fará a brincadeira dar certo até o final (Beatriz de volta com a bola). Mas usando grafos!”

2. Siga as regras abaixo para a construção do grafo que modela a história:

- (a) Represente cada pessoa da história por um ponto, de modo que os pontos não fiquem muito próximos uns dos outros para evitar confusões. Por exemplo, utilizando as letras iniciais dos nomes das pessoas. Teremos, assim, os pontos B, C, J, L, M, P e V .
- (b) Ligue apenas as pessoas que estão de blusa de cor diferente entre si, exatamente da seguinte forma: sempre para duas pessoas de blusa de cor diferente, deve-se traçar uma única linha ligando os dois pontos. Alguns pares de pontos não estarão ligados, os que representam pessoas com blusa da mesma cor.
- (c) Considere a seguinte lista que informa sobre as diferenças entre as cores das blusas das pessoas do problema:
 - Beatriz com blusa de cor diferente de Vera, Clarisse e Marcelo.
 - Vera com blusa de cor diferente de Paulo e Luciana.

- Clarisse com blusa de cor diferente de Jonas.
- Marcelo com blusa de cor diferente de Luciana.
- Jonas com blusa de cor diferente de Paulo.

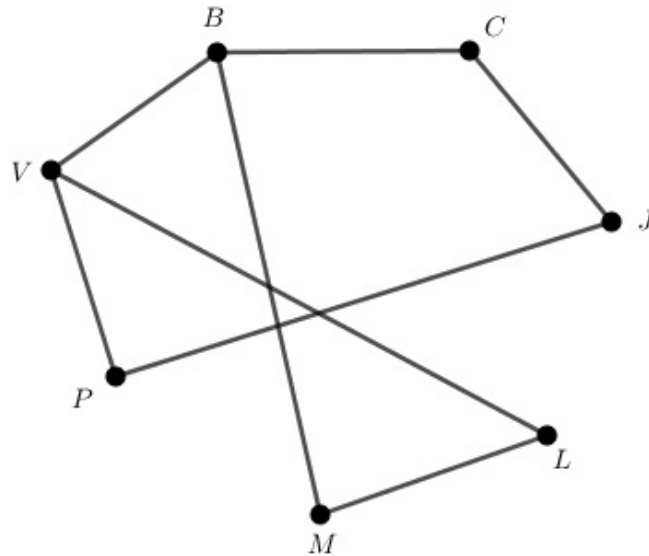
(d) Use o espaço abaixo para fazer o seu grafo.



(e) Qual sequência de pontos faz a brincadeira dar certo, de modo que a bola passe por todos uma única vez, voltando ao jogador inicial?

Atividade 3.4 - Resposta Esperada

- O grafo pode ser desenhado como:



- Analisando o grafo, podemos observar que uma ordem de lançamento para a bola é $BCJPVLMB$.
- O professor deve contar aos alunos que na Teoria dos Grafos uma sequência de pontos, como a que encontramos, é chamada *ciclo hamiltoniano* em homenagem ao matemático William Hamilton, ou seja, dizemos que um grafo tem um *ciclo hamiltoniano* sempre que for possível fazer um *caminho* que passe por todos os vértices uma única vez, sem repeti-los, e volte ao vértice inicial.
- É interessante o professor terminar a atividade lembrando que os alunos tiveram contato com um grafo que tinha um *caminho euleriano*. Deve perguntar o que lembram sobre o *caminho euleriano*. Os alunos responderão que são os grafos que têm todos os vértices de *grau* par. O professor deve, então, ensinar que existem outras configurações de grafos como os *ciclos*, nos quais todo vértice tem grau 2. Assim, tanto no *ciclo euleriano* quanto no *ciclo hamiltoniano* deve-se voltar ao vértice inicial, a diferença é que num *ciclo euleriano* sempre é possível percorrer todas as arestas uma única vez, sem repetição. Já no *ciclo hamiltoniano* são os vértices que são todos percorridos uma única vez, sem repetição.
- O professor deve verificar, junto com seus alunos, se o grafo desta atividade além de ter um *ciclo hamiltoniano* também tem um *ciclo euleriano*.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06 e EM13MAT315.

3.5 Poema Quadrilha

- Objetos de Conhecimento: poesia modernista e digrafo.
- Pré-requisito: atividade 3.2

1. Leia o texto:

Carlos Drummond de Andrade, que nasceu em 1902 em Itabira, cidade do interior de Minas, onde passou sua infância e boa parte da adolescência, veio a tornar-se um dos maiores poetas brasileiros. É dele o poema “Quadrilha”, que começa com os seguintes versos: “João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém ... ”

2. Vamos representar a situação descrita pelos versos por meio de um grafo, no qual usaremos linhas com setas, o que ajuda a indicar o sentido do texto. Por exemplo, para indicar que “João amava Teresa”, podemos ilustrar assim:



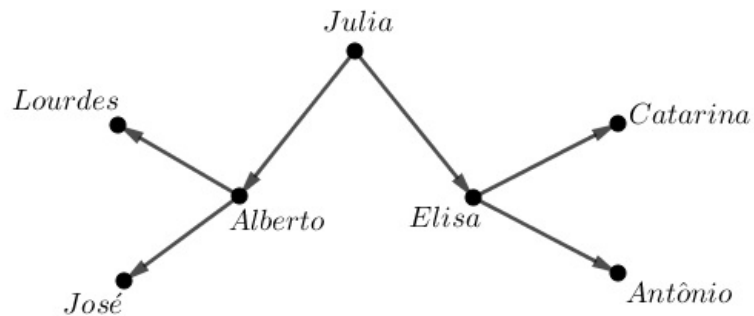
3. Use o espaço abaixo para desenhar o seu grafo.

Atividade 3.5 - Resposta Esperada

- Um grafo que pode resolver o problema:



- Ao final da atividade, o professor deve explicar que os grafos com setas são chamados de *grafos orientados* ou *digrafos*.
- Uma sugestão para reforçar o entendimento do uso de grafos orientados é que os alunos construam o conjunto das pessoas da própria família, indicando pelas setas quem é filho de quem, como no grafo abaixo:

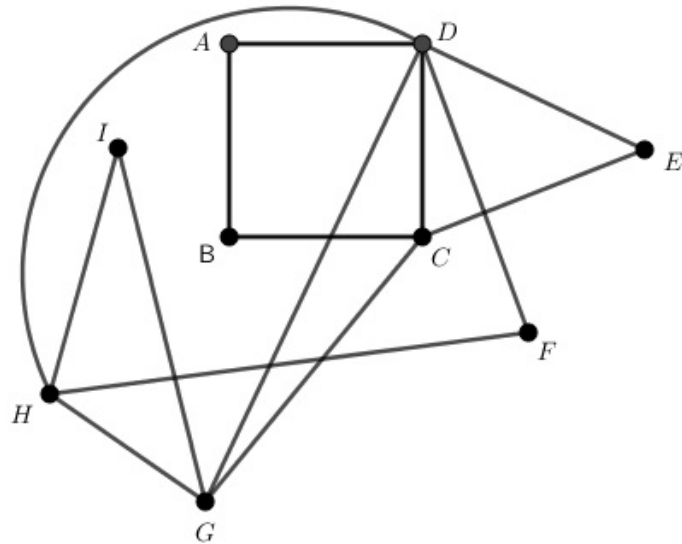


- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG4; CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06 e EM13MAT315.

3.6 Caminhos em um Grafo

- Objetos de Conhecimento: caminho euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.3

1. Observe o grafo abaixo, leia o texto e responda às perguntas propostas:



2. Responda as perguntas:

- (a) Quantos vértices possui este grafo? Quais são eles? E destes, quantos possuem grau par?

- (b) Quantas arestas incidem em D ? Quais são elas?

(c) Escreva, um a um, o grau de cada vértice.

(d) Descreva dois caminhos conectando os vértices A e I ; um com três arestas, o outro com sete.

(e) Descreva dois caminhos de A até E ; um que não repita nenhuma aresta, o outro que repita.

(f) Descreva um caminho que comece em A , passe por 4 arestas e repita um único vértice.

Atividade 3.6 - Respostas Esperadas

- O professor pode dar as respostas a seguir:
 - (a) O grafo possui 9 vértices: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Todos possuem grau par.
 - (b) 6 arestas incidem em D : $AD, CD, ED, FD, GD, e HD$.
 - (c) Vértice A tem grau 2;
Vértice B tem grau 2;
Vértice C tem grau 4;
Vértice D tem grau 6;
Vértice E tem grau 2;
Vértice F tem grau 2;
Vértice G tem grau 4;
Vértice H tem grau 4;
Vértice I tem grau 2.
 - (d) $ADGI$ e $ABCDECGI$.
 - (e) $ABCE$ é um caminho sem repetição de arestas e $ADCDE$ é um caminho onde a aresta CD é repetida.
 - (f) $ADGCD$.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; EF: CE2.
 - Habilidade: EF06MA34.

3.7 O Problema dos Carteiros

- Objetos de Conhecimento: caminho euleriano e ciclo euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.9

1. Tente resolver o problema de Paulinho e Silas:

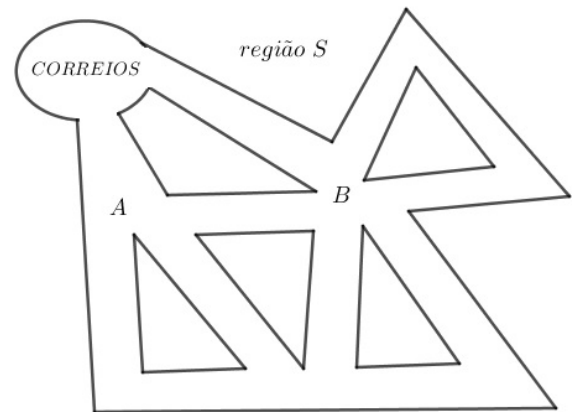
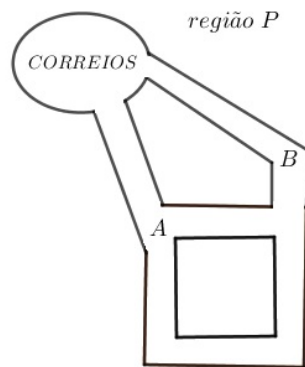
Paulinho e Silas são jovens carteiros, admitidos para esta função há pouco tempo. Nas figuras abaixo, vê-se à esquerda a região P onde Paulinho trabalha, com o respectivo posto dos Correios de onde sai diariamente para entregar a correspondência, tendo que retornar ao seu posto, imediatamente após terminar seu trabalho, para prestar contas. Exatamente o mesmo faz Silas em sua região S , que se vê à direita. Cansados de sempre acabarem passando novamente por trechos de ruas onde já distribuíram correspondência, cada um deseja agora estabelecer um roteiro fixo, em sua região, de forma que nunca repita nenhum trecho já caminhado. (Entenda sempre aqui a palavra “trecho” como sendo cada parte de rua compreendida entre duas esquinas consecutivas, ou seja, “trecho” é o mesmo que aresta, assim como cada parte que vai do posto dos Correios até as esquinas A ou B , pois nesses trechos também há residências esperando a correspondência diária)

Está colocada então, tanto para Paulinho como para Silas, a seguinte questão:

“Será possível fixar um caminho para o meu trabalho diário em que eu saia do meu posto dos Correios e passe por todos os trechos, sem que eu repita nenhum deles até estar de volta ao interior do meu posto novamente?”

2. Analise as situações de Paulinho e Silas, separadamente, e responda:

- (a) Obtenha as respostas adequadas que você daria a Paulinho e a Silas usando os mapas abaixo. Feitas suas análises, seria possível cada um dos carteiros, separadamente, fazer o caminho pretendido? Mostre no mapa qual caminho seria esse.

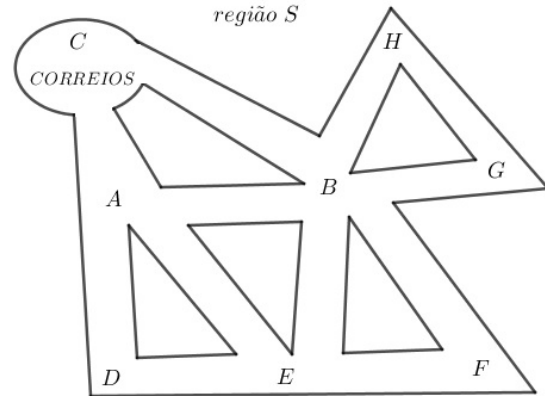
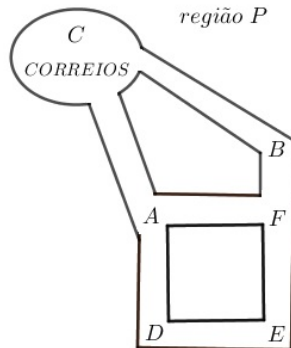


- (b) Agora, represente as duas situações anteriores usando grafos, no espaço abaixo. Você obterá as mesmas respostas para o problema.

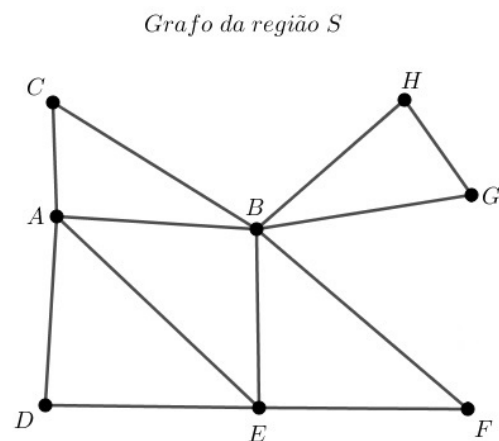
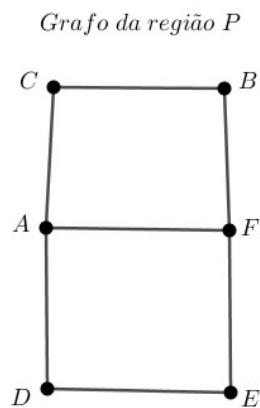
Construa cada grafo, escolhendo como vértices todas as esquinas, acrescentando o próprio posto dos Correios como um vértice também. Cada trecho de rua será uma aresta. Não se esqueça de rotular os vértices de cada grafo (A, B, C, \dots) para que, ao final, possa expressar o caminho, se possível, listando a sequência de vértices que mostra o sentido a ser seguido.

Atividade 3.7 - Respostas Esperadas

- Cada esquina, que será vértice, pode ser rotulada assim:



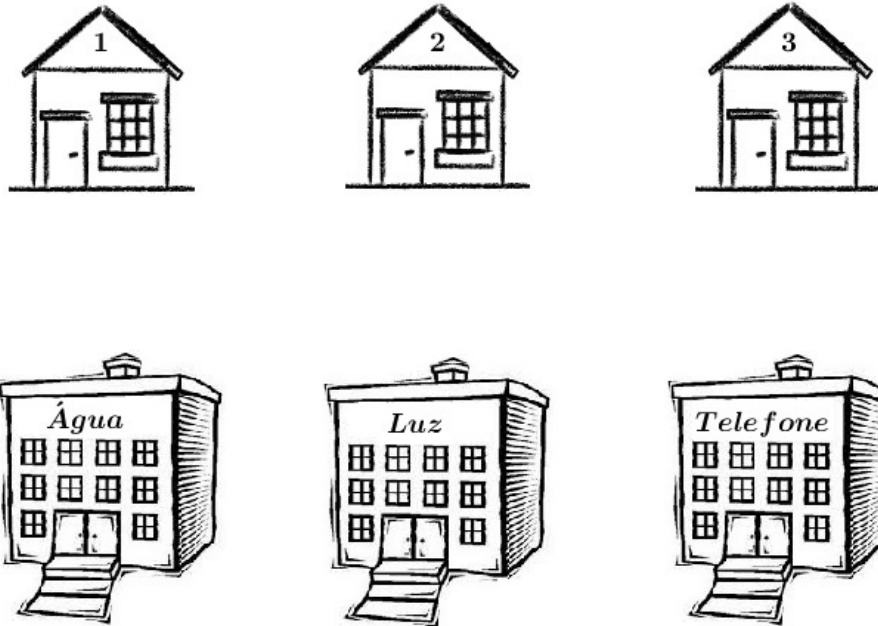
- Deste modo, podemos construir o grafo a seguir:



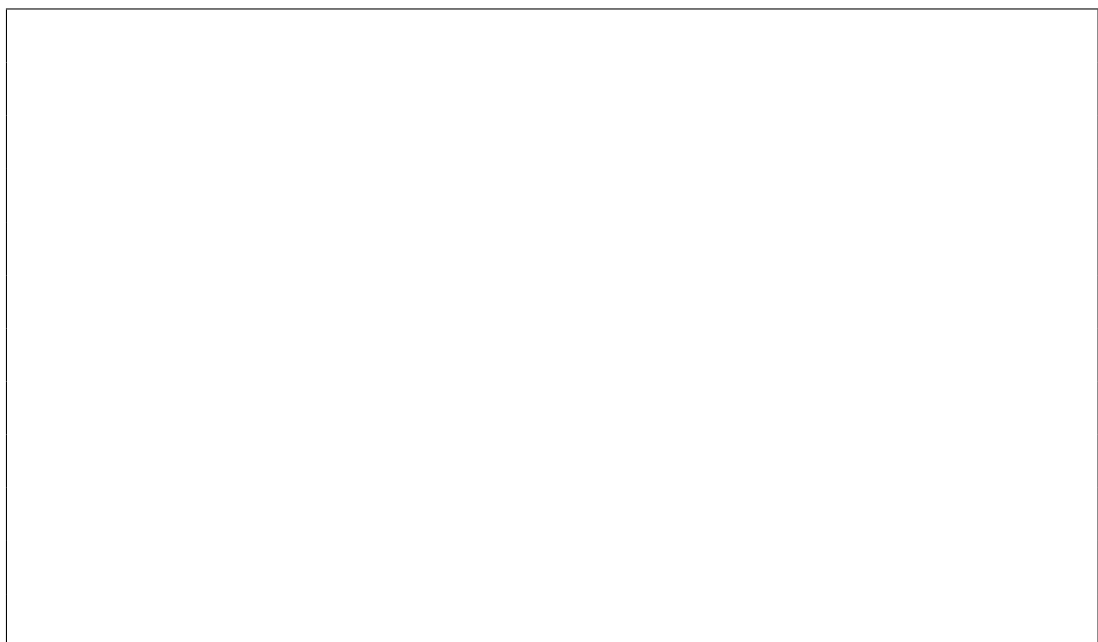
- No grafo da *região P* é impossível encontrarmos um caminho que saia de C e passe por todas as arestas uma única vez, sem repetição. O professor pode verificar com os alunos que daria certo se pudesse sair do vértice A ou F , que são os únicos vértices de grau ímpar, o que caracteriza o *caminho euleriano*.
- No grafo da *região S* um caminho possível é dado pela sequência CBHGFHBAED. Afinal, se trata de um grafo que tem um *ciclo euleriano*.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07 e EM13MAT315.

3.8 Ligação de Água, Luz e Telefone

- Objetos de Conhecimento: grafo planar e grafo não planar.
 - Pré-requisito: Atividade 3.2
1. É possível ligar água, luz e telefone a três casas, sem que as ligações se cortem (supondo que todas as ligações, fios e canos estejam situados em um mesmo plano)?



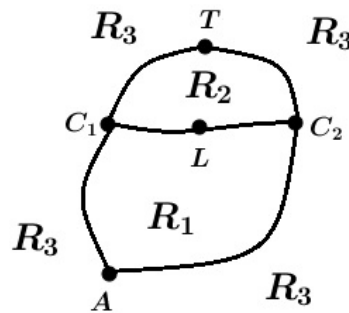
2. Use o espaço abaixo para construir um grafo que o ajude a resolver o problema. Você pode reorganizar vértices e arestas, sem se preocupar com a posição que estão na figura dada. O objetivo é encontrar um modo de fazer as ligações sem que as arestas se cruzem. Não esqueça de rotular os vértices.



Atividade 3.8 - Respostas Esperadas

- O professor vai contar aos alunos que o problema não tem solução. A intuição para este fato virá das tentativas sem sucesso de fazer tais ligações. Por exemplo, podemos construir a seguinte tentativa com os alunos:

Começamos ligando os três serviços nas duas primeiras casas, conforme o grafo abaixo, onde T , L e A representam as estações de distribuição de telefone, luz e água, respectivamente; c_1 e c_2 representam as casas 1 e 2. Neste grafo, as arestas propostas definem três regiões R_1 , R_2 e R_3 .



- A partir daí, devemos acrescentar a terceira casa, C_3 , numa destas regiões. Examinado cada uma destas possibilidades, temos:
 - A C_3 na R_1 permite somente a ligação da *Água* e da *Luz*.
 - A C_3 na R_2 possibilita somente a ligação do *Telefone* e da *Luz*.
 - A C_3 na R_3 nos permite ligar somente os serviços de *Água* e *Telefone*.
- Deve-ser explicar que, nesta atividade, estamos buscando um grafo *planar*, que é o grafo no qual as arestas não se cruzam. Mas ao acrescentar o vértice C_3 , chegamos num grafo *não planar*, ou seja, num grafo em que as arestas se cruzam e não há uma representação deste grafo em que isto não acontece.
- Um importante parâmetro ligado à ideia de planaridade do grafo é o *número mínimo de cruzamentos*, conhecido como *crossing number* de um grafo. Neste problema estamos interessados em encontrar o menor inteiro k para o qual existe um desenho deste grafo com k cruzamentos entre arestas. Este inteiro k é o crossing number ($cr(G)$). Note que, se $cr(G) = 0$, o grafo G é planar porque admite um desenho sem cruzamento de arestas. No grafo da atividade proposta, que já vimos não ser planar, este número é 1 porque conseguimos desenhá-lo com apenas um cruzamento de arestas.

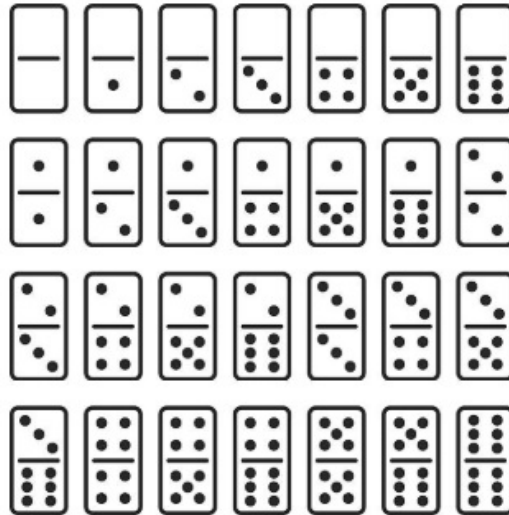
Se você quiser saber mais sobre o assunto, leia na dissertação de Mestrado do Rafael Pocai em <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45134/tde-27012016-090223/publico/Main.pdf>

- Uma outra abordagem do problema pode ser conferida em <http://www.rpm.org.br/cdrpm/11/3.htm> [22].
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3.
 - Habilidades:, EF06MA34, EF07MA05, EM13MAT106 e EM13MAT315.

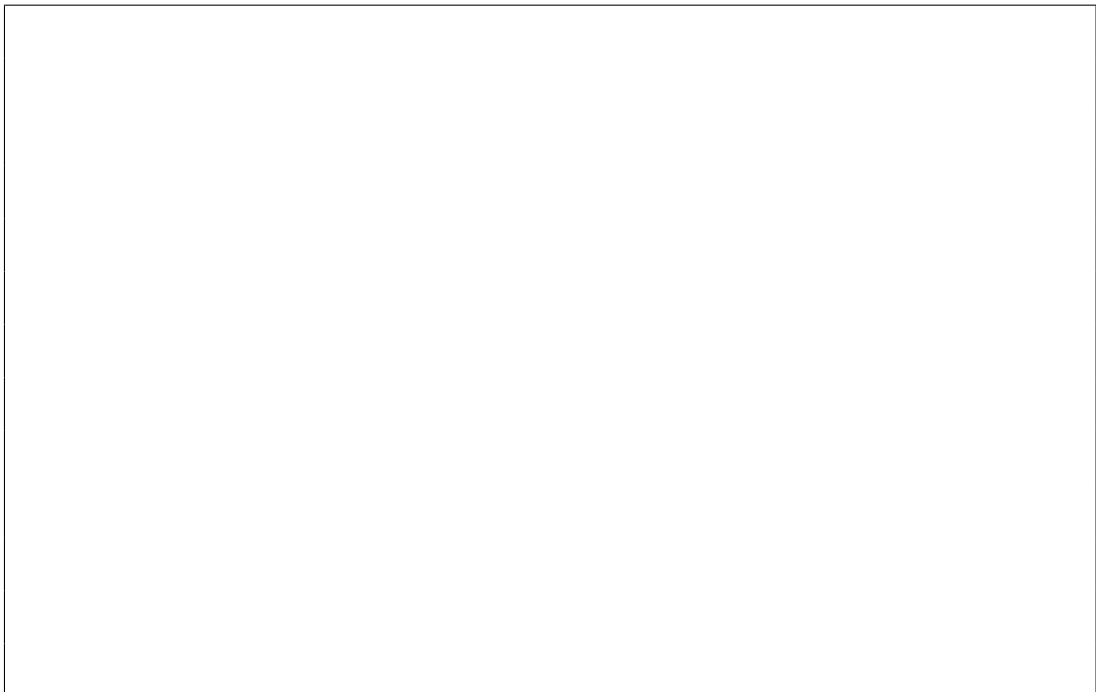
3.9 Jogo de Dominó Completo

- Objetos de Conhecimento: grafo com laços, ciclo e caminho euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.3

Peças de um dominó completo.

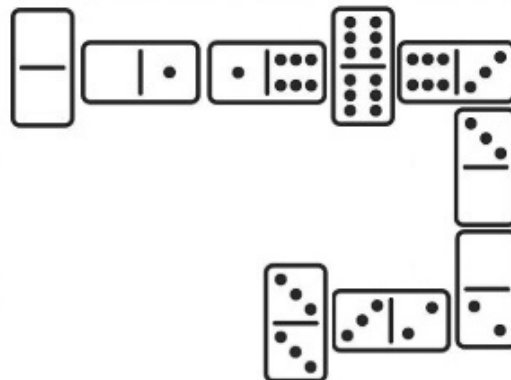


1. Forme uma equipe com até quatro alunos.
2. Sua equipe deve construir o grafo das peças de dominó de modo que cada vértice corresponda a um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e as arestas, que correspondem às peças do dominó, devem ligar dois destes números. Note que vocês precisarão representar peças do dominó que têm números iguais. Você pode usar o espaço abaixo. Se precisar, o próximo item explica as regras do jogo.



3. Atenção às regras do jogo de dominó tradicional:

- A quantidade de participantes é de dois a quatro, podendo jogar individualmente, ou em duplas.
- As peças são embaralhadas com as faces voltadas para baixo.
- Cada jogador pega 7 peças, escondendo dos outros as faces numeradas. As peças que sobrarem ficam na mesa para serem retiradas durante o jogo.
- Inicia o jogo quem tiver a peça com números iguais de maior valor. Esta peça deve ser colocada virada para cima no centro da mesa.
- Após a jogada inicial, cada jogador, na sua vez, coloca a peça que tenha o mesmo número que aparece em uma das extremidades da sequência. Caso o jogador da vez não tenha a peça adequada para colocar, ele retira uma a uma, das que ficaram sobre a mesa, até encontrar a peça adequada. Caso não a encontre, passa a vez para o próximo jogador.
- A partida deve prosseguir pelas extremidades da sequência das peças, como abaixo:



- Vence o jogo o primeiro que ficar sem peças. Quando isto não ocorrer, vence o que tiver o menor número de pontos na soma total dos pontos de suas peças.

4. Agora, respondam:

- (a) Quantas são as peças do jogo de dominó?

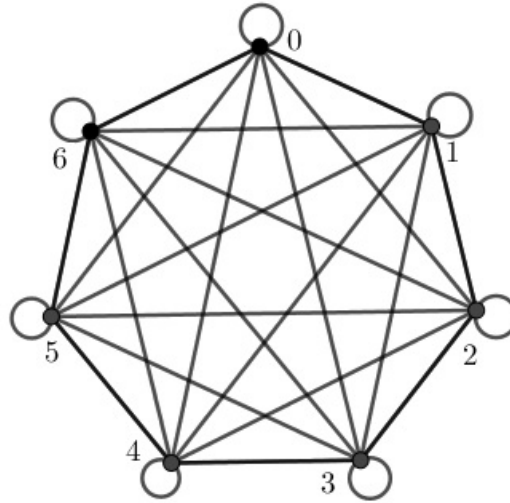
- (b) Como vocês representaram a peça com dois números seis, por exemplo?

- (c) Qual é o grau de cada um dos vértices do grafo? Como você contou as arestas mencionadas no item anterior?

- (d) É possível, partindo de qualquer vértice, percorrer todas as arestas e voltar ao vértice de partida, sem repetir aresta?

Atividade 3.9 - Respostas Esperadas

- Um grafo modelo pode ser:

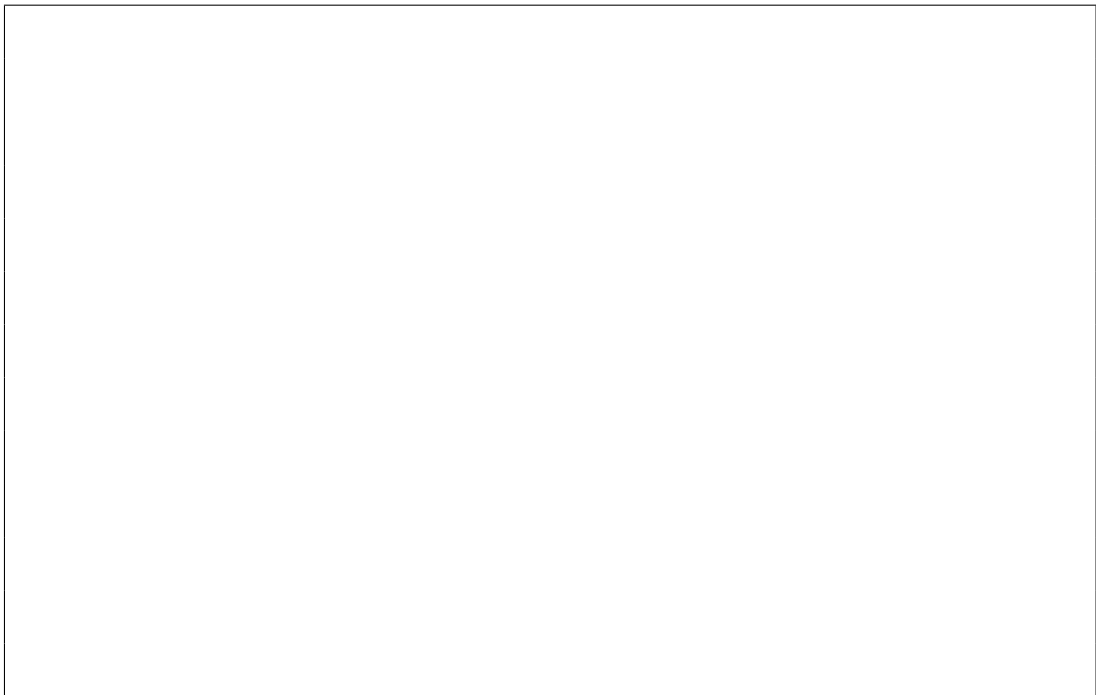


- Para as perguntas, temos:
 - (a) 28 peças.
 - (b) Com uma aresta circular, que sai e volta para o próprio vértice. Este tipo de aresta é chamada de *laço*.
 - (c) Cada vértice tem grau 8. O laço adiciona 2 ao grau do vértice.
 - (d) Sim, pois todos os vértices são de grau par.
- O professor deve explicar que as peças com números iguais nas duas metades são representadas, no grafo, pelos *laços*, que são linhas com origem e chegada em cada vértice. Por convenção, o *laço* acrescenta duas unidades ao grau do vértice.
- Deve-se explicar que um grafo em que todos os vértices são grau par, tem um *ciclo euleriano* (aproveitar para lembrar o que é *caminho euleriano*). E que nos ciclos eulerianos sempre se volta ao vértice de partida, após percorrer todas as arestas.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT407.

3.10 Grafos e o Jogo de Dominó Incompleto

- Objetos de Conhecimento: caminho euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.9.

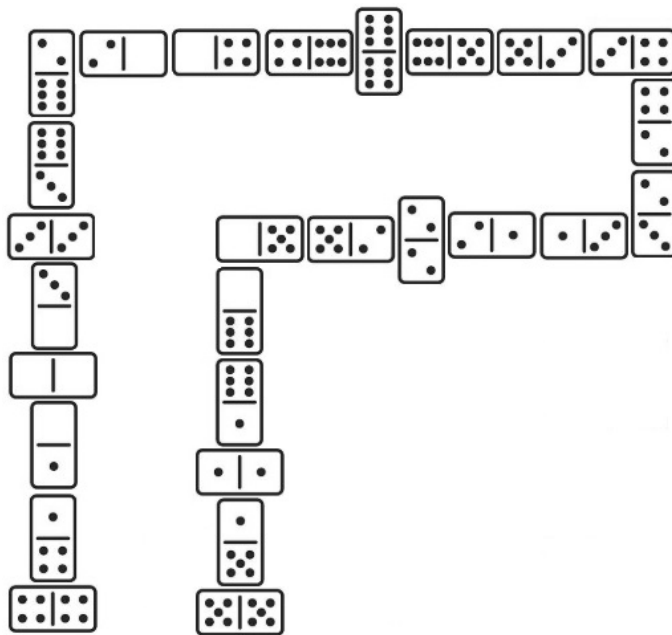
1. Continue com sua equipe de quatro alunos e o jogo de dominó que o professor entregou a vocês.
2. Escolha, com sua equipe, uma peça com números distintos dos dois lados. Esta peça será deixada de lado, não será usada no jogo.
3. Agora você e sua equipe podem iniciar o jogo de dominó tradicional. Não se preocupem que, mesmo incompleto, será possível jogar. Pode ser que todas as peças sejam utilizadas no jogo ou não, assim como acontece no jogo com o dominó completo.
4. Assim que acabar o jogo, você pode desenhar, no espaço a seguir, o grafo das peças que foram usadas, mesmo que sua equipe não tenha usado todas as peças. Nem todos conseguirão usar todas as peças, por estratégias de jogo, o que também ocorre quando se joga com o dominó completo.



5. Anote, nas linhas abaixo, a quantidade de vezes que cada número aparece, somente das peças que foram usadas no jogo.

Atividade 3.10 - Respostas Esperadas

- O professor deve explicar que alguns conseguirão e outros não, mas é possível terminar o jogo com o dominó incompleto, usando todas as peças se: todos os números aparecerem uma quantidade par de vezes ou apenas dois números aparecerem uma quantidade ímpar de vezes.
- Resultados da Teoria dos Grafos afirmam que sempre que todos os vértices são de grau par, pode-se percorrer todas as arestas uma única vez, saindo e voltando de qualquer vértice.
- Há resultados, na mesma Teoria dos Grafos, que asseguram também que sempre que existirem somente dois vértices de grau ímpar, pode-se percorrer todas as arestas uma única vez, desde que se inicie de um desses vértices de grau ímpar e acabe no outro.
- Caso algum grupo não tenha conseguido usar todas as peças no jogo, o professor solicita que reorganizem as peças a fim de verificarem por si próprios que, de fato, é possível usar todas as peças do dominó incompleto.



Uma sequência formada por dominó incompleto

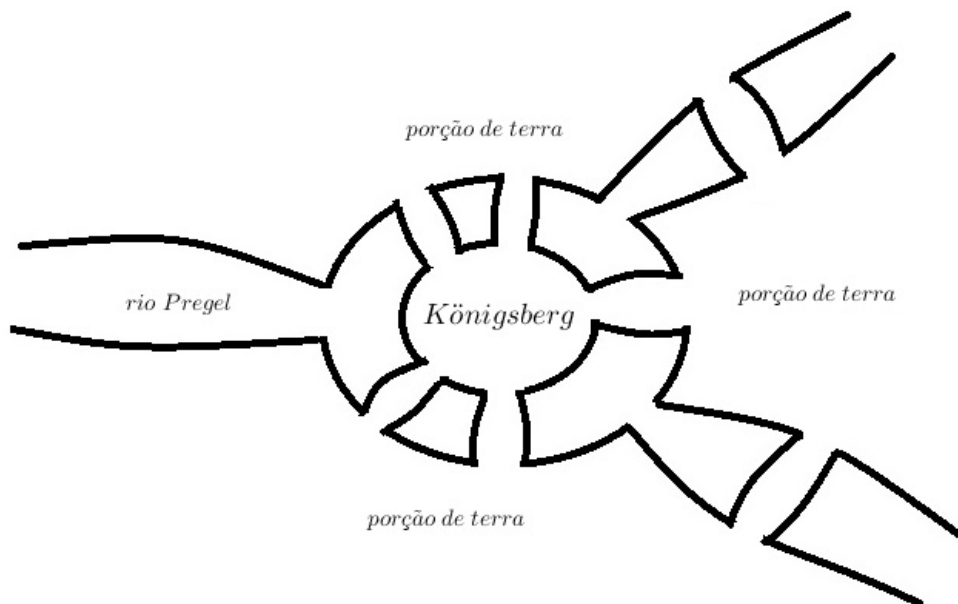
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT407.

3.11 As Sete Pontes de Königsberg

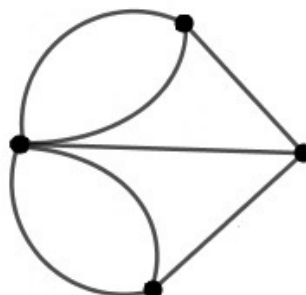
- Objeto de Conhecimento: grau de um vértice do grafo, caminho euleriano e ciclo euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.3.

Conheça a história do famoso problema:

O problema das sete pontes de Königsberg é o mais famoso na Teoria dos Grafos. Surgiu na cidade de Königsberg, antiga cidade do leste alemão, que era banhada pelo rio Pregel. As sete pontes eram conexões da ilha com a península, como na figura abaixo:



Os habitantes de Königsberg discutiam se seria possível percorrer toda as pontes em uma caminhada, sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas, voltando para o ponto de partida. O grande matemático Leonhhard Euler passou pela cidade e resolveu o problema, construindo o primeiro grafo da história que era muito próximo a este:



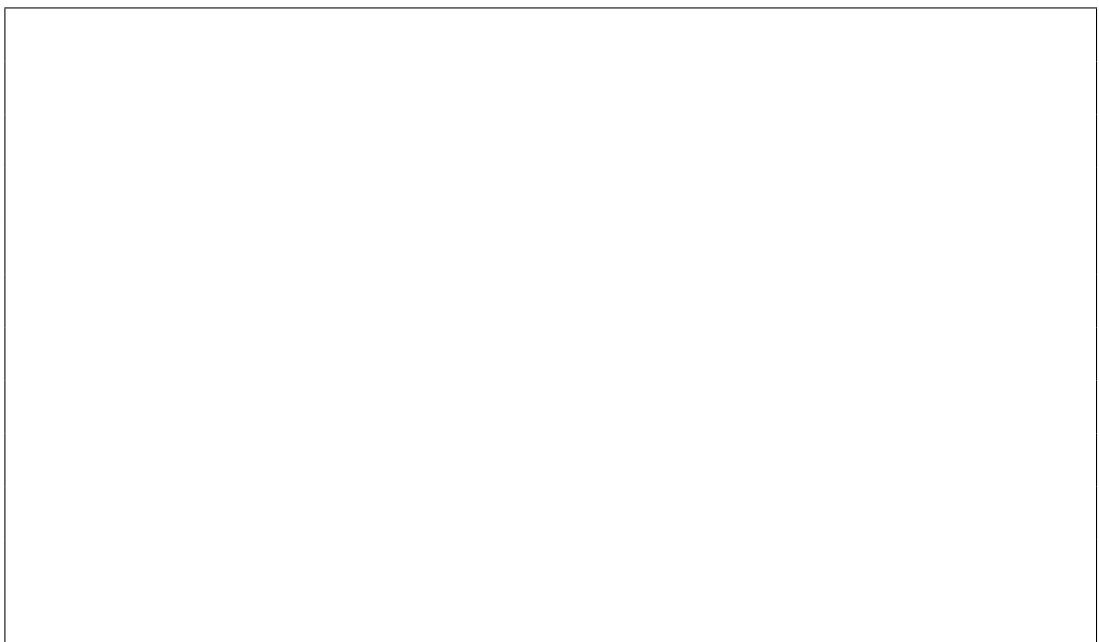
Observe que as porções de terra, incluindo a ilha, são representadas por vértices e as pontes por arestas.

Tente reproduzir, no espaço abaixo, o mesmo desenho, a partir de qualquer um dos quatro pontos, sem levantar o lápis do papel:



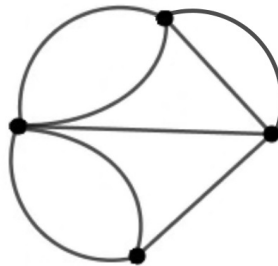
Difícil né?

Tentando sair, inicialmente, de qualquer vértice o problema não tem solução. Muitos anos depois, foi construída uma ponte ligando dois dos quatro pontos e, assim, tornou-se possível fazer o caminho nas condições do problema. Desenhe no espaço abaixo uma nova ponte para verificar se isto é possível.



Atividade 3.11 - Respostas Esperadas

- O problema das sete pontes de Königsberg deu origem a Teoria dos Grafos.
- Euler fez o primeiro *diagrama* para mostrar que o problema não tinha solução. Esta estratégia usada por Euler é um exemplo de *modelagem matemática*.
- Uma nova ponte, que resolve as condições iniciais do problema das pontes de Königsberg, nos dá o seguinte grafo:



- Resultados da Teoria dos Grafos mostram que sempre que todos os vértices são de grau par, pode-se percorrer todas as arestas uma única vez, de tal modo que o vértice de partida coincide com o vértice de chegada, o que é conhecido como *Ciclo Euleriano*.
- A Teoria dos Grafos também mostra que sempre que existirem somente dois vértices de grau ímpar, pode-se percorrer todas as arestas uma única vez, desde que se inicie de um desses vértices de grau ímpar e acabe no outro, o que é conhecido como *Caminho Euleriano*.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315.

3.12 Digrafos e Futebol

- Objeto de Conhecimento: digrafos.
- Pre-requisito: atividade 3.3

1. Veja os resultados da 1ª fase da copa do mundo 2018, dividida em grupos:

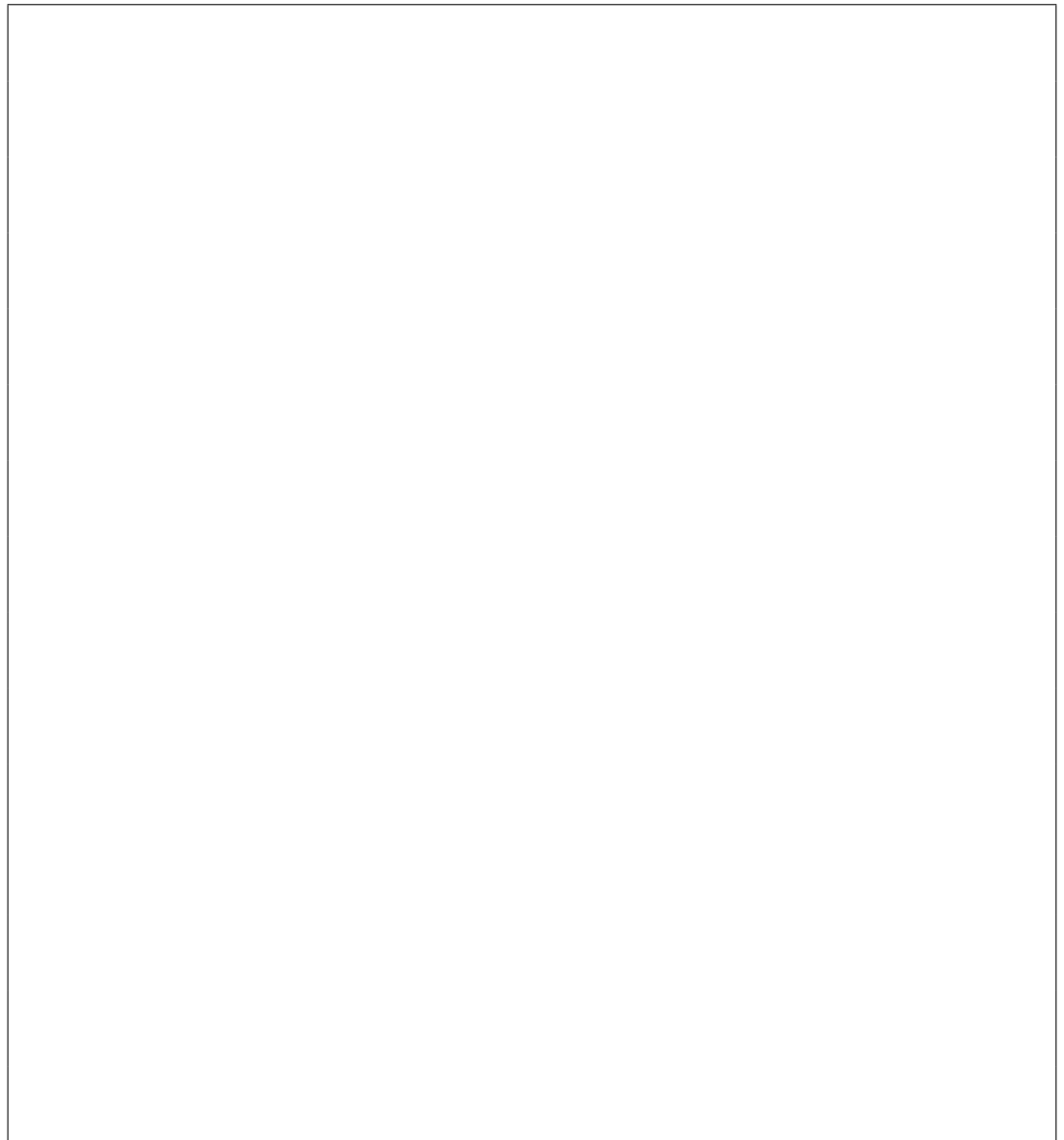
GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
Rússia 5 x 0 Arábia Saudita	Marrocos 0 x 1 Irã	França 2 x 1 Austrália	Argentina 1 x 1 Islândia
Egito 0 x 1 Uruguai	Portugal 3 x 3 Espanha	Peru 0 x 1 Dinamarca	Croácia 2 x 0 Nigéria
Rússia 3 x 1 Egito	Portugal 1 x 0 Marrocos	Dinamarca 1 x 1 Austrália	Argentina 0 x 3 Croácia
Uruguai 1 x 0 Arábia Saudita	Irã 0 x 1 Espanha	França 1 x 0 Peru	Nigéria 2 x 0 Islândia
Uruguai 3 x 0 Rússia	Irã 1 x 1 Portugal	Dinamarca 0 x 0 França	Nigéria 1 x 2 Argentina
Arábia Saudita 2 x 1 Egito	Espanha 2 x 2 Marrocos	Austrália 0 x 2 Peru	Islândia 1 x 2 Croácia
GRUPO E	GRUPO F	GRUPO G	GRUPO H
Costa Rica 0 x 1 Sérvia	Alemanha 0 x 1 México	Bélgica 3 x 0 Panamá	Colômbia 1 x 2 Japão
Brasil 1 x 1 Suíça	Suécia 1 x 0 Coreia do Sul	Tunísia 1 x 2 Inglaterra	Polônia 1 x 2 Senegal
Brasil 2 x 0 Costa Rica	Coreia do Sul 1 x 2 México	Bélgica 5 x 2 Tunísia	Japão 2 x 2 Senegal
Sérvia 1 x 2 Suíça	Alemanha 2 x 1 Suécia	Inglaterra 6 x 1 Panamá	Polônia 0 x 3 Colômbia
Sérvia 0 x 2 Brasil	México 0 x 3 Suécia	Inglaterra 0 x 1 Bélgica	Senegal 0 x 1 Colômbia
Suíça 2 x 2 Costa Rica	Coreia do Sul 2 x 0 Alemanha	Panamá 1 x 2 Tunísia	Japão 0 x 1 Polônia

2. Escolha um dos grupos e construa um grafo. Tente transmitir, através do seu grafo, a relação de partida entre cada dois países, ou seja, como representar a vitória, a derrota ou o empate no grafo? Use o espaço a seguir.

3. Caso não surja uma ideia para a representação do grafo, peça ajuda ao professor e depois que fizer o desenho, responda às perguntas:

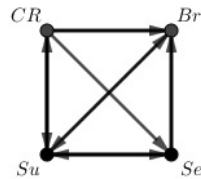
(a) Analisando o grafo feito, quais são os primeiros colocados do grupo?

(b) Como fica o grafo de todos os outros grupos? Desenhe no espaço a seguir.

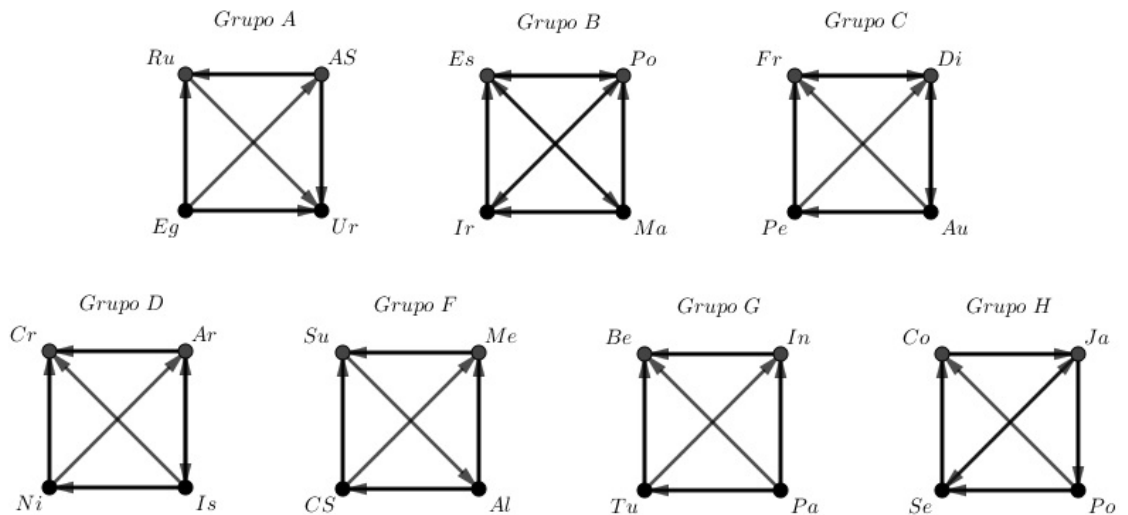


Atividade 3.12 - Respostas Esperadas

- Nesta atividade é interessante que o professor direcione a turma para representarem as relações entre os países através de arestas orientadas de modo que a aresta aponte para o vencedor da partida. Em caso de empate, a aresta que conecta os vértices correspondentes aos países que empataram é bidirecional, apontando para cada um dos dois vértices. Com isto, o grafo fica como abaixo, para o grupo *E* por exemplo.



- O professor deve explicar que grafo orientado é chamado de *digrafo*.
- Respostas esperadas para as perguntas:
 - Grupo A: Uruguai; Grupo B: Espanha; Grupo C: França; Grupo D: Croácia; Grupo E: Brasil; Grupo F: Suécia; Grupo G: Bélgica e Grupo H: Colômbia
 - Os grafos dos grupos podem ficar assim:

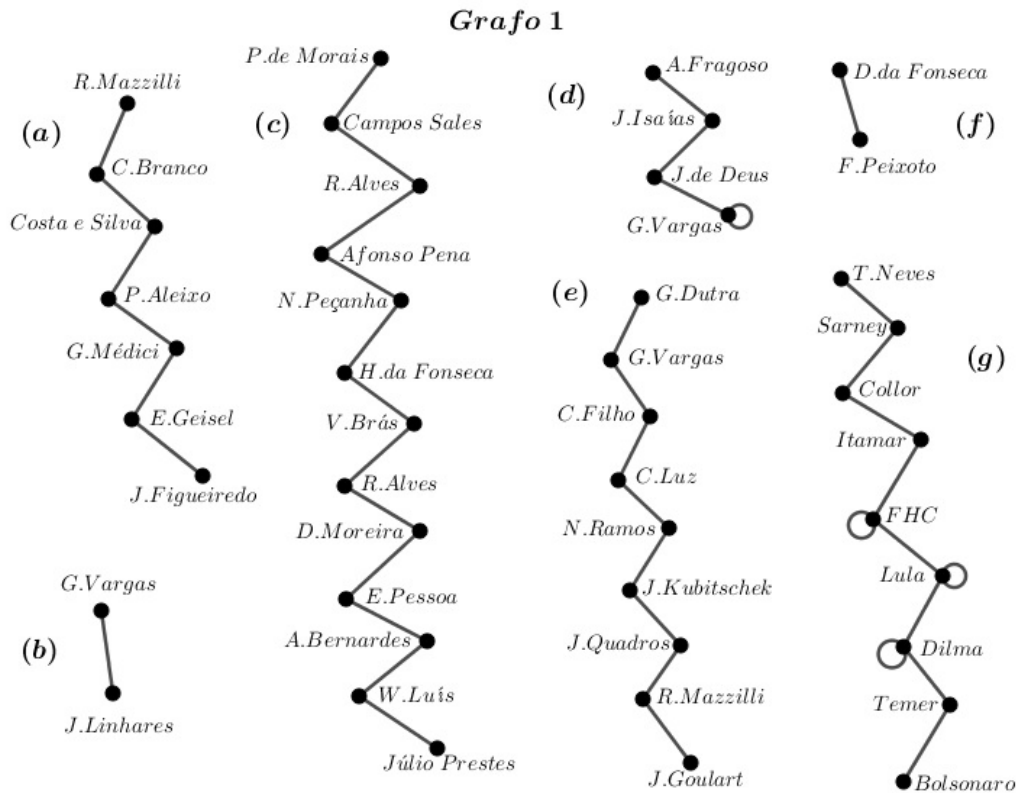


- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT407.

3.13 Grafos Desconexos e História do Brasil

- Objetos de Conhecimento: grafos desconexos, árvores e presidentes do Brasil.
- Pré-requisito: atividade 3.3

1. Analise o grafo abaixo para responder às perguntas do próximo item:



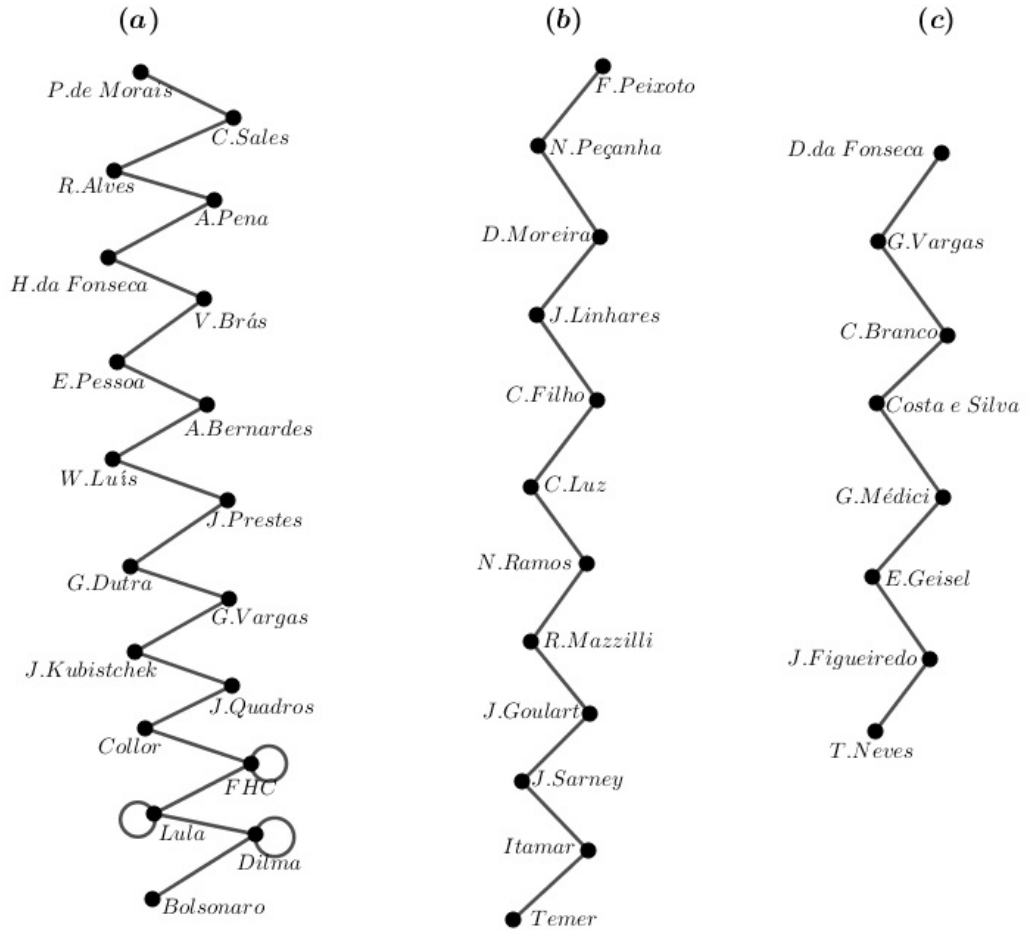
2. Responda:

(a) Qual critério foi usado na construção do *Grafo 1*?

(b) Associe cada letra (*a, b, ..., g*) ao critério do item anterior.

3. Agora analise este outro grafo para responder às perguntas do próximo item:

Grafo 2



4. Responda:

(a) Qual critério foi usado para a construção do *Grafo 2*?

(b) Associe cada letra (*a, b, c*) ao critério escolhido no item anterior.

Atividade 3.13 - Respostas Esperadas

- Referentes ao *Grafo 1*:
 - (a) Os presidentes estão separados por república.
 - (b) As repúblicas são:
 - (a) Ditadura Militar;
 - (b) Estado Novo;
 - (c) República Oligárquica;
 - (d) Governos Provisório e Constitucional;
 - (e) República Populista;
 - (f) República da Espada;
 - (g) Nova República.

- Referentes ao *Grafo 2*:
 - (a) Cada grupo representa um tipos de eleição para presidente da república.
 - (b) Os tipos de eleição são:
 - (a) Presidentes eleitos diretamente;
 - (b) Presidentes que ascenderam pela linha sucessória;
 - (c) Presidentes eleitos indiretamente.

- Após o término da atividade, o professor deve informar que os grafos 1 e 2 são chamados *desconexos*, pois há pelo menos um par de vértices entre os quais não há caminho. E temos também que cada componente conexo é chamado de *árvore*. Assim, o *Grafo 1* possui 7 árvores e o *Grafo 2* possui 3 árvores. Os grupos de árvores são *florestas*. Com isto, temos duas florestas, o *Grafo 1* e o *Grafo 2*.

- Os alunos podem/devem tentar construir grafos usando outros critérios e até assuntos de outras disciplinas.

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; EF: CE3, CE5, CE8; EM: CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EM13MAT407.

3.14 Teorema das Quatro Cores

- Objetos de Conhecimento: Teorema das quatro cores, municípios brasileiros e suas fronteiras.
 - Pré-requisito: atividade 3.1
1. Para realizar esta atividade, você precisará de lápis de cor e acesso à internet.
 2. Veja que história interessante:

O Teorema das Quatro Cores é um dos grandes problemas da matemática, desde a sua origem em meados de 1852, com o matemático inglês Francis Guthrie, que tinha como hobby colorir mapas. Até que ele lançou um desafio: seria possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores, de modo que os territórios vizinhos não tenham a mesma cor? Parece uma pergunta de resposta simples, mas durou mais de um século para que super computadores pudessem dar uma resposta, depois que muitos matemáticos tentaram respondê-la usando as técnicas de demonstração matemáticas habituais na comprovação dos Teoremas.

Esta demonstração do Teorema das Quatro Cores feita pelos super computadores é muito polêmica e gera muita discussão pois, até hoje, alguns matemáticos não a aceitam. Isso porque em uma demonstração tradicional, usando as técnicas conhecidas, é possível acompanhar cada etapa da demonstração do teorema e verificar que cada passo está correto, o que não acontece com o computador.

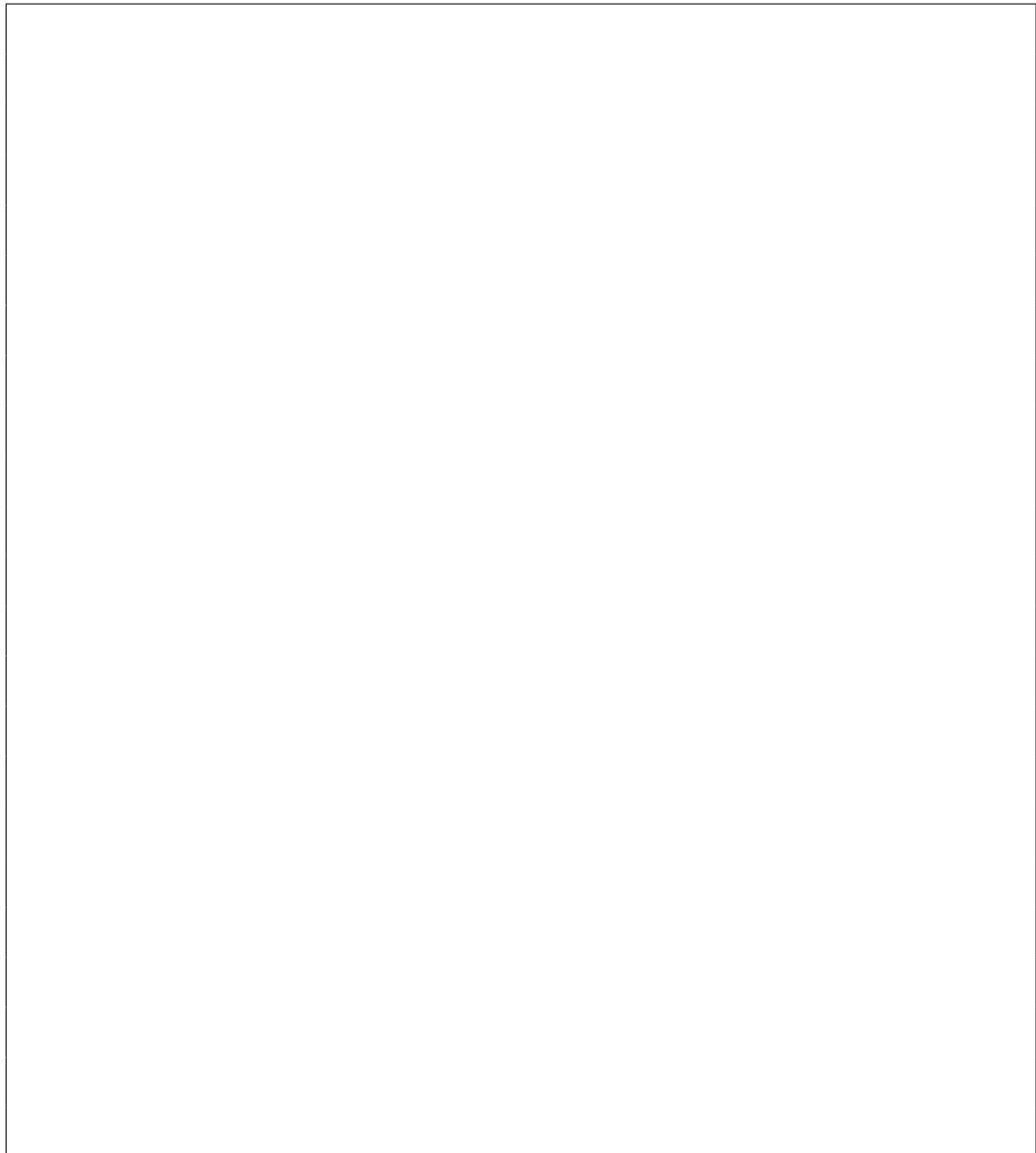
Um outro teorema, nada polêmico como o Teorema das Quatro Cores, é o Teorema das Cinco Cores, que foi rigorosamente comprovado com as técnicas de demonstração matemática, mas não é tão famoso talvez porque tem uma cor a mais, o que “facilitou” a sua prova, feita pelo matemático britânico Percy John Heawood.

3. Agora que você conhece um pouco sobre a história do Teorema das Quatro Cores, pesquise na internet o mapa de um estado brasileiro qualquer, dividido por municípios, e o represente através do desenho de um grafo no espaço reservado para isto, logo após algumas dicas para a construção do seu grafo:
 - Faça cada município como uma bolinha aberta, para que você possa colorir depois;
 - As fronteiras entre as cidades são as arestas. Cuidado que existem pontos no mapa que não podem ser considerados regiões de adjacência (fronteira). Na figura abaixo, por exemplo, podemos ver que Cachoeiras de Macacu não faz

fronteira com Tanguá e, pelo mesmo motivo, Itaboraí não faz fronteira com Rio Bonito.



4. Desenhe seu grafo neste espaço e use quatro cores distintas para colori-lo de acordo com as regras do Teorema das Quatro Cores:



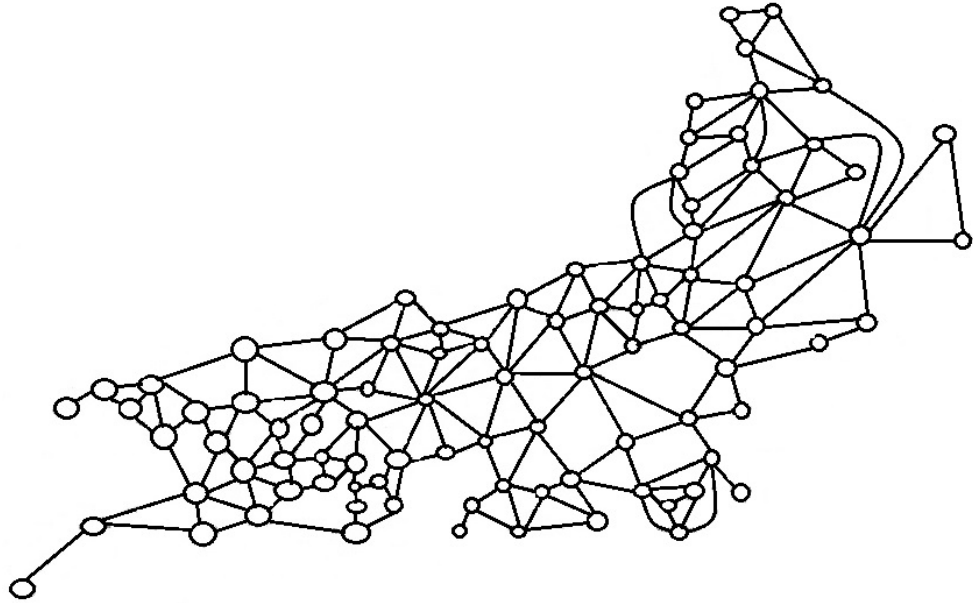
Atividade 3.14 - Respostas Esperadas

- O professor deve explicar aos alunos que, na matemática, as afirmações chamadas de *Teorema* são resultados que devem ser provados por meio de técnicas bastante precisas para que sejam aceitos por todos. O processo de provar que um Teorema é verdadeiro é chamado *Demonstração Matemática*.
- É interessante que os alunos deem suas opiniões acerca da polêmica em torno da demonstração do Teorema das Quatro Cores feita com o uso dos computadores.
- Um mapa, que pode ser usado para exemplificar a atividade, é do estado do Rio de Janeiro.

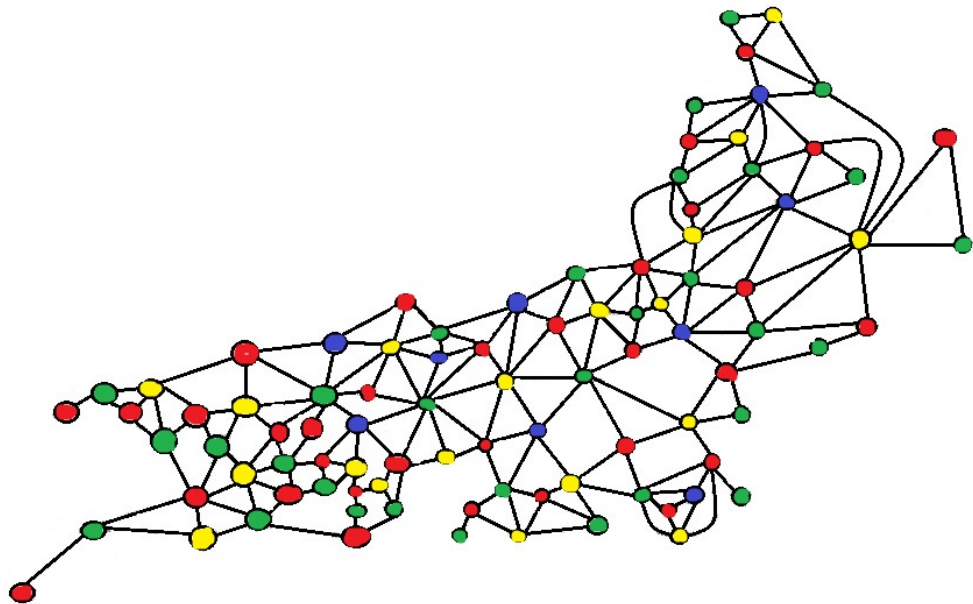


- Deve haver interação entre os alunos durante todo o processo, pois eles precisarão criar estratégias para colorir os mapas usando as restrições do Teorema das Quatro Cores, até porque algumas configurações podem ser bem difíceis. Uma estratégia boa é começar colorindo os vizinhos do município que tiver mais vizinhos, usando sempre a menor quantidade de cores possível. Como no mapa do RJ acima, fica mais fácil colorir Teresópolis depois que tiver colorido todos os seus vizinhos de fronteira.

- O grafo correspondente ao estado do RJ fica assim:



- O grafo colorido de acordo com o Teorema das Quatro Cores:



- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8; EM: CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT407.

3.15 Matrizes e o Sistema Binário

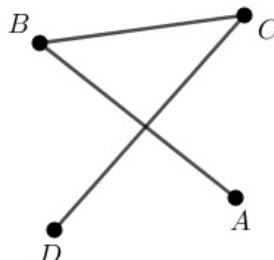
- Objetos de Conhecimento: matrizes e sistema binário.
- Pré-requisito: atividade 3.1.

Você sabia que o nosso sistema numérico é chamado decimal porque usamos dez símbolos, os algarismos de 0 a 9, para representar qualquer número que nos seja útil no dia a dia? Esses dez símbolos nos são úteis para contar, medir, dar preço, porcentagens, cálculos e tudo o que pudermos imaginar que envolva números.

Mas, por outro lado, os computadores só precisam de dois símbolos, 0 e 1, para armazenar qualquer quantidade. Impressionante né?

Existem outros sistemas numéricos, mas para esta atividade nos limitaremos ao sistema binário, que é usado para armazenar informações nos computadores.

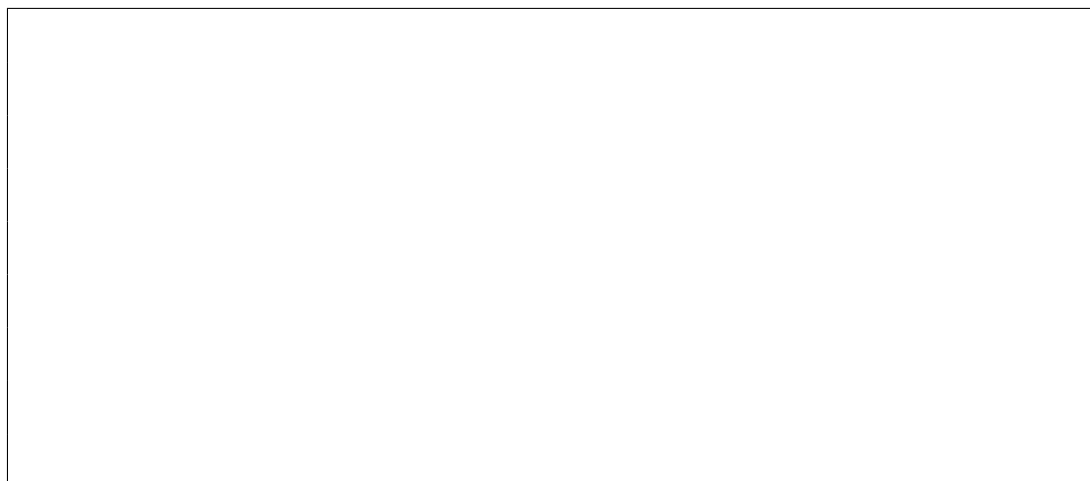
1. Represente o grafo abaixo na tabela que vem logo depois, onde os vértices aparecem na primeira linha e na primeira coluna.



2. Indique, em cada célula, o número 1 se existir uma aresta ligando os vértices e o número 0 se não existir tal aresta.

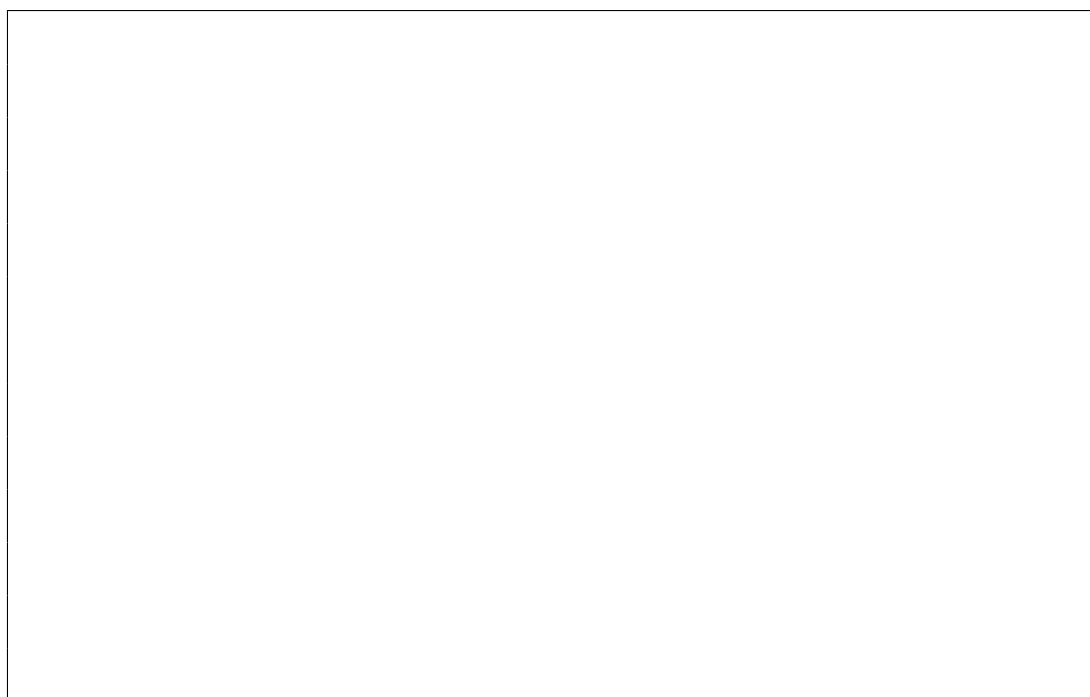
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

3. Cada célula da tabela acima é um elemento de uma matriz quadrada 4x4. Desenhe a matriz correspondente no espaço a seguir. Na *Teoria dos Grafos* essa matriz é chamada *Matriz de Adjacência* do grafo dado.



4. Analise a matriz abaixo e desenhe no espaço, logo depois, o grafo correspondente à matriz de adjacência M :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



5. Responda:

(a) Por que a *diagonal principal* da matriz M é totalmente preenchida por zeros?

(b) Determine o grau de cada vértice.

(c) O grafo correspondente à matriz de adjacência M tem um caminho euleriano, um ciclo euleriano ou nenhum dos dois? Explique.

Atividade 3.15 - Respostas Esperadas

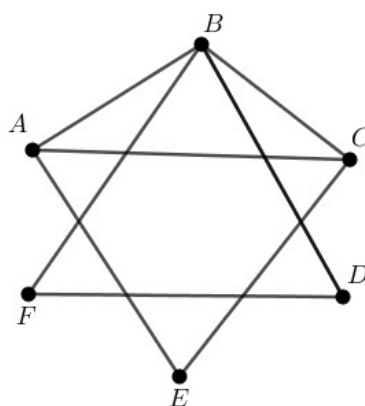
- A tabela 4X4 preenchida fica assim:

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	0	1	0
C	0	1	0	1
D	0	0	1	0

- A matriz de adjacência do grafo anterior é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- O grafo correspondente à matriz de adjacência M pode ficar assim:



- Para as perguntas, podemos ter as respostas:
 - (a) A diagonal principal é toda preenchida por zeros porque nenhum vértice está ligado a ele mesmo.
 - (b) Os vértices A e C têm grau 3 cada; os vértices D , E e F têm grau 2 cada e o vértice B tem grau 4.
 - (c) O grafo tem um caminho euleriano porque dois de seus vértices têm grau ímpar e os demais têm grau par.
- Sugira aos alunos que construam outras matrizes de adjacência usando, por exemplo, polígonos convexos.

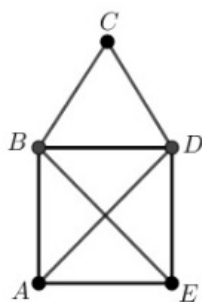
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG4; CG5; EM: CE3, CE4.
 - Habilidades: EM13MAT315, EM13MAT405.

3.16 Matrizes e Grafos

- Objetos de Conhecimento: matrizes e multiplicação entre matrizes.
- Pré-requisito: atividade 3.15.

Como vimos na Atividade 3.15, uma *matriz de adjacência* de um grafo, é uma matriz que tem a mesma ordem que o referido grafo. Na matriz de adjacência, que chamaremos de M , associamos cada linha e cada coluna a um vértice, onde cada elemento $m_{ij} = 1$, se os vértices i e j formarem aresta e, caso contrário, $m_{ij} = 0$. Assim, sabendo que a matriz de adjacência nos informa quais pares de vértices formam arestas, responda:

1. Construa a matriz de adjacência M do grafo abaixo:



$$M = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2. Você pode perceber que a matriz de adjacência é simétrica. Consegue explicar o porquê?

3. Você consegue imaginar algum caso em que a matriz de adjacência não é simétrica? Explique.

4. Calcule a matriz $N = M^2$

$$N = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

5. Os elementos da diagonal principal da matriz $N = M^2$ têm um significado especial. Você consegue perceber qual seria? Explique.

6. Os números que não estão na diagonal da matriz $N = M^2$ também têm um significado, eles mostram a quantidade de caminhos de tamanho 2, ou seja, que passam por duas arestas entre os vértices i e j . Assim, por exemplo, o elemento n_{34} mostra a quantidade de caminhos de tamanho 2 entre os vértices C e D . Com isto, de quantos modos podemos sair do vértice B e chegar no vértice D ?

7. O mesmo acontece com os outros elementos? Por quê?

Atividade 3.16 - Respostas Esperadas

1. A matriz de adjacência M fica assim:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Porque não faz diferença ir do vértice A para o vértice B ou do vértice B para o vértice A .

3. No caso de um grafo ser orientado (digrafo), a matriz de adjacência pode ser não simétrica.

4. O cálculo $N = M^2$ fica assim:

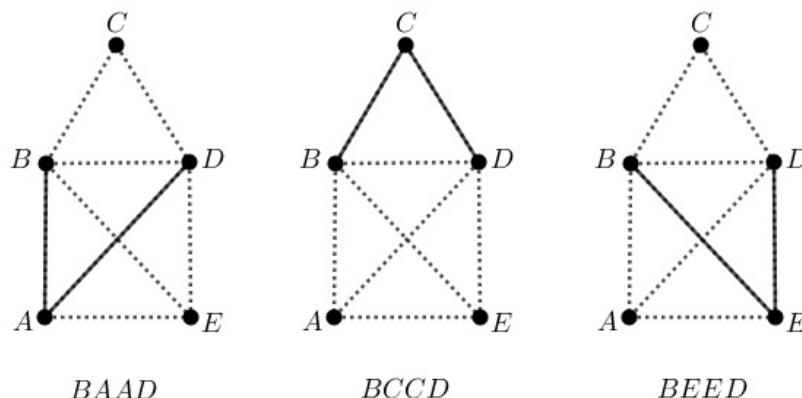
$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Cada elemento n_{ij} da diagonal da matriz $N = M^2$ é igual ao grau do vértice i . Assim, o elemento n_{11} fornece o grau do vértice A , o elemento n_{22} fornece o grau do vértice B e assim por diante. Isto ocorre por causa da multiplicação de elementos iguais. Observe o exemplo do n_{33} :

$$N = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

O elemento n_{33} , então, é igual a quantidade de vértices adjacentes ao vértice C , isto é, ao grau de C .

6. Três modos, assim ilustrados:



7. Quando multiplicamos a linha 2 pela coluna 4, para gerar n_{24} por exemplo, temos uma soma com cinco parcelas, sendo duas delas nulas:

$$N = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ BA & 0 & BC & BD & BE \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & AD & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & BD & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & CD & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & ED & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & BAAD + 0 + BCCD + 0 + BEED & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Cada parcela não nula representa um caminho de B a D . A presença do zero indica aresta que não existe, assim não somamos essa sequência. Esta ideia vale para qualquer elemento da matriz, inclusive para os da diagonal principal, que representa o número de arestas ligadas ao próprio vértice, que é o grau dele. Isto tudo é resultado do Teorema de Festinger [25].

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; EM: CE4.
 - Habilidade: EM13MAT405.

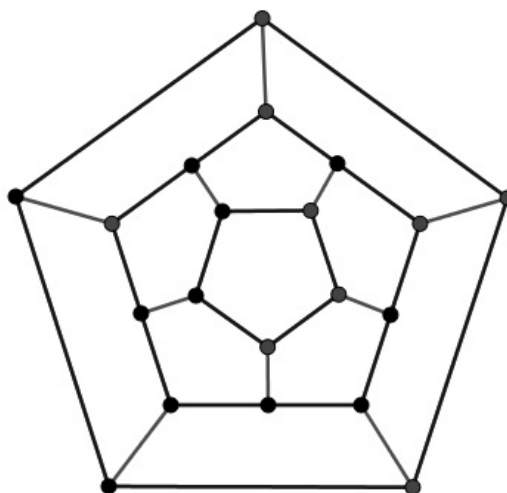
3.17 Grafos Hamiltonianos e Poliedros de Platão

- Objetos de Conhecimento: grafos hamiltonianos e poliedros de Platão.
- Pré-requisito: atividade 3.4 ou atividade 3.15.

Em 1859, o matemático irlandês William Hamilton propôs o seguinte jogo:

“Um viajante deseja fazer uma excursão por vinte cidades, visitando cada cidade uma única vez, partindo de uma cidade qualquer e voltando para a mesma. É possível fazer tal excursão?” (A Voyage Around the World).

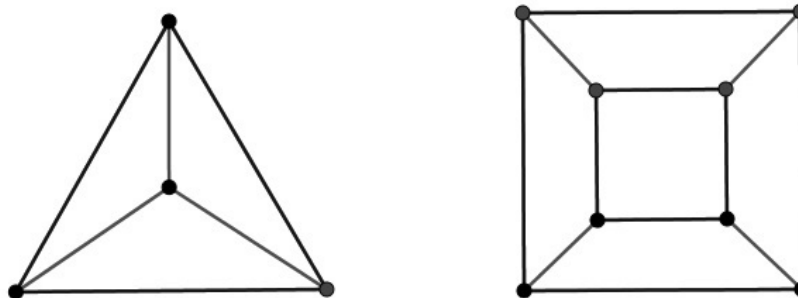
O grafo abaixo representa as vinte cidades:



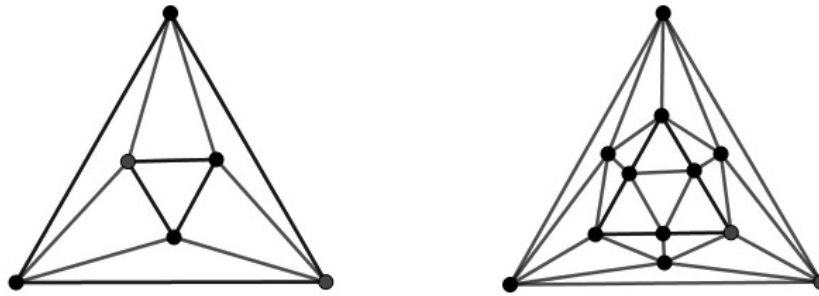
Este jogo introduziu um novo tipo de grafo, o *grafo hamiltoniano*.

O grafo do jogo acima corresponde ao *dodecaedro*, um *Poliedro de Platão*. Este tipo de representação do poliedro é conhecido como *Diagramas de Schlegel*.

A seguir, os demais poliedros de Platão nos diagramas de Schlegel:



Tetraedro e Hexaedro



Octaedro e Icosaedro

1. Com isto, responda:

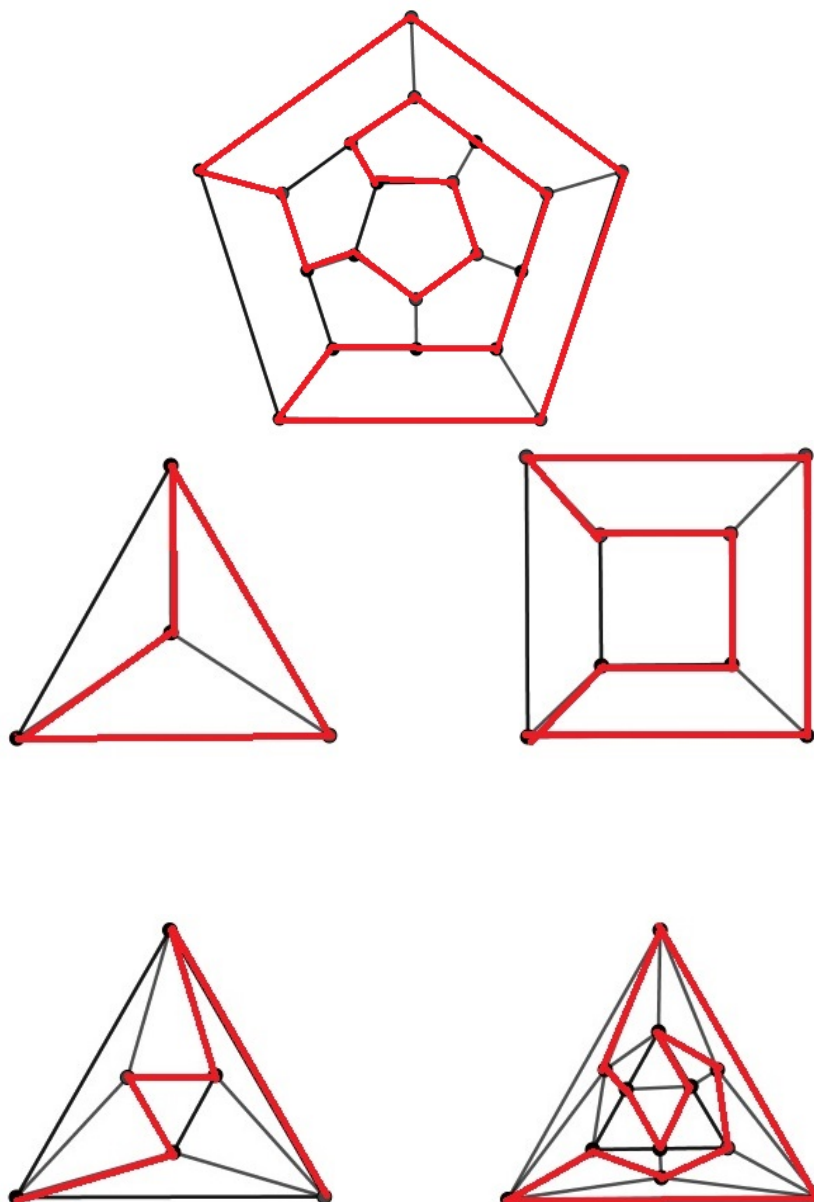
- (a) Para cada grafo correspondente a um poliedro de Platão, em quais é possível fazer o percurso nas mesmas condições propostas por Hamilton, ou seja, em quais é possível passar por todos os vértices uma única vez, voltando ao vértice de partida?

- (b) Quais desses grafos admitem caminhos ou ciclos eulerianos, sendo ou não hamiltoniano?

Atividade 3.17 - Respostas Esperadas

- Possíveis respostas:

(a) Todos os poliedros de Platão são grafos hamiltonianos. As soluções estão em vermelho:



(b) Nenhum poliedro de Platão admite um caminho euleriano; o octaedro admite um ciclo euleriano; os demais não têm caminho ou ciclo euleriano.

- Explicar que *grafo hamiltoniano* é o nome dado a todo grafo no qual é possível partir de um de seus vértices, passar por todos os outros uma única vez e voltar ao vértice

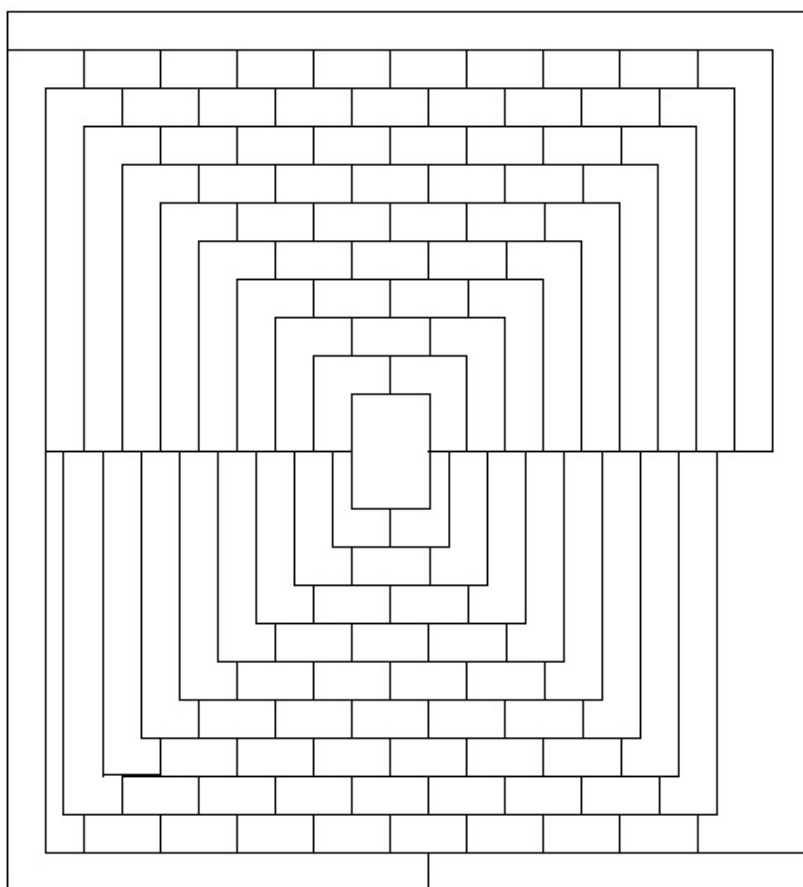
de partida.

- Explicar que um grafo pode ser hamiltoniano e ter ciclos e/ou caminhos eulerianos ao mesmo tempo, lembrando que para caminhos eulerianos (dois vértices de grau ímpar e os demais de grau par) e os ciclos (todos os vértices de grau par) temos condições fáceis de verificar, mas para grafos hamiltonianos é provado que não haverá uma maneira tão simples de reconhecer. Parece estranha esta afirmação, não é? Mas é comum provarem matematicamente que um problema não terá uma solução “tão fácil”, mesmo que seja um problema para o qual não se conhece uma solução. Se quiser saber mais, o professor pode pesquisar sobre problemas *NP-completos*.
- Explorar mais o assunto, propondo que os alunos escolham cidades pelo Brasil, ou pelo mundo, construam os grafos, fazendo cada vértice ser uma cidade e as arestas serem as conexões entre as cidades (que podem ser feitas por avião, barco, estrada etc), e tentem resolver o problema proposto por Hamilton.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG4; CG5; EF: CE3, CE6; EM: CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT315.

3.18 Desafio do Teorema das Quatro Cores

- Objeto de Conhecimento: Teorema das quatro cores.
- Pré-requisito: atividade 3.14.

O mapa abaixo, de autoria do matemático Martin Gardner, foi publicado na revista *Scientific American*, em 1975, como um desafio de aplicação do Teorema das Quatro Cores. Na ocasião, Gardner afirmou que quatro cores distintas não eram suficientes para colori-lo, com as restrições do Teorema.

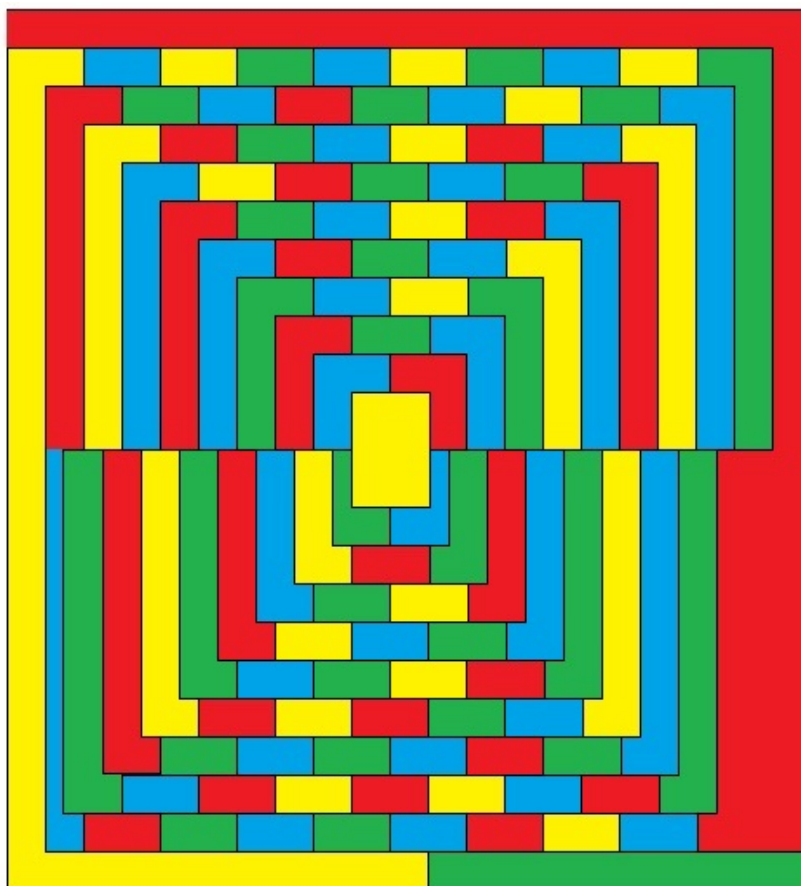


Tente colorir o mapa acima usando as regras do Teorema das Quatro Cores e duas dicas que podem ser encaradas como “estratégias”:

- Comece a colorir a região que possui mais vizinhos;
- Use a menor quantidade de cores possível no início da atividade, introduzindo uma nova cor quando não tiver como permanecer nas restrições do problema.

Atividade 3.18 - Respostas Esperadas

- Uma coloração possível é dada por:



- As “estratégias” dadas no problema são as mesmas usadas na demonstração do Teorema das Quatro Cores e do Teorema das Cinco Cores.
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; EF: CE2, CE3, CE5, CE6, CE8; EM: CE1, CE3, CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT407.

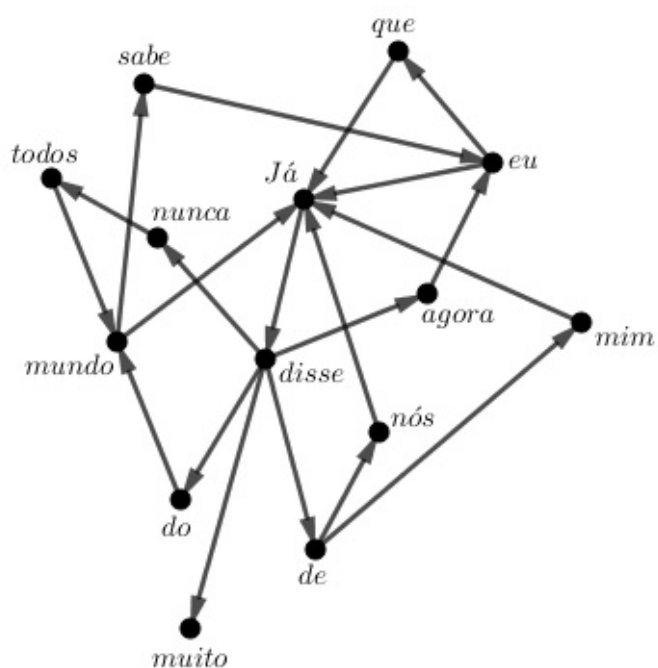
3.19 Poemas Orientados

- Objeto de Conhecimento: digrafos e poemas.

- Pré-requisito: atividade 3.5

1. Tente ler o poema abaixo, de modo que as setas indicam a direção do texto. Se você conseguir usar todas as palavras, certamente terá formado a sequência de palavras do texto original.

Já disse (Paulo Leminski)



2. Escreva a sequência de palavras que encontrar:

Atividade 3.19 - Respostas Esperadas

- Discutir o uso do digrafo na escrita de textos como o poema dado, que é um poema pós-modernista e na sua estrutura original tem a forma:

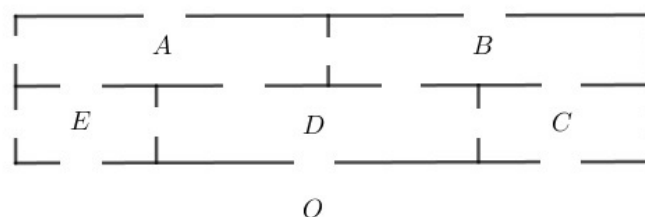
Já disse
“Já disse de nós.
Já disse de mim.
Já disse do mundo.
Já disse agora, eu que já disse nunca.
Todo mundo sabe, eu já disse muito.
Tenho a impressão
que já disse tudo.
E tudo foi tão de repente...”
(Paulo Leminski)

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG4; CG5; EF: CE5, CE6; EM: CE3, CE4.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT315, EM13MAT407.

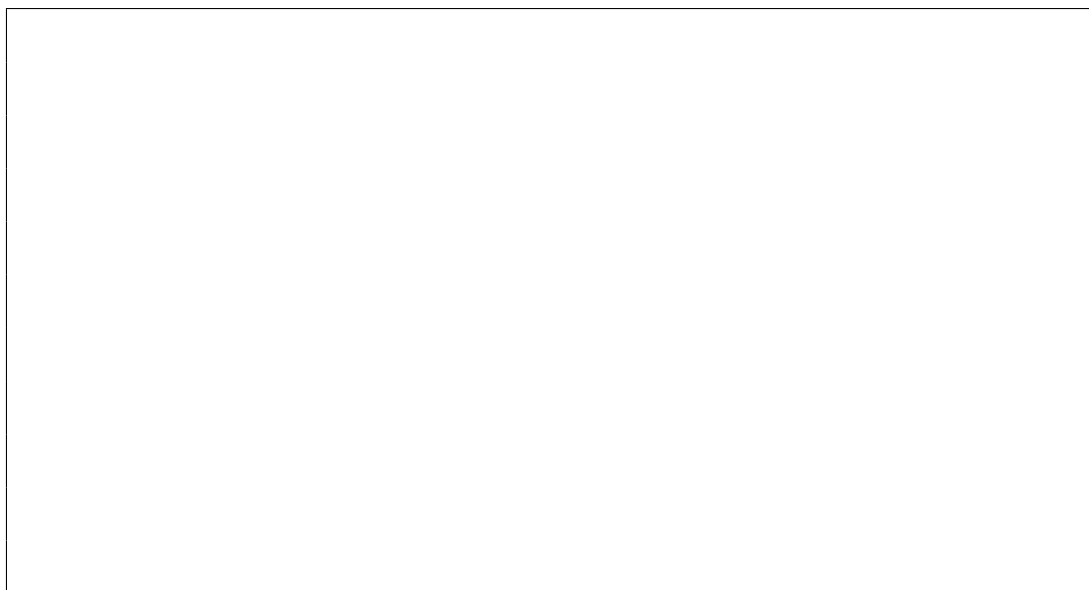
3.20 Caminho por todos os Cômodos

- Objeto de Conhecimento: caminho euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.11.

A planta de uma casa, conforme figura abaixo, mostra cinco cômodos interligados por portas. É possível sair de um cômodo qualquer e passar por todas as portas uma única vez?



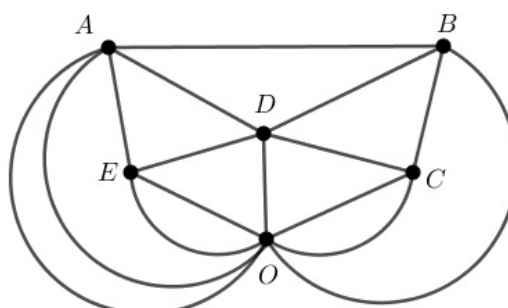
1. Construa um grafo no espaço abaixo, onde os vértices podem ser os cômodos, onde o lado de fora pode ser considerado como um cômodo a mais. Pense em como colocar as arestas, quando ligar dois vértices (cômodos) por uma aresta.



2. É possível fazer um caminho de acordo com o proposto pelo enunciado? Investigue todos os casos possíveis e, em caso afirmativo, mostre um caminho.

Atividade 3.20 - Respostas Esperadas

1. Fazendo corresponder a cada cômodo um vértice e a cada porta uma aresta, podemos construir o grafo a seguir:

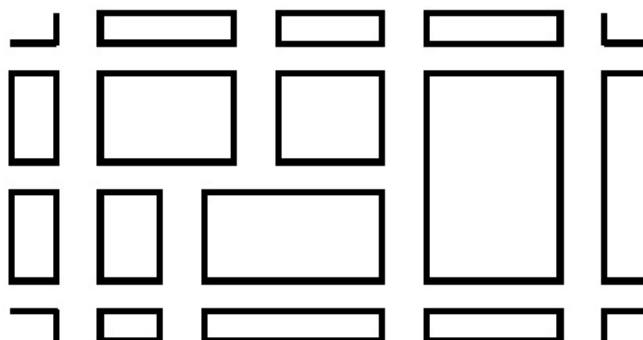


2. Como o nosso grafo possui apenas dois vértices de grau ímpar, ele admite um *ciclo euleriano*. Com isto, só podemos realizar um caminho passando por todas as portas uma única vez, começando por um dos vértices de grau ímpar e terminando no outro, ou seja, um caminho começando por A e terminando em D ou um caminho que começa em D e termina em A .
- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6 (EF); EM: CE1, CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA06, EF07MA07, EM13MAT106, EM13MAT315.

3.21 O Caminho do Carteiro

- Objeto de Conhecimento: ciclo euleriano.
- Pré-requisito: atividade 3.20.

O mapa abaixo representa os quarteirões por onde um carteiro deve entregar algumas correspondências.



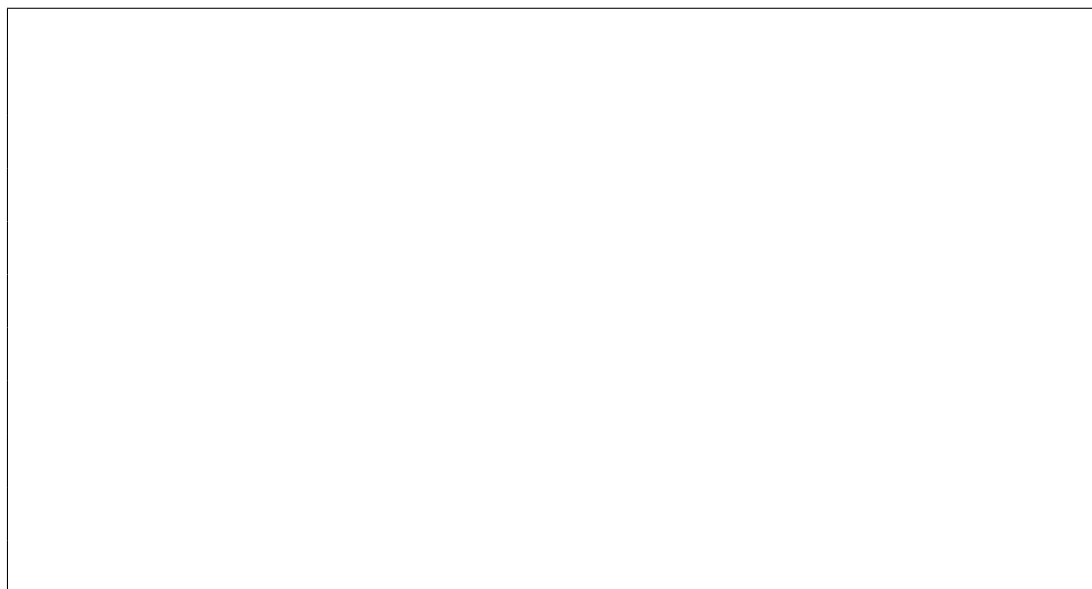
Sobre o mapa, responda:

1. Como poderia ser construído o grafo que representa o mapa do problema?

2. É possível que o carteiro entregue todas as correspondências passando exatamente uma vez por cada lado das ruas? Explique.

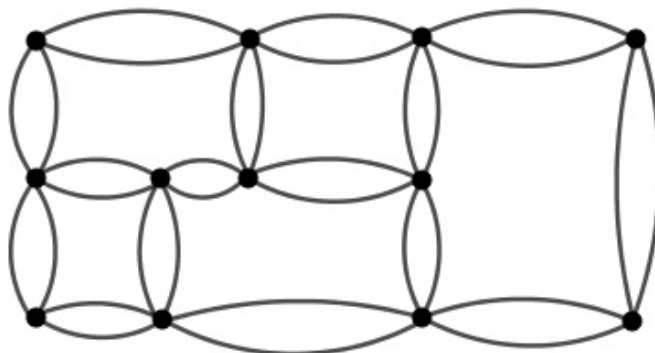
3. E se o carteiro pudesse ir de um lado para o outro em uma mesma rua, em zigue-zague, seria possível entregar todas as correspondências passando exatamente uma vez por cada rua? Explique.

4. Agora, tente construir um grafo que mostre quantas e quais ruas precisariam ser repetidas para que o carteiro consiga realizar a entrega das cartas da forma mais econômica, ou seja, repetindo o menor número de ruas.

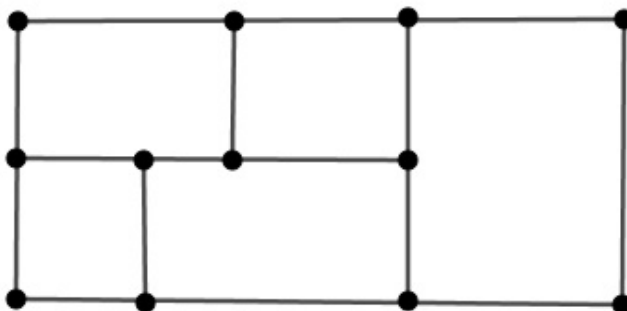


Atividade 3.21 - Respostas Esperadas

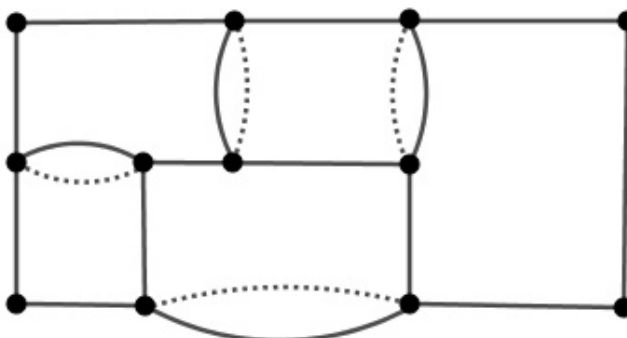
1. Fazendo corresponder a cada esquina um vértice e a cada lado da rua uma aresta, temos o seguinte grafo:



2. Sim, pode-se partir de qualquer vértice, pois todos os vértices são de grau par, ou seja, temos um *ciclo euleriano*.
3. Não, pois a paridade dos vértices mudaria para somente quatro vértices de grau par, de um total de doze vértices. Assim, o grafo não teria *ciclo* ou *caminho euleriano*.



4. Teríamos que tornar possível a construção do *ciclo euleriano* no grafo fazendo com que os vértices passem a ter grau par, o que nos daria o grafo a seguir, onde as ruas adicionadas são as arestas pontilhadas:



Vale ressaltar que, não sendo necessário que o carteiro volte ao ponto inicial da rota, bastaria que o grafo tivesse um *caminho euleriano*, isto é, dois dos vértices poderiam continuar a ter grau ímpar.

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG2; CG4; EF: CE2, CE5, CE6; EM: CE1, CE3.
 - Habilidades: EF06MA34, EF07MA05, EF07MA06, EM13MAT106, EM13MAT315.

3.22 O Mundo dos Computadores

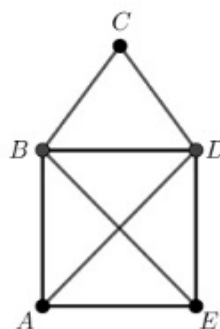
- Objetos de Conhecimento: algoritmo.
- Pré-requisito: atividade 3.21.

Você sabe como um computador verifica se um dado grafo é ou não é euleriano? Vamos aprender agora, de forma básica, como um computador é instruído a resolver esse tipo de problema.

Suponha que um computador tenha que verificar se, dada uma sequência qualquer de vértices, essa sequência corresponde ou não a um caminho euleriano de um grafo previamente conhecido.

Primeiramente, devemos informar ao computador qual grafo é este, inserindo os vértices e arestas. Os computadores não entendem desenhos, eles necessitam de representações numéricas, ou sequenciais, para que possam trabalhar. Existem muitas maneiras de fazer isto, vamos aqui organizar as informações de uma forma padrão, como se fossem introduzidas em um computador depois.

Assim, preencha a tabela abaixo, colocando todas as arestas do grafo, que está ao lado, de forma que elas fiquem em ordem alfabética, como num dicionário.



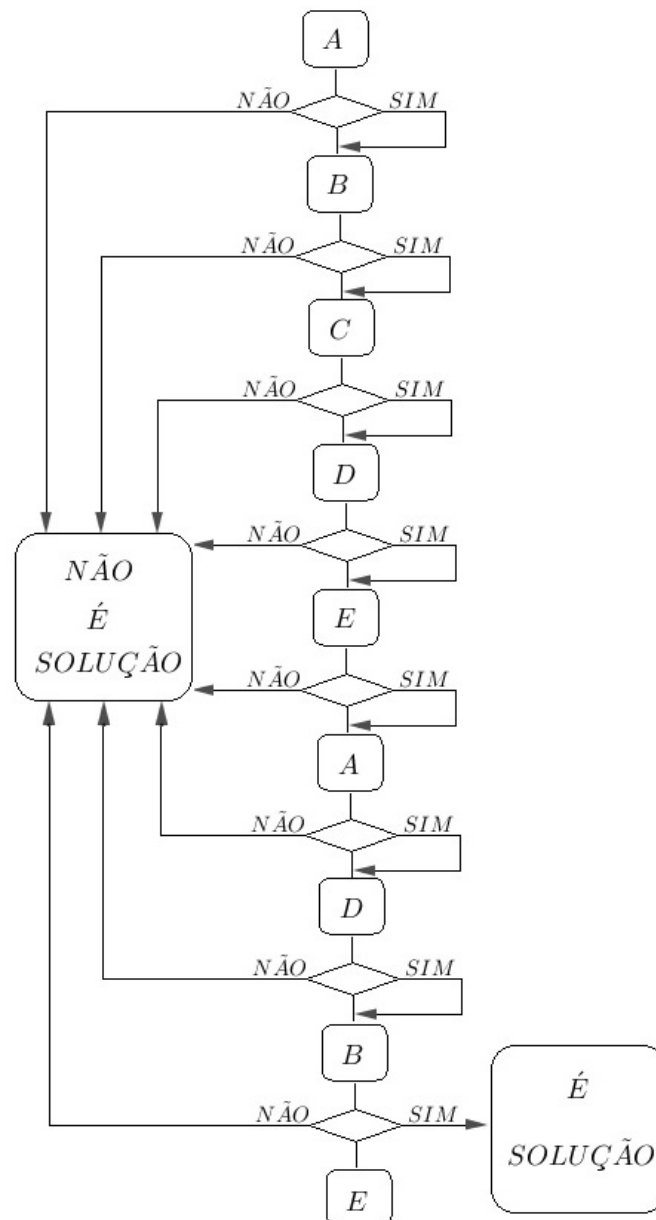
Agora que o computador conhece o grafo, afinal o que importa num grafo são as ligações entre os vértices, como ele verificaria se a sequência $ABECDBCDE$, por exemplo, é uma solução?

Após a entrada dos dados o computador executará uma sequência de instruções, que é traduzida para uma linguagem que ele possa entender (linguagem de programação) e, assim, verificará passo a passo se as arestas pertencem

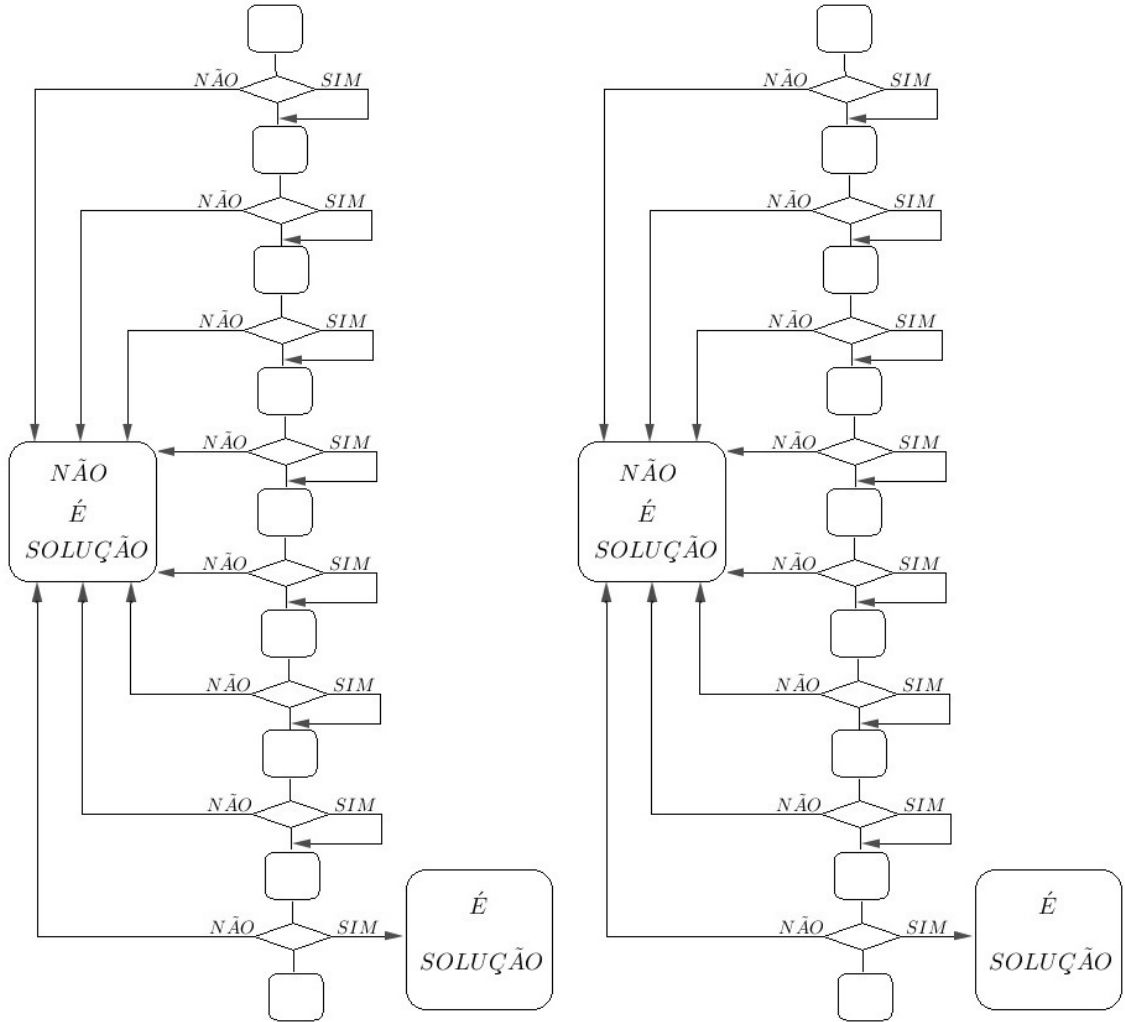
à lista na ordem em que foi apresentada. Este processo é chamado de *algoritmo*.

Neste problema, para verificar se a sequência $ABECDBCDE$ existe no grafo dado, o primeiro passo consiste em verificar se AB é uma aresta, isto é, se pertence à tabela que você preencheu. Em caso afirmativo, a aresta é marcada como já usada e a próxima verificação é se BE pertence à tabela. Em caso afirmativo, esta aresta é marcada como já usada e, assim por diante, a verificação de todas as arestas é feita. Se ao final for verificado que todas as arestas foram usadas, então a sequência $ABECDBCDE$ é uma solução.

Vamos simular este procedimento através do esquema abaixo, onde você pode fazer a verificação da mesma forma que um computador faria.



Agora, verifique se as seqüências *ADBEABDAC* e *BAEBCDCEA* são soluções do grafo dado. Use os esquemas a seguir:



Agora que você já sabe como um *algoritmo* ajuda um computador a verificar se uma seqüência é uma solução de um grafo dado, responda:

1. Se um computador pode realizar esta verificação rapidamente (em milionésimos de segundo), poderíamos mandá-lo verificar todas as seqüências possíveis e exibir todas as soluções para o problema rapidamente?

2. Quantas sequências diferentes um computador precisaria testar para o grafo dado?

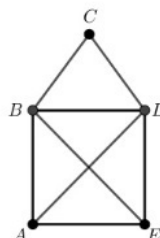
3. O tempo para um computador verificar a quantidade de sequências que você calculou seria reduzido se considerarmos que muitas delas são facilmente descartáveis. Mas pense num grafo com 20 arestas. Quantas sequências podem ser formadas?

4. Se um computador pode examinar 1000000 sequências por segundo, quanto tempo ele precisaria para descobrir todas as soluções?

Atividade 3.22 - Respostas Esperadas

- A tabela preenchida em ordem alfabética fica assim:

<i>AB</i>
<i>AD</i>
<i>AE</i>
<i>BC</i>
<i>BD</i>
<i>BE</i>
<i>CD</i>
<i>DE</i>



- A sequência *ABECDBCDE* é solução, mas as sequências *ADBEABDAC* e *BAEBCDCEA* não são soluções, pois as arestas *AC* e *CE*, respectivamente não fazem parte do grafo dado.
- Para as perguntas podemos responder:
 1. Resposta pessoal, que deve gerar alguma discussão com as respostas dos outros.
 2. Temos oito possibilidades para escolher o primeiro vértice, sete para escolher o segundo, seis para escolher o terceiro ..., ou seja, temos uma permutação de oito elementos (vértices), que é igual a $8! = 40320$ sequências.
 3. É o mesmo raciocínio do item anterior. Assim, temos $20! \approx 2,4 \cdot 10^{18}$ sequências possíveis.
 4. Se um computador verificasse um milhão de sequências por segundo ele demoraria um tempo astronômico, como podemos ver através dos cálculos abaixo:

$$2432902008176640000 \div 1000000 = 2432902008177 \text{ segundos}$$

$$2432902008177 \div 60 = 40548366803 \text{ minutos}$$

$$40548366803 \div 60 = 675806113 \text{ horas}$$

$$675806113 \div 60 = 28158588 \text{ dias}$$

$$28158588 \div 365 = 77147 \text{ anos}$$

$$77147 \div 1000 = 77 \text{ milênios}$$

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; CG5; EM: CE1, CE3, CE4.
 - Habilidades: EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT407.

3.23 Caminho Mínimo

- Objetos de Conhecimento: grafo valorado, algoritmo de Dijkstra e município de Macaé.
- Pré-requisito: atividade 3.22.

Muitos alunos da nossa escola, que fica no bairro Cancela Preta, moram no bairro Imboassica e têm algumas opções de caminhos para virem às aulas. Vamos mostrar que existe um *caminho mínimo* que nos leva de Imboassica à Cancela Preta.



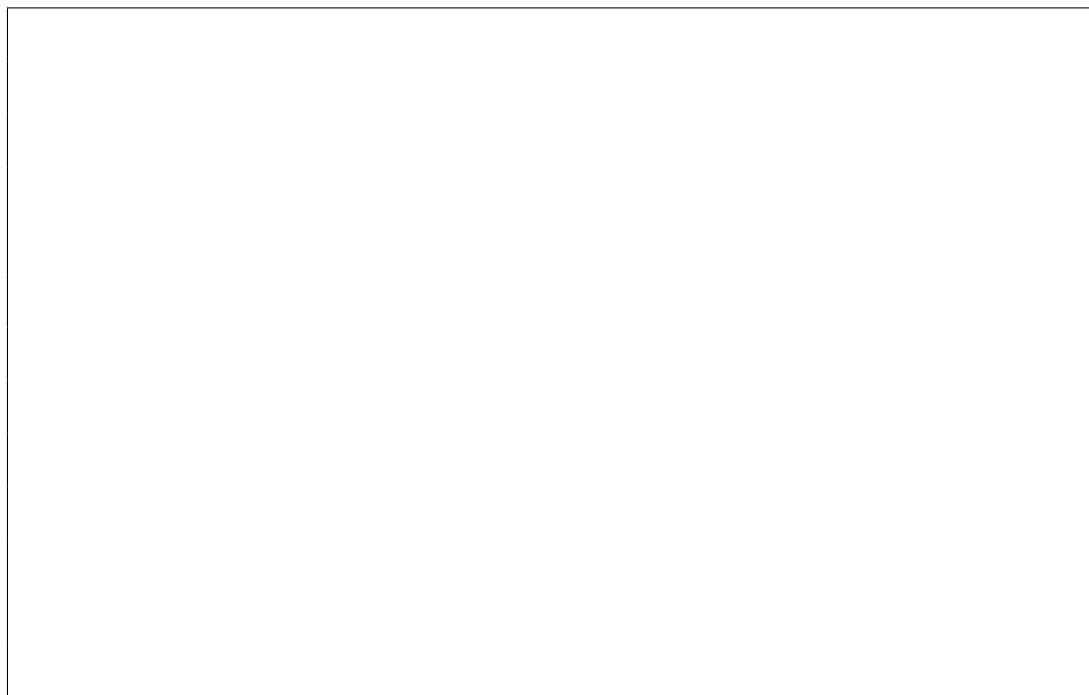
As distâncias das principais vias que dão acesso à escola, são dadas por:

- Imboassica ao Vale Encantado tem $1,6Km$;
- Imboassica à Praia do Pecado tem $3,3Km$;
- Imboassica ao São Marcos tem $2Km$;
- São Marcos à Praia do Pecado tem $1Km$;
- São Marcos ao Cavaleiros tem $2Km$;
- São Marcos à Glória tem $3,6Km$;
- Vale Encantado à Glória tem $4,3Km$;
- Praia do Pecado à Glória tem $2Km$;
- Praia do Pecado ao Cavaleiros tem $1,3Km$;
- Cavaleiros à Cancela Preta tem $2,6Km$;

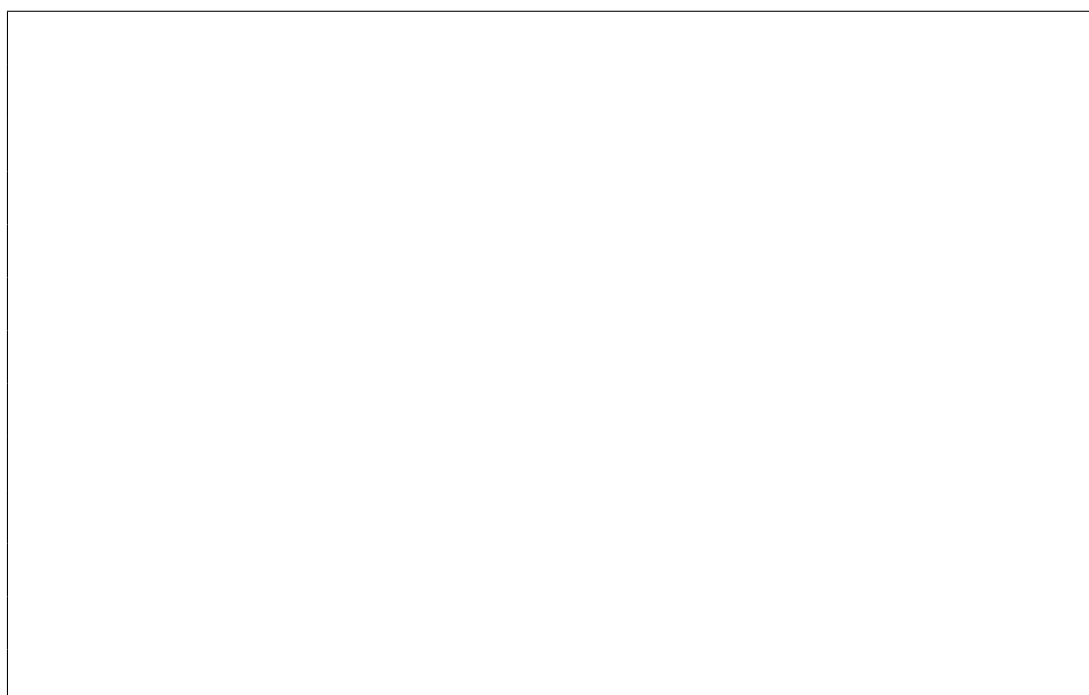
- Gloria à Cancela Preta tem $1Km$.

Assim, com estas informações, faça o que é pedido:

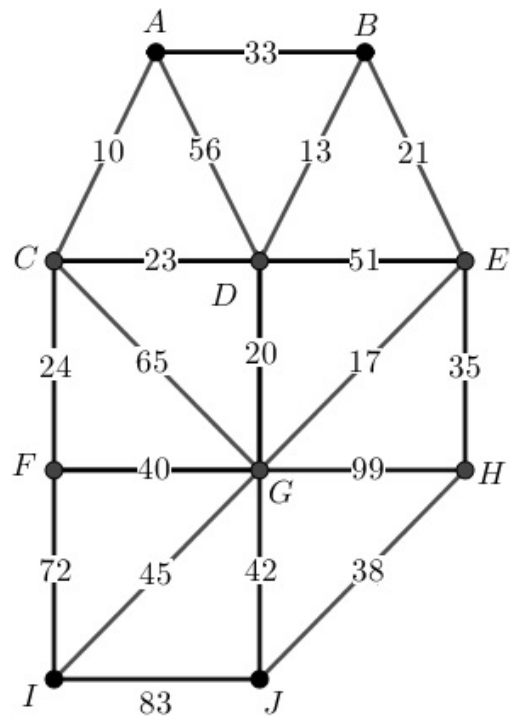
1. Construa, no espaço abaixo, um grafo que represente as distâncias dos principais acessos à escola:



2. O grafo que você acabou de construir, com as distâncias entre cada vértice, é conhecido na Teoria dos Grafos como *grafo valorado*. Com este grafo você consegue solucionar e justificar a pergunta: Qual é o menor caminho entre os bairros Imboassica e Cancela Preta?



3. Observe o grafo a seguir e responda qual é o menor caminho entre:

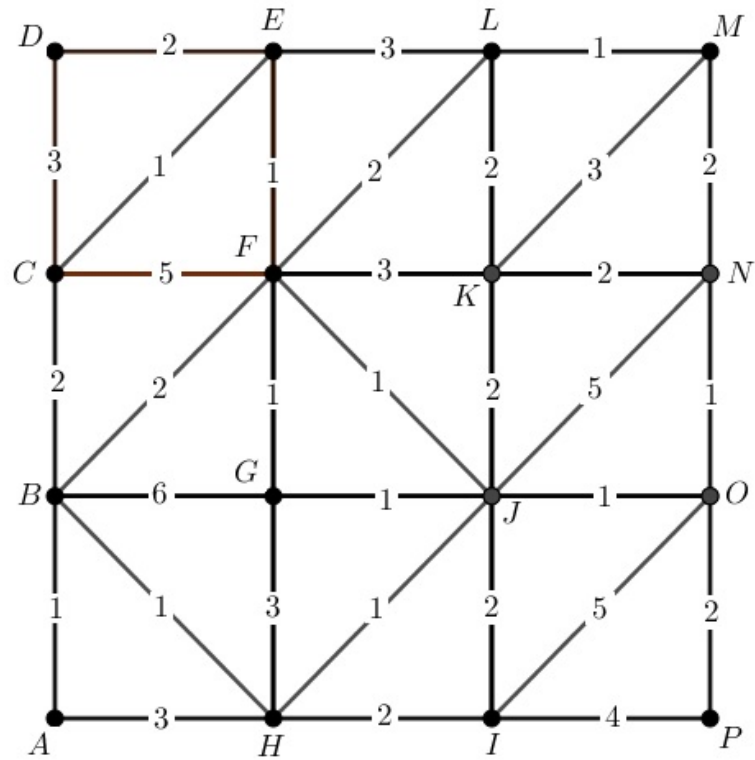


(a) O vértice A e o vértice G ?

(b) O vértice A e o vértice J ?

(c) Descreva o algoritmo, ou seja, a estratégia que você usou para responder aos itens anteriores.

4. Analise o grafo a seguir e responda:

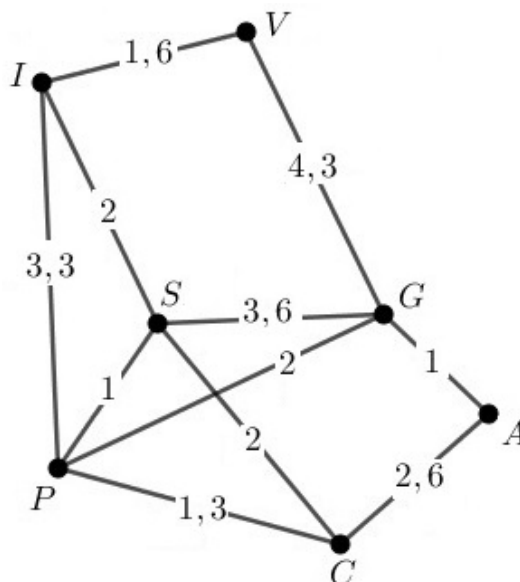


(a) Qual é o menor caminho entre os vértice A e M ?

(b) Explique o algoritmo que você usou.

Atividade 3.23 - Respostas Esperadas

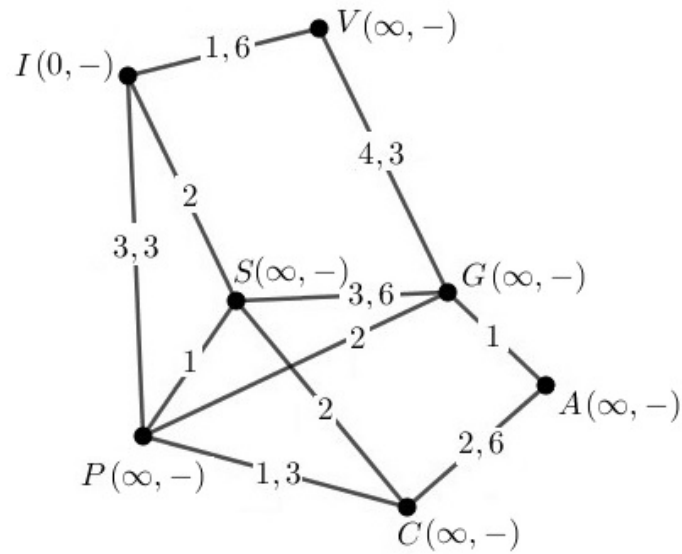
1. O grafo valorado pode ficar assim:



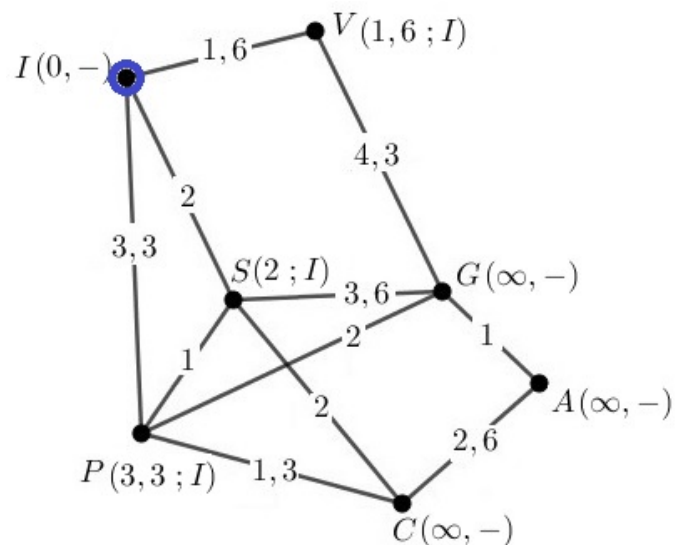
Todas as outras perguntas são de caráter investigativo, que despertam a criação de estratégias por parte dos alunos. Assim, após o professor ter contato com as resoluções dadas pelos alunos, pode mostrar o funcionamento do *Algoritmo de Dijkstra* para calcular o menor caminho entre vértices num grafo. Este algoritmo fornece o caminho mínimo entre o vértice de partida e qualquer outro vértice, mas não fornece o caminho mínimo entre dois vértices quaisquer.

Podemos começar a abordagem do algoritmo de Dijkstra aplicando-o diretamente na resolução da questão 2. Assim, devemos seguir os passos:

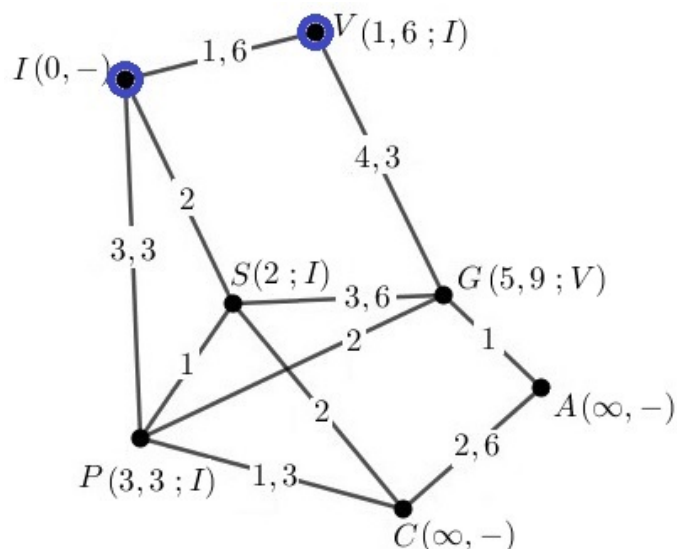
2. Pelo algoritmo de Dijkstra:
- (a) Começamos atribuindo a cada vértice um par ordenado onde o primeiro elemento indica sua distância ao vértice de partida e o segundo mostra qual é o vértice antecessor a ele no menor caminho do vértice de partida até ele. Assim, começamos atribuindo $(0, -)$ ao vértice I para indicar que este é o vértice de partida e $(\infty, -)$ aos demais vértices:



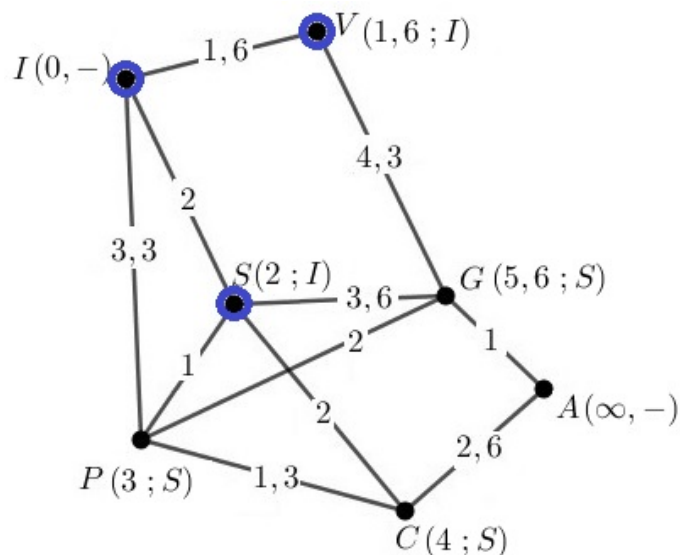
- (b) Como queremos partir de I , não passaremos mais neste vértice, então devemos circula-lo para indicar que já foi usado. Com isto, atualizamos as distâncias nos pares ordenados dos vizinhos de I :



- (c) Observamos que o vértice cuja aresta tem o menor valor, ou seja, a menor distância ao vértice I é o vértice Vale Encantado (V), então este vértice deve ser circulado:



- (d) A partir do segundo vértice circulado, vamos acumulando distâncias e atualizando os resultados e os vértices antecessores nos pares ordenados, de modo que sempre devemos circular os vértices que acumulam o menor caminho. Agora, observamos que V é vizinho do vértice Gloria (G), que passa a acumular a distância $1,6 + 4,3 = 5,9$. Olhando todos os valores acumulados até aqui, como o menor é o do vértice São Marcos (S), este deve ser circulado:



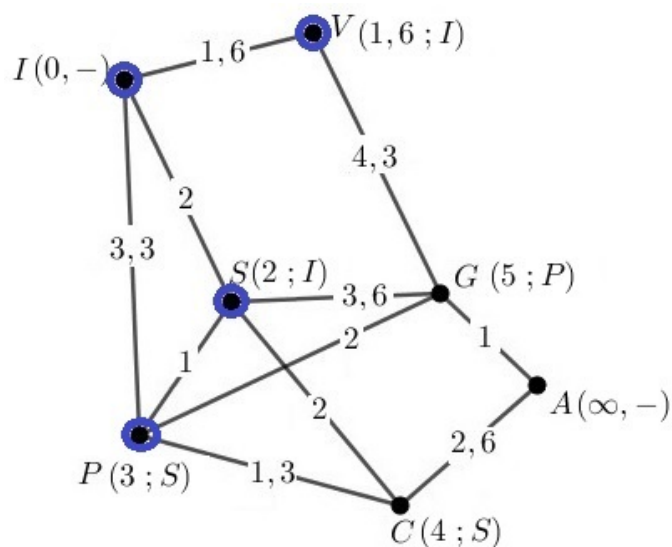
- (e) A partir do último vértice circulado, S , observamos os vértices adjacentes a S que ainda não foram circulados, são Praia do Pecado (P), Cavaleiros (C) e G . Analisando cada caso, temos:

De I até P , passando por S , temos $2 + 1 = 3$.

De I até C , passando por S , temos $2 + 2 = 4$.

De I até G , passando por S , temos $5,9$.

Como de I até P é o menor caminho neste passo, circulamos P indicando que já foi usado:

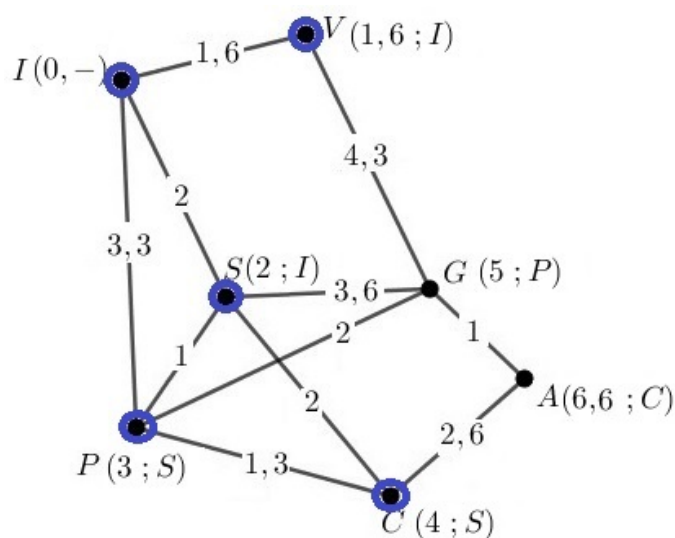


- (f) A partir de P , que foi o último vértice circulado, devemos olhar para os seus vértices adjacentes que ainda não foram circutados, C e G . Daí, temos que:

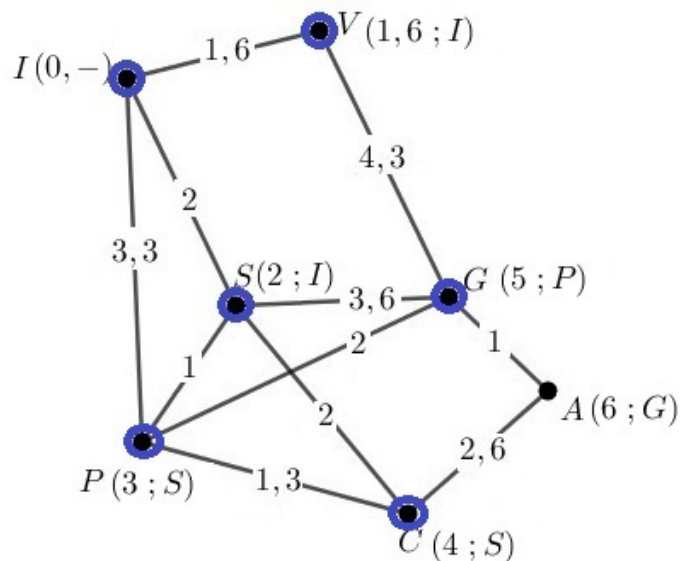
A distância de I até C , passando pelo menor caminho calculado até agora, é $2 + 2 = 4$.

A distância de I até G , passando pelo menor caminho calculado até agora, é $3 + 2 = 5$.

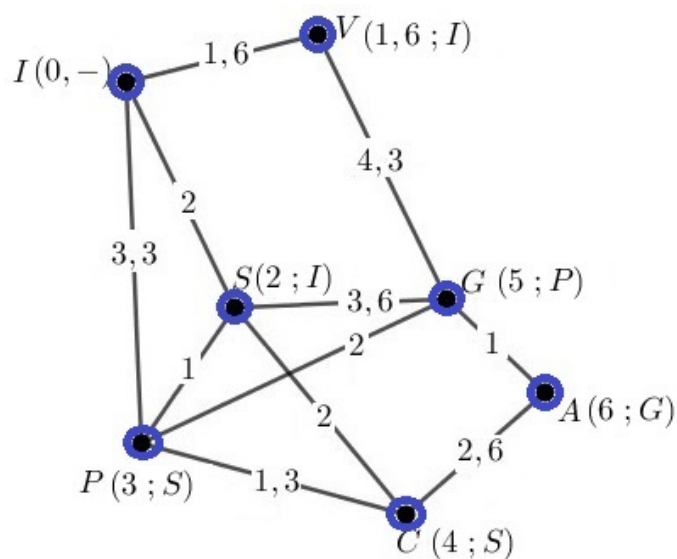
Agora devemos circular o vértice C , pois é a menor distância acumulada até o nosso destino, o vértice Cancela Preta (A).



- (g) Agora, percebemos que a menor distância acumulada é a do vértice G . Sendo assim, nós o circulos.

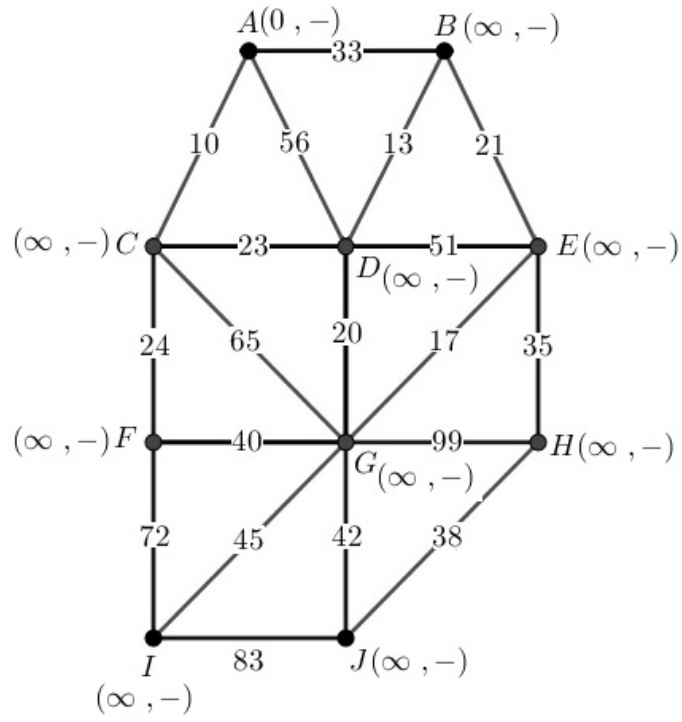


- (h) Em seguida, atualizamos a distância acumulada do vértice A que passa a ser 6, vindo do vértice G . Se olharmos para os pares ordenados, todos os vértice que antecedem este, descobrimos que o menor caminho de I até A é dado pela sequência $ISPGA$. Para tal, basta perceber que o antecessor de A no menor caminho partindo de I é G , que o antecessor de G é P e assim sucessivamente.

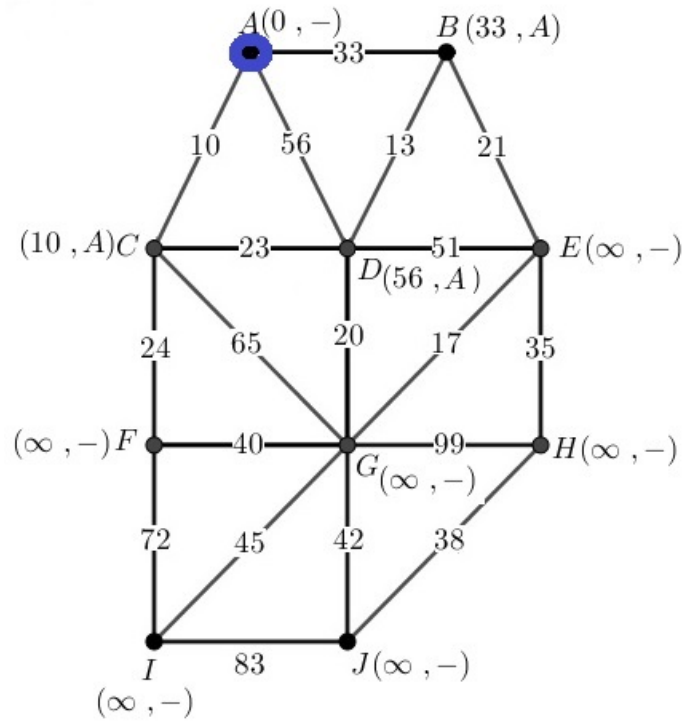


3. Apresentamos, a seguir, a sequência de grafos que representa a resolução do problema pelo algoritmo de Dijkstra.

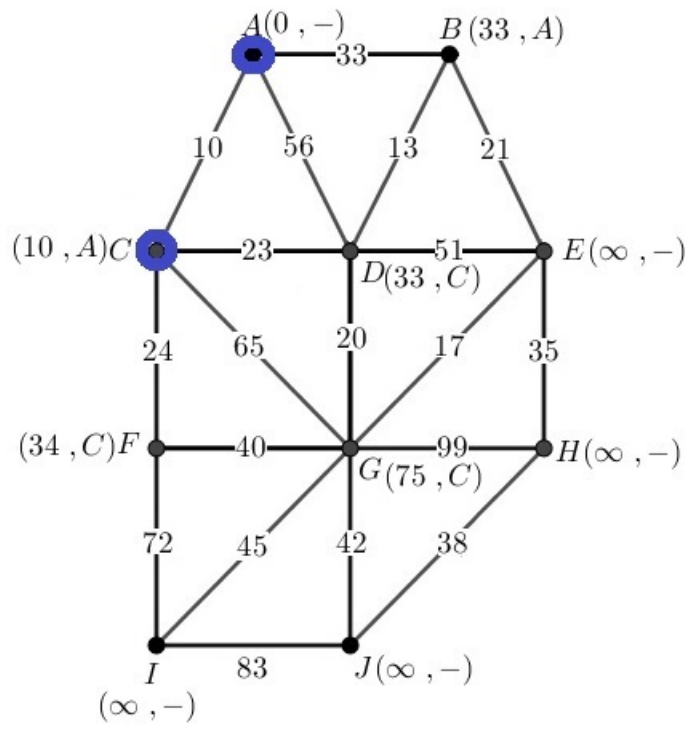
- (a) Para ir do vértice A até o vértice G , fazemos:



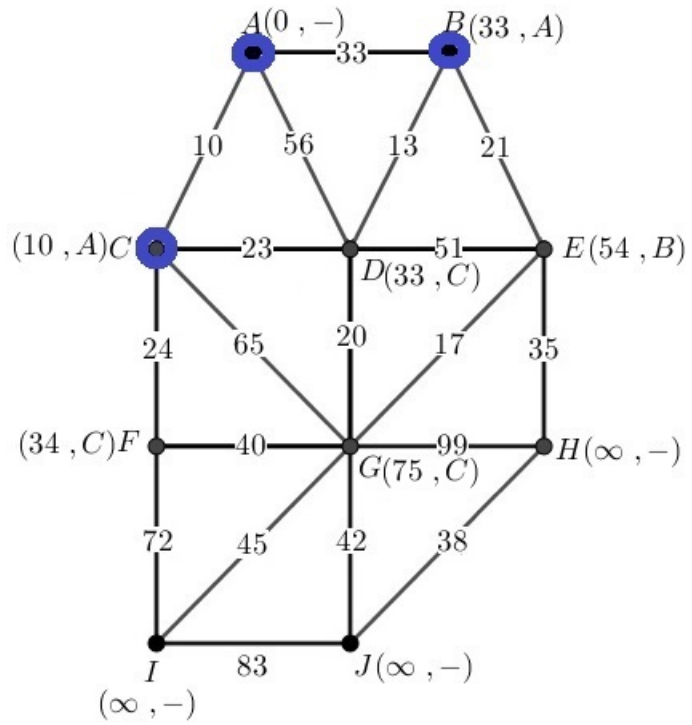
↓



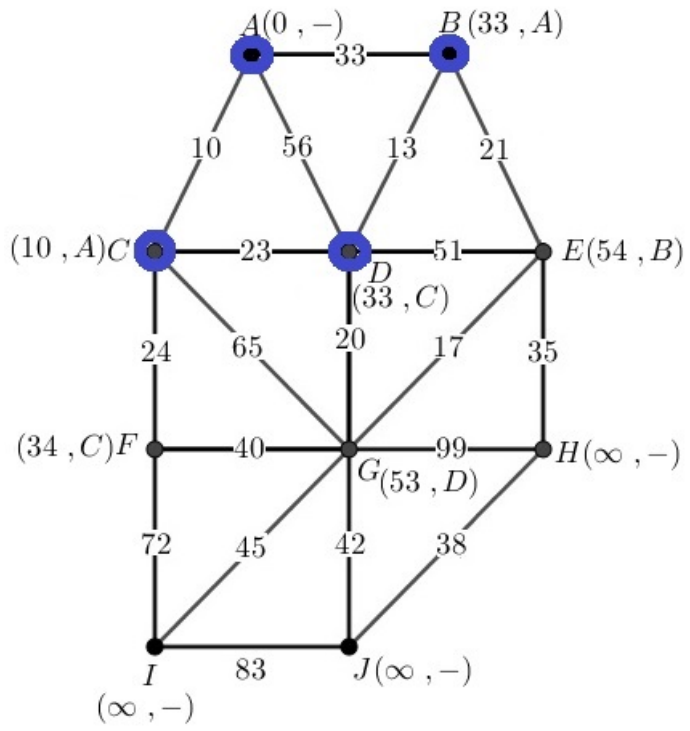
↓



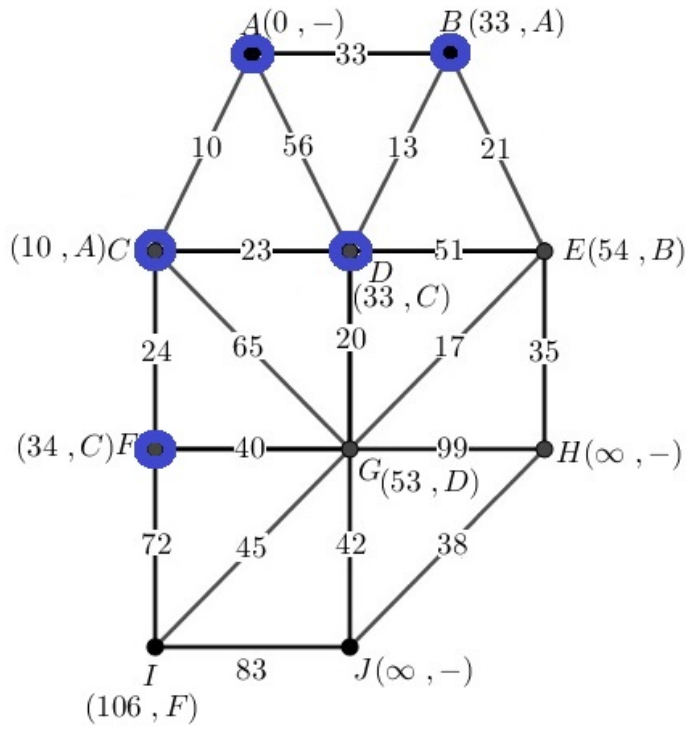
↓



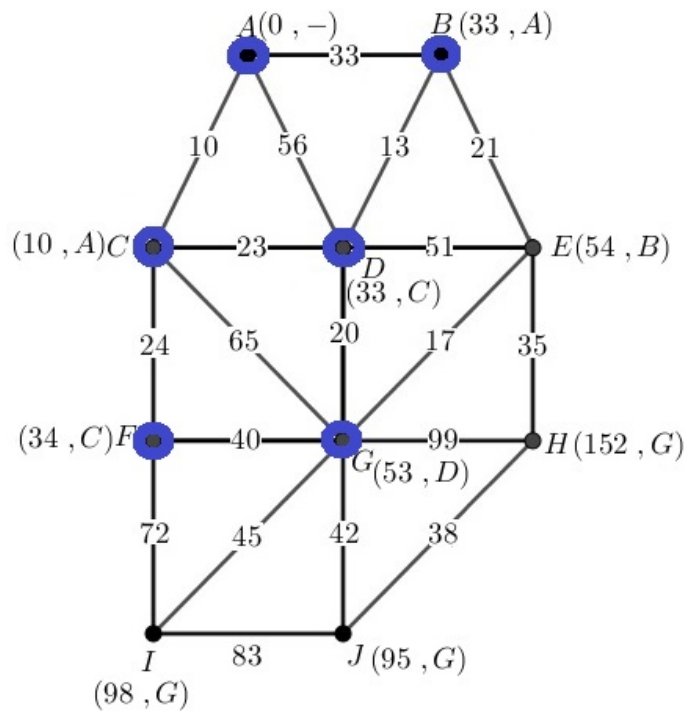
↓



↓

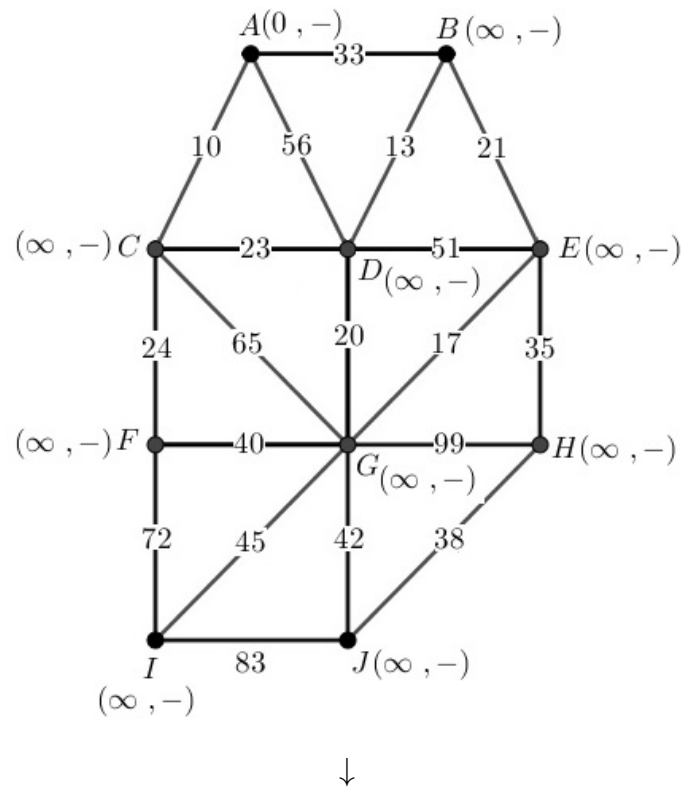


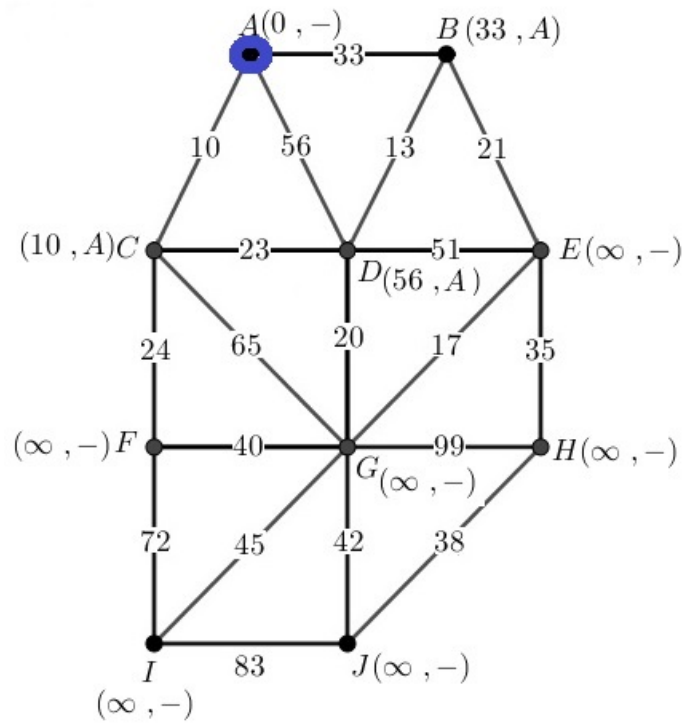
↓



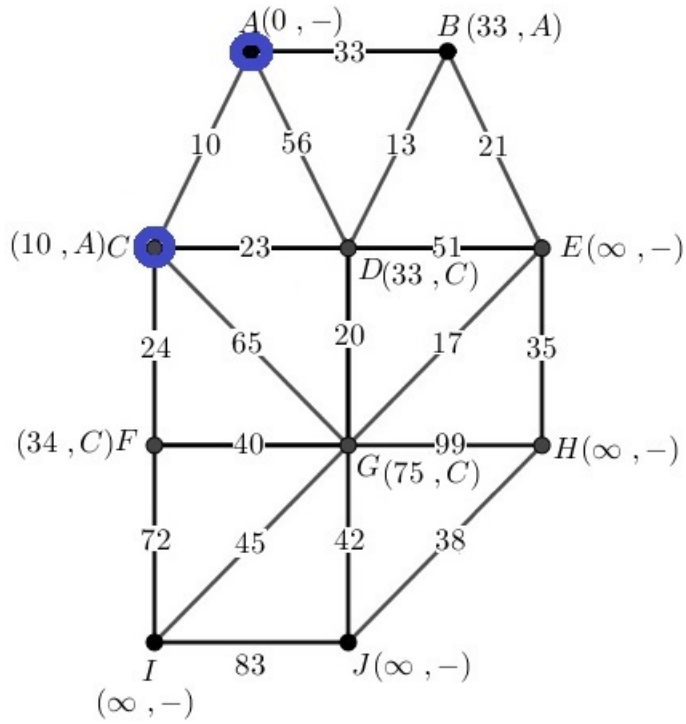
Logo o menor caminho é a sequência $ACDG$

(b) Para ir do vértice A até o vértice J , temos:

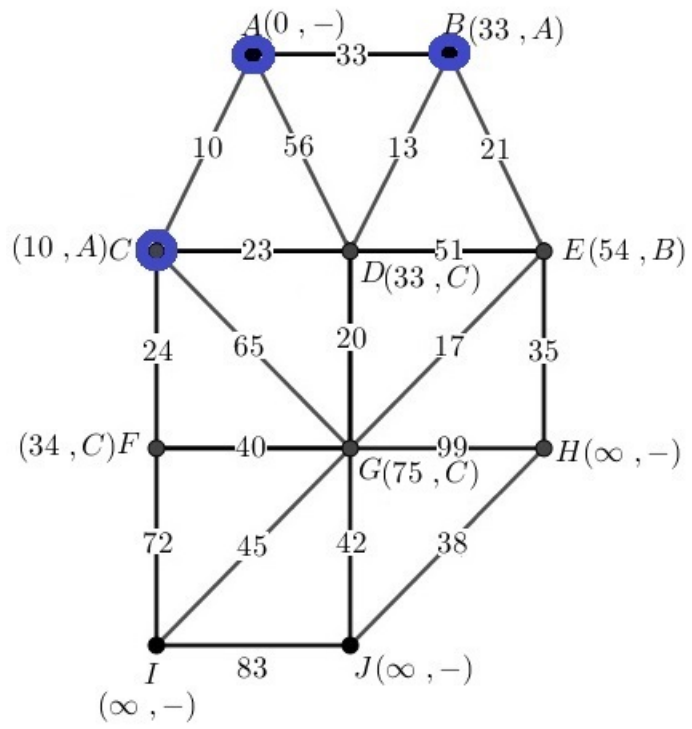




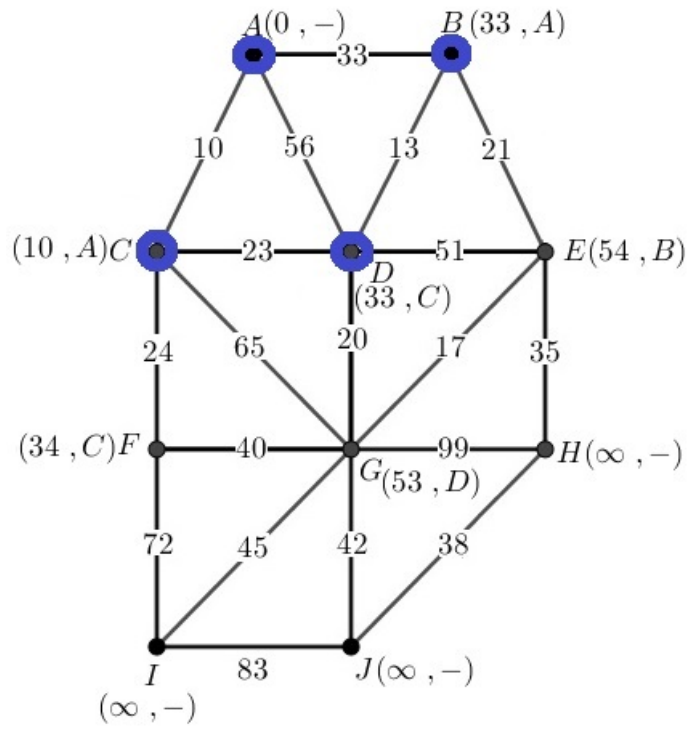
↓



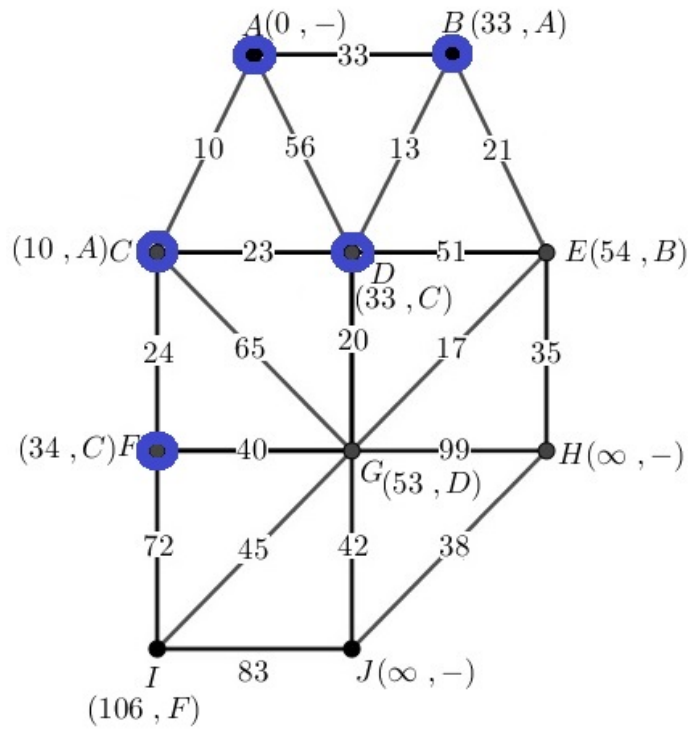
↓



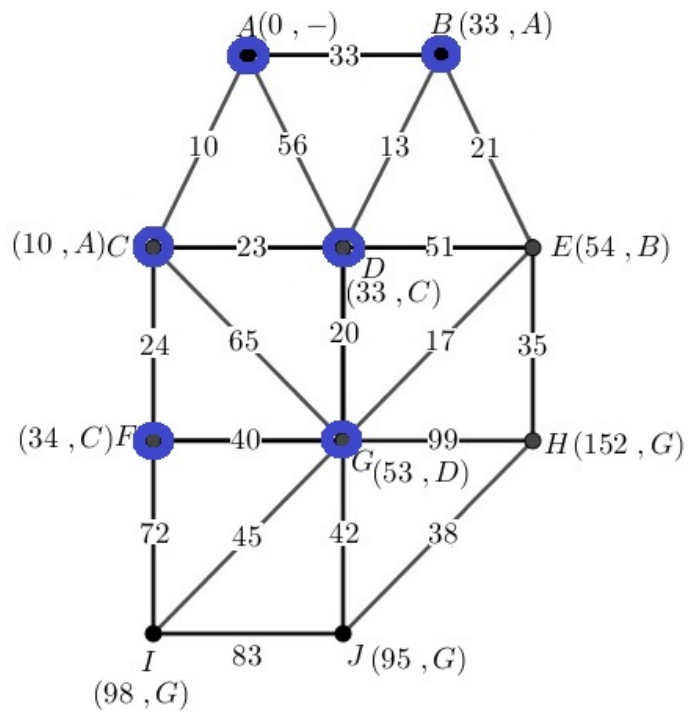
↓



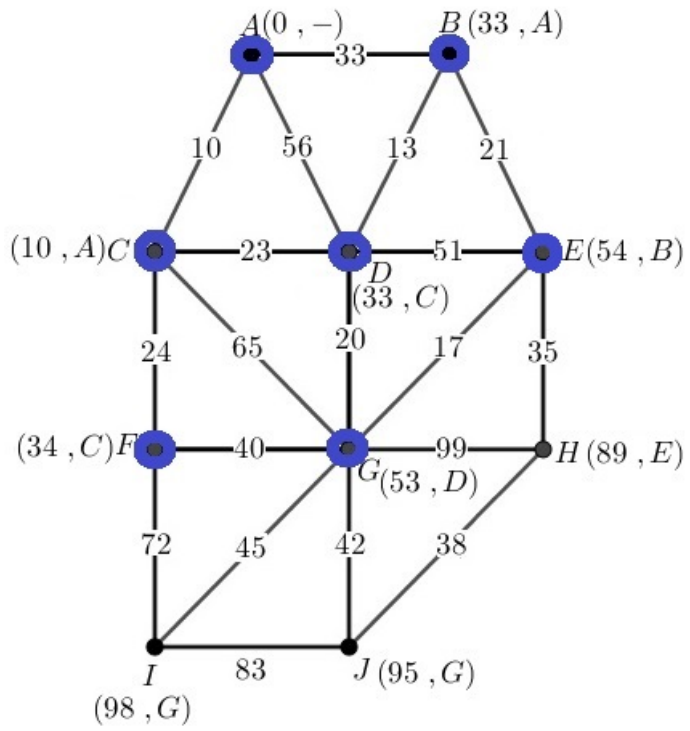
↓



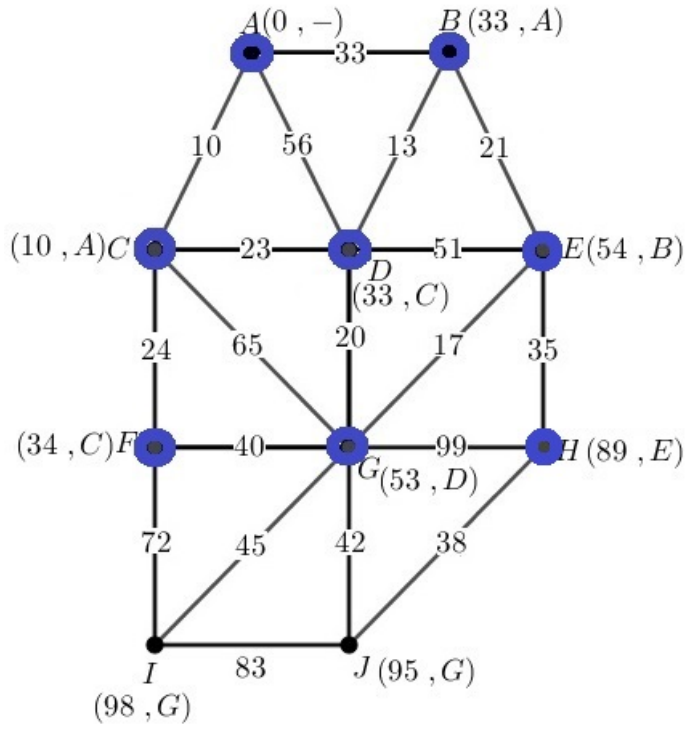
↓



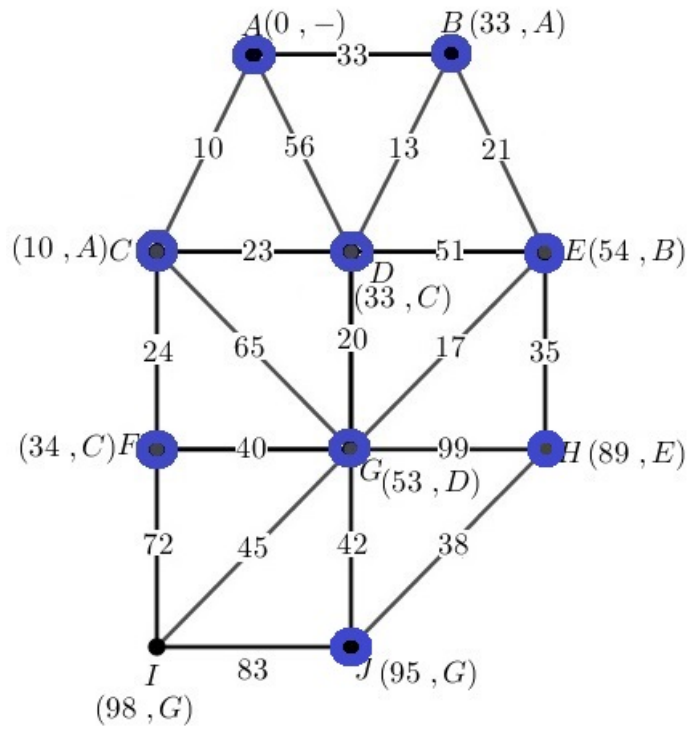
↓



↓

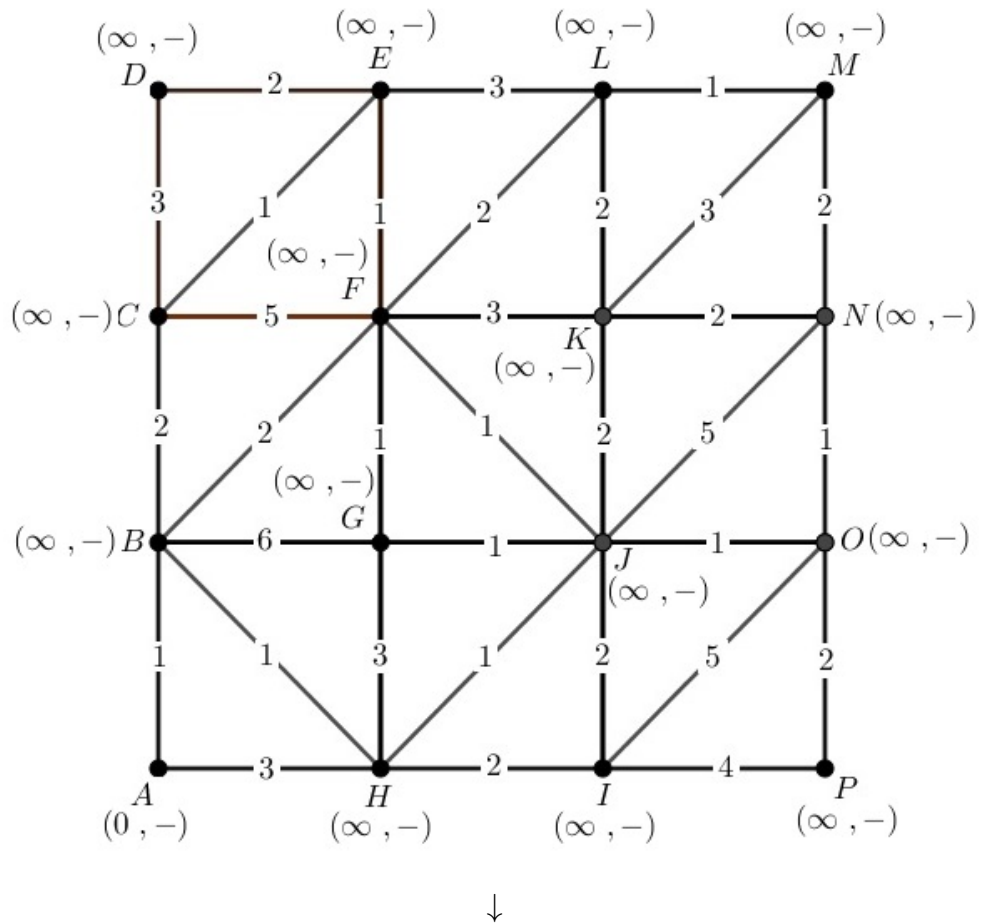


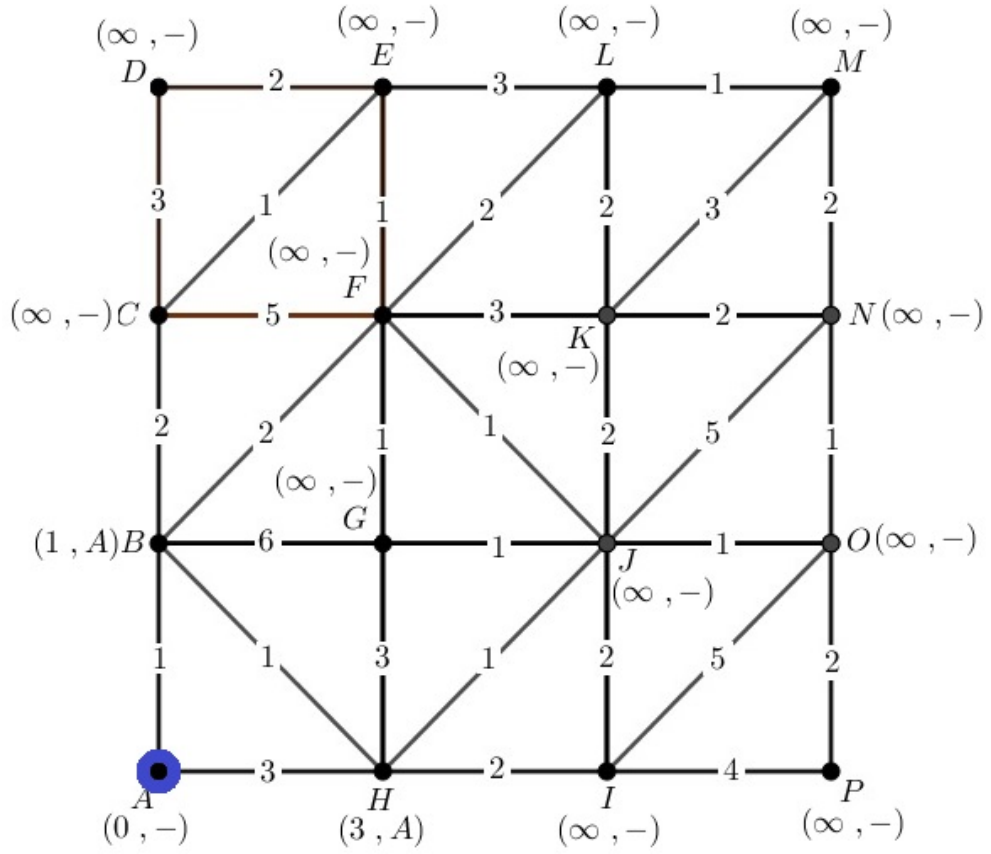
↓



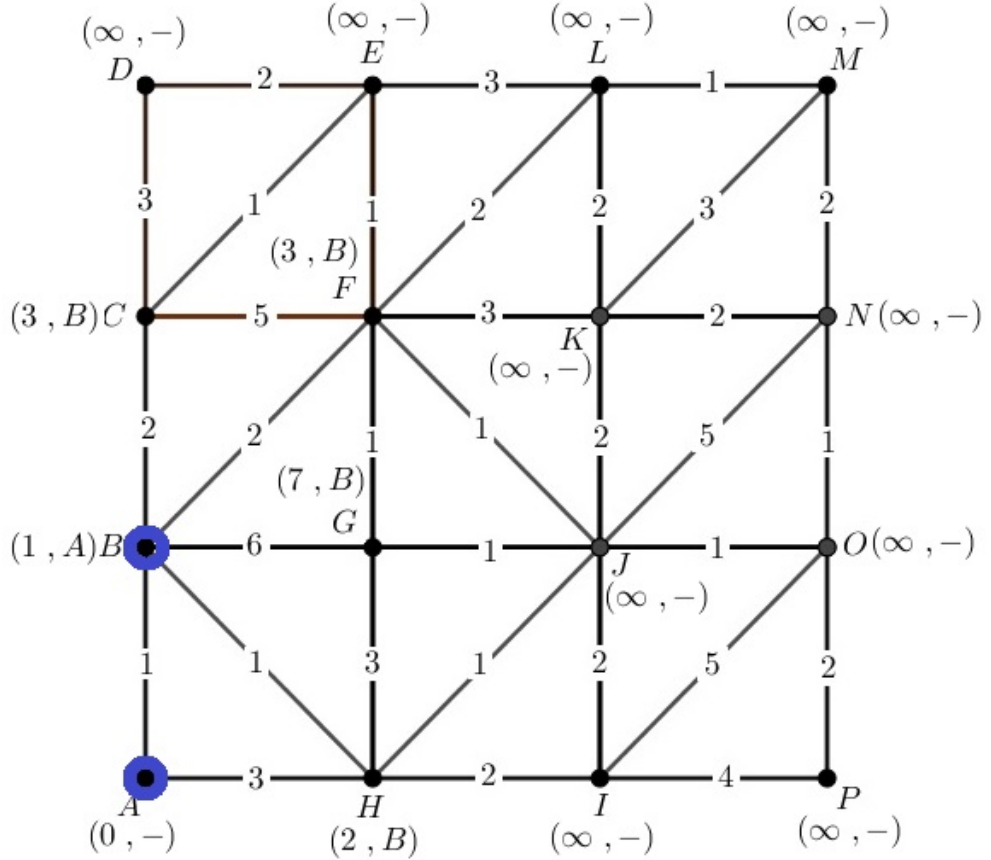
Logo, o menor caminho é a sequência $ACDGJ$

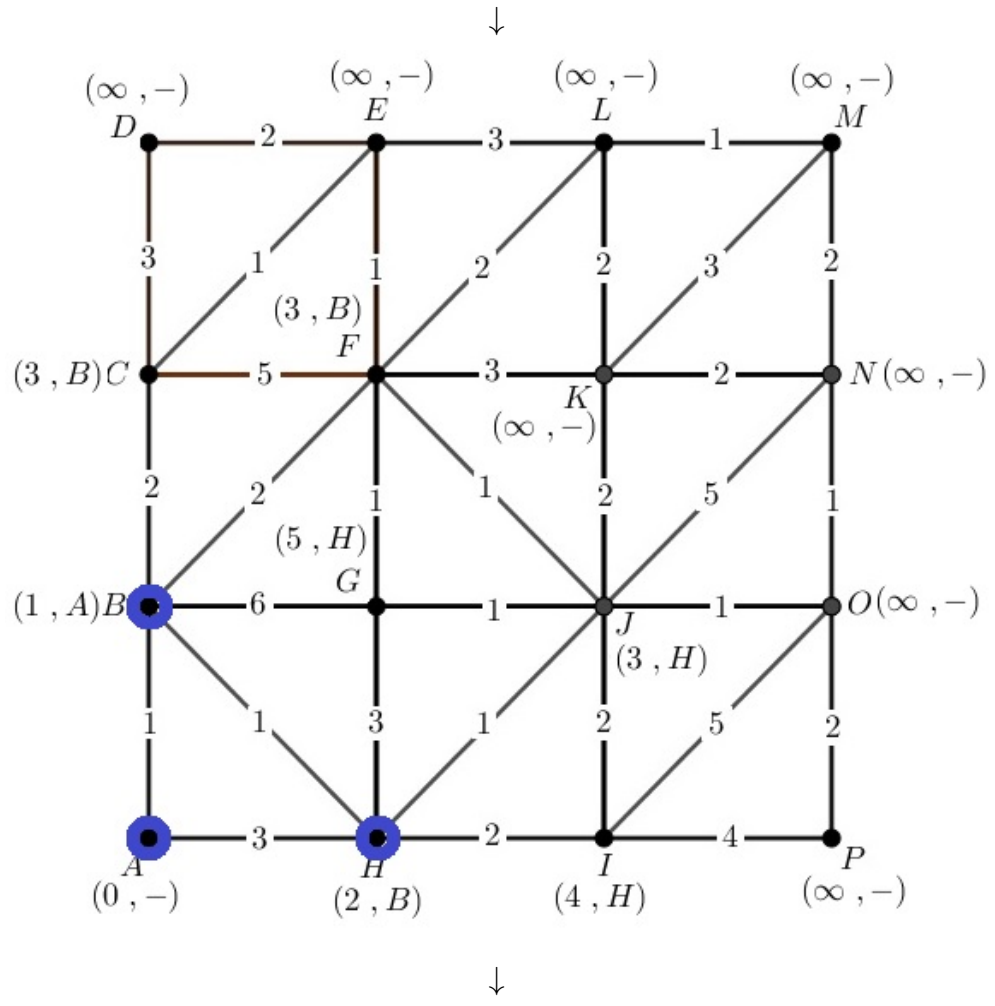
4. Procurando o menor caminho para ir do vértice A até o vértice M , usando o algoritmo de Dijkstra:

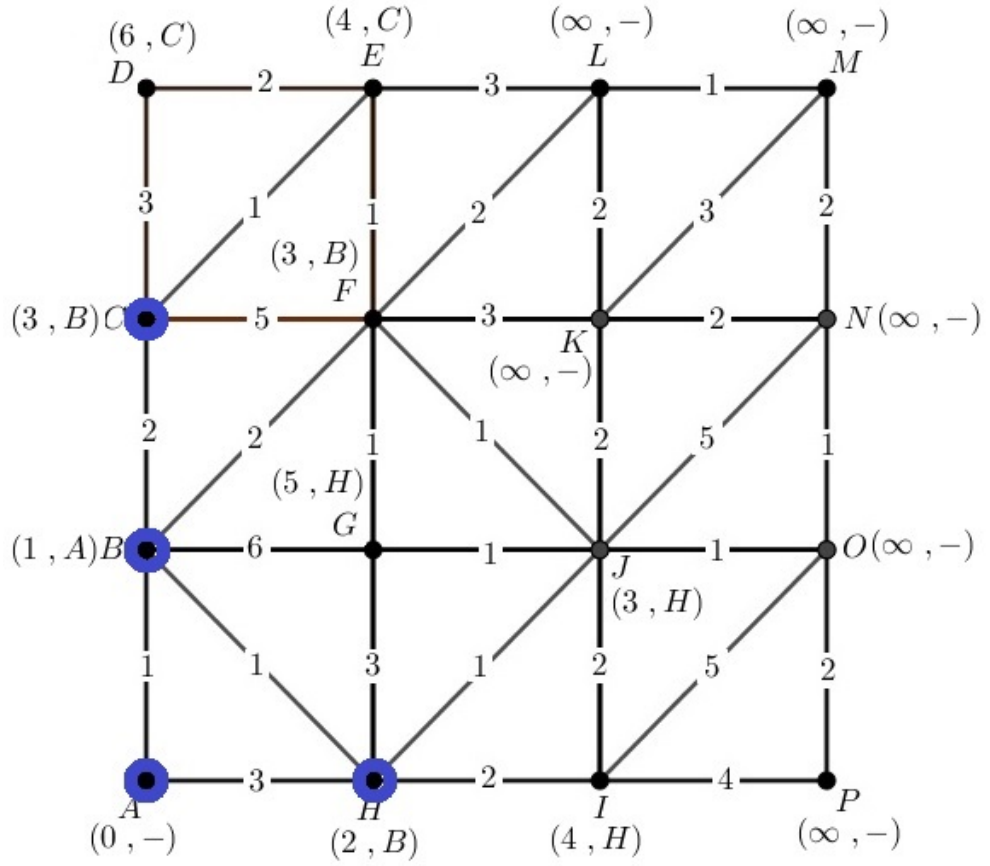




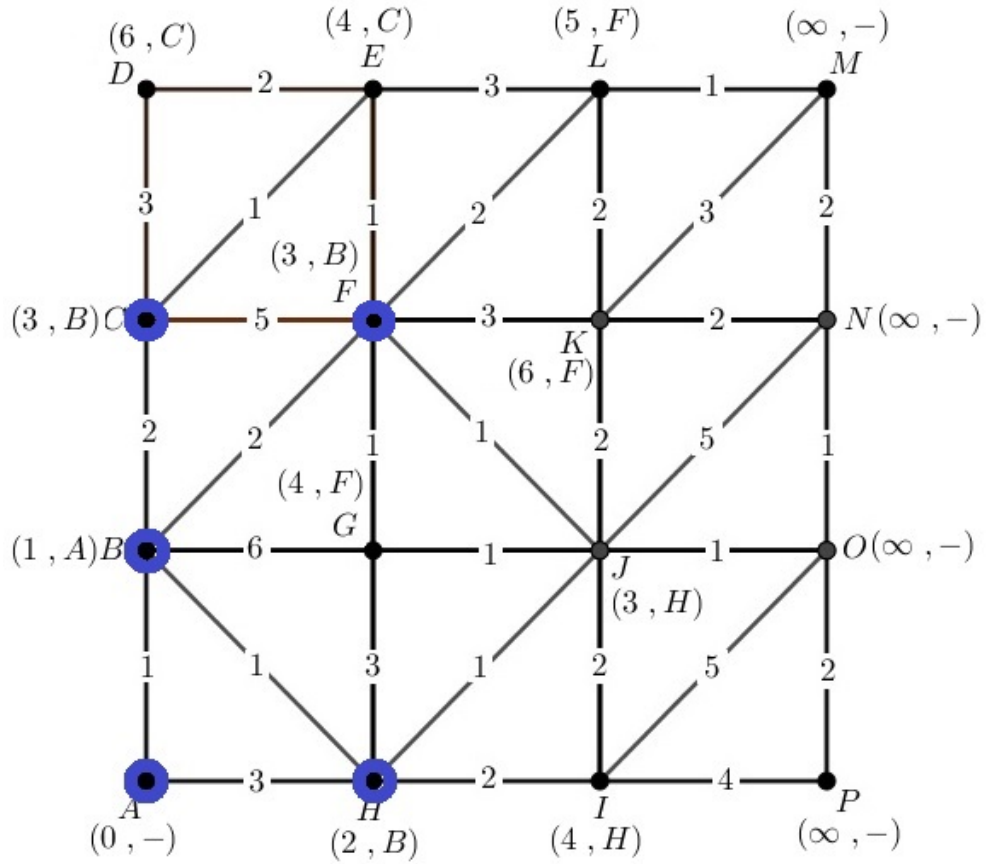
↓

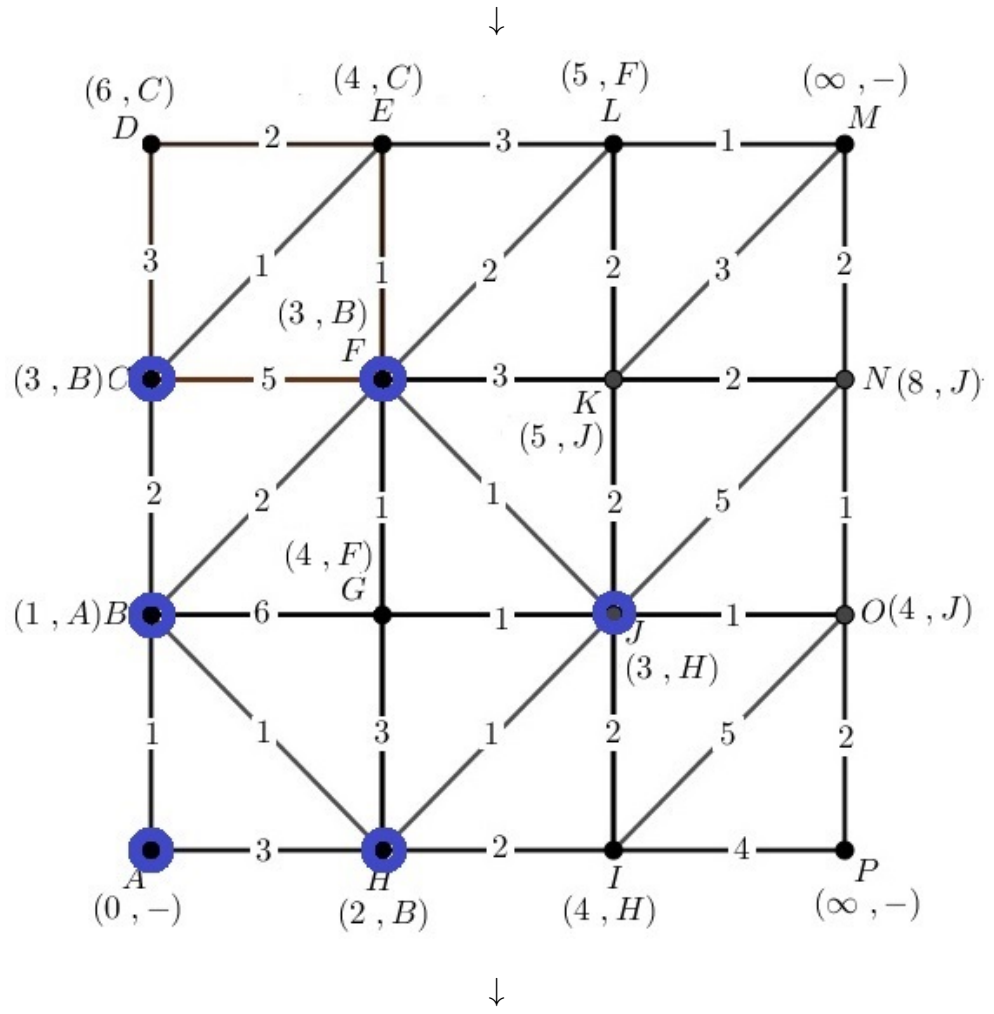


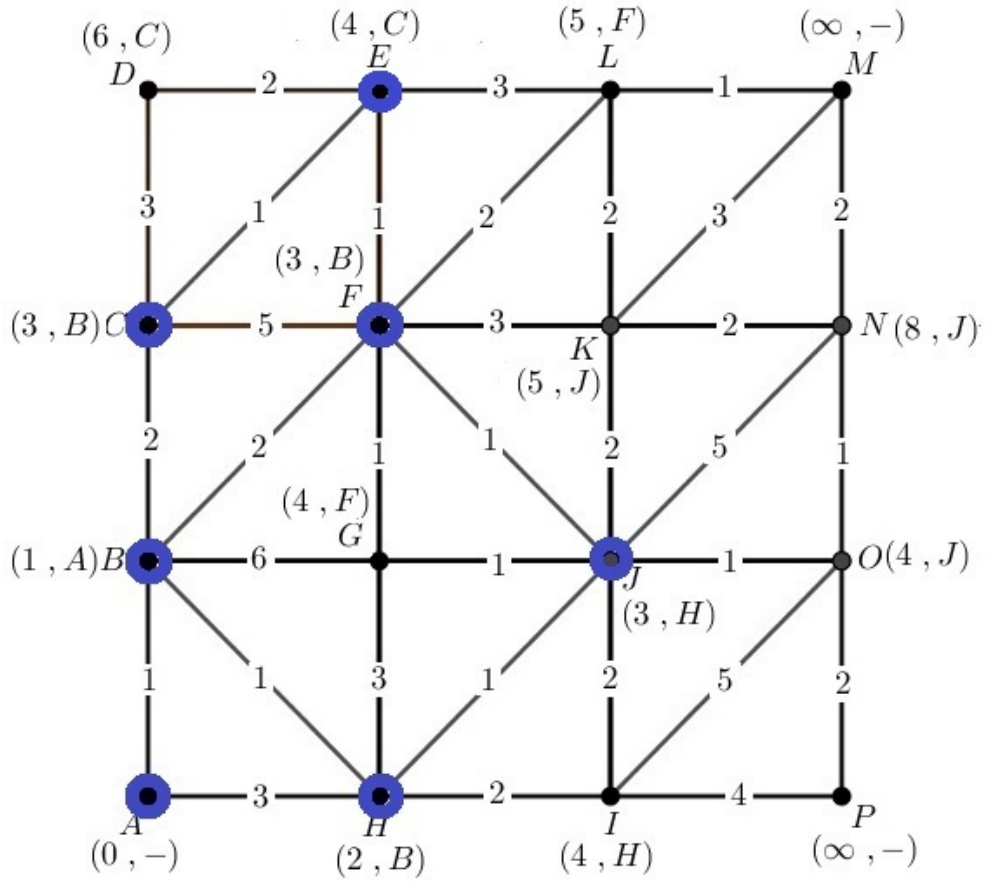




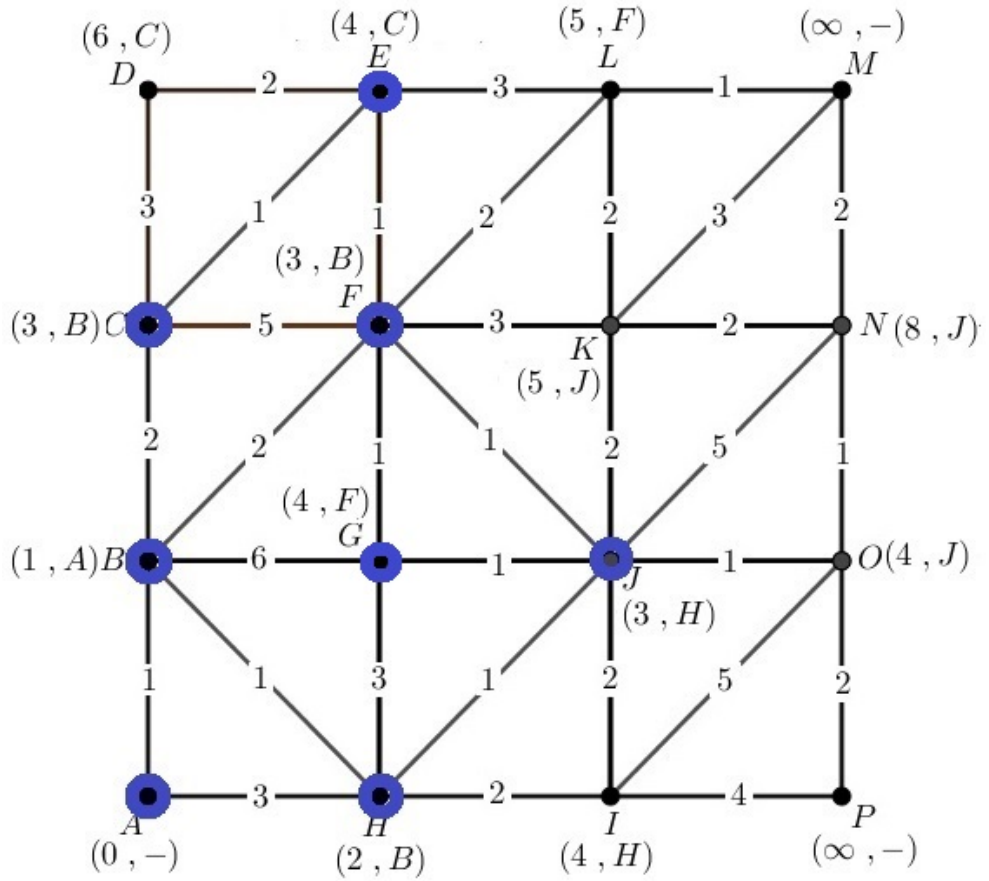
↓

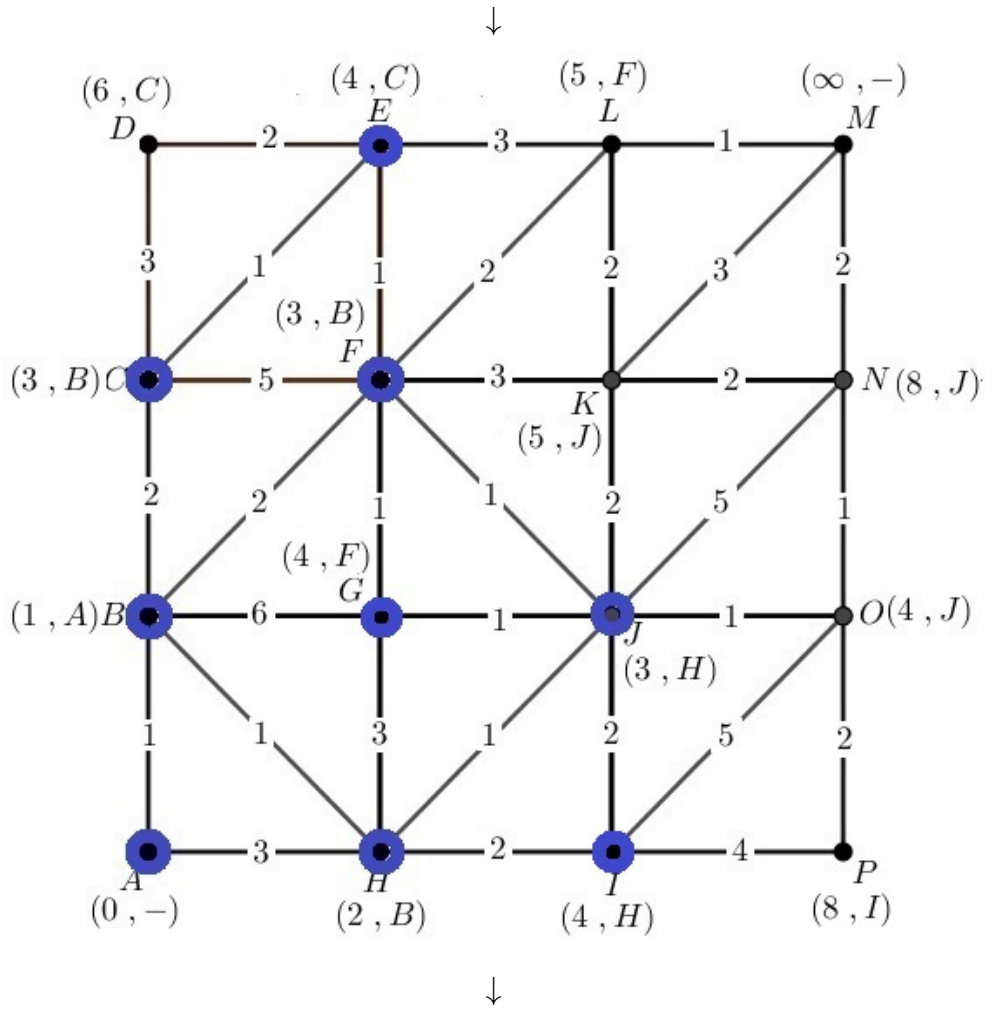


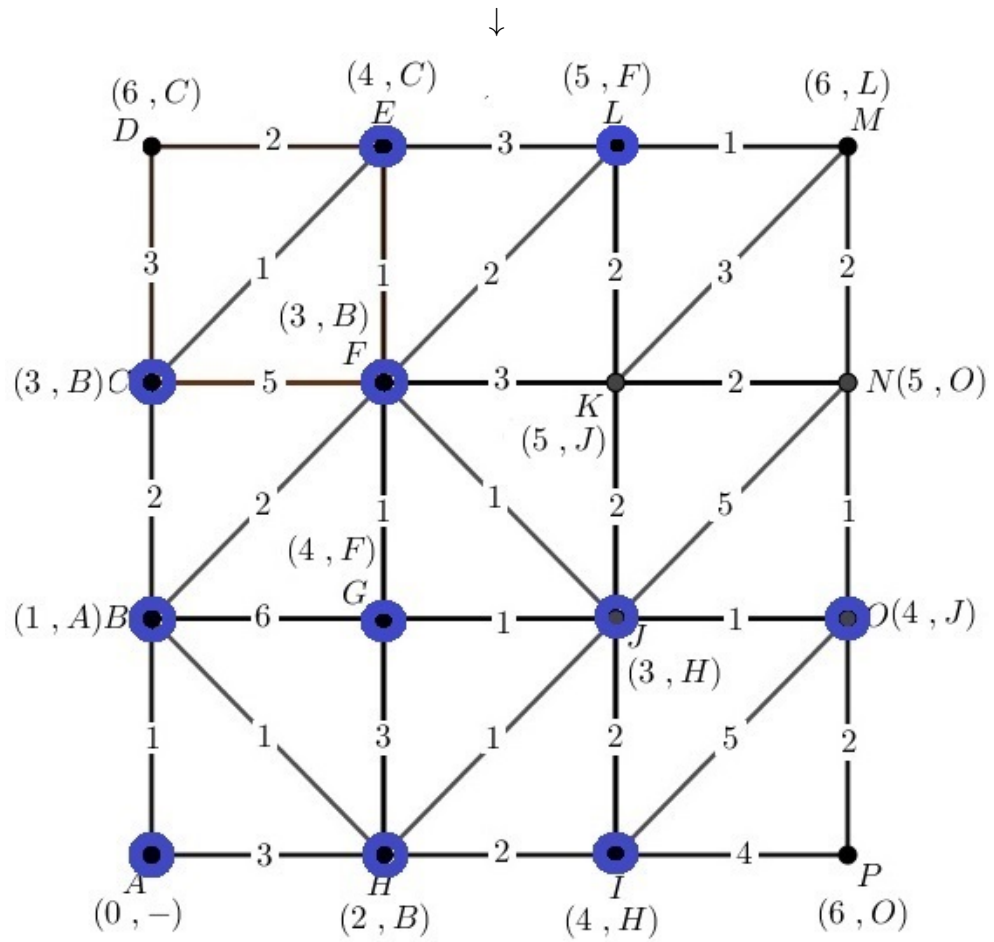
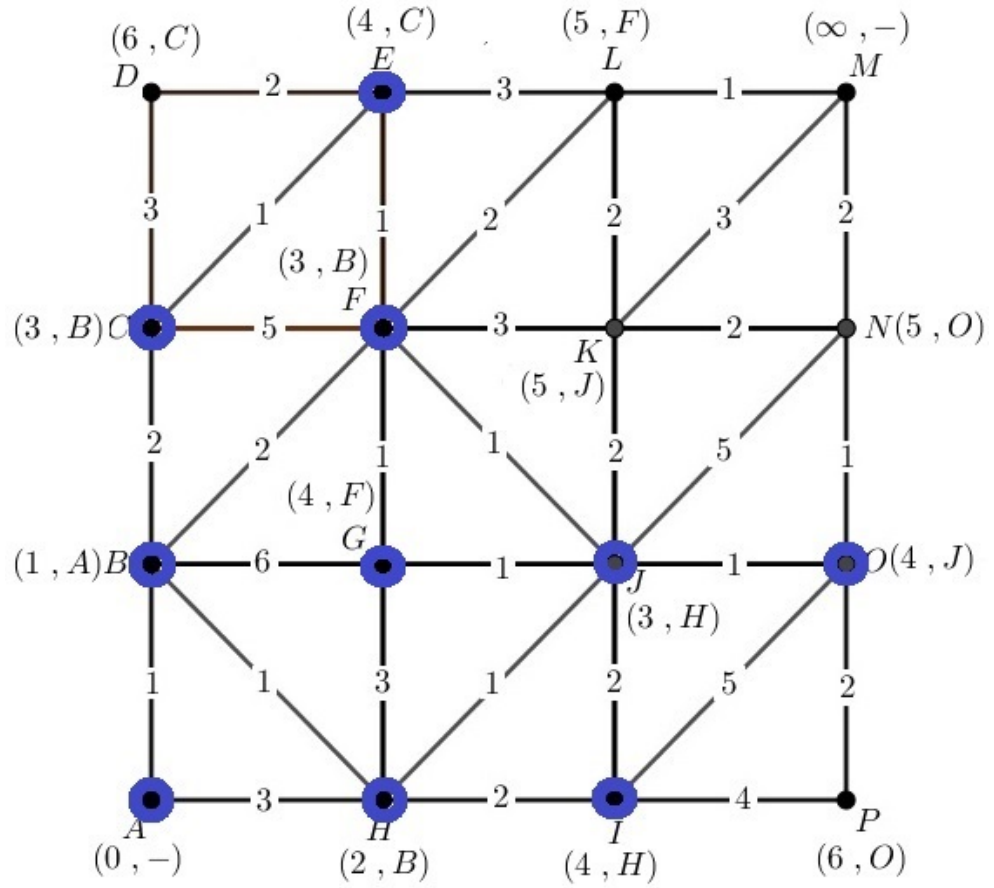


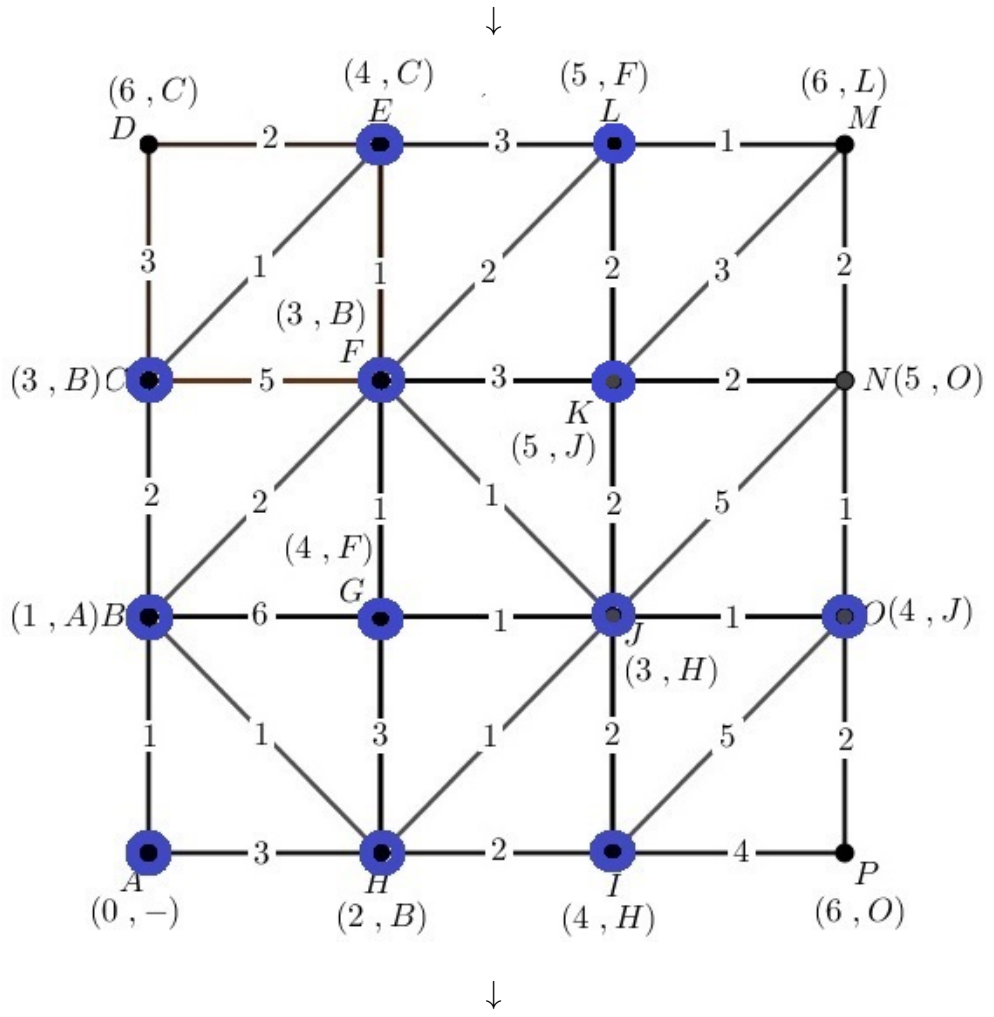


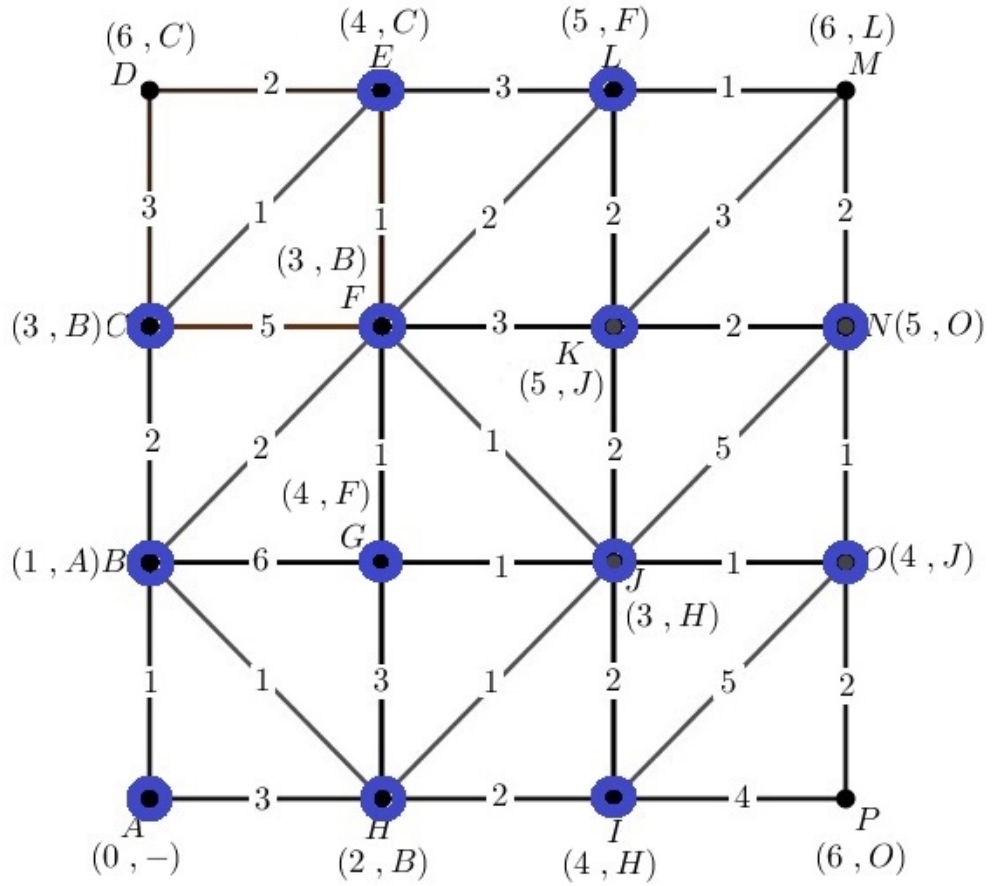
↓



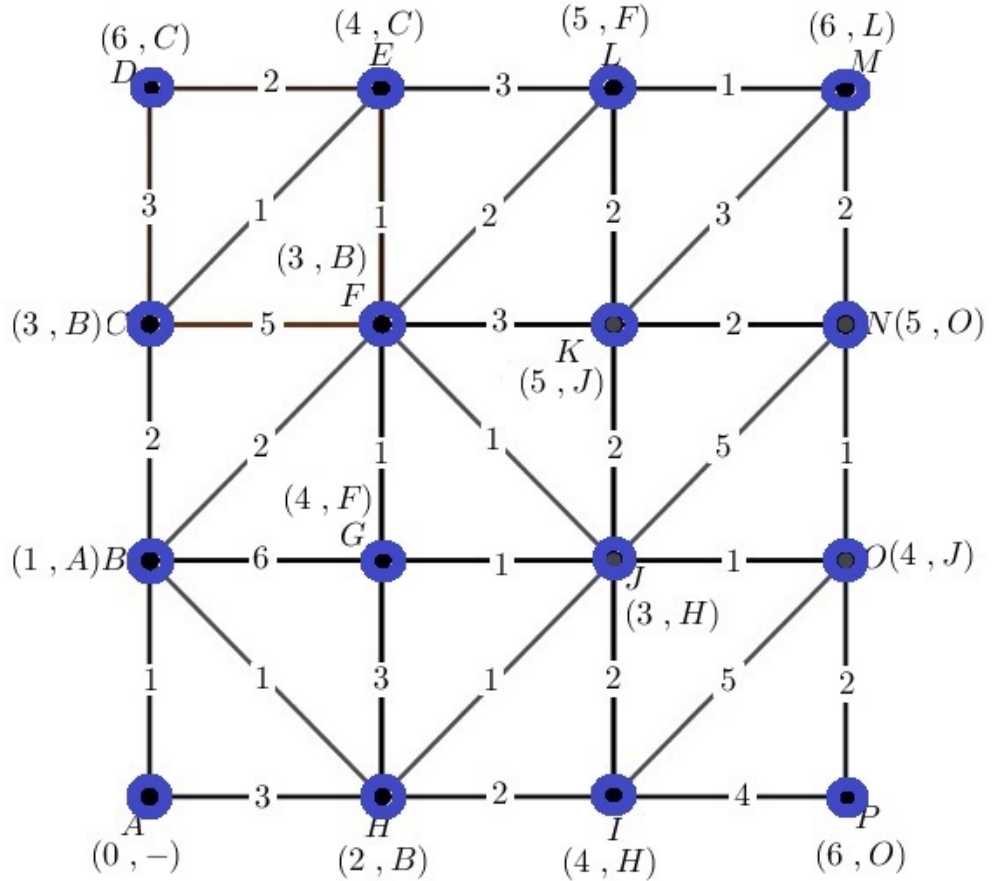








↓



Portanto o menor caminho é dado pela sequência *ABFLM*.

Maiores informações sobre o algoritmo de Dijkstra podem ser obtidas em:

<www.inf.ufrgs.br/~galante/wiki/lib/exe/fetch.php?id=inf01203&cache=cache&media=inf01203-aulagrafos93.pdf>

- Com esta atividade, desenvolvemos:
 - Competências: CG1; CG2; CG4; CG5; EM: CE1, CE3, CE4.
 - Habilidades: EM13MAT106, EM13MAT315, EM13MAT405.

3.24 Experiências em Sala de Aula

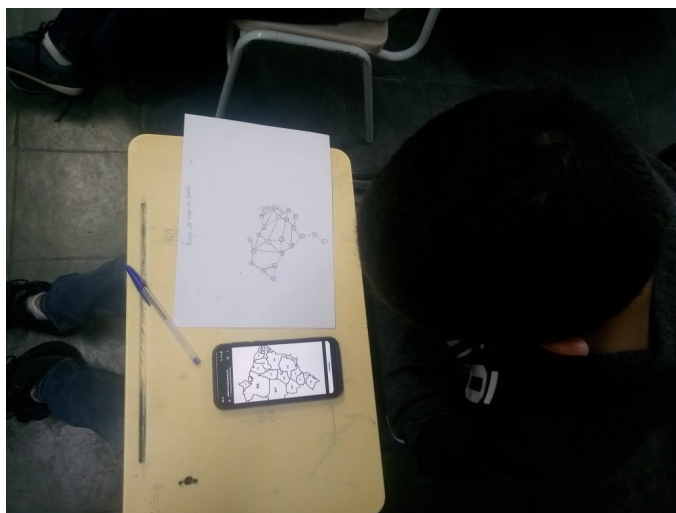
Nesta seção descrevemos a realização de duas das atividades propostas feitas ainda na fase das pesquisas e escrita das atividades a fim de respaldar o desenvolvimento que seguiria deste trabalho.

A atividade sobre o Teorema das Quatro Cores, 3.14, e a atividade sobre o Desafio do Teorema das Quatro Cores, 3.18, foram atividades escolhidas para serem feitas numa escola particular do município de Macaé, onde a autora deste texto ministra aulas de matemática para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio.

As atividades foram realizadas em novembro de 2019. Houve alguma resistência da diretora porque os conteúdos (grafos) fugiam do plano de ensino proposto pela assessoria de matemática da escola e poderia gerar o que a escola chama de “ruídos” entre os clientes. Então, para evitar aborrecimentos, a experiência foi feita num sábado letivo, dia que poucos alunos frequentam as aulas, mas só foi autorizada com a condição de que o nome da escola fosse omitido na divulgação das ações feitas.

Assim, as turmas foram duas de oitavo ano, com 30 alunos presentes, que têm de 13 a 14 anos, e uma turma de segundo ano do Ensino Médio, com 15 alunos presentes, com idades a partir de 17 anos. Em todas as turmas fizemos a atividade 3.14, com uma adaptação para o segundo ano, e a atividade 3.18.

Todos foram avisados de que se tratava de uma experiência que seria registrada numa pesquisa de mestrado. Os alunos do oitavo ano mostraram certa resistência, pois era a primeira vez que ouviam falar em grafos e a palavra trouxe preocupação a todos, com muitas perguntas se este assunto seria cobrado em trabalhos e provas. Mas ao começarem a ouvir a história sobre as pontes de Königsberg, e depois a polêmica história do Teorema das Quatro Cores, todos se mostraram motivados em realizar as tarefas propostas. A turma do segundo ano inteira gostou da ideia de uma atividade diferenciada, assim que foi sugerida, pois disseram que era fora dos temas do currículo da escola.



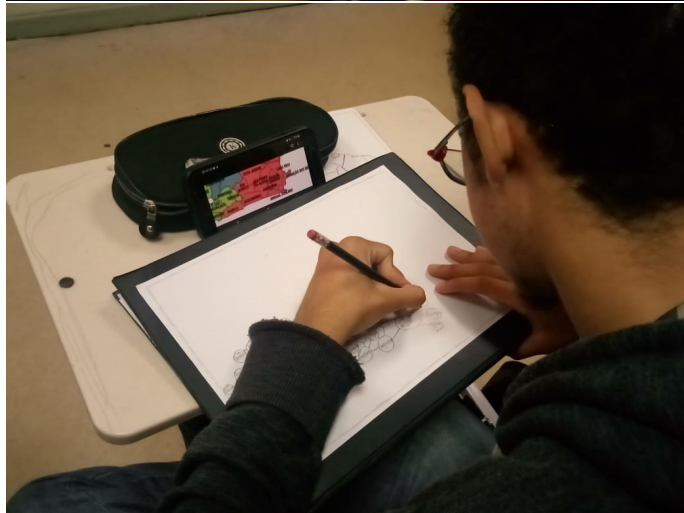
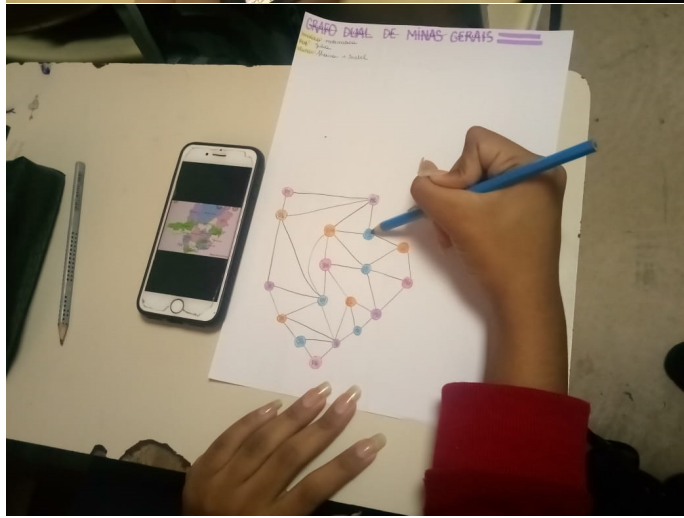
A atividade sobre o Teorema das Quatro Cores nas turmas de oitavo ano, consistiu

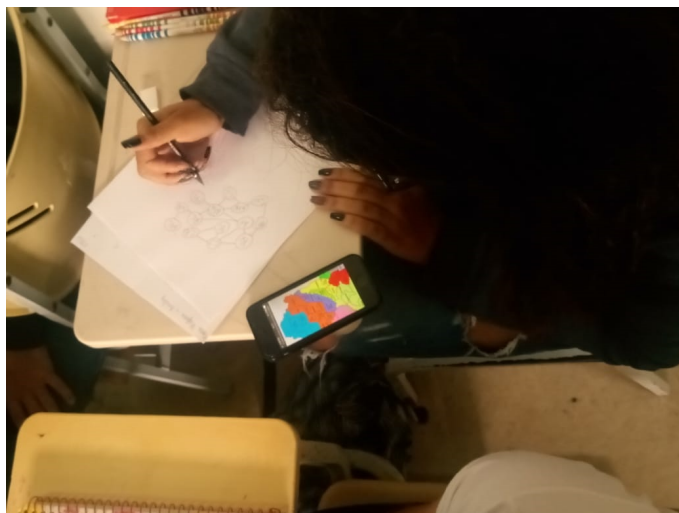
em colorir, usando as restrições do Teorema das Quatro Cores, um grafo do mapa do Brasil, de modo que eles foram orientados a fazer corresponder a cada estado um vértice e a cada fronteira uma aresta. As relações de vizinhança entre os estados brasileiros que eram desconhecidas pela maioria foi pesquisada na internet, através do celular.



Todos entenderam as regras do Teorema das Quatro Cores, mas poucos conseguiram colorir por falha nas estratégias. A principal falha foi alternar as quatro cores no início da coloração. Quem teve sucesso usou as mesmas ideias da demonstração do Teorema, que são duas: começar com duas cores somente e pela coloração do território com mais vizinhos.

A mesma atividade no Ensino Médio foi adaptada para que ficasse mais desafiadora. Os alunos, em duplas, tiveram que pesquisar o mapa de municípios de qualquer estado brasileiro usando, também, a internet do celular. Foi necessária intervenção na escolha, pois as duplas queriam estados com poucos municípios, o que fazia vários coincidirem, como Roraima e Acre, por exemplo. Mas foi proposto que montássemos um imenso grafo do Brasil no final da atividade, o que infelizmente não foi possível por falta de tempo de aula, mas deixou todos mais motivados na variação de estados por equipe e na espera da construção de um grafo bem grande e colorido. Após a escolha do estado, cada dupla fez o desenho do grafo, com vértices representando os municípios e arestas representando as fronteiras. Após isto, eles discutiram entre si quais estratégias usariam para colorir usando as regras do Teorema das Quatro Cores. Todos foram bem sucedidos na realização da atividade.

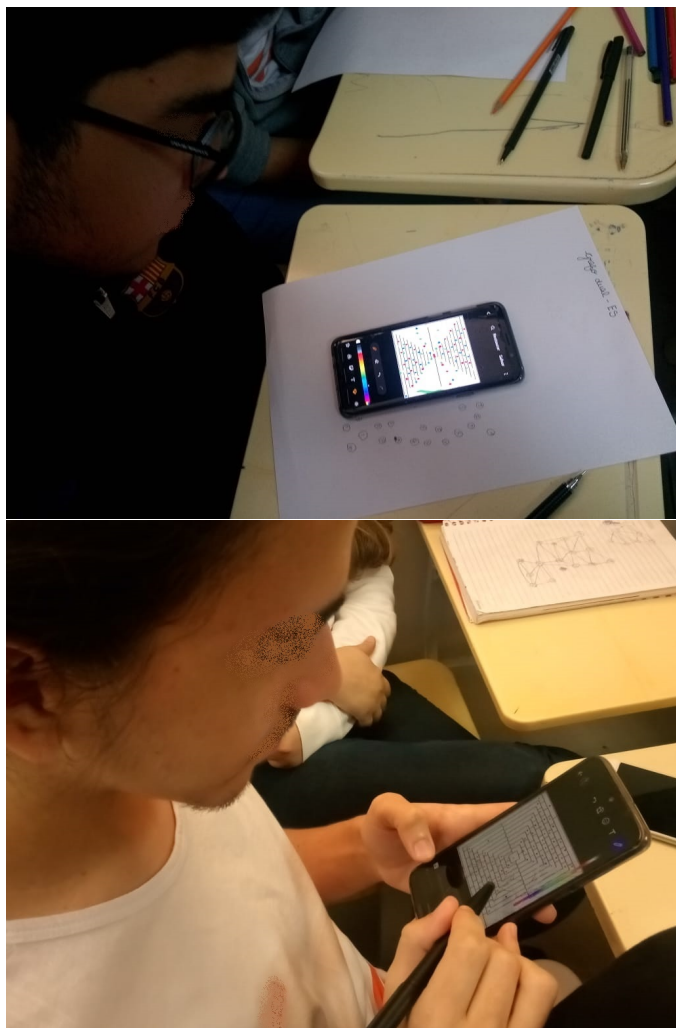




A atividade chamada Desafio do Teorema das Quatro Cores foi realizada quase que da mesma forma em todas as turmas, com a diferença de que os alunos do oitavo ano tiveram o mapa impresso na escola e a turma do segundo ano coloriu o mapa enviado para o grupo da turma no aplicativo de comunicação whatsapp.



A atividade foi desafiadora para todos os alunos, somente dois alunos do segundo ano conseguiram colorir todo o mapa usando a mesma estratégia da atividade anterior.



Houve muita discussão de estratégias, troca de informações entre as duplas, mas ninguém acertou já na primeira tentativa. Pediam para recomeçar, alguns erraram muitas vezes por decisões ruins como começar a coloração alternando quatro cores e isto os obrigava, em algum momento, a acrescentar uma quinta cor para não fugir da regra de que os territórios vizinhos devem ter cores diferentes. Na aula seguinte, em outro dia, que não era sábado letivo, todos receberam as dicas preciosas para colorir e intuir, através da experiência, que o Teorema das Quatro Cores é válido.

A proposta de desenvolver algumas das atividades em sala de aula teve o objetivo de subsidiar e aprimorar a escrita das atividades, perceber como o aluno receberia este tipo de conteúdo e se, mesmo os alunos do Ensino Médio, se envolveriam na resolução das questões, na perspectiva de aliar teoria e prática, refletindo e experimentando. Desta forma, foi bastante satisfatório o resultado porque com esta experiência foi possível perceber a melhor forma de descrever estes conteúdos, de tornar atrativa a atividade para o aluno. Também fica claro como é difícil para o professor na iniciativa privada, principalmente, propor ações não tradicionais, ligadas a assuntos que não estão explicitamente descritos em documentos oficiais. Desta forma, tudo tende a ser feito da mesma forma sempre, sem inovação, sem estimular o professor a trazer novas formas de atingir os obje-

vos. O que nos leva ao questionamento natural de para que serve o ensino da matemática ou a quem serve. Da forma como vem sendo feito, só tende a manter a escola da mesma forma, ensinando as mesmas coisas mesmo que se passem décadas, mesmo que as ciências evoluam e os alunos mudem seus interesses.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, nos debruçamos sobre a questão da inserção da Teoria dos Grafos na Educação Básica e, naturalmente, nos cursos graduação de Matemática. A análise foi feita a fim de apresentar a situação da relação entre ensino e Grafos, considerando as possibilidades de aproximação entre um dos muitos rumos que a Matemática tem tomado enquanto ciência e os jovens. Esta ideia floresce à medida que as necessidades da vida cotidiana, bem como interesses dos alunos na escola hoje, fazem com que precisem entender as ciências como algo em construção e não como um conteúdo pronto que ele apenas recebe na sala de aula.

Mostramos, através do levantamento de atividades propostas que foi feito e da construção e adaptação de outras, que a Teoria dos Grafos pode ser abordada em diferentes momentos com os alunos da Educação Básica, permitindo a articulação da Matemática com temas cotidianos, interdisciplinares, científicos e tecnológicos. Todas as atividades que apresentamos discutem modelos e teoremas de forma descontraída e acessível. Atividades como a das Pontes de Königsberg e como a do Teorema das Quatro Cores aproximam os estudantes do contexto em que a Teoria dos Grafos surgiu. A atividade do Caminho Mínimo solidifica o significado e o uso de algoritmos, que são conceitos com os quais os alunos sempre tiveram contato mas talvez nunca tenham associado às operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão, por exemplo.

Percebemos, com nossas experiências em sala de aula, o caráter essencialmente investigativo da Teoria dos Grafos. Os alunos puderam expressar suas ideias e estratégias de resolução, trabalhando coletivamente, gerando debates que tinham por finalidade resolver os problemas da melhor maneira. Vimos o despertar do pensamento algorítmico e computacional, tão cobrado pela BNCC.

As atividades deste trabalho podem ser consideradas um material didático pronto para a sala de aula, a ser aplicado por professores que tenham ou não tenham estudado a Teoria dos Grafos, embora seja interessante que gestores e responsáveis pela concepção e implementação da Base Nacional Comum Curricular e dos Itinerários Formativos estejam atentos às demandas internas e externas e estendam esta abordagem na implementação das Diretrizes para os cursos de Licenciatura. Atualmente, estas diretrizes das licenciaturas estão em processo de implantação e se os futuros professores, e os atuais na formação continuada, não tiverem acesso a estes rumos que a Matemática enquanto ciência vem tomando, temas como a Teoria dos Grafos jamais chegarão ao espaço escolar e os conteúdos que outrora faziam sentido, já não corresponderão aos interesses e habilidades dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- 1 BNCC. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. [S.l.]: MEC, 2018. 594 p.
- 2 JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução*. <www.miltonborba.org/OBMEP/>: UFRJ, 2007. 88 p.
- 3 CERIOLI, M. *Notas de aula de Matemática Finita*. 1. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2007. 30 p.
- 4 BONDY, J. A.; MURTY, U. *Graph Theory with Applications*. 15. ed. [S.l.]: University of Waterloo, 1976. 270 p.
- 5 FOURNIER, J. C. *Demonstration simple du théoreme de Kuratowski et de sa forme duale*. [S.l.]: North Holland Publishing Company, 1980. 329-332 p.
- 6 CARNEIRO, V. C. *Colorindo Mapas: Rpm 29*. [S.l.]: SBM, 1995. 31-35 p.
- 7 SANTOS, L. A. d. O teorema da curva de jordan. UFSCAR, p. 40, 2010.
- 8 APPEL HAKEN, K. W. Every planar map is four colorable. American Mathematical Society, p. 202, 1989.
- 9 SECCO, G. D. O teorema das quatro cores: História, prova e recepção. PUC-Rio, p. 36, 2013.
- 10 NISS, M. Computer assisted proofs and their effects on pure mathematics: A case study of the four colour theorem. Roskilde University, p. 54, 2013.
- 11 SILVA, T. V. da. *Caminhos Mínimos em Grafos: Uma proposta para além da sala de aula*. [S.l.]: Colégio Pedro II, 2018. 77 p.
- 12 BRIA, J. Grafos no ensino fundamental e médio: Matemática, interdisciplinaridade e realidade: Tese de doutorado. UFRJ, Rio de Janeiro, p. 287, 2001.
- 13 MUNIZ, I. *Grafos: Conceitos e Contextos para o Ensino Médio: Primeira jornada acadêmica do cap*. [S.l.]: CAP-UFRJ, 2010.
- 14 MEC. *Instituições de Ensino Superior*: Disponível em <emec.mec.gov.br/emec/consulta-cadastro/detalhamento>. [S.l.]: MEC, 2019.
- 15 SEDU-ES. *Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo*: Disponível em <sedu.es.gov.br/curriculo-base-da-rede-estadual>. [S.l.]: SEDU, 2019.
- 16 Sá, L. Documento histórico no ensino médio: análise da produção de alunos em aulas de teoria dos grafos. IFES, p. 15, 2015.
- 17 PNLD. *Programa Nacional do Livro Didático*: Disponível em <fnde.gov.br>. [S.l.]: FNDE, 2019.
- 18 DANTE, L. R. *Tudo é matemática: 7º ano do ensino fundamental*. Rio de Janeiro: Ática, 2009.

- 19 SCIPIONE Ática . *Histórias Pessoais*: Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=ahhardof278>>. [S.l.]: Ática e Scipione, 2018.
- 20 ASSIS, D. d. F. C. A. Resolução de problemas via teoria de grafos: uma possibilidade de tornar a matemática mais atraente na educação básica. UFSJ, p. 152, 2017.
- 21 AUTORES, V. *7º ano do Ensino Fundamental*. 1. ed. Rio de Janeiro: Eleva Educação, 2019. 456 p.
- 22 PITOMBEIRA, J. B. *O problema das ligações de água, luz e telefone*: Rpm 11. [S.l.]: SBM, 2019. 1-4 p.
- 23 LOPES, M. L. M. L. *Grafos: jogos e desafios*: Disponível em <www.proformat-sbm.org.br/dissertacoes>. [S.l.]: IM-UFRJ, 2010. 48 p.
- 24 MUNIZ, I. Encontrando, minimizando e planejando percursos: Uma introdução à teoria dos grafos no ensino médio: Dissertação de mestrado. CEFET, Rio de Janeiro, p. 141, 2007.
- 25 BOAVENURA, P. O. *Grafos: Teoria, modelos, algoritmos*. 4. ed. [S.l.]: Edgard Blucher, 2006. 328 p.