



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO PEREIRA

POLINÔMIOS: TEORIA E APLICAÇÕES
IMAGENS SIMÉTRICAS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

PALMAS (TO)

2020

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO PEREIRA

**POLINÔMIOS: TEORIA E APLICAÇÕES
IMAGENS SIMÉTRICAS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha .

PALMAS (TO)

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P436p Pereira, Paulo Henrique de Araujo.
POLINÔMIOS: TEORIA E APLICAÇÕES: Imagens Simétricas
Através de Interpolação de Lagrange . / Paulo Henrique de Araujo
Pereira. – Palmas, TO, 2020.
99 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-
Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.

Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Ensino Médio. 2. Polinômios. 3. Aplicações. 4. Metodologia. I.
Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

PAULO HENRIQUE DE ARAUJO PEREIRA

POLINÔMIOS: TEORIA E APLICAÇÕES
IMAGENS SIMÉTRICAS ATRAVÉS DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT da Universidade
Federal do Tocantins como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre
– Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Dr. Rogério Azevedo
Rocha.

Aprovada em 07 / 08 / 2020

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)



Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro (UFG)

*A Deus que iluminou meu caminho e me ajudou a chegar onde estou hoje.
À minha família e namorada, que sempre me apoiaram em minhas decisões.
Ao meu Orientador, que sempre me auxiliou quando necessitava de ajuda.*

AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT), que possibilitou prosseguir na minha formação.

Ao meu orientador, pois foi através dele e de suas orientações que fui capaz de finalizar esta pesquisa. Sou muito grato por seu empenho.

Aos familiares e amigos por sempre estarem ao meu lado em todos os momentos que precisei, em especial a minha mãe, Antônia R. Nunes.

À minha namorada, por sua paciência e compreensão.

Aos meus ex-professores de Graduação, em especial, Cláudio P. Vale, Dassael Fabrício R. Santos, Elineia Maria Ribeiro, Haroldo G. Santos e Ricardo G. Assunção.

À Profa. Maria José A. A. Borges, por sua colaboração e conhecimento linguístico.

"Vivi certa vez em um país onde um professor de matemática, somente por ter sido grande em sua vocação, foi enterrado como um rei que proporcionou o bem a seus súditos".

(Voltaire)

RESUMO

Neste trabalho, abordamos o tema Polinômios que está inserido no currículo da Terceira Série do Ensino Médio. Em geral, esse tema é reservado para ser apresentado ao discente no quarto bimestre do ano letivo. Assim, devido ao grande volume de conteúdos propostos, muitas vezes, esse importante tema acaba sendo exposto de forma ineficiente. Com o objetivo de fornecer um material de suporte ao docente e que proporcione ao discente interesse/motivação pelo tema, apresentamos diversas aplicações, que envolvem desde a natureza e problemas do dia a dia, temas mais elaborados como as progressões aritméticas de ordem superior até temas mais avançados como a interpolação polinomial e o ajuste de curvas. Além disso, como incremento no material de suporte aos docentes, propomos uma metodologia envolvendo a interpolação polinomial, mais precisamente, a fórmula de interpolação de Lagrange. A metodologia é dividida em 5(cinco) aulas, cada uma com seu objetivo específico, por exemplo, na terceira aula, propomos uma atividade relacionada à construção de figuras simétricas com a utilização dos polinômios de Lagrange.

Palavras-chave: Ensino Médio. Polinômios. Aplicações. Metodologia.

ABSTRACT

In this work, we approach the theme Polynomials that is inserted in the curriculum of the third grade of High School. In general, this topic is reserved to be presented to the student in the fourth quarter of the school year. Thus, due to the large volume of content proposed, this important topic often ends up being exposed inefficiently. In order to provide support material to the teacher and to provide the student with interest / motivation for the theme, we present several applications, involving from nature and day-to-day problems, more elaborated themes such as higher order arithmetic progressions to themes more advanced features such as polynomial interpolation and curve fitting. In addition, as an increase in the support material for teachers, we propose a methodology involving polynomial interpolation, more precisely, the Lagrange interpolation formula. The methodology is divided into 5 (five) classes, each with its specific objective, for example, in the third class, we propose an activity related to the construction of symmetrical figures using the Lagrange polynomials.

Keywords: High School. Polynomials. Applications. Methodology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Papiro de Ani, 1250 a.C- Museu Britânico	20
Figura 2 – Desenhos dos numerais presentes no manuscrito Bakhshali- Século II	21
Figura 3 – Retrato Isaac Newton. Pintura de 1689, de Godfrey Kneller	24
Figura 4 – Gauss, litografia publicada na Astronomische Nachrichten em 1828	26
Figura 5 – Plano de Argand-Gauss.	30
Figura 6 – Representação do exemplo 3.11.	31
Figura 7 – Favo de Mel	53
Figura 8 – Sequência de hexagonos	54
Figura 9 – Formato do Terreno	55
Figura 10 – Formato do Cercado	56
Figura 11 – Mala em formato de paralelepipedo.	58
Figura 12 – Velocidade em função do tempo	59
Figura 13 – Representação dos números poligonais	63
Figura 14 – Sequência de quadradinhos	65
Figura 15 – Gráfico da função $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$	68
Figura 16 – Gráfico de pluviosidade do município de Novo Planalto-GO	74
Figura 17 – Resolução do Exemplo 4.16	77
Figura 18 – Gráfico do Exemplo 4.17	79
Figura 19 – Questionário aplicado aos alunos - Questões 2 a 5	82
Figura 20 – Aula sobre Polinômios Interpoladores de Lagrange	83
Figura 21 – Obra do Artista Maurits C. Esher	84
Figura 22 – Ilustração da Proposição 5.1	84
Figura 23 – Figura Proposta	85
Figura 24 – Papel quadriculado	86
Figura 25 – Construção de imagem simétrica	87
Figura 26 – Imagem simétrica	88
Figura 27 – Resolução da atividade proposta	88
Figura 28 – Desempenho relativos à atividade proposta	89
Figura 29 – Aplicativo Geogebra	89

Figura 30 – Gráfico da Atividade Proposta	90
Figura 31 – Lista de atividade dos alunos 01	97
Figura 32 – Lista de atividade dos alunos 02	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Produto entre Polinômios	36
Tabela 2 – Resolução do exemplo 3.23	36
Tabela 3 – Resolução do exemplo 3.31	44
Tabela 4 – Pluviosidade mensal (média) de Novo Planalto no período de 30 anos de observação	70
Tabela 5 – Produção Anual de Soja no Estado do Tocantins 2014-2018	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ANAC	Agência Nacional de Aviação Civil
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
NBR	Norma Brasileira
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SI	Sistema Internacional
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{C}	Conjunto dos números Complexos
\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais
\mathbb{Q}	Conjunto dos números Racionais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números Inteiros
\mathbb{N}	Conjunto dos números Naturais
A^{-1}	Inversa da matriz quadrada A
Σ	Somatório

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	BREVE HISTÓRICO SOBRE OS POLINÔMIOS	19
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
3.1	Conjunto dos Números Complexos	27
3.2	Polinômios	33
3.2.1	Operações com polinômios.	34
3.2.2	Propriedades relacionadas a polinômios	39
3.3	Teorema Fundamental da Álgebra	42
3.4	Método de Horner-Ruffini	43
3.5	Teste da Raiz Racional	46
3.6	Relações de Girard	48
4	APLICAÇÕES	53
4.1	Aplicações na Natureza e em Problemas do Cotidiano	53
4.2	Problemas Cujas Soluções Envolvem Polinômios	55
4.3	Movimento Uniformemente Variado	59
4.4	Progressões Aritméticas de Ordem Superior	60
4.5	Polinômios Interpoladores	66
4.6	Ajuste Polinomial	74
5	PROPOSTA METODOLÓGICA	80
6	CONCLUSÃO	91
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO	94
	APÊNDICE B – PLANO DE AULA- SEGUNDA AULA DA PROPOSTA .	96
	APÊNDICE C – ATIVIDADES SOBRE INTERPOLAÇÃO	97

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de uma atividade, por parte dos alunos e com resultados satisfatórios, é um orgulho para todo professor, principalmente para os professores que lecionam a Disciplina Matemática, pois mesmo observando que a atividade não esteja totalmente precisa, sabem que conseguiram prender a atenção de seu público e transmitir o seu conhecimento.

Para Posamentier (2014) ministrar uma aula competente é a finalidade que todos os docentes do Ensino Básico devem buscar e, frequentemente, esse objetivo deve ser ressaltado para que não fique somente em palavras. Este fato pode ser encarado como uma instigação para o professor de matemática, pois além de ensinar conteúdos abstratos, considerados de difícil entendimento por grande parte da população, encontram em suas turmas alunos com falta de motivação para o estudo.

Neste sentido, necessitam de uma aula envolvente e que os motive a participar de forma ativa da exposição do conteúdo programático.

Os professores buscam frequentemente modificar suas metodologias de ensino, para que possam prender a atenção do aluno. Isso é efetivado através atividades interessantes, problemas intuitivos, ou até mesmo contando a história, quando possível, relacionada ao surgimento de tal conteúdo.

"Para muitos professores, motivar alunos para aprender matemática é a principal preocupação ao se prepararem para dar uma aula. Os alunos que passam a ser interessados e receptivos tornam o resto do processo de ensino mais fácil e muitíssimo mais eficaz.[...]"(POSAMENTIER, 2014, p. 16).

Estudar matemática é muito mais que somente manipular os números, é manifestar o raciocínio lógico, expressar fenômenos da natureza através de expressões. Um cidadão bem inteirado deve ter em seu cunho uma vasta aptidão com a matemática.

"A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas."(MEC, 2000, p. 40)

Notamos que a matemática está interligada com quase todas as áreas do conhecimento humano, um bom exemplo é a interdisciplinaridade que envolve as áreas do conhecimento. Segundo os PCNS (2000) um conteúdo matemático que mostra esta interligação é o estudo de

funções, uma vez que são vários tipos de funções, cada uma com suas particularidades. "[...] Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente."(MEC, 2000, p. 43).

Para o MEC (2000) a matemática deve ser entendida pelo aluno como um conjunto de métodos que podem ser empregados em outros ramos do conhecimento, assim também como na sua futura carreira profissional. O que exige do currículo educacional a capacidade de dar acesso ao aprofundamento de conhecimento para o aluno. "[...] aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas.[...]"(MEC, 2000, p. 44).

O estudo sobre polinômios é essencial tanto para o desenvolvimento intelectual quanto para o pensamento algébrico do aluno, pois este tema envolve, de forma mais ampla, as operações matemáticas, fazendo com que o aluno utilize o conhecimento já adquirido e aprenda novos conceitos. A aplicação de polinômios no meio científico é vasta, passando por estudos de engenharia, e teorias da informação, chegando até mesmo ao campo da medicina e biológicas. No capítulo 4, pode-se conferir diversas aplicações.

Para Flores e Osuna (2018) é de extrema importância o estudo de modelos matemáticos para prever surtos epidemiológicos, pois estes podem descrever o comportamento de doenças e de vírus, fazendo com que os resultados possam prevenir grande mortalidade populacional. Esses estudos utilizam métodos que podem controlar doenças infecciosas, como por exemplo, a vacinação e a quarentena. Para a obtenção de um resultado mais preciso Flores e Osuna (2018) explicam que utilizam um polinômio específico, denominado polinômio de Hurwitz, de grau 3 e que atende as especificações que a pesquisa necessita.

Mesmo com toda essa gama de aplicabilidade, os estudos e trabalhos na área educacional sobre polinômios ainda é escasso. Pensando nisso, este trabalho visa construir um material consistente que auxilie professores de matemática do Ensino Médio sobre o estudo de polinômios, através de demonstrações de proposições e teoremas, vários exemplos e aplicações interessantes. Além disso, propomos uma metodologia de ensino envolvendo os polinômios interpoladores, mais precisamente, os polinômios de Lagrange.

Vale ressaltar, ainda, que a escolha do tema "polinômios" também decorreu da minha experiência como docente no Ensino Médio público desde o ano de 2014, quando ainda era estagiário do Curso de Graduação em Matemática. Desde essa época pude perceber a constante

presença do conhecimento algébrico no aprendizado do aluno em grande parte dos conteúdos matemáticos observados. Essa observação decorria da necessidade que o aluno deveria de ter uma certa afinidade em trabalhar com polinômios, pois sempre que o conteúdo necessitava abstrair exemplos ou exercícios, os resultados recaiam na resolução de polinômios de grau 1 ou 2. Como por exemplo, quando não se sabe as dimensões de um quadrilátero, mas sabe-se que são proporcionais, então pode-se calcular a área deste da maneira que mais convém, pois o produto das suas dimensões recai em um polinômio de grau 2.

Parte dos trabalhos que abordam o tema polinômio, direcionado ao público do Ensino Médio, apresenta, os aspectos teóricos de forma mais avançada, como por exemplo, Marcet (2019) e Ames (2018). Daí o fato do nosso trabalho ter um direcionamento distinto, além de ser apresentado ao público com uma linguagem mais acessível. Neste sentido, este estudo, em conjunto com diversos trabalhos existentes na literatura, constituem um importante apoio ao professor do Ensino Médio. Como Gomes (2020), Lopes (2018) e Daniel (2016), dentre outros.

Dividimos o trabalho em 6(seis) capítulos.

O primeiro capítulo corresponde a introdução. Nesse capítulo, buscamos contextualizar o trabalho e informar ao leitor a importância do aprofundamento do tema polinômios nas aulas de matemática do Ensino Médio. Além disso, apresentamos, de forma resumida, o que foi abordado nesse trabalho.

No segundo apresentamos um breve histórico a respeito dos polinômios.

No terceiro apresentamos o embasamento teórico sobre polinômios do ponto de vista do Ensino Básico. Isso ocorre, através de proposições, teoremas e diversos exemplos, os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores bem como, para um bom entendimento do tema. Nesse Capítulo buscamos abordar conhecimentos que o aluno do Ensino Médio deva absorver ao longo de seus estudos. Além disso, essa forma de abordagem, pode ser uma base para estudos mais avançados relacionados a polinômios, por exemplo, o estudo de polinômios através de grupos, anéis e corpos, visto em diversos Cursos de Graduação na área de exatas.

No quarto capítulo, exibimos diversas aplicações de polinômios que trazem abordagens significativas para o desenvolvimento do trabalho. Mostramos que os polinômios surgem naturalmente na natureza, por exemplo, o volume do sol pode ser expresso como um polinômio de grau 3(três) em função de seu raio; o número total de hexágonos de um favo de mel pode ser modelado por uma função polinomial de grau 2(dois), etc. Além disso, mostramos que os polinômios

aparecem em simples modelagens de problemas do cotidiano e na física, passando por questões mais elaboradas como progressões aritméticas, até chegar em temas mais complexos, como a interpolação de dados pesquisados e ajuste de curvas. Este capítulo, correspondente às aplicações, constitui uma importante fonte de informações para os professores de Matemática do Ensino Médio, por conter informações (aplicações) que, em geral, motivam os discentes a aprofundarem no conteúdo teórico.

No quinto capítulo, desenvolvemos uma proposta metodológica para o ensino de polinômios envolvendo o conceito de interpolação polinomial, mais especificamente, a fórmula de interpolação de Lagrange. A proposta foi desenvolvida na Colégio Estadual Ana Maria Torres pertencente ao município de Novo Planalto-Go, em cinco momentos (aulas). Na primeira aula, aplicamos um questionário com o objetivo de fazer um diagnóstico da turma. Na segunda aula, apresentamos a teoria e exemplos relacionados à fórmula de Lagrange. Na terceira aula, propomos uma atividade relacionada à construção de imagens simétricas com o auxílio dos polinômios interpoladores de Lagrange. Na quarta aula, propomos uma atividade relacionada ao cálculo dos polinômios de Lagrange. Por último, na quinta aula, propomos uma atividade com a finalidade de plotagem do gráfico do polinômio de Lagrange, com o auxílio do software livre Geogebra.

Para finalizar, no sexto capítulo, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

2 BREVE HISTÓRICO SOBRE OS POLINÔMIOS

Todo conteúdo de matemática que se é estudado tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior sempre aborda um direcionamento equacional, ou seja, quando se desenvolve algum problema matemático esse sempre recai ou está diretamente ou indiretamente interligado com equações. Segundo Garbi (2010), a palavra equação é uma ramificação de mesma origem que a palavra igualdade ou igual. Logo é fácil entender o porquê a matemática usa tanto esse conceito, pois é uma ciência que se utiliza da essência de correlações e ideias de equivalências.

Uma forma mais clara e intuitiva de observar esse aspecto matemático é abordar exemplos do cotidiano humano. Por exemplo, um comerciante de mármore sabe que o preço $p(x)$ de venda de sua mercadoria é igual ao produto da área x , em m^2 , por uma constante c , onde c é o valor por m^2 , de mármore. Logo esse empresário torna mais dinâmico o cálculo de venda usando uma equação do tipo $p(x) = x.c$. Esse tipo de expressão auxilia bastante o desenvolvimento econômico da indústria e de micro-empresas, pensando nisso pode-se ter como pensamento de uma equação.

Neste trabalho destacaremos as equações algébricas que podem ser colocadas da seguinte maneira:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0, (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \text{ e } a_n \neq 0).$$

Segundo Garbi (2010) a equação citada acima está na forma canônica, passando a se chamar equação polinomial, ela também é conhecida como função racional inteira da variável x . Vale saber que o maior expoente da variável x é denominado grau da equação e os elementos a_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$, são números de um conjunto numérico pré-determinado.

O ser humano, no decorrer da sua evolução, sempre utilizou-se do raciocínio para desenvolver suas atividades. Segundo Garbi (2010) existem vários registros arqueológicos que mostram o homem utilizando-se da logicidade para sobreviver, é o caso da agricultura que foi idealizada por volta de 11.000 anos atrás, no Oriente Médio, aproximadamente onde hoje é localizado o Iraque. Outra ideia humana que vale destacar é a escrita, cujos primeiros registros encontram-se na Mesopotâmia, e com os Sumérios. Alguns estudiosos afirmam que a mesma surgiu para registrar assuntos numéricos.

No Egito há vários registros de escritas antigas, heliógrafos, escritas em pergaminhos ou em construções. Dentre os documentos matemáticos antigos o que mais se destaca é o

pergaminho de Ahmes(ou Rhind) com cerca de 1650 a.C, nele consta problemas aritméticos e geométricos. Podemos observar alguns desses registros a seguir.

Figura 1 – Papiro de Ani, 1250 a.C- Museu Britânico



FONTE: Mol (2013)

“Durante muitos séculos após sua invenção, o uso das escritas mesopotâmicas e egípcias ainda permaneceu restrito a um pequeno número de pessoas, os chamados escribas. A eles competia registrar a história dos reis, a contabilidade dos impostos, os estoques e as transações comerciais”(GARBI, 2010, p. 9)

Ainda de acordo com Garbi (2010) vale ressaltar que em documentos dessa natureza não existia uma abstração para operar contas como estamos acostumados atualmente, os problemas matemáticos eram descritos verbalmente e a única simbologia utilizada eram para os números. Esse método de escrita ficou denominado de “Álgebra retórica”.

Um dos problemas de Ahmes apresentava o seguinte enunciado: “ um certo valor, somado a seus dois terços, mais sua metade acrescentado de sua sétima parte corresponde a trinta e três. Qual é esta quantidade ?” Podemos transcrever para simbologia atual como: $x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33$ que equivale a, $\frac{97x}{42} = 33$, encontramos um valor de $x = \frac{1386}{97}$. Conforme pode-se observar este problema recai em uma equação polinomial de grau 1, mas como os egípcios não tinham esse conhecimento atual, utilizavam um recurso intitulado de “Regra da falsa posição”, esse funcionava utilizando suposições sobre certo valor, até que era encontrado um valor que correspondesse ao problema abordado, por exemplo, qual número que somado a sua metade resulta em 9, começam com qualquer valor, $2 + 1 = 3$ e depois iriam reproduzindo o processo até encontrar o valor correto que é, $6 + 3 = 9$, esse método era muito desgastante.

Garbi (2010) comenta que no mesmo período na Mesopotâmia os escribas já dotavam de habilidades para solucionar equações polinomiais do segundo grau, no entanto, esses métodos não estão muito claros, pois os tabletas de barro que contêm esses registros estavam muito

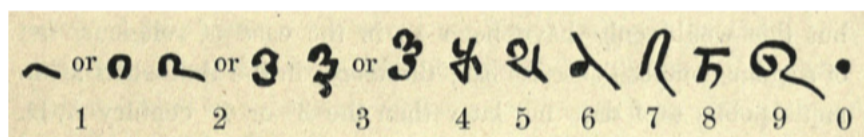
danificados, o que se pode contemplar são simples comandos como: “faça isso”, “faça aquilo”, “o resultado é” sem qualquer argumento lógico.

A matemática grega chega ao período em que não sustentava mais os problemas que eram propostos, com isso Boyer (1974) admite que a matemática grega não era totalmente de alto nível, necessitando de mudanças, essas vieram com o aparecimento do matemático Diofante e sua "Arithmetica", que abordava uma álgebra diferente da grega tradicional, o que fez com que fosse considerado o pai da álgebra, mais por sua escrita pré-moderna e sua organização dos problemas. Dos 13 livros de sua obra seis se consolidaram, nesses são abordados problemas como equações polinomiais de primeiro e segundo grau.

“A diferença principal entre a sincopação de Diofante e a notação algébrica moderna está na falta de símbolos especiais para operações e relações, bem como de notação exponencial. Esses elementos de notação que faltavam foram em grande parte contribuição do período do fim do século quinze ao começo do século dezessete, na Europa.”(BOYER, 1974, p. 133).

De acordo com Garbi (2010) um dos episódios mais tristes da cultura científica foi a queima da biblioteca de Alexandria, após a conquista da cidade pelos Califas, cujo significado era sucessor de Maomé. Anos mais tarde o Califa al-Mansur decide construir uma cidade que se assemelhasse à Alexandria às margens do rio Tigre, essa cidade hoje é Bagdá. Com o intuito de expandir sua cidade o Califa cativa astrônomos e filósofos para irem morar e pesquisar em Bagdá. Foi nessa expansão que o sistema indiano de numeração chegou às arábias, o que facilitou bastante a abstração quantitativa, pois facilitava os cálculos produzidos por comercializantes e matemáticos, essa ferramenta eclética pode ser observada na figura 2.

Figura 2 – Desenhos dos numerais presentes no manuscrito Bakhshali- Século II



FONTE: Mol (2013)

A primeira metade do milênio d.C foi marcado pelo surgimento de grandes matemáticos indianos e árabes, onde destacamos o matemático indiano Bhaskara (1114-1185), segundo Mol (2013) os grandes trabalhos desse matemático estão relacionados à solução de problemas referentes as equações lineares e quadráticas. Foi Bhaskara o responsável pela divulgação da fórmula resolutive da equação polinomial de segundo grau, sendo este o motivo que levou esta

fórmula a conhecida por seu nome em muitos países. Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E este é o método resolutivo para encontrar as raízes de uma equação quadrática, a formulação se baseia na complementação de um quadrado perfeito.

Nessa época a escrita era muito diferente da que é usada atualmente, como Boyer (1974) afirma a álgebra utilizada era a retórica, uma álgebra escrita e de difícil manuseio, mas com passar das décadas a matemática começa a se expandir pelo restante do continente, tantopor meio do comércio quanto das revoluções sociais. Foi assim que essa ciência começa a ter destaque na Europa por volta do século XII.

A partir do século XIII a matemática passou por muitas transformações, principalmente no Ocidente, a cidade de Pisa, onde vivia o matemático mais famoso da idade média, Leonardo Fibonacci(1175-1250), era prestigiada por seu mercantilismo. Segundo Mol (2013) Fibonacci, quando jovem, viajou por quase toda a Arábia, e foi aí que ele obteve familiaridade com o sistema Hindu-arábico, mais tarde, de volta à Itália, foi um dos responsáveis por introduzir esse sistema na Europa. Uma das suas obras mais famosas é o Liber Abaci(Livro de Cálculo), mas atualmente Fibonacci é famoso mesmo pela sequência numérica que leva seu nome, a qual representa a resolução para um problema de reprodução de coelhos.

Com o final da Idade Média no século XV, a matemática já se ramificava por grande parte da Europa, de acordo com Garbi(2010) naquela época eram comuns desafios de conhecimento, onde dois estudiosos disputavam quem tinha maior compreensão sobre certo assunto que envolvia a matemática. Um dos conflitos mais ilustre foi entre Fior, Egresso da Universidade de Bolonha, e o prestigiado Nicolò “Tartaglia”.

Esses duelos funcionavam com indivíduo um propondo questões para o outro. Como Fior havia herdado conhecimento sobre resolução de equações polinomiais de terceiro grau, de seu mestre, mesmo sendo apenas para algumas equações particulares, seu objetivo era envergonhar Tartaglia, no entanto com poucos dias antes do duelo, Tartaglia ficou sabendo que Fior detinha essa carta na manga, e logo se propôs a se ascender na procura de tal fórmula, de sua própria autoria. Segundo Garbi(2010) Tartaglia consegue ir além do que esperava e encontra uma fórmula para solucionar equações polinomias da forma $x^3 + px^2 + q = 0$. Resultado do duelo, Fior sai humilhado por Tartaglia em praça pública.

Em seguida Girolamo Cardano(1501-1576), professor da universidade de Bolonha e grande pesquisador, propôs a solução geral de uma equação de terceiro grau, conhecida como fórmula de Cardano. A relação entre Cardano e Tartaglia pode ser verificada em Garbi (2010). Resguardando que Tartaglia só conseguira encontrar as soluções das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$, a fórmula que será ilustrada é conhecida como fórmula de Cardano, mas que pode solucionar qualquer tipo de equação polinomial de grau 3, fazendo apenas algumas modificações. Seja a equação da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d=0$, com coeficientes e variável reais. Supondo que $x = y + m$, com y e m reais, a equação geral é reduzida a equação do tipo $y^3 + py + q = 0$, e com isso Cardano apresentou o seguinte método:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Onde p e q são os coeficientes da equação reduzida e y é a nova variável.

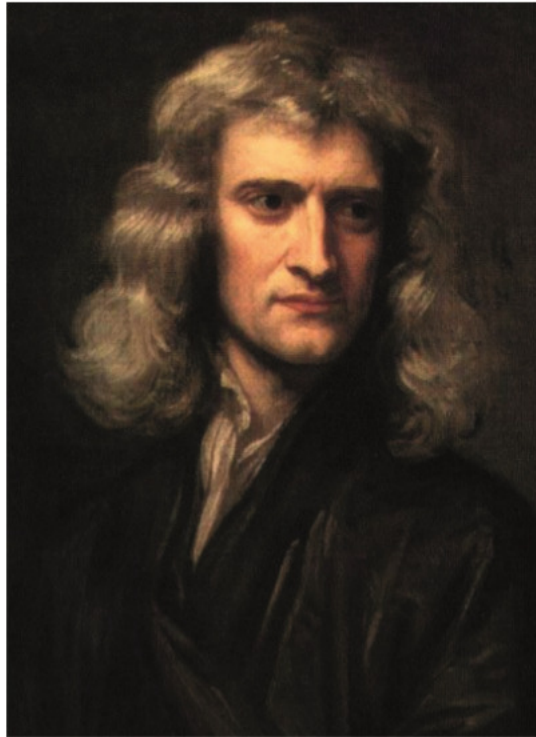
Mesmo com essa grande descoberta ainda persistia um duradero enigma, pois desde os tempos da Grécia antiga não se sabia sua resposta, as raízes de números negativos, Cardano denominou de “números sofistas”. Foi dessa forma que os números complexos deram as caras pela matemática. O grande responsável por mostrar que os números reais já não era suficientes para os problemas matemáticos foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico italiano, ele em sua obra "LAlgebra para Maggiore", segundo Garbi (2010) conseguiu determina que aquelas raízes estranhas encontradas nas fórmulas de Cardano podiam ser escritas sobe a forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, onde a e b são números reais.

“Estavam lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da matemática, com infindáveis aplicações práticas, principalmente na elétrica: A Teoria dos Números Complexos.” (Garbi, 2010, pág. 52)

Mesmo com esse grande avanço nas resoluções das equações polinomiais, ainda era complicado fazer essas contas com a simbologia usada nessa época, mas logo isso mudaria, Segundo Mol (2013) o matemático e advogado francês François Viète (1540-1603) foi o um dos grandes responsáveis por alterar a simbologia matemática do século XVII, seu pensamento mais abstrato auxiliou no processo de resolução de equações, utilizando as vogais para as variáveis desconhecidas e as consoantes para as variáveis conhecida, isso facilitou incrivelmente os cálculos e, de certa forma, ofereceu um melhor entendimento das contas. “Sem duvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das ideias modernas.”(BOYER, 1974, p. 223)

Se a matemática fosse considerada como uma linha reta, certamente quando dividida em pontos de suma importância, um desses pontos de maior destaque se chamaria Isaac Newton. Segundo Garbi (2010) se houve um estudioso que revolucionou toda uma ciência foi ele. A matemática é considerada antes e depois de Newton.

Figura 3 – Retrato Isaac Newton. Pintura de 1689, de Godfrey Kneller



FONTE: Mol (2013)

As produções científicas que Newton realizou são vastas, não só na matemática, mas também em física. Para que se possa ter noção, de acordo com Garbi (2010) em um período que Newton não estava frequentando a Universidade por causa da peste negra, passou esse tempo no campo onde pode desenvolver todo o Cálculo Diferencial e Integral, isso não é pouco, pois é o apogeu de toda a matemática. Um dos trabalhos de Newton relaciona-se com método aproximação de raízes reais de uma equação polinomial, esse método é muito engenhoso, de fácil acesso e será explicado sua utilização a seguir.

Exemplo 2.1. Dada a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$, por inspeção pode-se observar que uma das raízes está entre 1 e 2, temos então,

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

$$x = 1 + x_1$$

observa-se que os valores de $x_i, i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, estão contidos no intervalo $]0, 1[$. Aplicando na equação original,

$$\begin{aligned}(1 + x_1)^3 - 3(1 + x_1) + 1 &= 0 \\ x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1 - 3x_1 - 3 + 1 &= 0 \\ x_1^3 + 3x_1^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

observa-se que o termo $x_1^3 < 3x_1^2$, logo $3x_1^2 - 1 = 0$ isso faz com que $x_1 \cong 0,5773$.

$$\begin{aligned}x &= 1 + 0,5773 + x_2 \\ x &= 1,5773 + x_2\end{aligned}$$

Aplicando novamente o valor de x na equação original encontra-se uma precisão ainda melhor. Na próxima aplicação o valor de $x \cong 1,54$, uma aproximação muito melhor, pois a raiz de $x^3 - 3x + 1 = 0$, é $x \cong 1,53$.

Com esse fascinante método de aproximação fica muito acessível encontrar as soluções para um polinômio, o único problema é que este método funciona apenas para procura raízes reais. Os polinômios com raízes complexas ainda eram uma terra estranha, mas isso mudaria quase um século depois com aparição do príncipe da matemática.

Um dos matemáticos mais precoces de todos os tempos foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855) considerado por muitos o príncipe dos matemáticos. Segundo Garbi (2010) Gauss foi responsável por ampliar as fronteiras da matemática para todas as linhas de pesquisa que se dedicou. Uma de suas proezas mais conhecidas é quando ainda tinha 9 anos de idade, Gauss conseguiu encontrar a fórmula para a soma de n termos de uma progressão aritmética, isso ocorreu quando seu professor de matemática incumbiu a sua turma para que somasse todos os números de 1 a 100, Gauss não demorou muito e conseguiu resolver e ainda explicar como chegou ao resultado tão rápido.

"Conta-se a história de que, quando criança, seu professor, para manter a turma ocupada, pediu aos alunos que somassem todos os números de 1 a 100. Gauss, sem fazer maiores cálculos, imediatamente apresentou o resultado correto, possivelmente usando a expressão $n \cdot \frac{n+1}{2}$ para a soma dos n primeiros números naturais. O talento do jovem estudante chamou a atenção do Duque de Braunschweig, sua cidade natal, que custeou sua educação. Em 1795, Gauss iniciou seus estudos na Universidade de Göttingen."(MOL, 2013, p. 125)

Mas a obra prima que mais influenciou a vida de Gauss foi sua tese de doutorado. Segundo Garbi (2010) a tese de Gauss é considerada a melhor tese de doutorado de todos os tempos, intitulado Teorema Fundamental da álgebra. Esse Teorema mostra que para qualquer

polinômio $P(x)$, com coeficientes complexos o número de raízes é igual ao grau desse polinômio. Pode-se observar a fisionomia desse grande matemático na figura 4.

Figura 4 – Gauss, litografia publicada na *Astronomische Nachrichten* em 1828



FONTE: Mol (2013)

A partir dos estudos de Gauss e outros algebristas bem renomados como Galois e Abel, a álgebra foi se desenvolvendo e conquistando um maior espaço dentre os conteúdos de matemática, encontrando aplicabilidade para conhecimentos antes muito abstratos.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As propriedades sobre polinômios que serão discutidas neste capítulo podem ser encontradas com mais detalhes nas seguintes bibliografias: Guimarães (2008), Iezzi (1977), Lima (1996), Muniz (2016), Garbi (2010), entre outras.

A linguagem abordada neste trabalho é voltada para o Ensino Básico. Nesta primeira seção apresentaremos uma revisão sobre o conjunto dos números complexos, representado por \mathbb{C} . É nesse conjunto que abordaremos as principais características dos polinômios.

3.1 Conjunto dos Números Complexos

Segundo Guimarães (2008) diversos matemáticos da antiguidade encontraram dificuldades em resolver raízes quadradas de números negativos, isto é, a grande dificuldade era encontrar um número real que elevado ao quadrado teria resultado negativo. De acordo com Garbi (2010) por volta do século XVIII, os matemáticos dessa época definem i como unidade imaginária, onde $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$.

Definição 3.1. *Um número complexo é um número da forma $z = a + bi$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ onde i é unidade imaginária.*

Definição 3.2. *Chama-se imaginário puro o número z quando $a = 0$, isto é, $z = bi$, com $b \in \mathbb{R}^*$; Chama-se número real o número complexo z quando $b = 0$, ou seja, $z = a$, com $a \in \mathbb{R}$ e denomina-se apenas imaginário o número complexo $z = a + bi$ quando a e $b \in \mathbb{R}^*$.*

Observação 3.1. *Segue da definição 3.2 que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

Exemplo 3.1. *Os seguinte números complexos são classificados como imaginário puro ou real.*

- $z = -\sqrt{13}$ é real pois, $a = -\sqrt{13}$ e $b = 0$;
- $z = \frac{1}{7}i$ é imaginário puro pois, $a = 0$ e $b = \frac{1}{7}$.

Exemplo 3.2. *Dado o número complexo $z = (x^2 - 4) + (x + 2)i$, temos:*

a) Os valores de x para que z seja imaginário é o conjunto

$$S =] -\infty, -2[\cup] -2, 2[\cup] 2, +\infty[;$$

b) O valor que x assume para que z seja real é $x = -2$.

Notação 3.1. Seja $z \in \mathbb{C}$ na forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Essa nomenclatura é conhecida como forma algébrica. (I) Denota-se a parte real e é representado por $a = \operatorname{Re}(z)$; (II) Denota-se a parte imaginária e é representada por $b = \operatorname{Im}(z)$.

Após definidos os números complexos, abordaremos propriedades e operações que regem o conjunto \mathbb{C} .

Definição 3.3. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos. Dizemos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Exemplo 3.3. Sejam os números complexos $z_1 = y^2 - 7y + 9i$ e $z_2 = -12 + y^2i$. Para que $z_1 = z_2$ o valor de y é. Pela definição 3.3 o único valor que faz a igualdade ser verdadeira é $y = 3$.

Definição 3.4. Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos, a soma nesse conjunto é dada por $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, $\forall a, b, c$ e $d \in \mathbb{R}$.

Observação 3.2. No caso da diferença basta notar que quando soma-se o oposto de z_2 , estamos operando a diferença, $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

Exemplo 3.4. Considerando os números complexos $t_1 = 2 - 3i$ e $t_2 = -1 + 5i$, o valor de $t_1 + t_2$ e $t_2 - t_1$ são dados da seguinte forma.

- $t_1 + t_2 = (2 - 1) + (-3 + 5)i = 1 + 2i$;
- $t_2 - t_1 = (-1 - 2) + (5 + 3)i = -3 + 8i$.

Definição 3.5. Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, o produto $z_1 \cdot z_2$ é definido por $z_1 \cdot z_2 = a \cdot c - bd + (ad + bc)i$.

Exemplo 3.5. Sejam os números $w_1 = -4 + 3i$ e $w_2 = 5 - i$, o produto $w_1 \cdot w_2$ é indicada por:
 $w_1 \cdot w_2 = (-4 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)) + (-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5)i = -17 + 19i$.

Definição 3.6. Dado um número complexo $z = a + bi$, denota-se o conjugado de z o número complexo da forma $\bar{z} = a - bi$.

Exemplo 3.6. Temos:

- Se $z = 1 - i$, então $\bar{z} = 1 + i$;

- Se $z = i$, então $\bar{z} = -i$;
- Se $z = -3$, então $\bar{z} = -3$.

Proposição 3.1. *O produto entre um número complexo $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ é igual a soma dos quadrados de $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, ou ainda, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.*

Demonstração: Dado $z = a + bi$, temos:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 - b(-b)) + (-a \cdot b + a \cdot b)i = a^2 + b^2.$$

Exemplo 3.7. *Dados $z = 2 - i$ e seu conjugado $\bar{z} = 2 + i$, temos que $z \cdot \bar{z}$ é dado por:*

$$z \cdot \bar{z} = (2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5.$$

Definição 3.7. *Dados dois complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_2 \neq 0$, definimos:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c^2 + d^2)}.$$

Exemplo 3.8. *Sejam os números complexos $z_1 = -3 + 5i$ e $z_2 = 1 - i$, temos:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+5i}{1-i} = \frac{-3+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(-3+5i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{-8+2i}{2} = -4 + i.$$

Proposição 3.2. *Dada a unidade imaginária i e $n \in \mathbb{Z}$, temos que i^n possui apenas quatro resultados possíveis, são eles:*

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Demonstração: Sejam i a unidade imaginária e $n \in \mathbb{Z}$. Como n é inteiro pode-se reescrever n utilizando o algoritmo de Euclides, isto é, $n = 4 \cdot k + r$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim,

$$i^n = i^{4k+r}$$

$$i^n = i^{4k} \cdot i^r$$

$$i^n = (i^4)^k \cdot i^r$$

$$i^n = (1)^k \cdot i^r$$

$$i^n = i^r$$

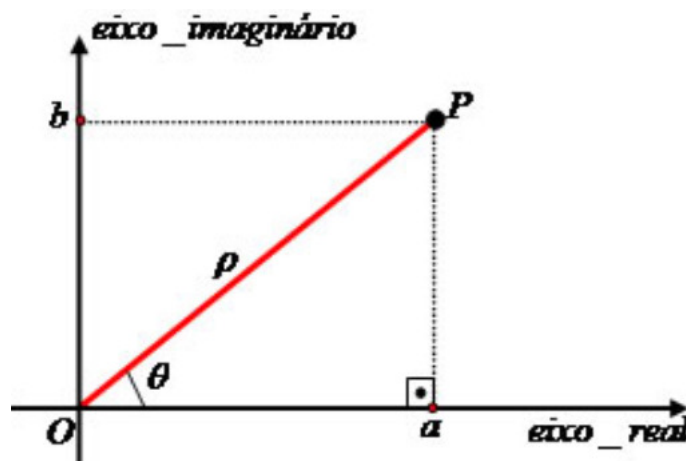
Como só existem 4 resultados para r está demonstrada a proposição.

Exemplo 3.9. Seja $z = i$ um número complexo, o valor de z^{26} é igual -1 , pois $26 = 4 \cdot 6 + 2$ e então, $z^{26} = i^{26} = i^{4 \cdot 6 + 2} = (i^4)^6 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

De acordo com Guimarães (2008), o grande matemático Gauss sugeriu a representação geométrica dos números complexos em duas retas perpendiculares, pois, por costume, os números reais já eram expressos e acomodados na reta real. Como todo número complexo é formado por um número real acrescentado por outro número real multiplicado por i , eles poderiam coexistir.

Definição 3.8. Denomina-se afixo de um número complexo z , sua representação no plano cartesiano, onde $z = a + bi$, com $a \in Ox$ e $b \in Oy$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$, Oy e Ox também são designados de eixo imaginário e eixo real. Nesse caso, representamos $z = (a, b)$.

Figura 5 – Plano de Argand-Gauss.



FONTE: Escola (2012)

Observação 3.3. Prova-se que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos números complexos.

Proposição 3.3. O módulo de um número complexo z é igual a raiz quadrada do produto de z pelo seu conjugado, isto é, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Demonstração: Utilizando a ideia de módulo ser a distância entre dois pontos, então o módulo de z seria a distância ρ , ou seja, $|z| = d_{O,P}$. Assim, usando conceito de distância entre dois pontos no plano, temos $|z| = d_{O,P} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Exemplo 3.10. Temos:

- Se $z = i$, então $|z| = \sqrt{i \cdot (-i)} = 1$;

- Se $z = 1 - i$, então $|z| = \sqrt{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \sqrt{2}$;
- Se $z = 4 - 3i$, então $|z| = \sqrt{(4 - 3i) \cdot (4 + 3i)} = 5$.

Definição 3.9. Utilizando os conceitos de trigonometria no plano de Argand-Gaus, pode-se reescrever os números complexos em sua forma trigonométrica $z = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, onde $\rho = |z|$ e θ é o ângulo que \overline{OP} faz com eixo real. O ângulo θ é denominado argumento.

Observação 3.4. Para encontrar o valor do argumento, deve-se utilizar propriedades de trigonometria no ciclo trigonométrico. Da figura 5, temos:

- $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$
- $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho}$
- $\theta = \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right)$
- $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{\rho}\right)$

Para uma melhor análise da definição 3.9, observe a figura 5.

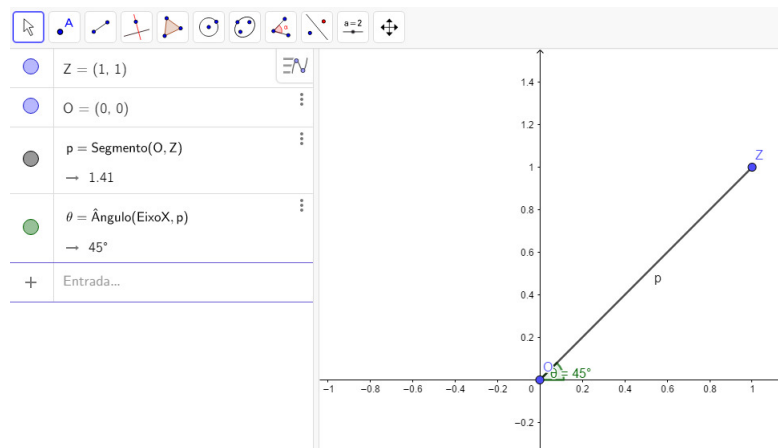
Observação 3.5. A forma trigonométrica dos números complexos é reconhecida como forma polar.

Exemplo 3.11. A Representação do número $z = 1 + i$ na forma trigonométrica, com seu respectivo gráfico no plano de Argand-Gauss construído no software livre Geogebra, são ilustrados a seguir:

- $\rho = |z|$
 $\rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$
 $\rho = \sqrt{2}$.
- $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 Assim, $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois são positivos os valores do $\cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(\theta)$.

Portanto, $z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$.

Figura 6 – Representação do exemplo 3.11.



FONTE: Autor (2019)

As seguintes proposições envolvem a multiplicação e a divisão de números complexos na forma trigonométrica, podendo ser encontradas em Iezzi (1977) e Muniz (2016).

Proposição 3.4. *Dados dois números complexos na forma trigonométrica*

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + isen(\theta_1)) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + isen(\theta_2)),$$

o produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)).$$

Proposição 3.5. *Dados dois números complexos na forma trigonométrica*

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + isen(\theta_1)) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + isen(\theta_2)),$$

a divisão $\frac{z_1}{z_2}$ é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)).$$

Exemplo 3.12. *Dados os números complexos $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$ e $z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2}))$, temos:*

$$\bullet z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})) \quad \bullet \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{-\pi}{4}) + isen(\frac{-\pi}{4})).$$

Proposição 3.6. *Sejam $z = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta))$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Temos que a potenciação na forma polar é dada por: $z^n = \rho^n(\cos(n \cdot \theta) + isen(n \cdot \theta))$.*

Exemplo 3.13. *Dado $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$, a potência z^3 é dada por:*

$$z^3 = (\sqrt{2})^3 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))^3 = 2\sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})).$$

Segundo Garbi (2010) um dos avanços mais importantes para a matemática foi a extração de raízes de um número complexo.

Proposição 3.7. *Sejam $z = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta))$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. A radiciação na forma polar é dada por: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\theta+k \cdot 2\pi}{n}) + isen(\frac{\theta+k \cdot 2\pi}{n}))$, onde θ é o argumento e $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.*

Exemplo 3.14. *Seja $z = 8 \cdot (\cos(0) + isen(0))$, as raízes cúbicas desse número é dado por:*

Se $k = 0$, logo $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(\frac{0+2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}) + isen(\frac{0+2 \cdot 0 \cdot \pi}{3})) = 2 \cdot (\cos(0) + isen(0)) = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Se } k = 1, \text{ logo } \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(\frac{0+2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}) + isen(\frac{0+2 \cdot 1 \cdot \pi}{3})) \\ &= 2 \cdot (\cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})) \\ &= 2 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } k = 2, \text{ logo } \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{8} \cdot (\cos(\frac{0+2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}) + isen(\frac{0+2 \cdot 2 \cdot \pi}{3})) \\ &= 2 \cdot (\cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})) \\ &= 2 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i). \end{aligned}$$

3.2 Polinômios

Para poder entender o que é uma função polinomial ou apenas polinômio é necessário utilizar uma abordagem teórica e abstrata para conseguir construir todo o alicerce dessa temática. Para isso serão utilizados e discutidos definições, teoremas, corolários, dentre outros, no decorrer desta seção.

Definição 3.10. Dizemos que uma sequência numérica $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é quase toda nula se existe algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $a_{n_i} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ onde $n_i = n + i$, ou seja, $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = a_{n_i} = \dots = 0$. Não se pode afirmar que todos os termos $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_t)$, com $t < n$ são diferentes de zero. Alguns deles pode assumir esse valor, sem perder a generalidade.

Exemplo 3.15. A sequência $a_n = (2, 5, 8, 9, 0, 0, 0, \dots)$ é uma sequência quase toda nula, pois pode-se encontrar $n = 3$, tal que para todo $n_i \geq n$, tem-se $a_{n_i} = 0$.

Exemplo 3.16. A sequência $b_n = 2^n + 1$ não é uma sequência quase toda não nula, pois não se pode encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 0$.

Definição 3.11. Dizer que uma função f é um polinômio sobre os complexos, é garantir que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e que tenha o formato de $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, na qual $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma sequência de números complexos e seja quase toda nula, desconsideramos os termos subsequentes a partir de a_n , pois são nulos, logo consideramos que $a_n \neq 0$ sendo o último termo da sequência. Os valores dessa sequência são denominados coeficientes do polinômio, o valor x representa a variável independente, tal que $x \in \mathbb{C}$.

Exemplo 3.17. A função $p(x) = -2x^3 + x^2 - 5x - 1$ é um polinômio sobre o conjunto dos complexos.

Exemplo 3.18. A função $q(x) = 3x^{-2} + x^2 - 5$ não é um polinômio, pois o expoente do primeiro monômio tem expoente negativo.

Definição 3.12. Seja $f(x)$ um polinômio qualquer. Chama-se grau de $f(x)$ e denota-se por $\partial f(x)$, o maior valor dos expoentes de x .

Exemplo 3.19. Se $p(x) = -2x^3 + 4x + 7$, então o grau desse polinômio é $\partial p(x) = 3$.

Em seguida, apresentamos algumas operações com polinômios.

3.2.1 Operações com polinômios.

Sobre $f(x)$ pode-se certificar as aplicações das operações básicas de adição e multiplicação da matemática. Para a classe de polinômios é utilizado outras simbologias. A adição é representada por " \oplus " e a multiplicação por " \odot ".

Definição 3.13. Sejam $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m$ dois polinômios definidos no conjunto dos números complexos, com $n \leq m$. Temos:

$$\begin{aligned} f(x) \oplus g(x) &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_m + b_m)x^m \\ &= \sum_{h=0}^m c_h x^h, \text{ onde } c_h = a_h + b_h; h = \{0, \dots, m\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \odot g(x) &= a_0.(b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) + \dots + a_nx^n.(b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) \\ &= (a_0.b_0)x^0 + (a_0.b_1 + a_1.b_0)x^1 + (a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0)x^2 + \dots \\ &\quad + (a_0.b_m + \dots + a_n.b_0).x^{n+m} \\ &= \sum_{h=0}^{n+m} c_h x^h, \text{ onde } c_h = \sum_{i+j=h, (i,j \geq 0)} a_i b_j. \end{aligned}$$

Notação 3.2. $f(x) \oplus g(x) = (f \oplus g)(x)$ e $f(x) \odot g(x) = (f \odot g)(x)$.

Exemplo 3.20. Dados os polinômios $p(x) = 2x^2 - 3$ e $q(x) = x - 1$, temos:

- $p(x) \oplus q(x) = (2+0)x^2 + (0+1)x + (-3-1) = 2x^2 + x - 4$.
- $p(x) \odot q(x) = 2x^2.(x) + 2x^2.(-1) + (-3).(x) + (-3).(-1) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$.

Estas operações gozam das propriedades associativa, comutativa e distributiva em relação a adição.

Observação 3.6. Para definir a subtração de polinômios basta observar que dados dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$, a diferença é $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$, soma dos coeficientes de $f(x)$ com os opostos dos coeficientes de $g(x)$. Com as operações sendo definidas em \mathbb{C} , constata-se que existe $g(x)$, tal que $f(x) + g(x) = 0 = g(x) + f(x)$. É fácil ver que $g(x) = -f(x)$ e, com isso, $g(x)$ é o elemento simétrico de $f(x)$.

Após diversos cálculos envolvendo polinômios, a seguinte proposição nos auxilia a encontrar o grau de um polinômio resultante.

Proposição 3.8. Sejam três polinômios $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, ambos com coeficientes pertencentes ao conjunto \mathbb{C} , onde $h(x) = g(x) + f(x)$. Então $\partial h(x) \leq \max[\partial g(x), \partial f(x)]$. Além disso, a multiplicação implica que sendo $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então $\partial h(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$.

Exemplo 3.21. Dados os polinômios $p(x) = x^2 - 3x + 1$ e $q(x) = x^3 - 1$, somando esses dois resulta-se um polinômio $h(x)$, tal que $\partial h(x) = 3$.

Exemplo 3.22. Sejam os polinômios $p(x) = x^5 + 1$ e $q(x) = x^2 - 1$, o produto de ambos origina um polinômio $h(x)$, tal que $\partial h(x) = 7$.

Quando o polinômio tem um número consideravelmente grande de coeficientes não nulos o cálculo do produto fica muito extenso para ser aplicado em turmas do Ensino Médio. Segundo Iezzi (1977) para que o produto de polinômios tenha um processo menos cansativo, pode-se utilizar um dispositivo para a determinação do resultado. A multiplicação é feita através de uma tabela de operações como será observado a seguir.

Proposição 3.9. Sejam os polinômios $f(x)$ e $g(x)$, onde $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$ e $h(x)$ tal que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Considere a seguinte tabela de multiplicação dos coeficientes.

Tabela 1 – Produto entre Polinômios

$g(x).f(x)$	a_0	a_1	a_2	\dots	a_n
b_0	$b_0.a_0$	$b_0.a_1$	$b_0.a_2$	\dots	$b_0.a_n$
b_1	$b_1.a_0$	$b_1.a_1$	$b_1.a_2$	\dots	$b_1.a_n$
b_2	$b_2.a_0$	$b_2.a_1$	$b_2.a_2$	\dots	$b_2.a_n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
b_m	$b_m.a_0$	$b_m.a_1$	$b_m.a_2$	\dots	$b_m.a_n$

Assim,

$$h(x) = (b_0.a_0)x^0 + (b_0.a_1 + b_1.a_0)x^1 + (b_0.a_2 + b_1.a_1 + b_2.a_0)x^2 \\ + \dots + (b_n.a_0 + b_{n-1}.a_1 + \dots + b_1.a_{n-1} + b_0.a_n)x^n.$$

A tabela apresenta todos os produtos possíveis para os coeficientes de $f(x)$ e $g(x)$. Observamos, que para encontrar os coeficientes do polinômio resultante basta somar os produtos que estão nas diagonais secundárias da tabela, excluindo a linha e coluna elementar, de operações. Para um melhor entendimento observe o seguinte exemplo.

Exemplo 3.23. Dados os polinômios $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = -x + 5$, o produto $f(x).g(x)$ é encontrado da seguinte forma:

De acordo com a tabela da proposição 3.9 temos:

Tabela 2 – Resolução do exemplo 3.23

$g(x).f(x)$	-1	2	3
5	-5	10	15
-1	1	-2	-3

Sendo $h(x) = f(x).g(x)$, temos $\partial h(x) = 3$. Então $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. Assim o cálculo dos coeficiente de $h(x)$ é da seguinte forma:

$$c_0 = -5; \\ c_1 = 1 + 10 = 11; \\ c_2 = -2 + 15 = 13; \\ c_3 = -3.$$

Portanto, $h(x) = -3x^3 + 13x^2 + 11x - 5$.

Definição 3.14. Dado um polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \cdot x^0$. a) Denomina-se o coeficiente a_n como líder; b) Caso $a_n = 1$ titula-se o polinômio como mônico.

Em seguida, destacaremos a divisão de polinômios, que é um fato curioso, pois de acordo com Muniz (2016) o algoritmo da divisão pode ser estendido para polinômios. Assim, para dividir $f(x)$ por $g(x)$ devem existir polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tal que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Proposição 3.10. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios, com coeficientes definidos em \mathbb{C} tal que $\partial g(x) \leq \partial f(x)$.

a) Se $g(x)$ divide $f(x)$, $g(x) | f(x)$, então existem $q(x)$ e $r(x)$, tal que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$. b) Se $g(x)$ não divide $f(x)$, $g(x) \nmid f(x)$, então existem $q(x)$ e $r(x)$, tal que

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ com } r(x) \neq 0 \text{ e } \partial r(x) < \partial g(x).$$

Para obter os valores dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, segundo Muniz (2016), existe um algoritmo de fácil manuseio.

Proposição 3.11. Considere os polinômios

$$f(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_0 \cdot x^0 \text{ e } g(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_0 \cdot x^0,$$

satisfazendo $\partial g(x) = n \leq m = \partial f(x)$. A proposição 3.10 garante que existem $q(x)$ e $r(x)$ tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ com $\partial r(x) < \partial g(x)$. O seguinte método (algoritmo) permite encontrar $q(x)$ e $r(x)$:

1) $r_1(x) = f(x)$ e $q_1(x) = 0$;

2) c_i é coeficiente líder de $r_i(x)$ e k_i é o grau de $r_i(x)$, $k_i = \partial r_i(x)$;

3) b coeficiente líder de $g(x)$, $b \equiv b_n$;

4) $f(x) = g(x) \cdot q_{i+1}(x) + r_{i+1}(x) = g(x) \cdot [c_i \cdot b^{-1} \cdot x^{k_i-n} + q_i(x)] + r_i(x) - c_i \cdot b^{-1} \cdot x^{k_i-n} \cdot g(x)$;

5) Se $\partial r_{i+1}(x) < \partial g(x)$, Então, pare. E considere $q(x) = q_{i+1}(x)$ e $r(x) = r_{i+1}(x)$.

O exemplo seguinte ilustra o algoritmo da proposição 3.11.

Exemplo 3.24. Dados os polinômios

$$f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \text{ e } g(x) = x^2 - 2x + 3,$$

encontre, pela proposição 3.11, $q(x)$ e $r(x)$, tal que $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$.

Solução: Observe que $k_1 = \partial f(x) = 5$ e $n = \partial g(x) = 2$. Pelo passo 2), $c_1 = 3$ e $b = 1$ e, pelo passo 1), $r_1(x) = f(x)$ e $q_1(x) = 0$. Em seguida, considerando $i = 1$, calculamos pelo passo 3), $r_2(x)$ e $q_2(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x).q_2(x) + r_2(x) = g(x).[c_1.b^{-1}.x^{k_1-n} + q_1(x)] + r_1(x) - c_1.b^{-1}.x^{k_1-n}.g(x) \\ f(x) &= [(x^2 - 2x + 3).(3.1.x^3 + 0)] + [(3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1) \\ &\quad - (x^2 - 2x + 3).(3.1.x^3)] \\ f(x) &= [3x^5 - 6x^4 + 9x^3] + [3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 - (3x^5 - 6x^4 + 9x^3)] \\ f(x) &= [3x^5 - 6x^4 + 9x^3] + [4x^3 - 9x^2 + 11x - 1] \\ f(x) &= (x^2 - 2x + 3).(3x^3) + (4x^3 - 9x^2 + 11x - 1). \end{aligned}$$

Assim, $q_2(x) = 3x^3$ e $r_2(x) = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$. Como $\partial r_2(x) = 3 > 2 = \partial g(x)$ o algoritmo continua. Então, como $c_2 = 4$ e $k_2 = 3$, considerando $i = 2$ no passo 3), calculamos $r_3(x)$ e $q_3(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x).q_3(x) + r_3(x) = g(x).[c_2.b^{-1}.x^{k_2-n} + q_2(x)] + r_2(x) - c_2.b^{-1}.x^{k_2-n}.g(x) \\ f(x) &= [(x^2 - 2x + 3).(4.1x^{3-2} + (3x^3))] + [4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \\ &\quad - (x^2 - 2x + 3).(4.1x^{3-2})] \\ f(x) &= (x^2 - 2x + 3).(3x^3 + 4x) + [4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 - (4x^3 - 8x^2 + 12x)] \\ f(x) &= (x^2 - 2x + 3).(3x^3 + 4x) + (-x^2 - x - 1). \end{aligned}$$

Assim, $q_3(x) = 3x^3 + 4x$ e $r_3(x) = -x^2 - x - 1$. Como $\partial r_3(x) = 2 = \partial g(x)$ o algoritmo continua. Então, como $c_3 = -1$ e $k_3 = 2$, considerando $i = 3$ no passo 3), calculamos $r_4(x)$ e $q_4(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x).q(x) + r(x) = g(x).[c_3.b^{-1}.x^{k_3-n} + q_3(x)] + r_3(x) - c_3.b^{-1}.x^{k_3-n}.g(x) \\ f(x) &= [(x^2 - 2x + 3).(-1.1x^{2-2} + (3x^3 + 4x))] + [-x^2 - x - 1 - (x^2 - 2x + 3).(-1.1x^{2-2})] \\ f(x) &= [(x^2 - 2x + 3).(3x^3 + 4x - 1)] + [-x^2 - x - 1 - (-x^2 + 2x - 3)] \\ f(x) &= [(x^2 - 2x + 3).(3x^3 + 4x - 1)] + (-3x + 2). \end{aligned}$$

Assim, $q_4(x) = 3x^3 + 4x - 1$ e $r_4(x) = -3x + 2$. Portanto, como $\partial r_4(x) < \partial g(x)$, temos:

$$r(x) = r_4(x) \text{ e } q(x) = q_4(x).$$

□

3.2.2 Propriedades relacionadas a polinômios

Após conceituar os polinômios e apresentarmos suas operações básicas, discutiremos nessa seção, algumas propriedades que estão presentes no currículo do Ensino Médio.

Quem já estudou ou passou por alguma série do Ensino Médio já resolveu questões contendo os textos “encontrar as raízes de uma função polinomial” ou “reduza o polinômio a sua forma fatorada”. Para que se possa entender o que é raiz e forma fatorada, deve-se primeiro conhecer a definição de equação polinomial.

Segundo Iezzi (1977), para um bom entendimento do conceito de equação polinomial, o aluno deve estar familiarizado com as operações básicas de polinômios. Uma equação polinomial é dada da seguinte forma: “Dadas duas funções polinomiais $y = f(x)$ e $y = g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $f(x) = g(x)$ ” (IEZZI, 1977, p 85).

A variável x , é usualmente usada por livros didáticos para representar a incógnita de um polinômio, no entanto, pode ser usada qualquer outra letra. Segundo Smole (2010):

Definição 3.15. *Uma equação polinomial de grau $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$ é dada por:*

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0,$$

onde x é considerada variável e os coeficientes a_i , com $i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ pertencem aos complexos.

Assim, a **solução** de uma equação polinomial é encontrar algum $r \in \mathbb{C}$, tal que

$$a_0 + a_1r^1 + a_2r^2 + \dots + a_nr^n = 0.$$

Definição 3.16. *Seja $f(x)$ e $a_n \neq 0$, com $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, um polinômio qualquer. Denomina-se raiz do polinômio $f(x)$ o valor constante $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $f(\alpha) = 0$.*

Exemplo 3.25. *Considere o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 1$. Verifica-se que 1 é raiz de $p(x)$, enquanto 2 não é raiz. De fato, basta observar que $p(1) = 0$ e $p(2) = 11$.*

De acordo com Garbi (2010), foi graças ao grande matemático Gauss, que demonstrou o teorema fundamental da álgebra, que os matemáticos puderam verificar que o número de raízes de um polinômio é igual ao grau do mesmo. Inicialmente Gauss provou a seguinte proposição.

Proposição 3.12. *Todo equação polinomial de coeficientes complexos tem, no campo dos complexos, pelo menos uma raiz.*

Exemplo 3.26. A equação polinomial $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$ possui como únicas raízes, os números complexos $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$. De fato, basta observar que $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$ e então,

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{2}.$$

Observação 3.7. Existem muitas aplicações envolvendo raízes de um polinômio, como, por exemplo, problemas envolvendo modelagem matemática como em Smole (2010) ou mesmo problemas físicos como da cinemática encontrados em Bonjorno (2016).

A seguinte e importante proposição, em conjunto com a proposição anterior, foi fundamental para Gauss provar o teorema fundamental da álgebra. Conhecendo uma raiz, ela nos fornece uma fatoração do polinômio.

Proposição 3.13. Sejam $f(x)$ um polinômio, com coeficientes complexos e $\alpha \in \mathbb{C}$. Temos:

$$\alpha \text{ é raiz de } f(x) \text{ se, e somente se, } (x - \alpha) \text{ divide } f(x).$$

Demomstração: Suponha que α é raiz de $f(x)$. Pelo algoritmo de Euclides, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x) = (x - \alpha).q(x) + r(x).$$

Observe que como $\partial(x - \alpha) = 1$, temos $r(x) = c$, c constante. Assim,

$$f(x) = (x - \alpha).q(x) + c.$$

Então, $f(\alpha) = c$. Como α é raiz, temos $c = 0$. Logo $f(x) = (x - \alpha).q(x)$, isto é, $(x - \alpha) \mid f(x)$. Suponha agora que $(x - \alpha) \mid f(x)$. Então, existe $q(x)$ tal que $f(x) = (x - \alpha).q(x)$. Portanto, $f(\alpha) = 0$, isto é, α é raiz de $f(x)$. \square

O seguinte exemplo ilustra a proposição 3.13.

Exemplo 3.27. Seja $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ um polinômio.

- a) Verifique que 1 é raiz de $p(x)$;
- b) Mostre que $x - 1$ divide $p(x)$.

Solução:

- a) Basta mostrar que $p(1) = 0$. Veja:

$$p(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

logo 1 é raiz de $p(x)$.

b) Utilizando a proposição 3.13, como 1 é raiz de $p(x)$ por **a)**, então $(x - 1)|p(x)$. \square

Para Muniz (2016) a proposição 3.13 é denominada teste da raiz. Como consequência da proposição 3.13, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Seja $f(x)$ um polinômio, com coeficientes pertencentes à \mathbb{C} e $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(x)$. Então, existe um número $m \in \mathbb{N}^*$, tal que $f(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x)$, onde $q(\alpha) \neq 0$.*

Demonstração: Desde que α é raiz de $f(x)$, pela proposição 3.13, $(x - \alpha)|f(x)$, isto é, existe $q_1(x)$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)q_1(x) \quad (1)$$

Caso, α seja raiz de $q_1(x)$, aplica-se novamente a proposição 3.13 para $q_1(x)$ e assim, existe $q_2(x)$ tal que $q_1(x) = (x - \alpha)q_2(x)$. Logo, por (1),

$$f(x) = (x - \alpha)^2 q_2(x) \quad (2)$$

O processo se repete até que $q_m(\alpha) \neq 0$. Portanto, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x)$, onde $q(x) = q_m(x)$ e $q(\alpha) = q_m(\alpha) \neq 0$. \square

Observação 3.8. *O número m que aparece no corolário acima é chamado multiplicidade da raiz α .*

Exemplo 3.28. *Considere o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.*

a) *verifique que $\alpha = 2$ é uma raiz de $p(x)$;*

b) *encontre a multiplicidade de α .*

Solução:

a) Basta calcular $p(\alpha) = p(2)$, temos

$$p(2) = (2)^4 - 5(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) - 8 = 16 - 40 + 24 + 8 - 8 = 0$$

logo $\alpha = 2$ é raiz de $p(x)$.

b) Pela proposição 3.13, temos que $(x - 2)|p(x)$, logo pelo algoritmo de Euclides

$$p(x) = (x - 2) \cdot q_1(x)$$

utilizando a proposição 3.11 para calcular $q_1(x)$, encontra-se $q_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

$$p(x) = (x - 2) \cdot (x^3 - 3x^2 + 4)$$

Observa-se que $q_1(2) = 0$, logo $(x - 2) | q_1(x)$.

$$p(x) = (x - 2)^2 \cdot q_2(x)$$

utilizando a proposição 3.11 para calcular $q_2(x)$, encontra-se $q_2(x) = x^2 - x - 2$.

$$p(x) = (x - 2)^2 \cdot (x^2 - x - 2)$$

Observa-se que $q_2(2) = 0$, logo $(x - 2) | q_2(x)$.

$$p(x) = (x - 2)^3 \cdot q_3(x)$$

utilizando a proposição 3.11 para calcular $q_3(x)$, encontra-se $q_3(x) = x + 1$.

$$p(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 1)$$

verifica-se que $q_3 \neq 0$, logo a multiplicidade de α é 3.

3.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Posteriormente, podemos enunciar o teorema fundamental da álgebra. É uma consequência das proposições 3.12 e 3.13. Sua demonstração pode ser encontrada em Garbi (2010).

Teorema 3.1 (Fundamental da álgebra). *Todo polinômio de coeficientes complexos e de grau n possui exatamente n raízes complexas (podendo ou não serem reais puras), desde que cada raiz seja contada de acordo com a sua multiplicidade.*

Exemplo 3.29. *O polinômio $p(x) = x^7 - 8x^6 + 17x^5 + 10x^4 - 65x^3 + 72x^2 - 81x + 54$ possui 7 (sete) raízes. São elas: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 3$, $\alpha_6 = i$ e $\alpha_7 = -i$. De fato, basta observar que $p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)^3(x - i)(x + i)$. Observe que a multiplicidade da raiz $\alpha = 3$ é três e assim, ela é contada três vezes.*

Uma consequência importante do teorema fundamental da álgebra é a fatoração de um polinômio qualquer em produto de fatores lineares.

Proposição 3.14. *Seja $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \cdot x^0$ um polinômio de grau n com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Então $p(x)$ pode ser fatorado da seguinte maneira:*

$$p(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

De acordo Smole (2010) a fatoração de polinômios é de suma importância na resolução de inequações e equações, pois devido aos atributos do produto de polinômios fica fácil de se observar quando é crescente ou decrescente o polinômio. A demonstração da proposição acima decorre do teste da raiz.

Exemplo 3.30. Considere o polinômio $f(x) = x^6 + 2x^5 - 14x^4 - 16x^3 + 37x^2 + 14x - 24$. Suas raízes são $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_5 = -2$ e $\alpha_6 = -4$. Assim,

$$f(x) = 1(x-1)^2(x-3)(x+1)(x+2)(x+4).$$

□

3.4 Método de Horner-Ruffini

Em seguida, apresentamos e demonstramos o método denominado Horner-Ruffini (conf. Muniz (2016)). Este método nos fornece o quociente da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$ onde α é uma raiz do polinômio que deve ser mônico.

Proposição 3.15 (Horner-Ruffini). *Sejam*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \quad (3)$$

um polinômio mônico em \mathbb{C} e $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(x)$. Então:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0),$$

onde b_{n-1} , b_{n-2} , b_{n-3} , ..., b_1 e b_0 são encontrados através do seguinte procedimento iterativo:

$$b_{n-1} = 1, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}, \quad b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}, \quad \dots \quad b_0 = a_1 + \alpha b_1.$$

Demonstração: Sendo α uma raiz do polinômio $f(x)$, $x - \alpha$ divide $f(x)$, e então, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0) \\ &= (x - \alpha) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}x^{n-1-i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Observe que temos as seguintes formas equivalentes de (4):

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - \alpha) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-1-i} \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-1-i} - \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha b_{n-1-i} x^{n-1-i} \\
&= b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2} \alpha b_{n-1-i} x^{n-1-i} - \alpha b_0 \\
&= b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-1-i} x^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_{n-i} x^{n-i} - \alpha b_0 \\
&= b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{n-1-i} - \alpha b_{n-i}) x^{n-i} - \alpha b_0
\end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, comparando (5) com (3), deveremos ter:

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= 1 \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1 + \alpha b_1 \\
-\alpha b_0 &= a_0
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.31. Considere o polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ que tem como raiz $\alpha = -2$. Assim, $n = \partial f(x) = 3$. Com base na proposição 3.15, a tabela seguinte apresenta os coeficientes $b_{n-1} = b_2, b_1$ e b_0 , do polinômio resultante da divisão de $f(x)$ por $x + 2$.

Tabela 3 – Resolução do exemplo 3.31

$a_2 = -1$	$a_1 = -4$	$a_0 = 4$
$b_2 = 1$	$b_1 = -2 \cdot 1 - 1$	$b_0 = -2 \cdot (-3) - 4$

Portanto, $f(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 2)$.

□

Observação 3.9. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Então, $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, onde $q(x)$ é o polinômio quociente de grau $n - 1$ e r é uma constante. Assim, de forma análoga a demonstração da proposição 3.15,

concluimos que $-\alpha b_0 + r = a_0$, isto é, $f(\alpha) = r = \alpha b_0 + a_0$. Assim, α é raiz do polinômio $f(x)$ se, e somente se, $r = 0$ (i.e., se $\alpha b_0 + a_0 = 0$). Esta simples variação do método Horner-Ruffini é denominada método Briot-Ruffini.

Exemplo 3.32. Considere o Polinômio $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$. Verifique, pelo método de Briot-Ruffini, que:

a) $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -3$ não são raízes de $f(x)$;

b) $\alpha_3 = 1$ é raiz de $f(x)$.

Solução:

a) Sabendo que $n = 3$ utilizaremos a observação 3.9 para verificar se $\alpha = 2$ não é raiz de $f(x)$.

Temos as seguintes informações,

$$\alpha = 2$$

$$a_2 = 1$$

$$b_2 = 1$$

$$a_0 = -10$$

Empregando uma tabela tem-se na primeira linha os coeficientes de $f(x)$ e na segunda linha acompanhado com os coeficientes do polinômio $g(x)$ e o resto r , onde $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + r$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & b_2 & b_1 & b_0 & r \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline 2 & 1 & (2.1)-7=-5 & (2.-5)+16=6 & (2.6)-10=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline 2 & 1 & -5 & 6 & 2 \end{array}$$

Como $r \neq 0$, temos pela observação 3.9 que $\alpha = 2$ não é raiz de $f(x)$.

Agora verificaremos que $\alpha = -3$ não é raiz de $f(x)$, temos

$$\alpha = -3$$

$$a_2 = 1$$

$$b_2 = 1$$

$$a_0 = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline -3 & 1 & (-3.1)-7=-10 & (-3.-10)+16=46 & (-3.46)-10=-148 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline -3 & 1 & -10 & 46 & -148 \end{array}$$

Como $r \neq 0$, temos que $\alpha = -3$ não é raiz de $f(x)$.

b) Confirmaremos agora que $\alpha = 1$ é raiz de $f(x)$, para isso será empregado a observação 3.9.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline 1 & 1 & (1.1)-7=-6 & (1.-6)+16=10 & (1.10)-10=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -10 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 10 & 0 \end{array}$$

Logo observamos que $r = 0$, e segundo a observação 3.9 $\alpha = 1$ é raiz de $f(x)$.

□

Observação 3.10.

a) Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n . Para se calcular $f(x_0)$, por uma simples substituição, é necessário fazer $n(n+1)/2$ multiplicações e n adições. Assim, se o grau n do polinômio for muito elevado, o cálculo de $f(x_0)$ se torna muito trabalhoso.

b) O método de Briot-Ruffini torna a tarefa de calcular $f(x_0)$ mais fácil. Ele necessita somente de n multiplicações e n adições.

3.5 Teste da Raiz Racional

Em seguida, apresentaremos uma condição necessária para um número racional ser raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

Proposição 3.16 (Teste de raiz racional).

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio onde a_i ; $i = 1, \dots, n$ são números inteiros e, considere q e r números inteiros, com $MDC(q, r) = 1$. Temos:

Se $\frac{q}{r}$ é raiz de $p(x)$, então $q|a_0$ e $r|a_n$.

Demonstração: Suponha que $\frac{q}{r}$ seja raiz de $p(x)$. Então $p(\frac{q}{r}) = 0$. Logo,

$$a_n \left(\frac{q}{r}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{q}{r}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{q}{r}\right)^{n-2} + \dots + a_1 \left(\frac{q}{r}\right) + a_0 = 0.$$

Ou ainda,

$$a_n \frac{q^n}{r^n} + a_{n-1} \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} + a_{n-2} \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{q}{r} + a_0 = 0. \quad (6)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (6) por r^n , temos:

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} r + a_{n-2} q^{n-2} r^2 + \cdots + a_1 q r^{n-1} + a_0 r^n = 0. \quad (7)$$

Logo,

$$a_n q^n = -[a_{n-1} q^{n-1} r + a_{n-2} q^{n-2} r^2 + \cdots + a_1 q r^{n-1} + a_0 r^n].$$

Daí,

$$a_n q^n = -r[a_{n-1} q^{n-1} + a_{n-2} q^{n-2} r + \cdots + a_1 q r^{n-2} + a_0 r^{n-1}]. \quad (8)$$

Como o $\text{MDC}(q, r) = 1$, r não divide q . Então, por (8), $r | a_n$.

Por (7),

$$a_0 r^n = -[a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} r + a_{n-2} q^{n-2} r^2 + \cdots + a_1 q r^{n-1}].$$

Assim,

$$a_0 r^n = -q[a_n q^{n-1} + a_{n-1} q^{n-2} r + a_{n-2} q^{n-3} r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}]. \quad (9)$$

Como o $\text{MDC}(q, r) = 1$, q não divide r . Então, por (9), $q | a_0$. □

Exemplo 3.33. *Verifique, utilizando a proposição 3.16, que $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ não possui raízes racionais.*

Solução: Suponha que existem q e r números inteiros tais que $r \neq 0$ e $\frac{q}{r}$ seja raiz de $p(x)$. Logo, pela proposição 3.16, $r | 1$ e $q | 1$. Assim, $r, q \in \{-1, 1\}$ e, assim, $\frac{q}{r} \in \{-1, 1\}$. Portanto, como $p(1) = -8$ e $p(-1) = -8$, concluímos que $p(x)$ não possui raiz racional. □

Observação 3.11. *As 4(quatro) raízes de $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ são:*

$$\alpha_1 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \quad \alpha_3 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \quad e \quad \alpha_4 = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Portanto, não racionais. □

3.6 Relações de Girard

A proposição seguinte nos proporciona importantes relações entre as raízes e os coeficientes de um polinômio de grau n . Elas são conhecidas como relações de Girard, como exemplificam Defendi e Oliveira (2016).

Proposição 3.17 (Relações de Girard). *Considere $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ um polinômio de grau n , $\partial p(x) = n$, e suas respectivas raízes complexas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.*

Temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \dots + x_1 \cdot x_2 \cdot x_n + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \dots + x_{n-2} \cdot x_{n-1} x_n \\ \dots\dots\dots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \frac{-a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{array}$$

Demonstração: Pela proposição 3.14, podemos reescrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n). \tag{10}$$

Assim, em (10), fazendo os produtos correspondentes, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n - a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n)x^{n-1} \\ &+ a_n(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n)x^{n-2} \\ &- a_n(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_1 x_2 x_n + x_1 x_3 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n)x^{n-3} \\ &+ \dots + (-1)^n(x_1 x_2 x_3 \dots x_n). \end{aligned} \tag{11}$$

Portanto, comparando $p(x)$ na forma (11) com $p(x)$ na forma de potência,

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0,$$

obtemos as relações de Girard desejadas. □

Como aplicação das relações de Girard, apresentamos, no exemplo seguinte, a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau que, em geral, nos auxíla no cálculo das mesmas.

Exemplo 3.34. Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ um polinômio do segundo grau.

a) Repita o processo, utilizado na demonstração das relações de Girard para um polinômio de grau n , para deduzir as fórmulas da soma e do produto das raízes de $p(x)$;

b) Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 13x + 42$, utilizando as relações encontradas no item a).

Solução: a) Suponha que as raízes de $p(x)$ sejam dadas por x_1 e x_2 . Assim, pela proposição 3.14, podemos escrever: $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Logo, $p(x) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)$. Ou ainda,

$$p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1x_2). \quad (12)$$

Então, $-a(x_1 + x_2) = b$ e $a(x_1x_2) = c$. Portanto,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ e } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

b) Pelo item a), as raízes x_1, x_2 de $p(x)$ devem satisfazer:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-13)}{1} = 13 \text{ e } x_1x_2 = \frac{42}{1} = 42.$$

Portanto, $x_1 = 6$ e $x_2 = 7$. □

O exemplo seguinte nos apresenta as relações de Girard para um polinômio de grau 3(três).

Exemplo 3.35. a) Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ um polinômio do terceiro grau. Repita o processo, utilizado na demonstração das relações de Girard para um polinômio de grau n , para deduzir as fórmulas da soma e do produto das raízes de $p(x)$;

b) Encontre as relações de Girard para o polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$;

c) Sabendo que as raízes do polinômio do item b) são dadas por: $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 3 - i$ e $x_3 = 1$, teste as relações encontradas no item b).

Solução: a) Suponha que as raízes de $p(x)$ sejam dadas por: x_1, x_2 e x_3 . Assim, pela proposição 3.14, podemos escrever: $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Logo,

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)(x - x_3) \\ &= a(x^3 - x_3x^2 - x_2x^2 + x_2x_3x - x_1x^2 + x_1x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3) \\ &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a(x_1x_2x_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Então, comparando $p(x)$ na forma (13) com $p(x)$ na forma de potências, temos

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \quad a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c \quad \text{e} \quad a(x_1x_2x_3) = d.$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}.$$

b) Destacando os coeficientes de $p(x)$, temos

$$\begin{array}{ll} a = 1 & c = 16 \\ b = -7 & d = -10 \end{array}$$

Assim, utilizando o item **a)**, encontramos as relações de Girard para o polinômio $p(x)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = \frac{-(-7)}{1} = 7 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 & = \frac{16}{1} = 16 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & = \frac{-(-10)}{1} = 10 \end{cases}$$

c) Utilizando o item **b)** e fazendo as substituições das raízes, temos

$$\begin{cases} 3 + i + 3 - i + 1 & = 7 \\ 9 + 1 + 3 + i + 3 - i & = 16 \\ 9 + 1 & = 10 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} 7 & = 7 \\ 16 & = 16 \\ 10 & = 10 \end{cases}$$

Portanto, as relações são satisfeitas. □

O seguinte lema será fundamental para a proposição que segue.

Lema 3.1. *Seja $z = a + bi$ um número complexo, $n \in \mathbb{N}^*$ e k um número real qualquer. Se $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado de $z = a + bi$, então $k(a - bi)^n$ é o conjugado de $k(a + bi)^n$.*

Demonstração: Considere $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ a forma trigonométrica do número complexo z . Então, $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ é a forma trigonométrica do número complexo \bar{z} , conjugado de z . Assim,

$$\begin{aligned} kz^n &= k \cdot \rho^n \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta))^n \\ &= k \cdot \rho^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k\bar{z}^n &= k \cdot \rho^n \cdot (\cos(-\theta) + i \cdot \text{sen}(-\theta))^n \\ &= k \cdot \rho^n \cdot (\cos(-n\theta) + i \cdot \text{sen}(-n\theta)) \\ &= k \cdot \rho^n \cdot (\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Portanto, $k(a - bi)^n$ é o conjugado de $k(a + bi)^n$. □

Observação 3.12. Dada uma sequência de números complexos da forma $z_n = a_n + b_n i$, com $n \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, a soma de n números complexos, resulta-se um número complexo da forma $A + Bi$, onde $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ e $B = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$. Analogamente na soma de seus n conjugados o resultado é da forma $A - Bi$, resultando no conjugado das somas.

A seguir enunciaremos uma importante proposição, que nos informa que o conjugado de uma raiz complexa de uma equação polinomial é também raiz da mesma. Assim, o número de raízes complexas de uma equação polinomial é um número par.

Proposição 3.18. Seja um polinômio $p(x)$, com $\partial p(x) > 1$ e com todos coeficientes reais. Se z , um número complexo, é raiz de $p(x)$, então \bar{z} , o conjugado de z , também é raiz de $p(x)$.

Demonstração: Considere o polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$, de coeficientes reais. Suponha que $z = a + bi$ seja raiz de $p(x)$. Então,

$$p(a + bi) = a_n(a + bi)^n + a_{n-1} \cdot (a + bi)^{n-1} + \dots + a_1(a + bi) + a_0 = 0.$$

Faça $a_n(a + bi)^n + a_{n-1} \cdot (a + bi)^{n-1} + \dots + a_1(a + bi) + a_0 = A + Bi$. Assim, $A + Bi = 0$.

Pelo lema 3.1 e observação 3.12,

$$P(a - bi) = a_n(a - bi)^n + a_{n-1} \cdot (a - bi)^{n-1} + \dots + a_1(a - bi) + a_0 = A - Bi$$

Desde que $A + Bi = 0$ equivale a $A = 0$ e $B = 0$, temos $A - Bi = 0$. Portanto, $z = a - bi$ também é raiz de $p(x)$. \square

Os seguintes corolários são consequências diretas da proposição 3.18.

Corolário 3.2. *Em toda equação polinomial de coeficientes reais, o número de raízes imaginárias é par.*

Corolário 3.3. *Em toda equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar, existe um número ímpar de raízes reais.*

Exemplo 3.36. *Considere polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$.*

a) Encontre as raízes de $p(x)$.

b) Disserte sobre o número de raízes reais e complexas.

Solução:

a) Desde que os coeficientes de $p(x)$ são inteiros e o $\partial p(x) = 3$ é ímpar, pelo corolário 3.3, existe um número ímpar de raízes reais. Pela proposição 3.16, se existir uma raiz racional, ela será da forma $\alpha = \frac{q}{r}$, onde $q \mid -10$ e $r \mid 1$. Assim, $q \in \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$ e $r \in \{-1, 1\}$. Logo, basta testar os valores de q em $p(x)$ para encontrar uma possível raiz racional. Veja,

$$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 9(1) - 10 = -4, \quad p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 9(2) - 10 = 0.$$

Assim, $x_1 = 2$ é raiz e, portanto, $(x - 2) \mid p(x)$ com $p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 2x + 5)$. Utilizando a fórmula de Bhaskara, verificamos que $x_2 = 1 + 2i$ e seu conjugado $x_3 = 1 - 2i$ são as raízes de $x^2 - 2x + 5$. Assim, as raízes de $p(x)$ são: $x_1 = 2$, $x_2 = 1 + 2i$ e $x_3 = 1 - 2i$.

b) Existem 2(duas) raízes complexas que são conjugadas. Assim, o número de raízes complexas é um número par. Existe apenas 1(uma) raiz real. Assim, o grau do polinômio é 3(três) e possui um número ímpar de raízes reais. \square

4 APLICAÇÕES

Podemos encontrar diversas aplicações das funções polinômiais na natureza, em problemas do cotidiano, na física, na engenharia, na criptografia, na matemática e, assim por diante. Por exemplo, na natureza e em problemas do cotidiano, destacamos:

4.1 Aplicações na Natureza e em Problemas do Cotidiano

- O volume do sol pode ser representado por um polinômio de grau 3 em função de seu raio, mais precisamente, $V_s = 4/3\pi r^3$, onde V_s e r representam, respectivamente, o volume e o raio do sol. Portanto, desde que $r \cong 696340 \text{ km}$, $V_s \cong 1,414 \times 10^{18} \text{ km}^3$;

- Se você olhar para uma seção transversal de um favo de mel, encontrará um padrão de hexágonos. Esse padrão possui um hexágono cercado por mais 6(seis) hexágonos. Ao redor desses aparece um terceiro anel de 12(doze) hexágonos e, assim por diante. O número total de hexágonos de um favo de mel pode ser modelado pela função polinomial de grau 2, $f(a) = 3a^2 - 3a + 1$, onde a representa o número de anéis e $f(a)$ representa o número de hexágonos.

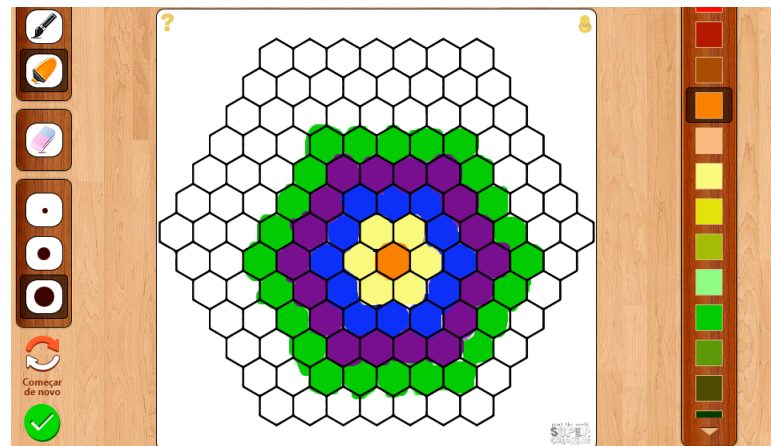
Figura 7 – Favo de Mel



FONTE: Criacionismo (2015)

Para uma melhor ilustração da função $f(a)$ acima apresentamos a seguinte figura.

Figura 8 – Sequência de hexagonos



FONTE: Autor(2020)

- Podemos utilizar polinômios para representar os custos crescentes das mensalidades de uma universidade em função da taxa de aumento. Por exemplo, se o valor da mensalidade é R\$ 250,00 e a mensalidade aumenta a uma taxa de 4% ao ano, a mensalidade no segundo ano, onde $r = 0,04$ representa a taxa de aumento anual, será $250(1 + r) = 250 + 250r$; no terceiro ano será $250(1 + r)^2 = 250r^2 + 500r + 250$, no quarto ano será $250(1 + r)^3 = 250r^3 + 750r^2 + 750r + 250$ e assim, por diante.

- Um produtor que possui, por exemplo, 200 metros de arame, pode aplicar o conceito de máximos e mínimos relacionados a funções polinomiais de segundo grau para encontrar a maior área retangular que ele pode cercar com esses 200 metros de arame. Mais especificamente, atribuindo x e y como sendo as dimensões do retângulo podemos modelar o problema da seguinte forma: encontrar o maior valor da função $A(x, y) = xy$, satisfazendo $x + y = 200$, ou ainda, fazendo $y = 200 - x$, o problema recai em encontrar o maior valor que a função $A(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x$ pode assumir. Sabemos que o maior valor que a função área, $A(x)$, pode assumir é no “ x do vértice” (x_v). Assim, como $x_v = -b/2a = -200/(-2) = 100$, a maior área, em forma de retângulo, que o produtor consegue cercar é um quadrado de lado $100m$ e que corresponde a $10000 m^2$.

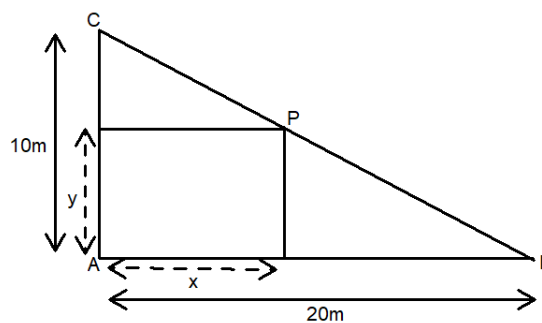
- Os médicos são exemplos de profissionais que não tem formação na área de exatas, mas que necessitam de certo conhecimento matemático para formular dosagem de medicamentos, como por exemplo, a função $c(t) = -0,05t^2 + 2t + 2$, serve para calcular a concentração c em partes por milhão de hemácias, de um determinado medicamento na corrente sanguínea de um paciente após t horas.

4.2 Problemas cuja Solução Envolvem Polinômios

Nessa seção apresentaremos diversos problemas cujas soluções envolvem funções polinomiais.

Exemplo 4.1. Renato pretende construir um galpão em seu terreno, que possui forma de um triângulo retângulo, conforme figura abaixo. Quais devem ser as dimensões x e y do galpão, para que sua área seja máxima.

Figura 9 – Formato do Terreno



FONTE: Autor (2020)

Solução: Considere o plano cartesiano com origem no ponto A, eixo- x positivo contendo o segmento AB e o eixo- y positivo contendo o segmento AC. Logo, a reta que contém o segmento CB, designada por reta r , possui equação

$$y - 0 = \frac{10 - 0}{0 - 20}(x - 20),$$

isto é,

$$y = \frac{-1}{2}x + 10. \quad (14)$$

Assim, desejamos encontrar os valores de x e y tal que a área do galpão, $A(x, y)$, dada por

$$A(x, y) = x \cdot y \quad (15)$$

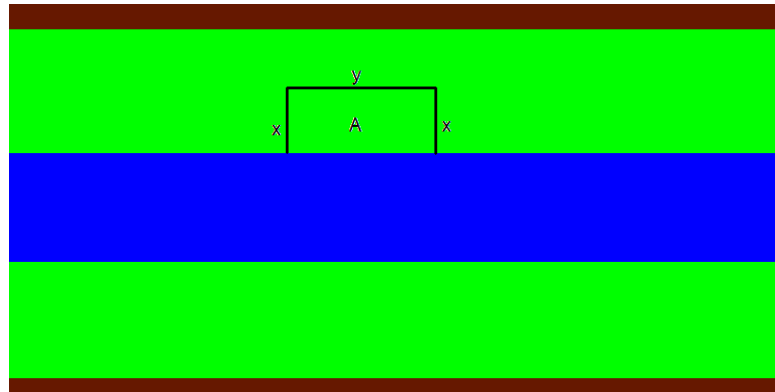
seja máxima e que o ponto P , de coordenadas (x, y) , pertença a reta r dada por (14), isto é, que $y = (-1/2)x + 10$. Logo, substituindo esse valor de y em (15), o problema passa a ser encontrar o valor de x tal que

$$A(x) = x\left(\frac{-1}{2}x + 10\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x \quad (16)$$

seja máxima. Desde que, (16) representa uma parábola com concavidade voltada para baixo, o máximo de $A(x)$ é assumido em $x = \frac{-b}{2a}$, onde $a = -1/2$ e $b = 10$, isto é, $x = 10$. Desde que $y = (-1/2)x + 10$ e $x = 10$ temos $y = 5$. Portanto, para $x = 10$ m e $y = 5$ m a área do galpão é máxima ($A = 50m^2$). \square

Exemplo 4.2. Um fazendeiro, criador de gado nelore, tem cerca de 500 metros de arame liso e pretende cercar um pasto, em forma de retângulo, que margeia um rio reto, conforme figura abaixo. Ele não precisa de cerca ao longo do rio, mas para que o gado não escape com facilidade, precisa que o cercado possua 5 fios de arame. Quais são as dimensões do pasto que possui a maior área?

Figura 10 – Formato do Cercado



FONTE: Autor (2020)

Solução:

De acordo com a figura 10, o pasto que o criador pretende cercar forma um retângulo de área, $A(x, y)$, dada por

$$A(x, y) = xy. \quad (17)$$

Como o criador possui 500 metros de arame e a área não precisa ser cercada ao longo do rio, pela figura 10, temos

$$5(2x + y) = 500. \quad (18)$$

Por (18), $y = 100 - 2x$. Substituindo em (17), encontramos

$$A(x) = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x,$$

que assume o valor máximo em $x = -b/2a$, onde $b = 100$ e $a = -2$, isto é, $x = 25$. Desde que $y = 100 - 2x$, $y = 50$. Assim, para que a área do pasto seja máxima as dimensões devem ser $x = 25m$ e $y = 50m$, que correspondem a uma área de $1250m^2$. \square

Exemplo 4.3. *Alan está em uma rodoviária e pretende utilizar um táxi. Ele observa que existem duas empresas que fazem esse tipo de transporte, as empresas A e B. A empresa A cobra um valor de R\$ 0,75 por quilômetro rodado e uma taxa de R\$ 15,00 reais, já a empresa B cobra um valor de R\$ 1,20 por quilômetro rodado e uma taxa fixa de R\$ 5,00 reais. Sabendo que Alan tem que percorrer 25km, qual das empresas é mais vantajosa?*

Solução: Sejam $V_1(q)$ e $V_2(q)$ os valores, em reais, cobrados pelas empresas A e B, percorridos q quilômetros, respectivamente. Assim,

$$V_1(q) = 0,75q + 15 \quad \text{e} \quad V_2(q) = 1,20q + 5. \quad (19)$$

Logo, o valor a ser cobrado pela empresa A, após 25 km rodados é

$$V_1(25) = 0,75 \times 25 + 15 = 33,75$$

e o valor cobrado pela empresa B, após 25 km rodados é

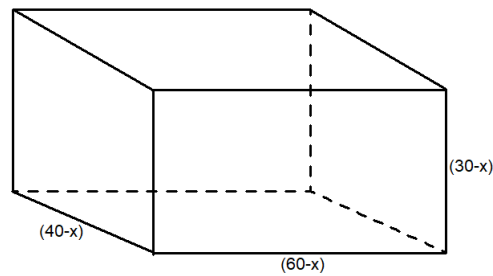
$$V_2(25) = 1,20 \times 25 + 5 = 35.$$

Portanto, é mais vantajoso Alan escolher a empresa A. \square

Exemplo 4.4. *Uma empresa aérea deseja regulamentar as bagagens de mão, para um melhor aproveitamento de espaço de suas aeronaves. Sabe-se que essa adotou como padrão um paralelepípedo, cuja as dimensões não podem ultrapassar as seguintes: 60cm de comprimento, 40cm de largura e 30cm de altura. Após o envio dessas informações a empresa recebeu uma notificação da ANAC, informando que o volume das bagagens não devem ultrapassar $48125cm^3$. Proponha uma redução nas dimensões para que a empresa não volte a ser notificada. Uma sugestão que esse órgão supervisor apresentou foi a redução igualitária em todas as dimensões.*

Solução: Denote por x cm o valor da redução que ocorrerá no comprimento, na largura e na altura. Nesse sentido, a seguinte figura representa o paralelepípedo com as dimensões reduzidas de x cm.

Figura 11 – Mala em formato de paralelepípedo.



FONTE: Autor (2019)

De acordo com a ANAC o volume máximo das bagagens não deve ultrapassar 48125cm^3 . Assim, a empresa aérea, com o objetivo de maximizar o volume das bagagens, deve propor um padrão de paralelepípedo cujo volume seja igual a 48125cm^3 . Então, pela figura 11, devemos ter:

$$(60 - x) \cdot (40 - x) \cdot (30 - x) = 48125,$$

ou ainda,

$$-x^3 + 130x^2 - 5400x + 23875 = 0. \quad (20)$$

Considere $p(x) = -x^3 + 130x^2 - 5400x + 23875$. Pelo teste da raiz racional (proposição 3.16), as possíveis raízes racionais do polinômio $p(x)$, são da forma $\frac{q}{r}$, com $\text{MDC}(q, r) = 1$, satisfazendo $q|23875$ e $r|(-1)$. Assim, as possíveis raízes racionais de $p(x)$ são os divisores de 23875, representados pelo seguinte conjunto:

$$\{1, -1, 5, -5, 25, -25, 125, -125, 191, -191, 955, -955, 4775, -4775, 23875, -23875\}.$$

Em seguida, aplicando o método de Briot-Ruffini (ver observação 3.9) para as possíveis raízes racionais, identificamos que $x = 5$ é raiz do polinômio $p(x)$, conforme quadro abaixo.

	-1	130	-5400	23875
1	-1	129	-5271	18604
-1	-1	131	-5531	29406
5	-1	125	-4775	0

Então, desde que $x = 5$ é raiz do polinômio $p(x)$, pela proposição 3.13, $(x - 5)|p(x)$ e assim,

$$-x^3 + 130x^2 - 5400x + 23875 = (x - 5) \cdot (-x^2 + 125x - 4775). \quad (21)$$

Como o discriminante (Δ) do polinômio quadrático que aparece em (21) é negativo, isto é, $\Delta = -3475$, suas raízes são complexas. Logo, temos apenas $x = 5$ como solução. Portanto, as

dimensões do paralelepípedo devem ser 55cm de comprimento, 35cm de largura e 25cm de altura. □

4.3 Movimento Uniformemente Variado

No exemplo seguinte, apresentaremos uma aplicação de polinômios à física. Mostraremos que a função horária do Movimento Uniformemente Variado (MUV) é representada por uma função polinomial de grau 2. Ela descreve o espaço percorrido por um objeto, cuja aceleração não é nula.

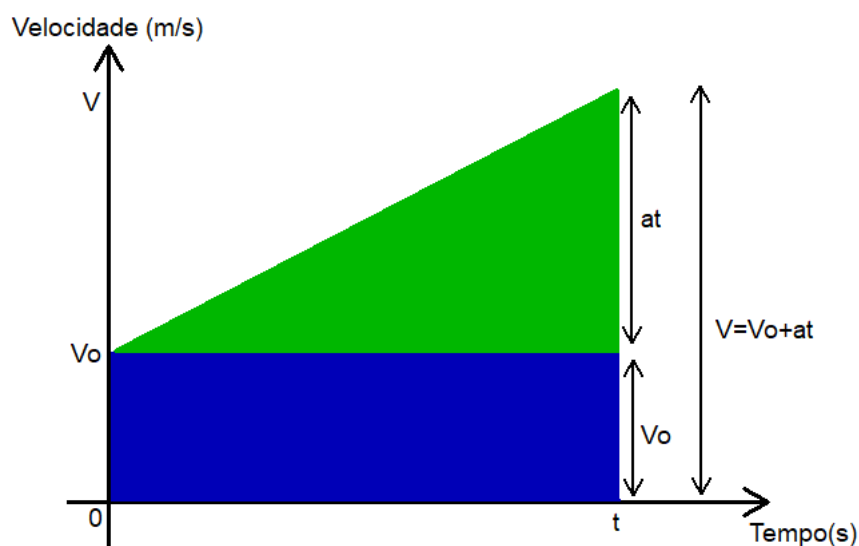
Exemplo 4.5. *Apresente uma dedução da função horária que representa o Movimento Uniformemente Variado (MUV).*

Solução: Sejam s o espaço percorrido final, s_0 é o espaço percorrido inicial, t é o tempo percorrido final e t_0 o espaço percorrido inicial. Assim, a velocidade (v) e a aceleração (a), são dadas por:

$$\bullet v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} \qquad \bullet a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Observe a seguinte figura, que representa o gráfico da velocidade em função do tempo, $v = v_0 + at$; com $t_0 = 0$, de um movimento com aceleração escalar constante positiva.

Figura 12 – Velocidade em função do tempo



FONTE: Autor 2020

Sabemos, da física, que a área abaixo do gráfico da função velocidade, em destaque na figura 12, corresponde ao espaço percorrido do instante $t_0 = 0$ até o instante t , isto é, Δs . Desde que, a área

em destaque corresponde a um trapézio de base maior $v_0 + at$, base menor v_0 e altura t , temos:

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{(v_0 + v_0 + at)t}{2} \\ &= \frac{2v_0t}{2} + \frac{at^2}{2} \\ &= v_0t + \frac{1}{2}at^2.\end{aligned}$$

Assim, desde que $\Delta s = s - s_0$, temos:

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

□

Em seguida, apresentaremos as progressões aritméticas de ordem superior (PA de ordem superior). Sua forte relação com os polinômios é que o termo geral, a_n , de uma PA de ordem p é um polinômio de grau p na variável n . Esse importante resultado será enunciado no teorema 4.1.

4.4 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

As progressões aritméticas estão presentes na vida cotidiana do homem. Por exemplo, João deseja melhorar o seu condicionamento físico fazendo caminhadas em dias alternados e sempre com acréscimo de distância. No primeiro dia ele pretende percorrer $500m$ e a cada novo dia ele acrescenta mais $300m$ em sua meta, até atingir um percurso de $5000m$. Com quantos dias de caminhada João alcança o seu objetivo? Esse é um problema rotineiro e que pode ser solucionado com o auxílio das PA's de ordem 1. Mais especificamente, a PA de ordem 1 cujo termo geral é $a_n = 500 + (n - 1)300$; $n \in \mathbb{N}^*$ auxilia na solução desse problema onde n representa os dias de caminhada. Assim, no primeiro dia João percorre $a_1 = 500$ metros; no segundo dia, João percorre $a_2 = 500 + 300 = 800$ metros; no terceiro dia, João percorre $a_3 = 500 + 2 \times 300 = 1100$ metros; e assim por diante. Para João saber quantos dias ele precisa para cumprir a sua meta de 5000 metros basta resolver a simples equação $500 + (n - 1)300 = 5000$, que tem como solução $n = 16$. Assim, João precisará de 16 dias de caminhada para alcançar o seu objetivo.

Para definirmos as PA's de ordem superior, precisamos, primeiro, conhecer o operador diferença. As definições e resultados que serão apresentados em seguida podem ser encontrados em NOBRE (2018).

Definição 4.1. Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, define-se **operador diferença**

$$(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma nova seqüência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta^1[\Delta^1 a_n])_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e assim recursivamente, $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para $k \geq 3$.

Exemplo 4.6. Considere a seqüência

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 7, 20, 43, 78, \dots),$$

onde $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + n^2 + 5n - 1$, para $n \geq 1$. Temos: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n = n^2 + 5n - 1;$$

$$\Delta^2 b_n = \Delta^1 b_{n+1} - \Delta^1 b_n = 2n + 6;$$

$$\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 2.$$

Assim,

$$(\Delta^1 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (5, 13, 23, 35, 49, \dots);$$

$$(\Delta^2 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (8, 10, 12, 14, \dots);$$

$$(\Delta^3 b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, \dots).$$

Além disso, $(\Delta^k b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ para $k \geq 4$. □

Definição 4.2. Uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma **PA de ordem k** se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma seqüência constante.

Exemplo 4.7. a) A seqüência do exemplo 4.6 é uma PA de ordem 3;

b) A seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 4, 8, 15, 25, \dots)$, onde $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 2.

Solução: Observe que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 3n - 2;$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 3$$

Assim,

$$(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 7, 10, 13, \dots);$$

$$(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 3, 3, 3, \dots).$$

Além disso, $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ para $k \geq 3$. □

O seguinte teorema nos proporciona uma importante relação entre as PAs de ordem superior e os polinômios. Ele nos informa que o termo geral, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de uma PA de ordem k é um polinômio de grau k na variável n . Sua prova pode ser encontrada em MORGADO (2015).

Teorema 4.1. *Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k , então seu termo geral a_n é um polinômio de grau k na variável n . Reciprocamente, se $p(n)$ é um polinômio de grau k , então a sequência*

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), P(3), \dots, P(n), \dots)$$

é uma PA de ordem k .

O exemplo seguinte ilustra o Teorema 4.1

Exemplo 4.8. a) *Supondo que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma PA de ordem 2 e que seus três primeiros termos sejam dados por $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ e $a_3 = 15$, obtenha o polinômio de grau 2 que represente o termo geral a_n .*

b) *Considere o polinômio $P(n) = n^3 + 1$. Mostre que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), \dots, P(n), \dots)$ é uma PA de ordem 3.*

Solução:

a) Desde que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2, pelo teorema 4.1, a_n é um polinômio de grau 2 na variável n , isto é, $a_n = an^2 + bn + c$. Assim, como $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ e $a_3 = 15$, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 15 \end{cases}$$

que tem como solução (única) $a = 2$, $b = -1$ e $c = 0$. Portanto, $a_n = 2n^2 - n$.

b) Defina $a_n = P(n)$. Assim, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 9, 28, 65, 126, \dots)$. Temos: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 3n + 1;$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 6n + 6;$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6.$$

Assim,

$$(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (7, 19, 37, 61, 91, \dots);$$

$$(\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (12, 18, 24, 30, \dots);$$

$$(\Delta^3 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (6, 6, 6, 6, \dots).$$

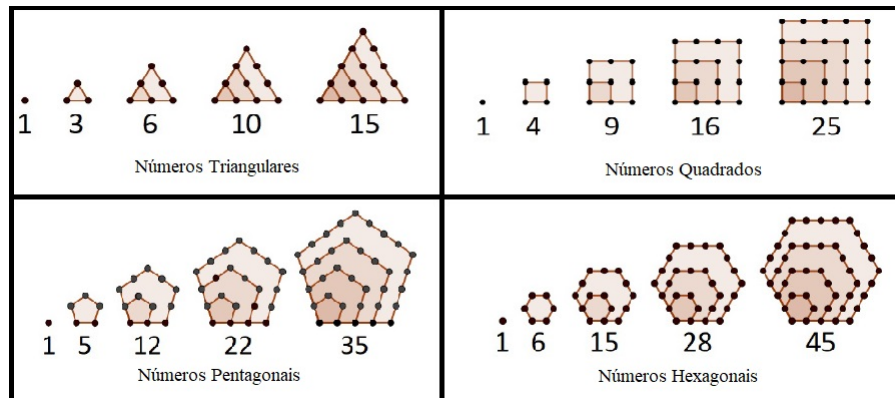
Além disso, $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ para $k \geq 4$. Portanto, a sequência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (P(1), P(2), \dots, P(n), \dots)$$

é uma PA de ordem 3. □

Os Números Poligonais são números que podem ser representados por pontos que formam um polígono regular, dentre os quais destacamos os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais. A figura abaixo, apresenta esses números.

Figura 13 – Representação dos números poligonais



FONTE: NOBRE (2018)

De acordo com a figura acima, as seqüências dos números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais são dadas, respectivamente, por

$$(T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 6, 10, 15, \dots) \quad (22)$$

$$\text{onde} \quad (23)$$

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n;$$

$$(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, \dots) \text{ onde } Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1);$$

$$(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 5, 12, 22, 35, \dots) \text{ onde } P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2);$$

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 6, 15, 28, 45, \dots) \text{ onde } H_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3).$$

As seqüências $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são Progressões aritméticas de segunda ordem. O seguinte exemplo, apresenta a justificativa que a seqüência dos números triangulares, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uma PA de segunda ordem. As demais justificativas podem ser encontradas em NOBRE (2018).

Exemplo 4.9. *Verifique que a seqüência dos números triangulares, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uma PA de segunda ordem.*

Solução:

Os números triangulares são representados pela sequência $T_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$, onde $T_n = 1 + 2 + \dots + n$. Assim: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\Delta^1 T_n)_{n \in \mathbb{N}} &= T_{n+1} - T_n = n + 1; \\ (\Delta^2 T_n)_{n \in \mathbb{N}} &= \Delta^1 T_{n+1} - \Delta^1 T_n = 1;\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\Delta^1 T_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (2, 3, 4, 5, 6, \dots); \\ (\Delta^2 T_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (1, 1, 1, 1, \dots);\end{aligned}$$

Além disso, $(\Delta^k t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ para $k \geq 3$. Logo a sequência dos números triangulares é uma PA de Ordem 2.

Exemplo 4.10. *Encontre o polinômio de grau 2 que representa o termo geral da sequência correspondente aos números triangulares.*

Solução: Desde que $T_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$ é uma PA de ordem 2, pelo teorema 4.1, $T(n)$ pode ser representado por um polinômio de grau 2 na variável n , isto é, $T(n) = an^2 + bn + c$. Assim, como $T(1) = 1$, $T(2) = 3$ e $T(3) = 6$, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

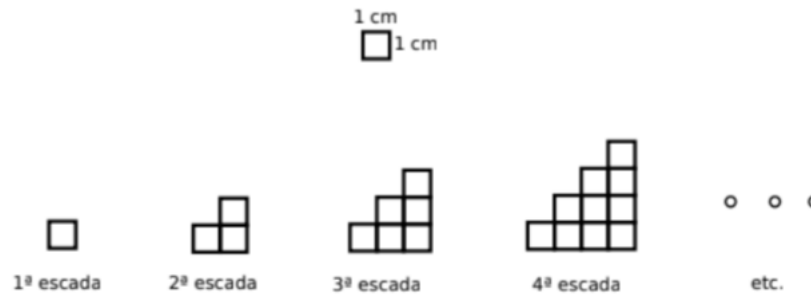
que tem como solução (única), $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 0$. Portanto,

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

□

Exemplo 4.11 (Banco de Questões OBMEP/2013). *Utilizando-se quadradinhos de 1cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:*

Figura 14 – Sequência de quadradinhos



FONTE: IMPA (2013)

a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.

b) Precisamos de uma escada de 78cm^2 de área. Qual escada devemos escolher?

Solução: a) Considere $Q(n)$ como sendo o número de quadradinhos que compõe a n -ésima escada. Assim, $Q(1) = 1$, $Q(2) = 3 = 1 + 2$, $Q(3) = 6 = 1 + 2 + 3$, $Q(4) = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$ e, de forma geral, $Q(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Logo, a sequência $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ coincide com a sequência dos números triangulares (conferir figura 13). Então, pelo exemplo 4.10,

$$Q(n) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Como a área de cada quadradinho é igual a 1cm^2 e o número de quadradinhos da quinta escada é $Q(5) = 15$, a área total da quinta escada construída será 15cm^2 .

Considere P_n como sendo o perímetro da n -ésima escada construída. Assim,

$$P_1 = 4 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$P_2 = 4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$$

$$P_3 = 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$P_4 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$$

$$\dots = \dots\dots\dots$$

$$P_n = 4 \times n = n + n + n + \dots + n.$$

Logo, $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$, onde $P(n) = 4n$. Portanto, o perímetro da quinta escada construída é $P(5) = 4 \times 5 = 20$.

b) Como a área de cada quadradinho é igual a 1cm^2 , a área correspondente a n -ésima escada é $Q(n)$ centímetros quadrados. Assim, nosso objetivo é encontrar n tal que $Q(n) = 78$, isto é,

$$\frac{n^2 + n}{2} = 78,$$

que resulta em $n^2 + n - 156 = 0$ e que tem como solução $n = 12$ ou $n = -13$. Portanto, devemos escolher a 12° escada. \square

Exemplo 4.12 (Exame nacional do PROFMAT-2019/2). *Considere duas progressões aritméticas*

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots) \text{ e } (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, \dots)$$

não constantes. Então, existe uma única função polinomial de grau 1, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(a_n) = b_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Sejam r_1 e r_2 as razões das progressões aritméticas $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)r_1; \\ b_n = b_1 + (n-1)r_2. \end{cases}$$

(Existência) Desde que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma PA não constante, temos $r_1 \neq 0$. Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{r_2}{r_1}x + \frac{r_1 b_1 - r_2 a_1}{r_1}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \frac{r_2}{r_1}[a_1 + (n-1)r_1] + \frac{r_1 b_1 - r_2 a_1}{r_1} \\ &= \frac{r_2}{r_1}a_1 + (n-1)r_2 + b_1 - \frac{r_2}{r_1}a_1 \\ &= b_1 + (n-1)r_2 \\ &= b_n. \end{aligned}$$

(Unicidade) Suponha, que exista uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \alpha x + \beta$ e $g(a_n) = b_n$. Mostraremos que $g = f$. De fato, desde que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não constante, podemos supor, sem perda de generalidades, que $a_1 \neq a_2$. Logo, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$. Portanto, como por *dois pontos distintos* “passa” uma única reta, concluímos que $g = f$. \square

4.5 Polinômios Interpoladores

Nessa seção, apresentaremos o método de Interpolação polinomial conhecido como interpolação de Lagrange. Este método é utilizado, em geral, quando desejamos uma aproximação para uma função $f(x)$ nos seguintes casos:

- a expressão analítica da função $f(x)$ é muito complicada e assim, deseja-se, com o objetivo de uma simplificação dos cálculos, aproximá-la por um polinômio, mesmo perdendo a “precisão” dos cálculos.
- não se conhece a expressão analítica da função $f(x)$, ou melhor, quando conhecemos a função $f(x)$ apenas em um conjunto finito de pontos, \bar{X} , e desejamos calcular o valor de $f(x)$ (aproximado) em um determinado ponto não pertencente ao conjunto \bar{X} . Um exemplo, que ocorre frequentemente na prática, é a manipulação dos dados colhidos em uma pesquisa (dados experimentais).

O teorema seguinte nos assegura que dados $n + 1$ pontos distintos existe um único polinômio (chamado polinômio interpolador) de grau no máximo n , que “satisfaz” esses pontos. Sua demonstração pode ser encontrada em Franco (2006).

Teorema 4.2. *Sejam (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n + 1$ pontos distintos, isto é, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Então, existe um único polinômio $P(x)$ de grau não maior que n , tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i .*

Observação 4.1. *Para a demonstração do teorema 4.2, supõe-se $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ um polinômio de grau no máximo n , com $n + 1$ coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n a serem determinados e satisfazendo $P(x_i) = y_i$, para todo i . Assim, o foco da demonstração é justificar, quando $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, que o sistema linear seguinte*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\ \dots &= \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= y_n \end{cases}$$

possui uma única solução a_0, a_1, \dots, a_n .

Exemplo 4.13.

- a) *Encontre o polinômio interpolador, $P(x)$, que aproxima a função $f(x)$ definida pelos pontos $(-3, -96)$, $(-2, -30)$, $(0, 6)$ e $(4, 30)$.*
- b) *Esboce o gráfico do polinômio $P(x)$ encontrado no item a).*

Solução:

a) Como a função $f(x)$ é definida por 4(quatro) pontos, o teorema 4.2 nos garante que o grau do polinômio (interpolador) que aproxima a função $f(x)$ é no máximo igual a 3(três). Assim,

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Desde que, o polinômio $P(x)$ deve satisfazer os 4(quatro) pontos fornecidos, seus coeficientes coincidem com a única solução do seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d = -96 \\ a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -30 \\ a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 6 \\ a(4)^3 + b(4)^2 + c(4) + d = 30 \end{cases} \quad (24)$$

A terceira equação do sistema (24) nos fornece $d = 6$. Assim, o sistema passa a ser:

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c = -102 \\ -8a + 4b - 2c = -36 \\ 64a + 16b + 4c = 24 \end{cases}$$

que tem como única solução $a = 2$, $b = -6$ e $c = -2$. Portanto, como $d = 6$, temos:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6.$$

b) Plotamos o gráfico de $P(x)$ [encontrado no item a)] com o auxílio do software livre Geogebra.

Veja:

Figura 15 – Gráfico da função $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$



FONTE: Autor 2020

□

A determinação do polinômio interpolador pela resolução do sistema linear correspondente é muito trabalhosa em algumas vezes. Além disso, podem ocorrer erros de aproximação do valor real, gerando imprecisão nos resultados obtidos. Por esse motivo, existem outros métodos para determinação do polinômio, dentre os quais destacamos a **Fórmula de Lagrange** do polinômio interpolador.

Definição 4.3 (Fórmula de Lagrange). *Sejam x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 1$ valores distintos. Considere, para cada $k = 0, 1, \dots, n$ os seguintes polinômios $p_k(x)$ de grau n :*

$$p_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \quad (25)$$

Observe que

$$p_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i, \\ 1 & \text{se } k = i. \end{cases}$$

Assim, para valores fornecidos $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, \dots , $y_n = f(x_n)$ o polinômio

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k p_k(x) \quad (26)$$

possui grau no máximo n e satisfaz: $P(x_k) = f(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$. A fórmula definida em (26) é denominada fórmula de Lagrange do polinômio interpolador. \square

No exemplo 4.13 encontramos o polinômio interpolador que aproxima a função definida pelos pontos $(-3, -96)$, $(-2, -30)$, $(0, 6)$ e $(4, 30)$, resolvendo o sistema linear associado. Em seguida vamos encontrar esse mesmo polinômio utilizando a fórmula de Lagrange.

Exemplo 4.14. *Utilizando a fórmula de Lagrange, encontre o polinômio interpolador que aproxima a função definida pelos pontos $(-3, -96)$, $(-2, -30)$, $(0, 6)$ e $(4, 30)$.*

Solução: Pela fórmula de Lagrange [equação (26)], o polinômio interpolador $P(x)$ é encontrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(x) &= (-96) \frac{(x+2)(x)(x-4)}{(-1)(-3)(-7)} + (-30) \frac{(x+3)(x)(x-4)}{(1)(-2)(-6)} + (6) \frac{(x+2)(x+3)(x-4)}{(2)(3)(-4)} \\ &+ (30) \frac{(x+2)(x)(x+3)}{(6)(4)(7)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(x) &= (96) \frac{x^3 - 2x^2 - 8x}{21} + (-30) \frac{x^3 - x^2 - 12x}{12} + (-6) \frac{x^3 + x^2 - 14x - 24}{24} \\ &+ (30) \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{168}. \end{aligned}$$

Portanto, manipulando as operações correspondentes, encontramos:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6.$$



Existem várias aplicações de suma importância para humanidade que são descritas por interpolações de dados coletados. Uma dessas é a utilização de interpolação em mapeamentos pluviiais. Segundo Alves e Vecchia (2011), o mapeamento e monitoramento de eventos pluviiais são de grande valia, pois podem prever fenômenos catastróficos, como inundações ou secas prolongadas, prejudicando, assim, à Agropecuária regional e a economia.

No exemplo seguinte apresentamos os dados mensais relacionados a Pluviosidade da cidade de Novo Planalto-Goiás, cidade sede deste trabalho. O valor correspondente de cada mês representa a média dos valores observados em 30 anos. Baseado nesses dados, podemos, utilizando a fórmula de Lagrange, encontrar um polinômio de grau não maior que 11, que descreve o comportamento pluvial desse município. Os dados foram obtidos no site ClimaTempo (2020).

Exemplo 4.15. *Os dados descritos na tabela 4, correspondem a Pluviosidade mensal (média) da cidade de Novo Planalto-Goiás, em 30 anos de observação. Encontre o polinômio interpolador que aproxima a função definida pela tabela.*

Tabela 4 – Pluviosidade mensal (média) de Novo Planalto no período de 30 anos de observação

Mês	Precipitação (<i>mm</i>)
Janeiro	295
Fevereiro	224
Março	238
Abril	104
Maio	25
Junho	4
Julho	2
Agosto	8
Setembro	44
Outubro	122
Novembro	204
Dezembro	276

Fonte: ClimaTempo (2020)

Solução: De posse dos dados fornecidos pela tabela 4, utilizaremos a interpolação de Lagrange, para obtermos o requerido polinômio interpolador $P(x)$, onde x é a variável tempo (em mês) e $P(x)$ é variável que representa a média pluvial no determinado mês x .

De acordo com a definição 4.3, necessitamos, inicialmente, calcular os polinômios $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, 11$, relacionados aos dados da tabela. Nesse caso específico, vamos considerar $x_0 = 1, x_1 = 2, \dots, x_{11} = 12$ representando os meses do ano e $y_0 = 295, y_1 = 224, \dots, y_{11} = 276$ representando os valores correspondentes aos meses fornecidos pela tabela. Assim:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^{11}(11!)} \\ &= -\frac{x^{11}}{39916800} + \frac{x^{10}}{518400} - \frac{x^9}{15120} + \frac{23x^8}{17280} - \frac{21101x^7}{1209600} + \frac{26971x^6}{172800} - \frac{352363x^5}{362880} \\ &\quad + \frac{108643x^4}{25920} - \frac{1855669x^3}{15120} + \frac{5209x^2}{225} - \frac{58301x}{2310} + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^{10} \cdot (10!)} \\ &= \frac{x^{11}}{3628800} - \frac{19x^{10}}{907200} + \frac{19x^9}{26880} - \frac{211x^8}{15120} + \frac{216061x^7}{1209600} - \frac{67027x^6}{43200} + \frac{45939x^5}{725760} \\ &\quad - \frac{3465269x^4}{90720} + \frac{31665443x^3}{302400} - \frac{2270987x^2}{12600} + \frac{72161x}{420} - 66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^9(2!)(9!)} \\ &= -\frac{x^{11}}{725760} + \frac{5x^{10}}{48384} - \frac{89x^9}{25920} + \frac{2683x^8}{40320} - \frac{201527x^7}{241920} + \frac{81157x^6}{11520} - \frac{14825779x^5}{362880} \\ &\quad + \frac{9759623x^4}{60480} - \frac{5461793x^3}{12960} + \frac{71822x^2}{105} - \frac{76781x}{126} + 220 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^8(3!)(8!)} \\ &= \frac{x^{11}}{241920} - \frac{37x^{10}}{120960} + \frac{269x^9}{26880} - \frac{7681x^8}{40320} + \frac{62791x^7}{26880} - \frac{37033x^6}{1920} + \frac{26325599x^5}{241920} \\ &\quad - \frac{50383877x^4}{120960} + \frac{4235597x^3}{4032} - \frac{5520439x^2}{3360} + \frac{79091x}{56} - 495 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_4(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^7(4!)(7!)} \\
&= -\frac{x^{11}}{120960} + \frac{73x^{10}}{120960} - \frac{7x^9}{360} + \frac{163x^8}{448} - \frac{176471x^7}{40320} + \frac{203789x^6}{5760} - \frac{11796193x^5}{60480} \\
&+ \frac{4405411x^4}{6048} - \frac{1289677x^3}{720} + \frac{287054x^2}{105} - \frac{80477x}{35} + 792
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_5(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^6(5!)(6!)} \\
&= \frac{x^{11}}{86400} - \frac{x^{10}}{1200} + \frac{457x^9}{17280} - \frac{701x^8}{1440} + \frac{165701x^7}{28800} - \frac{27389x^6}{600} + \frac{4265227x^5}{17280} \\
&- \frac{433963x^4}{480} + \frac{47131699x^3}{21600} - \frac{2946397x^2}{900} + \frac{81401x}{30} - 924
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^5(6!)(5!)} \\
&= -\frac{x^{11}}{86400} + \frac{71x^{10}}{86400} - \frac{37x^9}{1440} + \frac{149x^8}{320} - \frac{155951x^7}{28800} + \frac{1217221x^6}{28800} - \frac{1942859x^5}{8640} \\
&+ \frac{3503501x^4}{4320} - \frac{6946529x^3}{3600} + \frac{214408x^2}{75} - \frac{11723x}{5} + 792
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_7(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^4(7!)(4!)} \\
&= \frac{x^{11}}{120960} - \frac{x^{10}}{1728} + \frac{719x^9}{40320} - \frac{917x^8}{2880} + \frac{49039x^7}{13440} - \frac{26951x^6}{960} + \frac{17823623x^5}{120960} \\
&- \frac{4534369x^4}{8640} + \frac{12446459x^3}{10080} - \frac{434831x^2}{240} + \frac{20639x}{14} - 495
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_8(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-10)(x-11)(x-12)}{(-1)^3(8!)(3!)} \\
&= -\frac{x^{11}}{241920} + \frac{23x^{10}}{80640} - \frac{131x^9}{15120} + \frac{6151x^8}{40320} - \frac{139103x^7}{80640} + \frac{16777x^6}{1280} - \frac{8226277x^5}{120960} \\
&+ \frac{4833097x^4}{20160} - \frac{3380809x^3}{6048} + \frac{256411x^2}{315} - \frac{27647x}{42} + 220
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_9(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-11)(x-12)}{(-1)^2(9!)(2!)} \\
&= \frac{x^{11}}{725760} - \frac{17x^{10}}{181440} + \frac{97x^9}{34560} - \frac{295x^8}{6048} + \frac{131821x^7}{241920} - \frac{35381x^6}{8640} + \frac{15270191x^5}{725760} \\
&\quad - \frac{667103x^4}{9072} + \frac{1470529x^3}{8640} - \frac{620731x^2}{2520} + \frac{83249x}{420} - 66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{10}(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-12)}{(-1)^1(10!)(1)} \\
&= -\frac{x^{11}}{3628800} + \frac{67x^{10}}{3628800} - \frac{11x^9}{20160} + \frac{1133x^8}{120960} - \frac{125191x^7}{1209600} + \frac{133111x^6}{172800} - \frac{1424159x^5}{362880} \\
&\quad + \frac{2470633x^4}{181440} - \frac{4736149x^3}{151200} + \frac{71038x^2}{1575} - \frac{7591x}{210} + 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{11}(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)}{(-1)^0(11!)} \\
&= \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{10}}{604800} + \frac{x^9}{20736} - \frac{11x^8}{13440} + \frac{10831x^7}{1209600} - \frac{1903x^6}{28800} + \frac{242537x^5}{725760} \\
&\quad - \frac{139381x^4}{120960} + \frac{341747x^3}{129600} - \frac{190553x^2}{50400} + \frac{83711x}{27720} - 1
\end{aligned}$$

Assim, pela fórmula (26),

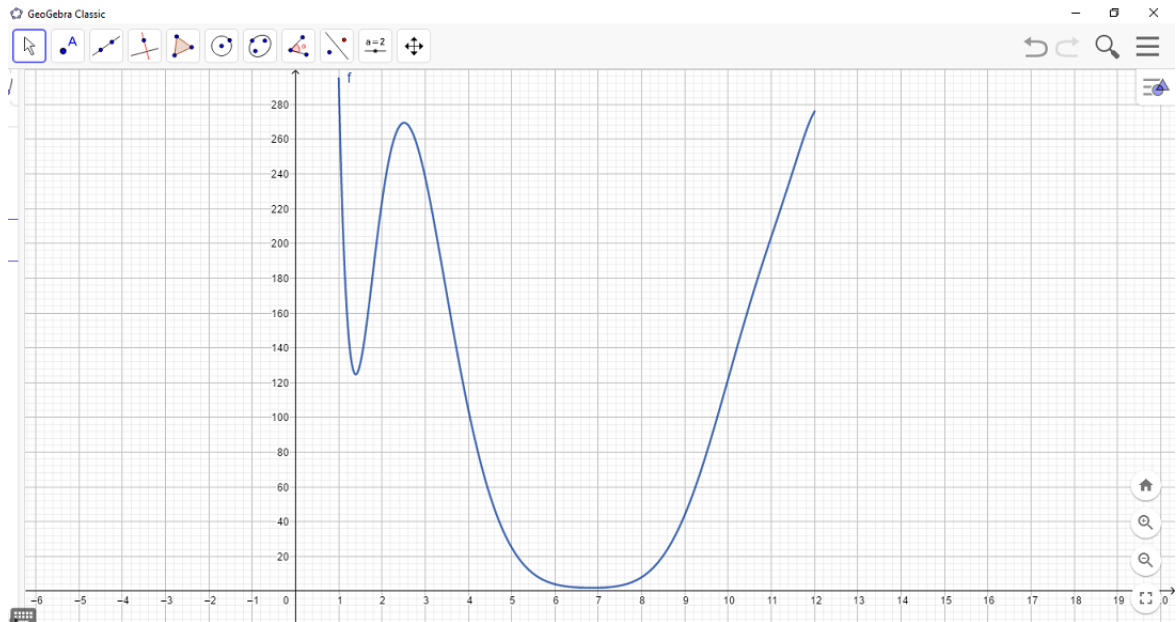
$$\begin{aligned}
P(x) &= (295) \cdot p_0(x) + (224) \cdot p_1(x) + (238) \cdot p_2(x) + (104) \cdot p_3(x) + (25) \cdot p_4(x) + (4) \cdot p_5(x) \\
&\quad + (2) \cdot p_6(x) + (8) \cdot p_7(x) + (44) \cdot p_8(x) + (122) \cdot p_9(x) + (204) \cdot p_{10}(x) + (276) \cdot p_{11}(x)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{193x^{11}}{7983360} + \frac{107x^{10}}{57600} - \frac{23029x^9}{362880} + \frac{51253x^8}{40320} - \frac{1335763x^7}{80640} + \frac{8472571x^6}{57600} \\
&\quad - \frac{82043051x^5}{90720} + \frac{11004763x^4}{2880} - \frac{97448123x^3}{9072} + \frac{78871949x^2}{4200} - \frac{124427327x}{6930} + 7164
\end{aligned}$$

Em seguida, com o auxílio do software livre Geogebra, plotando o gráfico do polinômio $P(x)$.

Figura 16 – Gráfico de pluviosidade do município de Novo Planalto-GO



FONTE: Autor (2020)

Observação 4.2. *A partir da observação da figura podemos obter informações de grande importância, como por exemplo, o melhor momento de preparação de solo e plantio de sementes. Nesse sentido, o estudo de interpolação polinomial se mostra de grande relevância, tanto no ensino-aprendizagem da escola como também na vida econômica do país.*

4.6 Ajuste Polinomial

Considere uma função (tabela) $f(x)$, ou seja, conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, contendo $n + 1$ pontos distintos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Na seção anterior, vimos que a interpolação polinomial nos fornece um único polinômio $P(x)$, de grau não maior que n , tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i .

Já o ajuste polinomial consiste em encontrar $m + 1$ coeficientes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ de tal forma que o polinômio de grau m , o grau do polinômio P_m fica a cargo de livre escolha.

$$P_m(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m$$

se aproxima da função tabela $f(x)$ (não necessariamente satisfazendo os pontos da função tabela $f(x)$). Nesse caso, os coeficientes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ são escolhidos de tal forma que os desvios (ou

erros), $d_i = y_i - P_1(x_i)$ sejam mínimo para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Para tanto, consideramos

$$\begin{aligned} D(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) &= \sum_{i=1}^m d_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^m [y_i - P_1(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m [y_i - \beta_0 - \beta_1 x - \beta_1 x^2 - \dots - \beta_m x^m]^2. \end{aligned}$$

E o objetivo é encontrar os β'_i s tal que $D(\cdot)$ seja mínimo. Esse processo de minimização é chamado de Método dos mínimos quadrados. Os β'_i s que minimizam $D(\cdot)$ são soluções do seguinte sistema de equações (conferir Franco (2006)).

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+2} & \sum x_i^{m+3} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i \\ \sum y_i \cdot x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i \cdot x_i^m \end{bmatrix} \quad (27)$$

Nesse caso, dizemos que o Polinômio $P_m(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m$ é o polinômio de grau m que melhor se ajusta aos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, no sentido de ajuste polinomial.

Exemplo 4.16. Considere os pontos $A(1, 7), B(2, 1), C(3, 8), D(4, 5), E(5, 3)$. Encontre o polinômio de segundo grau que melhor se ajusta aos pontos dados no sentido de ajuste polinomial.

Solução: Desde que o polinômio procurado, $P_2(x)$, possui grau 2, temos:

$$P_2(x) = \beta_2 \cdot x^2 + \beta_1 \cdot x + \beta_0.$$

Assim, por (27), os coeficientes β_0, β_1 e β_2 é a solução do seguinte sistema de equações.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i \\ \sum y_i \cdot x_i^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Para os pontos fornecidos, os elementos que compõe o sistema (28), são dados por:

- $\sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

- $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
- $\sum_{i=1}^5 x_i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$
- $\sum_{i=1}^5 x_i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$
- $\sum_{i=1}^5 y_i = 7 + 1 + 8 + 5 + 3 = 24$
- $\sum_{i=1}^5 y_i \cdot x_i = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 68$
- $\sum_{i=1}^5 y_i \cdot x_i^2 = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 8 \cdot 9 + 5 \cdot 16 + 3 \cdot 25 = 238$

Logo, o sistema (28) passa a ser:

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 68 \\ 238 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, ambos os lados da igualdade acima, pelo inverso da primeira matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & \frac{-33}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{-33}{10} & \frac{187}{70} & \frac{-3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 68 \\ 238 \end{bmatrix}$$

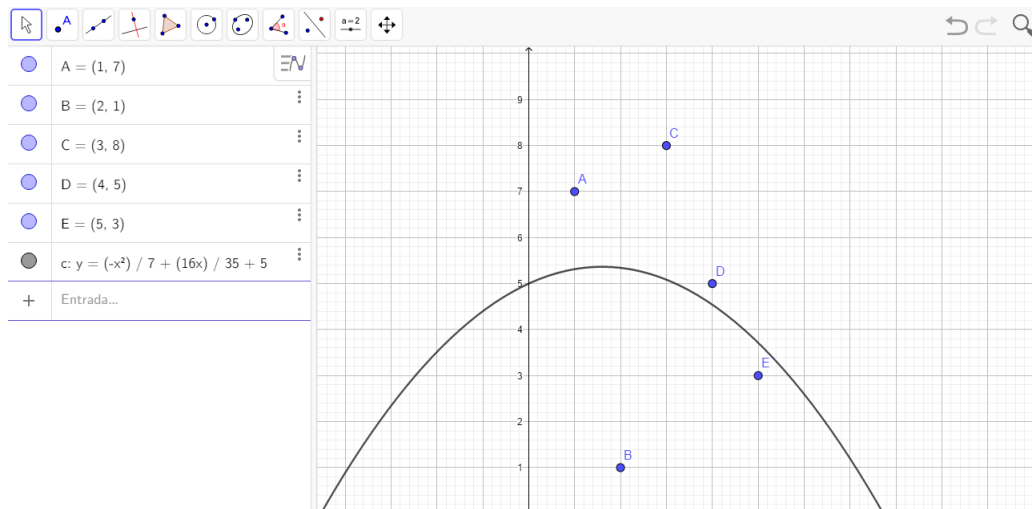
Logo, encontramos os seguintes coeficientes,

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{16}{35} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio encontrado é $P_2(x) = -\frac{x^2}{7} + \frac{16x}{35} + 5$.

Por fim, com o auxílio do Geogebra, plotamos o gráfico do polinômio $P_2(x)$ encontrado e os pontos fornecidos.

Figura 17 – Resolução do Exemplo 4.16



FONTE: Autor

Exemplo 4.17. A soja é um produto agrícola muito procurado para exportação, sendo o Brasil um dos maiores produtores mundial desse insumo. O Estado do Tocantins possui grandes lavouras de soja, tendo assim uma grande produção anual, onde podemos observar nos seguintes dados do IBGE (2018):

Tabela 5 – Produção Anual de Soja no Estado do Tocantins 2014-2018

Ano	Produção (t)
2014	2.094.100
2015	2.418.367
2016	1.922.508
2017	2.410.207
2018	2.667.936

Fonte: IBGE (2018)

Utilizando os dados apresentados na tabela acima, encontre um polinômio de grau 1, que melhor se aproxima dos dados fornecidos, utilizando ajuste polinomial.

Solução: Sendo proposto um polinômio de grau 1, temos:

$$P_1(x) = \beta_1 \cdot x + \beta_0$$

Deste modo, por (27) pode-se encontrar os coeficientes pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i \end{bmatrix} \quad (29)$$

Com o objetivo de simplificação dos cálculos, vamos considerar $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_5 = 5$ em vez de $x_1 = 2014, x_2 = 2015, \dots, x_5 = 2018$. Assim, os elementos que compõe o sistema (29) são calculados da seguinte forma:

- $\sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
- $\sum_{i=1}^5 y_i = 2.094.100 + 2.418.367 + 1.922.508 + 2.410.207 + 2.667.936 = 11.513.118$
- $\sum_{i=1}^5 y_i \cdot x_i = 2.094.100 + 4.836.734 + 5.767.524 + 9.640.828 + 13.339.680 = 35.678.866$

Logo, o sistema acima se torna:

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.513.118 \\ 35.678.866 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, a esquerda, ambos os lados da equação acima, pela matriz inversa da matriz coeficiente obtemos:

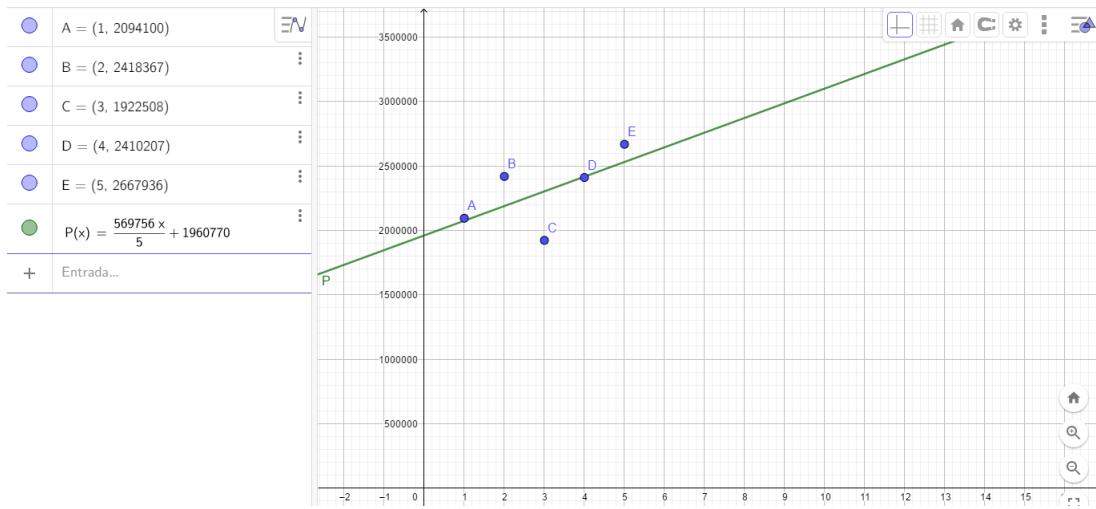
$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1960770 \\ \frac{569756}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio procurado é:

$$P_1(x) = \frac{569756x}{5} + 1960770.$$

A seguir podemos observar o comportamento do polinômio $P_1(x)$ no plano cartesiano.

Figura 18 – Gráfico do Exemplo 4.17



FONTE: Autor 2020



5 PROPOSTA METODOLÓGICA

O conteúdo relacionado a Polinômios está inserido na 3^a Série do Ensino Médio, mais precisamente, no 4^a corte temporal, da Rede Estadual de Educação do estado de Goiás. Este fato, colabora para que este conteúdo seja desfavorecido em relação aos demais. Uma vez que resta pouco tempo ou, às vezes, tempo nenhum, para ser abordado pelos professores. O que torna-se um problema pelo fato dos alunos estarem no final de um ciclo muito importante, que envolve a preparação para vestibulares. Assim, o período destinado a esse importante tópico acaba sendo encurtado, contribuindo para que, várias propriedades e aplicabilidades deixem de ser apresentadas em sala. Com isso, o aluno deixa de assimilar competências que são essenciais, por exemplo, durante todo o Ensino Médio é estudado, através de várias metodologias, as propriedades das equações polinomiais de 2^o grau, no entanto, o estudo das equações polinomiais de grau superior a 2 não é abordado. Nesse sentido, não é apresentando ao aluno, por exemplo, a relação entre o cálculo do volume de sólidos da geometria espacial com as equações de 3^o grau.

Por ser professor efetivo do Estado de Goiás há alguns anos relato que devido ao grande volume de conteúdos programados para serem ministrados, além da busca por resultados quantitativos rápidos, que a aprendizagem do aluno não é alcançada na sua totalidade, ocasionando lacunas em seu conhecimento. Segundo os PCNS (2000) é de suma importância rever e redimensionar, periodicamente, os conteúdos de matemática que estão sendo ensinados tradicionalmente. É necessário ressaltar que não basta rever apenas a forma ou metodologia veiculada ao ensino, se o conhecimento estiver restringido apenas à informação de dentro da sala de aula.

“Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade.”(PCNS, 2000, p 43)

Baseados nessas observações, escolhemos o conteúdo de polinômios como tema deste trabalho e com intuito de desenvolvermos uma metodologia de ensino-aprendizagem, conteúdo que, em geral, é alocado para ser apresentado no 4^a corte temporal da 3^a Série do Ensino Médio. Como abordado anteriormente esta postura pedagógica pode ocasionar perdas no desenvolvimento intelectual do aluno, podendo refletir em sua Graduação, pois a maioria dos cursos que

envolvem ciências exatas possuem uma grade curricular que necessita do conteúdo de polinômios como, por exemplo, a disciplina de cálculo diferencial e integral, bem como todas disciplinas derivadas. Um dos reflexos da má formação dos alunos, do Ensino Básico, é a grande evasão nos Cursos de Graduação das Universidade Federais. Segundo a revista SESU/MEC (2019) o Curso de Graduação que possui a maior evasão nacional é o de Matemática com 61,7% de desistência, a sexta e a sétima posições são ocupadas por computação e física, respectivamente.

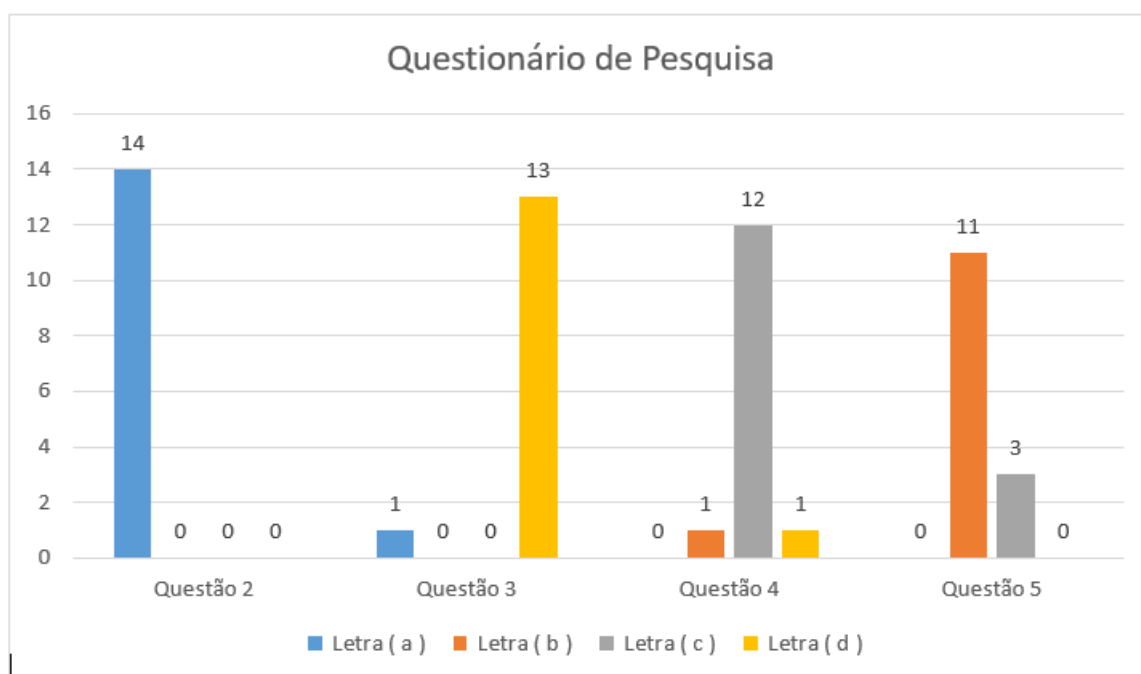
Daí a relevância de estudos que priorizem os “contextos escolares”. Por isso para o desenvolvimento da Metodologia estabelecemos, como campo de pesquisa, o Colégio Estadual Ana Maria Torres, onde exerço a docência deste o ano de 2019. Recorremos à 3^a Série do Ensino Médio (turno matutino) sendo o público alvo, onde o conteúdo de polinômios é destinado para ser ministrado. Além disso é necessário considerar, também, o amadurecimento dos alunos, bem como, o desenvolvimento do raciocínio e dos pensamentos algébricos e abstratos. Para observarmos o desenvolvimento do pensamento algébrico e abstrato do aluno escolhemos o tópico “Fórmula de Lagrange para os Polinômios Interpoladores” (conf. seção 4.5) como sendo o conteúdo a ser abordado na Metodologia de Ensino. Observa-se que para um bom entendimento desse tópico necessitamos de conhecimentos prévios de certas propriedades de polinômios, como por exemplo, as operações básicas de adição, multiplicação e divisão de polinômios.

Desenvolvemos a metodologia em 5(cinco) momentos (aulas), aplicando-a no 4^a corte temporal de 2019 para uma turma da 3^a Série do Ensino Médio, que possui 17 alunos frequentes.

Na **primeira aula**, com 14 alunos presentes, aplicamos um questionário contendo 8(oito) questões (apêndice A), de forma individualizada. Neste questionário buscamos identificar os conhecimentos prévios em relação ao conteúdo “Polinômios”, além de outras informações úteis a pesquisa. Na primeira questão do questionário todos os 14 alunos presentes responderam que já estudaram funções polinomiais do 1^o e do 2^o grau. Esse fato pôde ser comprovado com as respostas correspondentes à segunda e à terceira questão. Pela segunda questão, dentre os 14 alunos presentes, todos conseguem identificar uma equação do 1^o grau e pela terceira questão, dentre os alunos presentes, apenas 1 (um) não conseguiu identificar uma equação do 2^o grau. Na quarta questão percebemos que a grande maioria dos alunos, 12(doze) em 14 (quatorze), possuem conhecimentos/habilidades relacionados ao cálculo de raízes de uma equação do 1^o grau. Na quinta questão identificamos que 11(onze) alunos tiveram êxito na busca de raízes de um polinômio do 2^o grau e que os 3(três) alunos restantes encontraram raízes semelhantes (a menos de sinal). A figura a seguir, representa a resposta dos alunos da segunda a quinta questão

do questionário, onde observamos que, em geral, possuem domínio na resolução das equações polinomiais de primeiro e segundo grau.

Figura 19 – Questionário aplicado aos alunos - Questões 2 a 5

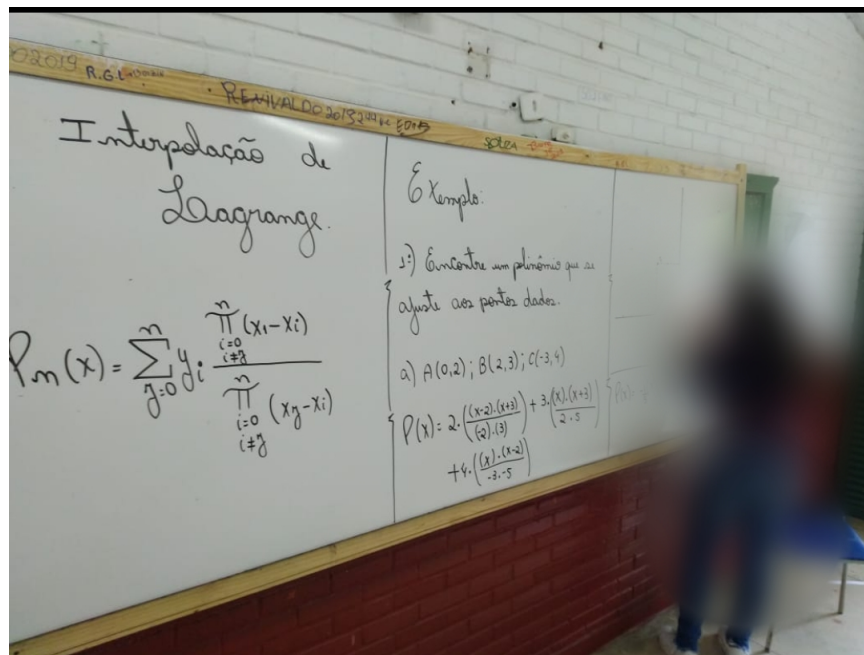


FONTE: Autor (2019)

As questões 6 e 7 do questionário são perguntas relacionadas à infraestrutura do Colégio Ana Maria Torres que deu suporte a pesquisa, bem como sobre o uso de tecnologias no ensino de matemática. Na questão 6, infelizmente, todos os alunos responderam que o Colégio não possui laboratório de informática, informação confirmada pela gestão da escolar. Na questão 7 é questionado se o professor de Matemática, em algum momento, já fez uso de algum software educacional no ensino dos conteúdos. A resposta, por unanimidade, foi não. Por fim, a questão 8 verifica se os alunos possuem afinidades com a fatoração/produto de alguns polinômios. O resultado foi que apenas 1(um) aluno não identificou a alternativa correta.

Na **segunda aula**, com 100% de presença (17 alunos) e de posse do diagnóstico da turma (questionário - aula 1), apresentamos ao aluno, em forma de aula expositiva, a Fórmula de Lagrange para os Polinômios Interpoladores (conferir seção 4.5), isto é, apresentamos os Polinômios Interpoladores de Lagrange. Nessa aula, abordou-se conceitos teóricos e exemplos, o que contribuiu com a participação dos alunos que interagiram na construção da fórmula, inclusive, desenvolvendo atividades no quadro, conforme figura 20.

Figura 20 – Aula sobre Polinômios Interpoladores de Lagrange



FONTE: Autor (2019)

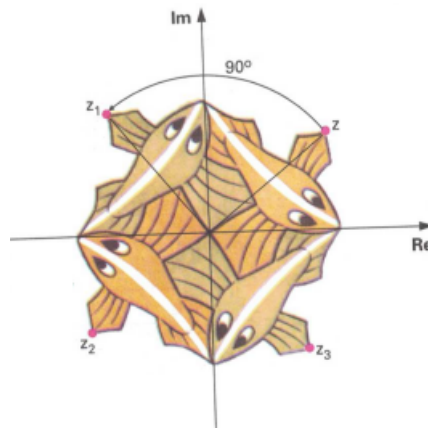
A aula teve uma boa aceitação por se tratar de uma interessante aplicação do conteúdo de polinômios. Dentre os questionamentos feitos pelos alunos destacamos: **a)** “Professor, dado qualquer conjunto de pontos, podemos encontrar um polinômio que passa por eles?”; **b)** “Professor, onde esse conteúdo pode ser aplicado na vida real?” Respondemos o questionamento a), dizendo que a “fórmula de Lagrange”, que será apresentada posteriormente, nos responde positivamente essa pergunta. Quanto ao questionamento b), comentamos a respeito de diversos exemplos que estão descritos no capítulo 4. No decorrer da aula apresentamos a fórmula de Lagrange (Definição 4.3), sendo a mesma o foco principal. O roteiro da aula encontra-se no Apêndice B.

Na **terceira aula**, propomos uma interessante atividade:

“Construção de imagens simétricas através de polinômios interpoladores”.

A motivação para essa atividade surgiu a partir de uma consulta em Smole (2010), onde o autor faz referência às pinturas do artista gráfico holandês Maurits C. Escher. Smole (2010) explica que a rotação de imagens foi um dos recursos utilizados pelo artista. Para tanto, esboçava-se uma parte da figura no primeiro quadrante de um plano cartesiano e o restante da figura era composto por rotações de 90° (noventa graus) em torno dos eixos, conforme figura 21.

Figura 21 – Obra do Artista Maurits C. Esher



FONTE: Smole (2010)

Para Smole (2010), o artista rotacionava a figura de acordo a seguinte propriedade dos números complexos.

Proposição 5.1 (Números complexos e Simetria). *Considere os números complexos*

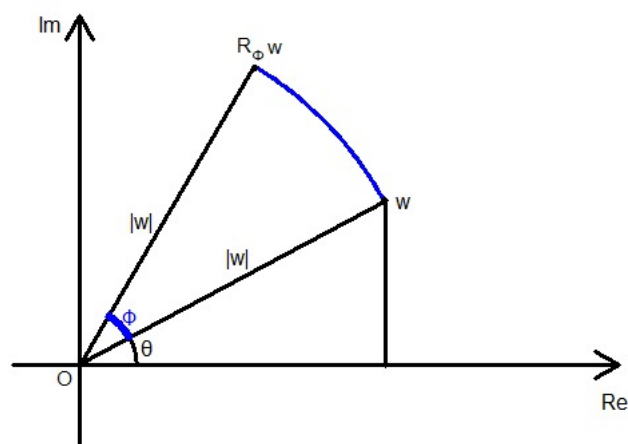
$$w = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ e } R_\phi = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi,$$

de módulos $|w|$ e 1, respectivamente. Então, o produto de R_ϕ com w , $R_\phi \cdot w$, possui argumento como sendo a soma dos argumentos de w e R_ϕ e módulo igual o módulo de w , isto é,

$$R_\phi \cdot w = |w|(\cos (\theta + \phi) + i \operatorname{sen} (\theta + \phi)).$$

Além disso, no plano complexo, esse produto corresponde a uma rotação do ponto w por um ângulo ϕ em torno da origem, conforme figura abaixo:

Figura 22 – Ilustração da Proposição 5.1



FONTE: Autor (2019)

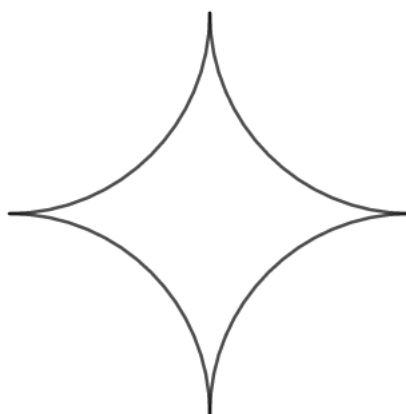


Neste sentido fomos motivados a propor a construção de imagens simétricas com o auxílio de polinômios interpoladores. Segue a proposta.

PROPOSTA

Objetivo: Apresentar uma construção geométrica simétrica que resulte na figura 23 abaixo, tendo como instrumento de construção os polinômios interpoladores de Lagrange.

Figura 23 – Figura Proposta



FONTE: Autor (2019)

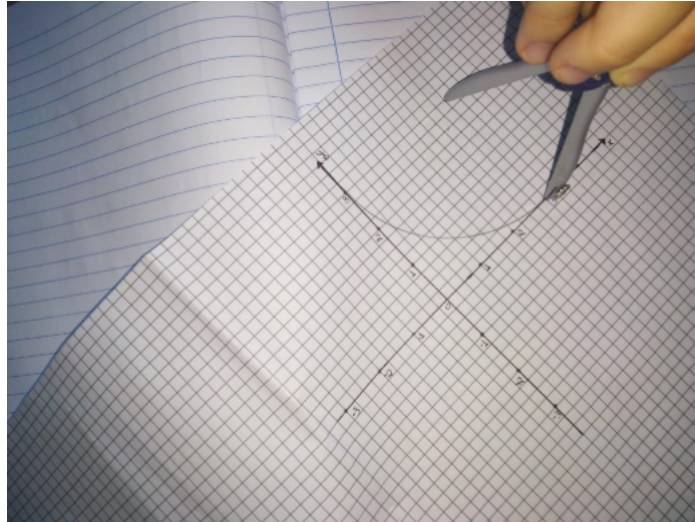
Passos para alcançar o objetivo

Passo 1: Organização do material e equipamentos a serem utilizados:

- Uma folha de papel quadriculado;
- Compasso;
- Régua graduada;
- Notebook;
- Datashow;
- Software Geogebra.

Passo 2: Utilizando um papel quadriculado como plano cartesiano, representamos os eixos Ox e Oy e com o compasso centrado no ponto $O(3,3)$ ligamos os pontos $A(0,3)$ e $B(3,0)$, construindo, assim, um arco de extremos A e B .

Figura 24 – Papel quadriculado



FONTE: Autor (2019)

Passo 3: Considere uma régua graduada. Com a régua paralela ao eixo Oy e passando, no eixo Ox , pelos pontos 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 e 2.5, encontra-se os seguintes pontos de interseção com o arco construído no passo 2:

$$C(0.5; 1.34), D(1.0; 0.76), E(1.5; 0.4), F(2.0; 0.17) \text{ e } G(2.5; 0.04).$$

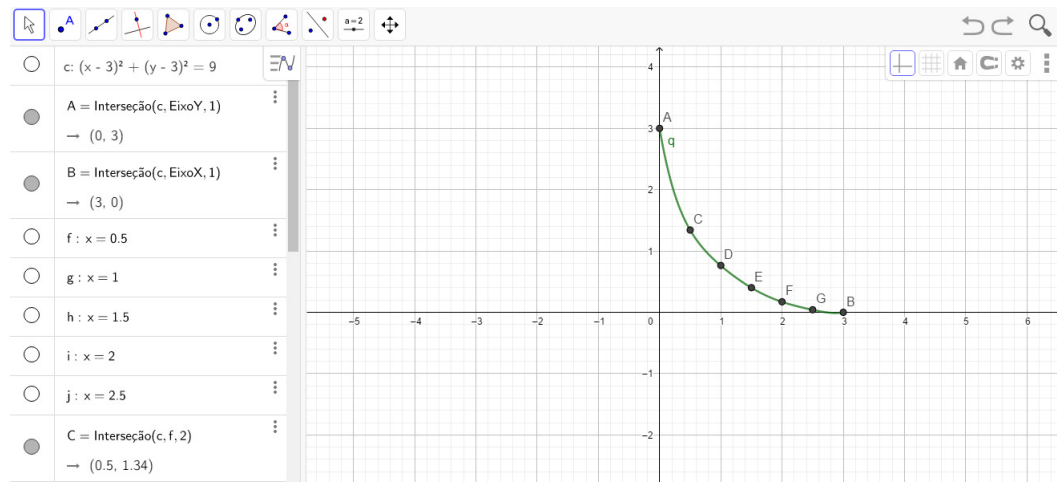
Obs: Os pontos da abscissa foram pré-determinados.

Passo 4: De posse dos pontos encontrados nos passos anteriores (A, B, C, D, E, F e G) e da fórmula (26) [polinômio de Lagrange], encontramos, com o auxílio do software Geogebra, o polinômio de grau 6, cujo gráfico passa pelos pontos A, B, \dots, G .

$$P(x) = \frac{67}{1125}x^6 - \frac{159}{250}x^5 + \frac{2453}{900}x^4 - \frac{3611}{600}x^3 + \frac{33727}{4500}x^2 - \frac{17597}{3000}x + 3.$$

Além disso, o software Geogebra nos fornece o seguinte gráfico no intervalo $[0, 3]$.

Figura 25 – Construção de imagem simétrica



FONTE: Autor (2019)

Passo 5: Inicialmente revisar as propriedades de reflexão de gráfico de funções em torno dos eixos Ox e Oy . Após, construir os seguintes polinômios:

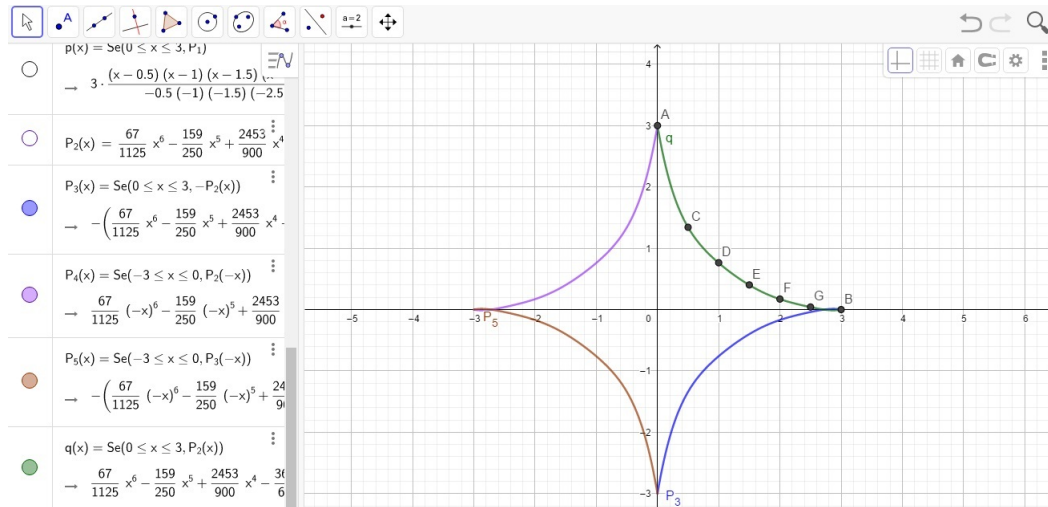
- $P_1(x) = -P(x)$; $x \in [0, 3]$ - O gráfico desse polinômio é a reflexão do gráfico de $P(x)$ em torno do eixo Ox ;
- $P_2(x) = P(-x)$; $x \in [-3, 0]$ - O gráfico desse polinômio é a reflexão do gráfico de $P(x)$ em torno do eixo Oy ;
- $P_3(x) = -P(-x)$; $x \in [-3, 0]$ - O gráfico desse polinômio é a reflexão do gráfico de $P_2(x)$ em torno do eixo Ox .

Em seguida, com o auxílio do software Geogebra, plotar o gráfico das funções

$$P(x); x \in [0, 3], \quad P_1(x); x \in [0, 3], \quad P_2(x); x \in [-3, 0] \quad \text{e} \quad P_3(x); x \in [-3, 0]$$

no mesmo plano cartesiano, gerando, assim, a figura geométrica desejada, conforme figura 26 abaixo.

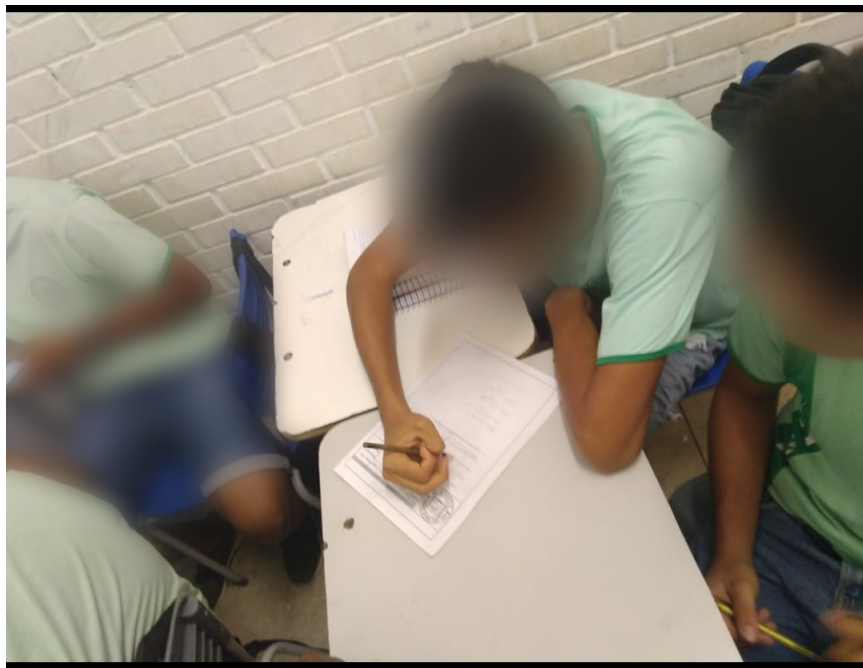
Figura 26 – Imagem simétrica



FONTE: Autor (2019)

Na **quarta aula**, com 16 (dezesesseis) alunos presentes, propomos uma atividade relacionada à polinômios interpoladores de Lagrange, para ser desenvolvida em duplas (Conferir anexo C). Nessa atividade, contendo apenas uma questão, a dupla de alunos, de posse da fórmula (26) [Polinômio de Lagrange], teve o objetivo de encontrar o polinômio de Lagrange que aproxima a função definida por quatro pontos pré-fixados A, B, C e D . Os alunos só puderam utilizar lápis, borracha e calculadora para desenvolverem esta atividade, que foi entregue ao final da aula.

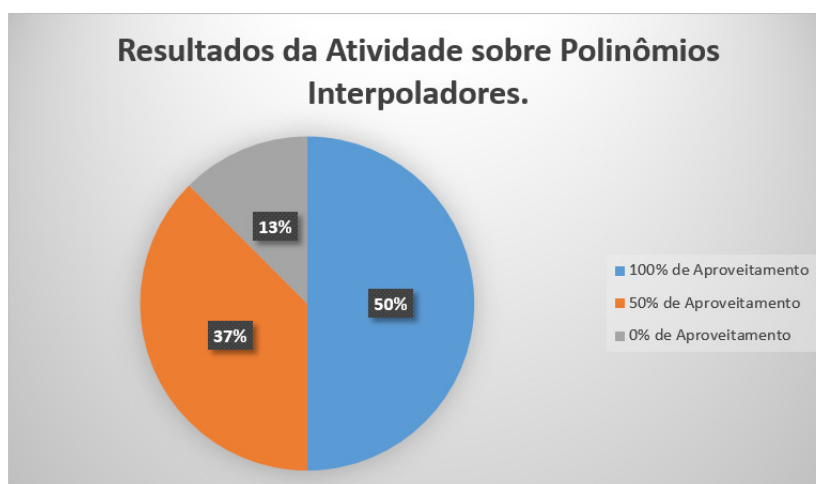
Figura 27 – Resolução da atividade proposta



FONTE: Autor (2019)

Das 8 (oito) duplas, 4 (quatro) conseguiram encontrar o polinômio corretamente; 3(três) cometeram erros de cálculos e, assim, encontraram polinômios que não coincidiam com o polinômio desejado e 1(uma) não conseguiu desenvolver a atividade com resultados significantes. Abaixo segue o gráfico que representa o desempenho das duplas na atividade.

Figura 28 – Desempenho relativos à atividade proposta

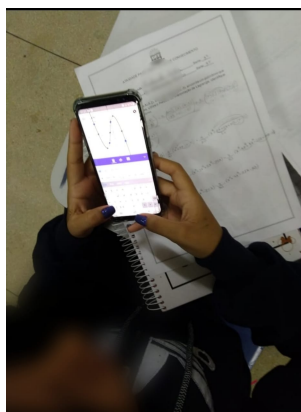


FONTE: Autor (2019)

Iniciamos a **quinta aula** entregando, para cada dupla, a atividade corrigida. Assim, todas elas tiveram ciência de seu desempenho e estavam de posse do polinômio que deveriam ter encontrado como resultado final da atividade. Mantidas as duplas formadas para a quarta aula, propomos uma nova atividade: Plotar o gráfico do polinômio interpolador com o auxílio do software livre Geogebra.

Antes de iniciar houve a necessidade apenas de verificar se pelo menos 1(um) aluno de cada dupla possuía o aplicativo Geogebra, disponível em seu celular.

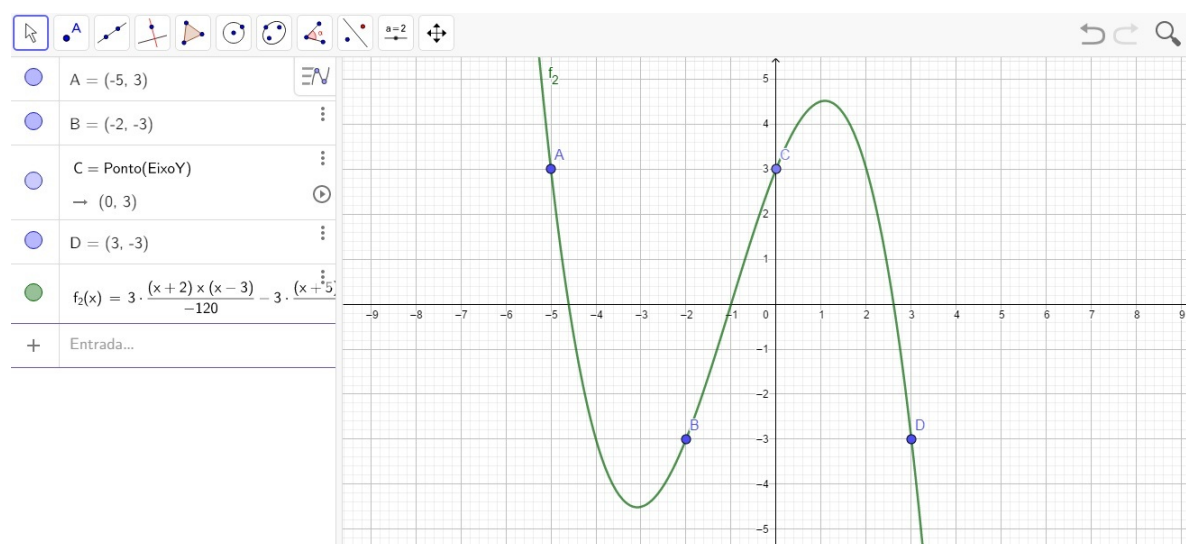
Figura 29 – Aplicativo Geogebra



FONTE: Autor (2019)

E seguida, a partir da utilização do recurso Datashow, foram repassadas as instruções complementares à respeito do funcionamento das funções que seriam fundamentais para a plotagem do gráfico. Assim, de forma interativa, fomos sanando as dúvidas de cada dupla, o que culminou no sucesso na plotagem do gráfico (Figura 30).

Figura 30 – Gráfico da Atividade Proposta



FONTE: Autor (2019)

A partir dessa estrutura metodológica observamos a importância do conteúdo, caso seja possível, ser abordado de forma algébrica e com o auxílio de ferramentas tecnológicas. Com este recurso é possível haver a visualização de cada situação (plotagem dos gráficos dos polinômios passando pelos pontos pré-definidos) e a construção dos polinômios com base na fórmula de Lagrange (26). Neste sentido, observamos um maior envolvimento/interesse do público alvo.

6 CONCLUSÃO

Diante do atual cenário que perpassa o ensino da matemática no Ensino Médio pode-se dizer que este trabalho pôde contribuir para a elaboração de material didático voltado para o ensino de polinômios na 3^a Série. Assim, é possível notar que aplicando metodologias diferenciadas, mesmo envolvendo conteúdos mais complexos, nesse caso os polinômios interpoladores, os alunos podem alcançar resultados satisfatórios no processo de aprendizagem. Isso foi concretizado através de atividades simplificadas, mas capazes de promover uma boa assimilação do conteúdo por parte dos alunos.

Com isso, no decorrer das aulas propostas, foi possível notar que o público alvo saiu do estado de letargia para uma posição ativa e participativa. Isso pode ser notado na cooperação que apresentaram, participando das aulas, como por exemplo, respondendo o questionário, indagando sobre o conteúdo abordado e respondendo as atividades propostas. Neste sentido, concluímos que o objetivo almejado, pelo estudo foi alcançado com sucesso.

O que nos remete ao fato de que este trabalho buscou trazer um material conciso e de fácil entendimento, para que, assim, os professores do Ensino Básico possam utilizá-lo como ferramenta de suporte para suas aulas, podendo, ainda, aprofundar seus conhecimentos acerca do conteúdo de polinômios.

Dessa forma, pode-se notar a grande relevância dos polinômios na construção do conhecimento matemático. Para tanto apresentamos aplicações diversificadas que podem ser estendidas para futuras pesquisas nessa área, pois não podemos deixar de apontar a necessidade e urgência de pesquisas envolvendo novos métodos de ensino, uma vez que é através da inovação que o conhecimento evolui nas mais variadas esferas sociais.

REFERÊNCIAS

- ALVES, E. D. L.; VECCHIA, F. A. S. **Análise de diferentes métodos de interpolação para a precipitação pluvial no Estado de Goiás**. *Acta Scientiarum. Human and Social Sciences*, v. 33, p. 193–197, 2011.
- AMES, L. F. d. A. **Interpolação e Aproximação de funções por polinômios**. Maringá: Profmat, 2018.
- BONJORNO, J. R. **Física: Mecânica, Vol.1**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: USP, 1974.
- CLIMATEMPO. **Climatologia-Novo Planalto-GO**. 2020. Disponível em: <<https://www.climatempo.com.br/climatologia/4980/novoplanalto-go>>. Acesso em: 04 Abril. 2020.
- CRIACIONISMO. **Segredo das formas do favo de mel é revelado**. 2015. Disponível em: <<http://www.criacionismo.com.br/2015/09/segredo-das-formas-do-favo-de-mel-e.html>>. Acesso em: 22 Março 2020.
- DANIEL, D. **Modelagem por Polinômios no Ensino Médio**. Campinas: Profmat, 2016.
- DEFENDI, M. L.; OLIVEIRA, M. B. **Teorema Fundamental da Álgebra**. Campinas-SP: Unicamp, 2016.
- ESCOLA, B. **Plano de Argand-Gauss**. 2012. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/plano-argand-gauss.htm>>. Acesso em: 22 Jan. 2020.
- FLORES, S. G.; OSUNA, O. **Existence of periodic solutions for seasonal epidemic models with quarantine**. *Revista Integración*, v. 36, p. 37–47, 2018.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Person, 2006.
- GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GOMES, L. S. **Funções Polinomiais no ensino básico: Onde vou usar isso na vida professor?** Niterói: Profmat, 2020.
- GUIMARÃES, C. d. S. **Matemática em nível IME/ITA**. 1. ed. São José dos Campos: Vestseller, 2008.
- IBGE. **Produção Agrícola - Lavoura Temporária**. 2018. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/to/pesquisa/14/10193>>. Acesso em: 22 Maio 2020.
- IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 6**. São Paulo: Atual, 1977.
- IMPA. **Banco de Questões OBMEP**. 2013. Disponível em: <<https://www.obmep.org.br/banco.htm>>. Acesso em: 04 janeiro. 2020.
- LIMA, E. L. **A matemática do Ensino Médio. Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

LOPES, A. S. **Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica**. Manaus: Profmat, 2018.

MARCET, A. P. **Códigos Corretores de Erros BCH: uma aplicação de polinômios em Corpos Finitos**. São Gonçalo: Profmat, 2019.

MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. 2000. Disponível em: <file:///C:/Users/paulo_sl4pp6d/Desktop/Dissertaç~ao/PCNs\%20ensino\%20médio.pdf>. Acesso em: 16 Maio. 2020.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORGADO, A. C. d. O. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MUNIZ, A. C. N. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios. Vol. 6**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

NOBRE, J. F. F. N. **Progressões Aritméticas: Abordando as ordens superiores**. Palmas: Profmat, 2018.

PCNS, M. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

POSAMENTIER, A. S. **a arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática**. Porto Alegre: AMGH, 2014.

SESU/MEC. **Cursos com maior evasão universitária**. 2019. Disponível em: <<https://www.poder360.com.br/governo/universidades-federais-tem-evasao-de-15-em-2018/>>. Acesso em: 04 janeiro. 2020.

SMOLE, K. C. S. **Matemática: ensino médio: vol.3**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO



Questionário de Pesquisa

1- Você já estudou função polinomial de grau 1 e 2? Marque a alternativa que condiz com sua opinião.

sim ()

não ()

2- Marque a alternativa que represente uma função polinomial de grau 1.

a) $f(x) = 5x - 1$

c) $h(x) = 3 \cdot \ln(x)$

b) $g(x) = \text{sen}(x) + 2$

d) $k(x) = 7^x + 4$

3- Marque a alternativa que represente uma equação polinomial de grau 2?

a) $f(x) = 3^{2x} + 4$

c) $h(x) = \log_3 5x$

b) $g(x) = \text{sen}x + \text{cos}x$

d) $k(x) = -2x^2 + 6x$

4- Qual das alternativas abaixo representa a raiz da equação $7x - 14 = 0$?

a) 4

c) 2

b) 3

d) 1

5- Qual das alternativas abaixo representa as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$?

a) 1 e -1

c) -2 e -3

b) 2 e 3

d) 1 e 5

6- A escola em que você estuda possui laboratório de informática?

sim ()

não ()

7- Seu(s) professor(es) de matemática já utilizaram algum software educacional para abordar os conteúdos ministrados em sala de aula?

sim ()

não ()

8- Considere o polinômio $P(x) = 10x^2 - 15x$. Identifique a alternativa que represente uma fatoração de $P(x)$

a) $P(x) = x(5x - 3)$

b) $P(x) = 5x(2x - 3)$

a) $P(x) = 5(4x - 7)$

APÊNDICE B – PLANO DE AULA- SEGUNDA AULA DA PROPOSTA

PLANO DE AULA

Eixo Temático	Números e Operações
Conteúdo	Polinômios
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar os polinômios interpoladores de Lagrange; • Efetuar operações com polinômios.
Metodologia	<p>A aula consiste na apresentação dos polinômios interpoladores de Lagrange, sendo discutido a importância do estudo de polinômios, apresentando a parte teórica desses polinômios e a parte prática na resolução de exercícios.</p> <p>Serão utilizados quadro, livro da base teórica, pincéis.</p>
Avaliação	A avaliação será participativa e continuada: Através de discussões orais e resolução de exercícios.
Atividades:	<p>1- Encontre um polinômio que passe pelos pontos A(-2,1) e B(1,4), utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange.</p> <p>2- Utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange, encontre o polinômio interpolador que aproxima a função definida pelos pontos $(-3, -96)$, $(-2, -30)$, $(0, 6)$ e $(4, 30)$.</p>

Professor: Paulo Henrique de A. Pereira


Disciplina: Matemática

Série: 3^a Ano

Turno: Matutino

APÊNDICE C – ATIVIDADES SOBRE INTERPOLAÇÃO

Figura 31 – Lista de atividade dos alunos 01


 ATIVIDADE PARA VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTO

Aluno: _____, Serie: 3^o

Aluno: _____, Serie: 3^o

1º) Dados os pontos A(-5,3), B(-2,-3), C(0,3), D(3,-3), encontre um polinômio que percorra todos esses, utilize o método de interpolação de Lagrange, identifique o grau desse polinômio.

$$f(x) = 3 \cdot \frac{(x+2) \cdot (x) \cdot (x-3)}{(-3) \cdot (-5) \cdot (-8)} - 3 \cdot \frac{(x+5) \cdot (x) \cdot (x-3)}{(3) \cdot (-2) \cdot (-5)} + 3 \cdot \frac{(x+5) \cdot (x+2) \cdot (x-3)}{(5) \cdot (2) \cdot (-3)}$$

$$- 3 \cdot \frac{(x+5) \cdot (x+2) \cdot (x)}{(8) \cdot (5) \cdot (3)}$$

$$f(x) = \frac{-9}{320} \cdot (x^2 + 2x \cdot (x-3)) - \frac{3}{30} \cdot (x^2 + 5x \cdot (x-3)) - \frac{9}{30} \cdot (x^2 + 2x + 5x + 30 \cdot (x-3))$$

$$\frac{-9}{320} \cdot (x^2 + 4x + 30) \cdot (x)$$

$$f(x) = \frac{-9}{320} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x) - \frac{3}{30} \cdot (x^3 - 3x^2 + 5x^2 - 35x) - \frac{9}{30} \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 25x + 30x - 90)$$


$$\frac{-9}{320} \cdot (x^3 + 4x^2 - 33x - 30)$$

$$f(x) = \frac{-9}{320} \cdot (x^3 - x^2 - 6x) - \frac{3}{30} \cdot (x^3 + 2x^2 - 35x) - \frac{9}{30} \cdot (x^3 + 4x^2 - 33x - 30)$$

$$\frac{-9}{320} \cdot (x^3 + 4x^2 + 30x)$$

FONTE: Autor (2019)

Figura 32 – Lista de atividade dos alunos 02


 ATIVIDADE PARA VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTO

Aluno: Paulo Henrique P. Gross, Serie: 3^ªA
 Aluno: Lucas, Serie: 3^ªA

1º) Dados os pontos A(-5,3), B(-2,-3), C(0,3), D(3,-3), encontre um polinômio que percorra todos esses, utilize o método de interpolação de Lagrange, identifique o grau desse polinômio.

$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) F(x_i)$

$L_i(x) = \prod_{c \neq i} \frac{(x-x_c)}{(x_i-x_c)}$

$P_2(x) = L_0(x)F(x_0) + L_1(x)F(x_1) + L_2(x)F(x_2)$
 Pontos A(-5,3), B(-2,-3), C(0,3), D(3,-3)

x	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃
y	y ₀	y ₁	y ₂	y ₃

$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$

x	-5	-2	0	3
y	3	-3	3	-3

$P_3(x) = 3L_0(x) - 3L_1(x) + 3L_2(x) - 3L_3(x)$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(-5+2)(-5-0)} = \frac{x^2+2x}{15}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+5)(x-0)}{(-2+5)(-2-0)} = \frac{-x^2+5x}{6}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+5)(x+2)}{(0+5)(0+2)} = \frac{x^2+7x+10}{10}$

$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)} = \frac{(x+5)(x-0)}{(3+5)(3+2)} = \frac{x+5x}{40}$

$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$

$P(x) = 3 \cdot \left(\frac{x^2+2x}{15} \right) - 3 \cdot \left(\frac{-x^2+5x}{6} \right) + 3 \cdot \left(\frac{x^2+7x+10}{10} \right) - 3 \cdot \left(\frac{x^2+5x}{40} \right)$

$P(x) = \left(\frac{x^2+2x}{5} \right) + \left(\frac{x^2+5x}{2} \right) + \left(\frac{3x^2+21+30}{10} \right) - \left(\frac{3x^2+15x}{40} \right)$

FONTE: Autor (2019)