Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

ALESSANDRO JESUS DA SILVA ALMEIDA

TRIGONOMETRIA PRÁTICA COM USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Orientador: Prof. Dr. Mário Olivero Marques da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
Julho / 2020

ALESSANDRO JESUS DA SILVA ALMEIDA

TRIGONOMETRIA PRÁTICA COM USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação apresentada por **Alessandro Jesus da Silva Almeida** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Mário Olivero Marques da Silva

Niterói
2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A447t Almeida, Alessandro Jesus da Silva
Trigonometria prática com uso de tecnologias para o ensino das funções trigonométricas / Alessandro Jesus da Silva Almeida ; Mário Silva, orientador. Niterói, 2020.
53 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.13472554789

1. Trigonometria. 2. Ensino de Matemática. 3. Produção intelectual. I. Silva, Mário, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

ALESSANDRO JESUS DA SILVA ALMEIDA

Trigonometria Prática Com o Uso de Tecnologias Para o Ensino de Funções Trigonométricas

Dissertação apresentada por ALESSANDRO JESUS DA SILVA ALMEIDA ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 31/07/2020

Banca Examinadora

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof ª. Cristiane Mello - Membro
Doutora – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof ª. Miriam del Milagro Abdón - Membro
Doutora – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI 2020

Este trabalho é dedicado a minha amada e linda esposa Gisele Almeida, por ser sempre companheira, as minhas filhas Giovana Almeida e Clara Almeida, pois são os melhores presentes que tenho na vida e aos meus avós Nelson e Nice, por toda educação que me deram.

AGRADECIMENTOS

À CAPES: O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de financiamento 001.

À professora Dirce Uesu Pesco, Coordenadora do Programa de Mestrado Profissional PROFMAT-UFF, por toda sua atenção e compreensão.

Ao professor orientador Mário Olivero Marques da Silva, por ter acreditado na realização desta obra e suas palavras de motivação.

Aos demais Professores do Programa de Mestrado Profissional PROFMAT-UFF.

RESUMO

Neste trabalho vamos apresentar alguns conhecimentos básicos na área de trigonometria, demonstrações e uma atividade prática para despertar o interesse por esta parte da Matemática. Devido ao grande número de estudantes que a julgam difícil, mesmo sem ter tido qualquer contato com seus fundamentos, a tarefa de ensinar este tão vibrante conhecimento fica de antemão dificultada. Isto acaba gerando um bloqueio no processo de ensino e aprendizagem. Com este trabalho temos a proposta de um contato com a trigonometria prática além do contato com a parte teórica. Fizemos uma atividade em uma praia no município de Cabo Frio, com o objetivo de medir a distância entre a Ilha do Papagaio e o promontório de Arraial do Cabo. O trabalho serviu como ponto de partida para mostrar o quanto é útil a trigonometria e o quanto ela pode ser prazerosa.

Palavras chaves: Trigonometria, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Triângulo Retângulo.

ABSTRACT

In this work we will present some basic knowledge in the area of trigonometry, demonstrations and a practical activity to arouse interest in this part of Mathematics. Due to the large number of students who find it difficult, even without having had any contact with its fundamentals, the task of teaching this vibrant knowledge is difficult beforehand. This ends up creating a block in the teaching and learning process. With this work, we propose a contact with practical trigonometry in addition to contact with the theoretical part. We did an activity on a beach in the municipality of Cabo Frio, with the aim of measuring the distance between the Ilha do Papagaio and the Arraial do Cabo promontory. The work served as a starting point to show how useful trigonometry is and how pleasurable it can be.

Key words: Trigonometry, Law of Senos, Law of Cosines, Right Triangle.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ	Letra grega maiúscula sigma
π	Letra grega minúscula pi
Ω	Letra grega maiúscula omega
λ	Letra grega minúscula lambda
ζ	Letra grega minúscula zeta
θ	Letra grega minúscula teta
ϕ	Letra grega minúscula fi
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números reais não incluindo o zero

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho, entre outros objetivos, pretende ser mais um instrumento de motivação de professores do Ensino Médio que têm como finalidade ministrar aulas de trigonometria. Uma vez que esse assunto, por diversas vezes, é julgado precipitadamente como complicado. O fato dos estudantes julgarem, antes mesmo de qualquer contato com o conteúdo, a trigonometria como um assunto complicado faz com que se tenha um desestímulo para o aprendizado.

Nesta obra buscamos uma solução para minimizar o problema de falta de interesse dos alunos e mostrar o quanto a trigonometria pode ser prazerosa e útil em nosso cotidiano. Na busca pela solução nos apoiamos à Base Nacional Comum Curricular $(BNCC)$, pois segundo o Ministério da Educação, é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

Com uma atividade simples buscamos trabalhar com os alunos algumas das propostas estabelecidas pela BNCC de maneira que possamos contribuir com o processo de ensino-apredizagem. Uma das propostas da BNCC é a utilização de tecnologias, como calculadora, planilhas eletrônicas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, porém a realidade em muitas escolas é outra, o que acaba tornando a Matemática para os estudantes, muitas vezes, pouco atraente devido ao contexto social que vivem hoje. Sabendo desta realidade, buscamos abordar o ensino de trigonometria com uma atividade prática com a utilização de alguns recursos tecnológicos além dos fundamentos mátematicos. Ainda pela BNCC, a área da Matemt́ica e suas tecnologias tem como objetivo desenvolver nos estudantes a capacidade de formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

Nesta obra consta uma atividade que contribui no desenvolvimento das habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, o que contribui no ensino de trigonometria.

2 ARCOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA E ÂNGULOS

Iniciamos este capítulo com a definição de ângulos e arcos de circunferência, pois estes são conceitos básicos para o estudo da trigonometria. Em seguida trataremos dos tipos de ângulos existentes, de como encontrar a medida do raio ou a medida do arco da circunferência para um dado ângulo seja em graus, seja em radianos.

2.1 Arcos

Começamos com a definição de arco de circunferência, um conceito básico necessário para o trabalho.

Definição 2.1 *Dados um círculo*[1] Σ *de centro* O *e raio* $\boldsymbol{d}$ *e dois pontos* X *e* Y *que distam* $\boldsymbol{d}$ *do ponto* O*, o círculo* Σ *fica dividido em duas regiões delimitadas pela reta* r*, definida pelos pontos* X *e* Y*. O conjunto dos pontos, incluindo* X *e* Y*, que distam* $\boldsymbol{d}$ *do ponto* O *que estão em uma das regiões é denominado arco da circunferência*[2] Σ.

Usaremos a notação $\mathrm{X\widehat{O}Y}$ para representar um arco de centro O e extremos X e Yobtido através da seguinte construção:

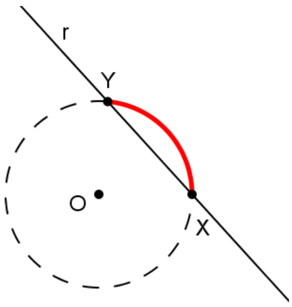
1. Ponha a ponta seca do compasso no ponto O.
2. Abra o compasso com tamanho do segmento OX.
3. Gire o compasso do ponto X ao ponto Y, no sentido anti-horário.

Note que através da construção acima temos que $\mathrm{X\widehat{O}Y} \neq \mathrm{Y\widehat{O}X}$ como podemos ver na figura 1. Ainda na figura 1 temos a ilustração da definição 2.1

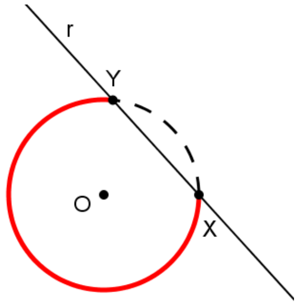
---

[1] Um círculo de centro O e raio $\mathbf{r}$ é o conjunto dos pontos P, tal que a distância do ponto P ao ponto O é menor do que ou igual a $\mathbf{d}$.

[2] Uma circunferência de raio $\mathbf{d}$ e centro O é o conjunto de pontos P que distam $\mathbf{d}$ do ponto O dado.



(a) $X\widehat{O}Y$



(b) $Y\widehat{O}X$

Figura 1 – Arcos da circunferência Σ definidos pelos pontos X e Y

Fonte: elaborada pelo autor

Vamos considerar a situação na qual X e Y coincidem como um caso especial que definem então os arcos nulo e o arco de uma volta (IEZZI et al., 1978).

Dizemos que um círculo tem comprimento C tal que C é um número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos nele inscrito e consequentemente toda circunferência também terá um comprimento C. Assumiremos como *axioma* que o número π é o comprimento de um semicírculo de raio 1 (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Axioma 2.2 *O número π é o comprimento de um semicírculo de raio* 1*.*

Teorema 2.3 *Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que o círculo C, de raio a, e o círculo C', de raio a', têm o mesmo centro O. A homotetia de centro O e razão $r = \frac{a'}{a}$ transforma cada segmento de reta de origem O e comprimento a num segmento de origem O e comprimento a', situado sobre a mesma reta. Logo, essa homotetia define uma semelhança entre C e C'.

Do axioma 2.2 podemos concluir que $C = 2\pi$ é o comprimento de uma circunferência de raio 1 e como todas as circunferências são semelhantes podemos determinar o comprimento de qualquer circunferência, como mostraremos.

Teorema 2.4 *Toda circunferência de raio R tem comprimento* $C = 2\pi R$.

Demonstração. Dados dois círculos Σ e Ω de comprimentos C e C' e raios R e R', respectivamente, temos pelo teorema 2.3 que

$$\frac{C}{\text{C'}} = \frac{R}{\text{R'}}, \tag{1}$$

Da igualdade (1) temos que $C = C'RR'$, assumindo que Ω é um círculo de raio 1 concluímos que $C = 2\pi R$.

Do teorema 2.4 temos que $\pi = \frac{C}{2R}$, ou seja, π é a razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Calculando a razão $\frac{C}{2R}$ obtemos um número, irracional, aproximadamente igual a $3,1416$. Não entraremos aqui nos detalhes sobre o número pi, mas o leitor interessado poderá consultar (PEREIRA, 2013).

2.2 Ângulos

Iniciamos esta seção com a definição de ângulo, que tem utilidade para prosseguirmos nossos estudos.

Definição 2.5 *Dadas, no plano, duas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$, *um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *é uma das regiões do plano limitada pelas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$.

Figura 2 – Regiões angulares no plano

Fonte: elaborada pelo autor

Nosso próximo passo será associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa. Dado um círculo Σ de centro O divida-o em 360 arcos iguais e tome pontos X e Y, extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida do ângulo convexo, formado pelas semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ é $1°$ (lê-se: um grau). A figura 3 ilustra o processo que enunciamos anteriormente para a obtenção da unidade de medida de ângulo grau. Usaremos as notações $\angle XOY$ e $\widehat{XOY}$ para representarmos o ângulo definido pelas semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ e sua medida, respectivamente. Sendo assim, temos na figura 3 que $\widehat{XOY} = 1°$. A partir da definição de grau podemos concluir que um círculo tem $360°$.

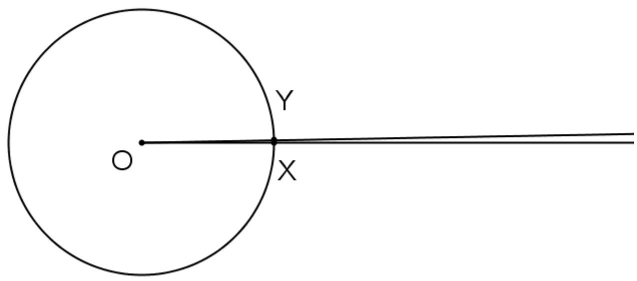


Figura 3 – Ângulo de um grau

Fonte: elaborada pelo autor

É importante ressaltarmos que a medida de um grau independe do círculo escolhido, como podemos ver em (NETO, 2013) p.12.

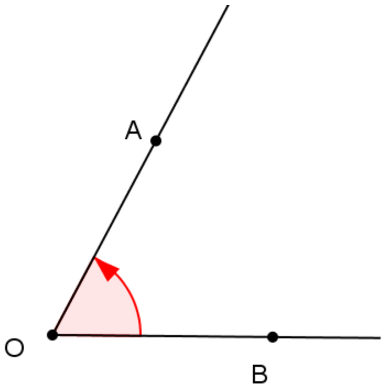
Note que todo arco de circunferência X$\widehat{\text{O}}$Y poderá ser associado a um ângulo $\angle XOY$. O ângulo associado a um arco de circunferência é chamado de ângulo central.

Na figura 2 vimos que duas semirretas de mesma origem determinam dois ângulos, esses ângulos podem ser convexos ou não convexos. Um ângulo x é convexo se $0° \leq x \leq 180°$ e não convexo se $x > 180°$. Na figura 2a $\angle AOB$ é convexo e na figura 2b $\angle AOB$ é não convexo. Para maior esclarecimento quanto a convexidade de um ângulo consulte (NETO, 2013).

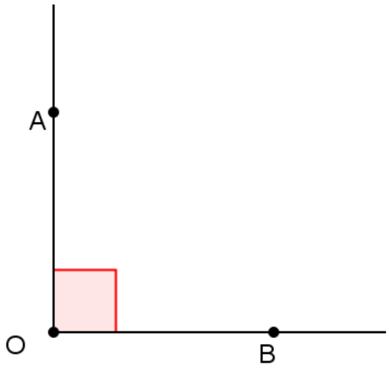
Definição 2.6 *Dado um ângulo $\angle AOB$ com $\widehat{AOB} = x$, denominamos $\angle AOB$ de:*

1. ***ângulo agudo*** *se* $0° < x < 90°$*;*
2. ***ângulo obtuso*** *se* $90° < x < 180°$*;*
3. ***ângulo reto*** *se* $x = 90°$*;*
4. ***ângulo raso*** *se* $x = 180°$.

As figuras 4 e 5 nos mostram a representação dos ângulos de acordo com a definição 2.6.



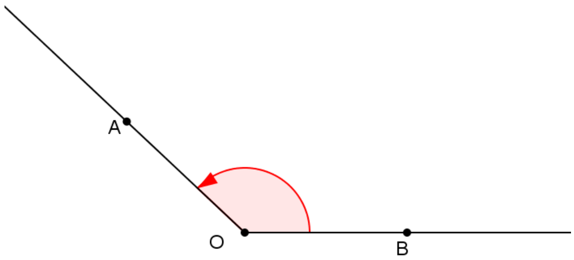
(a) Ângulo agudo



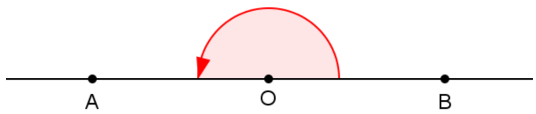
(b) Ângulo reto

Figura 4 – Tipos de ângulos

Fonte: elaborada pelo autor



(a) Ângulo obtuso



(b) Ângulo raso

Figura 5 – Tipos de ângulos

Fonte: elaborada pelo autor

Definição 2.7 *Dados dois ângulos de medidas x e y graus, denominamos de:*

1. ***ângulos complementares*** *se* $x + y = 90°$*;*
2. ***ângulos suplementares*** *se* $x + y = 180°$*;*
3. ***ângulos replementares*** *se* $x + y = 360°$*.*

Nos próximos capítulos, para simplificarmos a escrita, em alguns casos usaremos anotação $\hat{A}$ para indicarmos o ângulo $\angle XAY$ ou sua medida.

2.3 Comprimento de um arco de circunferência e o radiano

Nas seções anteriores falamos sobre arcos de circunferências, comprimento de uma circunferência e a medida de um ângulo em graus que são assuntos fundamentais para a abordagem desta seção. Nesta seção iremos tratar do comprimento de um arco de circunferência e a medida de um ângulo em radiano.

Pela definição de ângulo temos que se C é o comprimento da circunferência Σ então o comprimento de um arco pertencente a Σ com seu ângulo central medindo $1°$ é igual a $\frac{C}{360}$ donde podemos concluir que

$$\text{medida do arco } \lambda = \frac{x \times C}{360}, \text{ se o ângulo central de } \lambda \text{ medi } x \text{ graus.}$$

Exemplo 2.8 *O comprimento de um arco de circunferência de raio 12 cm e ângulo central igual a $30°$ é 2π cm. De fato, seja λ o arco de circunferência de raio 12 cm e ângulo central igual a $30°$ temos que*

$$\textit{medida do arco } \lambda = \frac{30 \times 2\pi \times 12\ cm}{360} = \frac{720\pi\ cm}{360} = 2\pi cm$$

.

É importante lembrarmos que o comprimento de um arco de circunferência é diretamente proporcional ao seu raio e ao seu ângulo central.

Definição 2.9 *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.*

Exemplo 2.10 *Dado um arco de comprimento π cm e raio 2 cm a medida do ângulo central do arco em radianos é igual a $\pi/2$.*

Exemplo 2.11 *Dado um arco que subtende um ângulo central de $\pi/3$ rad e raio 3 cm temos que seu comprimento é π cm, pois admitindo que seja x o comprimento do arco, em centímetros, temos que*

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3}$$
$$\Longrightarrow 3x = 3\pi$$
$$\Longrightarrow x = \pi$$

A conversão entre as duas unidades de medidas de ângulos é feita por meio de uma regra de três simples.

Exemplo 2.12 *Qual a medida em radiano de um ângulo que medi* $45°$*? Chamando de* x *a medida em radianos do ângulo de* $45°$ *e utilizando regra de três simples obtemos*

$$\frac{45}{180} = \frac{x}{\pi} \Longrightarrow 180x = 45\pi \Longrightarrow x = \frac{45\pi}{180} \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 2.13 *Qual medida em graus de um ângulo que medi* $\pi/3$ *rad? chamando de* x *a medida em graus do ângulo* $\pi/3$ *rad e utilizando regra de três simples obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{x}{180} &= \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \\ \Longrightarrow \frac{x}{180} &= \frac{1}{3} \\ \Longrightarrow 3x &= 180 \\ \therefore x &= 60 \end{aligned}$$

Em particular, qualquer ângulo em radianos na forma $m\pi/\mathrm{n}$ com $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}^*$, para que possamos convertê-lo em graus, basta substituirmos π por $180°$, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2.14

$$\frac{\pi}{6}\, rad = \frac{180°}{6} = 30°$$

3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, lembraremos da trigonometria no triângulo retângulo, dos elementos que compõem um triângulo retângulo e das relações trigonométricas importantes que surgiram através da semelhança de triângulos. Apresentaremos a função de Euler e em seguida estenderemos as funções trigonométricas para todos os números reais

3.1 Relações métricas em triângulos retângulos

Triângulo retângulo é todo triângulo que contém um ângulo interno de 90°. Os lados de um triângulo retângulo que formam o ângulo de 90° são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Dado um triângulo retângulo ABC e $\theta \neq 90°$ um de seus ângulos internos, chamamos o lado oposto ao ângulo θ de **cateto oposto à** θ e o cateto que faz parte do ângulo θ de **cateto adjacente à** θ . Na figura 6 temos um triângulo retângulo ABC retângulo em A.

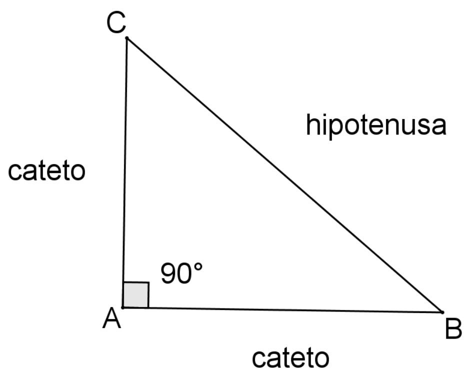


Figura 6 – Triângulo retângulo

Fonte: elaborada pelo autor

Devido os casos de semelhança de triângulos, estabelecemos na proposição a seguir, as relações métricas em triângulos retângulos. Todos os itens da proposição 3.1 podem ser demonstrados usando os casos de semelhança de triângulos, contudo usaremos o conhecimento sobre a área de um triângulo para demonstrar o item 1.

Proposição 3.1 *Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos* $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ *e hipotenusa* $\overline{BC} = a$*. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa,* $\overline{CH} = m$ *e* $\overline{BH} = n$*,* *respectivamente, as projeções ortogonais dos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa e $\overline{AH} = h$, temos que:*

1. *o produto da altura relativa à hipotenusa pela hipotenusa é igual ao produto dos catetos, ou seja, $ah = bc$.*
2. *o produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa é igual ao quadrado da altura relativa à hipotenusa, ou seja, $mn = h^2$.*
3. *o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa, ou seja, $b^2 = am$ e $c^2 = an$.*
4. *a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.*

Demonstração.

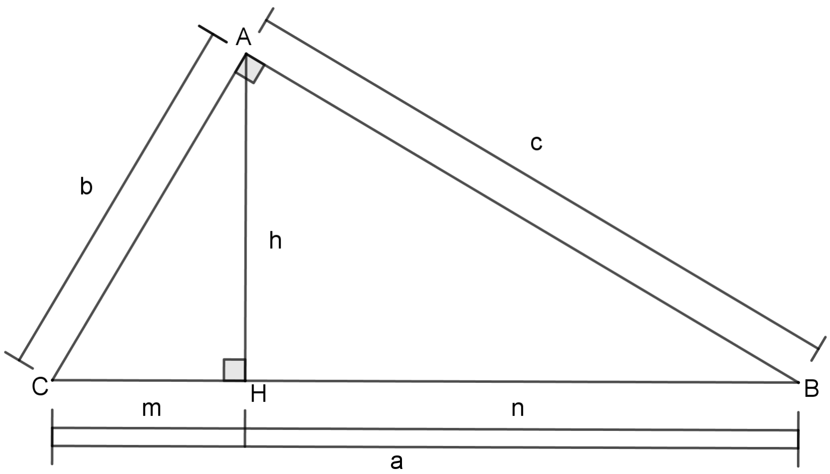


Figura 7 – Triângulo retângulo com as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa

Fonte: elaborada pelo autor

1. Temos que h é a medida da altura relativa à hipotenusa $\overline{BC} = a$, sendo assim se S_{ABC} é a área do triângulo ABC então $S_{ABC} = \frac{ah}{2}$, porém se tomarmos o cateto $\overline{AB} = c$ como base, temos que o cateto $\overline{AC} = b$ como sua altura relativa, donde vem que
$$S_{ABC} = \frac{bc}{2} \Longrightarrow \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2} \therefore ah = bc \tag{2}$$
2. Primeiramente, iremos provar que os triângulos ABC, HCA e HAB são semelhantes. Para isso mostraremos que os ângulos internos dos triângulos HCA($90°, \widehat{HCA}$ e $\widehat{CAH}$) e HAB($90°, \widehat{HAB}$ e $\widehat{ABH}$) têm as mesmas medidas dos ângulos internos do

triângulo ABC($90°, \widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$). Todos os três triângulos têm um ângulo reto por construção, sendo assim basta verificarmos dois de seus ângulos. No triângulo ABC(figura 7) temos que H está contido no segmento BC, ou seja, $\angle BCA$ e $\angle HCA$ são formados pelas mesmas semirretas, então

$$\widehat{BCA} = \widehat{HCA}. \tag{3}$$

Utilizando o raciocínio anterior podemos concluir que

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC} \tag{4}$$

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então do triângulo ABC temos que

$$90° + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180° \Longrightarrow \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90°. \tag{5}$$

De forma análoga, dos triângulos ACH e ABH temos que

$$\widehat{CAH} + \widehat{HCA} = 90° \tag{6}$$

e

$$\widehat{ABH} + \widehat{HAB} = 90°. \tag{7}$$

Das igualdades (3) e (5) temos que $\widehat{HCA} = 90° - \widehat{ABC}$. Substituindo $\widehat{HCA}$ na igualdade (6) obtemos

$$\widehat{CAH} + (90° - \widehat{ABC}) = 90° \Longrightarrow \widehat{CAH} = \widehat{ABC} \tag{8}$$

Do mesmo modo que concluímos a igualdade (8), utilizando as igualdades (4), (5) e (7) concluí-se que

$$\widehat{HAB} = \widehat{BCA} \tag{9}$$

Agora que sabemos que os triângulos ABC, HCA e HAB são semelhantes e quais são os seus ângulos congruentes podemos usar o conceito de semelhaça de triângulos. Observando os triângulos HCA e HAB na figura 8 e usando o fato de que eles são semelhantes temos que

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HA}} \Longrightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Longrightarrow h^2 = mn$$

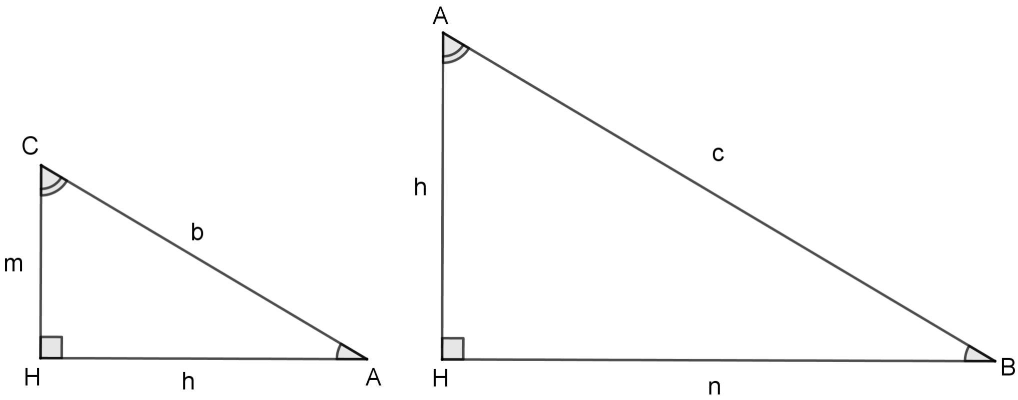


Figura 8 – Triângulos HCA e HAB

Fonte: elaborada pelo autor

3. Como os triângulos HCA e ABC são semenlhantes, como podemos observar na figura 9, temos que

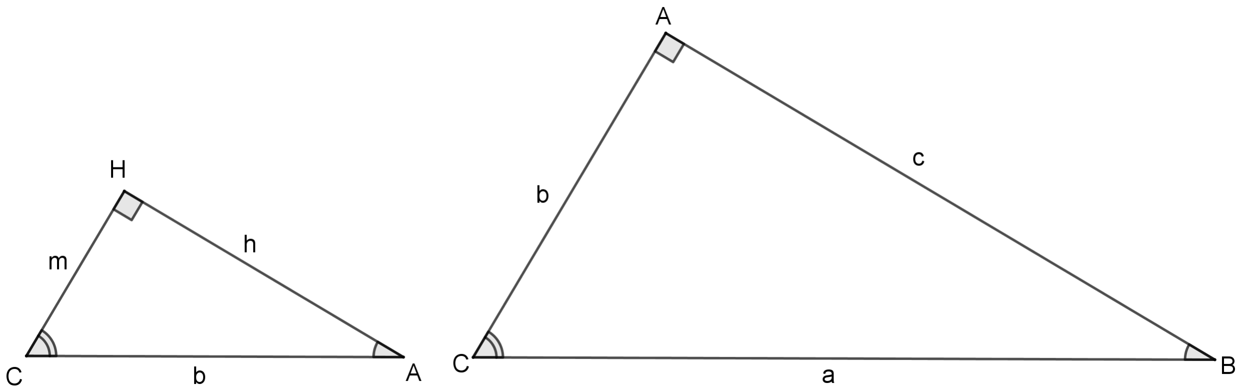


Figura 9 – Triângulos HCA e ABC

Fonte: elaborada pelo autor

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Longrightarrow b^2 = am$$

De forma análoga, podemos concluir que

$$c^2 = an$$

.

4. Segue do item 3 da proposição 3.1 que

$$b^2 + c^2 = am + an \Longrightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \therefore b^2 + c^2 = a^2$$

O item 4 da proposição 3.1 é conhecido como **teorema de Pitágoras**.

3.2 As funções trigonométricas do ângulo agudo

Considere um ângulo $\widehat{AOB} = \theta$, $0° < \theta < 90°$, pontos A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n, sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$, e pontos B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_n, sobre a semirreta $\overrightarrow{OB}$, tais que os segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, $\ldots$, A_nB_n são perpendiculares a reta OB. Como os triângulos A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3, $\ldots$, A_nOB_n têm os mesmos ângulos internos então são semelhantes como podemos ver na figura 10. Para maiores detalhes sobre semelhança de triângulos consultar (LIMA, 2011) p.49. Podemos portanto escrever

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots$$

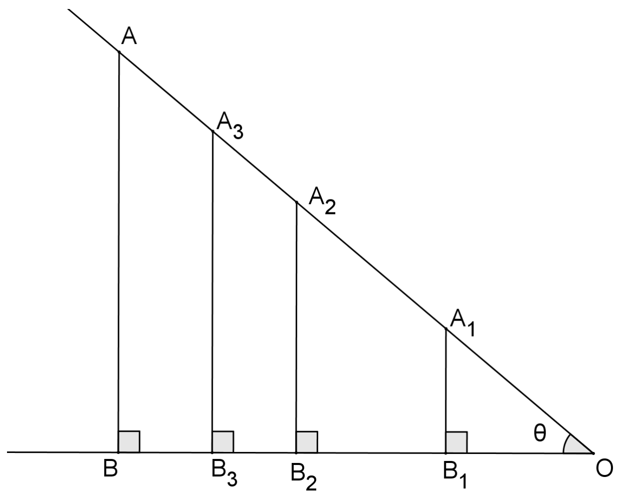


Figura 10 – Triângulos semelhantes

Fonte: elaborada pelo autor

Como podemos perceber esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos, devido a este fato esta função de θ foi definida, para $0° < \theta < 90°$, como

$$sen\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}},$$

que se lê seno de θ. Ainda dos triângulos semelhantes da figura 10 temos as seguintes relações

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots$$

e

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \ldots$$

as quais também dependem apenas do ângulo θ, sendo assim podemos definir essas funções de θ, para $0° < \theta < 90°$, como

$$cos\theta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} \text{ e } tg\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}},$$

tais funções são chamadas, respectivamente, de *cosseno* de θ e *tangente* de θ. As funções seno, cosseno e tangente são conhecidas como *funções trigonométricas.*

Vamos mostrar, agora, algumas relações importantes envolvendo seno e cosseno. Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, com $\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \theta, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ (figura 11), temos as seguintes relações:

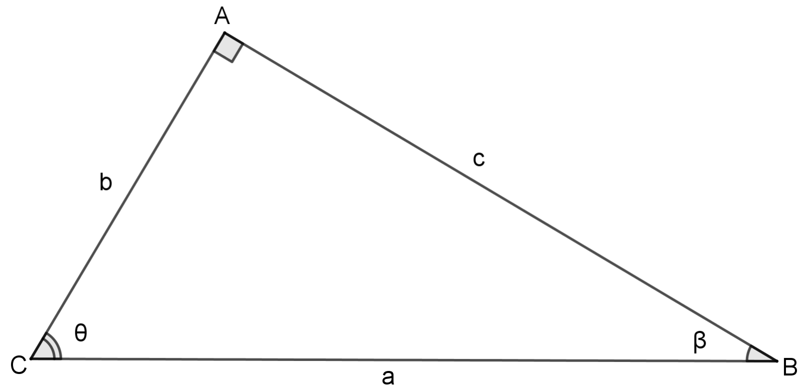


Figura 11 – Relações envolvendo seno e cosseno no triângulo retângulo

Fonte: elaborada pelo autor

- $sen\beta = cos\theta$, ou seja, o seno e o cosseno de ângulos complementares são iguais.

  De fato, pelo triângulo ABC temos que

  $$sen\beta = \frac{\text{cateto oposto à } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente à } \theta}{\text{hipotenusa}} = cos\theta$$

- O inverso da tangente de um ângulo é igual a tangente do seu ângulo complementar.

  Com efeito, temos que

  $$\frac{1}{tg\beta} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b} = tg\theta$$

- $\dfrac{sen\phi}{cos\phi} = tg\phi$, ou seja, a razão entre o seno e cosseno de um ângulo é igual a tangente do mesmo ângulo. Esta relação é demonstrada de forma imediata como podemos ver a seguir.

  Sendo ϕ um ângulo interno de um triângulo retângulo qualquer, temos que

  $$\frac{sen\phi}{cos\phi} = \frac{\frac{\text{cateto oposto à } \phi}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente à } \phi}{\text{hipotenusa}}}$$

$$\Longrightarrow \frac{sen\phi}{cos\phi} = \frac{\text{cateto oposto à } \phi}{\text{hipotenusa}} \times \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente à } \phi}$$
$$\Longrightarrow \frac{sen\phi}{cos\phi} = \frac{\text{cateto oposto à } \phi}{\text{cateto adjacente à } \phi} = tg\phi$$

- A soma do quadrado do seno de um ângulo com o quadrado do seu cosseno é igual a 1, tal relação é conhecida como **relação fundamental trigonométrica**. Sem perda de generalidade utilizando a figura 11 temos que

$$(sen\beta)^2 + (cos\beta)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

  e pelo teorema de Pitágoras temos que

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Como podemos ver nas relações anteriores as funções seno, cosseno e tangente não são independentes, ou seja, tendo apenas uma delas somos capazes de encontrar as outras duas.

3.3 Seno, cosseno e tangente de alguns ângulos

Nesta seção iremos dar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° os quais são facilmente obtidos utilizando um triângulo equilátero e um quadrado. O leitor interessando em saber como encontrar os resultados da tabela 1 basta consultar (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) página 17.

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fonte: elaborada pelo autor

4 EXTENSÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, iremos mostrar o estudo da trigonometria no círculo unitário, um pouco sobre a função Euler e em seguida definiremos as funções trigonométricas seno e cosseno em $\mathbb{R}$ e a função tangente no no intervalo $\mathbb{R} - \{x|x \neq \pi/2 + k\pi\}$, com k inteiro.

4.1 Trigonometria no primeiro quadrante de um círculo unitário

Consideremos um círculo unitário λ de centro O orientado, sendo o percurso positivo o sentido anti-horário, e a origem dos arcos no ponto fixo A.

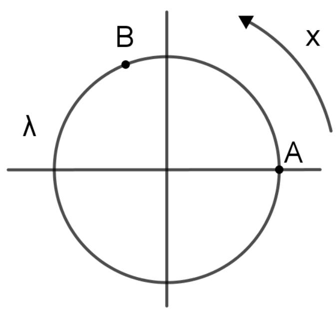


Figura 12 – Círculo unitário

Definiremos a medida algébrica de um arco AB deste círculo como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário e negativo caso contrário. Esta medida será representada por $m\widehat{AB}$. Note que como o círculo é unitário temos que um arco que tem seu ângulo igual a x radianos tem seu comprimento igual x, então dado um ponto P pertencente ao arco AB, tal que $m\widehat{AB} = \pi/2$, temos que as coordenadas do ponto P são dadas por $(cosx, senx)$. Observando a figura 13 podemos notar que dado um ponto $P = (a, b)$ pertencente ao 1º quadrante[1] de um círculo unitário temos que

$$cosx = \frac{a}{1} = a \text{ e } senx = \frac{b}{1} = b$$

[1] Construindo 4 arcos de mesma medida sobre um círculo orientado, partindo da origem dos arcos, no sentido anti-horário, temos que o primeiro arco é o primeiro quadrante, o segundo arco é o segundo quadrante e assim sucessivamente.

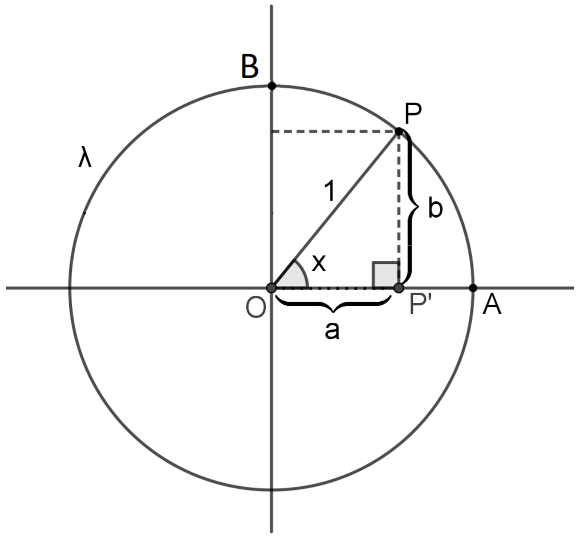


Figura 13 – 1º quadrante

Dados dois eixos perpendiculares de origem em O, um círculo unitário orientado de centro em O, sendo o sentido anti-horário o positivo, um ponto P pertencente ao primeiro quadrante e um ponto $A(1,0)$, sendo x a medida do ângulo do arco AP em radianos, temos que $P = (a,b) = (cosx, senx)$. Note que quando x varia de 0 a $\pi/2$ a abcissa a varia de 0 a 1 e a ordenada b varia de 1 a 0, em outras palavras podemos dizer que $0 \leq senx \leq 1$ e $0 \leq cosx \leq 1$ quando $x \in [0,\pi/2]$. Portanto podemos definir $sen\ 0 = 0, sen\ \pi/2 = 1, cos\ 0 = 1$ e $cos\ \pi/2 = 0$ e assim as funções seno e cosseno estão bem definidas no intervalo real $[0,\pi/2]$. Como $tgx = senx/cosx$ então temos que ter $cosx \neq 0$, ou seja, a função tangente está bem definida no intervalo $[0,\pi/2[$.

4.2 As funções trigonométricas e a função Euler

Nesta seção apresentaremos a função Euler, tentaremos estender as funções trigonométricas seno e cosseno de modo que elas possam ser definidas para todos os números reais, de forma que ainda seja mantida a relação básica

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

e em seguida estenderemos a função tangente de maneira que possa ser definida em $\mathbb{R} - \{x|cosx \neq 0\}$.

Considere a função $E : \mathbb{R} \to \Sigma$, onde Σ é um círculo unitário, construído sobre dois eixos perpendiculares, orientados, de origem O, tal que O é o centro de Σ, definida da seguinte maneira. Fixada uma origem $A = (1, 0)$ em Σ e dado um número real x, percorremos sobre Σ, no sentido positivo (sentido anti-horário) se $x > 0$ e no sentido negativo (sentido horário) se $x < 0$, um comprimento x; por definição, $E(x)$ é o ponto de Σ assim atingido

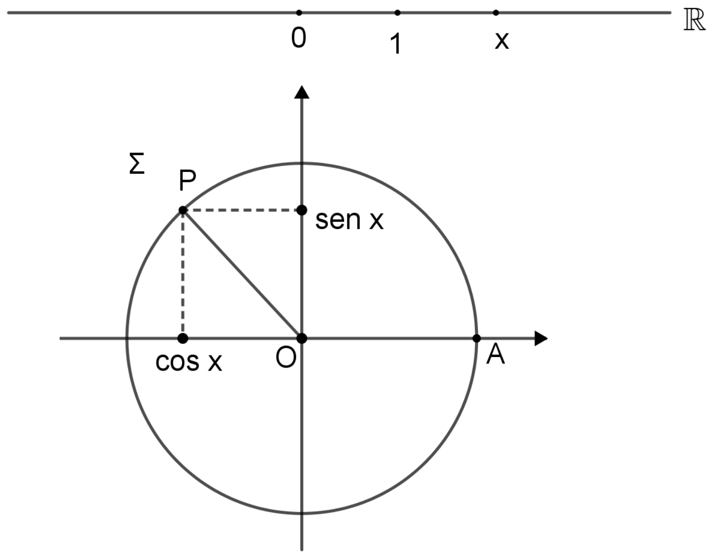


Figura 14 – $E(x) = P$, $m\widehat{AP} = x$

Como vimos na seção anterior as coordenadas do ponto P, quando P pertence ao primeiro quandrante, são $(cosx, senx)$ o que faremos agora é admitir que qualquer que seja o valor de x temos $E(x) = P = (cosx, senx)$. Note que na figura 14 o ponto P está no segundo quadrante, porém ainda não definimos quais são os valores de seno e cosseno de ângulos maiores que $\pi/2$ radianos. Para isso consideremos um ponto P pertencente ao segundo quadrante e tracemos uma reta r paralela à reta OA, sendo O a origem e o centro dos eixos perpendiculares e da circunferência unitária Σ, respectivamente. Sejam Q, P' e Q' o ponto de interseção entre r e Σ e as projeções ortogonais dos pontos P e Q, sobre a reta OA, respectivamente, como ilustra a figura 15. Ainda pela figura 15 podemos notar que os triângulos $PP'O$ e $QQ'O$ são congruentes, o que é facilmente verificado aplicando o teorema de Pitágoras em ambos, pois $\overline{PP'} \equiv \overline{QQ'}$ por construção, $\overline{PO}$ e $\overline{QO}$ são raios do círculo Σ. Sendo assim podemos concluir que $\overline{P'O} \equiv \overline{Q'O}$, donde vem que se $Q = (a, b)$, então $P = (-a, b)$. Dado um ponto A' simétrico de A em relação ao eixo vertical temos, pela congruência dos triângulos $PP'O$ e $QQ'O$, que o arco PA' é congruente ao arco AQ, ou seja, os arcos AP e AQ são suplementares. Chamando a medida do arco AQ de

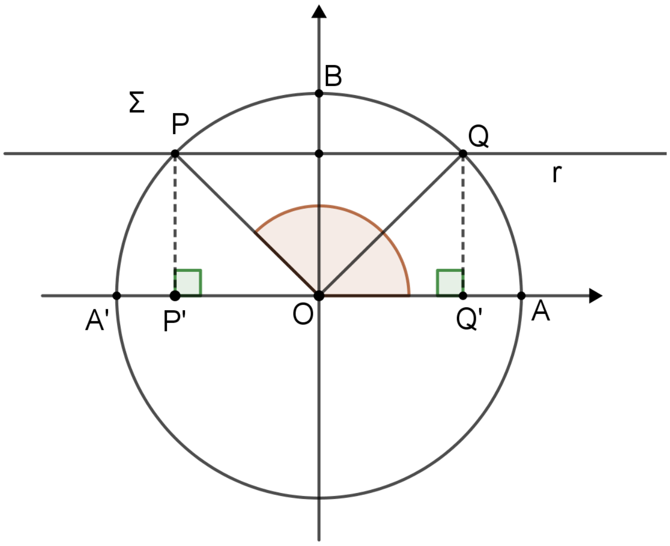


Figura 15 – Associação do primeiro quadrante ao segundo quadrante

y e a medida do arco AP de x, então $E(x) = P = (cosx, senx) = (-cosy, seny)$. como $x + y = \pi$, daí vem a seguinte proposição:

Proposição 4.1 *Dado $x \in [\pi/2, \pi]$ temos que $senx = sen(\pi - x)$ e $cosx = -cos(\pi - x)$.*

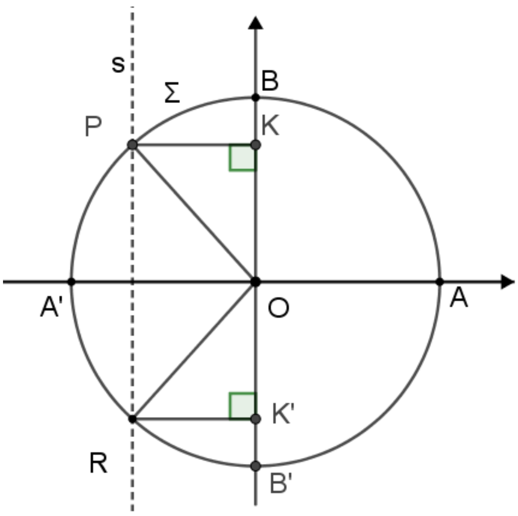


Figura 16 – Associação do primeiro quadrante ao segundo quadrante

Na a figura 16 temos que a reta s é paralela ao eixo vertical e passa pelos pontos P e R pertencentes ao círculo Σ, então podemos concluir facilmente que os triângulos POK e ROK' são congruentes, pois o processo de construção deles é similar ao dos triângulos $PP'O$ e $QQ'O$ da figura 15, diferindo apenas por uma questão de rotação. Sendo assim temos que se $R = (c, d)$, então $P = (c, -d)$. Ainda pela figura 16 tracemos uma reta r perpendicular à s passando por P e chamemos de Q o ponto de interseção entre o círculo unitário Σ e a reta r. Para melhor compreensão observe a figura 17 .

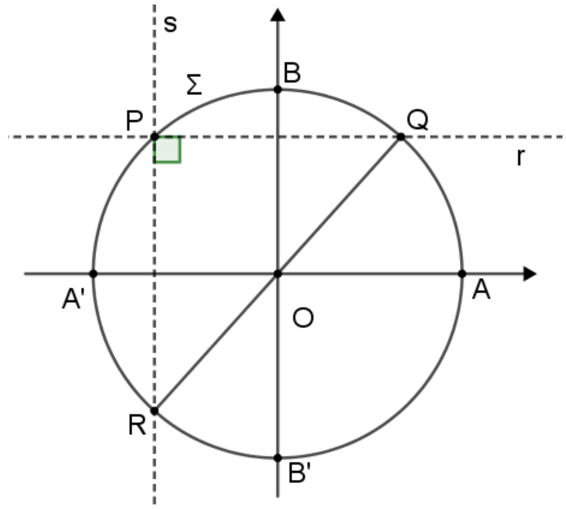


Figura 17 – Associação do primeiro quadrante ao terceiro quadrante

De onde podemos concluir que $Q = (-c, -d)$, ou seja,

$$R = (-(-c), -(-d)) = (-cosx, -senx).$$

Sabemos que x é o comprimento do arco AQ, mas qual seria a relação entre o arco AQ e o arco AR? Como o triângulo PQR é retângulo em P e está inscrito no círculo, desta forma temos que QR é o diâmetro deste círculo, portanto o comprimento do arco AR é igual ao arco AQ mais π, donde vem que

Proposição 4.2 *Dado* $x \in [\pi, 3\pi/2]$ *temos que* $senx = -sen(x-\pi)$ *e* $cosx = -cos(x-\pi)$.

De uma forma análoga aos casos anteriores podemos concluir a seguinte proposição

Proposição 4.3 *Dado* $x \in [3\pi/2, 2\pi]$ *temos que*

$$senx = -sen(2\pi - x) \text{ e } cosx = cos(2\pi - x).$$

A função $E : \mathbb{R} \to \Sigma$ é periódica pois $E(x) = E(x + 2k\pi)$ para todo x real e k inteiro. De fato, basta observarmos que como o comprimento de Σ é 2π, então sempre que um ponto percorrer um comprimento 2π dará uma volta completa sobre o círculo.

Portanto, uma vez definido os valores de seno e cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$ temos que as funções seno e cosseno estão bem definidas em $\mathbb{R}$. Usando as proposições anteriores desta seção e o fato de que $cos\pi/2 = 0$ temos que $cosx = 0$ para todo $x = \pi/2 + k\pi$, com k inteiro, ou seja, a função tangente está bem definida no intervalo $\mathbb{R} - \{x|x \neq \pi/2 + k\pi\}$, com k inteiro.

Uma vez que sabemos que $E(x) = E(x + 2k\pi)$, com k inteiro, podemos concluir da proposição 4.3 a seguinte proposição

Proposição 4.4 *Dado $x \in \mathbb{R}$ temos que*

$$senx = -sen(2\pi - x) = -sen(-x) \text{ e } cosx = cos(2\pi - x) = cos(-x).$$

4.3 Gráficos das funções trigonométricas

Nesta seção iremos mostrar alguns esboços dos gráficos das funções trigonométricas para termos uma melhor ideia de seu comportamento no conjunto dos números reias.

Como vimos na seção anterior os valores tanto de seno como cosseno variam entre -1 e 1 e como as funções seno e cosseno são periódicas basta conhecermos apenas um período de seus gráficos para que possamos construir seus gráficos por completo, para isso basta repetirmos o gráfico de um período uma infinidade de vez como podemos ver nas figuras seguintes.

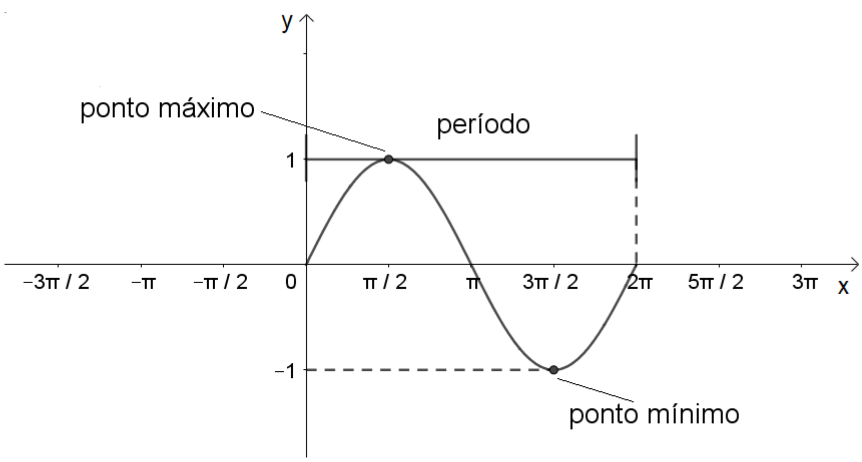


Figura 18 – Um período da função seno

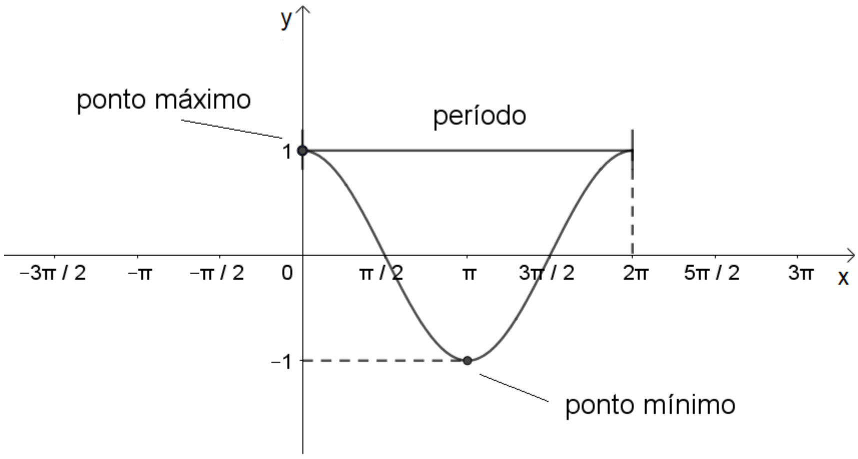


Figura 19 – Um período da função cosseno

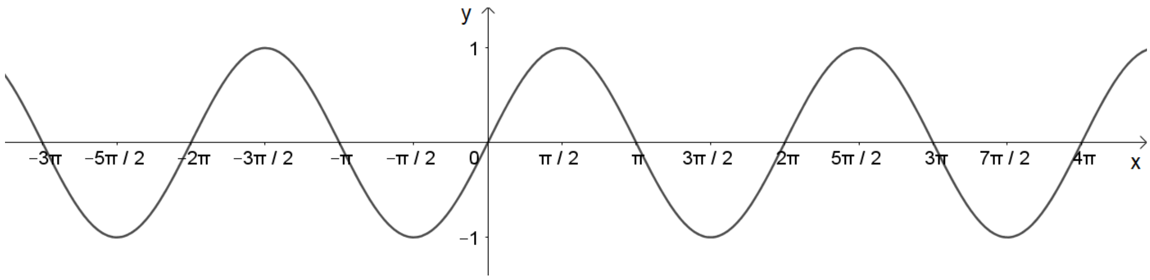


Figura 20 – $y = sen(x)$

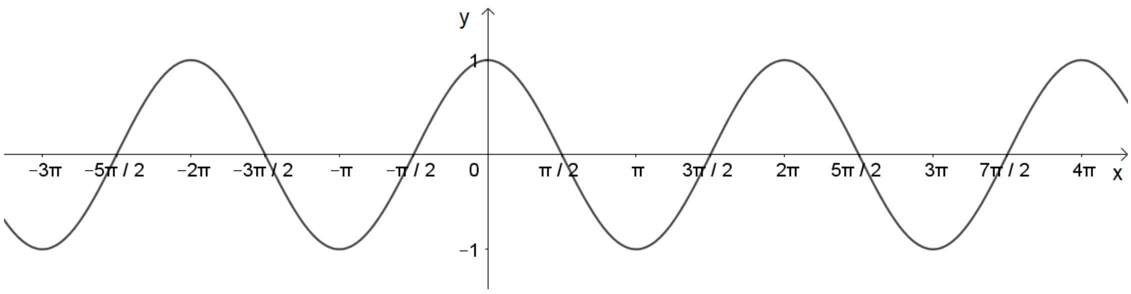


Figura 21 – $y = cos(x)$

Os gráficos das funções seno e cosseno são chamados de senoides, porém por muitas vezes alguns professores chamam de cossenoide o gráfico do cosseno, o que é um equivoco pois os gráficos de seno e cosseno diferem apenas por uma translação.

Vamos mostrar que tgx pode ser vista como medida algébrica de um segmento. Consideremos uma reta orientada tangente em A a Σ e seja AP um arco de medida x, como na figura 22. A reta r que contém o ponto O, centro de Σ, e P determinam o ponto P' em Σ e T no novo eixo. Mostraremos que $tgx = medida(AT)$, ou seja, tgx é a medida algébrica do segmento AT.

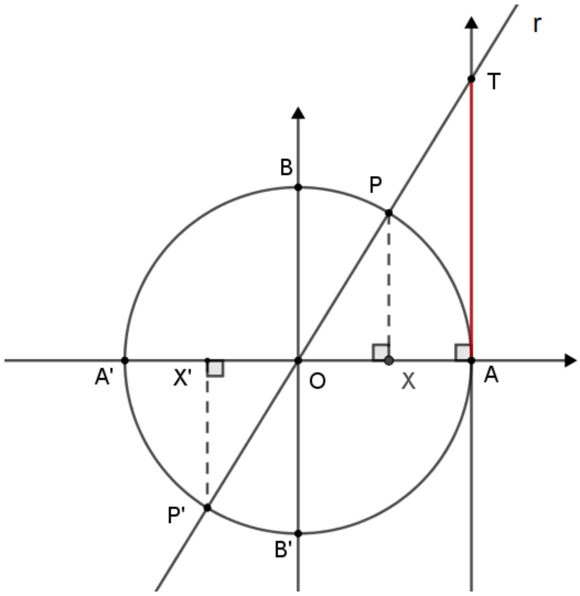


Figura 22 – Ponto P no primeiro ou terceiro quadrante

Os triângulos PXO e $P'X'O$ são congruentes e semelhantes ao triângulo TAO. Portanto,

$$tgx = \frac{senx}{cosx} = \frac{\overline{PX}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1}$$

Como o a medida do arco $AP' = x + \pi$ temos que

$$tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{-sen(x)}{-cos(x)} = \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\overline{PX}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{P'X'}}{\overline{OX'}} = \frac{\overline{AT}}{1}$$

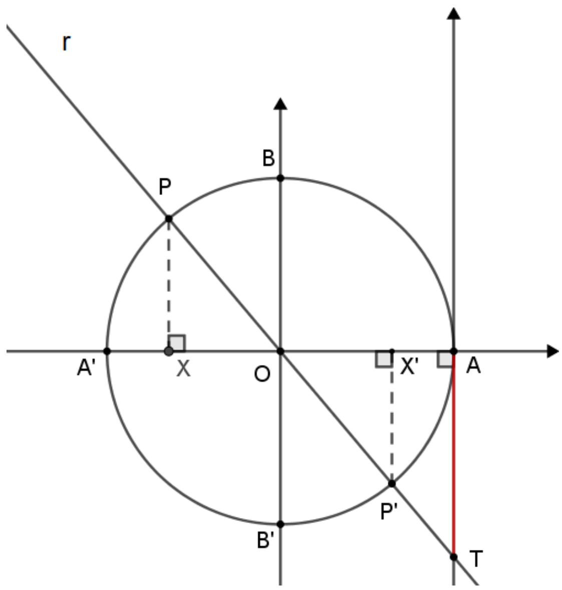


Figura 23 – Ponto P no segundo ou quarto quadrante

Nos casos de P está no segundo ou quarto quadrante o processo é análogo, porém sendo x a medida do arco AP temos que

$$tgx = tg(x + \pi) = -\overline{AT}.$$

Acabamos de ver que em qualquer caso temos que $tgx = tg(x + \pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica de período π. Mostraremos que para valores de x próximos e menores que $\pi/2$, temos que $tg(x)$ tende a $+\infty$, e para valores próximos e maiores que $-\pi/2$ temos que $tg(x)$ tende a $-\infty$. Não entraremos em detalhes sobre limites porém para efeito de simplificação assumiremos como definição a seguinte afirmação.

Definição 4.5 *Se quando x tende a p pela esquerda temos que $f(x)$ tende a 0 e existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p - r < x < p$, então*

$$\lim_{x \to p^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Definição 4.6 *Se quando x tende a p pela direita temos que $f(x)$ tende a 0 e existe $r > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $p < x < p + r$, então*

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Agora com a definição 4.5 podemos mostrar o limite de $tg(x)$ quando x tende a $\pi/2$ pela esquerda. Sabemos que

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

dividindo por $sen(x)$ o numerador e denominador do lado direito da igualdade obtemos

$$tg(x) = \frac{1}{\frac{cos(x)}{sen(x)}} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty$$

De maneira análoga temos que $tg(x)$ tende a $-\infty$ quando x tende a $\pi/2$ pela direita. Sabendo o que ocorre com a $tg(x)$ quando x tende a $\pi/2$, então sabemos o que ocorre com a $tg(x)$ quando x tende a $(\pi/2 + \pi)$, pois $tg(x) = tg(x + \pi)$.

Na figura 24 podemos observar melhor o comportamento da função tangente.

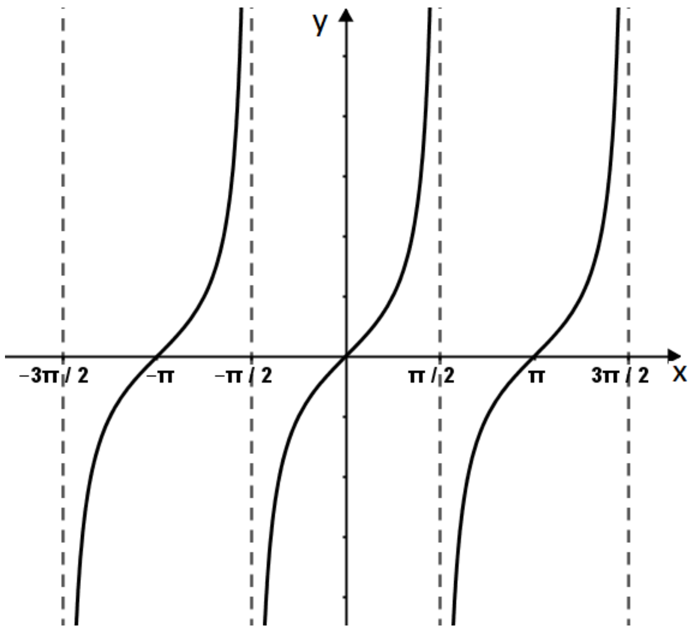


Figura 24 – $y = tg(x)$

5 AS LEIS DO SENO E DO COSSENO

Neste capítulo, iremos mostrar as fórmulas de adição e as leis do seno e do cosseno.

5.1 As fórmulas de adição

Nesta seção mostraremos uma demonstração para o seno da soma de dois arcos de uma forma bem simples. Em seguida usaremos as propriedades vistas nos capítulos anteriores para deduzir o cosseno e a tangente da soma de dois arcos.

Consideremos um retângulo $ABCD$ de diagonal $\overline{AC} = 1$, duas retas paralelas r e s, um ponto $P \in r$ e um ponto $Q \in s$, tal que seus vértices C e A estejam sobre as retas r e s, respectivamente, o segmento PQ seja perpendicular à reta r e contenha o ponto B, como ilustra a figura 25.

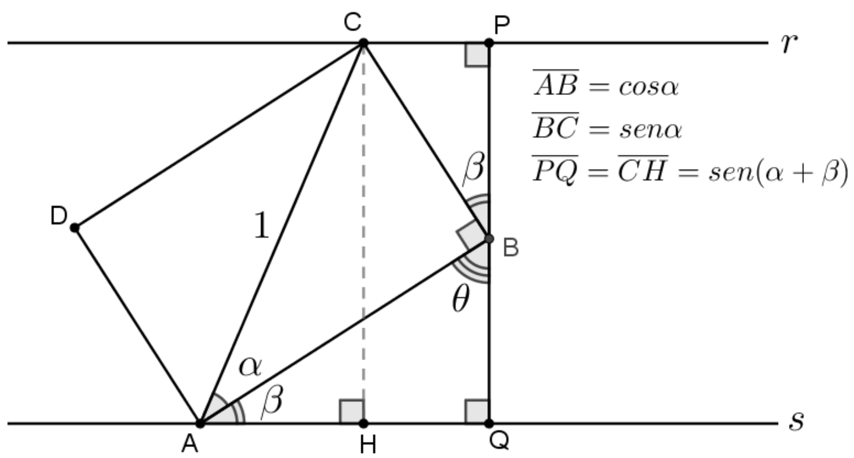


Figura 25 – Quadrilátero ABCD com as diagonais AC sobre as retas paralelas r e s

Ainda pela figura 25, se o ângulo CÂB medi α o ângulo BÂC medi β e o ângulo QB̂A medi θ, então o ângulo BP̂C medi β, donde vem que $\overline{AB} = cos\alpha$, $\overline{BC} = sen\alpha$ e $\overline{PQ} = \overline{CH} = sen(\alpha + \beta)$. No triângulo retângulo BPC temos que

$$\overline{PB} = \overline{BC} \cdot cos\beta = sen\alpha \cdot cos\beta$$

Observando o triângulo retângulo AQB é fácil notar que

$$\overline{BQ} = \overline{AB} \cdot sen\beta = cos\alpha \cdot sen\beta$$

Como $\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ}$, então

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha \tag{10}$$

Utilizando um raciocínio análogo temos que $cos(\alpha + \beta) = \overline{AQ} - \overline{HQ}$, donde vem que

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta \tag{11}$$

Finalmente, para calcular a tangente de $\alpha + \beta$, dividimos a fórmula (10) pela (11).

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha}{cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta} = \frac{\dfrac{sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha}{cos\alpha \cdot cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}{cos\alpha \cdot cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} \tag{12}$$

É possível fazer uma construção similar a da figura 25 de forma que $\alpha + \beta$ tenda, no máximo, a 180°, portanto não garante que as demonstrações que acabamos de ver são válidas para α e $\beta \in \mathbb{R}$. Como podemos ver em (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) p.57, as fórmulas que acabamos de ver são válidas para quaisquer reais.

5.2 A lei do seno

Consideremos um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O e raio r e tracemos por B uma corda BD que passa pelo cetro O. Note na figura que a medida ângulo $\widehat{BDC}$ é igual ao ângulo $\widehat{BAC}$, pois são ângulos inscritos do mesmo arco capaz, como podemos observar na figura 26.

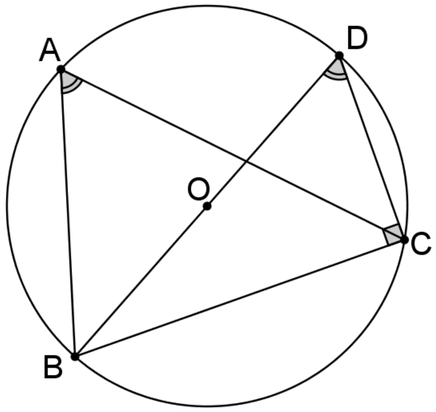


Figura 26 – Triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e raio r

Ainda pela figura 26 podemos observar que

$$sen\widehat{D} = \frac{\overline{BC}}{2r} \implies 2r = \frac{\overline{BC}}{sen\widehat{D}} = \frac{\overline{BC}}{sen\widehat{A}}$$

De forma análoga encontraremos que

$$2r = \frac{\overline{AC}}{sen\widehat{B}} \text{ e } 2r = \frac{\overline{AB}}{sen\widehat{C}},$$

donde vem que

$$\frac{\overline{BC}}{sen\widehat{A}} = \frac{\overline{AC}}{sen\widehat{B}} = \frac{\overline{AB}}{sen\widehat{C}} \tag{13}$$

A relação (13) que acabamos de ver é conhecida como lei do seno.

5.3 A lei do cosseno

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b, e c. Tracemos a altura $\overline{AH}$ e consideremos os dois casos seguintes:

a) $\widehat{C}$ é agudo.

Fazendo $\overline{AH} = h$ e $\overline{CH} = x$ como na figura 27, temos no triângulo AHB

$c^2 = h^2 + (a - x)^2$

$\implies c^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$\implies c^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$\implies c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

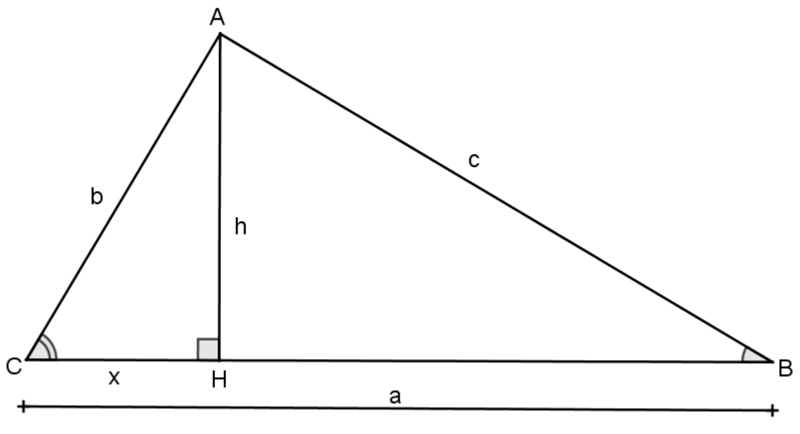


Figura 27 – Triângulo retângulo ABC

Como $x = b \cdot cos\widehat{C}$, segue-se que $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\widehat{C}$.

b) $\widehat{C}$ é obtuso.

Fazendo $\overline{AH} = h$ e $\overline{CH} = x$ como na figura 28, temos no triângulo AHB

$c^2 = h^2 + (a + x)^2$

$\Longrightarrow c^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$

$\Longrightarrow c^2 = b^2 - x^2 + a^2 + 2ax + x^2$

$\Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$

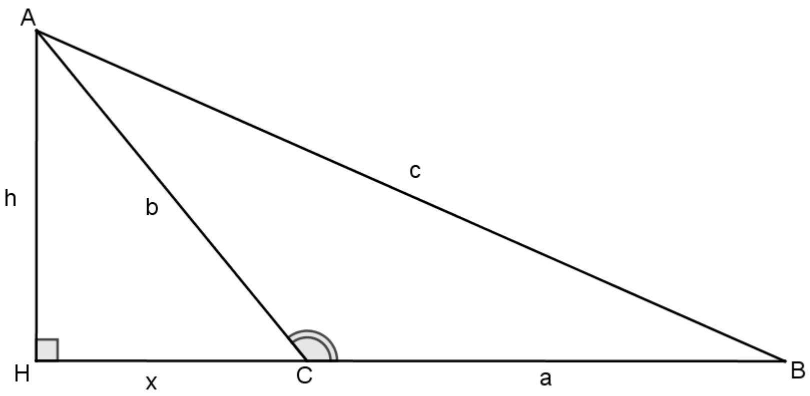


Figura 28 – Triângulo obtusângulo ABC

Como $x = b \cdot cos(180° - \widehat{C})$, segue-se que $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\widehat{C}$.

A expressão $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\widehat{C}$ é chamada a *lei do cosseno*.

6 DETERMINAÇÃO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

Neste capítulo iremos relatar a atividade prática a qual foi desenvolvida com estudantes do 1° ano do ensino médio.

6.1 Trigonometria na prática

Esta aula prática se deu com uma turma de um CIEP da cidade de São Pedro da Aldeia, na região litorânea do Rio de Janeiro. A escola possui aproximadamente 700 alunos e a aula foi dada a uma turma do 1° ano do Ensino Médio.

Antes da aula prática foi necessário ministrar aulas para a introdução do conhecimento básico sobre a trigonometria. Desde a primeira aula os estudantes já foram informados sobre a atividade que seria elaborada na praia localizada no bairro Braga, em Cabo Frio. Objetivo de informá-los sobre a atividade que seria elaborada, desde o primeiro contato com o assunto, foi para que lhes causasse interesse no estudo proposto.

Em uma das aulas de trigonometria, foi exibida a imagem do local que seria feita a atividade, como ilustra a figura 29, e mencionado que o objetivo da atividade seria determinar a distância da Ilha do Papagaio ao promontório de Arraial do Cabo.

Figura 29 – Imagem do googlemaps do local da atividade

Após a fundamentação do conhecimento trigonométrico foi preciso instruir os estudantes sobre o funcionamento de uma bússola. Usamos um aplicativo de celular que simula uma bússola. Os estudantes precisaram apenas ser orientados sobre o fato da bússola apontar sempre para o polo norte magnético, o que significa indicar aproximadamente o norte geográfico e que sua orientação é no sentido horário. A figura 30 mostra a tela do aplicativo que simula uma bússola. É importante lembrar que para a utilização de aplicativo que simule uma bússola é necessário que o telefone celular tenha um sensor geomagnético.

Figura 30 – Tela aplicativo Classic Compass

Para execução da atividade prática foi necessário, além do telefone celular com o devido aplicativo instalado, foi necessário um rolo de barbante de 300 metros, como ilustra a figura 31 e um suporte para apoiar o aparelho. O suporte foi construído com madeira pelos próprios estudantes.

Figura 31 – Rolo de barbante de 300 metros

No dia da atividade estavam prensentes 12 estudantes, os quais foram divididos em dois grupos, denominados por A e B, um estudante ficou responsável por fazer as medições e um estudante ficou responsável por fazer as anotações. Ao chegar na praia o grupo A ficou em um determinado ponto e o grupo B se deslocou até um ponto B, de maneira que o barbante ficasse totalmente esticado, o que fez com que tivessem a noção da distância entre os dois grupos, ou seja, aproximadamente 300 metros.

Figura 32 – Grupo A

Os grupos A e B eram responsáveis por auxiliar nas medições, manter o barbante esticado e anotar os dados coletados. O grupo A ficou parado em um ponto da praia que chamaremos de ponto A, segurando a ponta do barbante, e o grupo B seguiu pelo perímetro da praia, segurando o rolo de barbante até desenrolá-lo por completo. A figura 32 ilustra o grupo A segurando uma extremidade do barbante. Após o barbante

Figura 33 – Esquema ilustrando os pontos cardeais

ficar totalmente esticado, o estudante responsável por verificar os ângulos moveu-se até o grupo A e apontou a “bússola”para a Ilha do Papagaio, a qual indicou um ângulo de 110° em relação norte. Em seguida, o estudante apontou a “bússola”para o promontório de Arraial do Cabo e para o grupo B, e verificou que a “bússola”indicava 169° e 220°, respectivamente. Na figura 34 mostra o suporte criado pelos próprios estudantes para apoiar o celular na hora das medições e a figura 35 mostra o momento em que o estudante aponta a “bússola”para a Ilha do Papagaio. O ponto amarelo na figura 35 indica a parte da ilha que o estudante estava usando como referência para determinar os ângulos.

Figura 34 – Grupo A apoiando o celular no suporte

Figura 35 – Ilha do Papagaio

Após as medições no ponto A, os estudantes responsáveis por registrar os dados coletados moveram-se em direção ao ponto B. Chegando ao ponto B, os estudantes apontaram a “bússola”para o grupo A e registraram que a “bússola”indicava 40° em relação ao norte e em seguida apontaram a "bússola"para a Ilha do Papagaio e para o promontório de Arraial do Cabo e verificaram que a "bússola indicava, respectivamente, 107° e 166°. Na figura 36 podemos ver o momento que os estudantes estão, no ponto B, coletando os dados ao direcionar o celular para o promontório de Arraial do Cabo.

Figura 36 – Grupo B

6.2 Utilizando os dados e aplicando os conhecimentos trigonométricos

Nesta seção, iremos mostrar a atividade proposta aos estudantes após a atividade feita na praia. O objetivo deste momento com os estudantes é aproveitar todo o momento agradável que vivenciaram na aula prática anterior a fim de ajudá-los a absorver o conhecimento sobre trigonometria melhor, de maneira leve e descontraída.

A turma foi dividida em três grupos para realizarem a atividade contida em uma folha. A atividade tinha como objetivo:

- identificar os ângulos de cada ponto através dos dados coletados na aula prática a qual foi feita na Praia das Dunas.
- usar os conhecimentos das leis de seno e cosseno com o auxílio de uma calculadora para encontrar a distância da Ilha do Papagaio ao promontório de Arraial do Cabo.

A seguir, iremos descrever o texto e mostrar as imagens contidas na folha de atividade dos estudantes:

Folha de atividade — A distância da Ilha do Papagaio ao promontório de Arraial do Cabo.

Abaixo temos uma foto retirada do Google Maps, como podemos ver na figura 37, a qual mostra a Praia das Dunas localizada em Cabo Frio, A Ilha do Papagaio e um promontório pertencente a Arraial do Cabo. As marcações na imagem da figura 37, feitas com o auxílio do Geogebra, representam o campo de visão dos grupos A e B de estudantes.

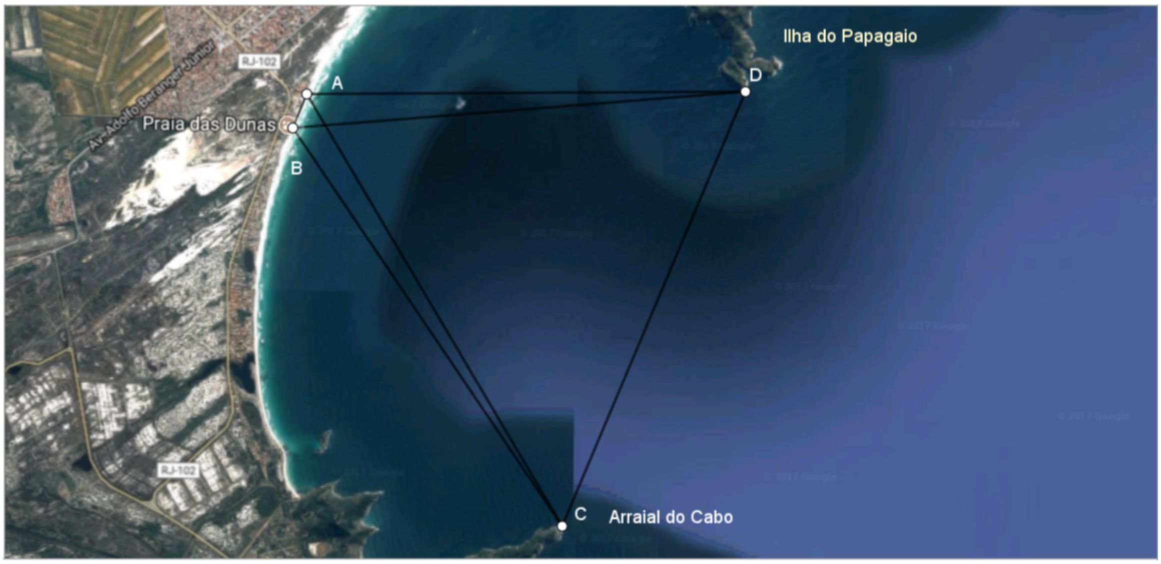


Figura 37 – Figura contida na atividade

Os estudantes utilizaram uma bússola do celular para se orientarem. Do ponto A, onde está localizado grupo A, ao apontar o celular em direção à Ilha do Papagaio a bússola marca 110° em relação ao norte, ao apontar em direção ao promontório, pertencente à Arraial do Cabo, a bússola marca 169° em relação ao norte e ao apontar em direção ao ponto B, onde está localizado o grupo B, a bússola marca 220° em relação ao norte; Do ponto B, ao apontar o celular em direção ao grupo A a bússola marca 40° em relação ao norte, ao apontar em direção à Ilha do Papagaio a bússola marca 107° em relação ao norte e ao apontar a bússola em direção ao promontório de Arraial do Cabo a bússola marca 166° em relação ao norte. Sabendo que a distância entre os dois grupos é de aproximadamente 300 metros, preencha o esquema abaixo e calcule a distância da Ilha do Papagaio ao promontório.

Os estudantes não tiveram dificuldades para preencher o esquema da maneira esperada. A figura 39 ilustra os resultados obtidos por todos os grupos de estudantes. Para determinar o valor do ângulo DAC os estudantes usaram os valores que indicaram na “bússola” ao apontá-la do ponto A para Ilha do Papagaio (ponto D) e para o promontório de Arraial do Cabo (ponto C) e calcularam a diferença entre os ângulos 110° e 169°. De

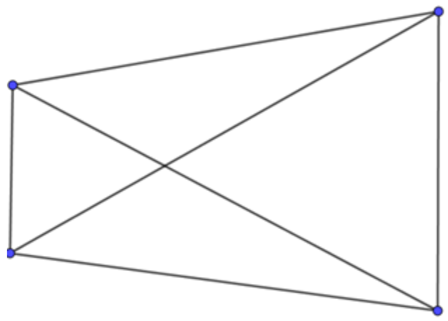


Figura 38 – Esquema para ilustrar a cena real

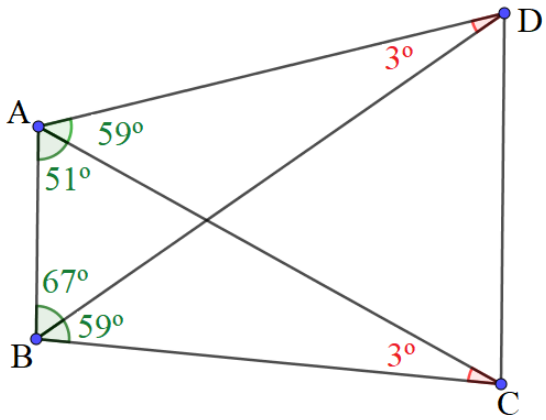


Figura 39 – Primeiro passo

maneira análoga, os estudantes encontraram os demais ângulos pertencentes aos vértices A e B como indica na figura 39. Utilizando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, nos triângulos ABD e ABC, os estudantes obtiveram os ângulos dos vértices C e D.

Figura 40 – Atividade na sala de aula

Após os estudantes encontrarem todos os ângulos dos triângulo ABC e do triângulo ABD, com o auxílio do professor, eles decidiram encotrar as medidas dos segmentos AD e AC utilizando o lei dos senos uma vez que eles tinham a medida do segmento AB. Aplicando a lei do seno no triângulo ABD, obtiveram os seguintes resultados

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ 3°} = \frac{\overline{AD}}{sen\ 67°} \implies \frac{300}{sen\ 3°} = \frac{\overline{AD}}{sen\ 67°} \implies \overline{AD} \approxeq 5276$$

Em seguida aplicaram a lei do seno no triângulo ABC para determinarem a medida do segmento AC. Aplicando a lei do seno no triângulo ABC obtiveram o seguinte resultado

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ 3°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 126°} \implies \frac{300}{sen\ 3°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 126°} \implies \overline{AC} \approxeq 4637$$

Como os estudantes já tinham encontrado a medida do ângulo do vértice A, no triângulo ACD, então após encontrarem as medidas dos lados AC e AD do triângulo ACD, puderam aplicar a lei do cosseno no triângulo ACD. Aplicando a lei do cosseno no triângulo ACD os estudantes obtiveram o seguinte resultado

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot cos\ 59°}$$

$$\implies \overline{CD} = \sqrt{4637^2 + 5276^2 - 2 \cdot 4637 \cdot 5276 \cdot cos\ 59°} \approxeq 4914$$

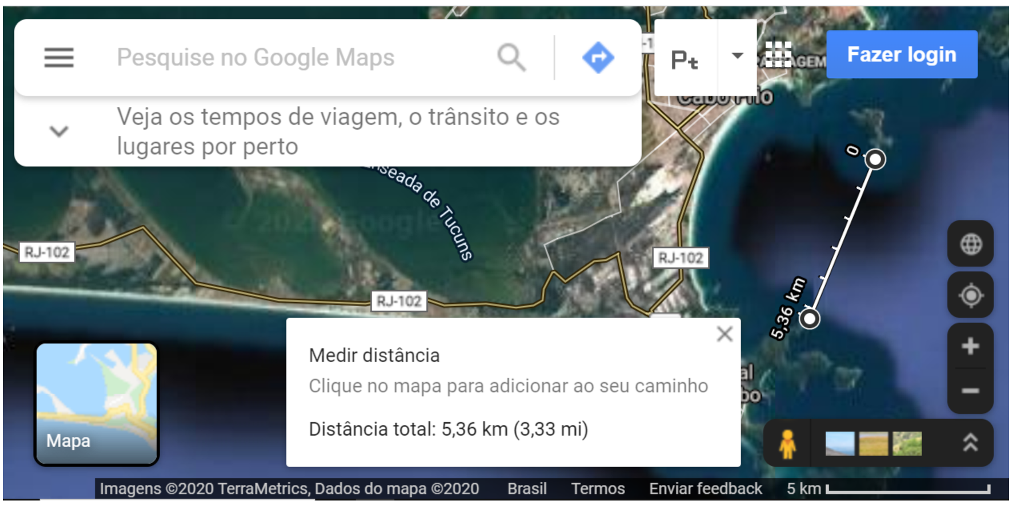


Figura 41 – Imagem do Google Maps com a distância entre a ilha e o promontório

Portanto, a distância entre a Ilha do Papagaio e o promontório de Arraial do Cabo encontrada pelos estudantes foi de aproximadamente 4914 metros. Para finalizar a atividade o professor acessou o site do Google Maps para mostrar a distância calculada pelo satélite e conferir com o resultado obtido pelos estudantes. No Google Maps mostrou que a distância entre a Ilha do Papagaio e o promontório de Arraial do Cabo é de 5360 metros como podemos ver na figura 41.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos bem que, um dos fatores que tornam difícil a missão de ser mediador de conhecimentos de qualquer ordem está na falta de interesse demonstrada pelos aprendizes. Assim, esse trabalho pretendeu ser uma fonte de contribuição para minimizar esses problemas, pois apresentamos uma atividade, simples e fácil de executar, envolvendo diversos conceitos e focando principalmente nas funções trigonométricas. Atividade essa com a participação dos estudantes.

Quando os estudantes começaram e entender os porquês dos estudos de ângulos e a própria trigonometria, a motivação apareceu de forma que o aprendizado ficou mais interessante e agradável.

Esse experimento foi uma pequena parte do que todos nós podemos fazer, no sentido de buscar formas cada vez mais significativas capazes de despertar a curiosidade dos estudantes, o prazer pela descoberta e o espírito investigativo.

A falta de conhecimento em matemática por parte dos estudantes, faz com que julguem o aprendizado da matemática difícil, em especial o aprendizado de trigonometria, mesmo sem ter tido qualquer contato, fazendo com que criem um bloqueio no processo de ensino-apredizagem e gerando um desinteresse por aprender esta disciplina. Além de muitos estudantes julgarem a trigonometria como difícil, ainda tem aqueles que a julgam como sem utilidade. Sabemos que apenas o ensino da trigonometria, sem mostrar sua utilidade e suas aplicações, pode contribuir para tais julgamentos de modo que gere resultados negativos no processo de ensino-aprendizagem. Esses fatos foram motivadores para fazermos um estudo mais detalhado sobre trigonometria e elaborarmos esta atividade prática.

A trigonometria é um ramo importante da matemática e de essencial para o bom desempenho de estudantes que venham a escolher, no futuro, áreas ligadas as ciências exatas

Temos conhecimento que as atividades práticas não são usais no ensino de trigonometria. Esse assunto, geralmente, é abordado apenas com exibição de suas fórmulas e exemplos de aplicações, tornando o aprendizado totalmente mecânica e sem significado. Em virtude disso, atestamos a necessidade de desenvolver uma atividade prática a fim de contribuir na capacidade do estudante de interpretar problema, investigar, levantar hipóteses, resolver situações-problema. Como objetivo final, gostaríamos de alcançar todos os profissionais que têm dificuldade de motivar e despertar o interesse do estudante nesse tema.

Foi possível perceber que é de fundamental importância que o professor realize atividades práticas envolvendo os alunos. Após a aplicação da atividade foi notável a consolidação de vários conceitos importantes (pontos, ângulos, retas, triângulos, distâncias) para o desenvolvimento do conhecimento das funções trigonométricas.

Concluímos que a atividade prática escolhida contribuiu para uma construção do conhecimento de forma mais significativa, facilitando a mediação do professor, tornando a aula mais atrativa de modo que tivemos melhoras no interesse dos alunos, possibilitando uma nova perspectiva em relação ao estudo de trigonometria, auxiliando na construção de novos conhecimentos na vivência diária dos estudantes.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria/ números complexos. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 15, 27 e 39.

IEZZI, G. et al. Fundamentos da matemática elementar: trigonometria. 2.ed. São Paulo: Atual Ed., v. 3, 1978. Citado na página 15.

LIMA, E. L. Medida e forma em geometria: comprimento, área volume e semelhança. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado na página 25.

NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2013. Citado na página 17.

PEREIRA, T. V. Regiões circulares e o número pi. 22 mar. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Disponível em: ⟨http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/543⟩. Acesso em: 01 mar. 2017. Citado na página 16.