



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**IARLI BARRETO LEITE FALCÃO JUNIOR**

**APLICAÇÕES DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS: NÚMERO DE  
EULER, CONJUNTO DE CANTOR, SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E PRODUTO DE  
WALLIS**

**FORTALEZA**

**2020**

IARLI BARRETO LEITE FALCÃO JUNIOR

APLICAÇÕES DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS: NÚMERO DE  
EULER, CONJUNTO DE CANTOR, SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E PRODUTO DE  
WALLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

F163a Falcão Junior, Iarli Barreto Leite.  
Aplicações de sequências e séries de números reais : número de Euler, conjunto de Cantor, sequência de Fibonacci e produto de Wallis / Iarli Barreto Leite Falcão Junior. – 2020.  
65 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2020.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Constante de Euler. 2. Conjunto de Cantor. 3. Sequência de Fibonacci. 4. Produto de Wallis. I.  
Título.

CDD 510

---

IARLI BARRETO LEITE FALCÃO JUNIOR

APLICAÇÕES DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS: NÚMERO DE  
EULER, CONJUNTO DE CANTOR, SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E PRODUTO DE  
WALLIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 17/04/2020

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A Deus, toda honra e toda glória.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me guiar em todos os meus passos e pelas bênçãos derramadas em minha vida.

A minha esposa Valdiana Barreto, por ser incentivadora e apoiadora fundamental na minha vida acadêmica e profissional, pelo seu amor, zelo e cuidado para comigo. Por sua paciência e compreensão nos momentos de minha ausência, sem ela não teria chegado até aqui.

Ao meu filho Pedro Ítalo, pelo seu amor e alegria que foram fundamentais nos momentos de fadiga e por deixar meus dias mais leves.

Aos meus pais, Iarli Barreto (in memoriam) e Francisca Maria, pelo amor, conselhos e por todos os esforços e sacrifícios que foram feitos para me proporcionar uma vida melhor.

Aos meus avós maternos, Terezinha Andrade (in memoriam) e Braz da Silva (in memoriam) pelo apoio dado, pelo amor a mim proporcionado.

A minha sogra Diana Gadelha, por todo apoio e dedicação.

Ao meu amigo João Mendes, pelas sugestões dadas com intuito de melhorar esse trabalho, pelo incentivo e conversas que foram de grande importância.

A minha amiga Mikaelle Barboza, por sempre está disposta em ajudar e pela parceria na vida acadêmica.

Aos professores da minha graduação na UECE pelos conhecimentos transmitidos que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica.

Aos professores do PROFMAT-UFC pelos conhecimentos transmitidos ao longo do mestrado. Aprendi bastante com esse excelente corpo docente.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pelas sugestões dadas para melhoria desse trabalho e pela serenidade na orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Marcos Ferreira de Melo e Ângelo Papa Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, em especial Fabrício Maia e Danilo Albuquerque, pela amizade, debates das questões e pela parceria.

Aos colegas que trabalhei na SEDUC-CE, em especial a todos aqueles que contribuíram para concretização dessa etapa.

Aos meus amigos da República dos Calangos, Sávio, Davi, César e Jeison, pela amizade e companheirismo.

“A natureza está escrita em linguagem matemática.” (*Galileu Galilei*)

## RESUMO

O estudo de sequências e séries de números reais é de fundamental importância no estudo do cálculo diferencial e integral. Esse trabalho tem a finalidade de abordar algumas aplicações de sequências e séries de números reais como: constante de Euler demonstrando sua irracionalidade de duas maneiras distintas, abordar sua relação com a série harmônica alternada e definir constante de Euler-Mascheroni; o conjunto de Cantor e seus equivalentes no  $\mathbb{R}^2$  (tapete de Sierpinski) e  $\mathbb{R}^3$  (esponja de Menger) relacionando cada uma dessas aplicações com a série geométrica; sequência de Fibonacci e suas aplicações nas diagonais do triângulo de Pascal e nas triplas pitagóricas e por fim o produto de Wallis com aplicação no cálculo aproximado do comprimento da elipse. Para tanto, no que diz respeito a metodologia, foi utilizada a pesquisa bibliográfica. Através desse trabalho, podemos concluir que existem várias aplicações de sequências e séries de números reais em muitos ramos da matemática.

**Palavras-chave:** Constante de Euler. Conjunto de Cantor. Sequência de Fibonacci. Produto de Wallis

## ABSTRACT

The study of sequences and series of real numbers is of fundamental importance in the study of differential and integral calculus. This work aims to address some applications of sequences and series of real numbers such as: Euler constant demonstrating its irrationality in two different ways, addressing its relationship with the alternating harmonic series and defining Euler-Mascheroni constant; the Cantor set and its equivalents in  $\mathbb{R}^2$  (Sierpinski's rug) and  $\mathbb{R}^3$  (Monger's sponge) relating each of these applications to the geometric series; Fibonacci sequence and its applications in the diagonals of the Pascal triangle and in the Pythagorean triples and finally the Wallis product with application in the approximate calculation of the ellipse length. For that, regarding the methodology, bibliographic research was used. Through this work, we can conclude that there are several applications of sequences and series of real numbers in many branches of mathematics.

**Keywords:** Euler constant. Singer Set. Fibonacci sequence. Wallis product

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	$H_a^b$ representado pela região hachurada.....	20
Figura 2-	Série harmônica interpretada geometricamente.....	23
Figura 3-	Aproximação inferior de $\ln(p + 1)$ .....	23
Figura 4-	Proposição 2.....	25
Figura 5-	Subdivisões unitárias do gráfico $y = \frac{1}{x}$ .....	26
Figura 6-	Etapas iniciais da construção do conjunto de Cantor.....	30
Figura 7-	Etapas iniciais da construção do tapete de Sierpinski.....	31
Figura 8-	Esponja de Menger do nível 0 ao nível 2.....	33
Figura 9-	Triângulo de Pascal com números binomiais.....	38
Figura 10-	Triângulo de Pascal.....	38
Figura 11-	Diagonais no triângulo de Pascal.....	38
Figura 12-	Triângulo de Pascal em mosaico hexagonal.....	44
Figura 13-	Sistema ortogonal de coordenadas $(x, y)$ .....	44
Figura 14-	Elipse centrada na origem.....	55

## TABELA DE FIGURAS

Tabela 1- Valores da primitiva $\ln n$ .....	25
--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>CONSTANTE DE EULER .....</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>A irracionalidade de <math>e</math> .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Demonstração da irracionalidade de <math>e</math> com série alternada.....</i>	<b>17</b>
<b>2.1.2</b>	<i>Demonstração da irracionalidade de <math>e</math> com série geométrica.....</i>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Constante de Euler-Mascheronni e a série harmônica alternada.....</b>	<b>19</b>
<b>2.2.1</b>	<i>Logaritmo natural.....</i>	<b>20</b>
<b>2.2.2</b>	<i>Série harmônica.....</i>	<b>22</b>
<b>2.2.3</b>	<i>Dígitos do gama.....</i>	<b>25</b>
<b>2.2.4</b>	<i>Série harmônica alternada.....</i>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>CONJUNTO DE CANTOR, TAPETE DE SIERPINSKI E ESPONJA DE Menger.....</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Conjunto de Cantor.....</b>	<b>29</b>
<b>3.2</b>	<b>Tapete de Sierpinski.....</b>	<b>31</b>
<b>3.3</b>	<b>Esponja de Menger.....</b>	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.....</b>	<b>34</b>
<b>4.1</b>	<b>Diagonais do triângulo de Pascal.....</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Triângulo de Pascal em mosaico hexagonal.....</b>	<b>41</b>
<b>4.2.1</b>	<i>Equações diofantinas lineares.....</i>	<b>41</b>
<b>4.3</b>	<b>Triplas pitagóricas.....</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>PRODUTO DE WALLIS.....</b>	<b>48</b>
<b>5.1</b>	<b>Comprimento da elipse.....</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE .....</b>	<b>62</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade. A série geométrica, feita por Arquimedes, de razão  $\frac{1}{4}$ , que intervém no cálculo de área de parábola foi a primeira a ocorrer na história da matemática. Depois da abordagem de série geométrica no trabalho de Arquimedes, as séries infinitas só retornariam a aparecer na matemática cerca de 150 anos depois, no século XIV. Nessa época, existia um grupo de estudiosos matemáticos na Universidade de Oxford que estudava cinemática, ou fenômeno de movimento. Convém ressaltar que foi a partir desse momento que foram reconsideradas as séries infinitas. Logo, a ausência durante muito tempo de conceitos apropriados e de uma teoria razoável acarretou numerosas especulações e paradoxos a respeito da natureza das séries infinitas.

A priori, a escolha do tema dessa dissertação tem como objetivo proporcionar um domínio de algumas aplicações despertando assim no leitor um interesse pelas aplicações de sequências e séries de números reais. Especificamente, o presente trabalho visa analisar algumas aplicações relacionadas as sequências e séries de números reais com intuito de ampliar os conhecimentos aplicados nesta temática, que são de fundamental importância para o cálculo diferencial e integral.

Salienta-se que para um melhor aproveitamento do texto é necessário que o leitor tenha alguma familiaridade com a teoria das sequências e séries de números reais, contudo dispõe-se de uma seção (apêndice) no final do trabalho com o intuito de auxiliar no entendimento de algum conceito necessário para o desenvolvimento das aplicações propostas.

Deste modo, o trabalho foi dividido em seis capítulos da seguinte forma: o segundo capítulo aborda a constante de Euler tendo a prova de sua irracionalidade, além disso, possui uma relação dessa constante com a série harmônica alternada; no terceiro capítulo trata do conjunto de Cantor e seus equivalentes no  $\mathbb{R}^2$  (tapete de Sierpinski) e  $\mathbb{R}^3$  (esponja de Menger); o quarto capítulo apresenta a sequência de Fibonacci e aplicações no triângulo de Pascal e triplas pitagóricas; no quinto capítulo trata do produto de Wallis e uma aplicação no cálculo aproximado do comprimento da elipse.

## 2 CONSTANTE DE EULER

Um exemplo importante de sequência monótona e limitada é a sequência que define o número  $e$ , base dos logaritmos naturais. Existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Representamos esse número pela letra  $e$  (constante de Euler). Essa constante  $e$  (número de Euler) também aparece como um limite de uma série.

Tal número surgiu na matemática no século XVIII, na abordagem de um problema de juros compostos. Nesse contexto, o número  $e$  é definido mediante o limite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2.1)$$

Provaremos que a sequência  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  que define  $e$  é crescente e limitada, por isso tem limite. Para provar que essa sequência é crescente, observa-se que, pela fórmula do binômio de Newton, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} = 1 + \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)! r!} \cdot \frac{1}{n^r} = \\ &= 1 + \sum_{r=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-[r-1])}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} = \\ &= 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Substituindo  $n$  por  $n+1$  na expressão (2.2), obtemos

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right) \quad (2.3)$$

Desconsiderando o último termo de (2.3), somaremos de  $r = 1$  até  $r = n$ , como em (2.2). Como cada fator entre parênteses que aparece em (2.3) é positivo e maior que o seu fator correspondente em (2.2) e, além disso, o último termo de (2.3), obtido quando se faz  $r = n + 1$  também é positivo, temos que  $a_{n+1} > a_n$ , ou seja, a sequência  $(a_n)$  é crescente.

Resta, agora, provar que (2.1) é limitada. Para isso, basta observar que cada fator entre parênteses que aparece em (2.2) é positivo e menor do que 1. Assim, sendo  $n$  inteiro e maior do que 1, temos que

$$a_n < 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \quad (2.4)$$

Na desigualdade acima, note que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ .

Com isso, está provado que a sequência  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  é crescente e limitada, isto é,  $(a_n)$  tem limite, que é o número  $e$  (constante de Euler), ou seja

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A constante de Euler ( $e$ ) pode ser vista de outras maneiras. Em seguida, provaremos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.5)$$

Para isso, supondo  $m > n$ , podemos escrever de (2.2) que

$$\begin{aligned} a_m &= 1 + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{m}\right) > \\ &1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \quad (2.6) \end{aligned}$$

Daí, fazendo  $m$  tender a infinito ( $m \rightarrow \infty$ ), obtemos de (2.6) que

$$e > 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (2.7)$$

Em seguida, fazendo  $n$  tender a infinito ( $n \rightarrow \infty$ ), obtemos de (2.7) que

$$e \geq \lim \left( 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \quad (2.8)$$

Por outro lado, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (2.4), obtém-se que

$$e \leq \lim \left( 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \quad (2.9)$$

Das desigualdades (2.8) e (2.9), concluímos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \quad (2.10)$$

Provaremos também que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}$$

Sendo  $m = n - 1$ , temos que

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\frac{m+1}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}}$$

Com isso, obtemos

$$\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \right)^{-n} = \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \cdot \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \quad (2.11)$$

Essa última expressão tende a  $e$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Logo,  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}$ .

Com isso, temos que

$$e = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 2.1 A Irrracionalidade de e

Seja a série da função exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (2.12)$$

Essa série será útil na demonstração da irracionalidade de e usando série alternada.

### 2.1.1 Demonstração da irracionalidade de e com série alternada

Uma das maneiras de demonstrar a irracionalidade de e é utilizando a série alternada. Uma série alternada é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad (2.13)$$

sendo  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Existem alguns critérios a respeito da convergência da série supracitada. Se  $S_m = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} a_n$  é a m-ésima soma parcial da série em (2.13) e

- (i)  $a_n \geq a_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,

dizemos que a série em (2.13) é convergente, ou seja, converge para um número S satisfazendo

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isso significa dizer que a soma de uma série alternada, nas condições estabelecidas acima, está entre quaisquer duas de suas somas parciais consecutivas. Usaremos esse fato na demonstração a seguir.

Suponha que  $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , então  $e^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ . Assim, tomando em (2.12)  $x = -1$ , temos que

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Logo,

$$(-1)^{a+1} a! \left( \frac{b}{a} - \sum_{n=0}^a \frac{(-1)^n}{n!} \right) = (-1)^{a+1} \left( b(a-1)! - \sum_{n=0}^a \frac{(-1)^n a!}{n!} \right) \in \mathbb{Z}.$$

Porém,

$$\begin{aligned} (-1)^{a+1} a! \left( \frac{b}{a} - \sum_{n=0}^a \frac{(-1)^n}{n!} \right) &= (-1)^{a+1} a! \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= (-1)^{a+1} a! \left( \frac{(-1)^{a+1}}{(a+1)!} + \frac{(-1)^{a+2}}{(a+2)!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots \\ &\in \left( \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+1} \right) \subseteq (0,1), \end{aligned}$$

onde a relação de pertinência acima foi obtida usando-se o fato da série alternada  $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots$  satisfazer os itens (i) e (ii). A partir da demonstração feita anteriormente, chegamos ao absurdo de ter um inteiro no intervalo (0,1). Logo  $e$  é irracional.

### 2.1.2 Demonstração da irracionalidade de $e$ com série geométrica

Supondo  $e$  um número racional, ou seja, supondo  $e = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $(p, q) = 1$ , temos que:

$$\frac{p}{q} - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad (2.14)$$

Realizando uma estimativa em (2.14), encontramos que:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!} \left( \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \right)$$

$$< \frac{1}{q!} \left( \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots \right) \quad (2.15)$$

A expressão entre parênteses no último membro da desigualdade (2.15) é uma série geométrica da forma  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ , cuja soma é igual a  $\frac{r}{1-r}$  quando  $0 < r < 1$ . Como  $r = \frac{1}{q}$  e  $0 < \frac{1}{q} < 1$ , então a soma da série geométrica é igual a  $\frac{1}{q}$ . Usando esse resultado em (2.15) obtemos

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad (2.16)$$

Retomando (2.14) com a estimativa (2.16) temos

$$0 < \frac{p}{q} - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad (2.17)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade (2.17) por  $q!$ , segue que

$$0 < q! \left( \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q} \quad (2.18)$$

Observando (2.18), tem-se que o termo médio é inteiro, pois  $q!$  cancela todos os denominadores das frações presentes na expressão central. Mas, isso é impossível, pois sendo  $\frac{1}{q} \leq 1$  a expressão (2.18) afirmaria que o termo médio é um inteiro positivo estritamente menor que 1. O absurdo provém da hipótese estabelecida inicialmente onde supõe-se  $e$  um número racional. Logo,  $e$  é irracional.

## 2.2 Constante de Euler--Mascheronni e a série harmônica alternada

Apesar do número  $\gamma$  (constante de Euler-Mascheronni) não ser tão famoso quanto  $\pi$  ou  $e$ , mas é uma constante de suma importância na matemática. Antes, porém, de definirmos esta constante, convém formalizar uma definição de logaritmo natural.

### 2.2.1 Logaritmo natural

Antes, porém, de definirmos logaritmo natural, vejamos as seguintes definições e teoremas decorrentes.

**Definição 1.** Uma função real  $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função logarítmica quando satisfaz as seguintes propriedades:

- a)  $L$  é uma função crescente, ou seja,  $x < y \rightarrow L(x) < L(y)$ ;
- b)  $L(xy) = L(x) + L(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

**Definição 2.** Seja  $H$  o ramo positivo da hipérbole  $y = \frac{1}{x}$ . Indicaremos por  $H_a^b$  a área determinada pelos pontos  $(x, y)$  cujas coordenadas estão delimitadas por:  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ .

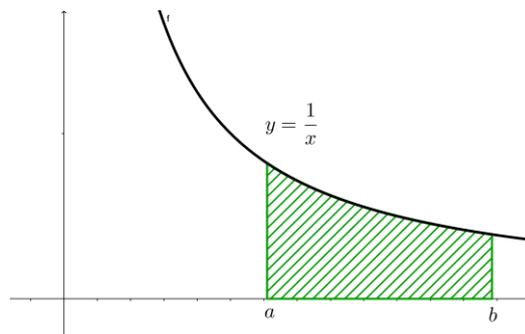


Figura 1:  $H_a^b$  representado pela região hachurada

Um fato de extrema importância a respeito das áreas das faixas de hipérbole será enunciado pelo teorema abaixo:

**Teorema 1.** Seja qualquer número real  $k$  positivo, as faixas  $H_a^b$  e  $H_{ak}^{bk}$  possuem a mesma área.

Demonstração: Seja um retângulo inscrito em  $H$  cuja base é o segmento  $[c, d]$  do eixo das abscissas e um retângulo inscrito em  $H$  com base no segmento  $[ck, dk]$ , ambos os retângulos possuem a mesma área. A área do primeiro é

$$(d - c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

enquanto a área do segundo é

$$(dk - ck) \cdot \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}$$

Considerando agora um polígono retangular  $P$ , inscrito em  $H_a^b$ . Se multiplicarmos por um fator  $k$  cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de  $[a, b]$ , determinados por  $P$ , então será obtido uma subdivisão do intervalo  $[ak, bk]$  que representa um polígono retangular  $P'$ , inscrito na faixa  $H_{ak}^{bk}$ .

Cada um dos retângulos que compõem  $P'$  tem a mesma área que o retângulo correspondente em  $P$ . Logo a área de  $P'$  é igual à de  $P$ .

Para cada polígono retangular inscrito em  $H_a^b$ , existe um inscrito em  $H_{ak}^{bk}$  com a mesma área. Analogamente, para cada polígono retangular  $Q'$  inscrito em  $H_{ak}^{bk}$ , existe outro polígono retangular  $Q$  de mesma área inscrito em  $H_a^b$ . Assim, as áreas destas duas faixas são expressas por números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e, portanto, são iguais.

Definiremos o logaritmo natural de  $x$  como sendo a área da faixa da hipérbole de 1 até  $x$ , ou seja,

$$\ln x = H_1^x$$

tomando  $H_1^x < 0$  quando  $0 < x < 1$ .

Em particular, quando  $x = 1$ , o conjunto  $H_1^1$  se reduz a um segmento de reta vertical, logo possui área 0. Quando  $x < 0$  a área não está definida. Assim,

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln x < 0 \text{ se } 0 < x < 1$$

$$\ln x > 0 \text{ se } x > 1$$

definido desta forma uma função  $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Provaremos a seguir que a função  $\ln$  satisfaz a função logaritmo.

**Teorema 2.**  $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função logarítmica.

Demonstração:

Basta mostrar que a função  $\ln$  satisfaz as propriedades a) e b):

Iniciaremos mostrando que:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Por definição tem-se que:

$$\ln(xy) = H_1^{xy} = H_1^x + H_x^{xy}$$

Pelo Teorema 1, temos que  $H_x^{xy} = H_1^y$ . Logo,

$$\ln(xy) = H_1^{xy} = H_1^x + H_x^{xy} = H_1^x + H_1^y = \ln x + \ln y$$

Agora, provaremos que a função é crescente. Considere  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Suponha  $x < y$ , conseqüentemente existe um  $a > 1$  tal que  $y = ax$ . Então:

$$\ln y = \ln ax = \ln a + \ln x$$

Como  $a > 1 \rightarrow \ln a > 0$ , ou seja,  $\ln y > \ln x$  ■

É possível calcular a área  $H_1^x$  através de soma de retângulos. Inicialmente decompõe-se o intervalo  $[1, x]$  em um número finito de intervalos justapostos. Em cada intervalo  $[a, b]$  da decomposição, com  $a < b$ , considera-se o retângulo de altura  $\frac{1}{b}$ . O vértice superior direito intersecta o gráfico da faixa da hipérbole no ponto  $(b, \frac{1}{b})$ . Este retângulo é chamado de retângulo inscrito na faixa  $H_1^x$ . A reunião destes retângulos inscritos é um polígono retangular inscrito na faixa  $H_1^x$ . A medida que se refina as subdivisões de  $[1, x]$ , obtém-se uma melhor aproximação de  $\ln x$ , ou seja, quando o maior subintervalo de  $[1, x]$  tende à 0, o polígono regular inscrito na faixa  $H_1^x$  tende à  $\ln x$ .

### 2.2.2 Série harmônica

Em um cálculo aproximado da área da faixa da hipérbole, quando se divide o intervalo  $[1, p + 1]$ , com  $p \in \mathbb{N}$ , em subintervalos unitários, a soma das áreas dos retângulos por excesso é igual à **série harmônica**

$$H_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

Essa soma equivale a uma aproximação superior à  $H_1^{p+1}$ , ou seja,

$$H_p > \ln(p + 1)$$

Sendo assim, como a função  $\ln x$  é crescente, então  $H_p$  é ilimitada.

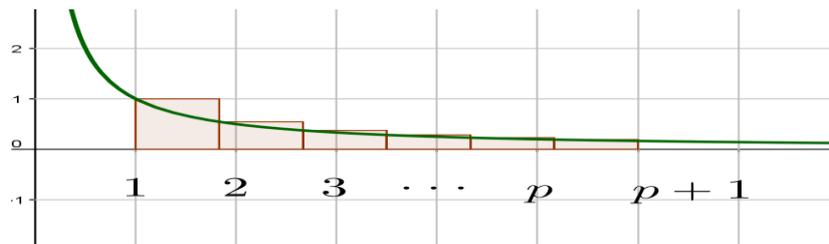


Figura 2: Série harmônica interpretada geometricamente

Mostraremos, na proposição a seguir, que a diferença entre a série harmônica e a função logaritmo natural, em qualquer intervalo de extremos naturais é sempre limitada.

**Proposição 1.** Para todo inteiro  $p > 0$ , temos que

$$0 < H_p - \ln(p + 1) < 1$$

Demonstração:

Considere a decomposição do intervalo  $[1, p + 1]$  em subintervalos unitários e a respectiva aproximação inferior da área da faixa da hipérbole, obtida somando-se as áreas dos retângulos.

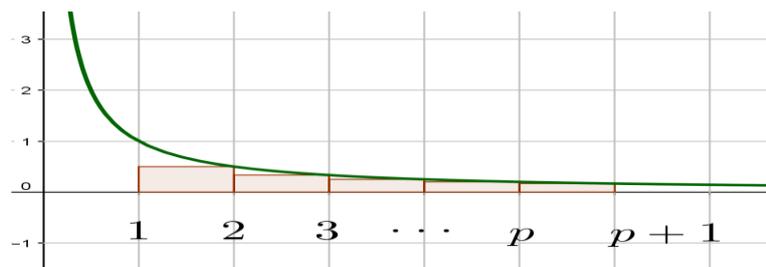


Figura 3: Aproximação inferior de  $\ln(p + 1)$

A soma das áreas dos retângulos, a aproximação inferior, nos dá:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} < \ln(p+1)$$

o que implica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} < \ln(p+1)$$

Somando 1 a ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} < \ln(p+1) + 1$$

Ou seja,

$$H_p < \ln(p+1) + 1 \rightarrow H_p - \ln(p+1) < 1.$$

Por outro lado, como foi mostrado, temos que

$$H_p > \ln(p+1) \rightarrow H_p - \ln(p+1) > 0.$$

Assim, concluímos que

$$0 < H_p - \ln(p+1) < 1 \quad \blacksquare$$

Em outras palavras, a sequência dessas diferenças, além de ser limitada, também é monótona, e portanto, convergente, segundo o teorema de Bolzano-Weierstrass. Agora podemos definir a constante de Euler-Mascheronni.

**Definição 3.** O limite

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} [H_p - \ln(p+1)]$$

é chamado constante de Euler-Mascheronni.

### 2.2.3. Cálculo dos dígitos de Gama ( $\gamma$ )

Sendo  $\int_1^n \frac{dx}{x} > H_n$ , pela tabela a seguir, podemos ter uma noção do quanto é lento o crescimento da série harmônica.

n	$\int_1^n \frac{dx}{x}$
10	2,3
100	4,61
1000	6,91
1000000000	20,72
$10^{50}$	115,3

Tabela 1: Valores da primitiva  $\ln n$

Da mesma forma,  $\ln$  cresce lentamente. Por isso, a constante gama converge lentamente também, por ser a diferença entre estas duas seqüências. A proposição abaixo trará a noção da convergência de  $\gamma$  (constante de Euler-Mascheronni).

**Proposição 2.** Seja  $\gamma_n$  o n-ésimo termo das seqüências de aproximações de  $\gamma$ . Tem-se que

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - \gamma_n < \frac{1}{2n}$$

Demonstração:

Para demonstrar a desigualdade acima, analisaremos o gráfico  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

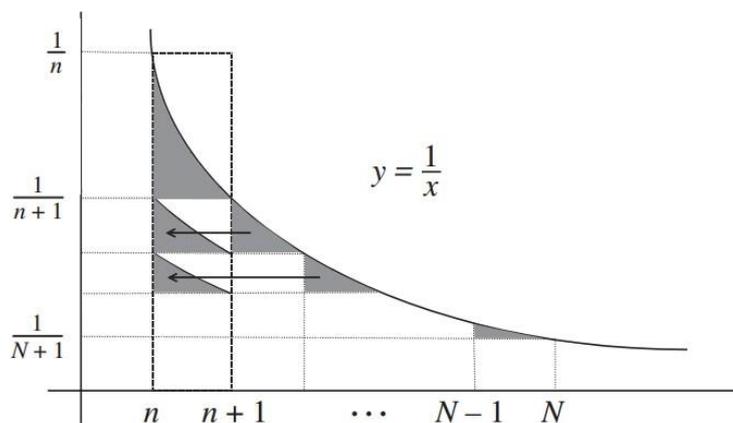


Figura 4: Proposição 2

Seja  $\sum_n^N H$  a área hachurada que toca o gráfico. Então:

$$\begin{aligned}\sum_n^N H &= \left( \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left( \int_{N-1}^N \frac{dx}{x} - \frac{1}{N} \right) = \\ &= \left( \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} + \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} + \dots + \int_{N-1}^N \frac{dx}{x} \right) - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{N} \right) = \\ &= \int_n^N \frac{dx}{x} - \sum_{r=1}^{N-n} \frac{1}{n+r} = \int_n^N \frac{dx}{x} - \left( \sum_{r=1}^N \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right) = \left( \ln N - \sum_{r=1}^N \frac{1}{r} \right) - \left( \ln n - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right)\end{aligned}$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$ , temos que

$$\sum_n^N H = -\gamma + \gamma_n = \gamma_n - \gamma$$

Se for deslocado a região H para o primeiro retângulo no intervalo  $[n, n+1]$  da figura acima, observa-se que cada região corresponde a menos da metade de cada retângulo onde ela está inscrita. Como a área do retângulo entre  $n$  e  $n+1$  igual a  $\frac{1}{n}$ , temos que

$$\gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

Para demonstrarmos a outra parte da desigualdade, construiremos um triângulo retângulo em cada uma das subdivisões unitárias como mostrado na figura abaixo.

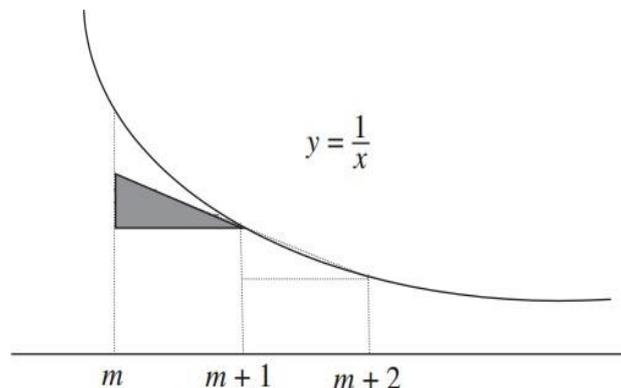


Figura 5: Subdivisões unitárias do gráfico  $y = \frac{1}{x}$

Cada triângulo assim formado equivale ao triângulo logo a direita, que contém uma parcela de  $H$ , pois suas hipotenusas têm a mesma medida, e todos os catetos horizontais medem 1. Então:

$$\gamma_n - \gamma = \sum_n^N H > \frac{1}{2} \sum_{m=n}^{\infty} \left( \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) = \frac{1}{2(n+1)}$$

Concluimos assim que

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

#### 2.2.4 Série harmônica alternada

Pela definição 2 é possível calcular aproximações para a série harmônica. Assim, a  $n$ ésima aproximação da série harmônica  $H$  vale

$$H_n = \gamma_n + \ln(n)$$

Uma aplicação importante da constante em estudo está associada à série harmônica alternada que é uma importante série originada da série harmônica.

**Definição 4.** A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

é chamada de **série harmônica alternada**.

A série harmônica alternada é convergente, pois analisando as reduzidas temos que:

i) As reduzidas de ordem par são:

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), etc$$

Nesse caso, como cada diferença dentro dos parênteses representa um número positivo, temos que  $s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < \dots$

ii) As reduzidas de ordem ímpar são:

$$s_1 = 1, s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \text{etc}$$

Nesse caso, cada diferença nos parênteses também é positiva, o que nos garante que  $s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2n-1} > \dots$ .

Portanto existem  $s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$  e  $s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}$ . Como  $s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1}$  tende a zero, quando  $n$  tende a infinito, temos que  $s' = s'' = s$ . A série é convergente, mas não é absolutamente convergente, sendo uma série que deriva da série harmônica, que por sua vez é divergente.

Sabe-se que  $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots = \frac{1}{1-a}$ , se  $|a| < 1$ . Tomando então  $-1 < a < 0$ , temos que a série converge para  $\frac{1}{1+a}$ , isto é,

$$1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n \cdot a^n + \dots = \frac{1}{1+a}$$

Integrando a equação acima com relação a variável  $a$ , temos que

$$\int (1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n \cdot a^n + \dots) da = \int \frac{1}{1+a} da \rightarrow$$

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} + \dots = \int \frac{1}{1+a} da = \ln(1+a)$$

Fazendo  $a \rightarrow 1$ , obtemos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2) \quad \blacksquare$$

### 3 CONJUNTO DE CANTOR, TAPETE DE SIERPINSKI E ESPONJA DE Menger

#### 3.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor possui esse nome em homenagem ao matemático alemão George Cantor (1845-1918). Descreveremos abaixo como é construído o Conjunto de Cantor.

Sendo  $F_0$  o intervalo  $[0,1]$  em  $\mathbb{R}$ , seguem-se os passos:

1. Retira-se do intervalo real  $[0,1]$  seu terço médio aberto, ou seja, o intervalo aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

2. Chama-se de  $F_1$  a união dos intervalos restantes, ou seja,

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Retira-se de  $F_1$  o terço médio de cada um dos seus intervalos, ou seja, retira-se os seguintes intervalos abertos:

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \text{ e } \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

4. Chama-se de  $F_2$  a união dos intervalos restantes, ou seja,

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

5. Retira-se de  $F_2$  o terço médio de cada um dos seus intervalos, ou seja, retira-se os seguintes intervalos abertos:

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right).$$

6. Considera-se  $F_3$  a união dos intervalos restantes, ou seja,

$$F_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

7. Continuando dessa forma, obteremos uma sequência de conjuntos  $F_n$ , onde sem tem:

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

As relações de continência acima nos mostram que  $F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ .

Observação.  $F_n$  é a união de  $2^n$  intervalos, cada um com comprimento  $\frac{1}{3^n}$ .

O conjunto  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  é denominado o **conjunto de Cantor**.

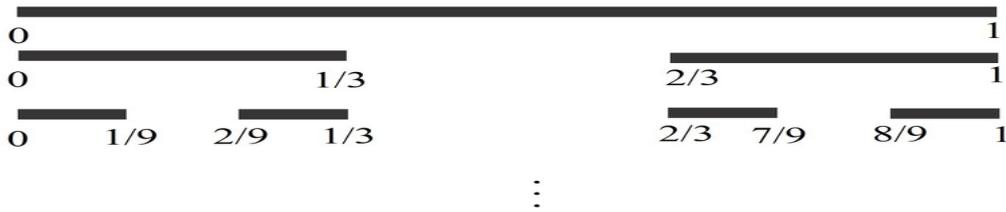


Figura 6: Etapas iniciais da construção do conjunto de Cantor

Mostraremos que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos do conjunto de Cantor é 1.

Demonstração:

Dado um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , o comprimento desse intervalo é  $b - a$ . Vejamos que:

- ✓ Na primeira etapa da construção de  $K$ , retiramos um intervalo de comprimento  $\frac{1}{3}$ ;
- ✓ Na segunda etapa da construção de  $K$ , retiramos dois intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^2}$ ;
- ✓ Na terceira etapa da construção de  $K$ , retiramos quatro intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^3}$ .

De modo geral, na primeira etapa, retira-se um intervalo de comprimento  $\frac{1}{3}$ , e na etapa de número  $n$ ,  $n \geq 2$ , retiram-se  $2^{n-1}$  intervalos de comprimentos iguais a  $\frac{1}{3^n}$ .

Somando os comprimentos de todos os intervalos retirados na construção de  $K$  em todas as etapas, obtemos a seguinte série geométrica:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots \quad (3.1)$$

Nessa série geométrica, o primeiro termo e a razão são, respectivamente, iguais a  $a_1 = \frac{1}{3}$  e  $r = \frac{2}{3}$ . Como a razão  $r$  é tal que  $-1 < r < 1$ , a sequência é infinita convergente, sendo o limite da soma (3.1) igual a:

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

### 3.2. Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski é o equivalente bidimensional do conjunto de Cantor. Esse tapete é construído pela remoção do quadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em 9 quadrados. A etapa seguinte consiste em remover os quadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante.

Descreveremos as etapas para a construção do tapete de Sierpinski.

1º Etapa: Considerando um quadrado de área igual a 1, dividiremos esse quadrado em nove quadrados congruentes e eliminaremos o quadrado central, ou seja, será removido um quadrado de área igual a  $\frac{1}{9}$ .

2º Etapa: Nos oitos quadrados restantes, repetimos o mesmo processo da primeira etapa, ou seja, eliminaremos 8 quadrados onde cada um possui área igual a  $\frac{1}{81}$ .

3º Etapa: Nos sessenta e quatro quadrados restantes, repetimos o mesmo processo da primeira etapa, ou seja, eliminaremos 64 quadrados onde cada um possui área igual a  $\frac{1}{729}$ .

Esse procedimento repetido sucessivamente gera o tapete de Sierpinski.

A figura abaixo representa o quadrado inicial e as duas etapas seguintes descritas acima.

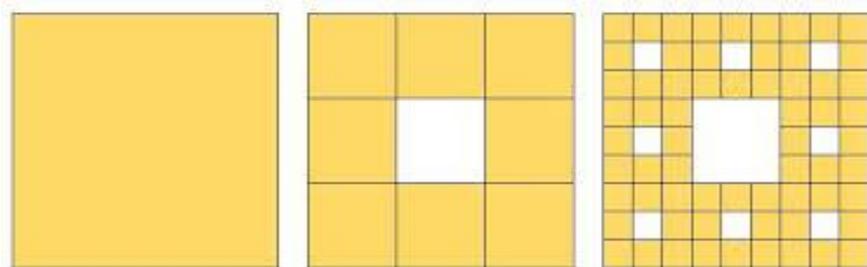


Figura 7: Etapas iniciais da construção do Tapete de Sierpinski

Mostraremos que a soma total das áreas dos quadrados que foram removidos do tapete de Sierpinski é 1. Isso implica que o tapete de Sierpinski tem área 0.

Pelas etapas descritas anteriormente, temos que:

- ✓ Na primeira etapa, foi removido um quadrado de área igual a  $\frac{1}{9}$ .
- ✓ Na segunda etapa, foram removidos oito quadrados de área igual a  $\frac{1}{81}$  cada um.
- ✓ Na terceira etapa, foram removidos sessenta e quatro quadrados de área igual a  $\frac{1}{729}$  cada um.

De modo geral, na primeira etapa foi eliminado 1 quadrado de área  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$ , e na etapa de número  $n$ ,  $n \geq 2$ , foram eliminados  $8^{n-1}$  quadrados, cada um de área igual a  $\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{2n}}$ . Somando, então, as áreas de todos os quadrados removidos em todas as etapas, obtemos a seguinte série geométrica:

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{81} + \frac{64}{729} + \dots \quad (3.2)$$

Nessa série geométrica, o primeiro termo é igual a  $a_1 = \frac{1}{9}$ , e a razão  $r = \frac{8}{9}$  tem módulo menor do que 1, ou seja, ela é infinita convergente. Sendo assim, o limite da soma (3.2) é igual a:

$$\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1$$

### 3.3 Esponja de Menger

O primeiro trabalho sobre a esponja de Menger foi apresentado pela primeira vez pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985) no ano de 1926, enquanto ele explorava a noção de dimensão topológica. Esse objeto matemático nada mais é que uma extensão tridimensional do conjunto de Cantor e do tapete de Sierpinski. Descreveremos as etapas para a construção da esponja de Menger.

A esponja de Menger é construída através de um cubo que passa pelo seguinte processo recursivo:

1. Considera-se um cubo de volume igual a 1.
2. Divide-se cada face do cubo em 9 quadrados. Desta forma, teremos o cubo maior dividido em 27 cubos menores.

3. Remove-se o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, restando apenas 20 cubos. Isso representa o primeiro nível da esponja de Menger.
4. Refazendo os passos 2 e 3 para cada um dos 20 cubos restantes do nível anterior, obteremos o segundo nível da Esponja. Nesse segundo nível, cada um dos 20 cubos que restaram do nível anterior está sendo divididos em outros 20 cubos menores, obtendo no final  $20^{20}$ .
5. A esponja de Menger é o limite desse processo após um número infinito de interações.

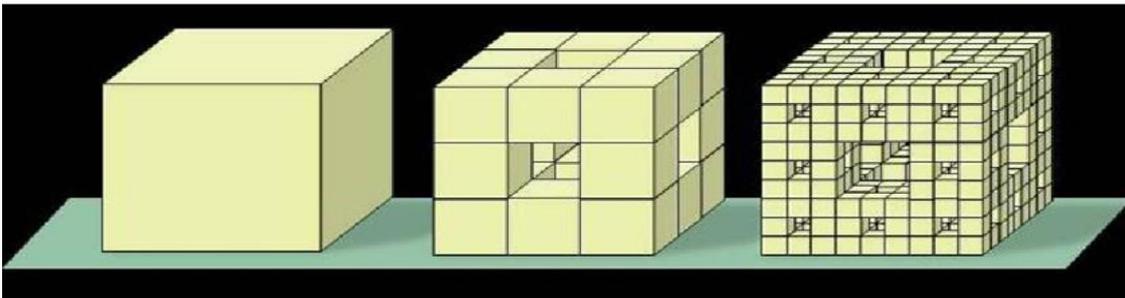


Figura 8: Esponja de Menger do nível 0 ao nível 2.

Mostraremos que a soma total dos volumes dos cubos que foram removidos da esponja de Menger é 1.

Se  $n$  é o número de interações executadas no cubo inicial, o número de cubos restantes será  $20^n$ , e é possível contar em cada nível quantos cubos foram removidos. No nível 1, foram removidos 7 cubos com volume de  $\frac{1}{27}$  cada. Já no nível 2 foram removidos 140 cubos com  $\frac{1}{27^2}$  cada. Seguindo o processo recursivo, temos que após infinitas etapas de remoção dos cubos, a série que representa a soma dos volumes dos cubos removidos em cada nível é dada por:

$$\frac{7}{27} + \frac{7 \cdot 20}{27^2} + \frac{7 \cdot 20 \cdot 20}{27^3} + \dots \quad (3.3)$$

Como essa é uma série geométrica de primeiro termo  $a_1 = \frac{7}{27}$  e razão  $r = \frac{20}{27}$ , cujo valor absoluto é menor que 1, concluímos que o limite da soma (3.3) é igual a:

$$\frac{\frac{7}{27}}{1 - \frac{20}{27}} = 1$$

#### 4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

**Definição 5.** A sequência de Fibonacci é definida por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 1$$

com  $F_1 = F_2 = 1$  e  $F_0 = 0$ .

**Proposição 3.** Seja a sequência numérica  $(x_n)$  definida tomando dois números consecutivos da sequência de Fibonacci tal que  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ . Essa sequência converge para o número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803$ .

Demonstração:

Sendo  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{3}{2}$ ,  $x_4 = \frac{5}{3}$ ,  $x_5 = \frac{8}{5}$ ,  $x_6 = \frac{13}{8}$ ,  $x_7 = \frac{21}{13}$ , então:

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$$

Aplicando a definição de limite, teremos:

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \text{ ou seja, } x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação encontraremos  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . ■

A seguir, iremos abordar algumas aplicações que envolvem as sequências de Fibonacci.

#### 4.1 Diagonais do triângulo de Pascal

Será necessário abordar primeiramente a teoria de números binomiais para assim podermos dar continuidade com o triângulo de Pascal,

Considerando a expressão  $(1 + X)^n$ , sendo  $X$  uma indeterminada e  $n \in \mathbb{N}$ . Desenvolvendo essa potência, obtém-se um polinômio de grau  $n$  em  $X$ , cujos coeficientes são números naturais:

$$(1 + X)^n = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

Chamaremos os coeficientes  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  de números binomiais, sendo denotados por  $a_i = \binom{n}{i}$ . Definimos  $\binom{n}{i} = 0$  quando  $i > n$ .

**Lema 1.** (relação de Stifel). Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $i \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq i \leq n$ , tem-se que

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Demonstração:

Para  $i = n$ , a relação acima é trivialmente verificada

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} \rightarrow \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

Para  $0 \leq i \leq n$  temos que

Pela definição acima da expressão  $(1 + X)^n$  obtém-se que

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}X + \binom{n+2}{2}X^2 + \dots + \binom{n+1}{n}X^n + \binom{n+1}{n+1}X^{n+1} &= (1 + X)^{n+1} \\ &= (1 + X)(1 + X)^n = (1 + X) \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \binom{n}{2}X^2 + \dots + \binom{n}{n}X^n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] \cdot X + \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] X^2 + \dots + \left[ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] \cdot X^n \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} \cdot X^{n+1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Lema 2.** Para todos  $n, i \in \mathbb{N}$ , com  $1 \leq i \leq n$ , tem-se que

$$\binom{n}{i} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i! (n-i)!}$$

Demonstração:

Pelo princípio da indução finita temos que

Para  $n = 1$  a igualdade é verdadeira. Suponhamos que as igualdades sejam válidas para algum  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $i$  com  $1 \leq i \leq n$ . Pela relação de Stifel, temos para  $i \leq n$  que

$$\begin{aligned}
\binom{n+i}{i} &= \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+1)}{i!} + \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+2)}{(i-1)!} = \\
&\quad \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+1) + n \cdot (n-1) \dots (n-i+2) \cdot i}{i!} = \\
&\quad \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+2) \cdot (n-i+1+i)}{i!} = \\
&\quad \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-i+2) \cdot (n+1)}{i!} = \frac{(n+1)!}{i! \cdot (n-i+1)!} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 3. (binômio de Newton).** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Tem-se que

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n$$

Demonstração:

Pelo PIF (princípio de indução finita) sobre  $n$ , tem-se que

Para  $n = 1$ :  $(a + b)^1 = a^1 + \binom{1}{1} \cdot a^{1-1} \cdot b = a + b$ , ou seja,  $P(1)$  é verdadeira.

Supondo que o resultado vale para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n$$

(hipótese de indução)

Provaremos que o resultado vale para  $n+1$ . Seja  $(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot (a + b)^n$ .

Multiplicando a hipótese de indução por  $(a + b)$  obtemos

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot (a + b)^n = (a + b) \cdot \left[ \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n \right] =$$

$$\binom{n}{0} \cdot a^{n+1} + \binom{n}{1} \cdot a^n \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^2 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a \cdot b^n + \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^n + \binom{n}{n} \cdot b^{n+1} =$$

$$\binom{n}{0} \cdot a^{n+1} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] \cdot a^n \cdot b + \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \dots + \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot a^{n-k+1} \cdot b^k + \dots + \left[ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] \cdot a \cdot b^n + \binom{n}{n} \cdot b^{n+1} \quad (4.1)$$

Usando a relação de Stifel e considerando que  $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$  e  $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$  obtemos de (4.1) que

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} + \binom{n+1}{1} \cdot a^n \cdot b + \binom{n+1}{2} \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \dots + \binom{n+1}{k} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^k + \dots + \binom{n+1}{n} \cdot a \cdot b^n + \binom{n+1}{n+1} \cdot b^{n+1}$$

Portanto, a identidade também é verdadeira para  $n+1$ . Assim, concluímos que vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 6.** O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético composto por números binomiais

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ onde } n \text{ representa o número da linha e } k \text{ representa o número da coluna, com } n \geq k \geq 0.$$

$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
 \dots \\
 \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \\
 \dots
 \end{array}$$

Figura 9: Triângulo de Pascal com números binomiais

O triângulo é simétrico e infinito e os lados dos triângulos são constituídos do numeral 1. A linha seguinte possui um número a mais que a linha anterior. Esse triângulo possui várias propriedades que permitem construir a linha subsequente.

## Triângulo de Pascal

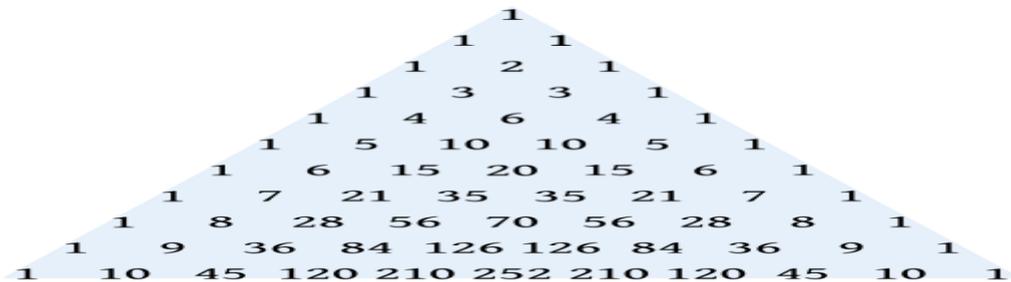


Figura 10: Triângulo de Pascal

Somando os números nas diagonais conforme o triângulo de Pascal a seguir, as somas obtidas formam a sequência de Fibonacci.

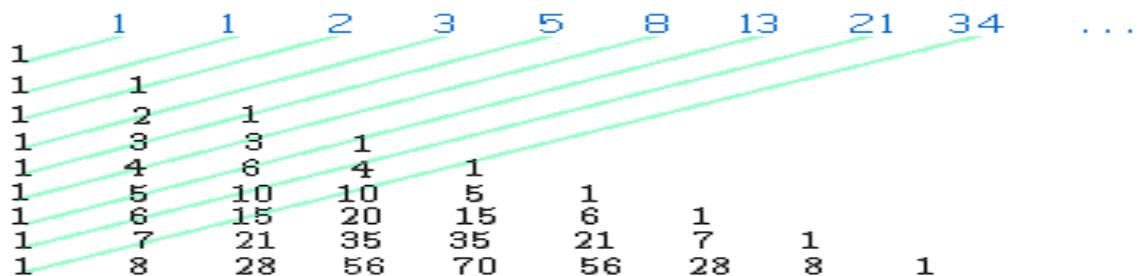


Figura 11: Diagonais no triângulo de Pascal

O matemático francês Édouard Lucas, em 1876, determinou o termo geral da sequência de Fibonacci usando soma de coeficientes binomiais. Será necessária a relação de Stifel para a provar o teorema enunciado a seguir.

**Teorema 4.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos que:

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} \text{ onde } k \text{ é o maior inteiro menor ou igual a } \frac{n}{2}, \text{ isto é,}$$

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Demonstração:

Se  $n=1$ , temos que  $F_1 = 1$ . Considere:

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k}$$

$$F_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n+1-p}{p}$$

$$F_{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n+2-s}{s}$$

onde  $k, p, s \in \mathbb{N}$ , satisfazendo:

$$\begin{cases} k \leq n-k \\ p \leq n+1-p \\ s \leq n+2-s \end{cases}, \text{ isto é, } \begin{cases} k \leq \frac{n}{2} \\ p \leq \frac{n+1}{2} \\ s \leq \frac{n+2}{2} \end{cases}$$

Existem dois casos a considerar:

1º caso:  $n$  ímpar

$$\text{Temos que } k = \frac{n-1}{2} \text{ e } p = \frac{n+1}{2} = s = \frac{n-1+2}{2} = k+1$$

Logo,

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n+1-(k+1)}{k+1} \\ + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k} =$$

$$\binom{n+1}{0} + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] + [\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}] + \dots + [\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1}]$$

Aplicando a relação de Stifel aos números binomiais dentro dos colchetes, obtemos

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n-k+1}{k+1}$$

Usando o fato que  $s = k+1$  e que  $\binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0}$ , então

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n+2-s}{s} = F_{n+2}$$

2º caso: n par

Temos que  $k = \frac{n}{2} = p$  e  $s = k+1$

Logo,

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n+1-k}{k} \\ + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k} =$$

$$\binom{n+1}{0} + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] + [\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}] + \dots + [\binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k}] + \binom{n-k}{k}$$

Aplicando novamente a Relação de Stifel aos números binomiais dentro dos colchetes, obtemos:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n-k+2}{k} + \binom{n-k}{k}$$

Usando o fato que  $s = k+1$ ,  $k = p$  e que  $\binom{n+1}{0} = \binom{n+2}{0}$ , então:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n-k+2}{k} + \binom{n-k}{k} =$$

$$\binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n+2-(s-1)}{s-1} + \binom{n-s+1}{s-1} =$$

$$\binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n+2-(s-1)}{s-1} + \binom{n+2-s}{s} = F_{n+2}$$

Observação:  $\binom{n-s+1}{s-1} = \binom{n+2-s}{s}$

## 4.2 Triângulo de Pascal em mosaico hexagonal

Nessa seção, precisaremos das equações diofantinas lineares para desenvolvermos o mosaico hexagonal no triângulo de Pascal.

### 4.2.1 Equações diofantinas lineares

A solução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números inteiros de equações do tipo

$$aX + bY = c$$

com  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Essas equações são chamadas equações diofantinas lineares em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox. 300 d.C.). Nem sempre estas equações possuem solução. Um exemplo disso é a equação

$$2X + 4Y = 5$$

não possui nenhuma solução  $x_0, y_0$  em números inteiros pois, caso contrário,  $2x_0 + 4y_0$  par e, portanto, nunca igual a 5.

Precisamos encontrar números inteiros  $x_0, y_0$  que façam com que  $aX + bY = c$  seja verdadeira. Veremos a seguir em quais condições tais equações possuem soluções e como determiná-las.

**Proposição 4.** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e  $c \in \mathbb{Z}$ . A equação  $aX + bY = c$  admite solução em números inteiros se, e somente se,  $(a, b) \mid c$ .

Demonstração:

Supondo que a  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  seja solução da equação  $aX + bY = c$ , ou seja,  $ax_0 + by_0 = c$ . Como o mdc  $(a,b)$  divide  $a$  e  $b$ , segue que ele divide  $ax_0 + by_0$ , logo divide  $c$ .

Reciprocamente, suponha que mdc  $(a,b)$  divida  $c$ , ou seja,  $c = \text{mdc}(a,b) \cdot d$ , sendo  $d \in \mathbb{Z}$ . Temos que:

$$\text{mdc}(a,b) = a \cdot n + b \cdot m, \text{ onde } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Multiplicando os lados da igualdade acima por  $d$ , obtemos:

$$c = \text{mdc}(a,b) \cdot d = a \cdot (n \cdot d) + b \cdot (m \cdot d)$$

Concluindo assim que a equação admite pelo menos uma solução.

**Observação.** A equação  $aX + bY = c$  é equivalente a equação  $a_1X + b_1Y = c_1$  onde

$$a_1 = \frac{a}{(a,b)}, \quad b_1 = \frac{b}{(a,b)} \text{ e } c_1 = \frac{c}{(a,b)}$$

Note que  $(a_1, b_1) = 1$  e, portanto, podemos focar nas equações do tipo

$$aX + bY = c, \text{ com } (a, b) = 1,$$

que sempre terá soluções.

Na proposição a seguir, será exposto uma forma de obter as soluções de uma equação diofantina a partir de uma solução particular qualquer  $x_0, y_0$ .

**Proposição 5.** Seja  $x_0, y_0$  uma solução da equação  $aX + bY = c$ , onde  $(a, b) = 1$ . Então, as soluções  $x, y \in \mathbb{Z}$  da equação são

$$x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Se  $x, y$  uma solução da equação diofantina  $aX + bY = c$ , então

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$$

Consequentemente,

$$a \cdot (x - x_0) = b \cdot (y_0 - y) \quad (4.1)$$

Como  $(a, b) = 1$ , segue que  $b \mid (x - x_0)$ . Logo,

$$x - x_0 = tb, t \in \mathbb{Z}$$

Substituindo a expressão de  $x - x_0$  em (4.1), segue que

$$y_0 - y = ta$$

o que prova que as soluções são do tipo exibido.

Por outro lado,  $x, y$ , como enunciado é solução, pois

$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta) = ax_0 + by_0 = c \quad \blacksquare$$

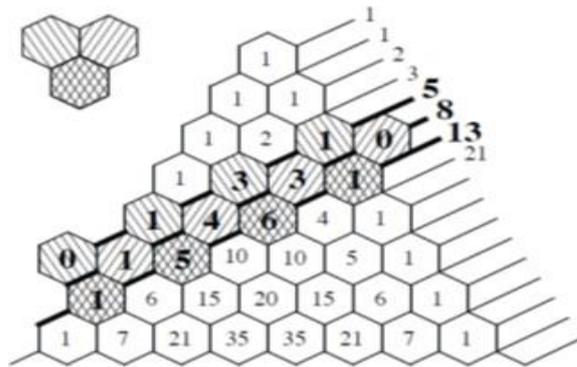
Adotaremos em alguns casos a notação  $\binom{n}{r \ s}$ , onde  $s = n - r$ . Pela simetria dos números binomiais temos que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{s} = \binom{n}{r \ s} = \frac{n!}{r!s!}$$

onde  $r + s = n \geq 0$

Relacionaremos os números da sequência de Fibonacci com soluções positivas de equações diofantinas lineares. Serão inseridas coordenadas para encontrar os elementos no triângulo de Pascal.

A figura a seguir exhibe os números binomiais  $\binom{n}{r \ s}$ , dados por seus valores, dispostos em um mosaico hexagonal, formando o triângulo de Pascal. Observa-se através da figura que as somas dos termos que ocupam os centros dos hexágonos localizados nas retas inclinadas, resultam nos números de Fibonacci.



$S_5 = \sum_{(x,y) \in N(5)} \binom{x+y}{y \ x} = \binom{5}{5 \ 0} + \binom{4}{3 \ 1} + \binom{3}{1 \ 2} = 8 = F_5$ , isto é, o sexto elemento da sequência de Fibonacci.

**Teorema 5.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que

$$F_k = S_k = \sum_{(x,y) \in N(k)} \binom{x+y}{y \ x}$$

Demonstração:

Caracterizando as soluções da equação diofantina  $X + 2Y = k$ , ou seja, os elementos de  $N(k)$ . Se  $(x_0, y_0)$  é uma solução da equação diofantina então  $(x, y) \in N(k)$  se, e somente se,  $x = x_0 - 2t \geq 0$  e  $y = y_0 + t \geq 0$ , com  $t \in \mathbb{Z}$ . Sendo  $(k, 0)$  uma solução particular, logo as soluções da equação diofantina são da forma:

$$\begin{cases} x = k - 2t \\ y = t \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como  $(x, y) \in N(k)$ , então:

$$x = k - 2t \geq 0 \text{ e } y = t \geq 0$$

Os valores de  $t$  são tais que  $0 \leq t \leq \frac{k}{2}$ . Temos dois casos a considerar:

**1º Caso:**  $k$  é par

Nesse caso  $t$  pode assumir os valores  $t = 0, 1, \dots, \frac{k}{2}$  e

$$N(k) = \left\{ (k, 0), (k-2, 1), \dots, \left(0, \frac{k}{2}\right) \right\} = \left\{ (k-2t, t) \mid 0 \leq t \leq \frac{k}{2} \right\}$$

Assim,

$$S_k = \sum_{(x,y) \in N(k)} \binom{x+y}{y \ x} = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \dots + \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} = F_k.$$

**2º Caso:**  $k$  é ímpar

Nesse caso  $t$  pode assumir os valores  $t = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}$  e

$$N(k) = \left\{ (k, 0), (k-2, 1), \dots, \left(1, \frac{k-1}{2}\right) \right\} = \left\{ (k-2t, t) \mid 0 \leq t \leq \frac{k-1}{2} \right\}$$

Logo,

$$S_k = \sum_{(x,y) \in N(k)} \binom{x+y}{y \ x} = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \dots + \binom{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2}} = F_k. \quad \blacksquare$$

### 4.3 Triplas Pitagóricas

Pelo Teorema de Pitágoras obtém-se a seguinte relação:  $a^2 + b^2 = c^2$

Ele afirma que, para um triângulo retângulo com comprimento de hipotenusa  $c$ , a soma dos quadrados dos dois lados mais curtos  $a$  e  $b$  é igual ao quadrado da hipotenusa. Uma tripla pitagórica é simplesmente três números inteiros que satisfazem essa equação, por exemplo, os números 3, 4 e 5 formam uma tripla pitagórica.

Podemos relacionar a sequência de Fibonacci com os ternos pitagóricos. Serão necessárias algumas identidades que serão apresentadas em forma de Proposição.

**Proposição 6.**  $F_{2n} = F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n-1})$  e  $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Demonstração:

Pelo Princípio de Indução Finita, temos:

Para  $n = 1$  as identidades são verdadeiras, pois  $F_2 = F_1 \cdot (F_2 + F_0)$  e  $F_3 = F_2^2 + F_1^2$

Supondo que para  $n = k$  sejam verdadeiras as identidades, ou seja,  $F_{2k} = F_k \cdot (F_{k+1} + F_{k-1})$  e  $F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$  (hipóteses de indução). Provaremos que para  $n = k+1$  também é válida as identidades. Seja

$$\begin{aligned} F_{2(k+1)} &= F_{2k+1} + F_{2k} = F_{k+1}^2 + F_k^2 + F_k \cdot (F_{k+1} + F_{k-1}) = F_{k+1} \cdot F_{k+1} + F_k \cdot F_k + \\ &F_k \cdot F_{k+1} + F_k \cdot F_{k-1} = F_{k+1} \cdot (F_{k+1} + F_k) + F_k \cdot (F_k + F_{k-1}) = F_{k+1} \cdot F_{k+2} + F_k \cdot F_{k+1} = \\ &F_{k+1} \cdot (F_{k+2} + F_k) \end{aligned}$$

Além disso tem-se que

$$\begin{aligned}
F_{2(k+1)+1} &= F_{2k+3} = F_{2k+2} + F_{2k+1} = F_{k+1} \cdot (F_{k+2} + F_k) + F_{k+1}^2 + F_k^2 = F_{k+1} \cdot (F_{k+1} + \\
&F_k + F_k) + F_{k+1}^2 + F_k^2 = F_{k+1} \cdot (F_{k+1} + 2F_k) + F_{k+1}^2 + F_k^2 = (F_{k+1}^2 + 2 \cdot F_k \cdot F_{k+1} + F_k^2) \\
&+ F_{k+1}^2 = (F_{k+1} + F_k)^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2
\end{aligned}$$

Portanto, as afirmações valem para  $n = 1$ , e assumindo que valem para  $n = k$ , elas valem para  $n = k + 1$ . ■

Agora, mostraremos uma proposição que irá relacionar sequência de Fibonacci e a hipotenusa do triângulo retângulo.

**Proposição 7.** Seja  $n \geq 2$  um número natural. Então  $F_{2n+1}$  representa a medida da hipotenusa num triângulo retângulo.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&\text{Sabendo que } F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ então } F_{2n+1}^2 = (F_{n+1}^2 + F_n^2)^2, \text{ ou seja,} \\
F_{2n+1}^2 &= (F_{n+1}^2 + F_n^2)^2 = F_{n+1}^4 + 2 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_n^2 + F_n^4 = \\
&F_{n+1}^4 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_n^2 - 2 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_n^2 + F_n^4 = \\
&4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_n^2 + (F_{n+1}^4 - 2 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_n^2 + F_n^4) = (2 \cdot F_{n+1} \cdot F_n)^2 + (F_{n+1}^2 - F_n^2)^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Através do resultado dessa proposição podemos concluir que

Para todo  $n \geq 2$

$$a = 2 \cdot F_{n+1} \cdot F_n, \quad b = F_{n+1}^2 - F_n^2 \quad \text{e} \quad c = F_{2n+1}$$

## 5 PRODUTO DE WALLIS

O produto de Wallis é representado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Mostraremos a veracidade desse limite, mas precisaremos antes expor alguns exemplos de integrais que contribuirão na prova do resultado do Produto de Wallis.

**Exemplo 1.** Demonstre que  $\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{-1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$

Prova:

Pela integração por partes tem-se que:  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ . Fazendo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx, \text{ temos:}$$

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \rightarrow du = (n-1) \cdot \operatorname{sen}^{n-2} x \cdot \cos x \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \rightarrow v = -\cos x$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \, dx &= -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x - \int -\cos x \cdot (n-1) \cdot \operatorname{sen}^{n-2} x \cdot \cos x \, dx = \\ &= -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Utilizando a relação  $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ , teremos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \, dx &= -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \\ &= -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \cdot \int (\operatorname{sen}^{n-2} x - \operatorname{sen}^n x) \, dx = \\ &= -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1) \cdot \int \operatorname{sen}^n x \, dx \end{aligned}$$

Nessa equação isolamos a integral  $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ . Então:

$$n \cdot \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx, \text{ ou seja,}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{-1}{n} \cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx \quad \blacksquare$$

**Exemplo 2.** Mostre que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$

Prova:

A partir do Exemplo 1, temos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \left[ \frac{-1}{n} \cos x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

Sendo  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , então:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

**Exemplo 3.** Calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \, dx$

Resolução:

Usando a equação do exemplo anterior para  $n=2$ , obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{2-1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2-2} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

**Exemplo 4.** Calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \, dx$

Resolução:

Segue imediatamente do Exemplo 2 que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \, dx = \frac{3-1}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{3-2} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

**Exemplo 5.** Demonstrar, para as potências ímpares do seno,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1}x \, dx = \frac{2.4.6.2n}{3.5.7.(2n+1)}, \forall n \geq 1$$

Prova:

Usando o Princípio da Indução Finita (PIF) sobre  $n$ , temos para  $n=1$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3x \, dx = \frac{2}{3}$$

(resultado do Exemplo 4)

Supondo que a equação vale para todo  $n = k \geq 1$  (hipótese de indução), ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+1}x \, dx = \frac{2.4.6.2k}{3.5.7.(2k+1)}$$

Mostraremos que para  $n = k+1$  também é verdadeiro a equação. A partir do Exemplo 2, substituindo  $n$  por  $2k+3$  e utilizando a hipótese de indução, temos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+3}x \, dx = \frac{2k+3-1}{2k+3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+3-2}x \, dx = \frac{2k+2}{2k+3} \cdot \frac{2.4.6.2k}{3.5.7.(2k+1)}$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1}x \, dx = \frac{2.4.6.2n}{3.5.7.(2n+1)}, \forall n \geq 1 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 6.** Demonstrar, para as potências pares do seno,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \geq 1$$

Prova:

Usando o Princípio da Indução Finita (PIF) sobre  $n$ , temos para  $n = 1$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

(resultado do Exemplo 3)

Supondo que a equação vale para todo  $n = k \geq 1$  (hipótese de indução), ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k} x \, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2k} \cdot \frac{\pi}{2},$$

Mostraremos que para  $n = k+1$  também é verdadeiro a equação. Fazendo  $n=2k+2$  na equação do Exemplo 2 e utilizando a hipótese de indução, temos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+2} x \, dx = \frac{2k + 2 - 1}{2k + 2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2k+2-2} x \, dx = \frac{2k + 1}{2k + 2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \geq 1$$

**Notação.** Denotaremos por  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx$ .

**Exemplo 7.** Mostre que  $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$

Demonstração:

Seja  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $0 \leq \text{sen } x \leq 1$ . Para  $n \geq 0$ , tem-se que:

$$\operatorname{sen}^{2n+2} x \leq \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2n} x$$

Ou seja,

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 8.** Mostre que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Demonstração:

Pelo Exemplo 2, temos que:

$$I_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+2} x \, dx = \frac{2n+2-1}{2n+2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+2-2} x \, dx = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n}$$

Ou seja,

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 9.** Mostre que  $\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$  e deduza que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$

Demonstração:

Pelo Exemplo 7 temos que:

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}, \text{ como } I_{2n} > 0, \text{ então:}$$

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n}} \rightarrow \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

Pelo teorema do confronto, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \quad \blacksquare$$

### Fórmula de Wallis

Mostre que

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots = \frac{\pi}{2}$$

Demonstração:

Pelo Exemplo 9, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$  e pelos Exemplos 5 e 6,

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \quad e \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}}{\frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = 1$$

Portanto,

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 10.** Utilizando a fórmula de Wallis, demonstre que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Solução:

Pela fórmula de Wallis tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Então

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right]} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(2.4.6 \dots 2n)^2}{[3.5.7 \dots (2n-1)]^2 \cdot (2n+1)}}$$

Ou seja,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)}} \right] \quad (5.1)$$

Fazendo

$$\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{2+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (5.2)$$

A partir de (5.2), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{2+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (5.3)$$

Para finalizar, usando a propriedade do produto de limites e substituindo (5.3) em (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)}} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n-1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2n+1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n-1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 5.1 Comprimento da elipse

O conjunto de pontos de um plano cujas somas das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante é chamado de elipse.

Considerando uma elipse de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , centro  $O(0,0)$  e vértices  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ ,  $B_1(0, -b)$  e  $B_2(0, b)$ , onde  $A_1A_2$  é o eixo maior de comprimento  $2a$  e  $B_1B_2$  é o eixo menor de comprimento  $2b$ , como na figura a seguir.

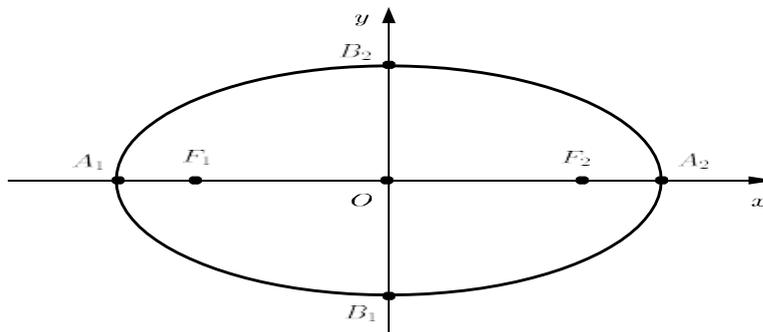


Figura 14: Elipse centrada na origem

A equação reduzida dessa elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a^2 = b^2 + c^2$$

Derivando implicitamente ambos os membros da igualdade em relação a  $x$  da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

Obtemos

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Então,

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} \quad (4.2)$$

Isolando  $y^2$  na equação (4.1), encontramos

$$y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (4.3)$$

Substituindo a equação (4.3) em (4.2), temos

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}$$

Denotaremos a excentricidade da elipse por  $e$  sendo  $e = \frac{c}{a}$ , temos

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2} \quad (4.4)$$

Sendo o comprimento do arco de uma curva plana dado pela seguinte fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

O perímetro procurado da elipse é dado pela fórmula

$$L = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + [y']^2} dx \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5), tem-se

$$L = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (4.6)$$

Faremos uma substituição trigonométrica para obtermos uma expressão mais simples. Tomando  $x = a \cdot \sin(\alpha)$  então  $dx = a \cdot \cos(\alpha) d(\alpha)$ . Para  $x = 0$  teremos  $\alpha = 0$ . Já para  $x = a$  teremos  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Substituindo essas equações em (4.6):

$$L = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \sin^2(\alpha)}{a^2 - a^2 \sin^2(\alpha)}} \cdot a \cdot \cos(\alpha) \right] d(\alpha) =$$

$$4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{\frac{a^2 \cdot (1 - e^2 \sin^2(\alpha))}{a^2 \cdot (1 - \sin^2(\alpha))}} \cdot \cos(\alpha) \right] d(\alpha) =$$

$$4a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{\frac{a^2(1-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))}{a^2 \cos^2(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) \right] d(\alpha) = 4a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))} d(\alpha)$$

Portanto,

$$L = 4a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))} d(\alpha) \quad (4.7)$$

Assim, a resolução da integral da igualdade (4.7) não é elementar. Por isso, obteremos uma aproximação para essa integral. Usaremos a série binomial, que permite expandir potências do tipo  $(1+x)^n$ , para todo  $x, n \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < 1$ .

A excentricidade da elipse é menor do que 1, ou seja,  $e < 1$ . Além disso, temos que  $-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1$ . Assim,

$$|-e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha)| = |e^2| |\operatorname{sen}^2(\alpha)| < 1$$

Seja a Série Binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n \cdot (n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (4.8)$$

Fazendo  $n = \frac{1}{2}$  e  $x = -e^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha)$ , temos:

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)}{2!} \cdot (-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))^2 + \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} \cdot (-e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \operatorname{sen}^{2n}(\alpha) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= 4a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2(\alpha))} d(\alpha) = 4a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \operatorname{sen}^{2n}(\alpha) d(\alpha) = \\ &4a. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(\alpha) d(\alpha) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{Como a } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(\alpha) d(\alpha) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9), temos

$$L = 4a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} =$$

$$2\pi a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} =$$

$$2\pi a \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right] =$$

$$2\pi a \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e}{1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{e^6}{5} - \cdots \right].$$

Para n variando de 1 a 3 temos que:

$$L \approx 2\pi a \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 \right)$$

## 6 CONCLUSÃO

Através desse trabalho, foram abordadas algumas aplicações de sequências e séries de números reais. Algumas dessas aplicações podem ser abordadas no ensino básico sem muito rigor técnico e outras são estudadas somente no nível superior.

A tão famosa sequência de Fibonacci pode ser aplicada nessa dissertação no triângulo de Pascal e nas triplas pitagóricas podendo assim contribuir como material de pesquisa para os interessados nessas aplicações.

Utilizando as séries geométricas que começam a ser estudadas pelos jovens no ensino básico no estudo das progressões geométricas, aplicamos essas séries no Conjunto de Cantor e seus equivalentes bidimensional e tridimensional, ou seja, tapete de Sierpinski e esponja de Menger. Com essas aplicações, pode-se proporcionar ao docente do ensino médio exemplos aplicáveis em suas aulas de progressões geométricas fazendo com que sua aula fique mais interessante com o uso das aplicações.

A constante de Euler, que aparece em várias situações da matemática e que aprendemos desde o ensino básico, pertence ao conjunto dos números irracionais, foram dadas duas demonstrações utilizando séries geométricas e alternadas. Assim, são duas das diversas maneiras de ser demonstrada a irracionalidade da constante de Euler ( $e$ ).

A abordagem do cálculo aproximado do perímetro da elipse também pode ser utilizado nas aulas a nível de ensino médio quando estiver sendo abordado as cônicas, especificamente a elipse, pois esse assunto praticamente não é colocado nos livros-texto de ensino básico.

Por fim, para se trabalhar com as aplicações de sequências e séries de números reais exige-se um conhecimento prévio em várias áreas da matemática como se pôde observar nesse trabalho. Diante do exposto, o leitor teve a oportunidade de expandir os conhecimentos a respeito das sequências e séries de números reais, pois muitos dos livros de análise real abordam a teoria, mas não contemplam as aplicações.

## REFERÊNCIAS

- ARITA, Andréa Cristina Prokopezky et al. **A geometria da esponja de Menger**. 2013. Disponível em: [://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v02n02a07-a-geometria-da-esponja.pdf](http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v02n02a07-a-geometria-da-esponja.pdf). Acesso em: 06 fev. 2020.
- ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. 246 p.
- AYRES JUNIOR, Dennis de Oliveira. **Pascal, Fibonacci e geometria**. 2016. 14 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2016.
- BEZ, Edson Tadeu. **Relacionando padrões entre sequências de Fibonacci, seção áurea e ternos pitagóricos**. 1997. 80 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.
- CLANCY, Tyler. **The Fibonacci numbers**. Disponível em: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/clancy.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2020.
- FERREIRA, Ronaebson de Carvalho. **Números Mórficos**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números irracionais e transcendentos**. Rio de Janeiro: Sbm, 2002.
- FREITAS, Amauri Fernandes. **Explorando o conjunto de Cantor e outros fractais o ensino básico**. 2014. 44 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.
- HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: Sbm, 2014.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013. 1 v.
- LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Sbm, 2009.
- LIMA, Elon Lages. **Análise real: funções de uma variável**. Funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2010. 1 v.
- MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentos**. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 223 p.
- MASCARENHAS, Sebastião Pontes. **A irracionalidade e transcendência dos números**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- OLIVEIRA, Hilquias Santos de. **Algumas constantes reluzentes da matemática: o número de ouro, a constante de euler-mascheronni e a dimensão de cobertura de apolônio**. o

número de ouro, a constante de Euler-Mascheronni e a dimensão de cobertura de Apolônio. 2017. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2017.

PEDROSA, Anderson Douglas Freitas. **Potências do seno: do produto de wallis ao comprimento da elipse.** Do produto de Wallis ao comprimento da elipse. 2018. 45 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro.** 2013. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

SILVA, Bruno Astrolino e. **Número de Fibonacci e número de Lucas.** 2017. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SILVA, Josiel Pereira da. **Como calcular a área e o perímetro de uma elipse?** 2014. Disponível em: [http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1\\_art1.pdf](http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1_art1.pdf). Acesso em: 14 fev. 2020.

## APÊNDICE

**Definição 7.** Uma sequência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto dos números inteiros positivos tomando valores reais. Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  corresponde um real  $x_n$ .

**Definição 8.** Uma sequência  $(x_n)$  é limitada quando todos os termos da sequência são limitados, ou seja, quando existem números reais  $a, b$  tais que  $a \leq x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 9.** Uma sequência  $(x_n)$  é dita limitada superiormente quando existe um número real  $b$  tal que  $x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, todos os termos  $x_n$  pertencem ao intervalo (ou semirreta)  $(-\infty, b]$ .

**Definição 10.** Uma sequência  $(x_n)$  é dita limitada inferiormente quando existe um número real  $b$  tal que  $x_n \geq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, todos os termos  $x_n$  pertencem ao intervalo (ou semirreta)  $[b, +\infty)$ .

**Definição 11.** Uma sequência é caracterizada como crescente quando  $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$ , então, a sequência é dita não-decrescente.

**Definição 12.** Uma sequência é caracterizada como decrescente quando  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n$ , então a sequência é dita não-crescente.

**Definição 13.** Denomina-se como sequências monótonas as seguintes sequências: crescentes, não-crescentes, decrescentes e não-decrescentes.

**Definição 14.** O limite da sequência  $(x_n)$  de número reais é o número real  $a$ , e escreve-se  $\lim x_n = a$ , se para cada número real  $\varepsilon > 0$  escolhido arbitrariamente, for possível obter um número natural  $n_0$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ , sempre que  $n > n_0$ .

Simbolicamente:

$$\lim x_n = a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

**Teorema 5.** Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Demonstração:

Considerando uma sequência não-decrescente  $(x_n)$ , portanto, limitada inferiormente pelo elemento  $x_1$ . Pela hipótese, sendo a sequência limitada, então seu conjunto de valores possui supremo  $a \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $x_n \leq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um elemento da sequência com índice  $n_0$ , tal que  $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$ . Como a sequência é não-decrescente,  $n > n_0 \rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ . Logo,  $\lim x_n = a$ .

Semelhantemente, se  $(x_n)$  é não-crescente, limitada então  $\lim x_n$  é o ínfimo do conjunto dos valores  $x_n$ .

**Proposição 8.** (Critério de confronto ou Teorema da sequência intercalada). Sejam  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  três sequências tais que  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $(a_n)$ ,  $(c_n)$  convergindo para o mesmo limite  $L$ . Então,  $(b_n)$  também converge para  $L$ .

Solução:

Seja  $\lim a_n = \lim c_n = L$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$n_1 > n_0 \rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$n_2 > n_0 \rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

Seja  $n = \max \{n_1, n_2\}$ ,  $n > n_0 \rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$ , ou seja,

$$n > n_0 \rightarrow L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon. \text{ Concluindo assim que } \lim b_n = L.$$

**Definição 15.** Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. Chamaremos de reduzidas da série  $\sum a_n$  a sequência  $(s_n)$  cujos elementos são as somas:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

A parcela  $a_n$  é chamado o  $n$ -ésimo termo ou termo geral da série. A série  $\sum a_n$  é convergente se o limite existir

$$s = \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

O limite  $s$  será chamado a soma da série. Então

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Se a sequência das reduzidas não convergem, então a série  $\sum a_n$  é divergente.

**Teorema 6.** Se  $\sum a_n$  é uma série convergente então  $\lim a_n = 0$ .

**Demonstração:**

Seja  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$ . Logo,  $a_n = s_n - s_{n-1}$ .

$$\text{Então, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0.$$

## SÉRIE GEOMÉTRICA

Seja a série geométrica de razão  $q$ :

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

A reduzida ( $S_n$ ) dessa série é a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Tendo dois casos a considerar:

1)  $|q| < 1$ :

Então  $q^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , de forma que a expressão de  $S_n$  converge para  $\frac{1}{1-q}$

que é o limite de  $S_n$  ou soma da série geométrica:

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$$

2)  $|q| \geq 1$ :

A série é divergente, pois seu termo geral não tende a zero.

## SÉRIE HARMÔNICA

Seja a série harmônica  $\sum \frac{1}{n}$ . Seu termo geral,  $\frac{1}{n}$ , tende para zero, mas a série diverge.

O primeiro matemático que provou que ela diverge foi Nicole Oresme, matemático do século XIV. Oresme agrupou a série da seguinte forma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots$$

Observando assim que cada um desses grupos é maior que  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Como a soma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$  é infinita, logo a série é divergente. ■

### SÉRIE HARMÔNICA ALTERNADA

**Teorema 7.** (Dirichlet). Seja  $\sum a_n$  uma série cujas reduzidas  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  geram uma sequência limitada. Seja uma sequência  $(b_n)$  tal que  $b_{n+1} \geq b_n \geq 0$  com  $\lim b_n = 0$ . Então, a série  $\sum a_n b_n$  converge.

Demonstração:

Sendo

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_n b_n &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) \\ &+ \dots + (a_1 + \dots + a_n)b_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n = \\ &= \sum_{i=2}^n s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + s_n b_n. \end{aligned}$$

Como as reduzidas da série  $\sum a_n$  formam uma série limitada, então existe  $c > 0$  tal que  $|s_n| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ademais,  $\sum_{n=2}^{\infty} (b_{n-1} - b_n)$  é uma série de números reais não-negativos que converge. Pelo Corolário 2.10.1, a série  $\sum s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$  é absolutamente convergente, conseqüentemente, é convergente. Como  $\lim s_n b_n = 0$ , então  $\lim (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_n b_n)$  existe e a série  $\sum a_n b_n$  é convergente.

**Corolário 1.** (Abel). Seja  $(b_n)$  uma sequência não-crescente de números positivos (não obrigatoriamente tendendo para zero) e sendo a série  $\sum a_n$  convergente, então a série  $\sum a_n b_n$  é convergente.

Demonstração:

Seja  $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ , escrevendo  $\lim b_n = k$ , ou seja, a sequência  $(b_n - k)$  é não-crescente com  $\lim (b_n - k) = 0$ . Pelo teorema 2.14, a série  $\sum a_n (b_n - k)$  converge para uma soma  $S$ . Como  $\sum a_n$  converge, então  $\sum a_n b_n = S + k \cdot \sum a_n$  também converge.

**Corolário 2.** (Leibniz). Se  $(b_n)$  é uma sequência não-crescente com  $\lim b_n = 0$  então a série  $\sum (-1)^n b_n$  converge.